

1

(35 点)

次の各問に答えよ.

問 1 i は虚数単位とする. 複素数 z が, 絶対値が 2 である複素数全体を動くとき, $\left|z - \frac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ.

問 2 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1} + 2x^3 + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} dx$$

2

(35 点)

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ.

3

(30 点)

e は自然対数の底とする. $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える.

$$f(x) = x^2 \log x$$

$$g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2 \log x}$$

実数 t は $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で, 点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする. 直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする. t が $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leq e$ の範囲を動くとき, $p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

4

(35 点)

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. s, t, u は 0 でない実数とする. 直線 OA 上の点 L , 直線 OB 上の点 M , 直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{OL} = s \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OM} = t \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{ON} = u \overrightarrow{OC}$$

が成り立つようにとる.

- (1) s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき, 3 点 L, M, N の定める平面 LMN は, s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ. さらに, そのような点 P はただ一つに定まることを示せ.
- (2) 四面体 $OABC$ の体積を V とする. (1)における点 P について, 四面体 $PABC$ の体積を V を用いて表せ.

5

(30 点)

θ は実数とする. xyz 空間の 2 点 $A\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), P\left(\cos \theta, \sin \theta, \frac{1}{2} \cos \theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき, その交点を Q とする. θ が $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め, その軌跡を xy 平面上に図示せよ.

6

(35 点)

n は 2 以上の整数とする. 1 枚の硬貨を続けて n 回投げる. このとき, k 回目 ($1 \leq k \leq n$) に表が出たら $X_k = 1$, 裏が出たら $X_k = 0$ として, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を定める.

$$Y_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1} X_k$$

とするとき, Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ.

問題は, このページで終わりである。