

問 題 紙

- 1** 実数 b, c に対し, 放物線 $y=f(x)=x^2+bx+c$ が 2 点 $(p, 0), (q, 0)$ を通ると仮定する (ただし $p < q$)。また, 条件 $0 < t \leq 1$ をみたす実数 t に対し実数 r, s を次のように定める。

$$r = \frac{1+t}{2}p + \frac{1-t}{2}q, \quad s = \frac{1-t}{2}p + \frac{1+t}{2}q$$

以下の問に答えよ。

- (1) $q-s, r-p, s+r, s-r$ のそれぞれを b, c, t を用いて表せ。
- (2) sr および s^2+r^2 を b, c, t を用いて表せ。
- (3) 放物線 $y=f(x)$, 直線 $x=r, x=s$, および x 軸が囲む領域の面積を b, c, t を用いて表せ。

- 2** 整数 a, b, c に対し次の条件を考える。

$$(*) \quad a \geq b \geq 0 \text{ かつ } a^2 - b^2 = c$$

以下の問に答えよ。

- (1) $c = 24, 25, 26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (2) p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき, 条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a, b) をすべて求めよ。

- 3** コイン①, …, ⑥が下図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び, 選んだコインはそのままにし, そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば, ①を選べば, ②, ④を裏返し, ②を選べば, ①, ③, ⑤を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し, n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき, 以下の問に答えよ。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) コイン①, …, ⑥をグループ A, B に分けることによって, n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。

n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ, B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。

- (3) p_4 を求めよ。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって
利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)

2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分する点, および外分する点: $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベ ク ト ル)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

(複素数)

11. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
12. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

14. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
15. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三角関数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
19. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + \ell) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($\ell = a + (n-1)d$)
24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} (a \neq 0), \int_a^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起こる確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1 - p)$$

$$42. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$