

フィルム冷却効率予測のためのベイジアンモデル校正

Bayesian Model Calibration for Prediction of Film Cooling Effectiveness

三坂 孝志*¹*⁴
MISAKA Takashi

浅海 典男*²
ASAUMI Norio

出田 武臣*²
IDETA Takeomi

大林 茂*³
OBAYASHI Shigeru

ABSTRACT

Film-cooling effectiveness of a slanted round hole in a jet-in-crossflow configuration was predicted by Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS) simulation with turbulence model parameters optimized based on measurement data. Computationally efficient approximate models based on Kriging and proper orthogonal decomposition (POD) were employed for estimating the posterior density distributions of the RANS model parameters using a Markov-chain Monte Carlo method, which forms a probabilistic parameter estimation framework based on measurement data. Maximum a posteriori estimation of the parameters realized better prediction compared to that with the original parameters. The effect of model parameters was investigated by correlating the change of the thermo-fluid field and POD bases along with estimated POD coefficients. In addition, the impact of measurement position and quantity for the estimation of model parameters were assessed by using the parameter estimation framework.

キーワード：ガスタービン，フィルム冷却，RANS乱流モデル，ベイズパラメータ推定

Key words : Gas Turbine, Film Cooling, RANS Turbulence Model, Bayesian Parameter Estimation

1. 緒言

ガスタービンエンジンの熱効率向上やCO₂削減を実現するためにはタービン入口温度の上昇が必要であり，より高温に耐えうる材料の開発に加えてタービン翼の冷却が重要となる。フィルム冷却は最も効果的なタービン翼冷却技術の一つであり，フィルム冷却流れの熱・流体数値解析によるフィルム冷却効率の予測は，冷却孔やその配列を設計するための重要な技術である。

フィルム冷却効率の予測精度は，一様流中に吹き出す冷却流とその壁面との干渉の解析精度に依存する。このような流れ場のレイノルズ平均ナビエ・ストークス (Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS) 方程式に基づく数値流体解析は，一般に用いられる2方程式のRANS乱流モデルでは難しいことが知られている⁽¹⁾。フィルム冷却流れはラージエディシミュレーション (Large Eddy Simulation, LES) などの非定常解析によって精度良く予測できることは確認されているが，このよ

うな高コストな非定常解析により冷却孔形状や冷却流条件の最適化を行うことが依然として難しいことから，フィルム冷却流れのRANS予測精度の向上が必要である。

近年，データ駆動型の乱流モデリング手法として，RANS乱流モデルのパラメータおよびモデル式の不確実性に対応するためのアプローチが提案されている。パラメータの不確実性に関しては，データ同化などのベイズ推定手法により，特定の流れ場に対して実験計測データに基づきパラメータを推定する方法が提案されている⁽²⁾⁻⁽⁵⁾。一方，モデル式の不確実性に関しては，レイノルズ応力のブジネスク近似からのずれを直接数値計算 (DNS) の結果を用いて時間平均速度場の関数として機械学習によりオフラインで求め，オンラインではRANS平均速度場を参照しつつ学習した上記関係式を用いて計算する方法が提案されている⁽⁶⁾⁻⁽⁹⁾。

ベイズ推定手法は実験計測データを決定論的な数値解析と融合するための統計的枠組みとして期待できるものの，乱流モデルパラメータを半ば機械的に推定しただけでは，そのパラメータの有効性や適用可能範囲に関して解析条件毎に実験計測値による検証が必要となる。このような制限を緩和するアプローチの一つとして，パラメータの変化と流れ場への影響を関連づけることにより，推定されたパラメータによる解析結果の改善理由を把握する方法が考えられる。

本研究では，RANS乱流モデルのパラメータを冷却効率計測値により校正することでフィルム冷却流れの予測

原稿受付 2018年3月16日

査読完了 2019年1月16日

* 1 東北大学 学際科学フロンティア研究所

〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-3

* 2 (株)IHI

〒235-8501 横浜市磯子区新中原町 1

* 3 東北大学 流体科学研究所

〒980-8577 仙台市青葉区片平 2-1-1

* 4 現在 国立研究開発法人 産業技術総合研究所

E-mail: takashi.misaka@aist.go.jp

精度を向上させることを目的としている。冷却効率の計測値と計算値との差で定義される尤度に基づくサンプリング計算をマルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 法により行い、パラメータの事後確率分布を得る。高コストなサンプリング計算の負荷を低減するために、Kriging応答曲面や固有直交分解 (Proper Orthogonal Decomposition, POD) に基づく次元縮約モデルを用いる。通常、MCMC法では数千から数万回の尤度評価を必要とするが、本研究では数百程度のサンプリング結果から構築された近似モデルにおいてパラメータ推定を行うことで、計算コストを百分の一程度に抑えることが期待できる。本研究では特にRANS乱流モデルのパラメータと流れ場を関連づけることを目的として、POD次元縮約モデルを用いた推定を検討する。最終的に、最尤推定パラメータ値 (最大事後確率推定値) を用いて再度数値解析を行い、実験結果やオリジナルのパラメータ値による解析結果と比較する。加えて、実験計測値に基づくベイズ推定の枠組みを利用して、計測方法のパラメータ推定精度への影響評価を行う。

2. RANS乱流モデルのベイジアンモデル校正

2.1 ベイジアンモデル校正の流れ

パラメータ推定の流れをFig. 1に示す。まず、修正するパラメータの選定と上下限値の設定を行う。モデルパラメータに理論的な制約条件が存在する場合にはそれに基づき決定する。平板境界層などの特定の流れ場に対して、乱流モデルの輸送方程式から決まるパラメータ値は理論的なパラメータ値の目安となるが、対象とする流れ場が大きく異なる場合には大胆な変更を許すというアプローチも可能である。本研究では実験計画法としてラテン超方格法¹⁰⁾を用い、設定した上下限値の範囲内に効率的にパラメータを生成する。

次に各パラメータに対して数値解析を行い、得られた流れ場から近似モデルを構築する。近似モデルを通してマルコフ連鎖モンテカルロ法によるパラメータ推定を行うことで計算コストの増加を抑制する。近似モデルを作成する前処理として、各ケースから得られる冷却効率とその実験値の二乗平均平方根誤差 (RMSE) を評価し、RMSEの小さなケースを利用して近似モデルを作成する。

本研究では近似モデル作成に関して二通りのアプローチを検討する。一つ目は計算された各流れ場において実験計測値に対応する位置での冷却効率を計算し、各流れ場の冷却効率とパラメータ値に関するKriging応答曲面を構築する方法である。このアプローチでは一つの冷却効率計測点に関して一つの応答曲面が必要であり、計測点数が増える毎に応答曲面構築のコストが増加する。

もう一方のアプローチは、パラメータを変化させたときの流れ場データセットに対してPODを適用することで次元縮約モデルを構築し、これを近似モデルとして用いる方法である。このアプローチではパラメータ

に対応した近似流れ場を再構築し、任意の位置での冷却効率を計算することができるため、そのコストが計測点数に依存しない。また、PODによって得られるPOD基底ベクトルがパラメータの変化に対する流れ場の変化の特徴 (主成分) を表すことから、パラメータ変化と流れ場への影響を把握するのに役立つ。加えて、数値解析結果から擬似的な計測値を作成することで、上記の枠組みを利用し、どのような計測がパラメータ推定に有効であるかを検討する。計測位置・計測量を変えた多数回の評価は、POD次元縮約モデルを用いることで効率的に行う。最終的に、最尤推定パラメータ値 (Maximum A Posteriori解, MAP解) を用いて再度数値解析を行い、実験結果やオリジナルのパラメータ値による解析結果と比較する。

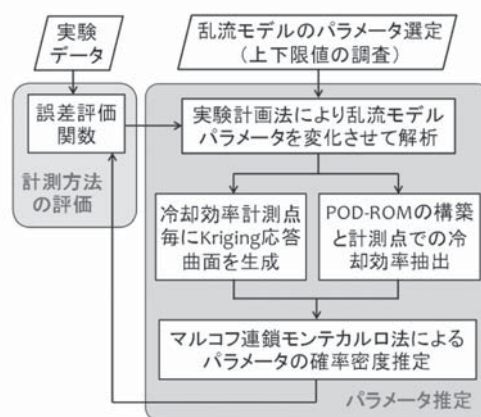


Fig. 1 A flow chart of the data-driven probabilistic parameter estimation procedure

2.2 Kriging応答曲面法

入力パラメータ (乱流モデルパラメータ) と評価値 (壁面の実験計測点で定義される冷却効率) の関係を得るための労力が大きな問題に対して、その応答を近似するために応答曲面法を利用することができる。応答曲面法は近年特に数値流体解析 (Computational Fluid Dynamics, CFD) を用いた最適化に利用され、その有効性が確認されている¹⁰⁾。応答曲面として、多項式法や動径基底関数 (Radial Basis Function, RBF) 法が知られているが、実際の応答分布への適合性の良さや新たなサンプル点の追加指標が得られる利点から、Kriging法を用いる。Kriging法では、 n 個のパラメータからなるベクトル $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ の関数 $y(\mathbf{p})$ を以下のように近似する。

$$\hat{y}(\mathbf{p}) = \mu(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}). \quad (2)$$

ここで $\mu(\mathbf{p})$ は大域的定数モデルであり、与えられたすべてのサンプル点の平均値である。一方、 $\varepsilon(\mathbf{p})$ は局所的モデルであり、点 $\mathbf{p}$ における μ からの変動に相当する。任意の二点間 p_i, p_j の相関行列の大きさと分散を最大化するような尤度関数を考えると、 $\mu(\mathbf{p})$ および $\varepsilon(\mathbf{p})$ は以下のよ

うに表される。

$$\mu(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{f}}{\mathbf{1}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{1}}, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{1}\mu). \quad (3)$$

ここで $\mathbf{R}$ は相関行列、 $\mathbf{f}$ は応答ベクトル、 $\mathbf{1}$ は単位ベクトル、そして、 $\mathbf{r}$ は相関から得られるベクトルである。

2.3 固有直交分解に基づく次元縮約モデル

PODはデータに含まれる変動を最も良く表現する基底ベクトル (POD基底ベクトル) を導出する手法であり、いわゆる主成分分析である。すなわち、

$$\arg \min_{\Psi} \|\mathbf{U} - \Psi \Psi^T \mathbf{U}\|. \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{U}$ はデータの含まれる行列、 Ψ は直交基底ベクトル (POD基底ベクトル) である。CFD結果に対してPODを適用する場合には、一定間隔で流れ場を保存し、その流れ変数ベクトルを並べることで以下のように行列 $\mathbf{U}$ を構成する (Snapshot POD)^[10]。本研究では乱流モデルパラメータを変更して得られる流れ場を以下のように行列 $\mathbf{X}$ にまとめる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1^1 & \cdots & u_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ u_n^1 & \cdots & u_n^m \end{bmatrix}. \quad (5)$$

ここで、添え字 n はCFDのデータ数 (流れ場変数×格子点数)、 m は乱流モデルパラメータセット数に対応する流れ場の数である。これを利用して行列 $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ の固有値問題

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} \boldsymbol{\phi}_i = \lambda_i \boldsymbol{\phi}_i, \quad (6)$$

を解くことで固有値 λ_i と固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_i$ を得る。これからPOD基底ベクトルは

$$\boldsymbol{\Psi}_i = \mathbf{U} \boldsymbol{\phi}_i / \sqrt{\lambda_i}, \quad (7)$$

と定義される。このとき、流れ場の変動に対する各POD基底ベクトル (モード) の寄与率が、固有値 λ_i からわかる。すなわち、主要なPOD基底ベクトルは乱流モデルパラメータを変化させたときにCFDから得られる流れ場の変動をよく表すように構成されることから、パラメータの変化が流れ場に与える影響を把握するのに適していると考えられる。POD基底ベクトルを用いると元の流れ場は以下のように再構成することができる。

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^P \alpha_i \boldsymbol{\Psi}_i. \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{u}$ は分解される流れ場の変数、 $\bar{\mathbf{u}}$ は時間平均成分で空間の関数、 $\boldsymbol{\Psi}_i$ は式(7)で求めたPOD基底ベクトルであり、そして、 α_i は基底ベクトルの重ね合わせに用いる係数である。右辺第二項の和 P は流れ場の近似度に応じて設定する。パラメータを変化させたときの各流れ場に対応したPOD係数は以下のようにして求めることができる。

$$\alpha_i = \langle \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\Psi}_i \rangle. \quad (9)$$

ここで $\langle \cdot \rangle$ は内積を表す。この係数 α_i を乱流モデルパラメータの関数として補間することにより、非計算条件での流れ場を再構築する (POD次元縮約モデル)。本研究では放射基底関数 (Radial Basis Function, RBF) 法によりPOD係数を補間する。すなわち、モード i のPOD係数は放射基底関数 ϕ の線形結合によって、

$$\alpha_i^{RBF} = f_i(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^P w_{i,j} \cdot \phi(r_j), \quad (10)$$

と表される。ここで $w_{i,j}$ は重み係数、 $\mathbf{p}$ は乱流モデルパラメータをまとめたベクトル、 $r_j = r_j = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_j\|$ で定義される距離、 $\mathbf{p}_j$ はサンプルされたケースのパラメータベクトルである。また、基底関数 $\phi(r_j)$ は

$$\phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + r_0^2}, \quad (11)$$

と定義される。ここで r_0 はパラメータであり、補間誤差が小さくなるように交差判定等によって定義する。

2.4 マルコフ連鎖モンテカルロ法

マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 法では、あるパラメータ値における実験値と計算値の近さを表す尤度 P_I を評価し、ある割合 (遷移確率) でパラメータ値を更新することでパラメータの事後確率分布を得る方法である。

$$P_I(\mathbf{p}, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^N} \exp \left[-\frac{(\boldsymbol{\eta}_{exp} - \boldsymbol{\eta}_{cal})^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (12)$$

ここで $\boldsymbol{\eta}_{exp}$ および $\boldsymbol{\eta}_{cal}$ は冷却効率の実験値および計算値を N 個並べたベクトルである。標準偏差 σ は計測誤差など本推定で陽にパラメータ化されていない誤差を表現する。よく用いられるメトロポリス法の処理手順は以下のようになる。

- ① 初期位置 (パラメータ) を設定: $\mathbf{p}_{now}$
- ② 新しい位置の計算: $\mathbf{p}_{new} = \mathbf{p}_{now} + \sigma \text{rand}()$
- ③ 遷移確率の計算: $\gamma = \min \left[1, \frac{P_I(\mathbf{p}_{new}, \sigma_{new}^2)}{P_I(\mathbf{p}_{now}, \sigma_{now}^2)} \right]$
- ④ パラメータの更新: $\begin{cases} \mathbf{p}_{now} = \mathbf{p}_{new} & (\gamma > \text{rand}()) \\ \mathbf{p}_{now} = \mathbf{p}_{now} & (\text{otherwise}) \end{cases}$
- ⑤ ②に戻って繰り返す

ここで $\text{rand}()$ は $[0,1]$ の乱数である。上記アルゴリズムでは尤度比 $P_I(\mathbf{p}_{new}, \sigma_{new}^2) / P_I(\mathbf{p}_{now}, \sigma_{now}^2)$ が1に近いほど $\mathbf{p}_{now}$ が更新されやすくなる。

一般にMCMC法によるパラメータの推定では尤度の評価回数が非常に多くなることから計算コストが大きい。ここではKriging応答曲面およびPOD次元縮約モデルを通してMCMC法によるパラメータ探索を行うことでコストの問題を回避する。尤度の最大化によるパラメータの探索は、勾配法や遺伝的アルゴリズムによる

最適化計算と類似であるが、最適化計算においてはパラメータの最適値を求めているのに対して、MCMC法では最適値周辺を広く探索することにより、パラメータ値の確率分布を得ることができる。

2.5 サポートベクターマシン

近似モデルの構築においては、流れ場が振動するなど、実際の流れ場から大きく乖離しているような非物理的ケースを除くことで、近似モデルの精度を向上させると共にMCMCによるパラメータの推定範囲を適切に設定する。本研究ではRayらと同様にサポートベクターマシン (Support Vector Machine, SVM) を用いた^{(4), (12)}。まず、各ケースの冷却効率のRMSEを評価し、RMSEの小さなケースと大きなケースを分ける閾値を設定し、RMSEの小さなケースを1、大きなケースを0とラベル付けする。本研究ではCFD解析を行った100ケースのうちRMSEの小さな50ケースを近似モデル構築に利用した。各モデルパラメータと上記ラベルの組に対して、二値SVMを適用することにより任意のパラメータ値入力に対する0-1判定を行い、前述のMCMC推定において、0と判定されたケースを棄却する。これはMCMC推定において $P_i(\mathbf{p}, \sigma^2) \rightarrow P_i(\mathbf{p}, \sigma^2)P_p(\mathbf{p})$ と置き換えることで実現することができる。ここで $P_p(\mathbf{p})$ はSVMの判定により以下のように定義される。

$$P_p(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & (\text{small RMSE}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (13)$$

3. フィルム冷却流れの解析

3.1 流体計算法

流体解析にはANSYS社の流体解析ソルバー Fluent 16.2を3次元・単精度で利用した。Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations (SIMPLE) アルゴリズムによる圧縮流体の定常解析を行った。ナビエ・ストークス方程式の運動量方程式、エネルギー式および乱流モデル方程式にはセルベース最小二乗法による勾配を使った3次精度MUSCL、密度には2次精度風上差分、圧力には2次精度のスキームを利用している。時間積分は2次精度の陰解法である。乱流モデルにはSST $k-\omega$ 乱流モデルを利用した。Fig. 2および3にそれぞれ計算領域と計算格子 (冷却孔付近) を示す。要素数は6,424,800、総節点数は6,586,780である。主流部の流入境界条件は流速20 m/s、温度298 K、流出部は圧力出口境界条件とした。冷却流は温度188 K (密度比1.6)、質量流量 2.98×10^{-3} kg/sの境界条件 (運動量比1.0) を与えた。主流部のスパン方向には周期境界条件を適用している。冷却効果を示す指標として本論文では式(14)で定義される冷却効率 η を用いる。

$$\eta = \frac{T_{main} - T_{wall}}{T_{main} - T_{jet}} \quad (14)$$

ここで T_{main} 、 T_{jet} および T_{wall} はそれぞれ主流温度、冷却流温度および冷却された壁面の温度である。

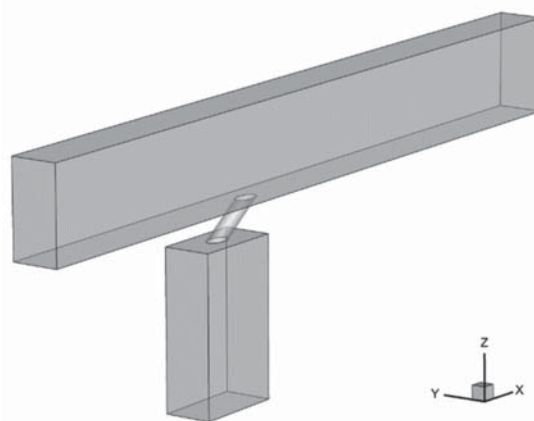


Fig. 2 A computational domain for a jet-in-crossflow configuration

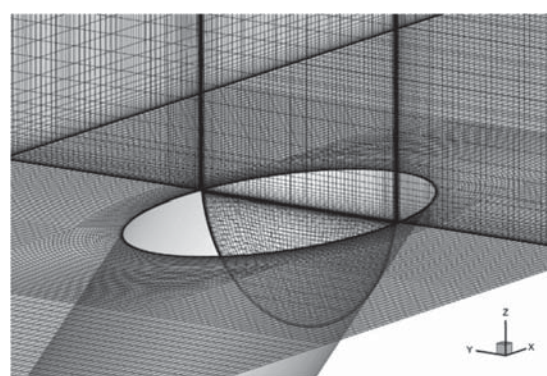


Fig. 3 A close-up view near a cooling hole exit of the computational mesh

3.2 SST乱流モデルと推定パラメータの設定

本研究ではMenterによって提案されたSST $k-\omega$ 乱流モデルのパラメータに関して検討を行った。SST $k-\omega$ 乱流モデルは内層と外層でモデル係数を変化させることによりモデルを切り替えているため、内層および外層にそれぞれモデルパラメータが存在する。ここではTable 1に示すパラメータを可変とし、計測データに基づき推定することとした。パラメータの定義はMenter⁽¹³⁾に従う。パラメータ変更後に流れ場の収束に必要な反復回数の事前検討を行い、本研究ではすべてのケースで2000回の反復を行った後に冷却効率を評価することとした。Bergmannらはパラメータの可動範囲として、SST $k-\omega$ 乱流モデルのモデルパラメータ値の半分および2倍の値を最小および最大値としている⁽¹⁴⁾。本研究ではより広範囲に設定し、解析結果の妥当性や計算可能性をもとにパラメータの範囲を絞っていくことにした。比散逸率 ω の輸送方程式の生成項に含まれる係数 γ_1 および γ_2 は以下の式(15)から決定されている。本研究では生成項が負にならないという制約条件を与え、 γ_1 または γ_2 が負になった場合にそのケースを除外した。また、本流れ場において、パラメータ a_1 が0.25より小さい場合に流れ場のはく離・非定常化が著しくなることが事前検討から明らかだったため、0.25以上に制限した。

$$\gamma_1 = \frac{\beta_1}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 1} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2}{\beta^*} - \frac{\sigma_{\omega 2} \kappa^2}{\sqrt{\beta^*}}. \quad (15)$$

今回扱ったフィルム冷却流れの条件では、Table 1の上下限値の設定でも計算が発散することはなかったが、流れが非定常になり定常流れ場に収束しないケースは散見された。

Table 1 Parameter values considered in the estimation

	Original	Minimum	Maximum
β_1	0.075	0.01	0.5
β_2	0.0828	0.01	0.5
$\sigma_{\omega 1}$	0.5	0.2	10.0
$\sigma_{\omega 2}$	0.856	0.2	10.0
σ_{k1}	0.85	0.2	10.0
σ_{k2}	1.0	0.2	10.0
a_1	0.31	0.25	1.5
β^*	0.09	0.01	0.5
Pr_t	0.85	0.1	1.5

フィルム冷却流れでは主流の境界層厚さが冷却効率の評価結果に影響するため、実験条件⁽¹⁵⁾に境界層プロファイルを合わせるための流入条件の調整を行った。計算にはSST $k-\omega$ 乱流モデルのモデルパラメータ値を用いた。Table 2に境界層厚さの実験との比較を示す。この比較では冷却流流量をゼロとし、冷却孔中心軸上のいくつかの点で排除厚さ δ_1 、運動量厚さ δ_2 および形状係数 H の評価を行った。流入境界条件として、 $x/d=-2.0$ 位置での境界層厚さを実験値に合わせるために、流入境界条件として厚みは $0.21D$ の層流境界層プロファイルを設定した。 k および ω は主流乱れ度を実験条件に合わせて一様流入とした。Table 2から下流では境界層厚さの発達を実験値と比較して小さいことがわかる。また、形状係数から実験、計算共に発達した乱流境界層となっていることが確認できる。

Table 2 Boundary layer thickness for the case without cooling flow in comparison with the experiment

	δ_1/D		δ_2/D		H	
x/D	CFD	Exp ⁽¹⁵⁾	CFD	Exp ⁽¹⁵⁾	CFD	Exp ⁽¹⁵⁾
-2.0	0.088	0.089	0.057	0.059	1.55	1.50
6.5	0.124	0.120	0.080	0.083	1.56	1.47
15.0	0.139	0.143	0.094	0.098	1.49	1.46
23.0	0.154	0.167	0.106	0.115	1.46	1.44

4. パラメータのベイズ推定

4.1 実験値による絞り込み

Fig. 4 (a)に100ケースの解析から得られた冷却孔中心軸に沿った冷却効率の分布を示す。Table 1に示した範囲のパラメータ変化によって冷却効率が大きく変化することがわかる。特に流れに沿って振動している分布は流れ場自体が振動しているケースである。Fig. 4 (a)には同条件で得られた実験値を黒丸で示している^{(16),(17)}。 $x/d=5$ 以降では冷却効率が実験値よりも小さなケースが少ない

ことから、Table 1のパラメータ範囲では冷却効率の小さなケースを表現できていないことがわかる。SVMによって非物理的なケースを除いた結果をFig. 4 (b)に示す。ここではRMSEの小さな上位50ケースを残しており、冷却効率が実験値から特に逸脱したケースが除かれている。本研究ではFig. 4 (b)に示すケースを用いて近似モデルを構築する。

Fig. 5にパラメータの事前分布を示す。横軸がパラメータ値、縦軸が密度分布を示している。上記のように100ケースのうちRMSEの小さな50ケースとそれ以外の50ケースに分類して学習したSVMから得られた式(13)を用いて、MCMCによって推定したパラメータの確率分布を事前分布として示している。Fig. 5の破線はSST乱流モデルの標準パラメータ値を示している。 σ_{k1} および

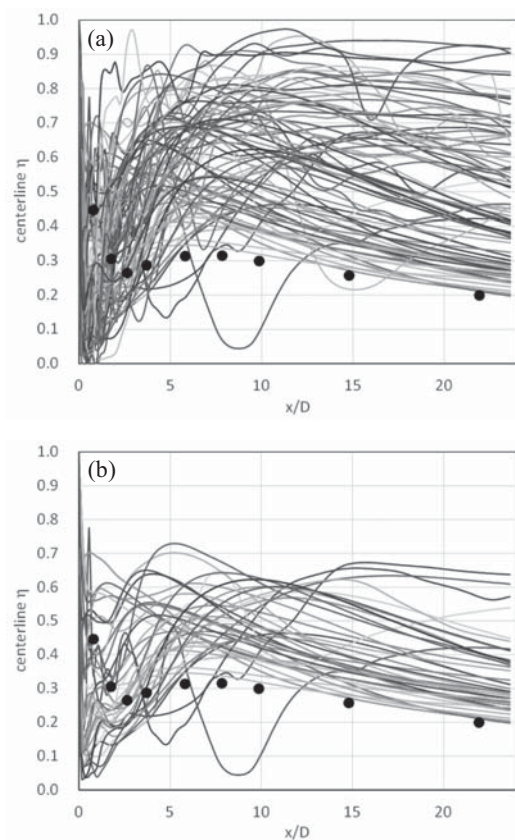


Fig. 4 Spreads of centerline film cooling effectiveness, (a) simulated cases and (b) those after excluding unphysical cases

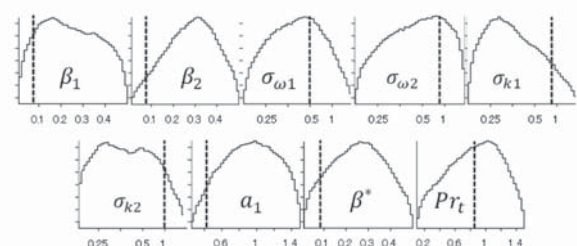


Fig. 5 Prior density distributions of model parameters

σ_{k2} を除くパラメータは標準値よりも大きな値にすることで冷却効率のRMSEが小さくなることがわかる。また、分布のピークがパラメータの上下限值に張り付くこともないため、設定したパラメータの上下限值が妥当であることが確かめられる。

4.2 Kriging応答曲面法によるパラメータ推定結果

Fig. 6に冷却効率の計測値を用いてMCMC法によって推定したモデルパラメータの事後分布を示す。尤度を評価するための実験値として、Fig. 4に丸印で示す中心軸上およびスパン平均された冷却効率を用いた。Fig. 5ではRMSEが比較的小さなケースを用いて事前分布としていたため緩やかな密度分布となっているが、Fig. 6の事後分布ではRMSEの特に小さくなるパラメータ値に対して尤度が高くなるため急峻な密度分布となっている。また、事前分布のピークが事後分布のピークと必ずしも一致していないことが確かめられる。Fig. 6には尤度関数で定義した標準偏差 σ の確率分布も示している。標準偏差の値は0.21であり、式(12)に示す尤度関数の定義ではモデル式の不確実性や計測値の不確実性がこの標準偏差として表現されていることになる。 $\sigma_{\omega 1}$ および a_1 は多峰分布となっており、このような分布はアンサンブルカルマンフィルターや粒子数の少ない粒子フィルターでは推定の困難な分布である。Table 3にパラメータの密度分布のピーク値から得た推定値を示す。ここで得られた推定値は一般的なモデル係数と大きく異なっており、特に乱流エネルギーの散逸率に関わるパラメータ β^* は3倍以上の値になっている。このパラメータセットが乱流場予測に及ぼす影響については、慎重な検討が必要である。

Fig. 7および8にSST $k-\omega$ 乱流モデルおよび推定されたパラメータで得られた主流速度および温度の分布を示

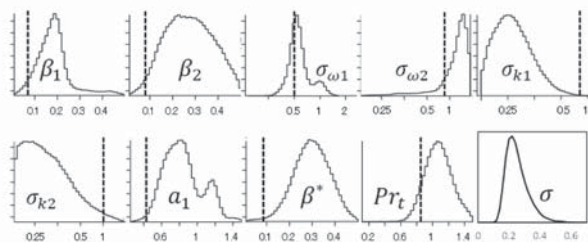


Fig. 6 Posterior density distribution inferred by the measured film-cooling effectiveness

Table 3 Estimated SST model parameters

	Original	Minimum
β_1	0.075	0.1939
β_2	0.0828	0.2788
$\sigma_{\omega 1}$	0.5	0.5276
$\sigma_{\omega 2}$	0.856	2.6344
σ_{k1}	0.85	0.2554
σ_{k2}	1.0	0.2282
a_1	0.31	0.8056
β^*	0.09	0.3023
Pr_t	0.85	1.0614

す。パラメータを機械的に振った結果では、流れ場の振動など非物理的なケースも含まれるが、冷却効率の実験値からの誤差が小さい推定ケースでは、SST $k-\omega$ 乱流モデルのパラメータで解析されたに近い流れ場が得られていることが確認できる。

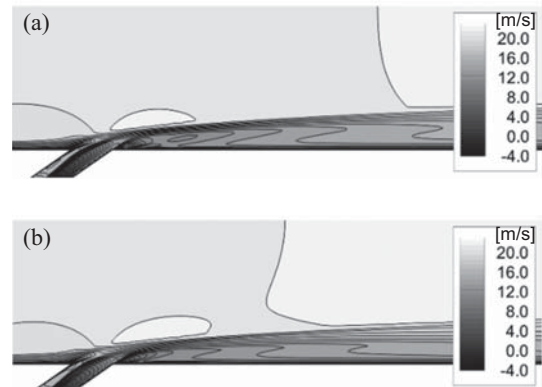


Fig. 7 Streamwise velocity distribution on a central slice, (a) SST original, (b) SST estimated



Fig. 8 Temperature distribution on a central slice, (a) SST original, (b) SST estimated

Fig. 9に冷却孔前後の主流方向速度分布の比較を示す。推定されたモデルパラメータを用いた結果においても、冷却孔直前の境界層速度分布は大きく変わらないことが確かめられる。一方で、冷却孔直後の速度分布では $z/D=1$ より小さい領域で減速されていることがわかる。この冷却流を含む流れの減速がSST $k-\omega$ 乱流モデルのパラメータに対する推定パラメータの冷却効率の低下に対応していると考えられる。

推定されたパラメータを用いて冷却効率を評価した結果をFig. 10に示す。中心線上の冷却効率はSSTモデルの標準パラメータ値を用いた結果と比較して、推定したモデルパラメータを用いることで大きく実験値に近づくことがわかる。スパン平均した冷却効率に関しては、 $x/d=5$ より小さい位置では推定パラメータの結果が実験値に近く、それ以降では実験値の冷却効率の上昇を追従できていないことがわかる。一方で中心線の冷却効率は下流側で計測値よりも大きくなっていることから、実験値

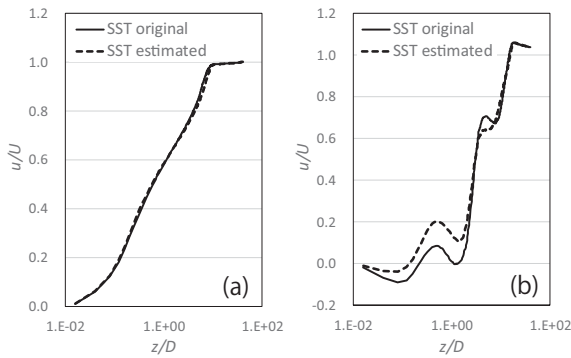
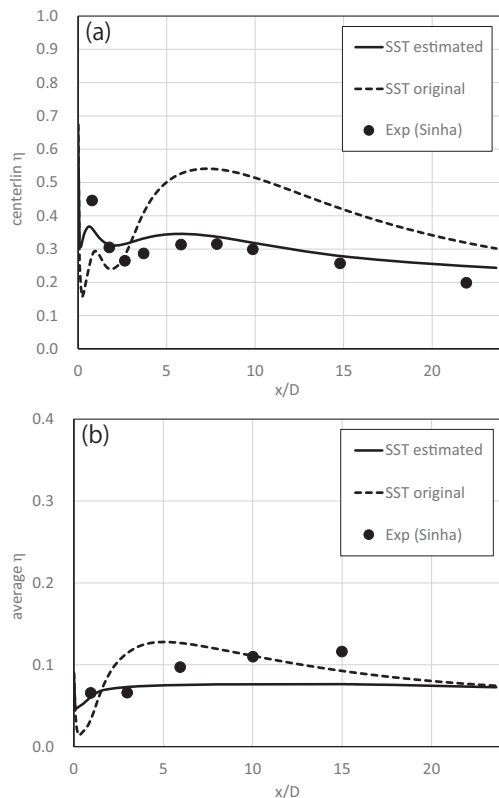
Fig. 9 Streamwise velocity profiles at (a) $x/D = -2.0$, (b) $x/D = 2.0$.

Fig. 10 Film-cooling effectiveness, (a) centerline, (b) span-average

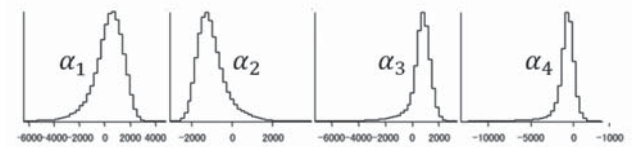
によって最適化したパラメータを用いたとしても, SST $k-\omega$ 乱流モデルでは冷却流の広がりを表現するのが難しいことがわかる。これはレイノルズ応力の線形近似が影響していると考えられ, 非線形の構造式やレイノルズ応力の輸送方程式を解くレイノルズ応力モデルを用いることで改善する可能性がある⁽⁶⁾。

これらのパラメータの妥当性の評価は一般には難しい問題であると考えられる。次節では, パラメータの変化が流れ場に与える影響を把握しつつパラメータ推定を行う手法として, POD次元縮約モデルの可能性を検討する。

4.3 POD次元縮約モデルによる推定結果の解釈

POD次元縮約モデルの作成には25次元までのPOD基底を用いた ($P=25$)。これはパラメータ変更時の流れ場の変化の99%を近似するように選んだ。POD次元縮約モデルによる乱流モデルパラメータの推定結果は, Fig. 6に

示すKriging応答曲面の結果と同様であった。MAPパラメータに対応するモード1から4までのPOD係数の確率分布をFig. 11に示す。また, 確率が最大となるPOD係数をTable 4に示す。これらはFig. 11の横軸の数値に対応している。この4モードで流れ場の変動の約75%を捉えている。

Fig. 11 Posterior density distribution of POD coefficients from 1st to 4th mode inferred by the experimentTable 4 Maximum a posteriori estimates of POD coefficients from 1st to 4th mode

Mode #	Estimated value
α_1	507.507
α_2	-1333.959
α_3	793.065
α_4	-655.168

Fig. 12に壁面温度の平均, 1次および2次モードを示す。ここで, これらの主要PODモードは壁面温度の主要な変化の仕方に対応している。これらの図では温度の高低を濃淡で示している。壁面温度は平均および各モードの重ね合わせとなるので, 1次モードに関して冷却孔下流の中心軸上を考えると, 冷却孔付近で壁面温度を下げ, 下流側で温度を上げるようなモードになっていることがわかる (1次モードの係数はTable 4に示すように正の値)。平均にこの1次モードが加わることで, Fig. 10(a)に示すように冷却効率の実験値に近づく。また, Fig. 13では冷却流によって発生する縦渦をスパン方向速度で示しているが, 上記のように平均と1次モードの足し合わせを考えることで, 1次モードが渦対の高さを低くするように働いていることがわかる。渦対の高さが低くなることで, 冷却域がスパン方向に広がると考えられ, 温度モードの結果とも矛盾しない。

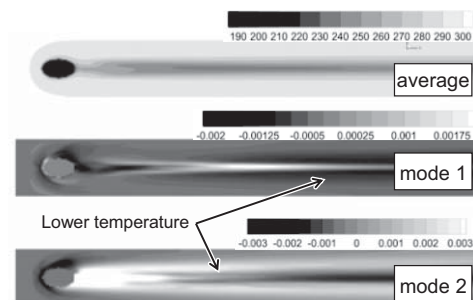


Fig. 12 Temperature average, 1st- and 2nd-modes on wall surface.

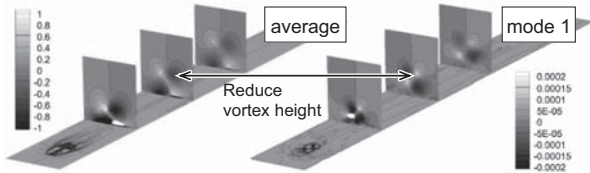


Fig. 13 Spanwise velocity average and 1st mode on several cross-sections

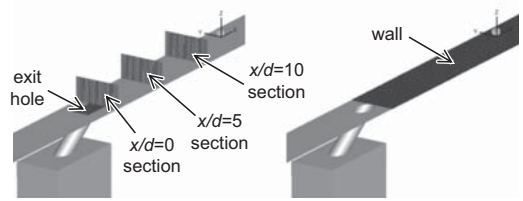


Fig. 14 The measurement positions considered in the numerical experiment

5. パラメータ推定における計測位置の影響

データ同化においては、一般にどの位置でどのような計測を行うかによって状態推定の精度が変わる。本研究で行うパラメータ推定にも同様のことが言えるため、計測位置・計測物理量の違いがパラメータ推定にどのような影響を与えるかを検討した。

任意の実験計測データを得るのは現実的ではないことから、ここでは基準となるパラメータ値の計算結果を擬似的な計測値として数値実験を行う。これにより、基準パラメータで得られた基準流れ場から任意の位置で物理量を抽出して、擬似的な計測値として扱うことができる。計測位置はFig. 14に示すように、冷却孔出口面、 $x/D=0, 5$ および10の断面、冷却孔下流の壁面、そして、Fig. 10で用いた実験値に相当する中心軸およびスパン平均の物理量である。加えて、 $x/D=5$ および20の位置における壁面温度のスパン方向分布を $x/d=5$ spanおよび $x/d=20$ spanとしてFig. 15に示している。これらの計測位置において温度、よどみ圧力および流速（それぞれ、Fig. 15横軸のtemp, ptotおよびvelcに対応）を抽出し、疑似的な計測値とした。

上記のようにして得られた基準流れ場、疑似計測値および基準パラメータを用いて、計測の評価は以下のようにして行われる。すなわち、式(12)で η_{exp} を疑似計測値 η_{ref} に置き換えた式(16)で表される尤度関数を最大化するパラメータ $\mathbf{p}$ を推定する。

$$P_l(\mathbf{p}, \sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^N} \exp \left[-\frac{(\eta_{ref} - \eta_{cal})^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (16)$$

このとき、 η_{ref} は基準流れ場 $\mathbf{u}(\mathbf{p}_{ref})$ から得られた疑似計測値、 η_{cal} はサンプルされた流れ場 $\mathbf{u}(\mathbf{p}_{cal})$ から得られた疑似計測値に対応する。

$$\eta_{ref} = h[\mathbf{u}(\mathbf{p}_{ref})], \quad \eta_{cal} = h[\mathbf{u}(\mathbf{p})]. \quad (17)$$

ここで h は観測演算子である。このようにして推定されたモデルパラメータ $\mathbf{p}$ と基準流れ場に対応する基準パラメータ $\mathbf{p}_{ref}$ のRMSEを式(18)のように求めることで計測方法の善し悪しを評価する。

$$E_m = \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_{ref}\|_2. \quad (18)$$

Fig. 15 (a)および(b)に計測位置を変えたときのパラメータ β_1 および β_2 の推定誤差 E_m を示す。相対的な比較を濃淡で示しており、色の濃い部分で推定誤差が小さいことになる。結果から流出孔で温度を計測した場合のバ

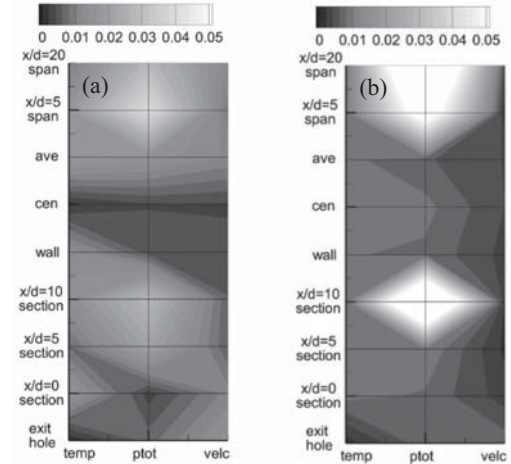


Fig. 15 The impact of the measurement positions on the reduction of estimation errors

ラメータ推定誤差が小さいことがわかる。一方で、下流断面での圧力の計測結果はパラメータ推定には向かないことが確認できる。

6. 結言

本研究では、RANS解析によるフィルム冷却効率の予測精度向上を実現するために、RANS乱流モデルパラメータを実験値に基づいて校正する手法を検討した。近似モデルとしてKriging応答曲面法およびPOD次元縮約モデルを利用することで尤度評価の計算コストを下げ、MCMC法によってパラメータの事後確率分布を得た。予測されたパラメータの最大事後確率推定値を用いた検証解析から、実験値に近いフィルム冷却効率を得られることを確認した。ただし、推定値は一般的なモデル係数と大きく異なっており妥当性についてはさらなる検討が必要である。また、POD次元縮約モデルによるパラメータ推定から、PODモードと温度場・流れ場の修正との関連づけを行った。そして、パラメータ推定の枠組みを利用して計測方法のパラメータ推定精度への影響評価を行った。一方で、近似モデルの精度はパラメータ推定の精度に直接影響するため、十分に精度検証を行う必要がある。

本研究はフィルム冷却流れにおける冷却効率の予測精度向上を目的としており、特にフィルム冷却流れの条件（密度比、運動量比など）や冷却孔形状の変化に対して汎用的な予測性能を持たせることを目指している。今後

の課題としては、推定されたパラメータセットの適用範囲を明確にすることが挙げられる。

参考文献

- (1) Harrison, K. L. and Bogard, D. G., "Comparison of RANS Turbulence Models for Prediction of Film Cooling Performance," Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, GT2008-51423 (2008).
- (2) Kato, H., Ishiko, K. and Yoshizawa, A., "Optimization of Parameter Values in the Turbulence Model Aided by Data Assimilation," AIAA Journal, Vol. 54, No. 5 (2016), pp. 1512-1523.
- (3) Guillasa, S., Gloverb, N. and Malki-Epshteinb, L., "Bayesian Calibration of the Constants of the $k-\epsilon$ Turbulence Model for a CFD Model of Street Canyon Flow," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 279 (2014), pp. 536-553.
- (4) Ray, J., Lefantzi, S., Arunajatesan, S. and Dechant, L., "Bayesian Parameter Estimation of a $k-\epsilon$ Model for Accurate Jet-in-Crossflow Simulations," AIAA Journal, Vol. 54, No. 8 (2016), pp. 2432-2448.
- (5) Duraisamy, K., Zhang, Z. J. and Singh, A. P., "New Approaches in Turbulence and Transition Modeling Using Data-driven Techniques," AIAA Paper 2015-1284, 2015.
- (6) Ling, J. and Templeton, J., "Evaluation of Machine Learning Algorithms for Prediction of Regions of High Reynolds Averaged Navier Stokes Uncertainty," Physics of Fluids, Vol. 27 (2015), pp. 085103-1-22.
- (7) Ling, J., Ruiz, A., Lacaze, G. and Oefelein, J., "Uncertainty Analysis and Data-Driven Model Advances for a Jet-in-Crossflow," ASME Journal of Turbomachinery, Vol. 139 (2017), 021008-1.
- (8) Xiao, H., Wu, J. L., Wang, J. X., Sun, R. and Roy, C. J., "Quantifying and Reducing Model-Form Uncertainties in Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulations: A Data-Driven, Physics-Informed Bayesian Approach," Journal of Computational Physics, Vol. 324 (2016), pp. 115-136.
- (9) Wang, J.-X., Wu, J.-L. and Xiao, H., "Physics-Informed Machine Learning for Predictive Turbulence Modeling: Using Data to Improve RANS Modeled Reynolds Stresses," arXiv:1606.07987, 2016.
- (10) Forrester, A., Sobester, A. and Keane, A., Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide, (2008), Wiley.
- (11) Sirovich, L., "Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures I - Coherent Structures," Vol. 45 (1987), pp. 561-571.
- (12) Suykens, J. A. K. and Vandewalle, J., "Least Squares Support Vector Machine Classifiers," Neural Processing Letters, Vol. 9 (1999), pp. 293-300.
- (13) Menter, F. R., "Two-Equation Eddy Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications," AIAA Journal, Vol. 32 (1994), pp. 1598-1605.
- (14) Bergmann, C., Ormiston, S. and Chatoorgoon, V., "Sensitivity Studies of Shear Stress Transport Turbulence Model Parameters on the Prediction of Seven-Rod Bundle Benchmark Experiments," Transactions of ASME, Journal of Nuclear Engineering and Radiation Science, Vol.2 (2015), pp. 011012-1-10.
- (15) Pietrzyk, J. R., Bogard, D. G. and Crawford, M. E., "Effects of Density Ratio on the Hydrodynamics of Film Cooling," Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 112 (1990), pp. 437-443.
- (16) Kohli, A. and Bogard, D. G., "Adiabatic Film Effectiveness, Thermal Fields, and Velocity Fields for Film Cooling with Large Angle Injection," Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 119 (1997), pp. 352-358.
- (17) Sinha, A. K., Bogard, D. G. and Crawford, M. E., Film Cooling Effectiveness Downstream of a Single Row of Holes with Variable Density Ratio, Transactions of the ASME, Journal of Turbomachinery, Vol. 113 (1991), pp. 442-449.