令和 6 年度　高専入試 数学　解答例

注意 考え方がわかる程度に適度に省略しております．図を描くのは大変なので，図がない場合は各自で描いてみてください．なお，この解答例により受ける一切の不利益に関して責任を負いませんので，ご了承ください．

川嶋

$\boxed{1}$ 基本的な問題が並んでいます．

(1) $-2^2 - \dfrac{5}{3} \div \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\right) = -4 - \dfrac{5}{3} \div \dfrac{5}{6} + 9 = -4 - 2 + 9 = 3.$

(2) 解の公式により $x^2 - 4x + 1 = 0$ を解くと $x = 2 \pm \sqrt{3}.$

(3) y は x に反比例し，$x = 4$ のとき $y = 3$ であるから $y = \dfrac{12}{x}$ である．$x > 0$ の範囲で x が増加すると y は減少するから，$3 \leqq x \leqq 6$ のとき，$\dfrac{12}{6} \leqq y \leqq \dfrac{12}{3}$，すなわち，$2 \leqq y \leqq 4.$

(4) $y = ax^2$ において，$x = 2$ のとき $y = 4a$，$x = 6$ のとき $y = 36a$ である．
変化の割合は $\dfrac{36a - 4a}{6 - 2} = 8a = 2$ であるから，$a = \dfrac{1}{4}.$

(5) 出る目の和が 3 の倍数となるのは，

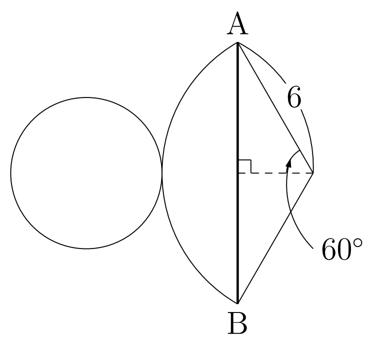
$$(1, 2), (2, 1), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (6, 6)$$

の 12 通りあるから，求める確率は $\dfrac{12}{6^2} = \dfrac{1}{3}.$

(6) 四分位範囲数は $16 - 5 = 11.$

(7) 三角形の内角の和が 180° であることから，$\circ + \circ + \bullet + \bullet = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ である．このことから，$\circ + \bullet = 72^\circ$ である．ゆえに，$x = 180^\circ - (\circ + \bullet) = 108^\circ.$

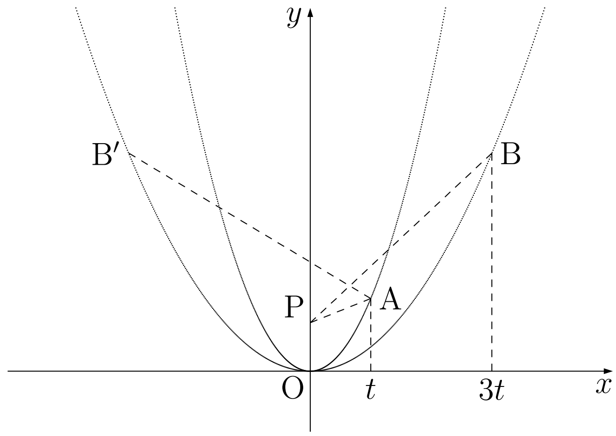
(8) 母線の長さは $\sqrt{2^2 + (4\sqrt{2})^2} = 6\mathrm{cm}$ である．このことから，円錐の展開図は以下のようになる．



ここで，側面の扇形の内角は，$360^\circ \times \dfrac{2}{6} = 120^\circ$ であることに注意する．糸の最短の長さは，上図の展開図における線分 AB の長さである．よって，答えは $2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$

令和 6 年度　高専入試 数学　解答例

$\boxed{2}$ (3) はよくある問題．$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB'} \geqq \mathrm{AB'}$ に気づけるかどうか．



(1) 条件から，3 点 A, B, B′ の座標はそれぞれ $(t, 6t^2), (3t, 9t^2), (-3t, 9t^2)$ である．$t=2$ のとき，A, B′ の座標はそれぞれ $(2, 24), (-6, 36)$ であるから，直線 AB′ の傾きは $\dfrac{24-36}{2-(-6)} = -\dfrac{3}{2}$ である．

(2) 直線 AB′ の傾きは $\dfrac{6t^2-9t^2}{t-(-3t)} = -\dfrac{3t^2}{4t} = -\dfrac{3}{4}t$ である．直線 AB′ の方程式を $y=-\dfrac{3}{4}tx+b$ とおくと，点 A を通ることから $6t^2=-\dfrac{3}{4}t\cdot t+b$，すなわち $b=\dfrac{27}{4}t^2$ である．以上より，直線 AB′ の方程式は $y=-\dfrac{3}{4}tx+\dfrac{27}{4}t^2$ である．

(3) $\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB'} \geqq \mathrm{AB'}$ であるから，$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}$ が最小になるのは点 P が直線 AB′ と y 軸の交点 $\left(0, \dfrac{27}{4}t^2\right)$ と一致するときである．よって，$\dfrac{27}{4}t^2=3$ がわかる．$t>0$ であるから，$t=\dfrac{2}{3}$ である．

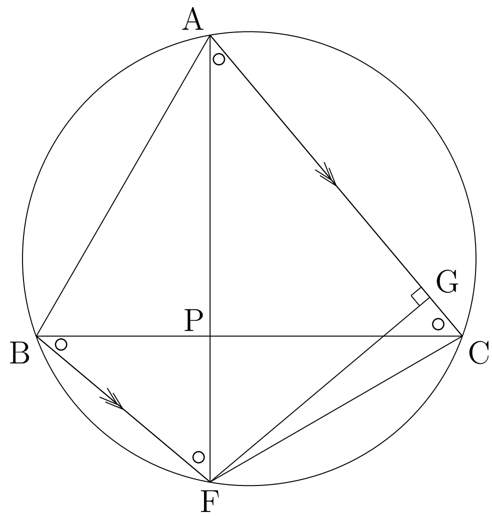
$\boxed{3}$ (4) AG の長さを求めるためには，AF と FG を求めればよい．

(1) $\mathrm{BD}=x$ とおくと，△ABD において，三平方の定理から $\mathrm{AD}^2=13-x^2$．一方，△ADC において，三平方の定理から $\mathrm{AD}^2=25-(6-x)^2=-x^2+12x-11$．よって，$13-x^2=-x^2+12x-11$ であるから，$x=\mathrm{BD}=2$．三平方の定理から $\mathrm{AD}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-4}=3$.

(2) 略

(3) (2) より △ABC と △AEC が相似であることから，$\mathrm{AB}:\mathrm{AD}=\mathrm{AE}:\mathrm{AC}$ である．$\sqrt{13}:3=\mathrm{AE}:5$ であるから，$\mathrm{AE}=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$ である．円 O の半径は線分 AE の半分の長さであるから，$\dfrac{5\sqrt{13}}{6}$.

(4) AC と BF が平行であることと，円周角の定理から，同じ角度のところに ◦ をつけて図を描くと下のようになる．以下の図で，点 P は AF と BC の交点である．



まず，BF と AC が平行であることから，$\triangle\mathrm{AFC} = \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 3 = 9$.

一方，$\triangle\mathrm{AFC} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG} = \dfrac{5}{2}\mathrm{FG}$ である．よって，$\mathrm{FG} = \dfrac{18}{5}$ である．$\mathrm{BP} = \mathrm{PF}$, $\mathrm{AP} = \mathrm{CP}$ であるから，$\mathrm{AF} = \mathrm{AP} + \mathrm{PF} = \mathrm{CP} + \mathrm{BP} = \mathrm{BC} = 6$ である．

ゆえに，三平方の定理から $\mathrm{AG} = \sqrt{\mathrm{AF}^2 - \mathrm{FG}^2} = \sqrt{6^2 - \left(\dfrac{18}{5}\right)^2} = \dfrac{24}{5}$ である．

$\boxed{4}$ 扱う題材は高専の数学の数列の分野で学習するものだが，結局は文章を読めるかどうかが問われているだけで，見た目以上には難しくない．

(1) $n = 5$ のとき，$\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{5\cdot 6}{2} = 15$.

(2) $n = 5$ のとき，$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3} = \dfrac{5\cdot 6\cdot 7}{3} = 70$.

(3) $15 = 5 + 10$ で，15 の下は $6 + 15$ である．15 は 1 から 5 までの自然数の和である．

$1+2+3+4+5+6+7 = 28$ は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ において $n = 7$ のときの値である．

3 列目と 4 列目を見れば，$1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 = 20$ は $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ で $n = 3$ としたときの値であるから，同様にして $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + 5\times 6 + 6\times 7 + 7\times 8$ は $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ で $n = 7$ としたときの値である．最後に，

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}\{2(n+2) - 3\} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

であるから，$X = 2n + 1$ である．