

1 関数  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 30$  について考える。 $y = f(x)$  のグラフを  $C$  とおく。

(1)  $f(x)$  が極大値, 極小値をとるような  $x$  をそれぞれ求め,  $f(x)$  の極大値, 極小値を求めよ。

(2)  $C$  上の点  $(-3, -6)$  を通り,  $C$  に接する直線の方程式をすべて求めよ。

2 整数  $a, b, c$  は条件

$$2 \leq a < b < c \leq 6$$

を満たすとする。

(1) 不等式  $a + b > c$  を満たすような  $(a, b, c)$  をすべて挙げよ。

(2) 不等式  $a^2 + b^2 \geq c^2$  を満たすような  $(a, b, c)$  をすべて挙げよ。

(3) (2) で求めた各  $(a, b, c)$  について, 頂点  $A, B, C$  と向かい合う辺の長さがそれぞれ  $a, b, c$  で与えられる  $\triangle ABC$  を考える。このようなすべての  $\triangle ABC$  について  $\cos \angle ACB$  を求めよ。

3 数列  $\{a_n\}$  を次の条件により定める。

$$a_1 = 1, a_2 = 3,$$

$$(n+1)a_{n+2} - (2n+3)a_{n+1} + (n+2)a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくと,

$$b_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(3)  $\sum_{n=1}^{225} \frac{1}{a_n}$  の値を求めよ。

4 関数  $f(x)$  は、すべての実数  $x$  およびすべての整数  $n$  について  $f(nx) = \{f(x)\}^n$  を満たし、さらに  $f(1) = 2$  を満たすとする。ただし、 $f(x)$  のとりうる値は 0 でない実数とする。

(1)  $f(n) \leq 100$  となるような最大の整数  $n$  を求めよ。

(2) すべての実数  $x$  について  $f(x) > 0$  であることを証明せよ。

(3)  $f(0.25)$  を求めよ。

(4)  $a$  が有理数のとき、 $f(a)$  を  $a$  で表せ。