## 1　複素数平面

154　複素数平面は横軸を実部， 縦軸を虚部に設定します．つまり，

$$\text{複素数}\ a+bi \iff \text{点}\ (a,\ b)$$

に対応させるのです．

155　先ほども述べたように， 複素数 $a+bi$ を点 $(a,\ b)$ に対応させるのだから，(1) の場合， $0,\ \alpha=a+2i,\ \beta=6-4i$ が同一直線上にある
$\iff$
3 点 $(0,\ 0),\ (a,\ 2),\ (6,\ -4)$ が一直線上にある
ということに過ぎません．

156　この辺りから「複素数をベクトル的に見る」つまり「複素数をベクトルの成分表示をみなす」という考え方が有効になってきます．つまり，

$$\alpha=3+i \iff \overrightarrow{a}=(3,\ 1)$$
$$\beta=2-2i \iff \overrightarrow{b}=(2,\ -2)$$

と思えばよいでしょう．
このことにより，複素数の和，差，実数倍は，そのまま，ベクトルの和，差，実数倍と同じように考えられます．

157　複素数平面に図示してから， その点の座標を読めばどうってことありません．一般に，共役複素数 ($z$ と $\overline{z}$) は実軸対称， 符号違いの複素数 ($z$ と $-z$) は原点対称になります．虚軸対称をしたければ， 実軸対称してさらに原点対称すればよいですね． まあ， 覚えるまでもなく， 意味を考えれば当たり前ですけどね．

158　絶対値とは原点からの距離です．したがって， 複素数 $a+bi$ を点 $(a,\ b)$ に対応させるのだから，

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

です．
また， 絶対値の性質「積と商でバラせる」はかなり重要なので覚えておこう．つまり，

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$$
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$$

(3) や (4) では， このことを使いましょう．つまり，$(1-2i)^2$ や $\dfrac{2+3i}{5-i}$ を計算してから絶対値を考えるのではなく，

$$\begin{aligned}&\left|(1-2i)^2\right|\\=&\left|(1-2i)(1-2i)\right|\\=&|1-2i||1-2i|\\=&|1-2i|^2\end{aligned}$$

$$\left|\frac{2+3i}{5-i}\right|=\frac{|2+3i|}{|5-i|}$$

とします．

159　2 点 $\alpha,\ \beta$ の距離は $|\alpha-\beta|$ と表しますが，結局， 複素数平面上での 2 つの複素数の距離とは， 座標平面上における 2 点間の距離と同じことです．つまり，2 つの複素数 $\alpha=3+4i$ と $\beta=7+5i$ の距離は，2 点 $(3,\ 4)$ と $(7,\ 5)$ の距離です．そう思えば，簡単なことです．

160　(2) だけなら，$z=x+iy$ とすると，$\overline{z}=x-iy$ なので，これらを代入して両辺の実部，虚部を比較して，$x$ と $y$ を求めて終わりです． ですが，(1) を見ると，そのように解くのではない (解いて欲しくない) ようですね．
「バーはバラせる」という格言に従おう．つまり，$3z+\overline{z}=2-2i$ の両辺の共役複素数を考えると，

$$\overline{3z+\overline{z}}=\overline{2-2i}$$

「バー」を「バーらして」

$$\overline{3z}+\overline{\overline{z}}=2+2i$$

です．$\overline{\overline{z}}=z$ になるのは言うまでもありませんね．よって，

$$3\overline{z}+z=2+2i$$

あとは，$z$ と $\overline{z}$ の連立方程式のノリで考えればよいでしょう．

161 ($\Longleftarrow$) の証明は簡単です．
$\beta = k\alpha$ のとき，$\overline{\alpha}\beta = \overline{\alpha}k\alpha = k|\alpha|^2$ なので，$\overline{\alpha}\beta$ は実数であることが分かります．
問題は ($\Longrightarrow$) の証明です．これはなかなか思いつかないです．
ポイントは，「$\beta = k\alpha$ となる実数 $k$ が存在する」という文章を「 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数になる」と解釈できるかどうか，です．となれば，示すべき命題は

$$\overline{\alpha}\beta \text{ は実数} \Longrightarrow \frac{\beta}{\alpha}\text{が実数}$$

を示すことになります．複素数 $z$ が実数である条件（$\overline{z} = z$ が成立する）に当てはめれば，単なる式変形です．つまり，

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha}\beta \text{ が実数}\\
\Longleftrightarrow&\overline{\overline{\alpha}\beta} = \overline{\alpha}\beta\\
\Longleftrightarrow&\overline{\overline{\alpha}}\overline{\beta} = \overline{\alpha}\beta\\
\Longleftrightarrow&\alpha\overline{\beta} = \overline{\alpha}\beta\\
\Longleftrightarrow&\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}} = \frac{\beta}{\alpha}\\
\Longleftrightarrow&\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\beta}{\alpha}\\
\Longleftrightarrow&\frac{\beta}{\alpha}\text{が実数}
\end{aligned}$$

です．
なお，この変形をみて気づいたと思いますが，すべて同値変形 ($\Longleftrightarrow$) です．ということは，最初に ($\Longleftarrow$) の証明をやりましたが，その必要はなかったということですね．

162 「複素数の 2 乗」は「実数の 2 乗」とは全く概念が異なります．
**$z$ が実数**であれば

$$\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2z\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$$

となりますが，$z$ が複素数の場合は，上の計算は全く成り立ちません．

**$z$ が複素数**であれば

$$\begin{aligned}
&\left|z + \frac{1}{z}\right|^2\\
&=\left(z + \frac{1}{z}\right)\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)}\\
&=\left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}\right)\\
&=z\overline{z} + \frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z} + \frac{1}{z\overline{z}} \cdots (※)
\end{aligned}$$

となります．実数の場合と全く違いますね．
さて，本問の場合，上の（※）に $z = 2 - i$ を代入しても構いませんが，割と面倒です．今回は素直に，$z = 2 - i$ を $z + \dfrac{1}{z}$ に代入して計算，$a + bi$ の形に変形し，その絶対値を求めて 2 乗する（つまり $a^2 + b^2$ を求める）方法で解決します．たぶん，この解法が一番早いです．「えっ?それだけ?」と思うかもしれませんが，この問題は「複素数の絶対値は実数とは違う」ということを意識させるための問題だと思います．

163 大切なことは「実数の絶対値と複素数の絶対値は違う」ということです．
$x$ が実数の場合，$|x| = 3$ ならば $x = \pm 3$ ですが，$z$ が複素数の場合，$|z| = 3$ だからといって，$z = \pm 3$ ではありません．複素数平面をイメージしてください．$|z| = 3$ を満たす複素数 $z$ は，「原点からの距離が 3 である複素数の集まり」のことなので，原点中心の半径 3 の円周上に存在します．この円の実軸との交点が $z = \pm 3$ で，これが先ほどの実数の場合に相当します．
前問で説明した，複素数の絶対値の扱い ($|z|^2 = z\overline{z}$) をそのまま利用します．つまり，$|z| = 3$ の両辺を 2 乗すると

$$z\overline{z} = 9$$

$|z - 2| = 4$ の両辺を 2 乗すると

$$(z - 2)(\overline{z - 2}) = 16$$

となります．さらに「バーはバラせる」ので

$$(z - 2)(\overline{z} - 2) = 16$$

となります．これをフツーに展開すればよいのです．

$\boxed{164}$ $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めるには，これまでの経験から，この式が対称式であることを踏まえて，和 $\alpha+\beta$ と積 $\alpha\beta$ を考えればよいことに気づくでしょう．
$\alpha+\beta+1=0$ より $\alpha+\beta=-1$
あとは積 $\alpha\beta$ をどうやって引っ張ってくるのか？
この問題でも，大切なことは，先ほどから述べているように「実数の絶対値と複素数の絶対値は違う」ということです.$\alpha$ は複素数なので，$|\alpha|=1$ だからといって，$\alpha=\pm1$ ではありません．
やはり，複素数の絶対値の扱い（$|z|^2=z\overline{z}$）を利用します．
$|\alpha|=|\beta|=1$ の各辺を 2 乗すると，

$$\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=1$$

です．また，$\alpha+\beta+1=0$ の両辺の共役をとると，

$$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=0$$

これらの関係式をうまく組み合わせて，ゴチャゴチャ式をいじくれば，うまいこと積 $\alpha\beta$ が出てくると思います．それだけのこと．
変形のコツとしては，目的が $\alpha\beta$ の値なので $\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ が邪魔ですよね．ということは・・・
上の例題 16 も参照してください．
✎**注**　くれぐれも，$|\alpha|=|\beta|=1$ より，

$$\alpha^2+\beta^2=1^2+1^2=2$$

なんてしないように！！！！！！！