

様相論理の近傍意味論は S4 フレームなら 位相空間論の意味での「近傍系」になる話！

こっとん (@CottonShampoo)

2023年12月21日 木曜日

Mathematical Logic Advent Calendar 2023
の 21 日目の投稿です。

このドキュメントは、見やすく読みまちがえにくい
ユニバーサルデザインフォントを採用しています。

目次

0	前置き	2
0.1	この記事が想定する対象読者	2
0.2	この記事が読者たちと一緒にめざす 4 つの目標	2
0.3	この記事では扱わないこと	2
1	そもそも近傍意味論を考える動機	2
1.1	正規様相論理よりも弱い体系に意味論を与えること	2
1.2	様相論理そのものを分析する手段として用いること	3
2	近傍意味論の定義および簡単な例	3
2.1	定義	3
2.2	簡単な例	4
3	近傍意味論で必然化則が成り立たないこと	5
4	S4 フレームなら、位相空間論の意味での「近傍系」になること	5
5	位相空間論の「開核演算子」と「閉包演算子」を様相演算子と同一視できること	7
5.1	位相空間論の簡単な復習	7
5.2	様相演算子のついた論理式の truth-set をつくる操作	8
5.3	推論の妥当性を、開核演算子の性質から導く	9
6	終わりに	9

0 前置き

0.1 この記事が想定する対象読者

この記事の対象読者としては、様相論理の「クリップキ意味論」（関係意味論）のことをそれなりに知っているが、「近傍意味論」についてはあまり知らない人を想定しています。たとえば、 K とか $S4$ とか聞いたことあるよ、というくらいの予備知識があれば、この記事を読むのにちょうどいいと思われます。

特に「近傍意味論」という名前を聞いて、「位相空間論の近傍の話と何か関係があるのかな」と反応したくなるくらいの人をターゲットとした、ひとまず入門向けの記事です。

この記事では、近傍意味論と位相空間との関わり合いに重点を置いて紹介します。近傍意味論には、他にも面白い話題がたくさんあるので、これをきっかけに学んでください。

0.2 この記事が読者たちと一緒にめざす 4 つの目標

この記事では、以下の 4 つのことを目標とします。

1. 様相論理の近傍意味論がどんなものか知る。
2. 近傍意味論において、必然化則「 $A \models B$ ならば $\Box A \models \Box B$ 」が成り立たないことを実際に確かめる。
3. $S4$ フレームならば、近傍意味論における「近傍系」が位相空間論の「近傍系」と同じものになることを示す。
4. 位相空間論の「開核演算子・閉包演算子」が、まさに $S4$ の様相演算子と同じふるまいをすることを確認する。

0.3 この記事では扱わないこと

様相論理の「クリップキ意味論」（関係意味論）については触れません（この記事には登場せず、定義もしません）。もし様相論理に関心があるが勉強したことがない場合、この記事より先に、大西琢朗『論理学』や小野寛晰『情報科学における論理』をまず読んでおくことをおすすめします。

1 そもそも近傍意味論を考える動機

様相論理の近傍意味論を考えることには、2 つの動機がある。

1.1 正規様相論理よりも弱い体系に意味論を与えること

近傍意味論を考える差し当たりの動機は、 K よりも弱い体系を作ることである。関係意味論（クリップキ意味論）だと、 K より弱い体系について、適切なしかたで意味論を与えることができない。そのため、 K より弱い体系に意味論を与えるなら、それとは別のしかたで意味論を考える必要がある。

より具体的に言えば、必然化則「 $A \models B$ ならば $\Box A \models \Box B$ 」が成立しないような意味論を作りたい。その発端（のひとつ）が「認識論理」である。これは、様相論理の「～が必然的である」を表す演算子 \Box を、「～を知っている」という知識の演算子として理解した論理体系である。

認識論理を考えるにあたって、必然化則「 $A \models B$ ならば $\Box A \models \Box B$ 」を認めてしまうと、 A を知っているならば、 A から論理的に帰結するあらゆる文 B も知っていることになってしまい、それだとわれわれの認識のあり方と乖離してしまうことになる。われわれの認識のあり方に合致した自然な認識論理を考えたいのであれば、必然化則「 $A \models B$ ならば $\Box A \models \Box B$ 」が成り立たないような様相論理の体系が望まれる。そのような嬉しい性質を持った意味論のひとつが、近傍意味論である。

1.2 様相論理そのものを分析する手段として用いること

すぐ後で定義するが、近傍意味論は、関係意味論（クリプキ意味論）の一般化であると言える。関係意味論では、可能世界のあいだの2項関係 R を考えるのに対し、近傍意味論では、可能世界の近傍系 $N(w)$ を考える。近傍意味論のこのような複雑な道具立ては、単に弱い体系に意味論を与えることができるだけでなく、**様相論理そのものを分析する手段としても使うことができる**。これこそが、近傍意味論を考えることの重要な第2の動機である。

とりわけこの記事では、 $S4$ を近傍意味論で扱うことにより、関係意味論のときとは違った特徴づけが可能になるということを中心に見ていくことにする。

2 近傍意味論の定義および簡単な例

以下ではまず、最も弱い体系 E の意味論（ E -近傍意味論）から話を始める。なお、 N の満たす条件に制約を課すことにより、様々な体系をつくることができる。

2.1 定義

定義 1（モデルとフレームの定義） $M = \langle W, N, V \rangle$ が E -近傍モデルであるとは、

- W が、可能世界の（空でない）集合であり、
- N が、 W から $\mathcal{P}(\mathcal{P}(W))$ への関数であり、
- V が、すべての原子式から $\mathcal{P}(W)$ への関数である。

特に、 $F = \langle W, N \rangle$ を E -近傍フレームという。（補足：モデルのうち V を除いたもの。）

定義 2（論理式の解釈） 近傍モデル $M = \langle W, N, V \rangle$ での各世界における論理式の解釈（真偽）を、次のように定める。まず、様相演算子のつかない論理式の真偽については、通常のクリプキ意味論の場合と同様に、以下の帰納的定義により定める。

- $w \Vdash_M p \iff w \in V(p)$
- $w \Vdash_M A \wedge B \iff w \Vdash_M A$ かつ $w \Vdash_M B$
- $w \Vdash_M A \vee B \iff w \Vdash_M A$ または $w \Vdash_M B$
- $w \Vdash_M A \rightarrow B \iff w \not\Vdash_M A$ または $w \Vdash_M B$
- $w \Vdash_M \neg A \iff w \not\Vdash_M A$

次に、様相演算子のついた論理式の真偽は、以下の通り。

- $w \Vdash_M \Box A \iff \llbracket A \rrbracket^M \in N(w)$
 - ただし任意の論理式 φ について $\llbracket \varphi \rrbracket^M := \{w \in W \mid w \Vdash \varphi\}$ と定められているものとする。
これを truth-set と呼ぶ。
- $w \Vdash_M \Diamond A \iff \llbracket \neg A \rrbracket^M \notin N(w)$
 - 補足：これは上記の \Box のときの双対。

定義 3（推論の妥当性） 近傍フレーム $F = \langle W, N \rangle$ における推論の妥当性 ($A \vDash B$) は以下で定める。

$A \vDash_F B \iff$ 任意の論理式 A, B に関し、任意の V と w について、 $w \Vdash_{\langle F, V \rangle} A$ ならば $w \Vdash_{\langle F, V \rangle} B$ である。

補足 これは対偶を取ったほうがわかりやすいかもしない。 $A \not\models_F B \iff$ ある論理式 A, B に関し, ある V と w について, $w \Vdash_{\langle F, V \rangle} A$ かつ $w \not\Vdash_{\langle F, V \rangle} B$ である。なお, このようなモデル $\langle F, V \rangle$ のことを「反例モデル」と呼ぶことにする。気持ちとしては, A から B への推論が妥当でないことをあらわしているモデル, ということ。

2.2 簡単な例

例 4 (簡単な例・その 1) 次のような E -近傍モデル $M = \langle W, N, V \rangle$ を考える。

- $W = \{w_1, w_2\}$
- $N(w_1) = \{\{w_2\}\}$
- $N(w_2) = \{\{w_1\}\}$
- $V(p) = \{w_2\}$

このとき,

- $w_1 \Vdash_M \Box p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket p \rrbracket^M = \{w_2\} \in N(w_1)$ であるため。
- $w_2 \not\Vdash_M \Box p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket p \rrbracket^M = \{w_2\} \not\in N(w_2)$ であるため。

例 5 (簡単な例・その 2) 次のような E -近傍モデル $M = \langle W, N, V \rangle$ を考える。

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $N(w_1) = \{\{w_2\}, \{w_3\}, \{w_1, w_3\}\}$
- $N(w_2) = \{\{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1\}\}$
- $N(w_3) = \{\{w_1\}, \{w_2, w_3\}, \emptyset\}$
- $V(p) = \{w_1, w_2\}$
- $V(q) = \{w_2, w_3\}$

このとき,

- $w_2 \Vdash \Box p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket p \rrbracket^M = \{w_1, w_2\} \in N(w_2)$ であるため。
- $w_2 \Vdash \Diamond p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket \neg p \rrbracket^M = \{w_3\} \not\in N(w_2)$ であるため。
- $w_3 \Vdash \Diamond p$ である。
 - なぜなら, 上と同様に, $\llbracket \neg p \rrbracket^M = \{w_3\} \not\in N(w_3)$ であるため。
- $w_3 \Vdash \Box \Diamond p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket \Diamond p \rrbracket^M = \{w_2, w_3\} \in N(w_3)$ であるため。
- $w_1 \Vdash \Box \Box p$ である。
 - なぜなら, $\llbracket \Box p \rrbracket^M = \{w_2\} \in N(w_1)$ であるため。

3 近傍意味論で必然化則が成り立たないこと

定理 6 E -近傍フレームにおいて「 $A \vDash B$ ならば $\Box A \vDash \Box B$ 」は成り立たない。

証明 原子式 p, q について、 $p \vDash_F q$ かつ $\Box p \not\vDash_F \Box q$ となるように、「反例モデル」をつくればいい。具体的には、たとえば以下が「反例モデル」になる。(反例モデルのつくり方はいくらでもあるので、これはあくまで一例。)

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $N(w_1) = \{\{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$
- $N(w_2) = \{\{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}\}$
- $N(w_3) = \{\{w_3\}, \{w_2, w_3\}\}$
- $V(p) = \{w_1\}$
- $V(q) = \{w_1, w_2\}$

実際に、これが反例モデルであることを確かめよう：

- $p \vDash_F q$ である。
 - というのも、 $\llbracket p \rrbracket^M \subseteq \llbracket q \rrbracket^M$ であるから、任意の $w_i \in W$ について、 $w_i \Vdash_M p$ ならば $w_i \Vdash_M q$ である。
- $\Box p \not\vDash_F \Box q$ である。
 - まず、 $w_1 \Vdash_M \Box p$ である。
 - なぜなら、 $\llbracket p \rrbracket^M = \{w_1\} \in N(w_1)$ であるため。
 - また、 $w_1 \not\Vdash_M \Box q$ である。
 - なぜなら、 $\llbracket q \rrbracket^M = \{w_1, w_2\} \not\subseteq N(w_1)$ であるため。

□

なお参考までに、関係フレームだと「 $A \vDash B$ ならば $\Box A \vDash \Box B$ 」は成立する。(証明略)

【この章のまとめ】

- この章では、必然化則「 $A \vDash B$ ならば $\Box A \vDash \Box B$ 」が、関係意味論では成り立つが、近傍意味論では成り立たないことがわかった。

4 S4 フレームなら、位相空間論の意味での「近傍系」になること

ここで用語を定義しておく。

定義 7 (近傍系と近傍) $N(w)$ を w の「近傍系」と呼ぶ。また、可能世界の集合 X ($\subseteq W$) について、 $X \in N(w)$ ならば、 X を w の「近傍」と呼ぶ。

なお、一般にはこの「近傍系」は、位相空間論における「近傍系」とは異なる。ただし、フレーム $\langle W, N \rangle$ が $S4$ フレームであれば、このフレームの「近傍系」は位相空間論の意味での「近傍系」になる。(以下で示す)

定理 8 フレーム $\langle W, N \rangle$ が $S4$ フレームであれば、つまり任意の $w \in W$ について $N(w)$ が以下の5 つの条件をすべて満たすならば、このフレームの「近傍系」は位相空間論の意味での「近傍系」になる。

1. $W \in N(w)$
2. $\forall X \in N(w) (w \in X)$
3. $\forall X \in N(w) (X \subseteq Y \implies Y \in N(w))$
4. $\forall X, Y \in N(w) (X \cap Y \in N(w))$
5. $\forall X \subseteq W (X \in N(w) \implies \{v \mid X \in N(v)\} \in N(w))$

証明 近傍フレーム $\langle W, N \rangle$ が $S4$ フレームである（つまり上記の 5 つの条件をすべて満たす）とする。このとき、ある位相空間 $\langle W, \mathcal{T}_N \rangle$ が存在し、 $N(w) = N_{\mathcal{T}_N}(w)$ を満たす、ということを示したい。ただし \mathcal{T}_N は以下で与えられたものとする：

$$\mathcal{T}_N = \{X \mid \forall w \in W (w \in X \implies X \in N(w))\}$$

なお一般に、位相空間 $\langle W, \mathcal{T} \rangle$ から近傍系 $N_{\mathcal{T}}(w)$ をつくるやり方は、次の通り：

$w \in W$ について、 $\mathcal{T}_w = \{\mathcal{O} \mid w \in \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$ とし、 $N_{\mathcal{T}}(w) = \{X \mid \exists \mathcal{O} \in \mathcal{T}_w \text{ s.t. } \mathcal{O} \subseteq X\}$ と定める。

まずは $\langle W, \mathcal{T}_N \rangle$ が位相空間であることを示す。

- $\emptyset \in \mathcal{T}_N$ である。（これは自明。）
- $W \in \mathcal{T}_N$ である。（このことは、上の条件 1 より任意の $w \in W$ について $W \in N(w)$ であることと、 \mathcal{T}_N の定義から、従う。）
- $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_N$ と仮定し、 $v \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ とする。このとき、 $v \in \mathcal{O}_1$ かつ $v \in \mathcal{O}_2$ である。よって、 $\mathcal{O}_1 \in N(v)$ かつ $\mathcal{O}_2 \in N(v)$ である。このとき、上の条件 4 より、 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in N(v)$ である。したがって、 $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{T}_N$ である。
- ある添字集合 I について $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}_N$ と仮定し、 $v \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ とする。このとき、ある $i \in I$ について $v \in \mathcal{O}_i$ である。いま、 $\mathcal{O}_i \in \mathcal{T}_N$ であるから、 $\mathcal{O}_i \in N(v)$ である。したがって、 $\mathcal{O}_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ と条件 3 より、 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in N(v)$ である。

次に、この位相空間 $\langle W, \mathcal{T}_N \rangle$ からつくられた近傍系 $N_{\mathcal{T}_N}(w)$ が、任意の $w \in W$ について $N(w) = N_{\mathcal{T}_N}(w)$ を満たすことを確かめる。

- $N_{\mathcal{T}_N}(w) \subseteq N(w)$ であることの証明:
 - まず $w \in W$ とする。もし $X \in N_{\mathcal{T}_N}(w)$ ならば、ある $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_N$ が存在し、 $w \in \mathcal{O} \subseteq X$ を満たす。（これは $N_{\mathcal{T}_N}(w)$ の定義より自明。）いま、 $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_N$ と $w \in \mathcal{O}$ より、 $\mathcal{O} \in N(w)$ であることがわかる。（これは \mathcal{T}_N の定義より自明。）よって、 $N_{\mathcal{T}_N}(w) \subseteq N(w)$ である。
- $N(w) \subseteq N_{\mathcal{T}_N}(w)$ であることの証明:
 - まず $w \in W$ とする。 $X \in N(w)$ とする。ある $\mathcal{O} \in \mathcal{T}_N$ が存在し、 $w \in \mathcal{O} \subseteq X$ が成り立つことを示さなくてはいけない。 $\mathcal{O} = \{v \mid X \in N(v)\}$ と定める。いま、 $X \in N(w)$ であるから、 $w \in \mathcal{O}$ である。そこで、もし $v \in \mathcal{O}$ ならば、 $X \in N(v)$ かつ $v \in \bigcap N(v) \subseteq X$ である（条件 2 と 4 より）。いま、 $X \in N(w)$ であるから、条件 5 より、 $\mathcal{O} = \{v \mid X \in N(v)\} \in N(w)$ である。よって、 $X \in N_{\mathcal{T}_N}(w)$ である。したがって、 $N(w) \subseteq N_{\mathcal{T}_N}(w)$ である。

以上より示された。 □

【この章のまとめ】

- $S4$ フレームにおいては、任意の $w \in W$ について、近傍系 $N(w)$ は、位相空間の意味での近傍系と一致することがわかった。
- つまり $S4$ の意味論は、可能世界全体 W に位相を入れたものを考えているとも言える。

5 位相空間論の「開核演算子」と「閉包演算子」を様相演算子と同一視できること

前の章では、 $S4$ フレームの「近傍系」が位相空間論の「近傍系」になるという話を紹介した。だが、それだけだと何が面白いのかまだ漠然としたままである。そこで、この章ではさらにもう一步踏み込んで、位相空間論の「開核演算子・閉包演算子」が、様相演算子 \square, \diamond と同じふるまいをすることを確認しよう。

5.1 位相空間論の簡単な復習

準備としては、位相空間論の簡単な復習から始める。(多くの学部1年生が大学の授業で学ぶ程度の簡単な内容)

定義 9 (開核と開核演算子) $\langle W, \mathcal{T} \rangle$ を位相空間とし、 X をその任意の部分集合とする。このとき「 X に含まれる最大の開集合」を X の開核 (内部) といい X° と書く。(なお、 $x \in X^\circ$ を X の内点という。)
また、 X にその開核 X° を対応させる写像を、開核演算子という。 $i : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W); X \mapsto X^\circ$

命題 10 (開核演算子の性質) 次の性質が成り立つ。(証明略)

- $W^\circ = W$
- 任意の $X \in \mathcal{P}(W)$ について、 $X^\circ \subseteq X$
- 任意の $X, Y \in \mathcal{P}(W)$ について、 $(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ$
- 任意の $X \in \mathcal{P}(W)$ について、 $X^{\circ\circ} = X^\circ$

定義 11 (閉包と閉包演算子) $\langle W, \mathcal{T} \rangle$ を位相空間とし、 X をその任意の部分集合とする。このとき「 X を含んでいる最小の閉集合」を X の閉包 (触集合) といい \overline{X} と書く。(なお、 $x \in \overline{X}$ を X の触点という。)
また、 X にその閉包 \overline{X} を対応させる写像を、閉包演算子という。 $k : \mathcal{P}(W) \rightarrow \mathcal{P}(W); X \mapsto \overline{X}$

命題 12 (閉包演算子の性質) 以下の性質が成り立つ (証明略)

- $\overline{\emptyset} = \emptyset$
- 任意の $X \in \mathcal{P}(W)$ について、 $X \subseteq \overline{X}$
- 任意の $X, Y \in \mathcal{P}(W)$ について、 $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$
- 任意の $X \in \mathcal{P}(W)$ について、 $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$

例 13 $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ に対し、 $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{w_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_4\}, \{w_1, w_2, w_4, w_5\}, W\}$ とおくと、 $\langle W, \mathcal{T} \rangle$ は位相空間となる。また、部分集合 $X = \{w_1, w_2, w_5\}$ について、その開核は $X^\circ = \{w_1, w_2\}$ であり、閉包は $\overline{X} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ である。

5.2 様相演算子のついた論理式の truth-set をつくる操作

さて、上記では W の任意の部分集合 X について、その開核 X° と閉包 \overline{X} を作り出す演算子（開核演算子 i と閉包演算子 k ）を定義したわけだが、これはまさに、 φ の truth-set から、 $\Box\varphi$ と $\Diamond\varphi$ の truth-set をつくる操作と同じである。つまり、 $X := \llbracket \varphi \rrbracket^M (\subseteq W)$ とした場合に、 $X^\circ = \llbracket \Box\varphi \rrbracket$ であり、 $\overline{X} = \llbracket \Diamond\varphi \rrbracket$ である。このことを以下の具体例で確認しよう。

例 14 次のような $S4$ フレームを考える。

- $W = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $N(w_1) = \{\{w_1\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}, \{w_1, w_2, w_3\}\}$
- $N(w_2) = \{\{w_2\}, \{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_1, w_2, w_3\}\}$
- $N(w_3) = \{\{w_1, w_2, w_3\}\}$

念のため、上のフレームが $S4$ の条件をちゃんと満たしていることを確かめよう：

- 任意の $w \in W$ について、
 1. $W \in N(w)$
 2. すべての $X \in N(w)$ について、 $w \in X$
 3. $X \in N(w)$ であり、かつ $X \subseteq Y (\subseteq W)$ ならば、 $Y \in N(w)$
 4. $X, Y \in N(w)$ ならば $X \cap Y \in N(w)$
 5. 任意の $X \in N(w)$ について、ある $Y \in N(w)$ が存在し、任意の $y \in Y$ について $X \in N(y)$

いま、考えるべき位相は $\mathcal{T}_N = \{X \subseteq W \mid \forall w \in W (w \in X \Rightarrow X \in N(w))\}$ であったことを思い出すと、 W に入る位相構造は、具体的に以下のものである。

$$\mathcal{T}_N = \{\emptyset, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_1, w_2\}, \{w_1, w_2, w_3\}\}$$

ここで、各原子式に対し、付値 V を以下のように定めることにする。

- $V(p) = \{w_1, w_2\}$
- $V(q) = \{w_1\}$
- $V(r) = \{w_3\}$
- $V(s) = \{w_1, w_3\}$
- $V(t) = \{w_1, w_2, w_3\}$
- $V(u) = \emptyset$

このとき、論理式 φ の truth-set から、 $\Box\varphi$ と $\Diamond\varphi$ の truth-set を、それぞれ以下のやり方でつくることができる。

- $\llbracket p \rrbracket^M = \{w_1, w_2\}$ であるため、 $\llbracket \Box p \rrbracket^M = \{w_1, w_2\}$ であり、 $\llbracket \Diamond p \rrbracket^M = \{w_1, w_2, w_3\}$ である。
- $\llbracket q \rrbracket^M = \{w_1\}$ であるため、 $\llbracket \Box q \rrbracket^M = \{w_1\}$ であり、 $\llbracket \Diamond q \rrbracket^M = \{w_1, w_3\}$ である。
- $\llbracket r \rrbracket^M = \{w_3\}$ であるため、 $\llbracket \Box r \rrbracket^M = \emptyset$ であり、 $\llbracket \Diamond r \rrbracket^M = \{w_3\}$ である。
- $\llbracket s \rrbracket^M = \{w_1, w_3\}$ であるため、 $\llbracket \Box s \rrbracket^M = \{w_1\}$ であり、 $\llbracket \Diamond s \rrbracket^M = \{w_1, w_3\}$ である。
- $\llbracket t \rrbracket^M = \{w_1, w_2, w_3\}$ であるため、 $\llbracket \Box t \rrbracket^M = \{w_1, w_2, w_3\}$ であり、 $\llbracket \Diamond t \rrbracket^M = \{w_1, w_2, w_3\}$ である。
- $\llbracket u \rrbracket^M = \emptyset$ であるため、 $\llbracket \Box u \rrbracket^M = \emptyset$ であり、 $\llbracket \Diamond u \rrbracket^M = \emptyset$ である。

5.3 推論の妥当性を、開核演算子の性質から導く

最後に、 $S4$ の体系における推論の妥当性を、開核演算子の性質から導くことができることを確認する。

命題 15 様相論理 $S4$ において、以下が成り立つ。

1. $\Box A \vDash A$
2. $\Box A \vDash \Box \Box A$
3. $\Box \Box A \vDash \Box A$
4. $\Box(A \wedge B) \vDash \Box A \wedge \Box B$
5. $\Box A \wedge \Box B \vDash \Box(A \wedge B)$

証明 1 から 5 まですべて、開核演算子の性質（命題 10）より直ちに従う。（というのも、推論の妥当性は truth-set どうしの包含関係からわかるため。） \square

【この章のまとめ】

- 位相空間論の「開核演算子・閉包演算子」が、 $S4$ のときの様相演算子 \Box, \Diamond と同じふるまいをすることが明らかになった。具体的には、
 - (1) 開核演算子と閉包演算子が、まさに \Box と \Diamond の truth-set をつくる操作と同じであることがわかった。
 - (2) $S4$ の体系における推論の妥当性が、開核演算子の性質から導かれることが確かめた。

6 終わりに

本記事では、近傍意味論の道具立てを導入したうえで、位相空間の性質を用いて $S4$ を分析した。これを読んでいる読者の中には「どうしてこんな遠回りをしたのか」と思う人もいるだろう。たしかに、単に $S4$ を扱いたいだけだとすれば、関係意味論だけあれば事足りるため、わざわざ近傍意味論を導入してまで $S4$ の性質を調べるのは無駄なことに思えるかもしれない。しかし、いったん近傍意味論という複雑な道具立てを導入したことにより、私たちがこれまでごく当たり前のように使ってきた \Box と \Diamond という様相演算子に対して異なる意味づけを与えることが可能になり、その結果として「様相演算子の意味」の新たな側面を見出すことができたと言えよう。

そもそもわれわれが、（関係意味論のような「標準的なもの」をこえて）近傍意味論のような「よりマイナーなもの」を追究し、あるいは（古典論理のような「座りの良いもの」にとどまらず）非古典論理のような「逸脱したもの」へと探究を進めていくことの動機は、単に「奇妙な性質を持った体系を次々と作りたいから」ということではなく、それよりもむしろ「標準的と思われていたものを異なる視座から捉え直したいから」という側面のほうが大きい。この記事ではまさに、「近傍意味論を使って $S4$ を調べる」という簡単な事例を実際に扱うことを通じて、そのような試みの一端を辿ってみた。

参考文献

- [1] Pacuit, E. (2017) *Neighborhood Semantics for Modal Logic*, Springer.
- [2] Priest, G. (2016) "Neighbourhood Semantics" in *Towards Non-Being* (2nd edition), pp.281–296 (Ch.15), Oxford University Press.
- [3] 松坂 (1968) 『集合・位相入門』岩波書店.