

〔Ⅰ〕関数  $f(x) = x^2 e^{-2x}$  を考える。次の問いに答えよ。ただし、 $x > 0$  に対して、 $e^{-2x} < \frac{1}{x^3}$  が成り立つことを用いてよい。

- (1)  $f(x)$  の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  の凹凸を調べ、変曲点の  $x$  座標を求めよ。また、この関数のグラフの概形を解答欄の座標平面上に図示せよ。
- (3)  $a > 0$  とする。曲線  $y = f(x)$ 、 $x$  軸および直線  $x = a$  とで囲まれる図形の面積を  $S(a)$  とするとき、 $\lim_{a \rightarrow \infty} S(a)$  を求めよ。

〔Ⅱ〕  $n$  を 3 以上の自然数とし、 $x$  を 1 以上  $(n - 1)$  以下の自然数とする。いま、赤玉  $x$  個、白玉  $(n - x)$  個が入った袋の中から 2 個の玉を同時に取り出す試行を考える。次の  をうめよ。ただし、 ①  ～  ④  ,  ⑦  は数値で、 ⑤  ,  ⑥  は  $n$  と  $x$  のうち、一方または両方を用いた式でうめよ。

(1)  $n = 3$ ,  $x = 1$  とするとき、取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は

①  である。取り出した玉のうち、少なくとも 1 個は赤玉である確率は  ②  である。

(2)  $n = 5$ ,  $x = 2$  とするとき、取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は

③  である。取り出した玉のうち、1 個だけが赤玉である確率は  ④  である。

(3)  $n$  を 4 以上の自然数とする。取り出した玉が 2 個とも白玉である確率は

⑤   $\frac{\quad}{n(n-1)}$  である。また、取り出した玉のうち、少なくとも 1 個は赤玉である

確率が  $\frac{1}{2}$  以上となるための条件は、 ⑤   $\leq$   ⑥  である。

(4)  $n = 22$  とする。取り出した玉のうち、少なくとも 1 個は赤玉である確率が

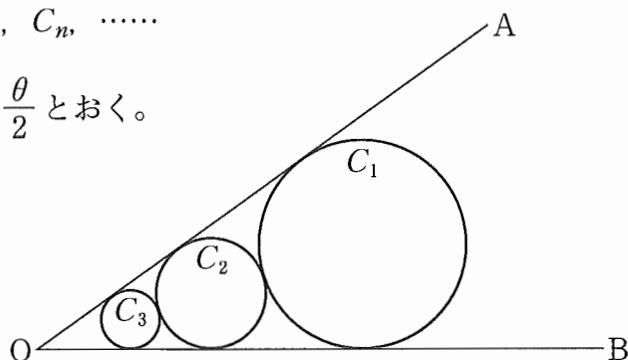
$\frac{1}{2}$  以上であるときの  $x$  の最小値は  ⑦  である。

〔Ⅲ〕 下の図において  $\angle AOB$  を  $\theta$  とする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  である。円  $C_1$  は半直線  $OA$ 、 $OB$  に接し、さらに中心と点  $O$  との距離は 1 とする。次に、円  $C_2$  を、図のように  $OA$ 、 $OB$  および円  $C_1$  に接するように  $O$  側に定める。同様に、円  $C_3$  を、 $OA$ 、 $OB$  および円  $C_2$  に接するように  $O$  側に定める。以下、この操作を繰り返して、円

$C_4, C_5, C_6, \dots, C_n, \dots$

を順に定めていく。また、 $t = \sin \frac{\theta}{2}$  とおく。

次の問いに答えよ。



- (1) 円  $C_1$  の半径と円  $C_2$  の半径を、それぞれ  $t$  を用いて表せ。

- (2) 自然数  $n$  に対して、円  $C_n$  の半径を  $n$  と  $t$  を用いて表せ。

- (3) 円  $C_n$  の面積を  $S_n$  としたとき、無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$  の和を  $t$  を用いて表せ。

- (4) (3) で求めた無限級数の和を  $S(\theta)$  とおくと、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S(\theta)}{\theta}$  を求めよ。

Ⅳ〕 次の  をうめよ。

- (1) 方程式  $z^3 = -8$  のすべての解を  $z_1, z_2, z_3$  とするとき,

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| = \text{①}$$

である。

- (2) 座標平面に  $\triangle OAB$  がある。線分  $AB$  の延長線上に点  $D$  を、 $OB$  が  $\angle AOD$  の二等分線となるようにとる。また、 $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$ ,  $OA = 3$ ,  $OB = 2\sqrt{3}$  とする。このとき、 $\overrightarrow{OD}$  を  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  を用いて表すと,

$$\overrightarrow{OD} = \text{②} \overrightarrow{OA} + \text{③} \overrightarrow{OB}$$

である。

- (3) 関数  $f(x) = x^{x^2}$  ( $x > 0$ ) を微分すると、 $f'(x) = \left( \text{④} \right) x^{x^2+1}$  となる。  
また、 $f(x)$  の最小値は  $e^{\text{⑤}}$  である。

- (4) 曲線  $y = 2x - (x-1)|x-1|$  のグラフを、 $x$  軸方向に  $a$ ,  $y$  軸方向に  $b$  だけ平行移動した曲線を  $y = g(x)$  とする。このとき、すべての実数  $x$  に対して、 $g(x) = -g(-x)$  が成り立つとき、 $a = \text{⑥}$ ,  $b = \text{⑦}$  である。

(以上)