

[I] 複素数平面上で、複素数 z が円 $|z| = 1$ の上を動くとき、

$$w = \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{2} \right) z + \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \right) \frac{1}{z}$$

を満たす点 w の軌跡を C とする。次の問に答えよ。

- (1) C はどのような図形か、複素数平面上に図示せよ。
- (2) C と円 $\left| z - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right| = \sqrt{2}$ の共有点を求めよ。
- (3) C で囲まれる領域と $\left| z - \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right| \leq \sqrt{2}$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

[II] xy 平面上で、連立不等式 $0 < x \leq 1$, $0 \leq y \leq \log \frac{1}{x}$ で定まる領域と y 軸の $y \geq 0$ の部分を合わせた図形を D とする。 D に含まれる三角形の面積の最大値を求めよ。

[III] 1 から n までの異なる自然数が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが一行に並んでいる。このとき、どのカードも現在とは異なる位置に移動するように並べ替えてできる順列の総数を a_n で表し、並べ方の総数 $n!$ に占める a_n の割合を p_n で表す。例えば、 $a_1 = 0$, $p_1 = 0$, $a_2 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 2$, $p_3 = \frac{1}{3}$ である。次の問に答えよ。

- (1) a_4 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 3$ のとき、 a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、 $p_n - p_{n-1}$ を n を用いて表せ。

[Ⅳ] 空間内に原点 O を中心とする半径 r の球面 S がある。さらに、半径が $1, 2, 3$ の球面 S_1, S_2, S_3 があり、これら 4 つの球面のうちどの 2 つの球面も互いに外接している。 S_1, S_2, S_3 の中心を順に P_1, P_2, P_3 とし、 O, P_1, P_2, P_3 は同一平面上にないとする。さらに、球面 S が球面 S_1, S_2, S_3 と接する 3 つの点と、 $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3})$ により定まる点 Q は、同一平面上にあるとする。次の問に答えよ。

- (1) r の値を求めよ。
- (2) 四面体 $OP_1P_2P_3$ の体積を求めよ。

[Ⅴ] xy 平面上の曲線 $C: y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ を考え、 C 上の $(0, \sqrt[3]{2})$ 以外の点 $P(a, b)$ における接線を $\ell: y = kx + c$ と表す。 C と ℓ の方程式から x を消去して得られる y についての 3 次方程式 $f(y) = 0$ は b を重解としてもつので、もう 1 つの解を b' とする。ただし、 b が 3 重解のときは $b' = b$ とみなす。次の問に答えよ。

- (1) $2b + b'$ を k のみの分数式で表せ。
- (2) b' を b のみの分数式で表せ。
- (3) C と ℓ の共有点で、その y 座標が b' であるものを $P'(a', b')$ とする。 a と b が有理数ならば、 a' と b' も有理数であることを示せ。
- (4) b が奇数 p, q と負でない整数 r を用いて $b = \frac{p}{2^r q}$ で与えられるとする。有理数 b' を奇数 p', q' と整数 s を用いて $b' = \frac{p'}{2^s q'}$ と表すとき、 s を r の式で表せ。
- (5) $P(5, 3)$ が曲線 C 上の点であることを利用して、 C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在することを示せ。

[以 下 余 白]