

〔 1 〕 1 個のさいころを 3 回投げ、出た目を順に a_1, a_2, a_3 とする。次の問いに答えよ。

(1) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ が集合 $\{2, 5, 6\}$ と等しくなる確率を求めよ。

(2) $a_1 < a_2 < a_3$ である確率を求めよ。

(3) a_1, a_2, a_3 がすべて異なる確率を求めよ。

(4) 集合 $\{a_1, a_2, a_3\}$ と集合 $\{2, 3\}$ が等しいとき、 $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 3$ である条件付き確率を求めよ。

(5) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1$ である確率を求めよ。

〔 2 〕 $t > 0$ とする。また、 a, b を実数とし、二つの関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$, $g(x) = x^2 + ax + b$ を考える。座標平面上の二つの曲線 $C_1: y = f(x)$, $C_2: y = g(x)$ は x 座標が t である共有点 P をもち、かつ点 P において共通の接線をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ。

(2) a, b をそれぞれ t を用いて表せ。

(3) $t > 0$ における関数

$$F(t) = \int_0^1 \{g(x) - f(x)\} dx$$

の最小値を求めよ。

[3] $a > 0$ とし, p を実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を考える。点 P_n , Q_n , R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が以下の二つの条件を満たすとする。

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり, x 座標が p である。

(ii) 自然数 n に対し,

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である。
ただし, 点 P_n が x 軸上にあるときは, 点 Q_n は P_n と同じ点であるとする。
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である。ただし, 点 Q_n が直線 AC 上にあるときは, 点 R_n は Q_n と同じ点であるとする。
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である。

点 P_n の x 座標を x_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R_1 の座標を a, p を用いて表せ。

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば, 点 R_1 は線分 AC 上にある」
が真であるような a の値の範囲を求めよ。ただし, 線分は両端を含むものとする。

(3) x_n を a, n, p を用いて表せ。

(4) $a = 2$, $p = 0$ であるとき, 不等式

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

[4] θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。O(0, 0) を原点とする座標平面上の 2 点 $A(\cos \theta, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$ に対して, 点 C および点 D を以下の条件により定める。

- (i) D は線分 OB 上の点である。
- (ii) C は直線 OB に関して A と異なる側にある。
- (iii) $\triangle OAB$ と $\triangle CDB$ は合同である。すなわち, $OA = CD$, $AB = DB$, $BO = BC$ が成り立つ。

次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OD}$ を θ を用いて成分表示せよ。
- (2) $\overrightarrow{DC}$ を θ を用いて成分表示せよ。
- (3) C の y 座標を $f(\theta)$ とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) $\angle AOC = \frac{3}{4}\pi$ となるとき, θ の値を求めよ。