

複素ガウス積分

中嶋慧

2025 年 7 月 29 日

1 複素ガウス積分

$z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T$ とする。 T は転置であり、 z_i は複素数である。 A を N 次の複素正方行列とする。 A はエルミート行列とは限らない。 b, c を N 次元の列ベクトルとする。このとき、

$$I := \int d^{2N} z \exp \left(-z^\dagger A z + b^\dagger z + z^\dagger c \right) = \frac{\pi^N}{\det A} \exp(b^\dagger A^{-1} c) \quad (1.1)$$

を示す。 † はエルミート共役であり、

$$\int d^{2N} z = \prod_{i=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} d(\operatorname{Re} z_i) \int_{-\infty}^{\infty} d(\operatorname{Im} z_i)$$

である。 Re は実部、 Im は虚部を表す。ただし、

$$A + A^\dagger > 0 \quad (1.2)$$

を仮定した。

まず、後で示すように、

$$\int d^2 z \exp(-a z^* z) = \frac{\pi}{a} \quad (\operatorname{Re} a > 0) \quad (1.3)$$

である。これから、

$$\int d^{2N} z \exp \left(-z^\dagger A z \right) = \frac{\pi^N}{\det A} \quad (1.4)$$

が以下のように得られる。ユニタリー変換 $z = U w$ で、 $A' := U^\dagger A U$ を上三角行列にできる。このとき、

$$\begin{aligned} z^\dagger A z &= w^\dagger A' w \\ &= \sum_{i,j=1}^N w_i^* (A')_{ij} w_j \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N w_i^* (A')_{ij} w_j \\ &= w_1^* (A')_{11} w_1 + w_1^* (A')_{12} w_2 + \dots + w_1^* (A')_{1N} w_N \\ &\quad + w_2^* (A')_{22} w_2 + w_2^* (A')_{13} w_3 + \dots + w_2^* (A')_{2N} w_N \\ &\quad + \dots + w_N^* (A')_{NN} w_N \end{aligned} \quad (1.5)$$

である。まず w_1, w_1^* の積分を実行する。上式は、

$$z^\dagger A z = w_1^*(A')_{11} w_1 - w_1^* c_1 + d_1 \quad (1.6)$$

と書ける。 c_1 は w_1 について定数で、 d_1 は w_1, w_1^* について定数である。よって、

$$\begin{aligned} \int d^2 w_1 \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) &= \int_C dx \int_C dy \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) \\ &= \int_{C_R} dx \int_{C_I} dy \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) \end{aligned} \quad (1.7)$$

を考える。ここで x, y は w_1 の実部と虚部であり、 C は実軸である。 C_R, C_I はそれぞれ C と平行である。いま、 α, β を複素数の定数とし、

$$x' := x + \alpha, \quad (1.8)$$

$$y' := y + \beta \quad (1.9)$$

とすると、

$$\int_{C_R} dx \int_{C_I} dy \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) = \int_C dx' \int_C dy' \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) \quad (1.10)$$

とできる。さて、上の変数変換 $x \rightarrow x', y \rightarrow y'$ に伴い、

$$w_1 \rightarrow w_1' := w_1 + (\alpha + i\beta), \quad w_1^* \rightarrow w_1^{*'} := w_1^* + (\alpha - i\beta) \quad (1.11)$$

となる。すなわち、 γ, δ を任意の複素数とすると、変数変換

$$w_1 \rightarrow w_1' := w_1 + \gamma, \quad w_1^* \rightarrow w_1^{*'} := w_1^* + \delta \quad (1.12)$$

をしたことになる。さて、

$$-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 = -\left[w_1^* - \frac{c_1}{(A')_{11}}\right] (A')_{11} w_1 \quad (1.13)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \int d^2 w_1 \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 + w_1^* c_1 - d_1) &= \int d^2 w_1 \exp(-w_1^*(A')_{11} w_1 - d_1) \\ &= \frac{\pi}{(A')_{11}} e^{-d_1} \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。 w_2, w_2^* の積分も同様に実行し、

$$\int d^2 w_2 e^{-d_1} = \frac{\pi}{(A')_{22}} e^{-d_2} \quad (1.15)$$

のようになる。従って、

$$\begin{aligned} \int d^{2N} z \exp(-z^\dagger A z) &= \frac{\pi^N}{(A')_{11}(A')_{22} \cdots (A')_{NN}} \\ &= \frac{\pi^N}{\det A'} \\ &= \frac{\pi^N}{\det A} \end{aligned} \quad (1.16)$$

となる。

さて、

$$\begin{aligned}
I &= \int d^{2N}z \exp \left(-z^\dagger A z + b^\dagger z + z^\dagger c \right) \\
&= \int d^{2N}z \exp \left(- \left[z^\dagger - b^\dagger A^{-1} \right] A \left[z - A^{-1} c \right] + b^\dagger A^{-1} c \right)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

である。変数変換

$$z \rightarrow z' := z - A^{-1}c, \quad z^\dagger \rightarrow z'^\dagger := z^\dagger - b^\dagger A^{-1} \tag{1.18}$$

をすると、

$$\begin{aligned}
I &= \int d^{2N}z \exp \left(-z^\dagger A z + b^\dagger A^{-1}c \right) \\
&= \frac{\pi^N}{\det A} \exp \left(b^\dagger A^{-1}c \right)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

を得る。

最後に、(1.3)を示す。(1.3)は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\operatorname{Re} a > 0) \tag{1.20}$$

から直ちに得られるので、これを示す。これは、

$$\int_0^{\infty} dx \exp(-ax^2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} e^{-i\phi/2} \tag{1.21}$$

と等価である。ここで、

$$a = |a|e^{i\phi}, \quad -\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2} \tag{1.22}$$

とした。いま、 C_1 を原点から始まり、 $e^{-i\phi/2}$ の方向に伸びる直線とすると、

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} dx \exp(-ax^2) &= \int_{C_1} dz \exp(-az^2) \\
&= e^{-i\phi/2} \int_0^{\infty} dx \exp(-|a|x^2) \\
&= e^{-i\phi/2} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{|a|}}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

であるから、(1.20)が示された。