

〔 I 〕 次の を数値でうめよ。

$0 \leq \theta < \pi$ とする。座標平面において、原点と点 $(\cos \theta, \sin \theta)$ を通る直線を ℓ とおく。点 $(2, 0)$ と ℓ の距離を s とおくと、

$$s^2 = \text{①} \sin^2 \theta$$

である。

また、点 $(1, -3)$ と ℓ の距離を t とおくと、

$$t^2 = \sin^2 \theta + \text{②} \sin \theta \cos \theta + \text{③} \cos^2 \theta$$

である。よって、

$$s^2 + t^2 = \text{④} \sin 2\theta + \text{⑤} \cos 2\theta + \text{⑥}$$

となる。

さらに、 θ が $0 \leq \theta < \pi$ の範囲を動くとき、 $s^2 + t^2$ の最小値は ⑦ である。

〔Ⅱ〕 s, t を実数とし, $0 < s < 1, t > 0$ とする。△OAB において, 辺 OA を $(1-s):s$ に内分する点を P とし, 辺 OB を $(1+t):t$ に外分する点を Q とする。線分 PQ と辺 AB の交点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。次の をうめよ。

$\overrightarrow{OP}$ を s と $\vec{a}$ を用いて表すと $\left(\text{①} \right) \vec{a}$ となる。 $\overrightarrow{OQ}$ を t と $\vec{b}$ を用いて表すと $\left(\text{②} \right) \vec{b}$ となる。 $\overrightarrow{OR}$ を s, t と $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表すと

$$\frac{\text{③}}{s+t} \vec{a} + \frac{\text{④}}{s+t} \vec{b}$$

となる。

$AR:RB = 3:8$ となる s, t のなかで, s が 2 以上の整数の逆数で, t が整数となるものをすべて求めると $(s, t) = \text{⑤}$ となる。

〔Ⅲ〕 次の問いに答えよ。

(1) 和

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

を求めよ。

(2) 和

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \right\}$$

を求めよ。

(3) 和

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

を S_n とおく。このとき、すべての自然数 n に対して $S_n < \frac{1}{m}$ となるような自然数 m のうち、最大のものを求めよ。

(以上)