

1

(50 点)

図 1 に示すような円錐状にくり抜かれた台の上における物体の運動について考える。円錐の底面の中心を点 O 、頂点を点 P とし、線分 OP は鉛直方向に沿っているとする。また、円錐の母線が線分 OP に垂直な面となす角を θ とする。物体は質量 m の質点とみなせるものとする。台と物体の間には摩擦があり、静止摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とする。台は線分 OP を軸として回転することができるが、並進はしないものとする。鉛直下向きの重力加速度の大きさを g とする。以下の設問に答えよ。

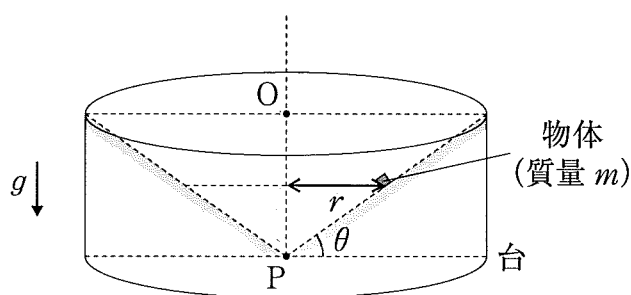


図 1

〔A〕 台が回転していない状況を考える。はじめ、物体は線分 OP から r だけ離れた台上の点で静止している。

(a) 物体にはたらく摩擦力の大きさ f を求めよ。

物体に対して点 P へ向けて指で少しずつ力を加えたところ、物体は指を離れて台に対して初速度 0 で点 P に向かって滑り出し、やがて点 P に到達した。

(b) 物体が点 P に到達した際の速さ v_0 を求めよ。

(c) 物体が指を離れてから点 P に到達するまでに摩擦力が物体に対してした仕事 W を、 μ 、 μ' 、 m 、 g 、 r 、 θ のうち必要なものを用いて表せ。

〔B〕 物体が線分 OP から r だけ離れた台上の点で静止している状態で、図 2 に示すように、台を真上から見て反時計回りにゆっくりと回転させ始めた。回転の角速度 ω を 0 から少しずつ大きくしたところ、ある角速度 ω_0 に達した時点で物体は台に対して滑り出した。角速度の時間変化は無視できるものとする。

(d) 角速度 $\omega (< \omega_0)$ で台を回転させている際に、物体にはたらく垂直抗力の大きさ N を求めよ。

(e) 台上の観測者から見て物体が滑り出す向きとして、最も適当なものを図 3 の ①～⑧ より 1 つ選べ。なお、②, ④, ⑥, ⑧ はそれぞれ、① と ③, ③ と ⑤, ⑤ と ⑦, ⑦ と ① に挟まれた任意の向きを示す。

(f) 物体が台に対して滑り出した時点における台の回転の角速度 ω_0 を求めよ。

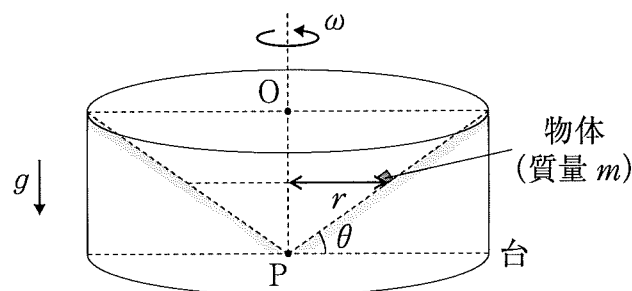


図 2

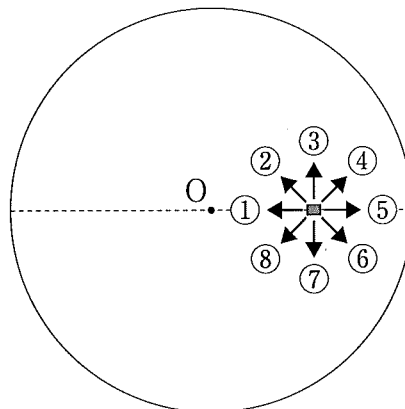


図 3 (真上から見た図)

〔C〕 物体が線分 OP から r だけ離れた台上の点で静止している。微小な時間 Δt に対し $\Delta\omega$ の割合で回転の角速度 ω を 0 から大きくしながら台を真上から見て反時計回りに回転させ始めたところ、回転させ始めると同時に物体は台に対して滑り出した。

(g) 微小な時間 Δt における、線分 OP から r だけ離れた台上の点の速さの変化 Δv を求めよ。

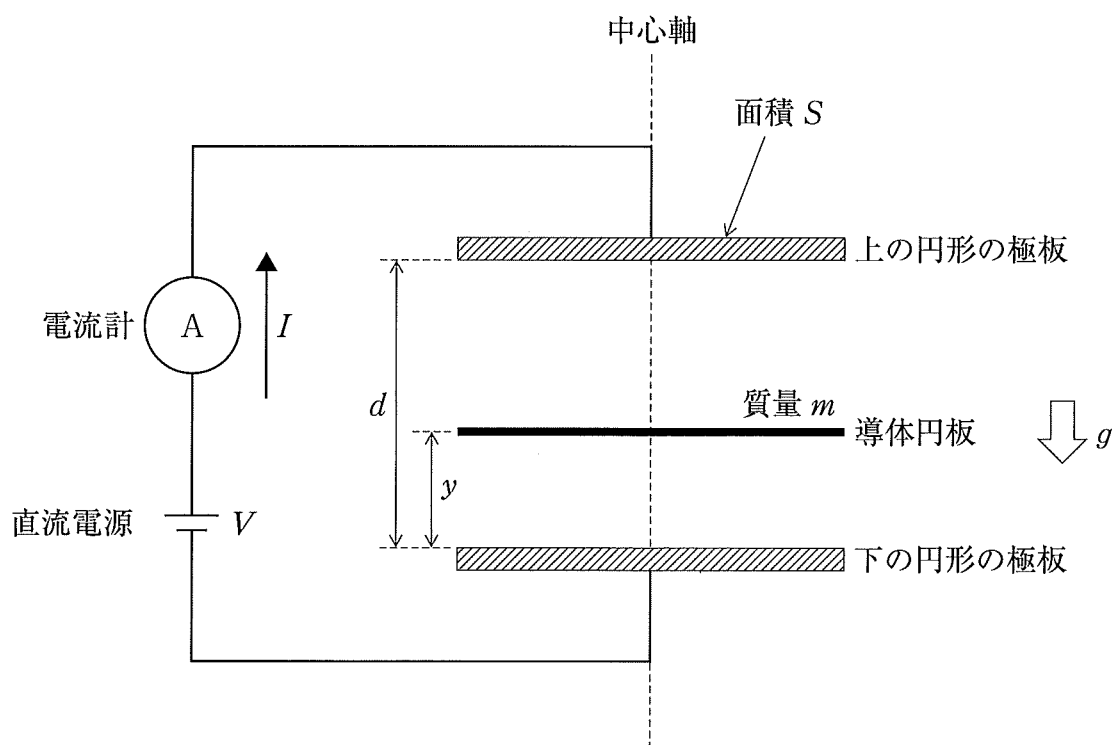
(h) 台上の観測者から見て物体が滑り出す向きとして、最も適当なものを図 3 の ①～⑧ より 1 つ選べ。なお、②、④、⑥、⑧ はそれぞれ、① と ③、③ と ⑤、⑤ と ⑦、⑦ と ① に挟まれた任意の向きを示す。

(i) 回転させ始めると同時に物体が台に対して滑り出すために、 $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ が満たすべき条件を不等式で示せ。

2

(50 点)

図のように、真空中に面積 S の 2 枚の円形の極板を、中心軸を合わせて水平に固定し、上下の極板間に起電力 V の直流電源と電流計をつなぐ。次に、極板と同じ面積で質量 m の導体円板を、極板間に中心軸を合わせて挿入する。導体円板は極板間を鉛直方向に移動できるが、その際、極板と平行を保ち、かつ水平方向にずれることなく動くものとする。また、導体円板の厚さは極板間の距離 d と比べて十分小さいとする。極板端部や導体円板端部における電場の乱れは無視できる。極板、導体円板、導線の抵抗、および電源と電流計の内部抵抗は無視できる。極板と導体円板の接触時における電荷の移動は速やかに起こるものとする。真空の誘電率を ε_0 、重力加速度の大きさを g とする。



〔A〕 導体円板を下の極板と接触させ、そっと手をはなす。直流電源の起電力 V がある値よりも低ければ、導体円板は動かない。このとき、以下の設問に答えよ。

(a) 導体円板の上面に生じる電荷を求めよ。

(b) 上の極板と導体円板で構成される平行板コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを求めよ。

〔B〕 導体円板を下の極板と接触させ、そっと手をはなす。直流電源の起電力 V がある値よりも高ければ、導体円板は浮上を始める。下の極板の表面から導体円板までの距離を y とする。このとき、以下の設問に答えよ。

はじめに、浮上時における導体円板の運動を考える。

(c) 導体円板の上面と下面に生じる電荷をそれぞれ距離 y の関数として求めよ。

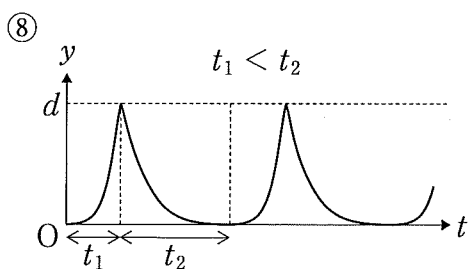
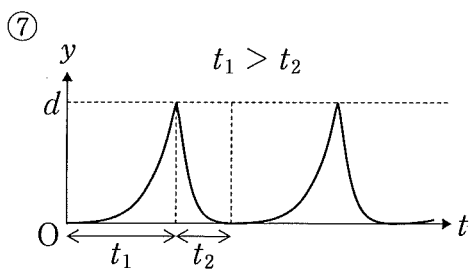
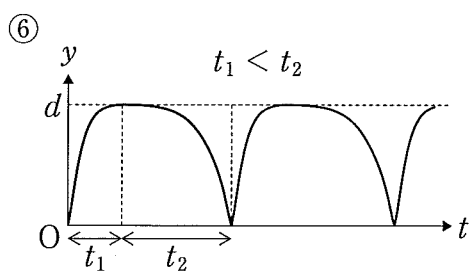
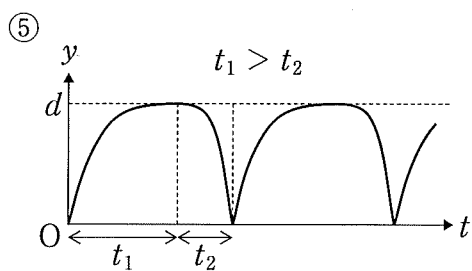
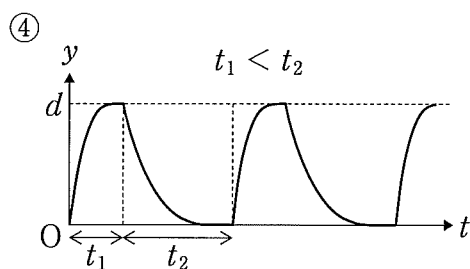
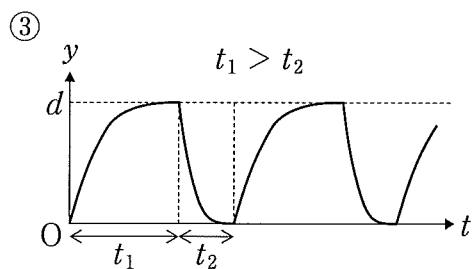
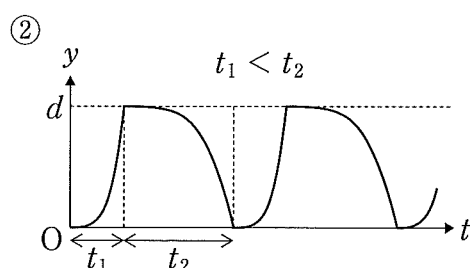
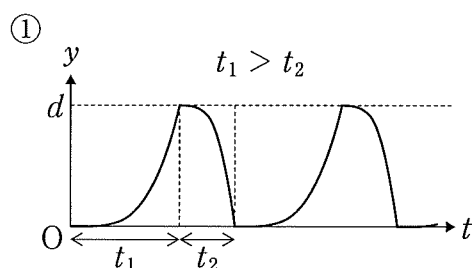
(d) 上下の極板と導体円板で構成される平行板コンデンサーに蓄えられた全静電エネルギーを距離 y の関数として求めよ。

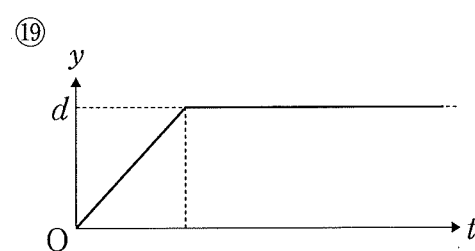
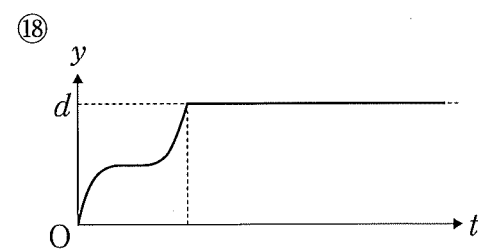
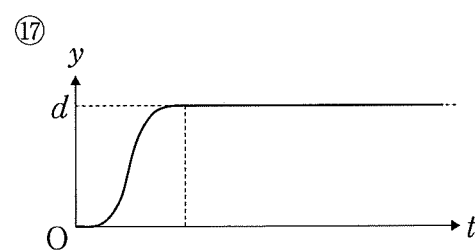
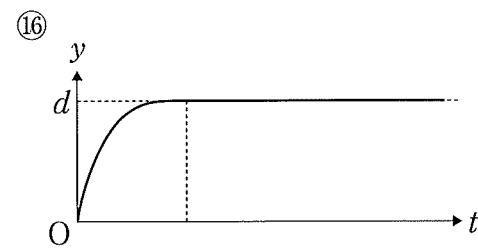
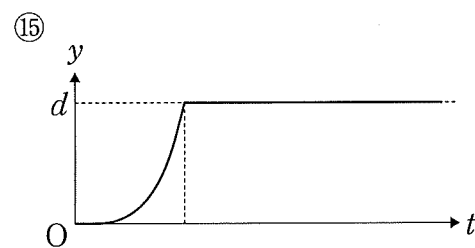
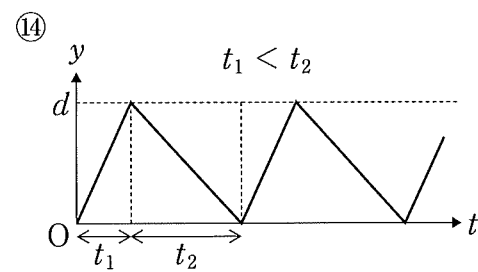
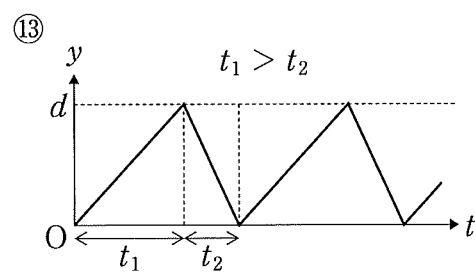
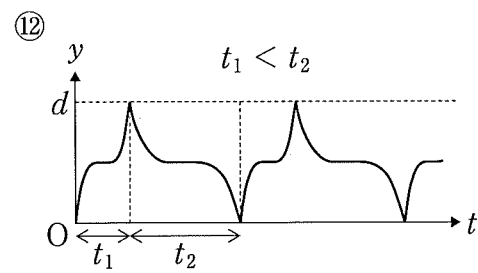
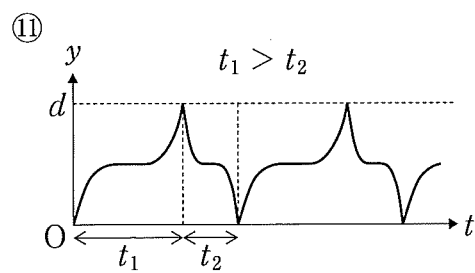
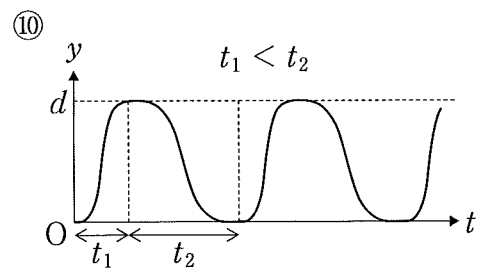
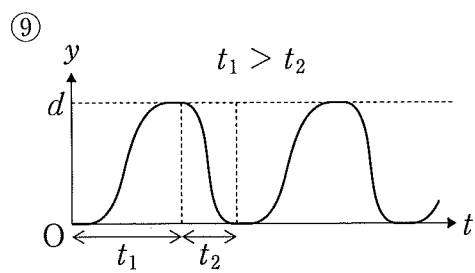
(e) 導体円板の上昇速度を距離 y の関数として求めよ。

(f) 電流計を流れる電流 I を距離 y の関数として求めよ。なお、電流 I は図中の矢印の向きを正とする。

その後、導体円板は上の極板に接触する。上の極板に接触したあとも含めて導体円板の運動を考える。導体円板と極板との接触は完全非弾性衝突と仮定する。

(g) 導体円板が浮上し始める時刻を $t = 0$ としたときに、時刻 t と距離 y の関係として最もふさわしいものを、以下の ①～⑱ から選べ。なお、 t_1 と t_2 は各図中で定義される時間である。





3

(50 点)

十分な長さを持つシリンダー内に質量が無視できるピストンがあり，それらにより閉じ込められた気体の状態変化について考える。大気圧を p_0 ，気体定数を R ，重力加速度の大きさを g とし，以下の設問に答えよ。

〔A〕 図1のように，断面積 S のシリンダーが水平な床の上に鉛直に固定されている。ピストンはシリンダー内の気体と大気を仕切ることができ，傾くことなく鉛直方向に滑らかに動く。シリンダー底面からピストンの下面までの距離を用いて，ピストンの位置を x と表す。シリンダー，ピストンは断熱材でできている。

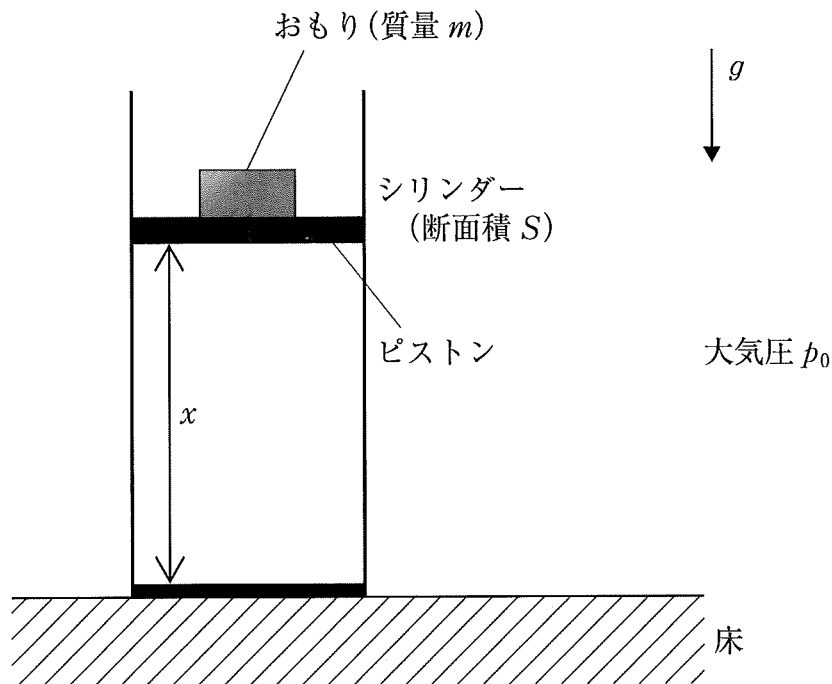


図1

最初、質量 m のおもりを乗せたピストンが $x = x_1$ で静止しており、ピストンの下側に温度 T_1 の単原子分子理想気体が閉じ込められていた。

(a) シリンダー内の気体の圧力を求めよ。

次に、ピストンに外力を加え、ピストンの位置を $x = \frac{x_1}{8}$ までゆっくりと移動させ、シリンダー内の気体を圧縮した。

(b) ピストンの位置 $x = \frac{x_1}{8}$ におけるシリンダー内の気体の温度を求めよ。

(c) この圧縮過程で、シリンダー内の気体がされた仕事を求めよ。

〔B〕 図2のように、同じ断面積 S を持つシリンダー A、シリンダー B が水平な床の上に鉛直に固定されており、コックと細孔栓のついた細い管でつながっている。ピストン A、ピストン B は、それぞれシリンダー A 内、シリンダー B 内の気体と大気を仕切ることができ、傾くことなく鉛直方向に滑らかに動く。ピストン A にはおもりが乗っており、ピストン B にはおもりが乗っていない。細孔栓は細孔のあるつめものであり、細孔栓を用いることでシリンダー A 内、シリンダー B 内の気体の圧力をそれぞれ一定に保ちながら、気体を移動させることができる。シリンダー、ピストン、コックと細孔栓のついた細い管は断熱材でできている。シリンダー底面からピストンの下面までの距離を用いて、ピストン A の位置を x 、ピストン B の位置を y と表す。

最初、コックは閉じられており、ピストン A は $x = x_1$ に、ピストン B はシリンダーの底 ($y = 0$) に静止している。ピストン A の下側には温度 T_1 の単原子分子理想気体が閉じ込められており、気体の圧力は p_1 である。

次に、コックを開き、ピストン A にかかる力のつり合いを保ちながら、ピストン A をゆっくりと下方に動かした。コックを開いた直後の気体の状態を状態 1 とよぶ。ピストン A を下方に動かしていく過程において、シリンダー A 内の気体の一部が、細孔栓のついた細い管を通してシリンダー B に流入し、ピストン B はゆっくりと上方に移動した。このとき、シリンダー A 内の気体の温度は T_1 のままであり、ピストン B にかかる力は常につり合っていた。

ピストン A が $x = x_1$ から $x = x_2$ まで移動したとき、ピストン B は $y = 0$ から $y = y_2$ に移動したとする。このとき、シリンダー B 内の気体の温度を $T_2(x_2)$ 、気体全体の内部エネルギーを $U(x_2)$ とそれぞれ表す。

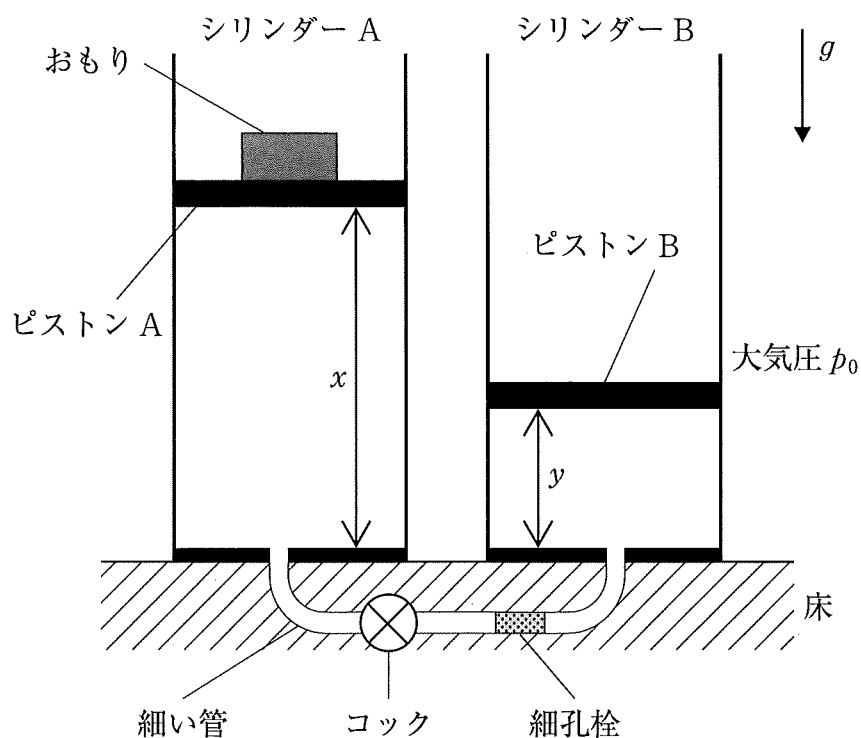


図 2

- (d) ピストン B の位置 y_2 を, x_1 , x_2 , p_0 , p_1 , S , T_1 , $T_2(x_2)$ のうち必要なものを用いて求めよ。
- (e) シリンダー A 内の気体がされた仕事 $W_A(x_2)$, シリンダー B 内の気体がした仕事 $W_B(x_2)$ を, x_1 , x_2 , y_2 , p_0 , p_1 , S のうち必要なものを用いて求めよ。
- (f) シリンダー A, シリンダー B に閉じ込められた気体全体に対して, 熱力学第 1 法則を考える。ピストン A が x_1 から x_2 まで移動したときの内部エネルギーの変化は, $W_A(x_2)$, $W_B(x_2)$ を用いて以下のように書ける。

$$U(x_2) - U(x_1) = \boxed{\text{(ア)}} \quad (1)$$

このことから, シリンダー B 内の気体の温度は

$$T_2(x_2) = \boxed{\text{(イ)}} \quad (2)$$

と求まる。空欄 $\boxed{\text{(ア)}}$, $\boxed{\text{(イ)}}$ に当てはまる数式を求めよ。

さらに、ピストン A をシリンダー A の底 ($x = 0$) まで動かしたとき、気体はシリンダー B のみに閉じ込められた。この気体の状態を状態 2 とよぶ。

- (g) 状態 1 から状態 2 への過程における仕事 $W_A(0)$, $W_B(0)$ は、それぞれ状態 1 もしくは状態 2 における気体の温度、圧力、体積により表せる。このことを用いると、温度 T 、圧力 p 、体積 V の気体に関して、内部エネルギー U と (ウ) の和で表される量

$$H = U + \text{(ウ)} \quad (3)$$

が、この過程の前後で変化していないことがわかる。 T , p , V のうち必要なものを用いて空欄 (ウ) を表せ。

また、式 (3) は単原子分子理想気体の場合、気体の物質量 n を用いて

$$H = n \times \text{(エ)} \quad (4)$$

と書ける。 T , V , R のうち必要なものを用いて空欄 (エ) を表せ。

〔C〕 設問〔B〕での設定において、理想気体ではなく、実在の気体(実在気体)を用いて同様の操作を行う。実在気体は、理想気体とは異なり、分子間にはたらく力と分子自身の体積を無視できない。そのため、式(4)に補正が加わり、

$$H' = n \times \boxed{\text{(エ)}} + an^2 \frac{T - b}{V} \quad (5)$$

が過程の前後で一定に保たれる。ここで a , b は気体によって決まる正の数であり、 n は実在気体の物質量である。

最初、コックは閉じられており、ピストン A は $x = x_1$ に、ピストン B はシリンダーの底 ($y = 0$) に静止している。ピストン A の下側には温度 T_1 の実在気体が閉じ込められており、その気体の圧力は p_1 である。

次に、コックを開き、ピストン A にかかる力のつり合いを保ちながら、ピストン A をゆっくりと下方に動かした。コックを開いた直後の気体の状態(状態 1)から、シリンダー B のみに閉じ込められた気体の状態(状態 2)への過程において、シリンダー A 内の気体の温度は T_1 のままであり、ピストン B にかかる力は常につり合っていた。

(h) 過程の前後で H' が一定に保たれることを利用することで、状態 2 におけるシリンダー B 内の実在気体の温度 T'_2 は

$$T'_2 = T_2(0) + \boxed{\text{(オ)}} \quad (6)$$

と表される。ここで、 $T_2(0)$ は理想気体を用いた場合の状態 2 ($x = 0$) における気体の温度である。状態 1, 状態 2 における気体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とし、 a , b , n , R , T_1 , V_1 , V_2 のうち必要なものを用いて空欄 $\boxed{\text{(オ)}}$ を表せ。