

第 1 問

a を正の実数とする。座標平面において、放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における C の接線と直交し、 P を通る直線を ℓ とおく。 ℓ と C の交点のうち、 P と異なる点を Q とおく。

(1) Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し、 Q を通る直線を m とおく。 m と C の交点のうち、 Q と異なる点を R とおく。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、 R の x 座標の最小値を求めよ。

第 2 問

平面上で $AB = AC = 1$ である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し、 A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする。ただし、この問いでは、三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s 、三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

(1) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ のとき、 s と t を求めよ。

(2) $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ のとき、 s と t を求めよ。

(3) $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して、 $\angle BAC = \theta$ のとき、 s と t を θ を用いて表せ。

第 3 問

白玉 2 個が横に並んでいる。投げたとき表と裏の確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを用いて、次の手順 (*) をくり返し、白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順 (*) コインを投げ、表がでたら白玉、裏がでたら黒玉を、それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして、新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり、かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには、新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば、手順 (*) を 2 回行いコインが裏、表の順にでた場合には、白玉が 4 つ並ぶ。正の整数 n に対して、手順 (*) を n 回行った時点での $(n + 2)$ 個の玉の並び方を考える。

- (1) $n = 3$ のとき、右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。
- (2) n を正の整数とする。右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。
- (3) n を正の整数とする。右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

第 4 問

a を実数とする。座標平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする。

$$\begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y \geq |x^2 + a| \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a が $-2 \leq a < 2$ の範囲を動くとき、 $S(a)$ の最大値を求めよ。