

〔 I 〕 次の に適する数または式を、解答用紙の同じ記号のついた の中に記入せよ.

- (1) 袋 A には白玉 2 個、赤玉 4 個が、袋 B には白玉 3 個、赤玉 2 個がそれぞれ入っている. 袋 A, B に対して、「1 個のさいころを投げて、1 か 2 の目が出れば袋 A を、他の目が出れば袋 B を選び、選んだ袋から玉を 1 個取り出して、取り出した玉はどちらの袋にも戻さない」という試行を、どちらかの袋の玉がすべてなくなるまで繰り返す. このとき、1 回目の試行で袋 A から白玉を取り出す確率は ア , 1 回目の試行で白玉を取り出す確率は イ . 1 回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき、選ばれた袋が A である確率は ウ . 2 回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき、1 回目の試行で取り出した玉も赤玉である確率は エ . 袋 B より先に袋 A の玉がすべてなくなる確率は オ .

- (2) 原点を O とする座標空間内の 2 点を $A(6\sqrt{3}, 3\sqrt{3}-25, 3\sqrt{3}+26)$, $B(2, 3\sqrt{3}+27, 3\sqrt{3}-26)$ とすると、 $|\overrightarrow{AB}|^2 = 24 \times (\text{カ})$. 2 点 A, B を通る直線を ℓ とすると、原点 O から直線 ℓ に垂線 OH を下ろしたときの点 H の z 座標は キ . r を正の実数として、中心が点 H、半径が r の球面を S_r とし、中心が点 $C(1, 1, 0)$ 、半径が 3 の球面を T とする. 2 つの球面 S_r, T が 1 点のみを共有するような r の値のうち、最大のものを r_0 とすると、 $r_0 = \text{ク}$. S_{r_0} と T の共有点を P とすると、点 P の z 座標は ケ . S_{r_0} が xy 平面と交わってできる円の半径は コ .

〔 II 〕 n を自然数とする. 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次の関係式で定める.

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = a_{n+1} + \frac{9-n}{n+1} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ. ただし、必要であれば、 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを証明なしに用いてよい.

- (1) a_3, b_1, b_2 を求めよ.
- (2) $b_{n+1} = c_n b_n$ を満たす c_n について、 c_n を n の式で表せ.
- (3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.
- (4) すべての自然数 n について $a_n \leq a_{m_0}$ が成り立つような自然数 m_0 を考える. このような m_0 と $(10!) \cdot a_{m_0}$ の値の組をすべて求めよ.

〔Ⅲ〕 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、 $u = \sin \alpha$ とする．関数 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x + \alpha)$ とする．次の問いに答えよ．ただし、必要であれば、次の三角関数の和と積の関係式を用いてよい．

$$\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) - \cos(A - B) = -2 \sin A \sin B$$

(1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ を α を含まない u の式で表せ．

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、関数 $f(x)$ は $x = x_0$ で最小値 c をとるとする．

このとき、 x_0 を α の式で表し、 c を α を含まない u の式で表せ．

(3) (2) の c について、曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と 3 つの直線 $y = c$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた 2 つの部分 D_1, D_2 とする． D_1, D_2 をそれぞれ直線 $y = c$ の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1, V_2 とするとき、 $\frac{V_1 + V_2}{\pi u^2}$ を α を含まない u の式で表せ．

〔Ⅳ〕 x を正の実数とし、 n を 0 以上の整数とする．関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x) = x^{-\log x}, \quad f_n(x) = x \frac{d}{dx} f_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．次の問いに答えよ．ただし、 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) m を自然数とする．実数 t の関数 $h(t) = \left(1 + \sum_{k=1}^m \frac{t^k}{k!}\right) e^{-t}$ に対して、 $\frac{d}{dt} h(t)$ を計算せよ．

(2) m を自然数とする．実数 t に対して、不等式 $\frac{t^{2m}}{m!} < e^{t^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $g_n(x) = f_n(x) \cdot x^{\log x}$ とし、 $x = e^u$ として、合成関数 $\ell_n(u) = g_n(e^u)$ を考える． $\ell_0(u), \ell_1(u)$ を求めよ．また、 $n \geq 1$ のとき、 $\ell_n(u)$ は u の n 次式であることを示し、 $\ell_n(u)$ における u^n の項の係数を求めよ．

(4) $I_n = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{b}}^b \{f_n(x)\}^2 x^{\log x - 1} dx$ とする． I_0, I_1 の値を求めよ．

(5) (4) の I_n について、 I_n を n の式で表せ．