

〔 1 〕 次の問いに答えよ。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。

(1) $x > 0$ で定義された次の関数の最大値を求めよ。

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

(2) 次の不定積分をそれぞれ求めよ。

$$\int \log x \, dx, \quad \int (\log x)^2 \, dx$$

(3) (1) で求めた最大値を a として、座標平面上の二つの曲線 $C_1: y = a\sqrt{x}$, $C_2: y = \log x$ を考える。 x 軸と二つの曲線 C_1 , C_2 によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

〔 2 〕 $a > 0$ とし, p を実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を考える。点 P_n, Q_n, R_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) が以下の二つの条件を満たすとする。

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり, x 座標が p である。

(ii) 自然数 n に対し,

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である。
ただし, 点 P_n が x 軸上にあるときは, 点 Q_n は P_n と同じ点であるとする。
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である。ただし, 点 Q_n が直線 AC 上にあるときは, 点 R_n は Q_n と同じ点であるとする。
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である。

点 P_n の x 座標を x_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 R_1 の座標を a, p を用いて表せ。

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば, 点 R_1 は線分 AC 上にある」
が真であるような a の値の範囲を求めよ。ただし, 線分は両端を含むものとする。

(3) x_n を a, n, p を用いて表せ。

(4) $a = 2, p = 0$ であるとき, 不等式

$$|x_{n+1} - x_n| < 10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

[3] $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し、座標平面上の原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円上の 4 点

$$A(1, 0), B(\cos \theta, \sin \theta), C(\cos 2\theta, \sin 2\theta), D(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$$

を考え、 $\triangle OAD$ の面積を $S(\theta)$ 、 $\triangle ABC$ の面積を $T(\theta)$ 、 $\triangle ABD$ の面積を $U(\theta)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。

(2) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{T(\theta)}{\theta^3}$ を求めよ。

(3) $t = \cos \theta$ とおく。 $\frac{U(\theta)}{\sin \theta}$ を t の整式で表せ。

(4) 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{T(\theta)}{U(\theta)}$$

と定義する。 $\lim_{\theta \rightarrow +0} f(\theta)$ を求めよ。また、 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき、 $f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

[4] n を自然数とする。 $(3n+1)$ 個の箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ があり, 1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して, k 番目の箱 A_k には, 1 から k までの整数が一つずつ書かれた k 枚のカードが入っている。これを初期状態とする。次の問いに答えよ。

- (1) 箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ。
- (2) 箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ。
- (3) 初期状態から, 箱 $A_1, A_2, \dots, A_{3n+1}$ に入っているすべてのカードを箱 B に移す。箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき, カードに書かれた整数が (2) で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする。 $P(n)$ を n を用いて表せ。
- (4) M を (2) で求めた値とする。初期状態から, 箱 $A_M, A_{M+1}, \dots, A_{3n+1}$ だけ集めて, ケース C に収納する。ケース C から一つの箱を選び, さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す。カードに書かれた整数が M に等しいとき, そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} n Q(n)$ を求めよ。

〔 5 〕 i を虚数単位とする。複素数 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$z_1 = \sqrt{3} + 2i, \quad z_{n+1} = 2(z_n - i)^2 + i \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1) $z_2 - i$ と $z_3 - i$ を極形式で表せ。

(2) $z_n - i$ を極形式で

$$z_n - i = r_n (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$$

と表したとき、 $\log_2 r_n$ を n を用いて表せ。

(3) z_n を n を用いて表せ。

(4) 複素数 z_n が表す複素数平面上の点を P_n とする。3 点 P_3, P_5, P_{2025} が一直線上にあることを示せ。