

1

(30 点)

次の各問に答えよ.

問 1 x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする. このとき $2xy + 4xz - yz = 0$ であることを示せ.

問 2 $n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ.

2

(30 点)

実数 a, b についての次の条件(*)を考える.

(*) ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と, ある実数 c に対して, x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ.

この条件(*)を満たす点 (a, b) 全体の集合を座標平面上に図示せよ.

3

(30 点)

n は正の整数とする. 1 枚の硬貨を投げ, 表が出たら 1, 裏が出たら 2 と記録する. この試行を n 回繰り返し, 記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る. ただし, 数の表し方は十進法とする. このとき, X が 6 で割り切れる確率を求めよ.

4

(30 点)

座標平面において、曲線 $C_1: y = x^2 - 2|x|$ 、曲線 $C_2: y = x^2 - 5x + \frac{7}{4}$ 、直線 $l_1: x = \frac{3}{2}$ を考える。

- (1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し、さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ。
- (2) C_1 と l_2 の共有点を P とし、その x 座標を a とする。また、 l_1 と l_2 の共有点を Q とし、 C_1 と l_1 の共有点を R とする。曲線 C_1 の $a \leq x \leq \frac{3}{2}$ の部分、線分 PQ 、および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。

5

(30 点)

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。 s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L 、直線 OB 上の点 M 、直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = t \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{ON} = u \overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる。 s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、 s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ。

問題は、このページで終わりである。