

- 1 α, r を $\alpha > 1, r > 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

- (1) b_n を n と $\log_{\alpha} r$ を用いて表せ。

- (2) 等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

- (3) (2) の条件が成り立つとき、積 $a_1a_2, a_1a_2a_3, a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁, 3 桁, 4 桁になるような α の範囲を求めよ。

- 2 円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ を考える。実数 p, q が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき、点 $P(p, q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 の接点をそれぞれ $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ とする。また、座標平面上の原点を $O(0, 0)$ とする。

- (1) 直線 ℓ_1, ℓ_2 , 線分 OQ_1, OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を p, q を用いて表せ。

- (2) 点 P が楕円

$$C_2 : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

の上を動くとき、(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ。

3 実数 a および自然数 n に対して、定積分

$$I(a, n) = \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin(nx) dx$$

を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1) $I(a, n)$ を求めよ。

(2) $a_n = \frac{\log n}{2\pi}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, n)$ を求めよ。
ただし、 $\log n$ は n の自然対数である。また、必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$
であることを用いてもよい。

4 a を正の実数とする。

(1) a が 1 でないとき、複素数 z についての方程式

$$a|z - 1| = |(a - 2)z + a|$$

を考える。この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2) 方程式

$$|z|^2 = 6 - a, \quad a|z - 1| = |(a - 2)z + a|$$

とともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

5 n を 3 以上の整数とする。

(1) k を整数とする。 $k < a < b < c \leq k + n$ を満たす整数 a, b, c の選び方の総数を n の式で表せ。

(2) $1 \leq a < b < c \leq 2n$ を満たす整数 a, b, c のうち、 $a + b > c$ となる a, b, c の選び方の総数を L とする。このとき、 $L > {}_nC_3$ であることを示せ。