INVERSA DE UNA MATRIZ
Ejercicios

1. Comprueba que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene como matriz inversa a la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Averigua si la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

3. Averigua para qué valores de k la matriz $\begin{pmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{pmatrix}$ es invertible.

4. Calcula la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss - Jordan.

5. Calcula la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ utilizando determinantes.

6. Se sabe que el determinante de la matriz A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, el determinante de A^{-1}.

7. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de $2(A^t \cdot A^{-1})^{2017}$, siendo At la traspuesta de A.

8. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $(A^2 \cdot B^{-1})^{2015}$.

9. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1} = 2I - A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3)

10. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que AB = $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. Comprueba que A y B tienen inversas.

SOLUCIONES

1. Comprueba que la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene como matriz inversa a la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

Debemos comprobar que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego A^{-1} es inversa de A.

2. Averigua si la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Solución:

La matriz A tendrá inversa si $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 4 - 12 = -26 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$, la matriz A sí tendrá inversa.

3. Averigua para qué valores de k la matriz $\begin{pmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{pmatrix}$ es invertible.

Solución:

$$\begin{vmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{vmatrix} = k(1-k)+12 = -k^2+k+12 = (4-k)(k+3).$$

Observamos que

$$\begin{vmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (4-k)(k+3) = 0$$

Por lo tanto, la matriz $\begin{pmatrix} k & -3 \\ 4 & 1-k \end{pmatrix}$ es invertible $\Leftrightarrow k \neq -3, k \neq 4.$

4. Calcula la matriz inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por el método de Gauss - Jordan.

Solución:

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \rightarrow F_1 \\ \rightarrow F_2 \\ \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + 2\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 = -F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

5. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ utilizando determinantes.

Solución:

La matriz adjunta es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 3 - (3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1) =$$
$$= 2 + 2 - (6 + 6) = -8$$

La matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{(Adj(A))^T}{\det(A)} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{-8} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1 \\ 1/4 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es – 3. Calcula, indicando las propiedades que utilices, el determinante de A^{-1}.

Solución:

Sabemos que

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

En nuestro caso:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

7. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de $2(A^t \cdot A^{-1})^{2017}$, siendo At la traspuesta de A.

Solución:

Sabemos que: $|A^t| = |A|$; $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$; $|m \cdot A| = m^n |A|$ siendo n el orden de la matriz.

Por lo tanto:

$$\left|2\left(A^t \cdot A^{-1}\right)^{2017}\right| = \left|(2\cdot A^t)\cdot(A^{-1})\cdot(A^t \cdot A^{-1})^{2016}\right| = 2^3 \cdot |A| \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \left(|A| \cdot \frac{1}{|A|}\right)^{2016} = 8$$

8. Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula el determinante de la matriz $(A^2 \cdot B^{-1})^{2015}$.

Solución:
Calculamos el determinante de A y el de B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad ; \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$\left|A^2 \cdot B^{-1}\right|^{2015} = \left(|A| \cdot |A| \cdot |B^{-1}|\right)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{|B|}\right)^{2015} = \left(2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\right)^{2015} = 1$$

9. Considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determina, si existen, los valores de λ para los que $A^{-1} = 2I - A$ (siendo I la matriz identidad de orden 3)

Solución:

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda-1 & \lambda^2+\lambda+1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda-1 \\ -\lambda & 1 & \lambda^2+\lambda+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=2I-A\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\lambda-1\\-\lambda&1&\lambda^2+\lambda+1\\0&0&1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\lambda+1\\\lambda&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-\lambda-1\\-\lambda&1&\lambda^2+\lambda+1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda-1\\-\lambda&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda^2+\lambda+1=1\Rightarrow\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\,;\lambda=-1$$

10. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix}3&-2\\5&1\end{pmatrix}$, sea B la matriz que verifica que AB = $\begin{pmatrix}-2&1\\7&3\end{pmatrix}$. Comprueba que A y B tienen inversas.

<u>Solución:</u>

$$|A|=\begin{vmatrix}3&-2\\5&1\end{vmatrix}=3+10=13\neq 0\Rightarrow \text{ Tiene inversa}$$

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|\Rightarrow|B|=\frac{|A\cdot B|}{|A|}=\frac{-13}{13}=-1\neq 0\Rightarrow \text{ Tiene inversa}$$