

1 平面上の三角形 OAB を考える. $\angle AOB$ は鋭角, $OA = 3$, $OB = t$ とする.
また, 点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を C とし, $OC = 1$
とする. 線分 AB を $2:1$ に内分する点を P , 点 A から直線 OP に下ろした垂線
と直線 OB との交点を R とする.

- (1) 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を t を用いて表せ.
- (2) 線分 OR の長さを t を用いて表せ.
- (3) 線分 OB の中点を M とする. 点 R が線分 MB 上にあるとき, t のとりうる
値の範囲を求めよ.

(配点率 35 %)

2

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) 正の整数 k, ℓ に対して

$$\frac{k}{k+\ell-1} a_{k+1} a_\ell + \frac{\ell}{k+\ell-1} a_k a_{\ell+1} = a_k a_\ell$$

が成り立つことを示せ.

(2) 正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^m a_k a_{m-k+1} = 1$$

が成り立つことを示せ.

(配点率 35 %)

- 3 座標平面において、 $y = x^2 - 1$ で表される放物線を C とする． C 上の点 P における C の接線を ℓ とする．ただし、点 P は y 軸上にはないものとする． O を原点とし、放物線 C と線分 OP および y 軸で囲まれた図形の面積を S 、放物線 C と接線 ℓ および y 軸で囲まれた図形の面積を T とする． $S - T$ の最大値を求めよ．

(配点率 30 %)