

α

方程式の解と極限

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

難関大入試の頻出パターンを完全網羅

X : @s1vx_san

1. 著作権の帰属について

本資料の著作権はすべて著作者に帰属しており、日本の著作権法により保護されています。

2. 禁止されている利用行為

著作者による**事前の書面での承諾**を得ることなく、本資料の全部または一部について、以下の行為を固く禁じます。

- 複製（コピー）、転載、改変（編集・加工）
- 頒布、譲渡、貸与、または第三者への開示・提供
- 公衆送信（ウェブサイト、SNS、動画サイト等への掲載・アップロード）

3. リバースエンジニアリングの禁止

個人的な学習目的での利用を除き、いかなる目的であれ、本資料の構造、内容、技術的要素を解析、逆コンパイル、逆アセンブル、またはこれらに類する行為により、設計情報、仕様、またはソースコードを推定する**リバースエンジニアリング等の行為を一切禁止**します。

1 方程式の解と極限

例題 1.1

自然数 n に対し, 以下の 3 次方程式 (*) を考える.

$$x^3 + nx - n = 0 \quad \dots\dots (*)$$

(1) 方程式 (*) はただ一つの正の実数解 x_n を持つことを示せ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ を求めよ.

唯一の実解というとき, 即座に中間値の定理を使うことを思いつきたい. 中間値の定理とは以下である.

Theorem 1.1: 中間値の定理

区間 $[\alpha, \beta]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し, 以下の事実が成り立つ. ただし $\alpha < \beta$ とする.

$$f(\alpha)f(\beta) < 0 \implies f(x) = 0 \text{ は区間 } [\alpha, \beta] \text{ に少なくとも一つの実数解を持つ.}$$

極値があろうと, 単調であろうと, 連続な関数が区間の端点で符号が異なるならば $f = 0$ が少なくとも一つの解を持つことは明らかであろう.

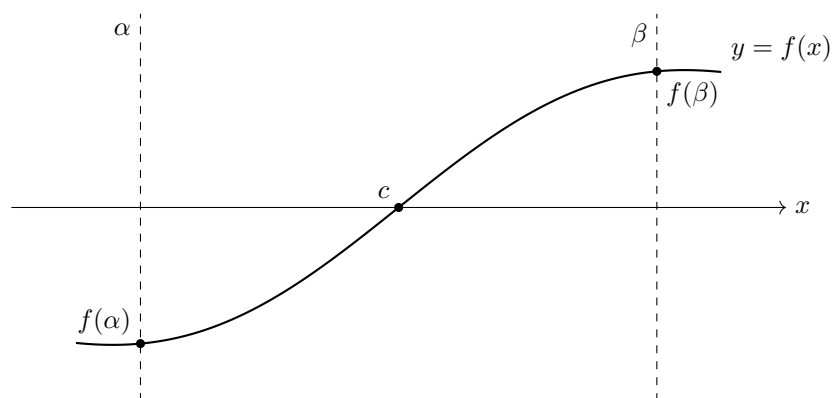


図 1: 端点が異符号で連続ならば解を持つ例

また、少なくとも1つとあるのは、関数 f が区間 $[\alpha, \beta]$ で極値を持つ場合、 $f = 0$ なる値は1つとは限らないからである。

また、連続という条件が抜けると中間値の定理は成り立たない。例えば $f(x) = \begin{cases} -1 & (\alpha \leq x < \gamma) \\ 1 & (\gamma \leq x \leq \beta) \end{cases}$ が反例である。

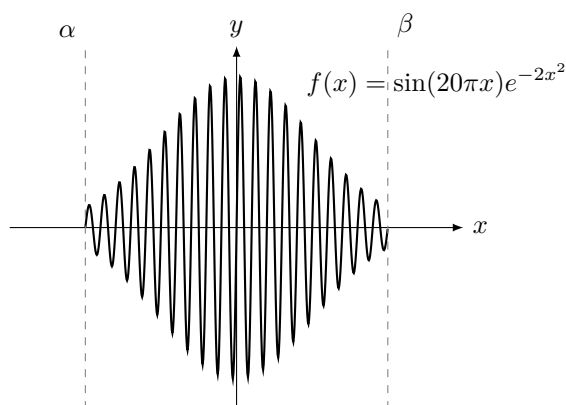


図 2: 区間 $[\alpha, \beta]$ で多くの極値を持つ関数

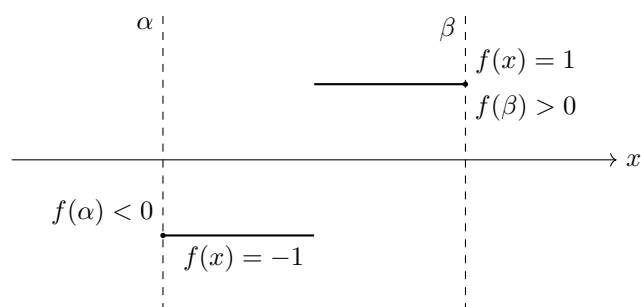


図 3: 端点が異符号でも不連続な例

今回は正の実解を唯一持つことを示すべきだから、グラフの概形が必要であり、そのために微分する。 $f'(x) = 3x^2 + n > 0$ であるから、 f は単調増加であることが分かる。

ここで、 $f(0) = -n < 0$ であるから、関数 f は高さ $-n$ (< 0) から出発し、増加し続ける ($\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$) から、唯一の実解を持つ。特に $f(1) = 1$ (> 0) であるから、 $f = 0$ の唯一の正の実解 $x = x_n$ は $0 < x_n < 1$ を満たしていることもわかる。

次に $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ や $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ を考える。この際に解の定義に従い等式を得よう。

Definition 1.1: 解の定義

とある複素数 α が方程式 $f(x) = 0$ の解であるとは、 $f(\alpha) = 0$ が成り立つことである。すなわち、

$$\text{複素数 } \alpha \text{ が方程式 } f(x) = 0 \text{ の解} \stackrel{\text{def}}{\iff} f(\alpha) = 0$$

今回は $x = x_n$ が方程式 $x^3 + nx - n = 0$ の唯一の正の実解だから、

$$x_n^3 + nx_n - n = 0 \quad \dots\dots (A)$$

が成り立つ。ここで、今まで通りであれば、

$$|x_{n+1} - 1| = r|x_n - 1|$$

なる r ($0 < r < 1$) を見つけるのであるが、**数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式を得ることは容易ではない**のでこの方法をとることは諦める。いま、(A) を以下のように変形する。

$$x_n = 1 - \frac{x_n^3}{n}$$

先に見たように、数列 $\{x_n\}$ の各項は $0 < x_n < 1$ を満たす。故に $-\frac{x_n^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 。つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を得る。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ に関しても同様に、(A) を以下のように変形する。

$$n(x_n - 1) = -x_n^3$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ より、この等式において $n \rightarrow \infty$ とすれば $-x_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ 。故に $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = -1$ を得る。

《解答 1.1》

(1) 与えられた方程式の左辺を $f(x)$ と置くと, $f'(x) = 3x^2 + n > 0$ であるから, $f(x)$ は単調増加である. ここで, $f(0) = -n < 0$ であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であるから, 正の実解を唯一持つ. 特に $f(1) = 1 (> 0)$ であるから, $f(x) = 0$ の唯一の正の実解 $x = x_n$ は $0 < x_n < 1$ を満たしている.

(2) x_n は方程式 $x^3 + nx - n = 0$ の解より,

$$x_n^3 + nx_n - n = 0$$

が成り立つ. これにより, $x_n = 1 - \frac{x_n^3}{n}$ を得るから, $0 < x_n < 1$ であることと合わせて $-\frac{x_n^3}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ が成り立つ. つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1) = 0$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を得る. また,

$$n(x_n - 1) = -x_n^3 \quad \dots\dots(P)$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ であることから, $-x_n^3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$. ゆえに (P) において $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = -1$ を得る.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = -1 \quad \dots\dots(\text{答})$$

▶ 別 解

$x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ を示したとする. $x_n - 1$ という形 (一般には $x_n - \alpha$ という形) の絡む極限というと平均値の定理を思いつきたい.

いま, $f(x) = x^3 + nx - n$ に対し, $f'(x) = 3x^2 + n$. 区間 $x_n \leq x \leq 1$ で $f(x)$ は微分可能であるから, この区間で平均値の定理を用いると, 解の定義から $f(x_n) = 0$ に注意して

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(c_n)$$

$$\therefore \frac{-1}{x_n - 1} = 3c_n^2 + n$$

なる c_n が $x_n < c_n < 1$ に存在する. これを $x_n - 1$ について解いて n をかければ,

$$n(x_n - 1) = -\frac{n}{3c_n^2 + n}$$

$$\therefore n(x_n - 1) = -\frac{1}{1 + \frac{3c_n^2}{n}} \quad \dots\dots(*)$$

である. いま, $x_n < c_n < 1$ より $\frac{3x_n^2}{n} < \frac{3c_n^2}{n} < \frac{3}{n}$ であって $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ なので $\frac{3x_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ であり, 挟み撃ちの原理から $\frac{3c_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. ゆえに (*) で $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = -1$ を得る.

補足 挟み撃ちの原理で解く

例題 1.1 の $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を挟み撃ちにより導くことを考えていこう. 取り敢えず $0 < x_n < 1$ により, n に関する式で x_n を下から評価できればよい. $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 - n + \frac{1}{n^3} & (\because n \geq 2) \\ &\leq 1 - 2 + \frac{1}{8} \\ &= -\frac{7}{8} \\ &< 0 \end{aligned}$$

より, $f(x)$ が単調増加であることから,

$$\frac{1}{n} < x_n < 1 \quad \dots\dots (\clubsuit)$$

が成り立つが, $n \rightarrow \infty$ としても最左辺が 0 に近づいてしまいうまくいかないから試験的に $x = 1 - \frac{1}{n}$ を代入してみる. すると,

$$\begin{aligned} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - n \\ &= 1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} + n - 1 - n \\ &= -\frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{-3n^2 + 3n - 1}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^3} \left\{ -3\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} \\ &< 0 \end{aligned}$$

であるから, $1 - \frac{1}{n} < x_n < 1$ が成り立つことが分かる. これにより, 挟み撃ちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

を得る.

$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ に関しては不等式評価というのはあまりうまい策ではない. これは極限值が不明だからである. 例えば, 極限值は 0 だと踏んで不等式評価した結果, 極限值が 0 でなければ評価に充てた時間は無駄になる. 上のように挟み撃ちの原理により解くというのも重要ではあるが, 基本的には解答 1.1 のように方程式の解の定義に従い等式のまま極限を考えるのが良い.

1 次の問いに答えよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ である. また, e は自然対数の底であり, $e < 3$ は既知としてよい.

(1) 自然数 n に対して, 方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ.

(2) (1) の実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき, $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ. また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ.

九州大 2006

2 n を正の整数とする. 3 次方程式

$$x^3 + 3nx^2 - (3n + 2) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

について次の問いに答えよ.

(1) すべての正の整数 n について, 3 次方程式 (*) は正の解をただ 1 つしかもたないことを証明せよ.

(2) 各正の整数 n に対して, 3 次方程式 (*) の正の解を a_n とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

弘前大 2008

3 n を自然数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) x の 3 次方程式 $x^3 + \frac{1}{n}x - 8 = 0$ の実数解はただ一つであることを示せ.

(2) a_n を (1) の実数解とする.

(i) 不等式 $0 < a_n < 2$, $a_n < a_{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(ii) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

兵庫県立大 2009

4 n を正の整数とする. x の関数 $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n - 3)x + 1$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする. $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ.

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ.

千葉大 2024

5 n を自然数とし,

$$f_n(x) = x^{n+1} + nx^n - 1$$

とおく. 次の問いに答えよ. 必要なら, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい.

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, $0 < x < 1$ の範囲にただ 1 つの解を持つことを示せ.

(2) $n \geq 2$ のとき, $f_n(n^{-\frac{2}{n}})$ の正負を判定せよ.

(3) (1) の解を x_n とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

埼玉大 2025

6 n を自然数とする.

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく. $3 < \pi < 4$ であることを用いて, 以下の問いに答えよ.

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $f''(x) < 0$ であることを示せ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ.

(3) (2) における解を x_n とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示し, $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ を求めよ.

神戸大 2017

7 $2n$ を自然数とする. $f_n(x) = x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 + e^{-x}$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $n + \frac{1}{n} - 2 \leq x \leq n + \frac{1}{n}$ の範囲において, $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ.

(2) $x \geq n + \frac{1}{n}$ の範囲において, $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ.

(3) a_n を (1) の解, b_n を (2) の解とする. さらに, 2 次方程式 $x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 = 0$ の 2 つの解を p_n, q_n ($p_n \leq q_n$) とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$ を示せ.

(4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$ を求めよ.

北海道大 2000 後期

8 自然対数の底 e と自然数 n に対し, $x > 0$ において関数 $f_n(x)$ を以下で定める.

$$f_n(x) = n \log x - e^{-x} \sin x$$

以下の問いに答えよ. なお, 必要であれば $\log 2 = 0.693$ とし, $\log 3 = 1.098$, $\pi > 3$, $e > 2.7$ を用いてもよい.

(1) $x > 0$ において $\frac{n}{x} - \sqrt{2}e^{-x} > 0$ が成り立つことを示せ.

(2) 全ての自然数 n に対し, 方程式 $f_n(x) = 0$ は区間 $(0, \infty)$ に唯一の実数解を持ち, しかもその解 $x = a_n$ は $1 < a_n < \frac{\pi}{2}$ を満たしていることを示せ.

(3) (2) で得た $f_n(x) = 0$ の解 $x = a_n$ について, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ を求めよ.

出典不明

解答・解説

第 1 章

方程式の解と極限

01

I. 次の問いに答えよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ である. また, e は自然対数の底であり, $e < 3$ は認めてよい.

(1) 自然数 n に対して, 方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ.

(2) (1) の実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき, $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}, ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ. また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ.

解答

(1) 方程式 $3n \log x = x$ が $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解を持つことを示せばよい.

いま, $f(x) = 3n \log x - x$ とおくと, $f'(x) = \frac{3n}{x} - 1$. $f'(x) = 0$ を解くと $x = 3n$ である. ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(3n \frac{\log x}{x} - 1 \right) \\ &= \infty \cdot (3n \cdot 0 - 1) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

であって, $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ であることから, 以下の増減表を得る.

x	(0)	$\cdots$	$3n$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		+	0	-	-
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	$3n(\log 3n - 1)$	$\searrow$	$(-\infty)$

ここで, $3n(\log 3n - 1) \geq 3n(\log 3 - 1) > 3n(\log e - 1) = 0$ より, $f(x) = 0$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解を持つ. ■

(2) $f(1) = -1$,

$$\begin{aligned} f(e^{\frac{1}{n}}) &= 3 - e^{\frac{1}{n}} \\ &\geq 3 - e & (\because n \geq 1) \\ &> 0 & (\because \text{与えられた条件}) \end{aligned}$$

より中間値の定理により $1 < x < e^{\frac{1}{n}}$ に実数解を持つ. この実数解が α_n であるから, $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$. 同様に,

$$\begin{aligned} f(ne) &= 3n \log(ne) - ne \\ &= n(3 \log(ne) - e) \\ &\geq n(3 \log(e) - e) & (\because n \geq 1) \\ &= n(3 - e) \\ &> 0 & (\because \text{与えられた条件}) \end{aligned}$$

であるから, $ne < \beta_n$ が成り立つ. また, $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ より, 挟み撃ちの原理により $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ を得る.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1 \cdots \cdots (\text{答})$$

II. n を正の整数とする. 3 次方程式

$$x^3 + 3nx^2 - (3n + 2) = 0 \quad \dots\dots\dots (*)$$

について次の問いに答えよ.

(1) すべての正の整数 n について, 3 次方程式 $(*)$ は正の解をただ 1 つしかもたないことを証明せよ.

(2) 各正の整数 n に対して, 3 次方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

解答

(1) $f(x) = x^3 + 3nx^2 - (3n + 2)$ と置くと,

$$f'(x) = 3x^2 + 6nx > 0 \quad (\because x > 0)$$

であるから, $f(x)$ は単調増加. ここで, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 9n + 6 > 0$ であるから, 中間値の定理により $f(x) = 0$ は区間 $[1, 2]$ に唯一の正の実解を持つ. ■

(2) $x = a_n$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であるから

$$a_n^3 + 3na_n^2 - (3n + 2) = 0 \quad \dots\dots\dots (A)$$

が成り立つ. $3na_n^2$ について両辺 $3n$ で割って平方根をとれば, $a_n > 0$ により,

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{\frac{3n+2}{3n} - \frac{a_n^3}{3n}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{2}{3n} - \frac{a_n^3}{3n}} \quad \dots\dots\dots (B) \end{aligned}$$

であり, $1 < a_n < 2$ であるから $\frac{1}{3n} < \frac{a_n^3}{3n} < \frac{8}{3n}$ であり, 挟み撃ちの原理から $\frac{a_n^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ゆえに (B) で $n \rightarrow \infty$ とすれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \dots\dots\dots (\text{答})$$

▶ 別 解

$f(1) = -1 < 0$ であり, $f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 5 + \frac{6}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3} > 0$ であるから, $1 < a_n < 1 + \frac{1}{n}$ が成り立つ. ここで, $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ であるから, 挟み撃ちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ を得る.

- (1) 唯一の正の実解といわれているから, $f(a), f(b)$ の符号が互いに異なるような a, b を見つけばよい. $f(1) < 0, f(2) > 0$ であるから, 後は単調 (もしくは極値があっても解に影響はない) なことを言えばよい.
- (2) 数列の極限というと $|a_{n+1} - \alpha| = r|a_n - \alpha|$ なる r ($0 < r < 1$) を見つけるというのがよくあるパターンであるが, 今回は漸化式を得ることが容易ではないからこれは諦める (あれを使うのは $a_{n+1} = f(a_n)$ という漸化式があるときのみ). ここで以下の真の命題を認めよう.

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = p \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[k]{p} \right]$$

これだけ見ると複雑でよくわからないが, 例えば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3 = 5 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt[3]{5}$$

などと, a_n の極限値は分からずとも, a_n を何乗かしたものの極限値が分かればよいのである. 解答中の (A) 式を a_n^2 で割っても $a_n = \frac{3n+2}{a_n^2} - 3n$ となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が分からないから $n \rightarrow \infty$ としても無意味 ($\infty - \infty$ の不定形) である. 0 に行く項が欲しいので (A) の $3na_n^2$ の a_n に解くことで (B) になり, $1 < a_n < 2$ より 1 以外の項は 0 に収束する.

..... 類題

- 1 整数 k (≥ 2) を一つ固定する. 正整数 n に対して, k 次の方程式

$$(E)_n : x^k + nx^{k-1} - (n+2) = 0$$

を与える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) すべての正整数 n に対して, 方程式 $(E)_n$ は正の解をただ一つしか持たないことを証明せよ.
- (2) (1) における正の解を a_n とおく. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束することを示し, その極限値を求めよ.

奈良県立医科大 2023 後期

- 2 n を自然数とする. 3 次方程式

$$2x^3 + 3nx^2 - 3(n+1) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

について次の問いに答えよ.

- (1) 自然数 n の値に関わらず方程式 (*) は正の解をただ 1 つだけもつことを証明せよ.
- (2) 方程式 (*) の正の解を a_n とする. このとき, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

III. n を自然数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) x の 3 次方程式 $x^3 + \frac{1}{n}x - 8 = 0$ の実数解はただ一つであることを示せ.

(2) a_n を (1) の実数解とする.

(i) 不等式 $0 < a_n < 2$, $a_n < a_{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(ii) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

解答

(1) $f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n}x - 8 = 0$ とおくと, $f'_n(x) = 3x^2 + \frac{1}{n} > 0$ であり, $f_n(x)$ は単調増加. ここで, $f_n(0) = -8$, $f_n(2) = \frac{2}{n} > 0$ であることから, 中間値の定理により区間 $[0, 2]$ に少なくとも一つの実数解を持つ. $f_n(x)$ は $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ を満たす単調増加であることから題意は示された. ■

(2) - (i)

(1) により $0 < a_n < 2$ であることは示されている. ゆえに $a_n < a_{n+1}$ を示す. a_{n+1} は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることから, $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ が成り立つ. つまり,

$$\begin{cases} a_{n+1}^3 + \frac{a_{n+1}}{n+1} - 8 = 0 \\ a_n^3 + \frac{a_n}{n} - 8 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ. 辺々引いて, $a_{n+1}^3 - a_n^3 + \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 0$ を得る. ここで,

$$\begin{aligned} a_{n+1}^3 - a_n^3 + \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} &= 0 \\ a_{n+1}^3 - a_n^3 + \frac{a_{n+1}}{n} - \frac{a_n}{n} &> 0 & \left(\because \frac{a_{n+1}}{n} > \frac{a_{n+1}}{n+1} \right) \\ (a_{n+1} - a_n) \left(a_{n+1}^2 + a_{n+1}a_n + a_n^2 + \frac{1}{n} \right) &> 0 \\ \therefore a_{n+1} - a_n &> 0 & (\because a_n > 0) \end{aligned}$$

これにより $a_{n+1} - a_n > 0$ であり題意は示された. ■

(2) - (ii)

a_n は $f_n(x) = 0$ の解より, $a_n^3 + \frac{1}{n}a_n - 8 = 0$. つまり,

$$a_n^3 = 8 - \frac{a_n}{n} \quad \dots\dots (*)$$

ここで, $0 < a_n < 2$ より, $0 < \frac{a_n}{n} < \frac{2}{n}$ であって $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ なので挟み撃ちの原理により $\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. よって (*) で $n \rightarrow \infty$ とすれば $a_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 8$ を得る. $a_n > 0$ より $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

IV. n を正の整数とする. x の関数 $f(x) = x^3 - 2nx^2 + (2n-3)x + 1$ について, 以下の問いに答えよ.

(1) α を $f(x) = 0$ の 1 つの解とする. $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)$ の値を求めよ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつことを示せ.

(3) 方程式 $f(x) = 0$ の解で 2 番目に大きいものを β_n とする. 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) &= \frac{1}{(1-\alpha)^3} \left\{ 1 - 2n(1-\alpha) + (2n-3)(1-\alpha)^2 + (1-\alpha)^3 \right\} \\
 &= -\frac{1}{(1-\alpha)^3} \left\{ \alpha^3 - 2n\alpha^2 + (2n-3)\alpha + 1 \right\} \\
 &\qquad\qquad\qquad f(\alpha) \\
 &= 0 \qquad\qquad\qquad (\because f(\alpha) = 0)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 0} \dots\dots(\text{答})$$

(2) $f(x)$ は連続であることに注意すると, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 1$ より $f(x) = 0$ は負の解を少なくとも 1 つ持つ. また, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$ であるから, 区間 $(0, 1)$ に少なくとも 1 つの解を持つ. 更に, $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ により, $x > 1$ の区間において少なくとも 1 つの解を持つ.

ここで, $f(x)$ は 3 次多項式であるから, 高々 3 つの解しか持たないことに注意すると, $x < 0$, $0 < x < 1$, $x > 1$ の各区間に一つずつ解を持つことが分かる. よって題意は示された. ■

$$\begin{aligned}
 (3) \quad f\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= \frac{n^3 - 2n^2 + 3n - 1}{n^3} \text{ である. ここで分子に着目すると,} \\
 (\text{分子}) &= n^3 - 2n^2 + 3n - 1 \\
 &= n(n-1)^2 + 2n - 1 \\
 &> 0 \qquad\qquad\qquad (\because n \geq 1)
 \end{aligned}$$

であることから, $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0$. これにより, $0 < 1 - \frac{1}{n} < \beta_n < 1$ ($n \geq 2$).

$$\therefore -\frac{1}{n} < \beta_n - 1 < 0.$$

ここで, $-\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であることから, 挟み撃ちの原理により $\beta_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\therefore \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1} \dots\dots(\text{答})$$

- (1) 方程式の解が循環するという問題は典型であり、メタ思考的に $x = \frac{1}{1-\alpha}$ も $f(x) = 0$ の解であると予想がつくので $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 0$ であろう。この予想を下に $f(\alpha) (= 0)$ が表れるように変形する (たとえば $f\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = 3$ であると、これが $f(x) = 0$ と主張できず、何も得られる情報がない)。
- (2) これは方針が立ちにくい問題で、通常なら $f'(x) = 0$ の解を γ, θ として $f(\gamma)f(\theta) < 0$ を示すのだが、計算量も多く難しい。(1) も誘導になっていないので中間値の定理を 3 回使い、 n 次多項式は高々 n 個の解しか持たないことを用いる。
- (3) まず β_n の極限値の予想から入る。 $0 < \beta_n < 1$ であるから極限値は 0 か 1 であろう。ここで、 $f(2n) = 4n^2 - 6n + 1 = 4\left(n - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}$ は $n \geq 2$ において正である。故に $f(x) = 0$ の最大の解は区間 $1 < x < 2n$ にあることもわかる。ここで n を増加させていくと、 $f(x)$ のグラフは $x > 0$ において右に引き伸ばされていくことが分かり、それに際し $f(x) = 0$ の解も右に移動していくので $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ と予想がつく。 $0 < \beta_n < 1$ より $-1 < \beta_n - 1 < 0$ であるから β_n を下から、0 に行くような数列で抑えればよく、例題同様、 $x = 1 - \frac{1}{n}$ とすると結果的にはうまくいく。

..... 類題

3 $n = 1, 2, \dots$ に対して、 x の整式 $P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n + 12)x - 8 = 0$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式 $P_n(x) = 0$ の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。
- (2) t が $P_n(x) = 0$ の解であるとき、 $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。
- (3) $P_n(x) = 0$ の正の実数解を α_n とするとき、 $P_n(x) = 0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

V. n を自然数とし,

$$f_n(x) = x^{n+1} + nx^n - 1$$

とおく. 次の問いに答えよ. 必要なら, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい.

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, $0 < x < 1$ の範囲にただ 1 つの解を持つことを示せ.

(2) $n \geq 2$ のとき, $f_n(n^{-\frac{2}{n}})$ の正負を判定せよ.

(3) (1) の解を x_n とおく. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ.

解答

$$(1) f'_n(x) = (n+1)x^n + n^2x^{n-1} = x^{n-1}\{(n+1)x + n^2\} > 0 \quad (\because 0 < x < 1)$$

よって区間 $0 < x < 1$ で $f_n(x)$ は単調に増加する. また, $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n > 0$ であることから中間値の定理により, 区間 $(0, 1)$ に唯一の実解を持つ.

■

$$(2) f_n(n^{-\frac{2}{n}}) = \{n^{-\frac{2}{n}}\}^{n+1} + n\{n^{-\frac{2}{n}}\}^n - 1$$

$$= \frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n} - 1$$

$$\leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} - 1$$

$$\left(\because \frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} \leq \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

$$(\because n \geq 2)$$

$$= -\frac{1}{4}$$

$$< 0$$

$$\therefore \underline{f_n(n^{-\frac{2}{n}}) < 0} \dots\dots(\text{答})$$

(3) (2) により $f_n(n^{-\frac{2}{n}}) < 0$ であって, $n^{-\frac{2}{n}} > 0$ かつ $0 < x_n < 1$ であることから,

$$n^{-\frac{2}{n}} < x_n < 1 \dots\dots(*)$$

を得る. ここで $p_n = n^{-\frac{2}{n}}$ と置くと, $\log p_n = -2 \cdot \frac{\log n}{n}$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \log p_n = 0$. これより $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$. この事実と不等式 $(*)$ により, 挟み撃ちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

$$\therefore \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1} \dots\dots(\text{答})$$

- (1) もうすでに典型問題になった実解を持つことの証明である. この手のものは「どうせ単調でしょ」の精神が大事.
- (2) $f_n(n^{-\frac{2}{n}})$ の正負を推測したうえで考えた方がよい. まず重要なのは「 $\frac{1}{n}$ はかなり小さい」という認識によるものである. $f_n(n^{-\frac{2}{n}}) = \frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n} - 1$ であることから, 非常に大きい n をとれば $\frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n}$ はほぼ無視できる.

実際, $n = 7000$ などとしてみると,

$$\frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7000^{2(1+\frac{1}{7000})}} + \frac{1}{7000}$$

であり, $1 + \frac{1}{7000} \doteq 1$ ($\frac{1}{7000}$ なんてほぼゴミ) なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n} &= \frac{1}{7000^{2(1+\frac{1}{7000})}} + \frac{1}{7000} \\ &\doteq \frac{1}{7000^2} + \frac{1}{7000} \\ &\doteq 0 \end{aligned}$$

すると

$$\begin{aligned} f_n(n^{-\frac{2}{n}}) &\doteq 0 - 1 \\ &\doteq -1 \end{aligned}$$

である. つまり, 十分大きい n においては負になることが分かり, 今回は $n \geq 2$ において正負の判別がつく (というのが問題の趣旨) ことから, $f_n(n^{-\frac{2}{n}})$ は負であると推測できる. $\frac{1}{n^{2(1+\frac{1}{n})}} + \frac{1}{n} - 1$ が直接的に負であるというのは難しいから, 「 $f_n(n^{-\frac{2}{n}})$ より大きいものを持ってきたのに負でした」といえればよい.

- (3) (2) により不等式 $n^{-\frac{2}{n}} < x_n < 1$ を得るから, どうせ $n^{-\frac{2}{n}}$ の極限値は 1 なのだと推測できるが, そのまま極限を考えると ∞^0 の不定形であって, 極限が分からない. ここで問題文にある「必要なら, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ を用いてよい」という話を使ってないので, $n^{-\frac{2}{n}}$ の極限ではなく, $\log$ をとった $\log n^{-\frac{2}{n}}$ の極限を先に考えればよいと分かる. 一般に以下の事実が成り立つ. ($\log x$ の連続性から従う)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \alpha \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^\alpha$$

また, $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ であることは有名事実であるから覚えておきたい.

..... 類題

1 n を正の整数とする. 以下の x の方程式 (*) について, 以下の問いに答えよ.

$$x^5 + n^2 x^3 - n^2 - 3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

- (1) すべての n に対し, (*) は正の解をただ一つだけもつことを示せ.
- (2) (*) がもつただ一つの正の解を x_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$ を求めよ.

VI. n を自然数とし、以下のように $f(x)$ を定める. $3 < \pi < 4$ であることを用いて、以下の間に答えよ.

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

(1) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき、 $f''(x) < 0$ であることを示せ.

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ.

(3) (2) における解を x_n とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n$ を求めよ.

解答

(1) $f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2$, $f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$ より,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x \\ &< 0 - 2 \cdot 1 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2}\right) & (\because -\sin x < 0 \text{ かつ } n \geq 1 \text{ かつ } x < \frac{\pi}{2}) \\ &= -2 + \frac{\pi}{3} \\ &< -2 + \frac{4}{3} & (\because \pi < 4) \\ &= -\frac{2}{3} < 0 \end{aligned}$$

であるから $f''(x) < 0$ が従い、題意は示された. ■

(2) $f''(x) < 0$ より、 $f'(x)$ は単調減少. また、 $f'(x)$ は連続であって、 $f'(0) = 1$ を満たし、かつ

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -n\pi + \frac{\pi^2}{12} \\ &= -\frac{\pi}{12}(12n - \pi) < 0 \end{aligned}$$

より、中間値の定理により、 $f'(x)$ は区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ に実解を持つ. これを $x = \alpha$ とすれば、以下の増減表を得る.

x	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{n\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{72} < 1 - \frac{9}{4} + \frac{64}{72} = -\frac{13}{36} < 0 \text{ より、題意は示された.} \quad \blacksquare$$

(3) x_n は $\sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3 = 0$ の解であるから、

$$\sin x_n - nx_n^2 + \frac{1}{9}x_n^3 = 0$$

が成り立つ. よって、 $x_n^2 = \frac{\sin x_n}{n} + \frac{x_n^3}{9n}$. これと $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$ により、 $0 < \sin x_n < 1$ から、 $0 < \frac{\sin x_n}{n} < \frac{1}{n}$ であり、 $0 < \frac{x_n^3}{9n} < \frac{\pi^3}{72n}$ なので挟み撃ちの原理により $\frac{\sin x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\frac{x_n^3}{9n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

また、 $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ より $nx_n = \frac{\sin x_n}{x_n} + \frac{1}{9}x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{9} \cdot 0 = 1$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

▶ 別 解

- (3) $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -1 + \sin \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{9n\sqrt{n}}$ であり, $\sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{9n\sqrt{n}}$ は 0 に収束する正の減少列なので, 十分大きな N に対し, $n \geq N$ ならば $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0$ とできるような自然数 N が取れる (収束の定義). ゆえに $n \geq N$ ならば

$$0 < x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

であり $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ であるから, 挟み撃ちの原理により, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ を得る.

Point

- (1) $f''(x) < 0$ をいうには, 『 $f''(x)$ より大きいものを持ってきたのにそれでも 0 より小さい』というのはもうお決まりのパターンである. 今回, 不等式評価すべき対象が $\sin x, nx$ などと多いが, いずれも不等式が与えられているので難しく考えずに進めればよい.
- (2) 今回は今までとは違い, $f(x)$ が単調でない点が異質である. $f''(x) < 0$ より $f'(x)$ は区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で単調減少である. これにより $f(x)$ は極値を持つことが分かる. しかし, その上で解が 1 つということはその極値が解に影響を与えないのだと推測できる.
- (3) x_n の極限は $x_n = \frac{\sin x_n}{nx_n} + \frac{x_n^2}{9n}$ や $x_n = \frac{9n}{x_n} - \frac{9 \sin x_n}{x_n^2}$ などと $x_n = \dots$ としてもうまくいかない. なので今まで通り, 一旦 x_n^2 の極限を求めにいく.

類題

- 1 自然数 n に対して, 関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める. ただし, e は自然対数の底である.

- (1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は, ただ 1 つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1) における実数解を a_n とおくと, 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ.

VII. n を自然数とする. $f_n(x) = x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 + e^{-x}$ に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) $n + \frac{1}{n} - 2 \leq x \leq n + \frac{1}{n}$ の範囲において, $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ.
- (2) $x \geq n + \frac{1}{n}$ の範囲において, $f_n(x) = 0$ の解がただ 1 つ存在することを示せ.
- (3) a_n を (1) の解, b_n を (2) の解とする. さらに, 2 次方程式 $x^2 - 2\left(n + \frac{1}{n}\right)x + n^2 - 1 = 0$ の 2 つの解を p_n, q_n ($p_n \leq q_n$) とするとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$ を示せ.
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$ を求めよ.

解答

(1) $f'_n(x) = 2x - 2\left(n + n^{-1}\right) - e^{-x}$, $f''_n(x) = 2 + e^{-x} > 0$ であるから, $f'_n(x)$ は単調増加. ここで,

$$\begin{aligned} f'_n(n + n^{-1} - 2) &= 2(n + n^{-1} - 2) - 2(n + n^{-1}) - e^{2-n-n^{-1}} \\ &= 2(n + n^{-1}) - 4 - 2(n + n^{-1}) - e^{2-n-n^{-1}} \\ &= -4 - e^{2-n-n^{-1}} < 0 \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} f'_n(n + n^{-1}) &= 2(n + n^{-1}) - 2(n + n^{-1}) - e^{-n-n^{-1}} \\ &= -e^{-n-n^{-1}} < 0 \end{aligned}$$

であるから, 区間 $n + n^{-1} - 2 \leq x \leq n + n^{-1}$ において $f'_n(x)$ は特に負の単調増加関数である. いま, 区間 $n + n^{-1} - 2 \leq x \leq n + n^{-1}$ で $f'_n(x) < 0$ であることから, この区間において $f_n(x)$ は単調減少であって,

$$\begin{aligned} f_n(n + n^{-1} - 2) &= (n + n^{-1} - 2)^2 - 2(n + n^{-1})(n + n^{-1} - 2) + n^2 - 1 + e^{2-n-n^{-1}} \\ &= (n + n^{-1})^2 - 4(n + n^{-1}) + 4 - 2(n + n^{-1})^2 + 4(n + n^{-1}) + n^2 - 1 + e^{2-n-n^{-1}} \\ &= -(n + n^{-1})^2 + n^2 + 3 + e^{2-n-n^{-1}} \\ &= 1 - n^{-2} + e^{2-n-n^{-1}} \\ &\geq e^{2-n-n^{-1}} > 0 \end{aligned} \quad (\because n \geq 1)$$

および

$$\begin{aligned} f(n + n^{-1}) &= (n + n^{-1})^2 - 2(n + n^{-1})^2 + n^2 - 1 + e^{-n-n^{-1}} \\ &= -(n + n^{-1})^2 + n^2 - 1 + e^{-n-n^{-1}} \\ &= -3 - n^{-2} + e^{-n-n^{-1}} \\ &\leq -3 + e^{-(n+\frac{1}{n})} \\ &\leq -3 + e^{-2} < 0 \end{aligned} \quad (\because n + n^{-1} \geq 2)$$

よって, 中間値の定理と合わせて $f_n(x) = 0$ は区間 $n + n^{-1} - 2 \leq x \leq n + n^{-1}$ に唯一の実解を持つ. ■

(2) $f'_n(x)$ は単調増加であって、区間 $n + n^{-1} - 2 \leq x \leq n + n^{-1}$ で $f_n(x) < 0$ であったことに注意する。

いま、 $f'_n(x)$ は連続であって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'_n(x) = +\infty$ であるから、 $x \geq n + n^{-1}$ において $f'_n(x) = 0$ は唯一の実解を持つ。この解を $x = \alpha_n$ とすれば、 $x \geq \alpha_n$ ならば $f'_n(x) > 0$ であり、 $f_n(x)$ は単調増加（特に α_n は $\alpha_n > n + n^{-1}$ を満たす）。

いま、 $n + n^{-1} \leq x \leq \alpha_n$ においては明らかに $f_n(x) < 0$ であって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ であることから、区間 $x \geq n + n^{-1}$ で $f_n(x) = 0$ は唯一の実解を持つ。

■

(3) a_n, b_n は $f_n(x) = 0$ の解より、

$$\begin{cases} a_n^2 - 2(n + n^{-1})a_n + n^2 - 1 + e^{-a_n} = 0 \\ b_n^2 - 2(n + n^{-1})b_n + n^2 - 1 + e^{-b_n} = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。同様に

$$\begin{cases} p_n^2 - 2(n + n^{-1})p_n + n^2 - 1 = 0 \\ q_n^2 - 2(n + n^{-1})q_n + n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。いま、 a_n と p_n に関する等式をそれぞれ引いて、

$$\begin{aligned} (a_n^2 - p_n^2) - 2(n + n^{-1})(a_n - p_n) + e^{-a_n} &= 0 \\ (a_n - p_n)\{(a_n + p_n) - 2(n + n^{-1})\} &= -e^{-a_n} \\ \therefore |a_n - p_n| &= \frac{e^{-a_n}}{|(a_n + p_n) - 2(n + n^{-1})|} \end{aligned}$$

ここで、 $p_n = n + n^{-1} - \sqrt{3 + n^{-2}}$ であり、 a_n は不等式

$$n + n^{-1} - 2 < a_n < n + n^{-1}$$

を満たすことから、

$$\begin{aligned} -2 - \sqrt{3 + n^{-2}} &< a_n + p_n - 2(n + n^{-1}) < -\sqrt{3 + n^{-2}} \\ \therefore \sqrt{3 + n^{-2}} &< |a_n + p_n - 2(n + n^{-1})| < 2 + \sqrt{3 + n^{-2}} \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < |a_n - p_n| < \frac{e^{-a_n}}{\sqrt{3 + n^{-2}}}$$

$a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ は明らかであるから、挟み撃ちの原理により、 $|a_n - p_n| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ 。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) = 0$ を意味する。 $b_n - q_n$ に関しても全く同様にして $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) = 0$ が得られる。

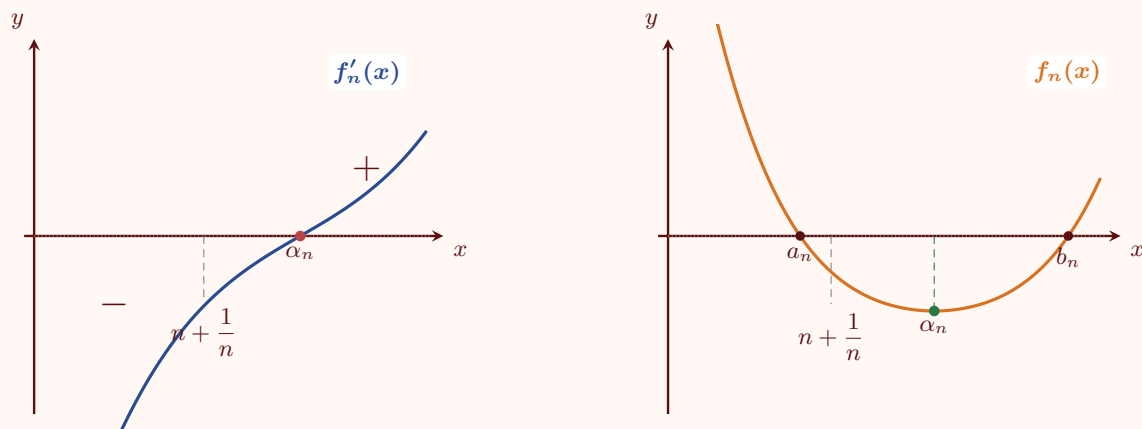
■

(4) $b_n - a_n = (b_n - q_n) - (a_n - p_n) + q_n - p_n$ であって、 $q_n - p_n = 2\sqrt{3 + n^{-2}}$ であるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - p_n) = 2\sqrt{3}$ を用いると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(b_n - q_n) - (a_n - p_n) + q_n - p_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - q_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - p_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (q_n - p_n) \\ &= 0 - 0 + 2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 2\sqrt{3} \dots\dots (答)$$

- (1) $f'_n(x) > 0$ を不等式評価で示す問題かと思いきや、これはうまくいかない。しかし、 $f''_n(x)$ まで調べることで $f'_n(x)$ が単調増加であることはすぐに分かる。(1) の題意を示すためには『 $f_n(n+n^{-1}-2) \cdot f_n(n+n^{-1}) < 0$ であって、この区間で $f_n(x)$ が単調である』ということが言えればよいのだが、この計算で現れる展開は効率的に行う必要がある。
- (2) $f_n(n+n^{-1}) < 0$ なので、うまい値 k を見つけて $f(k) > 0$ を示せば $n+n^{-1} < x < k$ の範囲に実解があって、 $f_n(x)$ は単調増加より示された』としたいが、それには $f_n(x)$ がある部分から単調増加に転じる点、先述のうまい k を見つける点の 2 点が必要でめんどくさい。ゆえに $f_n(x)$ が連続なことから極限を引き合いに出して論証をうまく逃げた。グラフを以下に記す。



- (3) p_n, q_n は一般項がそれぞれ $n+n^{-1} \pm \sqrt{3+n^{-2}}$ と明示的に書ける点には注意しておく。 a_n は

$$n+n^{-1}-2 \leq a_n \leq n+n^{-1}$$

を満たすことから、不等式評価で行こうとすると、辺々 $(p_n =) n+n^{-1} - \sqrt{3+n^{-2}}$ を引いて

$$-2 + \sqrt{3+n^{-2}} \leq a_n - p_n \leq \sqrt{3+n^{-2}}$$

となり、まったく挟み撃ちできない。方程式の解と極限という定義にそって等式を変形していくのであったからそれに従う。極限值は 0 だといわれているので、数列の極限の定義

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0$$

に従い、 $|(a_n - p_n) - 0| = |a_n - p_n|$ を考えていく。

- (4) (4) も (3) と同様に考えようとする、 $b_n - a_n = \frac{e^{-a_n} - e^{-b_n}}{b_n + a_n - 2(n+n^{-1})}$ であり、分母は $\infty - \infty$ の不定形だからうまく解消が必要であり何とも大変そう。ここで、(3) が誘導なのでは？と推測すると、 $a_n - p_n, b_n - q_n$ をうまく (無理やり) 出すしかないと分かり、

$$b_n - a_n = (b_n - q_n) - (a_n - p_n) + (q_n - p_n)$$

と必然的になる。このような技巧的な帳尻合わせは数列の極限の定義である $\varepsilon - N$ 論法を考える上でよくある変形ではあるが、高校生には多少難しい発想のように思う。

VIII. 自然対数の底 e と自然数 n に対し、関数 $f_n(x)$ を以下で定める. このとき以下の問いに答えよ.

$$f_n(x) = n \log x - e^{-x} \sin x \quad (x > 0)$$

なお、必要であれば $\log 2 = 0.693$, $\log 3 = 1.098$ とし, $\pi > 3$, $e > 2.7$ を用いてもよい.

- (1) $x > 0$ において $\frac{n}{x} - \sqrt{2}e^{-x} > 0$ が成り立つことを示せ.
- (2) 全ての自然数 n に対し、方程式 $f_n(x) = 0$ は区間 $(0, \infty)$ に唯一の実数解を持ち、しかもその解 $x = a_n$ は $1 < a_n < \frac{\pi}{2}$ を満たしていることを示せ.
- (3) (2) で得た $f_n(x) = 0$ の解 $x = a_n$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1)$ を求めよ.

解答

- (1) $\frac{n}{x} - \sqrt{2}e^{-x} > 0 \iff n - \sqrt{2}xe^{-x} > 0$ であるから、これを示せばよい. $k(x) = n - \sqrt{2}xe^{-x}$ とすると、 $k'(x) = -\sqrt{2}e^{-x}(1-x)$. ゆえに $k'(x) = 0$ とすると $x = 1$ であり、以下の増減表を得る.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$k'(x)$		$-$	0	$+$
$k(x)$	(n)	$\searrow$	$n - \frac{\sqrt{2}}{e}$	$\nearrow$

ここで、 $n - \frac{\sqrt{2}}{e} \geq 1 - \frac{2}{2.7} > 0$ である. ゆえに $k(x) > 0$ であり、これにより題意は示された. ■

- (2) まず $f_n(x)$ が単調増加であることを示す. (1) の結果を用いて

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{n}{x} + \sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &\geq \frac{n}{x} - \sqrt{2}e^{-x} & (\because -1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1) \\ &> 0 & (\because (1) \text{ の結果}) \end{aligned}$$

より、 $x > 0$ で $f_n(x)$ は単調増加. ここで、 $\lim_{x \rightarrow +0} f_n(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ であるから $f_n(x) = 0$ は $x > 0$ で唯一の実解を持つ. また、 $f_n(1) = e^{-1} \sin 1 < 0$, $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = n \log \frac{\pi}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}}$ であり、

$$\begin{aligned} n \log \frac{\pi}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}} &> n(\log 3 - \log 2) - \frac{1}{e} \\ &> 0.405n - 0.38 \\ &> 0 \end{aligned}$$

これにより $f_n(1) \cdot f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ であり、中間値の定理から区間 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ に少なくとも 1 つの実解を持ち、これは上の議論によりただ 1 つである. ■

- (3) a_n は $f_n(x) = 0$ の解であるから、 $n \log a_n = e^{-a_n} \sin a_n$ が成り立つ. すなわち、

$$\log a_n = \frac{e^{-a_n} \sin a_n}{n}$$

ここで、 $1 < a_n < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} < -a_n < -1$ より $e^{-\frac{\pi}{2}} < e^{-a_n} < e^{-1}$ である. また、 $\sin 1 < \sin a_n < 1$ より、 $e^{-\frac{\pi}{2}} \sin 1 < e^{-a_n} \sin a_n < e^{-1}$ であるので、

$$\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} \sin 1}{n} < \frac{e^{-a_n} \sin a_n}{n} = \log a_n < \frac{e^{-1}}{n}.$$

ここで $\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} \sin 1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ と $\frac{e^{-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ から、挟み撃ちの原理より $\log a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \dots\dots (\text{答})$$

また, $f'_n(x) = \frac{n}{x} + e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x$ であるから, 微分可能かつ連続な $f_n(x)$ に対し, 区間 $[1, a_n]$ で平均値の定理を用いると, 以下の関係を満たす実数 c_n が $1 < c_n < a_n$ なる範囲に少なくとも一つ存在する.

$$\frac{f_n(a_n) - f_n(1)}{a_n - 1} = \frac{n}{c_n} + e^{-c_n} \sin c_n - e^{-c_n} \cos c_n$$

ここで $f_n(a_n) = 0$, $f_n(1) = -e^{-1} \sin 1$ であるから,

$$\frac{e^{-1} \sin 1}{a_n - 1} = \frac{n}{c_n} + e^{-c_n} \sin c_n - e^{-c_n} \cos c_n$$

この両辺に $\frac{1}{n}$ をかけ, これを $n(a_n - 1)$ について解くと,

$$n(a_n - 1) = \frac{e^{-1} \sin 1}{\frac{1}{c_n} + \frac{e^{-c_n} (\sin c_n - \cos c_n)}{n}} \dots\dots (\heartsuit)$$

ここで, $1 < c_n < a_n$ と $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ より $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ なので, $\frac{e^{-c_n} (\sin c_n - \cos c_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ かつ $\frac{1}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ より, $(\heartsuit)$ において $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = e^{-1} \sin 1$ を得る.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - 1) = e^{-1} \sin 1 \dots\dots (\text{答})$$

別 解

(3) ($a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ は示したとする. 方針は無理やり $n(a_n - 1)$ の形を作ることである)

$n \log a_n = e^{-a_n} \sin a_n$ より,

$$n(a_n - 1) \cdot \frac{\log a_n}{a_n - 1} = e^{-a_n} \sin a_n \dots\dots (P)$$

であり, $\frac{\log a_n}{a_n - 1} = \frac{\log a_n - \log 1}{a_n - 1}$ であるので, $s(x) = \log x$ とすれば, $\frac{\log a_n}{a_n - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s'(1) = 1$. ゆえに (P) で $n \rightarrow \infty$ とすれば $n(a_n - 1) \cdot 1 = e^{-1} \sin 1$ であり, $n(a_n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \sin 1$ である.

Point

- (1) $f_n(x)$ が区間の端点の符号が異なることは容易にわかる. $f_n(x)$ は唯一の実解を持つことから, 単調増加であることが推測でき, これを示せばよい.
- (2) a_n の極限に関しては, 等式 $n \log a_n = e^{-a_n} \sin a_n$ から $a_n = (n \text{ の式})$ と単に n の式で表すのは容易ではないから, $\sin a_n \dots$ や $e^{-a_n} = \dots$, $\log a_n = \dots$ としてみて, そのうち考えやすい形で考えていけばよい. しかし, n が単項式のまま残っている場合, $n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ となってしまう, 不定形から抜け出せない. ゆえに n を含む項を一人にして n で割ることで, 0 に近づく項を作る. また, $n(a_n - 1)$ の極限は平均値の定理により, $1 < c_n < a_n$ なる c_n の極限に帰着させる. うまいいかないときはとりあえず平均値の定理を試してみるとよい.

2 類題解答

整数 $k (\geq 2)$ を一つ固定する. 正整数 n に対して, k 次の方程式

$$(E)_n : x^k + nx^{k-1} - (n+2) = 0$$

を与える. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) すべての正整数 n に対して, 方程式 $(E)_n$ は正の解をただ一つしか持たないことを証明せよ.

(2) (1) における正の解を a_n とおく. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ は収束することを示し, その極限値を求めよ.

奈良県立医科大 2023 後期

考え方

この手の方程式の解 $x = a_n$ は大抵有界 ($|a_n| < M$ なる正数 M が存在する) なので, 適当に x に代入していけばよい. 特別 $x = 2$ である必要はない.

(1) $f_n(x) = x^k + nx^{k-1} - (n+2)$ とおくと,

$$f'_n(x) = kx^{k-1} + n(k-1)x^{k-2}$$

であり, $x > 0$ において $f'_n(x) > 0$ である. ゆえに $f_n(x)$ は単調増加である. また, $f_n(0) = -(n+2) < 0$ であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty$ なので, $f_n(x) = 0$ は区間 $(0, \infty)$ にただ 1 つの実数解を持つ.

(2) 方程式 $(E)_n$ の唯一の実解は $x = a_n$ であるから,

$$a_n^k + na_n^{k-1} - (n+2) = 0$$

が成り立つ.

$$\therefore a_n^{k-1} = 1 + \frac{2}{n} - \frac{a_n^k}{n} \quad \dots\dots (*)$$

ここで,

$$\begin{aligned} f_n(2) &= 2^k + n \cdot 2^{k-1} - (n+2) \\ &= n \left(\frac{2^k}{n} + 2^{k-1} - 1 - \frac{2}{n} \right) \end{aligned}$$

より, ある N が存在して, $n \geq N$ に対しては, ($k \geq 2$ より正確には全ての n に対して) $f_n(2) > 0$ とすることができる. これにより,

$$0 < a_n < 2$$

これにより,

$$0 < \frac{a_n^k}{n} < \frac{2^k}{n}$$

である. k は n に依存しない固定された 2 以上の整数であることから, $\frac{2^k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であり, 挟み撃ちの原理から, $\frac{a_n^k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. ゆえに $(*)$ において $n \rightarrow \infty$ とすれば

$$a_n^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 + 0 - 0$$

つまり $a_n^{k-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ であり, $a_n > 0$ であるから, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$

n を自然数とする. 3 次方程式

$$2x^3 + 3nx^2 - 3(n+1) = 0 \quad \dots\dots (*)$$

について次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n の値に関わらず方程式 $(*)$ は正の解をただ 1 つだけもつことを証明せよ.

(2) 方程式 $(*)$ の正の解を a_n とする. このとき, 極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

信州大 1998

(1) $f(x) = 2x^3 + 3nx^2 - 3(n+1)$ とおく. x で微分すると,

$$f'(x) = 6x^2 + 6nx = 6x(x+n)$$

n は自然数であるから, $x > 0$ において $f'(x) > 0$ である. よって, $f(x)$ は $x > 0$ において単調に増加する. また,

$$\begin{aligned} f(0) &= -3(n+1) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \infty \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ は連続であることと中間値の定理により、 $f(x) = 0$ は $x > 0$ の範囲に実数解をただ 1 つだけもつ。

■

- (2) (1) より a_n は $f(x) = 0$ の唯一の正の解である。ここで、 $x > 0$ において $f(x)$ は単調増加であり、 $f(1) < 0$ 、 $f(a_n) = 0$ であるから、

$$a_n > 1$$

である。また、

$$f(2) = 9n + 13 > 0.$$

これにより、

$$1 < a_n < 2$$

ここで、 $f(a_n) = 2a_n^3 + 3na_n^2 - 3(n+1) = 0$ から、

$$a_n^2 = \frac{n+1}{n} - \frac{2}{3n}a_n^3$$

である。ここで、 $1 < a_n < 2$ より、

$$1 < a_n^3 < 8$$

$$\therefore \frac{2}{3n} < \frac{2a_n^3}{3n} < \frac{16}{3n}$$

であり、 $\frac{2}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ 、 $\frac{16}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ より、挟み撃ちの原理から、 $\frac{2a_n^3}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1$ であり、 $a_n > 0$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ を得る。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \dots\dots(\text{答})$$

$n = 1, 2, \dots$ に対して、 x の整式

$$P_n(x) = x^3 - nx^2 - (2n+12)x - 8$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 3 次方程式 $P_n(x) = 0$ の正の実数解はただ 1 つであることを示せ。

- (2) t が $P_n(x) = 0$ の解であるとき、 $P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right)$ を求めよ。

- (3) $P_n(x) = 0$ の正の実数解を α_n とするとき、 $P_n(x) = 0$ の最小の実数解 β_n を α_n で表せ。さらに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ を求めよ。

早稲田 2006

- (1) $P'_n(x) = 3x^2 - 2nx - 2(n+6)$ であり、 $D_{P'_n(x)} = n^2 + 6n + 36 > 0$ なので $P'_n(x) = 0$ は異なる二実解を持つ。いま、 $P'_n(x) = 0$ の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると、 $P'_n(x)$ において解と係数の関係により $\alpha\beta = -2(n+6) < 0$ 。つまり、 $P_n(x)$ は正と負の範囲にそれぞれ 1 つずつ極値を持つ。特に $x = \beta$ で極小値である。 $P_n(0) = -8 < 0$ かつ $\lim_{x \rightarrow \infty} P_n(x) = \infty$ であり、 $P_n(x)$ は連続であることから題意は示された。

■

$$(2) P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right) = \frac{-8}{(t+2)^3} \left\{ t^3 - nt^2 - (2n+12)t - 8 \right\} = 0$$

$$\therefore \underline{P_n\left(-\frac{4}{t+2}\right) = 0 \dots\dots(\text{答})}$$

- (3) $x = \alpha_n$ は与えられた方程式の正の解だから、(2) により、 $x = \frac{-4}{\alpha_n+2}$ も解であり、特にこれは負の解である。更に $x = \frac{-4}{\alpha_n+2}$ は解であることから、

$$\begin{aligned} \frac{-4}{\alpha_n+2} + 2 &= \frac{-4(\alpha_n+2)}{-4+2(\alpha_n+2)} \\ &= \frac{-2(\alpha_n+2)}{\alpha_n} \end{aligned}$$

も解である。これも $\alpha_n > 0$ より負の解である。ここで、 $\alpha_n > 0$ より、

$$\frac{-2(\alpha_n+2)}{\alpha_n} - \frac{-4}{\alpha_n+2} = \frac{-2(\alpha_n^2+2\alpha_n+4)}{\alpha_n(\alpha_n+2)} < 0.$$

より $\frac{-2(\alpha_n+2)}{\alpha_n} < \frac{-4}{\alpha_n+2}$ であり,

$$\frac{-2(\alpha_n+2)}{\alpha_n} < \frac{-4}{\alpha_n+2} < 0 < \alpha_n$$

が成り立つ. β_n はこのうち最小のものであるから $\beta_n = \frac{-2(\alpha_n+2)}{\alpha_n}$. ここで, $P_n(n) = -2n^2 - 12n - 8 < 0$ より, $n < \alpha_n$ であり, 追い出しの原理から $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. これにより, $\beta_n = -2\left(1 + \frac{2}{\alpha_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2$ である.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = -2 \dots\dots (\text{答})$$

n を正の整数とする. 以下の x の方程式 (*) について, 以下の問いに答えよ.

$$x^5 + n^2 x^3 - n^2 - 3 = 0 \quad \dots\dots (*)$$

(1) すべての n に対し, (*) は正の解をただ一つだけもつことを示せ.

(2) (*) がもつただ一つの正の解を x_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$ を求めよ.

出典不明

考え方

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ に関して, この方程式を解き, $x_n = (n \text{ の式})$ とするのは容易ではない (5 次方程式なので解の公式は存在しない). ゆえに一度 x_n^5 や x_n^3 の極限を考えればよく, $x_n^5 = n^2 x_n^3 + n^2 + 3$ としてみると, $n \rightarrow \infty$ とすれば $n^2 x_n^3$ という極限が不明なものとなり全く進まない. ゆえに $x_n^3 = \dots$ としてみると, $x_n^5 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm \infty$ でない限りは $\frac{x_n^5}{n^2}$ は 0 に収束するので x_n の不等式評価を考えたい. また, $x_n^{n^2}$ の極限は 1^∞ の形になっているので即座に e が絡むと気づきたい. e の定義式は $(1 + \text{ゴミ})^\infty$ なので 0 にいく部分を a_n とでも置いて e の定義式に近づけにいく. 解答の $(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}$ の部分が e に近づく.

(2) x_n は (*) の解であることから,

$$x_n^5 + n^2 x_n^3 - n^2 - 3 = 0$$

が成り立つ. これにより, $x_n^3 = 1 + \frac{3}{n^2} - \frac{x_n^5}{n^2}$ であり, $f(3^{\frac{1}{5}}) = (3^{\frac{3}{5}} - 1)n^2 > 0$ であるので, x_n は

$$0 < x_n < 3^{\frac{1}{5}}$$

を満たす. これにより,

$$0 < \frac{x_n^5}{n^2} < \frac{3}{n^2}$$

であり $\frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ なので, 挟み撃ちの原理により

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^5}{n^2} = 0$ であり, $x_n^3 = 1 + \frac{3}{n^2} - \frac{x_n^5}{n^2}$ において $n \rightarrow \infty$ とすれば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^3 = 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ を得る. また, $a_n = \frac{3}{n^2} - \frac{x_n^5}{n^2}$ とすれば, $x_n = (1 + a_n)^{\frac{1}{3}}$ と書ける. また,

$$x_n^{n^2} = \{(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}\}^{\frac{n^2 a_n}{3}}$$

であって, $n^2 a_n = 3 - x_n^5$ より, $n^2 a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2$.

さらに, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ より $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ なので,

$$x_n^{n^2} = \{(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}}\}^{\frac{n^2 a_n}{3}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2} = e^{\frac{2}{3}} \dots\dots (\text{答})$$

(1) $f(x) = x^5 + n^2 x^3 - n^2 - 3$ とおくと, $f'(x) = x^2(5x^2 + 3n^2) > 0$ であり, $f(x)$ は単調増加である. $f(0) = -n^2 - 3 < 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であることから $(0, \infty)$ に唯一の実数解を持つ.

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos \frac{x}{3} \quad (x \geq 0)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は、ただ 1 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) における実数解を a_n とおくと、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ。

大阪大 2024

考え方

唯一の実解というとは極値の有無は関係ないのだが、メタ思考的におそらく $f_n(x)$ は単調だと予想がつくので $f'(x) < 0$ を言えばよい。(2) は解の定義から等式 $1 - \frac{e^{na_n}}{2} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$ が成り立つから、これを用いる。三角関数は $|\sin, \cos| \leq 1$ により不等式評価し、扱いにくいものは消去するのが定石である。

(1) $f'_n(x) = -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}$ より、
 $-1 \leq \sin \frac{x}{3} \leq 1$, $n \geq 1$, $x \geq 0$ に注意して、

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= -\frac{n}{2}e^{nx} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3} \\ &\leq -\frac{n}{2}e^{nx} + \frac{1}{3} \quad (\because -1 \leq \sin \frac{x}{3} \leq 1) \\ &\leq -\frac{1}{2}e^{nx} + \frac{1}{3} \quad (\because n \geq 1) \\ &\leq -\frac{1}{2}e^0 + \frac{1}{3} \quad (\because x \geq 0) \\ &= -\frac{1}{6} \\ &< 0 \end{aligned}$$

よって、 $f'_n(x) < 0$ 。すなわち $f_n(x)$ は $x \geq 0$ で単調減少。また、 $f_n(x)$ は連続であって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = -\infty$ および、 $f(0) = \frac{3}{2} > 0$ であることから、 $f_n(x) = 0$ は唯一の実解を持つことが示された。

(2) $x = a_n$ は $f_n(x) = 0$ の解より、 $1 - \frac{e^{na_n}}{2} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$ が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{e^{na_n}}{2} + \cos \frac{a_n}{3} &\leq 1 - \frac{e^{na_n}}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}(4 - e^{na_n}) \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq \frac{1}{2}(4 - e^{na_n})$ 。

$$\therefore e^{na_n} \leq 4$$

$$\therefore e^{na_n} \leq e^{\log 4}$$

$$\therefore 0 < a_n \leq \frac{\log 4}{n} \quad (\because e > 1, a_n > 0)$$

$\frac{\log 4}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ であるから、挟み撃ちの原理により
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $1 - \frac{e^{na_n}}{2} + \cos \frac{a_n}{3} = 0$ より、 $e^{na_n} = 2 \left(1 + \cos \frac{a_n}{3} \right)$ であり、両辺自然対数をとって、

$$na_n = \log \left(2 + 2 \cos \frac{a_n}{3} \right)$$

ここで、 $\log \left(2 + 2 \cos \frac{a_n}{3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log 4$ であるから、
 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \log 4$ 。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \log 4 \quad \dots\dots (\text{答})$$