

51  
1133

1929

Vol. XXXII

ANNALES  
de l'Institut Polytechnique M. Kalinin  
à Leningrade  
Mathématique, physique, sciences naturelles et appliquées

ИЗВЕСТИЯ  
Ленинградского Политехнического Института

имени М. И. Калинина

1929 год

102

Отдел техники, естествознания и математики

Том XXXII

ИЗДАНИЕ  
Ленинградского Политехнического Института  
имени М. И. КАЛИНИНА  
1929.

Д Б О

1929

Vol. XXXII

ANNALES  
de l'Institut Polytechnique M. Kalinin  
à Leningrade

Mathématique, physique, sciences naturelles et appliquées

151031

ИЗВЕСТИЯ 4

Ленинградского Политехнического Института

имени М. И. Калинина

1929 год 100

Отдел техники, естествознания и математики

Том XXXII

7463

98

Республиканская  
научно-техническая  
библиотека

ПОГРЯШЕНО

ЛЕНИНГРАД  
1929



Типография ЛСПО. Ленинград, Лештуков, 13.

Ленинградский Областлит № 42950.

Заказ № 73.

Тираж 1888.

ОТДЕЛ I

МАТЕМАТИКА

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1-го ОТДЕЛА

	СТР.
Об обобщении одного тождества В. Я. Буяковского. <i>И. И. Иванов.</i> . . . . .	5
О некоторых приложениях рядов Дирихле. <i>Р. Кузьмин.</i> . . . . .	11
Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов. <i>П. Ф. Папкович.</i> . . . . .	25
К теории способа Греффе (Graeffe) <i>А. Ф. Гагрило.</i> . . . . .	41
Применение обобщенных рядов Фурье к задаче о не гармонических колебаниях системы <i>Л. Г. Лойцянский.</i> . . . . .	49
О средних значениях функций на окружности и сфере. <i>С. А. Гершторин.</i> . . . .	59

## Об обобщении одного тождества В. Я. Буняковского.

И. И. Иванов.

Мы намерены вывести следующее тождество:

$$E\sqrt{\frac{p}{k}} + E\sqrt{\frac{2p}{k}} + \dots + E\sqrt{\frac{ap}{k}} = \frac{p-1}{4} \left( 2a + 1 - \frac{k(p+1)}{8} \right).$$

В этом тождестве символ  $Ex$ , как принято, обозначает наибольшее целое число, не превышающее  $x$ ; число  $p$  простое формы

$$4n + 1,$$

а число  $a$  определяется по данному целому положительному числу  $k$ , меньшему  $p$ , следующим образом ( $m$ —целое число):

$$1) k = 4m, a = m(p - 2);$$

$$2) k = 4m + 2, a = m(p - 2) + \frac{p-3}{2};$$

$$3) k = 4m + 1, a = m(p - 2) + \frac{p-5}{4};$$

$$4) k = 4m + 3, a = m(p - 2) + \frac{3p-7}{4}.$$

Это тождество обращается в частном случае, а именно, при  $k = 1$  и следовательно при  $a$  равном

$$\frac{p-5}{4}$$

в тождество В. Я. Буняковского и принимает следующий вид:

$$E\sqrt{p} + E\sqrt{2p} + \dots + E\sqrt{\frac{p-5}{4}} p = \frac{(p-1)(p-5)}{12}.$$

При выводе нашего тождества мы воспользуемся следующим известным предложением: сумма квадратичных наименьших положительных вычетов по простому модулю  $p$  формы

$$4n + 1.$$

равна сумме наименьших положительных квадратичных невычетов и каждая из этих сумм равна

$$\frac{p(p-1)}{4}.$$

Рассмотрим сумму,

$$E \frac{k}{p} + E \frac{2^2 k}{p} + E \frac{3^2 k}{p} + \dots + E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p},$$

при предположении, что целое положительное число  $k$  менее  $p$ . Наименьшие положительные вычеты чисел

$$k, 2^2 k, 3^2 k, \dots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k$$

по модулю  $p$  будут или все квадратичные или все не квадратичные—смотря потому—будет ли число  $k$  квадратичный или неквадратичный вычет потому же модулю. Обозначая их последовательно через  $r_1, r_2, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ , будем иметь следующее равенство:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{\frac{p-1}{2}} = \frac{p(p-1)}{4}.$$

Далее имеем  $\frac{p-1}{2}$  таких равенств:

$$(A) \frac{n^2 k}{p} = E \frac{n^2 k}{p} + \frac{r_n}{p} \left( n = 1, 2, 3, \dots, \frac{p-1}{2} \right).$$

Наименьшее из чисел

$$E \frac{1^2 k}{p}, E \frac{2^2 k}{p}, \dots, E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p}$$

очевидно равно 0, что же касается наибольшего, т. е. числа

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p}$$

то оно определяется в зависимости от  $k$  следующим образом.

1-й случай:

$$k \equiv 0 \pmod{4},$$

т. е.

$$k = 4m;$$

имеем

$$\frac{(p^2 - 2p + 1)k}{4p} = (p-2)m + \frac{k}{4p}$$

и следовательно

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m.$$

2-й случай:

$$k \equiv 2 \pmod{4},$$

т. е.

$$k = 4m + 2$$

и следовательно,

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{p^2-2p+1}{2p} = (p-2)m + \frac{p-3}{2} + \frac{p+1}{2p},$$

значит

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{p-3}{2}.$$

3-й случай:

$$k \equiv 1 \pmod{4},$$

т. е.

$$k = 4m + 1,$$

а потому

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{p-1}{4} + \frac{3p+1}{4p};$$

отсюда

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{p-5}{4}.$$

4-й случай:

$$k \equiv 3 \pmod{4},$$

т. е.

$$k = 4m + 3$$

имеем:

$$\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{3p-7}{4} + \frac{p+3}{4},$$

а потому

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p} = (p-2)m + \frac{3p-7}{4}.$$

Во всех четырех случаях мы число

$$E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p}$$

обозначаем далее через  $a$ .

Так как целые числа

$$(B) E \frac{1^2 k}{p}, E \frac{2^2 k}{p}, \dots, E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p}$$

заключается между 0 и  $a$ , то для определения их суммы мы воспользуемся известным приемом, а именно, обозначая через  $\mu$  любое целое число из ряда чисел

$$1, 2, 3, \dots, a-1$$

определим, сколько чисел  $(B)$  не превышает  $\mu$ .



Пусть последнее число, не превышающее  $\mu$ , будет

$$E \frac{\lambda^2 k}{p};$$

имеем:

$$\frac{\lambda^2 k}{p} < \mu + 1, \quad \frac{(\lambda + 1)^2 k}{p} > \mu + 1.$$

И следовательно

$$\lambda < \sqrt{\frac{(\mu + 1)p}{k}}, \quad \lambda + 1 > \sqrt{\frac{(\mu + 1)p}{k}},$$

а потому

$$\lambda = E \sqrt{\frac{(\mu + 1)p}{k}},$$

и следовательно, число чисел не превышающих  $\mu - 1$  будет

$$E \sqrt{\frac{\mu p}{k}}.$$

Значит следующая разность

$$E \sqrt{\frac{(\mu + 1)p}{k}} - E \sqrt{\frac{\mu p}{k}}$$

определяет число чисел равных  $\mu$ .

Далее, так как число чисел (A) равных 0 очевидно равно

$E \sqrt{\frac{p}{k}}$ , а всех чисел в совокупности (A) заключается

$$\frac{p-1}{2},$$

то число чисел (B) равных  $a$  будет равно

$$\begin{aligned} \frac{p-1}{2} - E \sqrt{\frac{p}{k}} - (E \sqrt{\frac{2p}{k}} - E \sqrt{\frac{p}{k}}) - (E \sqrt{\frac{3p}{k}} - \\ - E \sqrt{\frac{2p}{k}}) - \dots - (E \sqrt{\frac{ap}{k}} - E \sqrt{\frac{(a-1)p}{k}}) \end{aligned}$$

т. е.

$$\frac{p-1}{2} - E \sqrt{\frac{ap}{k}}.$$

Принимая во внимание полученные результаты, мы заключаем, что сумма

$$E \frac{1^2 k}{p} + E \frac{2^2 k}{p} + \dots + E \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 k}{p}$$

может быть представлена в таком виде:

$$\left( E\sqrt{\frac{2p}{k}} - E\sqrt{\frac{p}{k}} \right) + 2 \left( E\sqrt{\frac{3p}{k}} - E\sqrt{\frac{2p}{k}} \right) + \dots + \\ + a \left( \frac{p-1}{2} - E\sqrt{\frac{ap}{k}} \right)$$

или, что то же, в таком

$$\frac{a(p-1)}{2} - \left( E\sqrt{\frac{p}{k}} + E\sqrt{\frac{2p}{k}} + \dots + E\sqrt{\frac{ap}{k}} \right).$$

Возвращаемся теперь к равенствам (А).

Складывая их и замечая, что

$$\frac{1^2k}{p} + \frac{2^2k}{p} + \frac{3^2k}{p} + \dots + \frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2k}{p} = \frac{(p^2-1)k}{24},$$

мы получим равенство:

$$\frac{(p^2-1)k}{24} = \frac{a(p-1)}{2} - \left( E\sqrt{\frac{p}{k}} + E\sqrt{\frac{2p}{k}} + \dots + E\sqrt{\frac{ap}{k}} \right) + \\ + \frac{p-1}{4},$$

из которого и выводим наше тождество

$$E\sqrt{\frac{p}{k}} + E\sqrt{\frac{2p}{k}} + \dots + E\sqrt{\frac{ap}{k}} = \frac{p-1}{4} \left( 2a + 1 - \frac{k(p+1)}{6} \right).$$

## О некоторых приложениях рядов Дирихле.

*Р. Кузьмин.*

Две общеизвестные формулы:

$$\sum_1^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!} x^{2n-1}$$

$$\sum_1^{\infty} e^{-n^2 x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{x}}$$

являются простейшими примерами из обширного класса формул, дающих возможность с легкостью изучать величину сумм рядов вида  $\sum a_n e^{-nx}$  и некоторых других, аналогичных им, при малых значениях переменного, т. е. как раз тогда, когда непосредственное изучение сумм этих рядов становится затруднительным в виду медленной сходимости рядов.

В дальнейшем я даю две формулы общего характера, являющиеся источником получения бесчисленного множества формул указанного типа. Часть из получающихся таким образом результатов была уже и раньше получена другими авторами с помощью различных методов. Однако бесчисленное множество из получаемых моим методом формул не может быть, повидимому, получено с помощью способов, существенно отличных от указываемого здесь.

§ 1. Пусть при  $s = \sigma + ti$ ;  $\sigma > \sigma_0$ , ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  абсолютно схо-

дится. Предположим, что функция  $f(s)$ , определяемая при  $\sigma > \sigma_0$ , как сумма этого ряда, может быть продолжена на всю плоскость, при чем она мероморфна на всей плоскости и имеет конечное число полюсов. Кроме того, пусть при беспредельном возрастании величины  $|t|$  и при условии:  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$  функция  $f(s) = O(|t|^k)$ , где  $k = k(\sigma_1, \sigma_2)$  — некоторая постоянная, величина которой зависит от выбора чисел  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .

Выберем постоянную  $a$  так, чтобы выполнялось условие:  $a > \text{Max}(\sigma_0, 0)$  и возьмем любое комплексное число  $x$  с положительной вещественной частью:  $Rx > 0$ . Тогда применяя интеграл Mellin'a:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma(s) ds}{x^s},$$

и имея в виду, что ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  на вертикали  $\sigma = a$  сходится абсолютно и равномерно, а интеграл

$$\int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma(s) ds}{(xn)^s}$$

сходится абсолютно, найдем:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma(s) ds}{(xn)^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma(s) f(s) ds}{x^s}$$

С помощью теоремы Коши и опираясь на свойства функции  $f(s)$  предыдущее равенство можно преобразовать в такое:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \sum_{0 \leq n < m} \frac{(-1)^n f(-n)}{n!} x^n + \frac{1}{2\pi i} \int_{-m - \infty i}^{-m + \infty i} \frac{\Gamma(s) f(s) ds}{x^s}$$

При этом:  $m$  — произвольно выбранная положительная постоянная, а  $R(x)$  — сумма вычетов функции  $\frac{\Gamma(s)f(s)}{x^s}$ , распространенная на полюсы функции  $f(s)$ , заключенные в полосе:  $-m < \sigma < a$ . Кроме того подразумевается, что постоянная  $m$  выбрана так, чтобы у функции  $\Gamma(s)f(s)$  не было полюсов с вещественной частью, равной  $-m$ . Наконец предполагается, что все полюсы функции  $f(s)$  отличны от чисел:  $0, -1, -2, -3, \dots$

При несоблюдении двух последних условий найденная формула получит соответствующие изменения.

Для величины интеграла в правой части найденной формулы, справедлива оценка:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-m - \infty i}^{-m + \infty i} \frac{\Gamma(s) f(s) ds}{x^s} \right| < |x| \int_{-\infty}^{+\infty} [\Gamma(-m + ti) f(m + ti)] e^{t \arg x} dt = O(x^m).$$

Оценка  $O(x^m)$  предполагается при условии:  $x \rightarrow 0$ .

§ 2. Приведем несколько простейших примеров приложения найденной общей формулы.

I. Пусть  $a_n = n^\alpha$ . Функция  $f(s)$  в этом случае будет  $\zeta(s - \alpha)$ , где  $\zeta(s)$  — известная функция Римана.

Легко видеть, что  $\zeta(s - \alpha)$  удовлетворяет всем условиям, наложенным в § 1 на функцию  $f(s)$ .

Поэтому:

$$\sum_1^{\infty} n^\alpha e^{-nx} = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{x^{1 + \alpha}} + \sum_{0 \leq n < m} \frac{(-1)^n \zeta(-n - \alpha)}{n!} x^n + O(x^m).$$

Здесь подразумевается, что  $1 + \alpha$  отлично от нуля и от отрицательных целых чисел. При этом  $m$  — любое положительное число, удовлетворяющее условию:  $m + 1 > -R\alpha$ .

При  $\alpha = 0$  с помощью известных равенств:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}; \quad \zeta(-2n) = 0; \quad \zeta(1 - 2n) = \frac{(-1)^n B_n}{2n}$$

получаем:

$$\sum_1^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \sum_{0 \leq n < \frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^n B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + O(x^m).$$

II. Положим:  $a_n = k^n$ , если  $n = k^2$ ,  $k$  — целое, и  $a_n = 0$  в противном случае.

В этом случае функция  $f(s)$  превратится в  $\zeta(2s - \alpha)$ . Число  $\alpha$  будем считать неравным нечетному отрицательному числу. Применение формулы § 1 даст:

$$\sum_1^{\infty} n^\alpha e^{-n^2 x} = \frac{\Gamma\left(\frac{1 + \alpha}{2}\right)}{2x^{\frac{1 + \alpha}{2}}} + \sum_{0 \leq n < m} \frac{(-1)^n \zeta(-2n - \alpha)}{n!} x^n + O(x^m).$$

В частном случае при  $\alpha = 0$ , отсюда получается при  $m > 0$ :

$$\sum_1^{\infty} e^{-n^2 x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + O(x^m).$$

Если  $\alpha$  равна отрицательному нечетному числу, то формула § 1 видоизменится, так как функция  $\zeta(2s - \alpha)$  будет иметь общие полюса с функцией  $\Gamma(s)$ . Например при  $\alpha = -1$  найдем формулу Соина:

$$\sum_1^{\infty} \frac{e^{-n^2 x}}{n} = \lg \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{C}{2} + \sum_{0 < n < m} \frac{B_n x^n}{(n! 2n)} + O(x^m).$$

Здесь  $C$  — постоянная Эйлера.

III. Полагая  $a_n = \tau(n)$  — число делителей числа  $n$ ,  $f(s) = \zeta^2(s)$ , получим формулу Шлемильха:

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{e^{nx} - 1} = \sum_1^{\infty} \tau(n) e^{-nx} = \\ = \frac{1}{x} \lg \frac{1}{x} + \frac{C}{x} - \sum_{n=1}^{n < \frac{m+1}{2}} \frac{B_{2n}}{(2n)! 2n} x^{2n-1} + O(x^m),$$

дающую возможность изучать ряд Ламберта при малых значениях величины  $(x)$ .

IV. Полагая  $a_n = \sum d^2$ , где  $d$  — делители числа  $n$ , найдем что  $f(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s-2)$ .

Пользуясь свойствами функции  $\zeta(s)$ , находим:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^2}{e^{nx} - 1} = \frac{2 \zeta(s)}{x^3} - \frac{1}{12x} + \sum_{n=1}^{n < \frac{m-1}{2}} \frac{B_n B_{n+1}}{4n(n+1)} x^{2n-1} + O(x^m).$$

Эта формула с ошибкой в знаке одного из членов была сообщена S. Ramanujan'ом в письме к G. Hardy в 1913 г. При этом Ramanujan думал, что при  $0 < x < 2$  ряд, получаемый при  $m = \infty$  сходящийся. На самом деле этот ряд, расходящийся при всяком  $x$ , отличном от нуля.

§ 3. Общность результата § 1 такова, что естественно поставить вопрос об обратимости его. Внимательное рассмотрение показывает однако, что непосредственное обращение невозможно. Так, например, ряд  $\sum a_n e^{-nx}$ , определяемый равенством:

$$\sum_0^{\infty} a_n e^{-nx} = \sum_0^{\infty} e^n e^{-n^2 x} \cdot \left[ 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 x} \right]$$

удовлетворяет при  $x \rightarrow 0$  условию:  $\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = O(x^m)$  при произвольном значении положительного постоянного числа  $m$ . Тем не менее ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  — расходящийся при всяком значении числа  $s$ .

Таким образом вообще говоря знание порядка малости или величины величины  $\sum a_n e^{-nx}$  при  $x \rightarrow 0$  не определяет абсциссы сходимости ряда  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ .

Все же существует теорема, дающая возможность определить эту абсциссу при дополнительных условиях относительно коэффициентов  $a_n$ .

Пусть при произвольном выборе положительного числа  $m$  существует равенство:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \sum_{0 \leq n < m} b_n x^n + O(x^m),$$

в котором  $R(x)$  — сумма конечного числа членов вида:  $\beta x^\alpha (\lg x)^\nu$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\nu$  — постоянные, из которых последняя — целое положительное число.

Предположим еще, что числа  $a_n$  удовлетворяют условию  $a_n = O(n^k)$ , где  $k$  — некоторая постоянная.

Тогда: ряд  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$  абсолютно сходится при  $\sigma > k + 1$ , а функ-

ция  $f(s)$ , определяемая его суммой в области его сходимости, мерморфна на всей плоскости и имеет конечное число полюсов.

Первое из утверждений очевидно вытекает из условия:  $a_n = O(n^k)$ . Для доказательства второго возьмем легко доказываемое при  $\sigma > k + 1$  равенство:

$$\Gamma(s) \cdot f(s) = \int_0^{\infty} \left( \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1} dx.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned} \Gamma(s)f(s) &= \int_0^1 \left[ R(x) + \sum_{n < m} b_n x^n \right] x^{s-1} dx + \\ &+ \int_0^1 \left[ \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} - R(x) - \sum_{n < m} b_n x^n \right] x^{s-1} dx + \\ &+ \int_1^{\infty} \left( \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1} dx. \end{aligned}$$

Последнее можно преобразовать в такое:

$$\Gamma(s)f(s) = \sum \frac{\beta(-1)^{\nu} \nu!}{(s+\alpha)^{\nu+1}} + \sum_{n < m} \frac{b_n}{s+n} +$$

$$+ \int_1^{\infty} \left( \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} \right) x^{s-1} + \int_0^1 \left[ \sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} - R(x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n < m} b_n x^n \right] x^{s-1} dx$$

при  $\sigma > -m$  оба интеграла в правой части голоморфны. Поэтому  $f(s)$  мероморфна в области  $\sigma > -m$  и может иметь своими полюсами только числа  $-\alpha$ . В силу произвольности числа  $m$  отсюда вытекает справедливость теоремы.

§ 4. Применение формулы § 1 дает место одному обстоятельству, достойному внимания.

Если при всяком целом  $n$ , начиная с  $n = n_0$ , оказывается, что  $f(-n) = 0$ , то при  $m > \max(n_0, -k\alpha)$  будет справедливо равенство:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + O(x^m)$$

Здесь  $R(x)$  сумма конечного числа слагаемых вида  $\beta x^{\alpha} (\lg x)^{\nu}$ , одних и тех же при всех  $m$ .

В этом случае при малых значениях величины  $|x|$  выражение  $R(x)$  представляет величину  $\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx}$  с точностью до бесконечно малой бесконечно высокого порядка, считая  $|x|$  за основную бесконечно малую величину [при этом легко видеть, что если  $a_n = O(n^k)$ , то условие:  $f(-n) = 0$ , не только достаточное, но и необходимое условие для наличия указанного обстоятельства].

Отсюда, напр., вытекает, что при целом  $k$  подобное обстоятельство не может встретиться для рядов  $\sum_1^{\infty} n^{\alpha} e^{-n^{2k+1}x}$  ни при каких значениях коэффициента  $\alpha$ , в то время как для рядов:

$$\sum_1^{\infty} n^{\alpha} e^{-n^{2k}x},$$



для которых  $f(s) = \zeta(ks - \alpha)$ , отмеченное обстоятельство будет иметь место тогда и только тогда, если при  $n < n_0$  число  $-2kn - \alpha$  будет четным, т. е. это будет при  $\alpha$  равном четному числу.

В рассматриваемых случаях формула § 1 не дает достаточно полных данных о величине суммы  $\sum a_n e^{-nx}$  и из других соображений можно узнать больше. Так для  $\sum e^{-n^2x}$  мы получили равенство:

$$\sum_1^{\infty} e^{-n^2x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + O(x^m),$$

а известно, напр., из теории тета функций более точное равенство:

$$\sum_1^{\infty} e^{-n^2x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{x}}.$$

Для получения равенств такого рода формулы § 1 недостаточно и нужны более тонкие методы.

В следующем § дается теорема с помощью которой во многих случаях можно получить формулы того типа, о котором говорилось.

§ 5. Пусть числа  $a_n$  таковы, что связанная с ними функция  $f(s)$ , определенная в § 1, удовлетворяет выставленным там условиям и кроме того функциональному уравнению, аналогичному уравнению функции  $\zeta(s)$ :

$$f(q-s) = \Phi(s) f_1(s).$$

При этом:

$$\Phi(s) = \frac{e^{2s} \prod \Gamma(\beta_v + \gamma_v s)}{\prod \Gamma(\beta'_v + \gamma'_v s)};$$

числа  $\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$  — постоянные, из которых  $\gamma, \gamma'$  — вещественны,

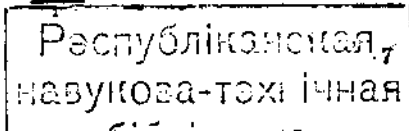
$$f_1(s) = \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^s} \text{ — ряд абсолютно сходящийся при } \sigma > \sigma'.$$

$q$  — некоторая постоянная.

Пусть сверх того при всех целых  $n > n_0$  удовлетворяется условие:  $f(-n) = 0$ .

Тогда при  $Rx > 0$  справедлива формула:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{x^2} \sum_1^{\infty} b_n \phi\left(\frac{n}{x}\right)$$



где  $R(x)$  — сумма конечного числа членов вида:  $\lambda x^\sigma (\lg x)^\tau$ , а функция  $\psi(z)$ , вид которой определяется множителем  $\Phi(s)$ , удовлетворяет условию: при  $Rz < 0$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\arg z = \text{const}$ , и при произвольном  $m > 0$ ,  $\psi(z) = O(z^{-m})$ .

В силу условий:  $a_n = O(n^{\sigma_0})$ ,  $b = O(n^{\sigma_0})$  и свойств функций  $e^z$  и  $\psi(z)$  оба ряда этой формулы абсолютно сходящиеся.

Для доказательства выберем постоянную  $a < \max(\sigma_0, 0)$  и пользуясь интегралом Mellin'a легко найдем:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma(s) f(s) ds}{x^s}$$

Выбрав постоянную  $\delta > \max(\sigma_0 - kq, n_0)$  и применив теорему Коши предыдущее равенство преобразуем в такое:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\delta - \infty i}^{-\delta + \infty i} \frac{\Gamma(s) \cdot f(s) ds}{x^s}$$

Здесь  $R(x)$  — сумма вычетов подынтегральной функции в полосе:  $-\delta < \sigma < 0$ .

С помощью подстановки:  $s = q - u$  и функционального уравнения для функции  $f(s)$  найдем:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{2\pi x^q} \int_{q + \delta - \infty i}^{q + \delta + \infty i} \frac{\Gamma(q - u) \Phi(u)}{x^{-u}} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^u} \cdot du$$

Из условия:  $f(s) = O(|t|^m)$  легко вывести равенство:

$$\sum |\gamma_n| = \sum |\gamma'_n|$$

Следовательно:  $\Phi(u) = O(|t|^m)$ , где  $u = \sigma + it$ ;  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ;  $\mu$  — постоянная, величина которой зависит от величины чисел  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , которые могут быть выбираемы произвольно.

Поэтому, и благодаря абсолютной и равномерной сходимости ряда  $\sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n^u}$ , окажется:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{x^q} \sum_1^{\infty} b_n \psi\left(\frac{n}{x}\right),$$

где для краткости положено:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{q+\delta-\infty i}^{q+\delta+\infty i} \frac{\Gamma(q-u)\Phi(u)du}{z^u}$$

Чтобы получить оценку величины функции  $|\psi(z)|$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $\arg z = c$ ;  $|c| < \frac{\pi}{2}$  с помощью теоремы Коши находим:

$$\psi(z) = R_1(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{m-\infty i}^{m+\infty i} \frac{\Gamma(q-u)\Phi(u)du}{z^u}$$

Здесь  $R_1(z)$  — сумма вычетов полосы:  $m > \sigma > q + \delta$ .

Полюсы подынтегральной функции могут быть лишь в точках:  $u = q + n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , а также в точках, где  $\Phi(u)$  имеет полюс.

С помощью равенств:  $f(-u) = \Phi(q+u) \cdot f_1(q+u)$  и  $\Phi(u) = \frac{f(1-u)}{f_1(u)}$  нетрудно убедиться, что при выборе числа  $\delta$  достаточно большим окажется, что  $R_1(z) = 0$ , а отсюда вытекает:  $\psi(z) = O(z^{-m})$ .

В заключение заметим, что обратно из существования формулы:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{x^k} \sum_1^{\infty} b_n \psi\left(\frac{n}{x}\right)$$

при дополнительном условии:  $a_n = O(n^k)$ ,  $b_n = O(n^k)$ , вытекает существование функционального уравнения для функции  $f(s)$ , равной при

$\sigma > k + 1$  сумме ряда  $\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно

применить рассуждение близкое ко второму доказательству Римана для функционального уравнения функции  $\zeta(s)$ . Для краткости здесь опускается это доказательство.

§ 6. Приведем два примера приложения формулы § 5.

I. Если  $f(s) = \zeta(2s)$ , то тогда:

$$f\left(\frac{1}{2} - s\right) = \frac{\Gamma(s)}{\pi^{2s} - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)} f(s).$$

$R(x)$  в данном случае при соответствующем выборе числа  $\delta$  превращается в функцию:  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2}$ , а функция  $\psi(z)$  при  $a > 0$  выразится формулой:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) \cdot \Gamma(s)}{\pi^{2s} - \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right)} \frac{ds}{x^s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma(s) ds}{(\pi^{2z})^s} = \sqrt{\pi} e^{-\pi z}.$$

Поэтому в данном случае формула § 5 дает известную формулу преобразования тэта функций:

$$\sum_1^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{x}} \sum_1^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{x}}$$

II. Пусть  $f(s) = \zeta(s) \cdot \zeta(s - 2k + 1)$ , где  $k > 1$  — целое положительное число.

В этом случае имеем функциональное уравнение:

$$f(2k - s) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2\pi)^{2s-2k+1}} \Gamma(s) \Gamma(s - 2k + 1) \sin \pi s \cdot f(s)$$

Обозначая через  $T_{2k-1}(n)$  величину  $\sum d^{2k-1}$ , где  $d$  — делитель числа  $n$ , и, применив формулу § 5, найдем:

$$\sum_1^{\infty} T_{2k-1}(n) e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{x^{2k}} \sum_1^{\infty} T_{2k-1}(n) \psi\left(\frac{n}{x}\right),$$

где для краткости введены обозначения:

$$R(x) = \frac{\Gamma(2k)\zeta(2k)}{x^{2k}} + \zeta(0)\zeta(1-2k) = \frac{B_k}{2k} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{2k} - \frac{(-1)^k}{2} \right].$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{2(-1)^{k+1} \Gamma(2k-u) \Gamma(u-2k+1) \Gamma(u) \sin \pi u du}{(2\pi)^{2u-2k+1} z^u} =$$

$$= \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k}}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\Gamma(u) du}{(4\pi^2 z)^u} = 2(-1)^k (2\pi)^{2k} e^{-4\pi^2 z}.$$

Сопоставляя все это, получим:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} T_{2k-1}(n) e^{-nx} &= \frac{B_k}{2k} \left[ \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{2k} - \frac{(-1)^k}{2} \right] + \\ &+ \frac{(-1)^k (2\pi)^{2k}}{x^{2k}} \sum_1^{\infty} T_{2k-1}(n) e^{-\frac{4\pi^2 n}{x}}, \end{aligned}$$

что можно переписать и так (по замене величины  $x$  на  $2\pi x$ ):

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^{2k-1}}{e^{2\pi n x} - 1} = \frac{B_k}{2k} \left[ \frac{1}{2x^{2k}} - \frac{(-1)^k}{2} \right] + \frac{(-1)^k}{x^{2k}} \sum_1^{\infty} \frac{n^{2k-1}}{e^{\frac{2\pi n}{x}} - 1}$$

В частности, полагая  $x=1$ , найдем при  $k=3, 5, 7$  суммы следующих рядов:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^3}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{336}; \quad \sum_1^{\infty} \frac{n^5}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{264}; \quad \sum_1^{\infty} \frac{n^7}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{24}$$

Последний из этих рядов производится в названном раньше письме S. Ramanujan'a.

При  $k=1$  формула несколько видоизменится и превратится в такую:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n}{e^{2\pi nx} - 1} = \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{4\pi x} - \frac{1}{x^3} \sum_1^{\infty} \frac{n}{e^{\frac{2\pi n}{x}} - 1}$$

Отсюда в частности при  $x=1$ , находим:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8\pi}$$

Взяв производную от обеих частей равенства, выражающего

функциональное уравнение для функции  $\sum_1^{\infty} \frac{n^{2k}}{e^{2\pi nx} - 1}$ , и положив

затем  $x=1$ , найдем после соответствующих упрощений:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^{2k}}{(e^{2\pi n} - e^{-2\pi n})^2} = \frac{Bk}{8\pi} + \frac{(-1)^k k}{2\pi} \sum_1^{\infty} \frac{n^{2k-1}}{e^{2\pi n} - 1}$$

при  $k$  — четном [эта формула также дана S. Ramanujan'ом в письме к G. Hardy].

При  $k$  — нечетном получится:

$$\sum_1^{\infty} \frac{n^{2k-1}}{e^{2\pi n} - 1} = \frac{(-1)^k + 1 Bk}{2k}$$

Подобным же способом из общей формулы § 5 можно получить и такие формулы S. Ramanujan'a:

$$\sum_1^{\infty} \frac{c h \pi n}{n^7} = \frac{19\pi^7}{56700} \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 c h \frac{2n+1}{2} \pi} = \frac{\pi^5}{768}$$

§ 7. Формулы, подобные формулам § 1 и § 5 существуют не

только для рядов вида  $\sum_1^{\infty} a_n e^{-\pi n}$ , а и для некоторых других

вида  $\sum a_n \varphi(nx)$ , частным случаем которых являются предыдущие. При этом функции  $\varphi(x)$  обладают некоторыми свойствами, аналогичными функцией  $e^{-x}$ .

Они удовлетворяют некоторым простым линейным дифференциальным уравнениям, выражаются интегралами по вертикали, содержащими подобно интегралу Mellin'a функции  $\Gamma(s)$  и  $x^s$  и кроме того при беспредельном возрастании  $|x|$  и условии:  $\arg x = c$ ,  $|c| < \frac{\pi}{2}$  убывают быстрее всякой отрицательной степени величины  $|x|$ .

Опуская для краткости формулировку и вывод общих теорем, рассмотрим один пример формул подобного рода.

Пусть  $\xi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma^2(s) ds}{x^s}$ , интеграл, встречающийся в мемуаре

Г. Ф. Вороного: Sur une fonction transcendente (Annales de l'Ecole Normale 1904). ( $a > 0$ ).

Нетрудно убедиться, что  $x\xi'' + \xi' - \xi = 0$ , а также, что  $\xi(x)$  обладает остальными указанными свойствами функций  $\varphi(x)$ .

При условии  $|\arg x| < \pi$ ,  $a > \frac{1}{2}$  нетрудно показать справедливость равенства:

$$\sum_1^{\infty} \tau(n) \xi(\pi^2 n^2 x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a - \infty i}^{a + \infty i} \frac{\Gamma^2(s) \zeta^2(2s) ds}{(\pi^2 x)^s}$$

Применяя теорему Коши, отсюда получим:

$$\sum_1^{\infty} \tau(n) \xi(\pi^2 n^2 x) = \frac{4c - 4 - \lg 16\pi^2 x}{4\sqrt{x}} + \frac{8\lg \sqrt{2\pi - 2c - \lg \pi^2 x}}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta - \infty i}^{-\beta + \infty i} \frac{\Gamma^2(s) \zeta^2(2s) ds}{(\pi^2 x)^s}$$

При этом  $\beta$  — любое положительное число.

Переписав функциональное уравнение функции  $\zeta(s)$  в таком виде:

$$\frac{\Gamma^2(s) \zeta^2(2s)}{\pi^{2s}} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} - s\right) \zeta^2(1 - 2s)}{\pi^{1 - 2s}}$$

и применив подстановку:  $s = \frac{1}{2} - n$ , найдем:

$$\int_{-\beta - \infty i}^{-\beta + \infty i} \frac{\Gamma(s)\zeta^2(2s)ds}{\pi^{2s}x^{2s}} = \int_{-\beta - \infty i}^{-\beta + \infty i} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} - s)\zeta^2(1 - 2s)ds}{\pi^{1-2s}x^s} = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\frac{1}{2} + \beta - \infty i}^{\frac{1}{2} + \beta + \infty i} \frac{\Gamma^2(u)\zeta^2(2u)du}{\left(\frac{\pi}{x}\right)^u}$$

Пользуясь разложением:  $\zeta(2u) = \sum_1^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{2u}}$  в связи с предыдущим найдем:

$$\sum_1^{\infty} \tau(n)\xi(\pi^2 n^2 x) = \frac{4c - 4ig16\pi^2 x}{4\sqrt{x}} + \frac{4ig2\pi - 2c - ig\pi^2 x}{4} + \\ + \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_1^{\infty} \tau(n)\xi\left(\frac{\pi^2 n^2}{x}\right).$$

Законность интегрирования почленно легко доказать, опираясь на свойства функций  $\xi(z)$ ,  $\Gamma(s)$ ,  $\zeta(s)$ .

## Ueber einige Anwendungen der Dirichlet'schen Reihen.

*R. Kusmin.*

Hier sind einige Anwendungen folgenden zweier allgemeiner Sätze gegeben:

I. Sei  $f(s)$  eine in der ganzen Ebene meromorphe Function einer komplexen veränderlichen  $s = \sigma + ti$ , welche nur eine endliche Zahl von Polen besitzt und in der Halbebene  $\sigma > \sigma_0$  in eine absolut konvergente Reihe

$\sum \frac{a_n}{n^s}$  entwickelbar ist. Unter Voraussetzung, das:  $f(s) = O(t^k)$  in jedem Streifen  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ , wo  $k = k(\sigma_1, \sigma_2)$  eine entsprechende Konstante ist, kann man behaupten dass:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \sum_{0 < n < m} \frac{(-1)^n}{n!} f(-n) x^n + O(x^m)$$

wo  $(arg x) < \frac{\pi}{2}$ ,  $R(x)$  eine endliche Summe der Glieder von der Form  $cx^\lambda (lg x)^\mu$ , und  $m$  — eine beliebige positive Zahl ist.

Die Abschätzung  $O(x^m)$  ist gemacht unter Voraussetzung  $x \rightarrow 0$ .

II. Sei  $f(s)$  eine Function, die obenerwähnte Voraussetzungen erfüllt und für welchen die Functionalgleichung:

$$f(q-s) = \frac{e^{qs} \prod \Gamma(\alpha_v s + \beta_v)}{\prod \Gamma(\alpha'_v s + \beta'_v)} \cdot f_1(s)$$

besteht. Hier sind:  $q$  — eine positive Zahl.  $\alpha, \beta, \beta'_v$  — Konstanten,  $\alpha, \alpha'_v$  — reelle Konstanten und  $f_1(s)$  in entsprechender Halbebene in eine Dirichletsche Reihe  $\sum \frac{b_n}{n^s}$  entwickelbar ist.

Dann besteht die Formel:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-nx} = R(x) + \frac{1}{x^q} \sum_1^{\infty} b_n \psi\left(\frac{n}{x}\right)$$

wo  $(\arg x) < \frac{\pi}{2}$  und  $R(x)$  eine endliche Summe der Glieder von der Form  $cx^\lambda (\lg x)^\mu$  ist.

Die Function  $\psi(z) = O(z^{-m})$  wenn  $z \rightarrow \infty$ ,  $m$  — eine beliebige positive Konstante,  $(\arg z) < \frac{\pi}{2}$ .

Für die Function  $\psi(z)$  kann man leicht eine Integraldarstellung geben.



**Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов.**

*П. Ф. Папкович.*

Настоящая заметка имеет целью распространить методу главных координат на тот случай малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов, когда живая сила системы  $T$ , потенциальная энергия  $V$  и функция рассеяния  $\Phi$  никаким линейным преобразованием неизвестных не могут быть одновременно освобождены от входящих в них произведений различных переменных.

В этом случае, как известно, переменные в уравнениях Лангранжа не разделяются, а это обычно считается достаточным основанием к тому, чтобы утверждать, что в рассматриваемой задаче главных координат вообще нет.

Мы имеем в виду показать, что основным уравнениям движения можно в этом случае придать некоторую форму, отличную от Лагранжевой, в которой переменные путем надлежащего их выбора всегда можно разделить; что разделяющиеся в этих уравнениях переменные отличаются основным свойством главных координат—ортогональностью, и что метода главных координат может быть полностью, но, конечно—в несколько трансформированном виде распространена на рассматриваемый случай малых колебаний системы.

1° пусть  $m$  есть число степеней свободы некоторой системы, потенциальная энергия  $V$ , живая сила  $T$  и функция рассеяния  $\Phi$  которой суть:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m A_{kn} q'_k q'_n \quad (1)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m B_{kn} q'_k q'_n \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m C_{kn} q_k q_n$$

и

где коэффициенты  $A_{kn}$ ,  $B_{kn}$ , и  $C_{kn}$  удовлетворяют условиям

$$A_{kn} = A_{nk}$$

$$B_{kn} = B_{nk}$$

$$C_{kn} = C_{nk}$$

функции же  $V$  есть функция обыкновенная, так что

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \dots & C_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4)$$

Пусть никакой линейной подстановкой переменные в уравнениях Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q'_k} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad (5)$$

не разделяются.

Введем в рассмотрение величины  $r_k$ , определяемые равенствами

$$r_k = q'_k \quad (6)$$

и обозначим буквами  $L$  и  $W$  величины:

$$L = T - V \quad (7)$$

$$W = \Phi + \Pi \quad (8)$$

где  $\Pi$  есть некоторая функция, как от всех величин  $q_k$ , так и от всех  $r_k$  и определяется тем, что при всяком  $k$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r_k} = \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что уравнения Лагранжа (5) эквивалентны уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial r_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial r_k} = Q_k \quad (10)$$

уравнения же (6), в силу условия (4) эквивалентны уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0. \quad (11)$$

причем, как уравнений (10), так и уравнений (11) можно выписать по одному для всякого  $k$  от  $k=1$  до  $k=m$ .

Введя подстановку:

$$q_k = \sum_{j=1}^{j=2m} \nu_{kj} p_j \quad (12)$$

и

$$r_k = \sum_{j=1}^{j=2m} \mu_{kj} p_j \quad (13)$$

$2m$  новых переменных, условимся считать коэффициенты этой подстановки  $\nu_{kj}$  и  $\mu_{kj}$  некоторыми константами, вполне определяемыми значениями их индексов  $k$  и  $j$ .

Помножив каждое уравнение группы (10) на

$$\frac{\partial r_k}{\partial p_j} = \mu_{kj};$$

каждое же уравнение группы (11) на

$$\frac{\partial q_k}{\partial p_j} = \nu_{kj}$$

сложим после этого все эти уравнения. Этим путем можно для всякого индекса  $j$  от  $j=1$  до  $j=2m$  получить по уравнению:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial p_j} \right) + \frac{\partial W}{\partial p_j} = P_j \quad (14)$$

где

$$P_j = \sum_{k=1}^{k=m} \mu_{kj} Q_k \quad (15)$$

Уравнения группы (14) имеют все совершенно одинаковую структуру. Все они первого порядка; число их равно удвоенному числу степеней свободы системы. Это и есть интересующая нас система основных уравнений задачи.

Величины  $L$  и  $W$ , входящие в уравнения (14), определяются, по сказанному выше, равенствами:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} (A_{kn} r_k r_n - C_{kn} q_k q_n) \quad (16)$$

и

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} [B_{kn} r_k r_n + C_{kn} (r_k q_n + q_k r_n)]. \quad (17)$$

и в силу подстановок (12) и (13) могут считаться однородными, целыми, алгебраическими полиномами второй степени от переменных  $p_j$ .

2° Подстановку (12) и (13) можно всегда подобрать так, чтобы функции  $L$  и  $W$  были освобождены от произведений различных переменных вида  $p_i p_j$ .

Координаты  $p_j$ , удовлетворяющие этому условию мы будем называть главными координатами задачи, соответствующие же каждой из них движения системы ее главными движениями.

В главных координатах

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=2m} M_j p_j^2 \quad (18)$$

$$W = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{j=2m} N_j p_j^2 \quad (19)$$

где  $M_j$  и  $N_j$  суть некоторые константы. Поэтому в главных координатах уравнения (14) имеют вид:

$$M_j p_j' + N_j p_j = P_j \quad (20)$$

Каждая из  $2m$  главных координат может быть таким образом, разыскана из своего особого уравнения (20).

Коэффициенты этих уравнений  $M_j$  и  $N_j$  могут быть легко найдены, если форма соответствующего движения известна. Действительно, подставив  $q_k$  и  $r_k$  из выражений (12) и (13) в равенства (16) и (17) и сопоставив результат этой подстановки с формулами (18) и (19), можно видеть, что:

$$M_j = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} \{A_{km} \mu_k \mu_{nj} - C_{kn} v_{kj} v_{nj}\} \quad (21)$$

и

$$N_j = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} \{B_{km} \mu_k \mu_{nj} + 2C_{kn} \mu_{kj} v_{nj}\} \quad (22)$$

формулы (21), (22) и (15) показывают, что если форма какого-либо из главных движений, то есть совокупность параметров  $v_{kj}$  и  $\mu_{kj}$ , соответствующих какому-либо определенному значению индекса  $j$ , найдена, то дифференциальные уравнения (20) составляются для каждой из главных координат независимо.

3° Для разыскания формы каждого из главных движений воспользуемся обычною методом частных решений. Мы знаем, что си-

стема (5) эквивалентна системе (20) при всяком задании возмущающих сил  $Q_k$ . Обе эти системы следовательно эквивалентны и в том случае, если все

$$Q_k = 0$$

а следовательно и все:

$$P_j = 0.$$

Мы удовлетворим однако в этом частном случае системе (20), если допустим, что

$$p_j = e^{\alpha_j t}$$

где

$$\alpha_j = - \frac{M_j}{N_j}; \tag{23}$$

а все

$$p_i = 0 ;$$

при

$$i \neq j.$$

Это требует однако того, чтобы величины  $q_k$ , если их задать в форме

$$q_k = v_{kj} e^{\alpha_j t} \tag{24}$$

удовлетворяли уравнениям (5).

Для этого совокупность коэффициентов  $v_{kj}$  а равно и  $\alpha_j$  должна быть найдена из системы уравнений, каждое к-ое из которых есть:

$$\sum_{k=1}^{n-m} \{A_{kn} \alpha_j^2 + B_{kn} \alpha_j + C_{kn}\} v_{nj} = 0. \tag{25}$$

Так как все  $v_{nj}$  не могут быть одновременно равны нулю, то  $\alpha_j$  должно быть корнем уравнения:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} (A_{11} \alpha_j^2 + B_{11} \alpha_j + C_{11}); & (A_{12} \alpha_j^2 + B_{12} \alpha_j + C_{12}); & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{21} \alpha_j^2 + B_{21} \alpha_j + C_{21}); & (A_{22} \alpha_j^2 + B_{22} \alpha_j + C_{22}); & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{m1} \alpha_j^2 + B_{m1} \alpha_j + C_{m1}); & (A_{m2} \alpha_j^2 + B_{m2} \alpha_j + C_{m2}); & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| = 0 \tag{26}$$

Найдя все  $2m$  корней уравнения (27), можно затем для каждого из них найти из уравнений (25) совокупность отношений

$$\frac{v_{2j}}{v_{1j}} ; \frac{v_{3j}}{v_{1j}} ; \dots ; \frac{v_{mj}}{v_{1j}}$$

Величины  $v_{1j}$  остаются при этом неопределенными. Ими можно задаться, как угодно. Условившись считать

$$v_{jj} = 1$$

мы можем принимать, что все  $\alpha_j$  и  $\nu_{kj}$  определяются уравнениями (25) и (26) вполне. Когда они найдены, можно для нахождения коэффициентов  $\mu_{kj}$  воспользоваться непосредственно равенствами (6) и (13), в силу которых

$$\mu_{kj} = \alpha_j \nu_{kj} \quad (27)$$

4. Обратимся теперь к задаче о разыскании начальных значений главных координат. Для этой цели допустим, что координаты  $p_j$ , определяемые подстановкою (12) и (13), суть координаты главные, и исключив с помощью равенств (12) и (13) величины  $q_k$  и  $r_k$  из выражений (16) и (17), сравним полученный таким образом результат вновь с формулами (18) и (19), обратив на этот раз внимание на то, с каким множителем в обе формулы для  $L$  или  $W$  входит произведение

$$p_i p_j$$

где

$$i \neq j.$$

Нетрудно видеть, что, если  $p_j$  координаты главные, то при всяких  $i$  и  $j$  не равных друг другу должно быть:

$$\sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} \{A_{kn} \mu_{ki} \mu_{nj} - C_{kn} \nu_{ki} \nu_{nj}\} = 0. \quad (28)$$

и

$$\sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} \{B_{kn} \mu_{ki} \mu_{nj} + C_{kn} (\mu_{ki} \nu_{nj} + \nu_{ki} \mu_{nj})\} = 0. \quad (29)$$

Равенства (28) и (29) позволяют находить начальные значения всех главных координат независимо друг от друга. Так например, для разыскания начального значения  $j$ -ой главной координаты  $p_j$  можно помножить каждое из уравнений группы (13) на  $A_{kn} \mu_{nj}$ , каждое же из уравнений группы (12) на  $-C_{kn} \nu_{nj}$  и их все затем сложить. Это дает возможность для всякого  $n$  получить по уравнению:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{k=m} \{r_k A_{kn} \mu_{nj} - q_k C_{kn} \nu_{nj}\} = \\ & = \sum_{j=1}^{j=2m} \left\{ p_j \sum_{k=1}^{k=m} (A_{kn} \mu_{ki} \mu_{nj} - C_{kn} \nu_{ki} \nu_{nj}) \right\}. \end{aligned}$$

Сложив все эти уравнения, получим:

$$\sum_{j=1}^{j=2m} p_j \left\{ \sum_{k=m}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} (A_{kn} v_{ki} v_{nj} - C_{kn} v_{ki} v_{nj}) \right\} = \\ = \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} \left\{ r_k A_{kn} v_{nj} - q_k C_{kn} v_{nj} \right\}.$$

или, принимая во внимание равенства (28) и (27):

$$p_j = \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} r_k A_{kn} v_{nj} - \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} q_k C_{kn} v_{nj}}{\alpha_j^2 \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} A_{kn} v_{kj} v_{nj} - \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} C_{kn} v_{kj} v_{nj}} \quad (30)$$

Аналогичным образом с помощью равенства (29) можно получить

$$p_j = \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} r_k B_{kn} v_{nj} + 2 \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} q_k C_{kn} v_{nj}}{\alpha_j^2 \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} B_{kn} v_{kj} v_{nj} + 2 \alpha_j \sum_{k=1}^{k=m} \sum_{n=1}^{n=m} C_{kn} v_{kj} v_{nj}} \quad (31)$$

С помощью одной из формул (30) или (31) можно найти начальные значения главных координат для каждого из главных движений независимо <sup>1)</sup>. Сопоставляя этот результат с полученным в 2° заключаем, что и начальное значение каждой из главных координат, и дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, могут быть для каждого из главных движений системы найдены независимо. Как только форма какого-либо из главных движений (то-есть совокупность параметров  $v_{1j}$ ,  $v_{2j}$ ,  $v_{3j}$  и т. д.) найдена так можно уже вполне исследовать это движение, не входя в рассмотрение всех

<sup>1)</sup> Полученный результат не является новым. В частности формулу (28) и вытекающую из нее формулу (30) можно найти в динамике Routh'a (см. № 383 и 384). Формула (29) и вытекающая из нее формула (31) не совпадает непосредственно с приведенной у Routh'a. Из формул (28), (29) и (27) можно однако вывести формулу:

$$\sum_k \sum_n B_{kn} v_{ki} v_{nj} + (\alpha_j + \alpha_i) \sum_k \sum_n A_{kn} v_{ki} v_{nj} = 0.$$

позволяющую в дополнение к формулам (30) и (31) наметить третий путь нахождения величин  $p_j$ , который у Routh'a и приведен.

остальных главных движений. Это в некоторых случаях, когда не требуется разыскания всех главных координат, может значительно упростить исследование.

5. Переходя к рассмотрению общего характера движения системы, мы должны прежде всего отметить, что коэффициенты  $M_j$  и  $N_j$ , а следовательно и величина  $\alpha_j$  в рассматриваемой задаче могут быть только в исключительных случаях реальны. Это следует из того, что функции  $L$  и  $W$ , как видно из равенств (17) и (16), обе не являются функциями определенными, так что теорема Вейрштрасса, доказывающая реальность главных координат, в рассматриваемом случае неприменима.

Главные движения в рассматриваемой задаче только в исключительных случаях являются движениями реальными. Число их равно вообще удвоенному числу степеней свободы тела.

Нетрудно однако показать, что, если одно из главных движений системы получается мнимым или комплексным, то существует всегда другое движение, в нем сопряженное. Оба главных сопряженных движения, складываясь, дают всем точкам системы движение реальное.

Для доказательства этого положения допустим, что  $\alpha_j$  и  $\alpha_{j+m}$  два сопряженных корня уравнения (26). Из рассмотрения системы (25) совместно с равенствами  $v_{jj} = 1$ , нетрудно видеть, что величины

$$\begin{array}{l} \text{и вообще} \\ v_{2j} \quad \text{и} \quad v_{2j+m} \\ v_{3j} \quad \text{и} \quad v_{3j+m} \\ v_{kj} \quad \text{и} \quad v_{kj+m} \end{array}$$

являются величинами попарно сопряженными. Это, вместе с формулами (15), (21) и (22) показывают, что величины

$$\begin{array}{l} M_j \quad \text{и} \quad M_{j+m} \\ N_j \quad \text{и} \quad N_{j+m} \end{array}$$

а, если силы  $Q_n$  реальны, то и величины

$$P_j \quad \text{и} \quad P_{j+m}$$

являются также величинами попарно сопряженными.

Так как начальные отклонения системы, а равно и ее скорости, суть у всякой реальной системы величины реальны, то в силу равенств (30) и (31) можно считать начальные значения величин

$$p_j \quad \text{и} \quad p_{j+m}$$



величинами попарно сопряженными. Это, вместе со сказанным выше о коэффициентах уравнения (20) позволяет заключить, что и во всем дальнейшем движении величины

$$p_j \quad \text{и} \quad p_{j+m}$$

а следовательно и

$$\nu_{kj} p_j \quad \text{и} \quad \nu_{k_{j+m}} p_{j+m}$$

остаются величинами попарно сопряженными. Сумма двух комплексных сопряженных величин всегда реальна. Поэтому каждые два комплексных сопряженных главных движения системы всегда складываются в одно суммарное движение, в котором движения всех точек системы реальны. Эти суммарные движения, в которые складываются оба сопряженных главных движения, можно назвать простейшими колебаниями системы.

Так как каждое из простейших колебаний системы складывается из двух ее главных движений, то вообще число простейших колебаний системы равно числу степеней свободы ее.

6. Проследим общий характер каждого из простейших колебаний системы в том частном случае, когда движение происходит по инерции и, следовательно, все  $P_j$  равны нулю. Эти колебания системы можно назвать ее простейшими свободными колебаниями.

Пусть для  $j$ -ого главного движения системы:

$$\alpha_j = -h_j + \lambda_j i$$

а для сопряженного с ним:

$$\alpha_{j+m} = -h_j - \lambda_j i$$

(32)

где  $i$  знак мнимости. При  $P_j = P_{j+m} = 0$  уравнения (20) дают:

$$p_j = a_j e^{(-h_j + \lambda_j i) t}$$

и

$$p_{j+m} = a_{j+m} e^{(-h_j - \lambda_j i) t}$$

где  $a_j$  и  $a_{j+m}$  постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения.

Движение  $k$ -ой точки системы, складывающееся из обоих рассматриваемых главных движений ее есть:

$$q_k = \left\{ a_j \nu_{kj} e^{+\lambda_j i t} + a_{j+m} \nu_{k_{j+m}} e^{-\lambda_j i t} \right\} e^{-h_j t}$$

По сказанному выше величины  $a_j$  и  $a_{j+m}$  являются всегда попарно сопряженными. Поэтому  $a_j \nu_{kj}$  и  $a_{j+m} \nu_{k_{j+m}}$  можно считать также сопряженными.

Введя обозначения:

$$2\nu_{kj}a_j = R_{kj} + S_{kj}i$$

$$2\nu_{k,j+m}a_{j+m} = R_{kj} - S_{kj}i$$

можно полученное выше выражение для  $q_k$  привести к виду

$$q_k = \{R_{kj} \cos \lambda_j t + S_{kj} \sin \lambda_j t\} e^{-h_j t}$$

Равенство это показывает, что в каждом из простейших свободных колебаний системы угловая скорость  $\lambda_j$  и коэффициент затухания колебания  $h_j$  получаются для всех точек системы одинаковыми (независимо от индекса  $k$ ). Фазы же отдельных точек, зависящие от отношения

$$R_{kj} : S_{kj}$$

получаются у всех точек системы различными и зависят не только от начальных условий движения и номера простейшего колебания, но еще и от номера точки системы.

7. Рассмотрим теперь общий характер простейших колебаний системы в том частном случае, когда возмущающая сила есть простая тригонометрическая функция от времени. Займемся при этом исключительно вынужденными колебаниями системы, то есть теми ее колебаниями, которые имеют тот же период, что и возмущающая сила.

Полагая

$$P = P_j^\circ \cos \lambda t$$

где  $P_j^\circ$  есть некоторая заданная константа, мы можем удовлетворить уравнениям (20) полагая:

$$p = a_j \cos \lambda t + b_j \sin \lambda t$$

где

$$a_j = \frac{N_j}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} P_j^\circ$$

и

$$b_j = \frac{\lambda M_j}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} P_j^\circ$$

Принимая это во внимание, можно видеть, что в  $j$ -ом главном движении:

$$q_k = \nu_{kj} \left\{ \frac{N_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \cos \lambda t + \frac{\lambda M_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \sin \lambda t \right\},$$

в сопряженном же с ним  $(j + m)$  главном движении:

$$q_k = v_{kj+m} \left\{ \frac{N_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2} \cos \lambda t + \right. \\ \left. + \frac{\lambda M_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2} \sin \lambda t \right\}.$$

Так как величины

$$\frac{v_{kj} N_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \quad \text{и} \quad \frac{v_{k(j+m)} N_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

а также

$$\frac{v_{kj} \lambda M_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \quad \text{и} \quad \frac{v_{k(j+m)} \lambda M_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

суть по сказанному выше величины попарно сопряженные, то суммы их:

$$\bar{R}_{kj} = \frac{v_{kj} N_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} + \frac{v_{k(j+m)} N_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

и

$$\bar{S}_{ki} = \frac{v_{kj} \lambda M_j P_j^\circ}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} + \frac{v_{k(j+m)} \lambda M_{j+m} P_{j+m}^\circ}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

всегда реальны.

Оба рассматриваемых главных движения складываются для  $k$ -ой точки системы поэтому в одно колебание:

$$q_k = \bar{R}_{ki} \cos \lambda t + \bar{S}_{ki} \sin \lambda t$$

всегда реальное. Фаза этого колебания зависит вообще и от номера точки  $k$ . Поэтому в каждом из вынужденных простейших движений системы отдельные точки ее движутся вообще с некоторым сдвигом фаз друг относительно друга. Этот сдвиг фаз обращается в нуль только в том частном случае, когда главные координаты можно разделить не только в наших уравнениях (14), но и в уравнениях Лагранжа (5).

8. Остановимся теперь вкратце на вопросе о том, каким образом с помощью наших уравнений (20) может быть найдено движение системы, на которую при  $t = 0$ , когда она находится в состоянии покоя, начинает внезапно действовать некоторая сила, затем своей величины не меняющая.

Равенства (15) позволяют в этом случае считать все  $P_j$  постоянными, равенства же (30) и (31) показывают, что при  $t = 0$  все:

$$p_j = 0.$$

За интеграл для  $p_j$ , удовлетворяющий, как уравнениям (20), так и всем начальным условиям, можно в рассматриваемом случае, следовательно, принимать:

$$p_j = \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{\alpha_j t})$$

Движение  $k$ -ой точки системы, вызванное появлением у нее ее  $j$ -ого главного движения в этом случае поэтому есть:

$$q_k = v_{kj} \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{\alpha_j t})$$

движение той же точки, но вызванное появлением  $(j + m)$  главного движения системы, есть очевидно:

$$q_k = v_{kj+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} (1 - e^{\alpha_{j+m} t})$$

Так как у двух сопряженных главных движений величины

$$\alpha_j \quad \text{и} \quad \alpha_{j+m}$$

а также

$$v_{kj} \frac{P_j}{N_j} \quad \text{и} \quad v_{kj+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}}$$

суть величины попарно сопряженные, то оба эти движения точки  $k$  могут быть сложены в одно простейшее колебание, являющееся всегда реальным.

Действительно, полагая

$$\left. \begin{aligned} 2v_{kj} \frac{P_j}{N_j} &= \overline{R}_{kj} + \overline{S}_{kj} i \\ \text{и} \\ 2v_{kj+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} &= \overline{R}_{kj} - \overline{S}_{kj} i \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и считая, что  $\alpha_j$  и  $\alpha_{j+m}$  определяются равенствами (32), можно видеть, что в  $j$ -ом простейшем колебании, вызванном внезапно приложенной нагрузкой:

$$\begin{aligned} q_k &= v_{kj} \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{\alpha_j t}) + v_{kj+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} (1 - e^{\alpha_{j+m} t}) = \\ &= \overline{R}_{kj} (1 - e^{-h_j t} \cos \lambda_j t) - \overline{S}_{kj} e^{-h_j t} \sin \lambda_j t. \end{aligned} \quad (34)$$

9. Если на систему, находящуюся при  $t = 0$  в состоянии покоя, начинает в этот момент действовать некоторая сила, являющаяся вообще

любую заданную функцией от времени, то обобщенные силы  $P_j = P_{j+}$  будут также некоторыми заданными функциями от  $t$ . Величины  $\overline{R}_{kj}$  и  $\overline{S}_{kj}$ , определяемые равенствами (33) будут при этом некоторыми реальными и заданными функциями от времени  $t$ .

Влияние на систему всякой силы, являющейся некоторою явную функцией от времени  $F(t)$  можно всегда заменить эквивалентными ему влиянием бесконечного множества элементарных сил  $\frac{d}{dt} \cdot F(t) \cdot dt$ , приложенных к ней внезапно в различные моменты времени, и затем сохраняющих свою величину неизменно. Для того, чтобы найти влияние силы, к системе фактически приложенной, достаточно сложить влияние всех этих элементарных сил, вычисленное в предположении, что система в момент начала действия каждой такой силы, находится в состоянии покоя. Влияние же каждой такой силы, вычисленное именно в этом предположении, может для движения  $k$ -ой точки, вызываемого появлением в системе  $j$ -ого простейшего колебания, быть учтено с помощью формулы (34), если в ней вместо величины  $\overline{R}'_{kj}$  и  $\overline{S}'_{kj}$  поставить величины:

$$R'_{kj}(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad S'_{kj}(\xi) d\xi$$

а время  $t$ , отсчитывать от момента начала действия соответствующей элементарной силы т. е. от  $t = \xi$ .

Складывая влияние всех элементарных сил, можно для движения  $k$ -ой точки системы, вызванного появлением  $j$ -ого простейшего колебания получить:

$$q_k = \int_{\xi=0}^{\xi=t} \left\{ R'_{kj}(\xi) \left( 1 - e^{-h_j(t-\xi)} \cos \lambda_j(t-\xi) \right) - S'_{kj}(\xi) e^{-h_j(t-\xi)} \sin \lambda_j(t-\xi) \right\} d\xi, \quad (35)$$

формула (35) позволяет найти  $j$ -ое из простейших колебаний системы при любом задании возмущающей силы, если только в момент начала действия этой силы системы находится в покое.

10. Подводя итог всему сказанному, можно полученные результаты формулировать в следующих положениях:

1) Основные дифференциальные уравнения системы, имеющей  $m$  степеней свободы, могут, если у нее нет гироскопических членов, быть выписаны в вид  $2m$  равенств (14).

2) Переменные, разделяющиеся в уравнениях (14), могут быть разделены и в начальных условиях движения, если только для начального момента его заданы, как все отклонения, так и все скорости системы;

3) Определяемые этими переменными главные движения системы, могут быть изучаемы каждая порознь, но только в исключительных случаях являются движениями реальными, вообще же являются комплексными;

4) Каждые два сопряженные главные движения системы могут быть соединены в одно простейшее колебание, являющееся для всех точек системы движением реальным;

5) Число простейших колебаний системы равно вообще ее числу степеней свободы;

6) Уравнения (20) вместе с начальными условиями (30) и (31) позволяют исследовать порознь каждое из главных движений системы, путем же сложения обоих сопряженных главных движений находить порознь и все простейшие колебания системы;

7) Если система движется по инерции, то в каждом из ее простейших движений угловая скорость и коэффициент затухания у всех точек системы одинаковы, амплитуды же и фазы вообще различны;

8) Если система совершает вынужденные колебания под действием периодической возмущающей силы, то в каждом из ее простейших движений фазы всех точек системы вообще различны.

Возможность с помощью уравнений (20) и начальных условий (30) и (31) проследить порознь, как при свободных колебаниях системы, так и при ее вынужденных колебаниях, каждое из ее простейших колебаний порознь может быть особенно интересна, когда большая часть из всех простейших колебаний системы получаются относительно малыми, так что для полного выяснения картины явления достаточно учесть не все явление полностью, а только немногие наиболее важные из простейших движений системы.

Изложенная метода может быть применена и к разысканию главных деформаций перекрытий, имеющих несколько перекрестных связей<sup>1)</sup>. Здесь она даже может оказаться в некоторых случаях особенно применимой, т. к. в этой задаче, как правило, обычно встречаются именно такие случаи, когда для полного выяснения картины явления достаточно изучить только несколько основных главных деформаций перекрытия.

---

<sup>1)</sup> См. нашу работу: две аналогии, относящиеся к расчету перекрестных связей. Изв. Лен. Пол. Инст. т. XXXI.

## On a new form of differential equations of a small oscillation of a system, having no gyroscopic members

*P. Papcovich.*

The case considered is one when the kinetic energy  $T$ , the potential energy  $V$ , and the function of dissipation  $\Phi$  by no linear transformation of coordinates can not be transformed simultaneously into the sums of squares.

In this case of small oscillations a system (14) of fundamental equations is given, by means of which the coordinates may be separated in the case when it can not be done in the Lagrange's equations(5).

In order to solve these equations, the method of principale coordinates is applied, the number of these principale coordinates generally being twice the number of the degrees of freedom of the system considered.

The corresponding principale motions generally are complex, but every one of such motion has a conjugated one, the sums of both of them giving together a real motion of the system, which is called a simplest oscillation of the system.

The character of these simplest oscillations, free and forced, is considered, and it is shown, that in any one of them all points of the system generally are in a different phase of motion, that difference of phases being zero when the coordinates may be as well separated in the Lagrange's equations.

## К теории способа Грегфе (Graeffe).

А. Ф. Гаврилов.

1. Способ Грегфе является в настоящее время, повидимому, наиболее практичным приемом для отыскания всех—вещественных и мнимых—корней алгебраического уравнения с численными коэффициентами. Тем не менее изложение этого способа и до сих пор содержит некоторые утверждения, нестрого доказанные или неясно высказанные. В настоящей заметке я имею в виду восполнить один из таких недостатков в обосновании названного способа. Чтобы формулировать задачу мне придется войти в некоторые подробности относительно самого способа Грегфе.

2. Сущность способа Грегфе, если ее изложить в двух словах, заключается в следующем:

Дано уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0. \quad (1)$$

Пусть корни этого уравнения вещественны и различны. При помощи некоторого преобразования, не требующего знания корней данного уравнения, строят новое уравнение, корни которого все отрицательны и, по абсолютной величине, равны квадратам корней данного уравнения. Все коэффициенты такого уравнения, очевидно, положительны.

Повторяя то же преобразование, построим еще новое уравнение, коего корни отрицательны и численно равны четвертым степеням корней данного уравнения и так далее до  $2^k$  степени корней данного уравнения.

Назовем корни заданного уравнения (1) через

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

и пусть

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n| \quad (2)$$



Тогда корни уравнения, которое получилось в результате указанных выше преобразований, равны соответственно

$$-x_1^{2^k}, -x_2^{2^k}, \dots, -x_n^{2^k},$$

причем

$$x_1^{2^k} > x_2^{2^k} > \dots > x_n^{2^k}. \quad (3)$$

Очевидно, что с возрастанием  $k$  неравенства (3) становятся все более резкими, так что всегда можно найти такое  $k$ , при коем

$$\frac{x_r^{2^{r+1}}}{x_r^{2^k}} < \eta$$

где  $\eta$  сколь угодно мало, а  $r = 1, 2, \dots, (n - 1)$ .

В этом случае корни уравнения могут быть найдены—приблизженно—посредством весьма простых вычислений над коэффициентами уравнения. Именно, если наше  $k$ -ое уравнение есть

$$y^n + A_1 y^{n-1} + \dots + A_{n-1}y + A_n = 0. \quad (4)$$

то

$A_1 = x_1^{2^k} + x_2^{2^k} + \dots + x_n^{2^k} \cong x_1^{2^k}$	} (5)
$A_2 = x_1^{2^k}x_2^{2^k} + x_1^{2^k}x_3^{2^k} + \dots + x_1^{2^k}x_{n-1}^{2^k} \cong x_1^{2^k}x_2^{2^k}$	
$A_n = x_1^{2^k}x_2^{2^k} \dots x_n^{2^k}$	

и, значит,

$$x_1 = \pm \sqrt[2^k]{A_1}, x_2 = \pm \sqrt[2^k]{\frac{A_2}{A_1}}, \dots \quad (6)$$

Знак у радикала может быть определен подстановкой соответствующего корня в уравнение (1).

Остается установить лишь критерий для определения  $k$ , при коем уже можно считать справедливыми—с точностью вычислений—приближенные равенства (5). Обычно—совершенно правильно, но без строгого доказательства—считают преобразования законченными, когда новое преобразование дает уравнение, коего коэффициенты суть в пределах взятой точности квадраты соответствующих коэффициентов уравнения преобразуемого.

В настоящей заметке будет дано недостающее здесь доказательство. Случай, когда уравнение имеет комплексные корни, приводится к предыдущему и нами рассматриваться не будет.

3. Уравнение (1) мы будем рассматривать только в форме

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x \pm 1 = 0, \quad (1')$$

к которой оно всегда может быть приведено. Чтобы на чемнибудь остановиться, положим свободный член уравнения (1') положительным и  $n$  четным. Такое ограничение общности не является существенным.

Пусть уравнение, определяющее  $x^{2^k-1}$  есть

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + 1 = 0 \quad (1'')$$

а уравнение, определяющее  $x^{2^k}$  есть

$$y^n + B_1 y^{n-1} + \dots + B_{n-1} y + 1 = 0 \quad (7)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= b_1^2 - 2b_2 \\ B_2 &= b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_4 \\ B_3 &= b_3^2 - 2b_2 b_4 + 2b_1 b_5 - 2b_6 \\ &\dots \dots \dots \\ B_S &= b_S^2 - 2b_{S-1} b_{S+1} + 2b_{S-2} b_{S+2} - \dots \dots \pm 2b_{2S} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Применяя критерий предыдущего параграфа, мы скажем, что

$$B_1 \cong x_1^{2^k}, \quad B_2 \cong x_1^{2^k} x_2^{2^k}, \dots \quad (9)$$

если

$$B_1 \cong b_1^2, \quad B_2 \cong b_2^2 \dots \dots, \quad (10)$$

т. е. если

$$\left. \begin{aligned} 2b_2 &< \epsilon b_1^2 \\ |2b_1 b_3 - 2b_4| &< \epsilon b_2^2 \\ |2b_2 b_4 - 2b_1 b_5 + 2b_6| &< \epsilon b_3^2 \\ &\dots \dots \dots \\ |2b_{S-1} b_{S+1} - 2b_{S-2} b_{S+2} + \dots \dots \pm 2b_{2S}| &< \epsilon b_S^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где  $\epsilon$  есть дробь, выражающая допустимую относительную погрешность вычислений. Критерий будет обоснован, если будет доказано, что из системы неравенств (11) следует необходимо система (9).

4. Для доказательства положим

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|$$

и еще

$$x_1^{2^k-1} = z_1, \quad x_2^{2^k-1} = z_2, \quad \dots \quad x_n^{2^k-1} = z_n.$$

Тогда первое из неравенств (11) может быть написано в виде

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n < \frac{\epsilon}{2} (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 + 2z_1 z_2 + 2z_1 z_3 + \dots + 2z_{n-1} z_n)$$

или что то же

$$(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n) (1 - \epsilon) < \frac{\epsilon}{2} (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)$$

Разделив обе части последнего неравенства на  $(1 - \epsilon)z_1^2$ , получим

$$\frac{z_2}{z_1} + \frac{z_3}{z_1} + \dots + \frac{z_{n-1}}{z_1} \frac{z_n}{z_1} < \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \left( 1 + \frac{z_2^2}{z_1^2} + \frac{z_3^2}{z_1^2} + \dots + \frac{z_{n-2}^2}{z_1^2} \right) \quad (12)$$

Очевидно, то

$$\frac{z_2}{z_1} > \frac{z_r}{z_1} > 0$$

где

$$r = 3, 4, \dots, n.$$

Поэтому, из неравенства (12) следует необходимо следующее неравенство

$$\frac{z_2}{z_1} < \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} \left( 1 + \frac{z_2^2}{z_1^2} (n-1) \right)$$

полагая

$$\frac{z_2}{z_1} = q_1,$$

найдем

$$q_1^2 \frac{\epsilon(n-1)}{2(1-\epsilon)} - q_1 + \frac{\epsilon}{2(1-\epsilon)} > 0$$

$$q_1^2 - \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon(n-1)} q_1 + \frac{1}{n-1} > 0$$

$$\left[ q_1 - \left( \frac{1-\epsilon}{\epsilon(n-1)} + \sqrt{\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^2(n-1)^2} - \frac{1}{n-1}} \right) \right]$$

$$\left[ q_1 - \left( \frac{1-\epsilon}{\epsilon(n-1)} - \sqrt{\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon^2(n-1)^2} - \frac{1}{n-1}} \right) \right] > 0 \quad (13)$$

Квадратные скобки последнего неравенства должны быть или обе одновременно положительны или обе одновременно отрицательны, т. е. должно быть или

$$q_1 > \frac{1-\epsilon + \sqrt{(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2(n-1)}}{\epsilon(n-1)}$$

или

$$q_1 < \frac{1-\epsilon - \sqrt{(1-\epsilon)^2 - \epsilon^2(n-1)}}{\epsilon(n-1)}$$

Первое из последних двух неравенств опадает, ибо противоречит условию

$$q_1 < 1.$$

Следовательно, должно быть

$$q_2 < \frac{1-\epsilon - \sqrt{1-2\epsilon - \epsilon^2(n-2)}}{\epsilon(n-1)} = \frac{1-\epsilon - [1 - (2\epsilon + \epsilon^2(n-2))]^{1/2}}{\epsilon(n-1)} =$$

$$= \frac{1-\epsilon - \left[ 1 - \frac{1/2}{1} (2\epsilon + \epsilon^2(n-2)) + \frac{1/2 - 1/2}{1 \cdot 2} (2\epsilon + \epsilon^2(n-2))^2 + \dots \right]}{\epsilon(n-1)} =$$

$$= \frac{1-\epsilon - 1 + \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2(n-2) + \frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{1}{2}\epsilon^2(n-2) + \dots}{\epsilon(n-1)} = \frac{\epsilon}{2} + f(n, \epsilon)$$

где  $f(n, \varepsilon)$  есть бесконечный ряд, расположенный по степеням  $\varepsilon$  и имеющий  $\varepsilon^2$  множителем. С точностью до малых величин высших порядков можем написать, следовательно,

$$q_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{или} \quad \frac{z_1}{z_1} = \left(\frac{z_1}{z_1}\right)^{2^{k-1}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (14)$$

5. Прделаем аналогичные выкладки для второго из неравенств (11). Употребляя обозначения параграфа 3-го, получим

$$b_1 b_3 - b_4^2 < \frac{\varepsilon}{2} b_2^2$$

или

$$\begin{aligned} & |(z_1 + z_2 + \dots + z_n)(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n) - \\ & - (z_1 z_2 z_3 z_4 + z_1 z_2 z_3 z_5 + \dots + z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n)| < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} (z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + \dots + z_{n-1}^2 z_n^2 + 2z_1 z_2 z_3 z_4 + \dots + \\ & + 2z_{n-3} z_{n-2} z_{n-1} z_n) \end{aligned}$$

или иначе

$$\begin{aligned} & z_1^3 z_2 z_3 + z_1^2 z_2 z_4 + \dots + z_1^2 z_{n-1} z_n + z_1 z_2^2 z_3 + \dots + \\ & + 4z_1 z_2 z_3 z_4 + 4z_1 z_2 z_3 z_5 + \dots - \varepsilon(z_1 z_2 z_3 z_4 + z_1 z_2 z_3 z_5 + \dots) < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} (z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_2^2 + \dots). \end{aligned}$$

После очевидных упрощений и по разделении на  $z_1^2 z_2^2$ , последнее неравенство приводится к виду

$$\begin{aligned} & \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_4}{z_2} + \dots + (4 - \varepsilon) \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2} + \dots < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + \frac{z_3^2}{z_2^2} + \frac{z_4^2}{z_2^2} + \dots + \frac{z_{n-1}^2}{z_2^2} + \frac{z_n^2}{z_2^2} \right) \end{aligned}$$

откуда, в силу неравенств,

$$|z_1| > |z_2| > |z_3| > \dots > |z_n|$$

получим

$$\frac{z_3}{z_2} < \frac{\varepsilon}{2} \left[ 1 + \frac{z_3^2}{z_2^2} \left( \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 1 \right) \right]$$

Обозначая  $\frac{z_3}{z_2}$  через  $q_2$ , напишем

$$q_2^2 - \frac{4}{\varepsilon^2(n(n-1)-2)} q_2 + \frac{2}{n(n-1)-2} > 0$$

$$\left[ q_2 - \left( \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} + \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)^2} - \frac{2}{n^2 - n - 2}} \right) \right]$$

$$\left[ q_2 - \left( \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} - \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)^2} - \frac{2}{n^2 - n - 2}} \right) \right] > 0$$

$$\left[ q_2 - \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)}{2}} \right) \right]$$

$$\left[ q_2 - \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)}{2}} \right) \right] > 0 \quad (16)$$

и далее

$$\begin{aligned}
 q_2 < \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)}{2} - \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{\varepsilon^4(n^2 - n - 2)^2}{4} - \dots \right) \right] = \\
 = \frac{2}{\varepsilon(n^2 - n - 2)} \left[ \frac{\varepsilon^2(n^2 - n - 2)}{4} + \right. \\
 \left. + \frac{\varepsilon^4(n^2 - n - 2)^2}{32} + \dots \right] = \frac{\varepsilon}{2} + \varphi(n, \varepsilon) \quad (17)
 \end{aligned}$$

где

$$\varphi(n, \varepsilon) = A\varepsilon^3 + A_1\varepsilon^5 + \dots$$

Следовательно, как и выше

$$q_2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad (18)$$

6. Аналогично будет и в общем случае

$$\begin{aligned}
 & \left| b_{S-1}b_{S+1} - b_{S-2}b_{S+2} + \dots + b_{2S} \right| < \frac{\varepsilon}{2} b_{2S} \\
 & \left( z_1 z_2 \dots z_{S-1} + z_1 z_2 \dots z_{S-2} z_S + \dots \right) \\
 & \left( z_1 z_2 \dots z_{S+1} + z_1 z_2 \dots z_S z_{S+2} + \dots \right) - \\
 & - \left( z_1 z_2 \dots z_{S-2} + z_1 z_2 \dots z_{S-3} z_{S-1} + \dots \right) \\
 & \left( z_1 z_2 \dots z_{S+2} + z_1 z_2 \dots z_{S+1} z_{S+3} + \dots \right) + \\
 & + \left( z_1 z_2 \dots z_{S-3} + \dots \right) \\
 & \left( z_1 z_2 \dots z_{S+3} + \dots \right) - \\
 & - \dots \dots \dots \left( \dots \dots \dots \pm z_1 z_2 \dots z_{2S} \right) \left| < \right. \\
 & \left. < \frac{\varepsilon}{2} \left( z_1^2 z_2^2 \dots z_S^2 + \dots + 2z_1 z_2 \dots z_{2S} + \dots \right) \quad (19)
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что отрицательные члены левой стороны неравенства (19) сократятся, так что левая сторона его окажется суммой положительных слагаемых,

$$\begin{aligned}
 z_1^2 z_2^2 \dots z_{S-1}^2 z_S z_{S+1} + z_1^2 z_2^2 + \dots + z_{S-1}^2 z_S z_{S+2} + \dots < \\
 < \frac{\varepsilon}{2} \left( z_1^2 z_2^2 \dots z_S^2 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Разделим обе части неравенства на  $z_1^2 z_2^2 \dots z_S^2$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{z_{S+1}}{z_S} + \frac{z_{S+2}}{z_S} + \dots < \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + \frac{z_{S+1}^2}{z_S^2} + \frac{z_{S+2}^2}{z_S^2} + \dots \right) \\
 \frac{z_{S+1}}{z_S} < \frac{\varepsilon}{2} \left[ 1 + \frac{z_{S+1}^2}{z_S^2} \left( \frac{n(n-1) \dots (n-S+1)}{S!} - 1 \right) \right]
 \end{aligned}$$

Полагая

$$\frac{z_{S+1}}{z_S} = q_S$$

напишем

$$q_S < \frac{\varepsilon}{2} \left( 1 + q_S^2 \frac{n(n-1) \dots (n-S+1) - S!}{S!} \right) \\ q_S^2 - \frac{2S!}{\varepsilon [n(n-1) \dots (n-S+1) - S!]} q_S + \\ + \frac{S!}{n(n-1) \dots (n-S+1) - S!} > 0$$

Отсюда после очевидных вычислений

$$q_S < \frac{S!}{\varepsilon [n(n-1) \dots (n-S+1) - S!]} \\ \left\{ 1 - \left[ 1 - \varepsilon^2 \frac{n(n-1) \dots (n-S+1) - S!}{S!} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ = \frac{S!}{\varepsilon [n(n-1) \dots (n-S+1) - S!]} \\ \left\{ 1 - 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{n(n-1) \dots (n-S+1) - S!}{S!} + \dots \right\} = \frac{\varepsilon}{2} + \psi(n, \varepsilon) \quad (20)$$

или с точностью до малых величин высших порядков

$$q_S < \frac{\varepsilon}{2}$$

7. Итак

$$\frac{z_2}{z_1} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{z_3}{z_2} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \dots, \quad \frac{z_{k+1}}{z_k} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \dots$$

иначе

$$z_2 < \frac{\varepsilon}{2} z_1, \quad z_3 < \frac{\varepsilon^2}{4} z_1, \quad \dots, \quad z_k < \frac{\varepsilon^{k-1}}{2^{k-1}} z_1 \dots$$

Следовательно

$$x_2^{2^k} + x_3^{2^k} + \dots + x_n^{2^k} < x_1^{2^k} \left( \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^4}{4^2} + \dots \right)$$

откуда

$$B_1 \cong x_1^{2^k} \quad (21)$$

Аналогично окажется

$$B_2 \cong x_1^{2^k} x_2^{2^k}, \quad \dots, \quad B_n \cong x_1^{2^k} x_2^{2^k} \dots x_n^{2^k}. \quad (22)$$

Высший предел относительной погрешности приближенных равенств (21) и (22) может быть принят равным  $\frac{\varepsilon^2}{4}$ .

## Применение обобщенных рядов Фурье к задаче о не гармонических колебаниях системы.

Л. Г. Лойцянский.

Применение обыкновенных тригонометрических рядов Фурье к задаче о не гармонических колебаниях системы с одной и двумя степенями свободы общеизвестно. Обыкновенно <sup>1)</sup> дифференциальное уравнение этих колебаний:

$$m\ddot{x} = -\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots, \quad (1)$$

после применения теоремы живых сил, сводится к интегралу

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{(1-x^2) F(x)}} = t, \quad (2)$$

где  $F(x)$  — положительная функция не обращающаяся в нуль в замкнутом интервале  $(-1, +1)$ , а  $x$  и  $x_0$  — вещественные величины, находящиеся в том же интервале. Далее, полагая  $x = \pm \cos v$ , и разлагая подынтегральную функцию в тригонометрический ряд по аргументам кратным  $v$ , получают, т. н. обобщенное уравнение Керлега, которое уже в свою очередь и решают <sup>2)</sup>.

Решение получается в виде тригонометрического ряда, коэффициенты, которого суть трансцендентные функции от некоторых рядов составленных из величин, входящих в уравнение (1).

Мы доказали <sup>3)</sup>, между прочим, что решение уравнения Керлега можно провести и без введения новых функций, если вместо обыкновенного тригонометрического ряда взять ряд обобщенный, распложенный по полиномам, напр., Лежандра. Правда решение при-

<sup>1)</sup> Weierstrass, «Über eine Gattung reell periodischer Funktionen». 1866.

<sup>2)</sup> Прекрасное изложение этого метода и многочисленные ссылки на литературу по этому вопросу можно найти в большой работе проф. М. И. Акимова «О функциях Бесселя многих переменных и их приложениях в Механике», Петроград. 1922.

<sup>3)</sup> „Sur l'inversion approchée de fonctions“. Матем. Сборник т XXXI. 1923  
„Quelques remarques sur la méthode de l'inversion approchée de fonctions...“ Матем. Сборник т. XXXII 1924.

этом получается не периодическим, годным лишь для данного интервала, но обыкновенно только это и надо, так как в силу периодичности в остальное время движения повторяются те же интервалы. С точки зрения вычислительной предлагаемый в указанных работах метод довольно прост и может играть прикладную роль.

В настоящей небольшой заметке сделан опыт непосредственного обращения интеграла (2) без довольно кропотливого и сложного приведения его к уравнению Кеплера. Здесь использован метод, изложенный нами в выше цитированных работах и получается результат, как нам кажется, оправдывающий применение полиномиальных систем в вопросах этого рода.

Предлагаемый способ может быть с успехом применен к решению общей задачи об обращении интегралов, а не только интегралов, которые встречаются в теории колебаний.

Применяя в частности этот способ к обращению эллиптических интегралов можно очень просто получить разложения т. н. амплитуды в ряды по полиномам Лежандра.

1. Мы начнем с напоминания одного общего результата, полученного нами в выше процитированных работах.

Пусть дано для решения уравнение

$$f(x) = y, \quad (3)$$

где  $f(x)$  непрерывная, монотонная функция, имеющая первую производную в интервале  $(a, b)$ ; значения ее на границах обозначим:

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta,$$

причем в силу монотонности функции  $\alpha \neq \beta$ , напр.,

$$\alpha < \beta.$$

Обозначим через  $U_n(z)$   $k$ -ый полином Лежандра, отнесенный к интервалу  $(0,1)$  и нормированный уже в этом, интервале <sup>1)</sup>, т. е.

$$\int_0^1 U_n(z) U_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq m \\ 1 & \text{при } k = m. \end{cases}$$

Выражение этого полинома будет

$$U_n(z) = \sqrt{2k+1} \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{(2k-r) \dots (k-r+1)}{(k-r)! r!} z^{k-r}.$$

<sup>1)</sup> Нам приходится здесь брать интервал  $(0,1)$  вместо обычного  $(-1, +1)$ , для которого вычислены таблицы полиномов Лежандра. Соответствующий пересчет легко может быть осуществлен. При желании можно все свести и к интервалу  $(-1, +1)$ .



Введем еще систему полиномов:

$$\Phi_n(z) = \int_0^1 U_n(z) dz,$$

$$\Phi_n(z) = \sqrt{2k+1} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(2k-r) \dots (k-r+2)}{(k-r)! r!} z^{n-r+1} \quad (5)$$

При этих обозначениях и условиях можно доказать следующую весьма общую теорему (за доказательством отсылаем к выше цитированным работам):

Ряд

$$x = b - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n\{\lambda\} U_n\left(\frac{y-\alpha}{\beta-\alpha}\right), \quad (6)$$

где символ  $\Phi_n\{\lambda\}$  обозначает результат замены в полиноме  $\Phi_n(y)$  степени  $y^k$  на  $\lambda_k$ , равное

$$\lambda_n = \frac{1}{(\beta-\alpha)^n} \int_a^b [f(x) - \alpha]^n dx, \quad (7)$$

т. е.

$$\Phi_n\{\lambda\} = \sqrt{2k+1} \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(2k-r) \dots (k-r+2)}{(k-r)! r!} \lambda_{n-r+1} \quad (8)$$

сходится абсолютно и равномерно в интервале  $(\alpha, \beta)$  и представляет решение уравнения (3).

2. Применим эту теорему к решению общей задачи обращения интеграла, которую будем рассматривать, как решение относительно  $x$  уравнения:

$$\int_a^x F(x) dx = t. \quad (9)$$

На функцию  $F(x)$  наложим следующие ограничения:

1°.  $F(x)$  непрерывна и сохраняет свой знак внутри интервала  $(a, b)$ , причем, для определенности,  $F(x)$  принимает положительные значения.

2°.  $F(x)$  может на концах интервала  $(a, b)$  обращаться в бесконечность, но так, чтобы интеграл

$$\int_a^b F(x) dx$$

имел смысл.

При этих ограничениях левая часть уравнения (9) представляет собою непрерывную, возрастающую функцию, имеющую первую производную в интервале  $(a, b)$ , и к этой функции может быть применена предыдущая теорема.

Здесь, очевидно;

$$\alpha = 0, \beta = \int_a^b F(x) dx,$$

так что решение уравнения (9) дается рядом:

$$x = b - \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k \{\lambda\} U_k \left( \frac{t}{\beta} \right), \quad (10)$$

при чем по (7)

$$\lambda_k = \frac{1}{\beta^k} \int_a^b \left[ \int_a^x F(x) dx \right]^k dx. \quad (11)$$

Все дело сводится таким образом к вычислению последовательности чисел  $\lambda_k$ , исследованием которой сейчас и займемся.

3. Выведем сначала одно простое соотношение, облегчающее вычисление интеграла (11).

Рассмотрим последовательность функций:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x) \dots \dots \varphi_n(x), \dots \dots,$$

определяемых такими итерациями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x) &= x \\ \varphi_k(x) &= \int_a^x F(x) \varphi_{k-1}(x) dx, \end{aligned} \right\} (12)$$

и будем вычислять интеграл

$$\int_a^b \left[ \int_a^x F(x) dx \right]^n dx$$

по частям, тогда окажется

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[ \int_a^x F(x) dx \right]^n dx = \\ & = \beta^n \varphi_n(b) - n \beta^{n-1} \varphi_1(b) + n(n-1) \beta^{n-2} \varphi_2(b) \dots \dots + \\ & \quad + (-1)^n n! \varphi_n(b). \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя вместо последовательности  $\varphi_n(x)$  новую:

$$\theta_n(x) = k! \varphi_n(x), \quad (14)$$

и условившись писать  $\theta_n = \theta_n(b)$  получим следующее символическое равенство:

$$\int_a^b \left[ \int_a^x F(x) dx \right]^n dx = (\beta - \theta)^{(n)}, \quad (15)$$

где при разворачивании правой части по правилу бинома следует заменить  $\theta^n$  на  $\theta_n$ .

Функции  $\theta_n(x)$  удовлетворяют очевидно таким итерациям:

$$\left. \begin{aligned} \theta_n(x) &= k \int_a^x F(x) \theta_{n-1}(x) dx, \\ \theta_0(x) &= x. \end{aligned} \right\} (16)$$

Итак мы можем переписать формулу (11) в виде:

$$\lambda_n = \frac{1}{\beta^n} (\beta - \theta)^n. \quad (17)$$

или при той же условности в символах:

$$\lambda_n = \left( 1 - \frac{\theta}{\beta} \right)^n. \quad (18)$$

Задача вычисления чисел  $\lambda_n$  свелась таким образом к вычислению чисел  $\theta_n$ , для вычисления которых нужно конечно знать последовательность (16).

4. Для последовательности функций  $\theta_n(x)$  и чисел  $\theta_n$  можно получить некоторые дифференциальные соотношения.

Не нарушая общности, можем, очевидно, считать

$$\int_a^x F(x) dx = \lambda < 1 \quad \text{и} \quad a \geq 0, \quad (19)$$

и, замечая, что при условии положительности  $F(x)$ , все функции  $\varphi_n(x)$  положительны и возрастают от значения  $\varphi_n(a) = 0$  до  $\varphi_n(b) = \varphi_n$ , получим по теореме о среднем:

$$\varphi_n(x) = \int_a^x F(x) \varphi_{n-1}(x) dx = \varphi_{n-1}(\xi) \int_a^x F(x) dx,$$

( $a < \xi < x$ ).

Отсюда следует, что

$$\varphi_n(x) < \varphi_{n-1}(x)\lambda \quad (20)$$

или после перемножений:

$$\varphi_n(x) < x\lambda^n. \quad (20)'$$

Функции  $\varphi_n(x)$  можно рассматривать, как последовательные итерации к интегральному уравнению:

$$S(x) = x + \lambda \int_a^x F(x) S(x) dx. \quad (21)$$

В самом деле, полагая, как обычно делают,

$$S(x) = S_0(x) + S_1(x)\lambda + S_2(x)\lambda^2 + \dots \quad (22)$$

убедимся, что

$$S_n(x) = \varphi_n(x),$$

и что предыдущий ряд сходится абсолютно и равномерно, так как общий его член:

$$U_n = \varphi_n(x)\lambda^n < x(\lambda\lambda)^n$$

и, при предположениях  $\lambda \leq 1$  и  $\lambda < 1$ , все его члены меньше соответственных членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Таким образом доказана сходимость итераций.

С другой стороны уравнение (21) интегрируется непосредственно и решением его служит функция:

$$S(x) = e^{\lambda x} \left( \int_a^x e^{-\lambda x} dx + a \right). \quad (23)$$

Рассматривая ее, как функцию параметра  $\lambda$ , можем по (22) написать:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{k!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[ e^{\lambda x} \left( \int_a^x e^{-\lambda x} dx + a \right) \right]_{\lambda=0} \quad (24)$$

а для чисел  $\varphi_n(b) = \varphi_n$  найдем:

$$\varphi_n = \frac{1}{k!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[ e^{\lambda b} \left( \int_a^b e^{-\lambda x} dx + a \right) \right]_{\lambda=0} \quad (24')$$

Функции  $\varphi_n(x)$  и числа  $\varphi_n$  будут отличаться лишь отсутствием множителя перед производной.

5. Вычисление последовательности чисел  $\varphi_n$  или  $\theta_n$  связано с разысканием функций  $\varphi_n(x)$  и  $\theta_n(x)$ . Вообще говоря, если интеграл  $X$  не берется в конечном виде или берется слишком сложно, то соответствующие интегралы для последовательных итераций (12) должны быть еще более сложными. Но в некоторых случаях введение множителя  $\varphi_0(x) = x$  может сделать интеграл более простым. Так, напр., при обращении эллиптического интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = t, \quad k < 1$$

хотя сам интеграл и не берется в конечном виде (в простейших функциях), все же  $\varphi_1(x)$  равно

$$\int_0^x \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

можно выразить в логарифмических функциях, а затем, вычислив, хотя бы приближенно,  $\varphi_2(x)$ , найти несколько первых  $\varphi_n$ .

Обычно все таки, в тех случаях, когда интегралы слишком сложны, приходится прибегать к приближенному вычислению чисел.

6. Легко установить простые разложения функций  $\varphi_n(x)$  в степенные ряды вблизи точки  $x = a$ .

Для этого прежде всего докажем, что  $x = a$  есть  $k$ -кратный корень функции  $\varphi_n(x)$ . По определению взятых итераций:

$$\varphi'_k(x) = F(x)\varphi_{k-1}(x).$$

Отсюда следует, что, если,  $x = a$  есть корень кратности  $k-1$  функция  $\varphi_{k-1}(x)$ , то  $\varphi_k(x)$  будет иметь тот же корень  $k$ -кратным. Но, очевидно,  $\varphi_1(x)$  имеет однократный корень  $x = a$  следовательно, для функции  $\varphi_2(x)$  этот корень будет двукратным и т. д.

Отметим еще, что, как следует из предыдущего рассуждения, если  $a = 0$ , то  $x = 0$  будет корнем  $(k+1)$ -ой кратности функции  $\varphi_k(x)$ .

Мы приходим к выводу, что функция  $\varphi_k(x)$  есть величина порядка  $(x-a)^k$ , если  $a \neq 0$  и порядка  $x^{k+1}$ , если  $a = 0$ .

Останавливаясь для простоты на последнем случае (он является практически наиболее интересным, так как вопрос обычно идет о колебаниях около центра  $x = 0$ ), вычислим несколько функций  $\varphi_k(x)$  при заданной функции  $F(x)$ , непрерывной и имеющей все производные около точки  $x = 0$ .

Возьмем сначала  $\varphi_1(x)$ . Замечая, что  $\varphi_0(x) = x$ , имеем

$$\varphi_1'(x) = F(x)x,$$

$$\varphi_1''(x) = F(x) + F'(x)x,$$

$$\varphi_1'''(x) = 2F'(x) + F''(x)x,$$

$$\varphi_1^{IV}(x) = 3F''(x)x, \text{ и т. д.}$$

Довольствуясь членами 4-го порядка, получим:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2} F(o) x^2 + \frac{1}{3} F'(o) x^3 + \frac{1}{8} F''(o) x^4.$$

После аналогичных выкладок найдем и другие:

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{6} F^2(o) x^3 + \frac{5}{24} F(o) F'(o) x^4,$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{24} F^3(o) x^4,$$

что же касается  $\varphi_4(x)$ , то она будет уже 5-го порядка.

Здесь мы сделали конечно предположение, что функции  $\varphi_n(x)$  раскладываются в ряды по степеням  $x$ . При известных ограничениях (на практике выполняемых), накладываемых на функции  $F(x)$ , это справедливо.

При ограничении определенным порядком (напр., четвертым) величин, формулы (15) и (10) в свою очередь упрощаются.

В настоящей небольшой заметке мы удовольствуемся лишь этими теоретическими соображениями.

Ленинград, февраль 1929.

## Sur une application des series généralisées de Fourier au problème des vibrations non harmoniques.

*Par L. Loitzansky.*

Le but de cette note est une application de la méthode de l'inversion approchée des fonctions, donnée par l'auteur dans les travaux 1): „Sur l'inversion approchée des fonctions“ et „Quelques remarques sur la méthode de l'inversion approchée des fonctions... au problème de l'inversion des intégrales, qui rencontrent dans la théorie des vibrations.

La méthode exposée permet de éviter la nécessité de réduire l'intégrale inversé à l'équation généralisé de Kepler, ce que facilite beaucoup la résolution du problème au point de vue du calcul effectif.

1) Recueil Mathem. de Moscou t. 31, 32; 1923, 1924.

## О средних значениях функций на окружности и сфере.

С. А. Гершгорин.

Под средним значением  $K_o^r(f)$  функции  $f(x, y)$  на окружности  $K_o^r$  радиуса  $r$  и с центром в точке  $O$  мы будем понимать интеграл от  $f(x, y)$  по окружности  $K_o^r$ , деленный на ее длину, т. е.

$$K_o^r(f) = \frac{1}{2\pi r} \int_{K_o^r} f(x, y) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{K_o^r} f(x, y) d\varphi, \quad (1)$$

где  $d\varphi$  — соответствующий дуге  $ds$  центральный угол.

Аналогично этому будем называть средним значением  $S_o^r(f)$  функции  $f(x, y, z)$  на сфере  $S_o^r$  радиуса  $r$  и с центром в точке  $O$  интеграл по этой сфере, деленный на ее площадь, т. е.

$$S_o^r(f) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_o^r} f(x, y, z) do = \frac{1}{4\pi} \int_{S_o^r} f(x, y, z) d\omega, \quad (2)$$

где  $d\omega$  — телесный угол, соответствующий элементу площади  $do$ .

В настоящей работе выводятся общие выражения для указанных выше средних значений (а также для некоторых сходных величин) в виде рядов, расположенных по степеням радиуса  $r$ .

Полученные ряды могут служить как для приближенного вычисления в частных случаях интегралов рассматриваемых типов, так и для установления общих зависимостей для отдельных классов функций. Классические результаты Гаусса, Вебера, Гельмгольца и др., относящиеся к рассматриваемому вопросу, появляются здесь, как частные случаи. Некоторые приложения полученных результатов будут даны как в настоящей статье, так и в последующих.

В своем изложении я пользуюсь символическим методом, который позволяет прийти ко всем результатам с наибольшей простотой.

1. Об одном дифференциальном тождестве. Пусть дана функция  $f(x, y)$ , допускающая в некоторой точке  $O$  плоскости  $xu$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно.



Обозначим через  $\frac{\partial^n f_0}{\partial x_\varphi^n}$  значение в точке  $O$   $n$ -той производной по направлению  $Ox_\varphi$ , образуемому углом  $\varphi$  с осью  $x$ .

Можно доказать следующее замечательное тождество:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^n f_0}{\partial x_\varphi^n} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n (n)_{\frac{n}{2}} \Delta_{x,y}^{\frac{n}{2}} \cdot f_0 & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases} \quad (3)$$

где

$$\Delta_{x,y}^{\frac{n}{2}} f_0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{\frac{n}{2}} f_0$$

значение в точке  $O$  Лапласовского оператора  $\frac{n}{2}$ -го порядка <sup>1)</sup> от функции  $f(x)$ .

Действительно, в символическом обозначении имеем:

$$\frac{\partial^n f_0}{\partial x_\varphi^n} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin \varphi \right)^n f_0. \quad (4)$$

Разлагая это выражение по формуле бинома, получаем после простых преобразований:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=0}^n (n)_{s,t} J_{s,t} \frac{\partial^s}{\partial x^s} \cdot \frac{\partial^t}{\partial y^t} f_0, \quad (5)$$

где  $s+t=n$ , а

$$J_{s,t} = \int_0^{2\pi} \cos^s \varphi \cdot \sin^t \varphi d\varphi. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться, что

$$J_{s,t} = \begin{cases} 0 & \text{если хоть одно из чисел} \\ & \text{\textit{s} и \textit{t} нечетно} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{s+t} 2\pi (s+t)_{\frac{s+t}{2}} \cdot \frac{\left(\frac{s+t}{2}\right)_{\frac{s}{2}}}{(s+t)_s} & \text{при четных \textit{s} и \textit{t}.} \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя эти значения  $J_{s,t}$  в равенство (5) и принимая во внимание, что  $s+t=n$ , получаем

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n (n)_{\frac{n}{2}} \sum_{s=0}^n \binom{n}{2}_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\frac{n-s}{2}} \cdot f_0 & \text{при четном } n, \end{cases} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> В дальнейшем нам встретится символ  $\Delta_{x,y,s}$ . Там, где это не сможет повести к недоразумению, мы будем вместо  $\Delta_{x,y}$  и  $\Delta_{x,y,t}$  писать просто  $\Delta$ .

при чем в последнем случае суммирование распространяется лишь на четные  $s$ . Так как стоящая в правой части сумма представляет разложение выражения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^{\frac{n}{2}} f_0,$$

то мы и приходим к равенству (3).

2. О среднем значении функции на окружности <sup>1)</sup>. Пусть дана функция  $f(x, y)$ , допускающая в области  $T$  все производные до  $m$ -го порядка включительно. Найдем среднее значение  $K_0^r(f)$  этой функции на окружности  $K_0^r$  радиуса  $r$  и центра  $O$ , лежащей в области  $T$ .

Обозначим через  $f_\varphi$  значение  $f$  в точке  $a_\varphi$  окружности, лежащей на луче  $Ox_\varphi$ , образующем угол  $\varphi$  с осью  $x$ . Разлагая  $f_\varphi$  в ряд Тейлора, можем писать:

$$f_\varphi = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_\varphi} r + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_\varphi^2} \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^{2k} f_0}{\partial x_\varphi^{2k}} \frac{r^{2k}}{(2k)!} + \dots + \frac{\partial^m f(\xi, \eta)}{\partial x_\varphi^m} \frac{r^m}{m!} \quad (9)$$

где  $(\xi, \eta)$  — некоторая точка на радиусе  $Oa_\varphi$ .

Интегрируя обе части этого равенства по переменной  $\varphi$  между 0 и  $2\pi$  и деля их затем на  $2\pi$ , придем в силу соотношения (3) к равенству

$$K_0^r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\varphi d\varphi = f_0 + \frac{r^2}{4} \Delta f_0 + \dots + \frac{r^{2k}}{(2k)!} \Delta^k f_0 + \dots + R_m, \quad (10)$$

так как

$$\left( \frac{1}{2} \right)^{2k} \frac{(2k)_k}{(2k)!} = \frac{1}{2^{2k} (k!)^2}. \quad (11)$$

Остаточный член удовлетворяет неравенству

$$R_m \leq \frac{M_m r^m}{m!}, \quad (12)$$

где  $M_m$  — максимальное абсолютное значение  $m$ -ой производной по всевозможным направлениям в области  $T$ .

<sup>1)</sup> Выражение для среднего значения функции в вершинах правильного многоугольника дано в моей статье: „О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона“ (Известия Лгр. Политехнического Института, т. XXX 1927 г.).

Если функция  $f(x, y)$  аналитична в области  $T$ , то ряд (9) может быть продолжен до бесконечности, а при определении  $K_o^r(f)$  допустимо почленное интегрирование ряда по  $\varphi$ , при чем полученный ряд будет так же, как и ряд (9), абсолютно и равномерно сходящимся относительно  $r$ .

Итак, в случае функции  $f(x, y)$ , аналитической в области  $T$ , для среднего значения  $K_o^r(f)$  имеет место выражение в виде ряда

$$K_o^r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\varphi d\varphi = f_o + \frac{r^2}{4} \Delta f_o + \frac{r^4}{64} \Delta^2 f_o + \dots + \frac{r^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \Delta^k f_o + \dots, \quad (13)$$

сходящегося абсолютно и равномерно, коль скоро окружность  $K_o^r$  лежит в области  $T$ . Во всем дальнейшем изложении я придерживаюсь предположения, что  $f$  — функция аналитическая.

Заметим, что коэффициенты в разложении (13) численно совпадают с коэффициентами в разложении Бесселевой функции нулевого порядка от мнимого аргумента

$$J_o(ix) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots + \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} + \dots \quad (14)$$

Принимая бесконечный ряд (14) за определение операции  $J_o(ix)$ , можем равенство (13) символически записать в следующей форме:

$$K_o^r(f) = J_o(i\sqrt{\Delta} r) \cdot f_o, \quad (15)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ .

При дифференцировании и интегрировании ряда (13) по  $r$  символ  $\Delta$  играет роль постоянного множителя. Поэтому можно при производстве этих действий пользоваться изображением (15) ряда (13), рассматривая  $\sqrt{\Delta}$  чисто формально, как некий постоянный множитель.

3. О среднем значении функции в круге. Обозначим через  $\bar{K}_o^r(f)$  среднее значение функции  $f(x, y)$  в площади круга  $\bar{K}_o^r$ , ограниченного окружностью  $K_o^r$ . Очевидно,

$$\bar{K}_o^r(f) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r K_o^p(f) \cdot 2\pi p \cdot dp = \frac{2}{r^2} \int_0^r K_o^p(f) \cdot p \cdot dp. \quad (16)$$

Подставляя выражение  $K_o^p(f)$  из равенства (15), получаем:

$$\bar{K}_o^r(f) = \frac{2}{r^2} \int_0^r J_o(i\sqrt{\Delta} p) \cdot p \cdot dp \cdot f_o. \quad (17)$$

Если ввести новую переменную  $\rho' = i\sqrt{\Delta} \rho$ , так что

$$\bar{K}_o^r(f) = \frac{2}{i^2 \Delta r^2} \int_0^{i\sqrt{\Delta} r} \rho' \cdot J_0(\rho') \cdot d\rho', \quad (18)$$

и воспользоваться известным соотношением

$$\int_0^x \alpha J_0(\alpha) d\alpha = x J_1(x), \quad (19)$$

где  $J_1(x)$  — Бесселева функция 1-го порядка, то придем к окончательному результату

$$\bar{K}_o^r(f) = \frac{2J_1(i\sqrt{\Delta} r) \cdot f_0}{i\sqrt{\Delta} r}, \quad (20)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \bar{K}_o^r(f) = f_0 + \frac{r^2}{8} \Delta f_0 + \frac{r^4}{192} \Delta^2 f_0 + \\ + \dots + \frac{r^{2k}}{2^{2k} k! (k+1)!} \Delta^k f_0 + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Отметим еще, чему равно среднее значение по кругу лапласиана  $\Delta^k f(x, y)$ . Очевидно,

$$\bar{K}_o^r(\Delta^k f) = \frac{2 \Delta^k J_1(i\sqrt{\Delta} r)}{i\sqrt{\Delta} r} \cdot f_0 \quad (22)$$

4. О среднем значении на окружности производной по нормали. Пусть имеем окружность  $K^r$  с центром в точке  $O$ , которую можно принять за начало координат. При этом

$$K_o^r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi \quad (22)$$

Дифференцируя по  $r$  под знаком интеграла, получаем:

$$\frac{dK_o^r(f)}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \right) d\varphi = K_o^r \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right), \quad (23)$$

где  $\frac{\partial f}{\partial n}$  — производная по нормали к окружности, а  $K_o^r \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right)$  ее среднее значение на этой окружности.

Итак, установлено, что

$$K_o^r \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \frac{d}{dr} K_o^r(f). \quad (24)$$

Аналогично этому

$$K_o^r \left( \frac{\partial^2 f}{\partial n^2} \right) = \frac{d^2}{dr^2} K_o^r(f). \quad (25)$$

Применяя формулу (15), получаем следующее символическое выражение для  $K_o^r \left( \frac{\partial^s f}{\partial n^s} \right)$ :

$$K_o^r \left( \frac{\partial^s f}{\partial n^s} \right) = i^s \Delta^{\frac{s}{2}} J_o^{(s)}(i\sqrt{\Delta} r) \cdot f_o. \quad (26)$$

В частности, принимая во внимание, что  $J_o'(x) = -J_1(x)$ , может писать для случая  $s = 1$

$$K_o^r \left( \frac{\partial f}{\partial n} \right) = -i\sqrt{\Delta} J_1(i\sqrt{\Delta} r) \cdot f_o. \quad (27)$$

5. Об одном дифференциальном тождестве. Обозначим через  $\frac{\partial^n f_o}{\partial x_{\varphi, \theta}^n}$  — значение в точке  $O$   $n$ -той производной функции  $f(x, y, z)$  по направлению  $Ox_{\varphi, \theta}$ , характеризующемуся полярными углами  $\varphi$  и  $\theta$ <sup>1)</sup>.

Для среднего значения  $Q_n$  этой производной по всем направлениям в пространстве имеет место следующее равенство:

$$Q_n = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^n f_o}{\partial x_{\varphi, \theta}^n} d\omega = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ нечетном} \\ \frac{1}{n+1} \Delta^{\frac{n}{2}} \Delta_{x, y, z}^n \cdot f_o & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases} \quad (28)$$

где

$$\Delta_{x, y, z}^{\frac{n}{2}} f_o = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{\frac{n}{2}} f_o$$

— лапласиан  $\frac{n}{2}$ -го порядка.

Действительно,

$$\frac{\partial^n f_o}{\partial x_{\varphi, \theta}^n} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin\varphi \right) \sin\theta + \frac{\partial}{\partial z} \cos\theta \right]^n \cdot f_o. \quad (29)$$

Разлагая это выражение по формуле бинома и подставляя в выражение для  $Q_n$ , получаем после простых преобразований:

$$Q_n = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=0}^n (n)_s \frac{\partial^s}{\partial z^s} \int_0^\pi \cos^s \theta \cdot \sin^{n-s} \theta \cdot d\theta \cdot \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos\varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin\varphi \right)^s d\varphi \cdot f_o, \quad (30)$$

при чем

$$s + t = n. \quad (31)$$

<sup>1)</sup> Как в § 1. предполагается, что функция  $f(x, y, z)$  имеет непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно.

Но, согласно равенству (3)

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \sin \varphi \right)^t d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } t \text{ нечетном} \\ 2\pi \left(\frac{1}{2}\right)^t (t)_{\frac{t}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\frac{t}{2}} & \text{при } t \text{ четном,} \end{cases} \quad (31)$$

откуда следует, что

$$Q_n = \sum_{s=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} (t)_{\frac{t}{2}} (n)_{\frac{s}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\frac{t}{2}} \frac{\partial^s}{\partial z^s} \cdot \int_0^\pi \cos^s \theta \cdot \sin^{t+1} \theta \cdot d\theta \cdot f_0, \quad (32)$$

при чем  $s+t=n$  и суммирование распространено лишь по четным значениям  $t$ .

Подстановкой  $x=\cos^2\varphi$  интеграл, стоящий в правой части, может быть сведен к Эйлеровым интегралам. Его значение при четном  $t$  равно

$$\int_0^\pi \cos^s \theta \cdot \sin^{t+1} \theta \cdot d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } s \text{ нечетном} \\ \frac{2^{t+1} \left(\frac{t}{2}\right)! s! \left(\frac{s+t}{2}\right)!}{(s+t+1) \cdot \left(\frac{s}{2}\right)! (s+t)!} & \text{при } s \text{ четном.} \end{cases} \quad (33)$$

Отсюда видно, что  $Q_n=0$  при нечетном  $n$  (так как тогда при четном  $t$   $s$  — нечетно). Если же  $n$  четно, то

$$Q_n = \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n \left(\frac{n}{2}\right)_s \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{\frac{s}{2}} \cdot f_0 = \frac{1}{n+1} \Delta^{\frac{n}{2}} \cdot f_0, \quad (34)$$

что и т. д.

6. О среднем значении функции на сфере. Пусть функция  $f(x, y, z)$  допускает в области  $R$  все производные до  $m$ -го порядка включительно. Обозначим через  $f_{\varphi, \theta}$  значение функции  $f$  в той точке сферы  $S_0^r$ , которая характеризуется полярными углами  $\varphi$  и  $\theta$ . Для  $f_{\varphi, \theta}$  имеем:

$$f_{\varphi, \theta} = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x_{\varphi, \theta}} r + \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_{\varphi, \theta}^2} \frac{r^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^{2k} f_0}{\partial x_{\varphi, \theta}^{2k}} \frac{r^{2k}}{(2k)!} + \dots + \frac{\partial^m f(\xi, \eta)}{\partial x_{\varphi, \theta}^m} \frac{r^m}{m!}. \quad (35)$$

Для среднего значения  $S_o^r(f)$ , получаем на основании формулы (28)

$$S_o^r(f) = \frac{1}{4\pi} \int f_{\omega,0} d\omega = f_o + \frac{r^2}{6} \Delta f_o + \frac{r^4}{120} \Delta^2 f_o + \\ + \dots + \frac{r^{2k}}{(2k+1)!} \Delta^k f_o + \dots + R_m, \quad (36)$$

где

$$R_m \leq \frac{M_m r^m}{m!}. \quad (37)$$

В дальнейшем будем исключительно придерживаться предположения, что  $f(x, y, z)$  — функция аналитическая в области  $R$ . В этом случае ряд (36) может быть продолжен до бесконечности и будет абсолютно и равномерно сходящимся для всех сфер, расположенных внутри  $R$ .

Сравнивая бесконечный ряд (36) с разложением функции  $\sin x$ , убеждаемся, что этот результат может быть символически представлен в форме

$$S_o^r(f) = \frac{\sin(i\sqrt{\Delta}r)}{i\sqrt{\Delta}r} f_o. \quad (38)$$

7. О среднем значении функции в шаре. Найдем теперь выражение для среднего значения  $\bar{S}_o^r(f)$  функции  $f(x, y, z)$  в объеме шара  $\bar{S}_o^r$ , ограниченного сферой  $S_o^r$ . Очевидно,

$$\bar{S}_o^r(f) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3} \int_0^r S_o^{\rho}(f) \cdot 4\pi\rho^2 \cdot d\rho = \frac{3}{r^3} \int_0^r S_o^{\rho}(f) \cdot \rho^2 \cdot d\rho. \quad (39)$$

Приняв во внимание выражение (38), имеем

$$\bar{S}_o^r(f) = \frac{3}{i\sqrt{\Delta}r^3} \int_0^r \rho \sin(i\sqrt{\Delta}\rho) \cdot d\rho \cdot f_o. \quad (40)$$

Вводя переменную

$$\rho' = i\sqrt{\Delta}\rho$$

и принимая во внимание, что

$$\int_0^x a \sin a \alpha = \sin x - x \cos x,$$

приходим к окончательному результату <sup>1)</sup>.

$$\bar{S}_o^r(f) = \left[ \frac{3 \sin(i\sqrt{\Delta}r)}{(i\sqrt{\Delta}r)^3} - \frac{3 \cos(i\sqrt{\Delta}r)}{(i\sqrt{\Delta}r)^2} \right] \cdot f_o. \quad (41)$$

<sup>1)</sup> Обобщение полученных результатов на пространство любого числа измерений будет дано в статье, имеющей появиться в „Математическом Сборнике“, т. XXXV (Москва).

или в развернутом виде:

$$\bar{S}_o^r(f) = f_o + \frac{r^2}{10} \Delta f_o + \frac{r^4}{280} \Delta^2 f_o + \dots + \frac{3r^{2k}}{(2k+1)(2k+3)} \Delta^k f_o + \dots \quad (42)$$

8. Некоторые следствия из полученных результатов. Применим полученные общие выражения для средних значений к некоторым частным случаям.

Если функция  $f(x, y)$  — гармоническая [ $\Delta f(x, y) = 0$ ], то в рядах (9) и (21) все члены, кроме первого, обращаются в нуль, а следовательно, в этом случае

$$K_o^r(f) = \bar{K}_o^r(f) = f_o. \quad (43)$$

Мы пришли к известной теореме Гаусса о гармонических функциях.

В случае, если  $f(x, y)$  — гармоническая функция высшего порядка ( $\Delta^k f = 0$ ), а в частности полином, выражения для  $K_o^r(f)$  и  $\bar{K}_o^r(f)$  обращаются в конечные полиномы, расположенные по степеням  $r$ .

Положим теперь, что  $f(x, y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению мембраны

$$\Delta f(x, y) = -k^2 f(x, y), \quad (44)$$

которое выражает, что применение оператора  $\Delta$  равносильно умножению на  $-k^2$ . Формально мы можем записать это в виде равенства

$$\Delta = -k^2 \quad (45)$$

откуда

$$\sqrt{\Delta} = ik$$

Подставляя это выражение в формулы (15) и (20), получаем в этом случае

$$K_o^r(f) = f_o \cdot J_o(-kr) = f_o \cdot J_o(kr) \quad (46)$$

$$\bar{K}_o^r(f) = f_o \cdot \frac{2J_1(-kr)}{-kr} = f_o \cdot \frac{2J_1(kr)}{kr} \quad (47)$$

Этот результат был впервые иным путем установлен Н. Weber'ом.

Аналогичные результаты получаются и в пространстве 3 переменных. Если функция гармоническая ( $\Delta f(x, y, z) = 0$ ), то для нее

$$S_o^r(f) = \bar{S}_o^r(f) = f_o. \quad (48)$$

Если функция  $f(x, y, z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta_{x, y, z} f = -k^2 f, \quad (49)$$

то в этом случае (теорема Helmholtz'a) <sup>1)</sup>

$$S_o^r(f) = f_o \cdot \frac{\sin kr}{kr}, \quad (50)$$

$$S_o^r(f) = f_o \cdot \frac{3}{k^2 r^2} \left( \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right).$$

<sup>1)</sup> Pockels. Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta U + k^2 U = 0$  (Leipzig 1891).



9. Об интегралах по площадям эллипсов. Пусть имеем эллипс  $K_o^{a,b}$  с полуосями  $a$  и  $b$  и центром  $O$ , расположенный в области  $T$ , где  $f(x, y)$  остается аналитической. Оси  $x$  и  $y$  предполагаются совпадающими с полуосями  $a$  и  $b$ . Найдем среднее значение функции  $f(x, y)$  по площади  $\bar{K}_o^{a,b}$ , ограниченной эллипсом  $K_o^a$

$$\bar{K}_o^{a,b}(f) = \frac{1}{\pi ab} \int_{K_o^{a,b}} f(x, y) dx dy. \quad (51)$$

Введя новые переменные  $\xi$  и  $\eta$ , связанные с прежними соотношениями

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad (52)$$

получаем

$$K_o^{a,b}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{K_o^1} f(a\xi, b\eta) d\xi d\eta, \quad (53)$$

где интегрирование производится по площади единичного круга  $\bar{K}_o^1$ .

Применяя к вычислению интеграла (53) от функции  $f(a\xi, b\eta)$  формулу (20) и замечая, что

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) [f(a\xi, b\eta)] = \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) [f(x, y)] \quad (54)$$

получаем

$$\bar{K}_o^{a,b}(f) = \frac{2J_0(i\sqrt{\Delta a, b})}{i\sqrt{\Delta a, b}} \left[ f(x, y) \right]_o, \quad (55)$$

где

$$\Delta_{a,b} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (56)$$

Дадим еще выражение для среднего значения  $E_o^{a,b}(f)$  функции  $f(x, y)$  по площади бесконечно тонкого кольца, заключенного между эллипсом  $\bar{K}_o^{a,b}$  и ему подобным эллипсом с полуосями  $a(1-d\mu)$  и  $b(1-d\mu)$ . Площадь такого кольца равна  $2\pi ab d\mu$ . Очевидно,

$$\bar{E}_o^{a,b}(f) = \left\{ \frac{1}{2\pi ab d\mu} d \left[ \pi ab \mu^2 K_o^{a\mu, b\mu}(f) \right] \right\}_{\mu=0}^1. \quad (57)$$

Подставляя выражение для  $\bar{K}_o^{a\mu, b\mu}$  согласно формуле (55), получаем окончательно

$$\bar{E}_o^{a,b}(f) = J_0(i\sqrt{\Delta a, b}) \cdot f_o. \quad (58)$$

10. Об интегралах по объемам эллипсоидов. Не входя в подробности, дадим аналогичные выражения для эллипсоидов.

Среднее значение  $\bar{S}_o^{a,b,c}(f)$  от  $f(x, y, z)$  по объему эллипсоида  $S_o^{a,b,c}$  с полуосями  $a, b, c$  и центром 0 равно

$$\bar{S}_o^{a,b,c}(f) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi abc} \int_{S_o^{a,b,c}} f(x, y, z) dx dy dz = 3 \left[ \frac{\sin(i\sqrt{\Delta a, b, c})}{(i\sqrt{\Delta a, b, c})^3} - \frac{\cos(i\sqrt{\Delta a, b, c})}{(i\sqrt{\Delta a, b, c})^2} \right], \quad (59)$$

где 
$$\Delta_{a,b,c} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (60)$$

При этом здесь, как и в дальнейших формулах, оси  $x, y$  и  $z$  предполагаются совпадающими с полуосями  $a, b$  и  $c$ ,

Формула (59) может быть представлена в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \bar{S}_o^{a,b,c}(f) = f_o + \frac{1}{10} \Delta_{a,b,c} f_o + \frac{1}{280} \Delta_{a,b,c}^2 f_o + \\ + \dots + \frac{3}{(2k+1)!(2k+3)} \Delta_{a,b,c}^k f_o + \dots \end{aligned} \quad (61)$$

Среднее значение  $E_o^{a,b,c}(f)$  по объему слоя, заключенного между эллипсоидом  $S_o^{a,b,c}$  и ему подобным эллипсоидом с полуосями  $a(1-d\mu), b(1-d\mu)$  и  $c(1-d\mu)$ , равно

$$\bar{E}_o^{a,b,c}(f) = \frac{\sin(i\sqrt{\Delta a, b, c})}{i\sqrt{\Delta a, b, c}} \cdot f_o. \quad (62)$$

В качестве примера простейших применений найденных формул решим следующую задачу: найти момент инерции  $J_z$  относительно оси  $z$  массы, заполняющей эллипсоид  $S_o^{a,b,c}$  с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

плотность  $\rho$  которой меняется по закону

$$\begin{aligned} \rho = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_{11} x^2 + c_{22} y^2 + c_{33} z^2 + \\ + 2c_{12} xy + 2c_{13} xz + 2c_{23} yz. \end{aligned} \quad (63)$$

Очевидно

$$J_z = \frac{4}{3} \pi abc \bar{S}_o^{a,b,c}(f), \quad (64)$$

где 
$$f = \rho(x^2 + y^2). \quad (65)$$

Так как

$$\begin{aligned} f_o &= 0, \\ \Delta_{a,b,c} f_o &= 2c_0(a^2 + b^2), \\ \Delta_{a,b,c}^2 f_o &= 4 [c_{11} a^2(6a^2 + b^2) + c_{22} b^2(6b^2 + a^2) + c_{33} c^2(a^2 + b^2)], \\ \Delta_{a,b,c}^k f_o &= 0 \quad (k > 2), \end{aligned} \quad (66)$$

то согласно равенству (61)

$$J_x = \frac{4}{3} \pi abc \left\{ \frac{c_0(a^2 + b^2)}{5} + \frac{1}{70} \left[ c_{11}a^2(6a^2 + b^2) + c_{22}b^2(6b^2 + a^2) + c_{33}c^2(a^2 + b^2) \right] \right\} \quad (67)$$

При решении задачи обычным путем потребовались бы значительные выкладки.

11. О некоторых интегралах от функций одной и двух переменных. Пусть имеем функцию  $f(x)$ , аналитическую на рассматриваемом участке оси  $x$ . Арифметическое среднее значение этой функции в точках  $a + h$  и  $a - h$ , равноотстоящих от точки  $x = a$ , равно

$$\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = f_a + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f_a}{\partial x^2} + \dots + \frac{h^{2k}}{(2k)!} \frac{\partial^{2k} f_a}{\partial x^{2k}} + \dots \quad (68)$$

или в символическом обозначении

$$\frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = \cos\left(i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h\right) \cdot f_a. \quad (69)$$

Среднее значение функции  $f(x)$  на всем участке оси  $x$  от  $a - h$  до  $a + h$  равно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(a+x) dx &= \frac{1}{h} \int_0^h \frac{f(a+x) + f(a-x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \cos\left(i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} x\right) \cdot dx \cdot f_a. \end{aligned} \quad (70)$$

Произведя интегрирование (при котором, конечно,  $\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}}$  рассматривается, как постоянный множитель), получаем

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} f(a+x) dx = \frac{\sin\left(i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h\right)}{i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h} f_a. \quad (71)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые интегральные соотношения, которые мы здесь и приводим, а именно:

$$J_0(i\sqrt{\theta}h) = \frac{2}{\pi} \int_0^h (h^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(i\sqrt{\theta}u) du, \quad (72)$$

$$\frac{2J_1(i\sqrt{\theta}h)}{i\sqrt{\theta}h} = \frac{4}{\pi h^2} \int_0^h (h^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} \cos(i\sqrt{\theta}u) du, \quad (73)$$

$$3 \left[ \frac{\sin(i\sqrt{\theta}h)}{(i\sqrt{\theta}h)^3} - \frac{\cos(i\sqrt{\theta}h)}{i\sqrt{\theta}h^2} \right] = \frac{3}{2h^2} \int_0^h (h^2 - u^2) \cos(i\sqrt{\theta}u) du, \quad (74)$$

$$3 \left[ \frac{\sin(i\sqrt{\theta}h)}{(i\sqrt{\theta}h)^3} - \frac{\cos(i\sqrt{\theta}h)^2}{(i\sqrt{\theta}h)^2} \right] = \frac{3}{h^3} \int_0^h u(h^2 - u^2)^{\frac{1}{2}} J_0(i\sqrt{\theta}u) du. \quad (75)$$

Эти соотношения могут быть получены после простых преобразований и при частных целых значениях  $\nu$  и  $\mu$  из известного общего соотношения между Бесселевыми функциями различных порядков <sup>1)</sup>:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\mu} \frac{2}{\Pi(\nu-\mu-1)} \int_0^1 u^{\mu+1} (1-u^2)^{\nu-\mu-1} J_\mu(xu) du$$

$$(\nu > \mu > -1), \quad (76)$$

где  $\Pi(p)$  — функция Гаусса [для целого  $p$   $\Pi(p) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p$ ], если приваить во внимание, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \frac{\sin x}{x}, \quad (77)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{\pi}} \left( \frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2} \right).$$

Равенства (72 — 75) остаются, очевидно, формально справедливыми и в том случае, когда  $\theta$  — символический оператор <sup>2)</sup>.

Теперь нам нетрудно будет найти общее выражение для интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-h}^{+h} (h^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(a+x) dx, \quad (78)$$

с которым мы встретимся в дальнейшем. Так как

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-h}^{+h} (h^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(a+x) dx = \\ & = \frac{2}{\pi} \int_0^h (h^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{f(a+x) + f(a-x)}{2} dx, \end{aligned} \quad (79)$$

<sup>1)</sup> P. Schafheitlin. Die Theorie der Besselschen Functionen. Teubner, Berlin, 1908, § 9, формула (1).

<sup>2)</sup> Действительно, при целых  $\nu$  и  $\mu$  формула (76) может быть рассматриваема, как интегральное соотношение между абсолютно и равномерно сходящимися степенными рядами (получаемое почленным интегрированием).

то, подставляя сюда вместо  $\frac{f(a+x) + f(a-x)}{2}$  его выражение по формуле (69) и применяя равенство (72), где  $\theta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ; получаем <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{\pi} \int_{-h}^{+h} (h^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} f(a+x) dx = J_0 \left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right) \cdot f_a. \quad (80)$$

Совершенно аналогичным образом устанавливаются выражения для нижеследующих интегралов:

$$\frac{2}{\pi h^2} \int_{-h}^{+h} (h^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} f(a+x) dx = \frac{2J_1 \left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right)}{i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h} f_a \quad (81)$$

и

$$\frac{3}{4h^3} \int_{-h}^{+h} (h^2 - x^2) f(a+x) dx = 3 \left[ \frac{\sin \left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right)}{\left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right)^3} - \frac{\cos \left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right)}{\left( i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial x^2}} h \right)^2} \right] f_a. \quad (82)$$

Найдем еще выражение для интеграла

$$\frac{3}{2\pi\alpha\beta} \int_{\bar{K}_0^{\alpha,\beta}} \left( 1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx dy, \quad (83)$$

распространенного по площади эллипса  $K_0^{\alpha,\beta}$  с полуосями  $\alpha$  и  $\beta$ , которые предполагаются совпадающими соответственно с осями  $x$  и  $y$ .

Разобьем площадь  $\bar{K}_0^{\alpha,\beta}$  на ряд бесконечно-узких колец проведением эллипсов  $K_0^{\alpha\mu, \beta\mu}$  ( $0 < \mu < 1$ ), подобных данному. При интегрировании по кольцу, расположенному между эллипсами  $K_0^{\alpha\mu, \beta\mu}$  и  $K_0^{\alpha(\mu+d\mu), \beta(\mu+d\mu)}$  (площадь такого кольца равна  $2\pi\alpha\beta\mu d\mu$ ) множитель

$\left( 1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$  остается постоянным и равным  $(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}$ , а потому

<sup>1)</sup> Формулы (80) — (82) применимы и при комплексном  $h$ , если интегрировать по прямолинейному отрезку от  $-h$  до  $+h$ , при условии, что для всех точек этого отрезка имеет место разложение  $\frac{f(a+x) + f(a-x)}{2}$  в степенной ряд вида (68).

может быть вынесен за знак интеграла. Поэтому, принимая во внимание формулу (58), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\pi\alpha\beta} \int_{\bar{K}_0^{\alpha,\beta}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx dy = \\ &= \frac{3}{2\pi\alpha\beta} \int_0^1 (1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} 2\pi\alpha\beta\mu \cdot d\mu \bar{E}_0^{\alpha\mu, \beta\mu}(f) = \\ &= 3 \int_0^1 \mu(1 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} J_0(i\sqrt{\Delta_{\alpha,\beta,\mu}}) d\mu \cdot f_0. \end{aligned} \quad (84)$$

Применяя равенство (75), получаем окончательный результат <sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2\pi\alpha\beta} \int_{\bar{K}_0^{\alpha,\beta}} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx \cdot dy = \\ &= 3 \left[ \frac{\sin(i\sqrt{\Delta_{\alpha,\beta}})}{(i\sqrt{\Delta_{\alpha,\beta}})^3} - \frac{\cos(i\sqrt{\Delta_{\alpha,\beta}})}{(i\sqrt{\Delta_{\alpha,\beta}})^2} \right] f_0. \end{aligned} \quad (85)$$

12. О гармонических функциях. Выведенные в предыдущем параграфе формулы позволяют установить ряд весьма замечательных соотношений для разных частных случаев. Мы здесь остановимся только на случае гармонических функций.

Пусть дана функция  $f(x, y, z)$ , удовлетворяющая уравнению

$$\Delta_{x,y,z} f = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f \neq 0, \quad (86)$$

что можно также записать в виде символического равенства

$$\Delta_{x,y,z} = 0,$$

Найдем, чему равно среднее значение  $\bar{S}_0^{a,b,c}$  такой функции в объеме эллипсоида  $\bar{S}_0^{a,b,c}$ , оси которого попережнему предполагаем совпадающими с осями  $x, y$  и  $z$ . Не нарушая общности можем считать, что  $a > b > c$ . Формула (59) дает:

$$\bar{S}_0^{a,b,c}(f) = 3 \left[ \frac{\sin(i\sqrt{\Delta_{a,b,c}})}{(i\sqrt{\Delta_{a,b,c}})^3} - \frac{\cos(i\sqrt{\Delta_{a,b,c}})}{(i\sqrt{\Delta_{a,b,c}})^2} \right] f_0. \quad (88)$$

Но в силу равенства (86)

$$\Delta_{a,b,c} = \Delta_{a,b,c} - c^2 \Delta_{x,y,z} = (a^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (b^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta_{\lambda_1, \lambda_2}, \quad (89)$$

<sup>2)</sup> В формулах (78) — (85) функция  $f$  предполагается аналитической во всех точках рассматриваемой области.

где  $2\lambda_1 = 2\sqrt{a^2 - c^2}$  и  $2\lambda_2 = 2\sqrt{b^2 - c^2}$  — главные фокусные расстояния эллипсоида. Подставляя это значение  $\Delta_{a,b,c}$  в равенство (88), замечаем, что  $\bar{S}_o^{a,b,c}(f)$  зависит лишь от  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и одинаково, следовательно, для всех софокусных эллипсоидов. Применяя к полученному выражению соотношение (85), получаем

$$\bar{S}_o^{a,b,c}(f) = \frac{3}{2\pi\lambda_1\lambda_2} \int_{\bar{K}_o^{\lambda_1,\lambda_2}} \left(1 - \frac{x^2}{\lambda_1^2} - \frac{y^2}{\lambda_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} f(x, y, 0) dx dy. \quad (90)$$

Итак, среднее значение произвольной гармонической функции в объеме эллипсоида одинаково для всех софокусных эллипсоидов и может быть выражено при помощи двойного интеграла по площади эллиптической пластинки  $\bar{K}_o^{\lambda_1,\lambda_2}$ . При этом, конечно, предполагается, что функция не имеет особенных точек в рассматриваемых эллипсоидах.

Этот результат может быть рассматриваем, как новое обобщение теоремы Гаусса о гармонических функциях.

Ньютонов потенциал эллипсоида  $\bar{S}_o^{a,b,c}$ , заполненного массой плотности 1 во внешней точке  $(\xi, \eta, \zeta)$  равен

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \int_{\bar{S}_o^{a,b,c}} \frac{dx dy dz}{R} = \frac{4}{3} \pi abc \cdot \bar{S}_o^{a,b,c} \left( \frac{1}{R} \right), \quad (91)$$

при чем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

функция гармоническая. Поэтому, согласно предыдущему, потенциалы софокусных эллипсоидов в какой-нибудь внешней точке пропорциональны их объемам.

Это заключение, представляющее содержание известной теоремы Маклорена, является, таким образом, весьма частным случаем установленного выше предложения 1).

Если рассматриваемый эллипсоид представляет эллипсоид вращения ( $b=c$ ), то

$$\Delta_{a,b,c} = (a^2 - c^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (92)$$

Подставляя это значение в выражение (88) и применяя равенство (82), получаем

$$\bar{S}_o^{a,b,c}(f) = \frac{3}{4\lambda^3} \int_{-\lambda}^{+\lambda} (\lambda^2 - x^2) f(x, 0, 0) dx, \quad (93)$$

где

$$\lambda = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

<sup>1)</sup> Важнейшие работы по вопросу о потенциале эллипсоида собраны в Ostwald's «Klassiker der exakten Wissenschaften», № 19.

Мы видим, это в этом случае среднее значение по эллипсоиду приводится к простому интегралу по отрезку, соединяющему его фокусы, от функции  $f$ , помноженной на  $(\lambda^2 - x^2)$ .

Если, для примера положим  $f(x, y, z) = \frac{1}{R}$ , то интеграл (93) берется в конечном виде. Этим путем весьма просто решается задача о потенциале эллипсоида вращения во внешней точке. Формула (93), конечно, остается справедливой и при  $a < c$  ( $\lambda$  — мнимое).

Найдем еще выражение для среднего значения функции  $f(x, y, z)$ , гармонической в пространстве, по окружности и кругу. Пусть дана окружность  $K_o^r$ , центр  $O$  которой лежит в точке  $(o, o, z)$  на оси  $z$ , а плоскость перпендикулярна к этой оси. Тогда

$$K_o^r(f) = J_o(iV \Delta_{x,y} r) f_o. \quad (94)$$

Но в силу равенства (97),

$$\Delta_{x,y} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (95)$$

или

$$V \Delta_{x,y} = i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}, \quad (96)$$

что дает совместно с равенством (80)

$$K_o^r(f) = \frac{1}{\pi i} \int_{-ir}^{+ir} (r^2 + \zeta^2)^{-\frac{1}{2}} f(o, o, z + \zeta) d\zeta. \quad (97)$$

Путем замены переменных равенство (97) может быть представлено в виде

$$K_o^r(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}} f(o, o, z + iru) du \quad (98)$$

или также

$$K_o^r(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(o, o, z + ir \cos \varphi) d\varphi. \quad (99)$$

Совершенно таким же образом получаем:

$$\begin{aligned} \bar{K}_o^r(f) &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^{\frac{1}{2}} f(o, o, z + iru) du = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(o, o, z + ir \cos \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (100)$$

На применениях этих формул к отдельным задачам я здесь останавливаться не буду <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Во время печатания настоящей статьи я убедился, что формулы (15) и (38) были ранее получены иным путем Lord Rayleigh'em в его «Theorie of sound» (V, II). Однако, дальнейшего развития эти результаты в указанном сочинении, повидимому не получили.



# Über die Mittelwerte der Funktionen auf dem Kreise und auf der Sphere.

*S. Gerschgorin.*

In den zwei ersten Paragraphen dieser Arbeit wird der allgemeine Ausdruck (13) für die Mittelwerte der Funktion  $f(x, y)$  auf den Kreisen in der  $xy$  — Ebene angegeben <sup>1)</sup>.

Der Ausdruck hat die Form einer nach Potenzen des Halbmessers  $r$  geordneten Reihe, deren Koeffiziente, abgesehen von bestimmten Zahlenfaktoren, die im Zentrum  $O$  des Kreises genommene Werte der Laplace'schen Operatoren steigender Ordnung von der Funktion  $f(x, y)$  sind. Der Vergleich der erhaltenen Reihe mit der Entwicklung der Besselschen Funktion  $J_0(x)$  führt auf die symbolische Darstellung (15) dieser Reihe.

In §§ 3—4 werden allgemeine Ausdrücke für die Mittelwerte der Funktion  $f(x, y)$  über den Flächeninhalt des Kreises u. a. angegeben.

In §§ 5—7 werden analoge Resultate für die Mittelwerte einer Funktion von drei Variablen  $f(x, y, z)$  auf Spheren entwickelt.

Einige unmittelbare Folgerungen aus den erhaltenen Resultaten in Anwendung auf harmonische und andere Funktionen sind in § 8 angeführt.

Die §§ 9—10 sind der Verallgemeinerung der oben erwähnten Resultate auf Ellipse und Ellipsoide gewidmet.

Endlich, werden in den Paragraphen 11—12 durch Vergleich der erhaltenen Ausdrücke miteinander verschiedene Beziehungen für spezielle Funktionen (nämlich für harmonische) hergeleitet. Es sei dabei besonders auf das Resultat, dass die Mittelwerte einer harmonischen Funktion innerhalb konfokalen Ellipsoiden einander gleich sind, hingewiesen. Dieser Satz enthält als Spezialfall das berühmte Maclaurin'sche Theorem über die Potentiale konfokaler Ellipsoide.

---

<sup>1)</sup> Unter dem Mittelwert wird das längs der Peripherie des Kreises erstreckte und durch ihre Länge dividierte Integral von  $f(x, y)$  verstanden.

ОТДЕЛ И

ТЕХНИКА

# СО Д Е Р Ж А Н И Е

## К ОТДЕЛУ II-му

	СТР.
Приближенное тепловое подобие для случая дымохода переменного сечения.— <i>А. А. Гузман.</i> . . . . .	79
Динамика шатуна легкого двигателя внутреннего сгорания.— Инж.-механика <i>С. Струковский.</i> . . . . .	89
Уравнения для напряжений в неограниченном пласте сыпучего тела и их приме- нение к расчету давления на подпорные стенки.— <i>Ю. И. Ягн.</i> . . . . .	105
К вопросу о движении шара в вязкой жидкости.— <i>А. И. Лурье.</i> . . . . .	117
Сравнение работы резцов с положительным и отрицательным возвышением лезвия с имеющими лезвие горизонтальное.— <i>П. Незнамов.</i> . . . . .	125

## Приближенное тепловое подобие для случая дымохода переменного сечения

А. А. Гухман

Содержание задачи о приближенном тепловом подобии в общем виде изложено в статье: „Теория моделей“ <sup>1)</sup>. Однако, решение ее доведено до конца только для простейшего частного случая дымохода постоянного сечения. Здесь я рассматриваю несколько более общий случай дымохода, сечение которого изменяется как линейная функция поверхности нагрева.

Уравнение стационарности теплового состояния газового потока пишем в виде:

$$dF = -A\Omega \frac{dT}{\Delta T} \quad (1)$$

при чем сохраняются обозначения предыдущей статьи:

$dF$  — элемент поверхности нагрева между данным сечением и некоторым другим, бесконечно к нему близким;

$\Omega$  — площадь рассматриваемого сечения;

$\Delta T$  — температурный напор в рассматриваемом сечении;

$dT$  — температурный перепад на протяжении  $dF$ .

Величина  $A$  определяется уравнением:

$$A = \frac{c_p \gamma w}{\alpha},$$

где

$c_p$  — теплоемкость газов при постоянном давлении;

$\gamma$  — их удельный вес;

$w$  — их скорость;

$\alpha$  — коэффициент теплоотдачи от газов к стенке.

Все величины для данного сечения.

Как нами показано, с удовлетворительным приближением можно считать, что комплекс  $A$  сохраняет неизменное значение на протяжении всей системы <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> „Известия Ленинград. Политехн. Ин-та им. М. И. Калинина“ том XXX, 1927 стр. 211.

<sup>2)</sup> Op. cit., стр. 239.

Относительно величины  $\Omega$  полагаем, что она определяется следующим уравнением:

$$\Omega = \Omega_0 - mF \quad (2)$$

где  $\Omega_0$  — площадь входного сечения.

Этих предпосылок, очевидно, достаточно для того, чтобы сделать интегрирование уравнения (1) действительно возможным. Имеем:

$$\frac{dF}{\Omega_0 - mF} = -A \frac{dT}{\Delta T}$$

Интегрируя первое выражение в пределах от  $F=0$  до  $F=F_i$ , и соответственно второе от  $T=T_a$  до  $T=T_i$ , находим:

$$\lg \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - mF_i} \right) = mA \lg \frac{\Delta T_a}{\Delta T_i}$$

или

$$\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - mF_i} = \left( \frac{\Delta T_a}{\Delta T_i} \right)^{mA}$$

Переписываем это уравнение в виде:

$$\frac{\Delta T_i}{\Delta T_a} = \left( 1 - \frac{mF_i}{\Omega_0} \right)^{\frac{1}{mA}} \quad (3)$$

Принимаем обозначения:

$$\Omega_0 - \Omega_i = \Delta \Omega_i \quad (4)$$

и

$$\frac{\Delta \Omega_i}{\Omega_0} = \omega_i \quad (5)$$

Величину  $\Delta \Omega_i$  мы будем называть степенью абсолютного сужения (или проще — степенью сужения) дымохода, величину  $\omega_i$  — степенью его относительного сужения.

Далее обозначаем:

$$\frac{1}{mA} = B \quad (6)$$

Принимая во внимание, что коэффициент  $m$  определяется уравнением:

$$m = \frac{\Delta \Omega}{F}$$

переписываем выражение для  $B$  в виде:

$$B = \frac{F}{A \Delta \Omega}$$

Величину  $F$  представляем в виде:

$$F = \Omega_0 G,$$

где  $G$  — относительная величина поверхности нагрева <sup>1)</sup>.

Имеем:

$$B = \frac{G}{A\omega} \quad (6')$$

Пользуясь принятыми обозначениями, преобразуем уравнение (3) к виду:

$$\Delta T_i = \Delta T_a (1 - \omega_i)^B \quad (7)$$

Отсюда определяется температурный перепад между входным сечением  $a$  и произвольно выбранным сечением  $i$ :

$$\delta T_{ai} = \Delta T \left[ 1 - (1 - \omega_i)^B \right] \quad (8)$$

Это выражение и подлежит исследованию с точки зрения возможности осуществления условий приближенного теплового подобия. Напомним, что вопрос сводится к следующему.

1. Обе системы предполагаются геометрически подобными.

Вследствие этого все относительные геометрические параметры, взятые для сходственных сечений, равны друг другу. Таким образом надо положить:

$$G_i'' = G_i' = G, \quad (9)$$

и

$$\omega_i'' = \omega_i' = \omega, \quad (10)$$

Равным образом должно быть:

$$m'' = m' = m \quad (11)$$

2. В тепловом отношении системы предполагаются не подобными.

В аналитической форме эта предпосылка выражается как условие неравенства критериев теплового подобия. В частности следует положить:

$$A'' \neq A',$$

т. к. константа  $A$  представляет собой одну из модификаций основных критериев <sup>2)</sup>. Отсюда непосредственно получается:

$$B'' = B'$$

Взаимоотношение температурных полей мыслится следующим образом.

<sup>1)</sup> Op. cit., стр. 242.

<sup>2)</sup> Op. cit., стр. 238.

Во входных сечениях обеих систем имеет место подобное распределение температур. Однако, во время теплообмена при отсутствии теплового подобия по необходимости нарушается также подобие температурных полей. Это нарушение проявляется в том, что для температурных перепадов между двумя различными парами сходственных сечений получаются неодинаковые множители преобразования. Таким образом, если

$$v_i = \frac{\partial T_{ai}''}{\partial T_{ai}'}$$

и

$$v_j = \frac{\partial T_{aj}''}{\partial T_{aj}'},$$

то

$$v_j \neq v_i$$

Для количественной оценки искажения температурного поля между сечениями  $i$  и  $j$  нами выработан особый измеритель в виде выражения:

$$\xi_{ij} = \frac{v_j}{v_i} - 1 \quad (12)$$

Величине  $\xi$  присвоено название меры искажения температурного поля <sup>1)</sup>.

Непосредственно из рассмотрения самой сущности явления легко заключить, что степень искажения уменьшается вместе с сокращением поверхности нагрева, омывтой газами. Для участка, ограниченного некоторым сечением  $j$ , могут быть получены поля, подобные с какой угодно степенью точности, если только сечение это расположено достаточно близко к входному сечению  $a$ , в котором установлено подобное распределение температур. Это заключение может быть сформулировано самым общим образом, вне зависимости от вида уравнений, связывающих температурный перепад с поверхностью нагрева.

Однако, действительный смысл задачи заключается в том, чтобы для отдельных частных случаев, которым отвечают различные конкретные формы основного уравнения, выразить  $\xi$  как функцию от  $F$ . Это, очевидно, позволило бы путем надлежащего ограничения исследуемого участка поверхности нагрева осуществлять поля, подобные с произвольной, заранее намеченной, степенью точности. В такой именно постановке задача рассматривалась нами в предыдущей работе. Решение ее свелось к разысканию ограничительного условия для по-

<sup>1)</sup> Op. cit., стр. 251.

верхности нагрева в форме уравнения, связывающего величины  $F'$  и  $\xi$  в частном случае дымохода постоянного сечения. Это уравнение было нами найдено <sup>1)</sup>.

Здесь, однако, я избираю несколько иной путь решения. Именно, я попытаюсь показать, что может быть составлено выражение, обладающее следующими свойствами:

1) Разность между этим выражением и выражением, определяющим температурный перепад  $\delta T_{at}$  согласно уравнению (8), зависит от протяженности рассматриваемого участка поверхности нагрева и может быть сделана сколь угодно малой путем должного ограничения величины  $F'_x$ .

2) Все температурные поля, построенные по такому закону, что их перепады равны рассматриваемому выражению, совершенно друг другу подобны, вне зависимости от соотношения их физических констант.

Легко видеть, что оперируя этим выражением, возможно произвести на известном протяжении поверхности нагрева замещение действительных температурных полей некоторыми иными, сколь угодно им близкими и вместе с тем вполне друг другу подобными. Таким образом, отличие этой постановки вопроса от первоначальной заключается в том, что здесь искажение вносится не сопоставлением полей обеих систем, а переходом от действительных картин распределения температур к фиктивным. Следовательно, и точность решения определяется не мерой искажения, а той ошибкой, которая допускается при этом переходе.

Замещение температурных полей основано на преобразовании основного уравнения (8), определяющего температурный перепад:

$$\delta T_{at} = \Delta T_* \left[ 1 - (1 - \omega)^B \right]$$

Рассматриваем выражение  $(1 - \omega)^B$ . Относительно величины  $\omega$  и  $B$  замечаем, что  $\omega$  есть сравнительно небольшая дробь, а  $B$  во всяком случае меньше единицы.

Имеем:

$$(1 - \omega)^B = 1 - B\omega + \frac{B(B-1)}{1 \cdot 2} \omega^2 - \frac{B(B-1)(B-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \omega^3 + \dots$$

или

$$(1 - \omega)^B = 1 - B\omega \left[ 1 - \frac{\omega}{2} (B-1) + \frac{\omega^2}{3} (B-1) \frac{B-2}{2} - \dots \right]$$

Переписываем это уравнение в виде:

$$(1 - \omega)^B = 1 - B\omega \left[ 1 + \frac{\omega}{2} (1-B) + \frac{\omega^2}{3} (1-B) \left( 1 - \frac{B}{2} \right) + \dots \right]$$

<sup>1)</sup> Op. cit., стр. 256.



Принимая обозначение:

$$f(\omega, B) = 1 + \frac{\omega}{2}(1-B) + \frac{\omega^2}{3}(1-B)\left(1 - \frac{B}{2}\right) + \dots + \frac{\omega^n}{n+1}(1-B)\left(1 - \frac{B}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{B}{n}\right) + \dots \quad (13),$$

находим:

$$\delta T_{ai} = \Delta T_a B \omega_i f(\omega_i, B) \quad (14)$$

Определим некоторую функцию  $\varphi(\omega)$  следующим образом:

$$\varphi(\omega) = 1 + \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{3} + \dots + \frac{\omega^n}{n+1} + \dots \quad (15)$$

Если теперь положить:

$$\delta T_{ai} = \Delta T_a B \omega_i \varphi(\omega_i) \quad (16)$$

то соответствующая ошибка определится как:

$$\varepsilon_i = \frac{\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B)}{f(\omega_i, B)} \quad (17)$$

Замечая, что

$$f(\omega_i, B) > 1,$$

имеем:

$$\varepsilon_i < \varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) \quad (18)$$

Из сопоставления уравнений (13) и (15) находим:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) &= \frac{\omega_i}{2}[1 - (1-B)] + \frac{\omega_i^2}{3}\left[1 - (1-B)\left(1 - \frac{B}{2}\right)\right] + \dots \\ &+ \frac{\omega_i^n}{n+1}\left[1 - (1-B)\left(1 - \frac{B}{2}\right) \dots + \left(1 - \frac{B}{n}\right)\right] + \dots \end{aligned}$$

Переносываем это уравнение в виде:

$$\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) = \sum_{n=1}^{n-\infty} \Delta_n \quad (19),$$

где

$$\Delta_n = \frac{\omega_i^n}{n+1} \left[ 1 - (1-B) \left( 1 - \frac{B}{2} \right) \dots \left( 1 - \frac{B}{n} \right) \right] \quad (20)$$

Принимаем обозначение:

$$\left(1-B\right) \left(1-\frac{B}{2}\right) \dots \left(1-\frac{B}{n}\right) = Q_n.$$

Как это следует из общей теории бесконечных произведений, всегда существует неравенство:

$$Q_n > 1 - \left(B + \frac{B}{2} + \dots + \frac{B}{n}\right)$$

независимо от свойств ряда, заключенного в скобки.

Поэтому должно быть:

$$\Delta_n < \frac{\omega^n}{n+1} \left( B + \frac{B}{2} + \dots + \frac{B}{n} \right) = \omega^n B \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Принимая обозначение:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = S_n,$$

имеем:

$$\Delta_n < \omega^n B S_n.$$

Сопоставляя это неравенство с уравнением (19), находим:

$$\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) < B(\omega_i S_1 + \omega_i^2 S_2 + \dots + \omega_i^n S_n + \dots) \quad (21)$$

Замечаем теперь, что суммы:

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

образуют ряд последовательно убывающих величин.

Действительно, разность  $S_n - S_{n+1}$  определится следующим образом:

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$S_n - S_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

или

$$S_n - S_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Правая часть этого уравнения представляет собой сумму существенно положительных величин. Поэтому

$$S_n > S_{n+1}$$

Только в частном случае  $n=1$  получается

$$S_1 = S_2,$$

как это следует непосредственно из разбора выполненной операции. Таким образом, возможно положить:

$$\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) < B\omega_i S_1 (1 + \omega_i + \dots + \omega_i^n + \dots) \quad (22)$$

Находим:

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

и

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots = \frac{1}{1 - \omega}$$

Неравенство (22) приводится к виду:

$$\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) < \frac{B\omega_i}{2(1 - \omega_i)}$$

Подставляем значение  $B$  из уравнения (6'). Имеем:

$$\varphi(\omega_i) - f(\omega_i, B) < \frac{G_i}{2A} \frac{1}{1 - \omega_i}$$

Принимая во внимание неравенство (18), получаем окончательно

$$\varepsilon_i < \frac{G_i}{2A} \frac{1}{1 - \omega_i} \quad (23)$$

Таким образом, нами найдено выражение для ошибки, обусловленной замещением действительного распределения температур некоторым фиктивным, соответственно переходу от уравнения (14) к уравнению (16).

Покажем теперь, что системы, температурные перепады которых удовлетворяют уравнению (16), образуют класс вполне подобных температурных полей, вне зависимости от их физических свойств.

Составляем выражение для меры искажения. Имеем:

$$\nu_i = \frac{\delta T_{a_i}''}{\delta T_{a_i}'} = \frac{\Delta T_a''}{\Delta T_a'} \frac{B''}{B'} \frac{\omega_i''}{\omega_i'} \frac{\varphi(\omega_i'')}{\varphi(\omega_i')}$$

Принимая во внимание уравнение (9) и (10), получаем:

$$\nu_i = \frac{\Delta T_a''}{\Delta T_a'} \frac{B''}{B'} \quad (24)$$

Найденное нами выражение не содержит ни одной величины, отмеченной индексом. Это означает, что значение  $v$  не зависит от выбора сечения. Поэтому следует положить:

$$v_j = v_i$$

или

$$\xi_{ij} = 0 \quad (25)$$

Таким образом, нам удалось показать, что поля, образованные соответственно уравнению (16), действительно вполне друг другу подобны. Точность решения, следовательно, определяется исключительно ошибкой, которая вносится замещением полей и определена нами в виде неравенства (23). Рассматривая это неравенство, приходим к заключению, что условия здесь несколько менее благоприятны, чем в случае дымохода постоянного сечения, так как выражение в правой части неравенства содержит множитель  $\frac{1}{1-\omega}$ , который больше единицы. Однако, легко видеть, что при геометрических соотношениях, имеющих место в действительности, получается удовлетворительная степень точности без чрезмерного ограничения исследуемого участка поверхности нагрева.

Март 1928 года.

## Die angenäherte Ähnlichkeit der Wärmeübergangserscheinungen bei veränderlichem Querschnitt des Gasstromes

A. A. Guchmann.

In einer früheren Abhandlung <sup>1)</sup> wurde es bewiesen, dass in Systemen mit verschiedenen Flüssigkeiten die Wärmeübergangserscheinungen auf keinerlei Weise vollständig ähnlich sein können. Infolge dessen wurde der Begriff der angenäherten Ähnlichkeit festgestellt und ein Mass für die Entstellung der Temperaturfelder ausgewählt. Zur Ermittlung der Entstellungsgrösse wurde für den einfachsten Fall eines unveränderlichen Querschnitts eine Gleichung gewonnen.

Die vorliegende Abhandlung stellt eine Erweiterung dieser Methode dar. Es wird der Fall eines Gasstromes, dessen Querschnitt als eine lineare Funktion der Heizfläche sich ändert, betrachtet. Dass Entstellungsmass wird als eine Funktion des Verhältnisses  $\left(\frac{\text{Heizfläche}}{\text{Querschnitt}}\right)$  bestimmt.

---

<sup>1)</sup> Известия Ленинградского Политехнического Института им. М. И. Калинина, том XXX, стр. 211.

## Динамика шатуна легкого двигателя внутреннего сгорания <sup>1)</sup>.

Инж.-мех. С. Струковский.

Кинематика шатуна довольно сложна; кроме поступательного движения он совершает качания наподобие физического маятника. Возникающий при этом, переменный по величине и направлению, момент сил его инерции стремится сообщить двигателю колебательное движение в плоскости, перпендикулярной к оси коленчатого вала. При замене шатуна двумя фиктивными массами, сосредоточенными на осях его головок, как это делается обычно при расчете двигателя („приведение“ массы шатуна к его конечным точкам), это сложное движение не учитывается полностью, чем искажается действительная картина усилий и их моментов, возникающих в двигателе от сил инерции шатуна. Уклонение от действительности будет тем значительнее, чем больше масса шатунов по сравнению с массами других частей кривошипного механизма (поршни, коленчатый вал) и всего двигателя и чем менее благоприятно распределение массы шатуна по его длине; взаимное расположение цилиндров также имеет весьма большое значение. — Очевидно, например, что вращательная инерция

<sup>1)</sup> Динамика шатуна в применении к легким двигателям рассматривается в следующих сочинениях и статьях:

A. Sharp, „Balancing of Engines—Steam, Gas & Petrol“, 1908.

F. Huber, „Erschütterungen schwerer Fahrzeugmotoren“, 1920.

M. Platt, уравнивание автомобильных двигателей (графический метод определения усилий, возникающих от шатуна в двигателе); журнал „Automobile Engineer“ 1924 авг.-сент.

H. S. Rowell, уравнивание автомобильных двигателей (вращательная инерция шатуна); „Aut. Eng.“, 1924, апр.

E. Reeve, уравнивание двигателя Waiseley (к статье Rowell; пример расчета); ежегодник „Proceedings of the Institution of Automobile Engineers“, 1923—24, т. II, стр. 542.

Однако, во всех указанных работах вопрос в целом не рассмотрен с достаточной ясностью, позволяющей в необходимых случаях удобно использовать предлагаемые авторами методы.

Настоящая статья представляет переработку части пояснительной записки к дипломному проекту, выполненному мною под руководством доцента Л. В. Климко, коему приношу благодарность за полученные от него ценные указания.

шатуну сильнее всего должна сказаться в случае плоского двухцилиндрового двигателя (с двухколенчатым валом), оба шатуна которого движутся с одинаковыми по величине и направлению угловыми скоростями и ускорениями в каждый данный момент и поэтому могут вызывать со своей стороны весьма значительные колебания двигателя в плоскости, перпендикулярной к оси его вала.

Пусть

$R$  = радиус кривошипа . . . . . см

$L$  = длина шатуна . . . . . "

$a, b$  = расстояния от центра тяж. шатуна до центров верхней и нижней головок . . . . . "

$k$  = радиус инерции шатуна отн. его центра тяж. . . . . "

$m$  = масса его . . . . .  $\frac{\text{кг сек}^2}{\text{см}}$

$\theta$  = угол поворота кривошипа (от оси  $Oy$  по час. стрелке). (1)

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$  = угловая скорость кривошипа (от оси  $Oy$  по часовой стрелке) . . . . .  $\frac{1}{\text{сек}}$

$\varphi$  = угол поворота шатуна (от оси  $Oy$  против часовой стрелки) . . . . . 1

$$\frac{R}{L} = \lambda; \frac{a}{L} = \alpha; \frac{b}{L} = \beta; \frac{k}{L} = \rho.$$

Очевидно

$$\sin \varphi = \lambda \sin \theta \quad (1)$$

$$\cos \varphi = (1 - \lambda^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}$$

Разложив последнее выражение в ряд по ф-ле Ньютона, заменив степени синуса — синусами кратных углов по ф-лам тригонометрии и отбросив члены, содержащие  $\lambda^4, \lambda^6$  и т. д., получим:

$$\cos \varphi = (1 - \frac{\lambda^2}{4}) + \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\theta \quad (2)$$

Аналогичным путем найдем:

$$\frac{1}{\cos \varphi} = (1 + \frac{\lambda^2}{4}) - \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\theta \quad (2')$$

Координаты точек  $A, B$  и  $C$ :

$$\left. \begin{aligned} x_b &= R \sin \theta \\ y_b &= R \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} x_a &= 0 \\ y_a &= R \cos \theta + L \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} x_a &= 0 \\ y_a &= -R\omega^2(\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} x_c &= a \sin \varphi \\ y_c &= R \cos \theta + b \cos \varphi \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} x_c &= a R \sin \theta \\ y_c &= R \left[ \frac{\beta}{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) + \cos \theta + \frac{\beta \lambda}{4} \cos 2\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Ускорения этих точек:

$$\left. \begin{aligned} x_b'' &= -R\omega^2 \sin \theta \\ y_b'' &= -R\omega^2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_a'' &= 0 \\ y_a'' &= -R\omega^2 (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} x_c'' &= -\alpha R\omega^2 \sin \theta \\ y_c'' &= -R\omega^2 (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

### 1. Шатуны, как действительное физическое тело.

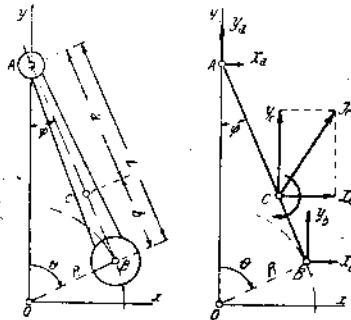
Выясним картину усилий, вызываемых в действительности в двигателе массой шатуна при его движении; при этом будем рассматривать шатун, как действительное физическое тело (или систему бесконечно-большого числа материальных точек).

Движение шатуна можно представить складывающимся из двух частей:

- а) поступательное движение, определяемое движением центра тяжести, и
- б) вращательное движение около центра тяжести, определяемое угловым перемещением шатуна относительно оси цилиндра.

#### а. Поступательное движение.

Равнодействующая ( $I_c$ ) сил инерции, вызываемых поступательным ускорением шатуна, приложена к центру тяжести его ( $c$ )—



Фиг. 1.

(фиг. 1). Проекции силы инерции ( $I_c$ ) поступательного движения, ввиду ур-ий (8):

$$\left. \begin{aligned} X_c &= m R\omega^2 \sin \theta \\ Y_c &= m R\omega^2 (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$



Момент силы ( $I_0$ ) относительно оси коленчатого вала ( $O$ ):

$$M'_0 = X_0 y_0 - Y_0 x_0 \quad (10)$$

или, ввиду ур.-ий (5) и (9):

$$M'_0 = amR^2 \omega^2 \left\{ \left[ \frac{\beta}{\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{4} \right) \sin \theta + \sin \theta \cos \theta + \frac{\beta \lambda}{4} \sin \theta \cos 2\theta \right] - (\sin \theta \cos \theta + \beta \lambda \sin \theta \cos 2\theta) \right\}$$

или, т. к.

$$\sin \theta \cos 2\theta = \sin \frac{3\theta - \theta}{2} \cos \frac{3\theta + \theta}{2} = \frac{1}{2} (-\sin \theta + \sin 3\theta) \quad 1)$$

$$M'_0 = \lambda ab m \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} \right) \sin \theta - \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\theta \right] \quad (10')$$

### б. Вращательное движение шатуна.

Угловое перемещение:

$$\varphi = \arcsin(\lambda \sin \theta)$$

положим

$$\lambda \sin \theta = z;$$

тогда

$$\varphi = \arcsin z; \quad \varphi' = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

или, по ф-ле Ньютона:

$$\varphi' = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{3}{8} z^4 + \frac{5}{16} z^6 + \dots$$

отк.

$$\varphi = z + \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{40} z^5 + \dots$$

или

$$\varphi = \lambda \sin \theta + \frac{\lambda^3}{6} \sin^3 \theta + \frac{3\lambda^5}{40} \sin^5 \theta + \dots$$

Ф-ла разложения ( $\sin^n \theta$ ) в ряд при  $n$  нечетном:

$$\sin^n \theta = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \left[ \sin n\theta - n \sin(n-2)\theta + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin(n-4)\theta - \dots \right]$$

<sup>1)</sup> По известным ф-лам тригонометрии вида

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

— находим:

$$\sin a\theta \sin b\theta = \frac{1}{2} (\cos p - \cos q) \quad \cos a\theta \sin b\theta = \frac{1}{2} (\sin p + \sin q) \quad \text{где } p = (b-a)\theta$$

$$q = (a+b)\theta$$

$$\sin a\theta \cos b\theta = \frac{1}{2} (-\sin p + \sin q) \quad \cos a\theta \cos b\theta = \frac{1}{2} (\cos p + \cos q) \quad \text{причем } a < b; p < q$$

$a$  и  $b$  — целые числа

По ней находим:

$$\sin 3\theta = -\frac{1}{4} \sin 3\theta + \frac{3}{4} \sin \theta$$

$$\sin 5\theta = \frac{1}{16} \sin 5\theta - \frac{5}{16} \sin 3\theta + \frac{5}{8} \sin \theta \quad \text{и т. д.}$$

тогда

$$\varphi = C_1 \sin \theta + C_3 \sin 3\theta + C_5 \sin 5\theta + \dots$$

где

$$C_1 = \lambda + \frac{\lambda^3}{8} + \frac{3\lambda^5}{64} + \dots$$

$$C_3 = -\frac{\lambda^3}{24} - \frac{3\lambda^5}{128} + \dots$$

$$C_5 = \frac{3\lambda^5}{640} + \dots$$

Угловое ускорение шатуна:

$$\varphi'' = -\omega^2 (C_1 \sin \theta + 9C_3 \sin 3\theta + 25C_5 \sin 5\theta + \dots)$$

или

$$\varphi'' = -\omega^2 (D_1 \sin \theta + D_3 \sin 3\theta + D_5 \sin 5\theta + \dots) \quad (11)$$

где

$$D_1 = \lambda + \frac{\lambda^3}{8} + \frac{3\lambda^5}{64} + \dots$$

$$D_3 = -\omega^2 \frac{3\lambda^3}{8} - \frac{27\lambda^5}{128} + \dots$$

$$D_5 = \frac{15\lambda^5}{128} + \dots$$

Значения коэффициентов ( $D$ ) для некоторых значений  $\lambda$ :

$\frac{1}{\lambda} =$	3,5	3,75	4,0	4,5	5,0
$D_1 =$	0,2887	0,2694	0,2520	0,2236	0,2010
$D_3 =$	-0,0091	-0,0072	-0,0060	-0,0042	-0,0030
$D_5 =$	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0000

При  $\lambda = \frac{1}{4}$ ,  $\lambda^5 = \frac{1}{512}$ , пренебрегая поэтому членами, содержащими  $\lambda^5$ , получим приближенно:

$$\varphi'' = -\lambda\omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} \right) \sin \theta - \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\theta \right] \quad (12)$$

Вращающий момент, создаваемый угловым ускорением вращательного движения шатуна:

или 
$$M'' = k^2 m \varphi''^1)$$

$$M'' = -\lambda k^2 m \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} \right) \sin \theta - \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\theta \right] \quad (13)$$

Суммарный момент сил инерции шатуна, действующий на двигатель:

или 
$$M_o = M_o' + M''$$

$$M_o = (ab - k^2) \lambda m \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} \right) \sin \theta - \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\theta \right] \quad (14)$$

Очевидно, наибольшего значения момент  $M_o$  достигает при  $\theta = 90^\circ$ :

$$M_{o_{max}} = (ab - k^2) \lambda \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) m \omega^2 \quad (14')$$

При  $\lambda = \frac{1}{4}$ :

$$1 + \frac{\lambda^2}{8} = 1 + \frac{1}{128} = 1,0078$$

$$\frac{3\lambda^2}{8} = \frac{3}{128} = 0,0234$$

отношение

$$\frac{0,0234}{1,0078} = 0,0232$$

таким образом, наибольшее значение II члена составляет всего 2—3% от наибольшего значения I члена, т. е. кривая зависимости  $M_o$  от  $\theta$  весьма близка к синусоиде.

### Усилия, вызываемые шатуном в двигателе.

Действующие со стороны шатуна усилия:  $X_c, Y_c, M''$  (фиг. 1).  
 Заменяем их силами ( $X_a, Y_a; X_b, Y_b$ ), приложенными в т.т. А и В.

Очевидно, при отсутствии сил трения

$$Y_a = 0$$

Условия замены

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= \text{const} \\ \Sigma Y &= \text{const} \end{aligned} \right\} \text{ или } \left. \begin{aligned} X_c &= X_a + X_b \\ Y_c &= Y_b \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\Sigma M_c = \text{const} \quad M'' = X_a \cdot a \cos \varphi - X_b \cdot b \cos \varphi - Y_b \cdot b \sin \varphi. \quad (16)$$

<sup>1)</sup>  $M$  отсчитывается по часовой стрелке, а  $\varphi$  — против нее, т. е. направления их противоположны.

откуда

$$\left. \begin{aligned} X_a &= \frac{M''}{L \cos \varphi} + \beta (X_c + Y_c \operatorname{tg} \varphi) \\ Y_a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} X_b &= -\frac{M''}{L \cos \varphi} + \alpha X_c - \beta Y_c \operatorname{tg} \varphi \\ Y_b &= Y_c \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставив значения  $M''$ ,  $X_c, Y_c$ ,  $\frac{1}{\cos \varphi}$  из ур-ий (13), (9), (2') — найдем:

$$1) \frac{M''}{L \cos \varphi} = -\frac{\lambda k^2 m \omega^2}{L} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} \right) \sin \theta - \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\theta \right] \cdot \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{4} \right) - \frac{\lambda^2}{4} \cos 2\theta \right]$$

или, т. к.

$$\sin \theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} (-\sin \theta + \sin 3\theta); \quad \cos 2\theta \sin 3\theta = \frac{1}{2} (\sin \theta + \sin 5\theta) \quad 1)$$

$$\frac{M''}{L \cos \varphi} = -\rho^2 m R \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{32} \right) \sin \theta - \left( \frac{3\lambda^2}{8} + \frac{3\lambda^4}{32} \right) \sin 3\theta + \left( \frac{\lambda^2}{8} + \frac{\lambda^4}{64} \right) (\sin \theta - \sin 3\theta) + \frac{3\lambda^4}{64} (\sin \theta + \sin 5\theta) \right]$$

При  $\lambda = \frac{1}{4}, \lambda^4 = \frac{1}{256}$ ; поэтому приближенно

$$\frac{M''}{L \cos \varphi} = -\rho^2 m R \omega^2 \left[ \left( 1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) \sin \theta - \frac{\lambda^2}{2} \sin 3\theta \right]$$

$$2) \beta (X_c + Y_c \operatorname{tg} \varphi) = \beta m R \omega^2 \left[ \alpha \sin \theta + (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \operatorname{tg} \varphi \right] = P$$

$\operatorname{tg} \varphi$  весьма близок по величине к  $\sin \varphi$ ; в самом деле, при

$$\theta = 90^\circ, \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \alpha = \frac{3}{4} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{4}$$

$$\varphi_{\max} = \arcsin (\lambda \sin 90) = 14,5^\circ;$$

$$\alpha \sin \theta + (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} \cdot 0,2586 = 0,7662$$

$$\alpha \sin \theta + (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \sin \varphi = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} \cdot 0,2504 = 0,7659$$

Заменив поэтому  $\operatorname{tg} \varphi$  через  $\sin \varphi$ , получим:

$$P = \beta m R \omega^2 [\alpha \sin \theta + (\cos \theta + \beta \lambda \cos 2\theta) \lambda \sin \theta]$$

1) См. примечание к стр. 92.

или, т. к.

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta; \quad \sin \theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} (-\sin \theta + \sin 3\theta)^1$$

$$P = mR\omega^2 \left[ (\alpha\beta - \frac{\beta^2\lambda^2}{2} \sin \theta + \frac{\beta\lambda}{2} \sin 2\theta + \frac{\beta^2\lambda^2}{2} \sin 3\theta) \right]$$

Обычно  $\beta$  близко по величине к  $\lambda$ ; при  $\beta = \lambda = \frac{1}{4}$ ,  $\frac{\beta^2\lambda^2}{2} = \frac{1}{512}$ ;

пренебрегая поэтому членами, содержащими  $\frac{\beta^2\lambda^2}{2}$ , получим:

$$P = \beta (X_c + Y_c \operatorname{tg} \varphi) = mR\omega^2 \left( \alpha\beta \sin \theta + \frac{\beta\lambda}{2} \sin 2\theta \right)$$

Точно так же найдем:

$$3) \alpha X_c - \beta Y_c \operatorname{tg} \varphi = mR\omega^2 \left( \alpha^2 \sin \theta - \frac{\beta\lambda}{2} \sin 2\theta \right)$$

Тогда ур-ия (17—18) примут вид:

усилия, действующие на стенки цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= mR\omega^2 \left[ \left( \alpha\beta - \rho^2 - \frac{\lambda^2\rho^2}{2} \right) \sin \theta + \frac{\beta\lambda}{2} \sin 2\theta - \frac{\lambda^2\rho^2}{2} \sin 3\theta \right] \\ Y_a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

усилия, действующие на цапфу кривошипа:

$$\left. \begin{aligned} X_b &= mR\omega^2 \left[ \left( \alpha^2 + \rho^2 + \frac{\lambda^2\rho^2}{2} \right) \sin \theta - \frac{\beta\lambda}{2} \sin 2\theta - \frac{\lambda^2\rho^2}{2} \sin 3\theta \right] \\ Y_b &= mR\omega^2 (\cos \theta + \beta\lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Проверка:

$$\left. \begin{aligned} \Sigma X &= mR\omega^2 (\alpha^2 + \alpha\beta) = \alpha mR\omega^2 = X_c \\ \Sigma Y &= Y_c \end{aligned} \right\} \quad (20')$$

## 2. Замена шатуна эквивалентной системой.

Заменяем теперь шатун, который мы до сих пор рассматривали, как физическое тело, состоящее из бесконечно-большого числа материальных точек, — эквивалентной фиктивной системой нескольких материальных точек. Под эквивалентной системой нужно понимать такую, которая под действием известных внешних сил будет двигаться так же, как двигалась бы действительная система, т.-е.: а) поступательное ускорение ее центра тяжести, вызываемое равнодействующей этих сил, совпадает по величине и направлению суско-

<sup>1)</sup> См. примеч. к стр. 92.

рением центра тяжести действительной системы в каждый данный момент, б) вращательное ускорение эквивалентной системы, вызываемое равнодействующим моментом сил, равно вращательному ускорению действительной системы под действием того же момента.

Для этого, как видно, необходимо выполнение следующих условий:

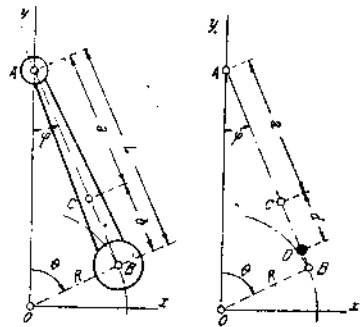
1) общая масса эквивалентной системы равна массе действительной системы;

2) центр тяжести эквивалентной системы совпадает с центром тяжести действительной системы;

3) момент инерции эквивалентной системы относительно ее центра тяжести равен моменту инерции действительной системы относительно той же точки.

Отсюда следует, что минимальное число материальных точек такой эквив. системы есть 2.

Составим для данного случая фиктивную эквив. систему, заменяющую действительную (шатуны), из двух матер. точек ( $m_a'$  и  $m_d'$ ), первую из которых поместим в т.  $A$ , т. е. на оси пальца поршня (фиг. 2); вторая матер. точка ( $m_d'$ ) должна лежать на прямой  $AB$ , т. к. их общий центр тяж. ( $C'$ ) должен быть также на прямой  $AB$ . Тогда, для соблюдения первых двух условий т.  $C'$  должна совпасть с т.  $C$ , а величины масс ( $m_a'$  и  $m_d'$ ) и их расстояния до т.  $C$  ( $a$  и  $d$ ) должны быть связаны с величиной массы шатуна ( $m$ ) и расстояниями его центра тяж. ( $C$ ) до т.т.  $A$  и  $B$  уравнениями:



Фиг. 2.

$$m_a' + m_d' = m \tag{21}$$

$$m_a' a = m_d' d \tag{22}$$

Для удовлетворения третьему условию кроме этого должно быть:

$$m_a' a^2 + m_d' d^2 = mk^2 \tag{23}$$

Ур-ие (23) ввиду ур-ия (22) можно переписать так:

$$m_a' da + m_d' ad = mk^2$$

т. е.

$$k^2 \doteq ad$$

Если распределение массы шатуна удовлетворяет условию:  $k^2 = ab$ , то получим:  $d = b$ , т. е. вторая масса ( $m_d'$ ) фиктивной эквив. системы

попадет в т. *B*, или: т. *D* совпадет с т. *B*. — Обычно, однако,  $k^2 - ab \neq 0$ , хотя эта разность мала, так что т. *D* находится весьма близко от т. *B*. Предположим (как это обычно делается), что рассматриваемый шатун удовлетворяет условию:  $k^2 = ab$ , т. е.  $d = b$ ; тогда ур-ия (21—23) примут вид:

$$m_a' + m_b' = m$$

$$m_a' a = m_b' b$$

$$k^2 = ab$$

откуда

$$m_a' = \beta m$$

$$m_b' = \alpha m$$

Усилия, действующие со стороны масс  $m_a'$  и  $m_b'$  на двигатель (в проекциях):

$$X_a' = -m_a' x_a'' \quad Y_a' = -m_a' y_a'' \quad \text{и т. д.}$$

или, в виду ур-ий (6) и (7):

$$\left. \begin{aligned} X_a' &= 0 \\ Y_a' &= \beta m R \omega^2 (\cos \theta + \lambda \cos 2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} X_b' &= \alpha m R \omega^2 \sin \theta \\ Y_b' &= \alpha m R \omega^2 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Суммы проекций всех сил на оси ( $Ox$ ,  $Oy$ ) и сумма моментов этих сил относительно т. *O*:

$$\Sigma X' = X_c; \quad \Sigma Y' = Y_c; \quad \Sigma M_o' = 0 \quad (26)$$

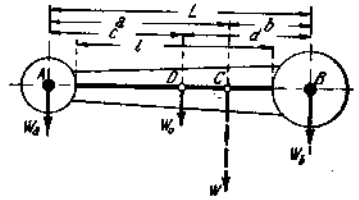
Сравнение ур-ий (24), (25), (26) с полученными ранее ур-иями (19), (20), (20'), (14) приводит к следующим заключениям:

При замене шатуна, удовлетворяющего условию:  $k = ab$ , эквивалентной фиктивной системой двух масс ( $m_a$  и  $m_b$ ), сосредоточенных в его двух конечных (кинематически) точках (*A* и *B*), общая картина усилий, действующих на двигатель от шатуна (равнодействующая сила и равнодействующий момент) сохраняется, но отдельные усилия, действующие со стороны шатуна в т.т. *A* и *B*, получаются неверными, не только по величине, но и по направлению. — Если же заменяемый такую же фиктивной системой шатун не удовлетворяет условию:  $k^2 = ab$  (что почти всегда и имеет место), то и общая картина усилий, вызываемых им в двигателе, искажается, именно — момент сил инерции шатуна относительно оси коленчатого вала оказывается равным нулю (ур. 26 и фиг. 3), чего нет на самом деле (ур. 14). В известных случаях (двух цилиндровый плоский двигатель, упоминавшийся вначале), как видно из приведенного ниже примерного расчета, искажение это может быть весьма значительно.

### 3. Определение величины $k^2 = ab$ .

Физический смысл ур-ия  $k^2 = ab$  тот, что шатун, удовлетворяющий этому условию, представляет „обратимый физический маятник“, т. е. при подвесе его в т. *A* он будет качаться с той же частотой, как и при подвесе в т. *B*; другими словами, длины „эквивалентных математических маятников“ для обоих случаев равны. Можно назвать такой шатун динамически уравновешенным, в отличие от другого, динамически неуравновешенного, т. е. не удовлетворяющего ур-ию  $k^2 = ab$ .

С вполне достаточной степенью точности можно считать массы головок ( $m_a$  и  $m_b$ ) сосредоточенными в тт. *A* и *B*, а массу тела ( $m_o$ ) — на отрезке *EF* прямой *AB* (фиг. 4). Величины этих масс и положение центра тяжести тела могут быть легко определены по чертежу шатуна.



Фиг. 4.

Положение центра тяжести шатуна:

$$a = \frac{W_o c + W_b L}{W}; \quad b = L - a \quad (27)$$

где  $W_a$ ,  $W_b$ ,  $W_o$  и  $W$  = веса верхней и нижней головок, тела и всего шатуна.

Момент инерции тела отн. его центра тяжести (*D*):

$$I_d^o = \frac{W_o}{g} \cdot \frac{l^2}{12}$$

то же — отн. центра тяж. шатуна (*C*):

$$I_c^o = I_d^o + \frac{W_o}{g} (a - c)^2 = \frac{W_o}{g} \left[ \frac{l^2}{12} + (a - c)^2 \right]$$

Момент инерции всего шатуна отн. его центра тяж. (*C*).

$$I_c = I_c^o + \frac{W_a}{g} a^2 + \frac{W_b}{g} b^2 = \frac{1}{g} \left\{ W_o \left[ \frac{l^2}{12} + (a - c)^2 \right] + W_a a^2 + W_b b^2 \right\}$$

Радиус инерции шатуна относительно его центра тяж. (*C*):

$$k = \sqrt{\frac{I_c}{m}} = \sqrt{\frac{g I_c}{W}}$$

или

$$k^2 = \frac{W_o \left[ \frac{l^2}{12} + (a - c)^2 \right] + W_a a^2 + W_b b^2}{W} \quad (28)$$



#### 4. Примерный расчет.

Рассмотрим случай плоского 2-цилиндрового двигателя с двух-коленчатым валом, обладающего значительными преимуществами в отношении уравновешенности и равномерности хода перед другими типами малоцилиндровых двигателей и поэтому часто применяемого для самых легких автомобилей (суслесарг) и самолетов (авиетки), моторных лодок (со съёмными моторами) и, иногда, мотоциклов.

Основные данные рассматриваемого двигателя:

наибольшая эффективная мощность . . . . .	$N_e = 10,7$ Л.С.
соответствующая скорость . . . . .	$n = 2500$ $\frac{\text{об}}{\text{мин}}$
диаметр цилиндров . . . . .	$D = 70$ мм
ход поршня . . . . .	$S = 84$ "
степень сжатия . . . . .	$E = 4,2$

Основные данные шатуна (фиг. 4):

длина шатуна . . . . .	$L = 158$ мм
положение ц. т. тела . . . . .	$c = 73$ "
вес шатуна . . . . .	$W = 0,707$ кг
вес верхней головки . . . . .	$W_a = 0,173$ "
вес нижней головки . . . . .	$W_b = 0,420$ "
вес тела . . . . .	$W_o = 0,114$ "

По ур-ням (27) находим:

$$a = \frac{114 \cdot 7,3 + 420 \cdot 15,8}{707} = 10,57 \text{ см}; \quad b = 15,8 - 10,6 = 5,23 \text{ см}$$

По ур. (28):

$$k^2 = \frac{114 \left[ \frac{11,4^2}{12} + (10,57 - 7,3)^2 \right] + 173 \cdot 10,57^2 + 420 \cdot 5,23^2}{707} = 47,1 \text{ см}^2$$

$$\lambda = \frac{8,4}{2 \cdot 15,8} + \frac{1}{3,76} = 0,266; \quad \alpha = \frac{10,57}{15,8} = 0,67;$$

$$\beta = \frac{5,23}{15,8} = 0,33; \quad \rho^2 = \frac{47,1}{15,8^2} = \frac{1}{5,3} = 0,189;$$

$$ab - k^2 = 10,57 \cdot 5,23 - 47,1 = 8,3 \text{ см}^2$$

Момент сил инерции, действующий на двигатель от обоих шатунов, по ур. (14):

$$M_o = 2 \cdot 8,3 \cdot 0,266 \cdot \frac{0,707}{981} \cdot 0,1047^2 \cdot 2500^2 \left[ \left( 1 + \frac{0,266^2}{8} \right) \cdot \sin \theta - \frac{3 \cdot 0,266^2}{8} \sin 3\theta \right]$$

или:

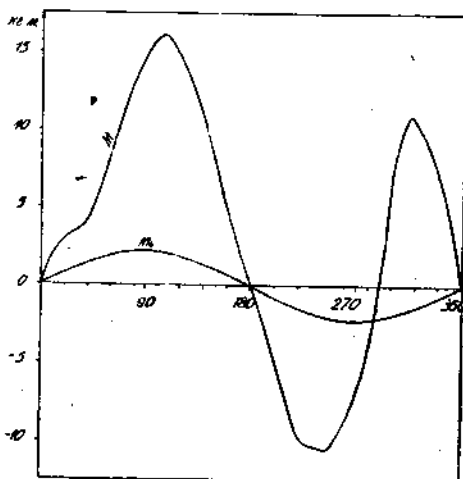
$$M_o = 226 \sin \theta - 5,8 \sin 3\theta \text{ (кг см)} \quad (29)$$

Наиб. величина II члена составляет всего  $\frac{5,8 \cdot 100}{226} = 2,57\%$  от наибольшей величины I члена. — Наибольшее значение  $M_0$  — при  $\phi = 90^\circ$ :

$$M_{0_{max}} = 226 + 5,8 \cong 232 \text{ кг см}$$

Среднее значение вращающего момента двигателя при наибольшей мощности:

$$M = 71\,620 \cdot \frac{10,7}{2\,500} = 306 \text{ кг см}; \quad \frac{M_{0_{max}}}{M} \cdot 100 = \frac{232}{306} \cdot 100 = 76\%.$$



Фиг. 5.

Величины  $M_0$  по ур. (29) и  $M$  (вращающий момент сил давления газов и сил инерции прямолинейно движущихся частей от обоих цилиндров) в зависимости от угла поворота коленчатого вала нанесены на диаграмме фиг. 5.

Отдельные усилия, действующие в двигателе от каждого шатуна.

А. Шатун, рассматриваемый, как действительное физическое тело (фиг. 1).

Находим:

$$mR\omega^2 = \frac{0,707}{981} \cdot \frac{8,4}{2} \cdot 0,011 \cdot 2\,500^2 = 208 \text{ кг}$$

$$\alpha\beta = 0,67 \cdot 0,33 = 0,221 \quad \beta\lambda = 0,33 \cdot 0,266 = 0,088$$

$$\rho^2 = 0,189 \quad \alpha^2 = 0,67^2 = 0,449$$

$$\frac{\lambda^2 \rho^2}{2} = \frac{0,266^2 \cdot 0,189}{2} = 0,007$$

$$\frac{\beta\lambda}{2} = \frac{0,33 \cdot 0,266}{2} = 0,044$$

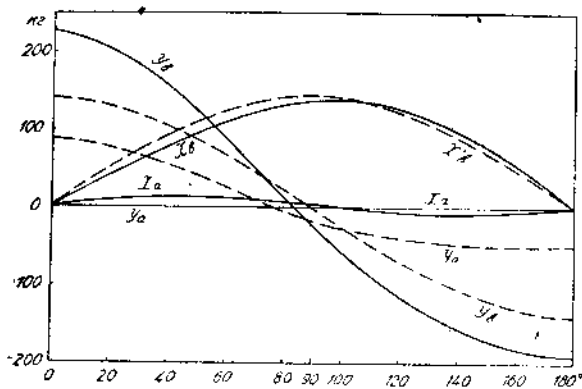
Усилия, действующие на стенки цилиндра, по ур. (17):

$$X_a = 208 [(0,221 - 0,189 - 0,007) \sin \theta + 0,044 \sin 2\theta + 0,007 \sin 3\theta]$$

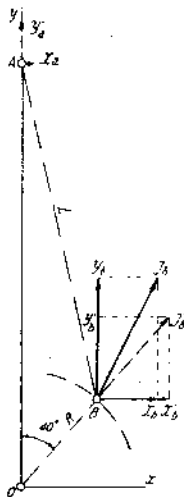
или

$$X_a = 5,20 \sin \theta + 9,15 \sin 2\theta + 1,45 \sin 3\theta$$

$$Y_a = 0$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Усилия, действующие на шатунную шейку коленчатого вала, по ур. (18):

$$X_b = 208 [(0,449 + 0,189 + 0,007) \sin \theta - 0,044 \sin 2\theta - 0,007 \sin 3\theta]$$

$$Y_b = 208 (\cos \theta + 0,088 \cos 2\theta)$$

или

$$X_b = 134,0 \sin \theta - 9,15 \sin 2\theta - 1,45 \sin 3\theta$$

$$Y_b = 208 \cos \theta + 18,3 \cos 2\theta$$

Величины этих усилий, по полученным ф-лам, нанесены на диаграмме фиг. 6, и для  $\theta = 40^\circ$  — на фиг. 7.

Б. Шатун заменен фиктивной системой двух масс (фиг. 3).

Усилия, действующие на двигатель от каждого шатуна, по ур. (24—25):

$$X'_a = 0$$

$$Y'_a = 0,33 \cdot 208 (\cos \theta + 0,266 \cos 2\theta)$$

$$X'_b = 0,67 \cdot 208 \sin \theta$$

$$Y'_b = 0,67 \cdot 208 \cos \theta$$

или

$$X'_a = 0$$

$$Y'_a = 68,6 \cos \theta + 18,2 \cos 2\theta$$

$$X'_b = 139 \sin \theta$$

$$Y'_b = 139 \cos \theta$$

Величины этих усилий нанесены для сравнения пунктиром на диаграмме фиг. 6, и для  $\theta = 40^\circ$  — на фиг. 7.

Обычно при оценке и расчете общей уравновешенности двигателя производится „приведение“ массы шатуна к центрам его головок; при этом массу прямолинейно движущихся частей составляют масса поршня и часть массы шатуна, приведенная к верхней головке (оси пальца поршня); массу вращающихся частей — неуравновешенные части коленчатого вала (шатунная шейка и щеки) и часть массы шатуна, отнесенная к нижней головке.

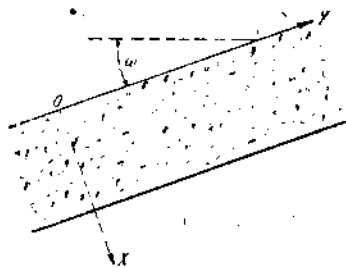
Если же при расчетах динамики мотора рассматривать движение шатуна в целом, как это сделано в первой части настоящей статьи (т. е. пользуясь ур-нями 14, 19 и 20), то, очевидно, под массой прямолинейно движущихся частей в обычных уравнениях следует понимать уже лишь массу поршневого агрегата, а под массой вращающихся частей — массу неуравновешенных частей коленчатого вала. В этом случае усилия и моменты, полученные в результате исследования движения шатунов вышеизложенным путем, должны быть прибавлены к соответственным величинам, полученным для прямолинейно движущихся и вращающихся частей, понимаемых в указанном смысле.

Апрель 1928 г.

# Уравнения для напряжений в неограниченном пласте сыпучего тела и их применение к расчету давления на подпорные стенки.

Ю. И. Ягн.

Наиболее простую задачу в статике сыпучих тел и грунтов представляет случай неопределенно далеко простирающегося пласта сыпучего тела, ограниченного двумя параллельными плоскостями, составляющими с горизонтом некоторый угол  $\omega$ , меньший угла естественного откоса  $\varphi$  (рис. 1).



Фиг. 1.

При условии однородности пласта напряжения будут линейными функциями одной координаты  $x$ , определяющей расстояние точки от плоскости верхнего откоса, т. е. они выражаются уравнениями;

$$p_{nx} = a_1 x + b_1; \quad (1)$$

$$p_{ny} = a_2 x + b_2; \quad (2)$$

$$p_t = a_3 x + b_3. \quad (3)$$

Свободные члены  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  определяются по условиям на плоскости верхнего ограничения. Если верхняя плоскость свободна то получим:

$$p_{nx} = a_1 x; \quad (4)$$

$$p_{ny} = a_2 x; \quad (5)$$

$$p_t = a_3 x. \quad (6)$$

В случае загруженного верхнего откоса всегда возможно, при помощи соответствующего перемещения ось  $y$ , получить уравнения для напряжений без свободных членов.

В дальнейшем предположено, что ось  $y$  занимает такое положение.

По условиям равновесия слоя, отделенного какой-либо плоскостью, параллельной откосу ( $x = \text{const}$ ), коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  могут быть определены в зависимости от веса единицы объема сыпучей массы  $\delta$  и от угла  $\omega$  наклона пласта к горизонту.

Тогда выражения для напряжений представятся в виде:

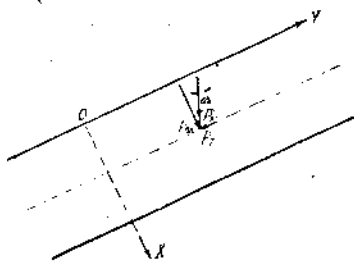
$$p_{nx} = -\delta x \cos \omega; \quad (4')$$

$$p_{ny} = a_2 x; \quad (5')$$

$$p_t = \delta x \sin \omega. \quad (6')$$

Коэффициент  $a_2$  является статически неопределенным.

Величину  $a_2$  можно определить только при помощи исследования деформации. Опыты показывают, что в сыпучих телах существуют упругие деформации, приблизительно следующие закону пропорциональности („Erdbaumechanik auf bodenphysikalische Grundlage“ D. I. K. Terzaghy“ 1925).



Фиг. 2.

Поэтому, после того, как в сыпучей массе совершились всевозможные при данной нагрузке остаточные деформации, ее можно рассматривать, как упругую среду, деформация которой пропорциональна напряжениям, и тогда для исследования напряженного

состояния можно пользоваться методами теории упругости.

Для неограниченного пласта, вследствие предположенной линейной зависимости напряжений от одной координаты  $x$ , можно положить:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 x; \quad (9)$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_2 x; \quad (10)$$

$$e_z = 0$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 x; \quad (11)$$

$$e_{xz} = e_{yz} = 0;$$

Интегрируя уравнения (9) и (10), находим:

$$u = \frac{\alpha_1 x^2}{2} + \varphi(y); \quad (12)$$

$$v = \alpha_2 xy + \psi(x); \quad (13)$$

где  $\varphi(y)$  — произвольная функция одного  $y$ , а  $\psi(x)$  — произвольная функция одного  $x$ .

Дифференцируя (12) по  $y$ , а (13) по  $x$  и подставляя в (11) получим:

$$\varphi'(y) + \alpha_2 y + \psi'(x) = \alpha_3 x \quad (14)$$

или:

$$\varphi'(y) + \alpha_2 y = -\psi'(x) + \alpha_3 x. \quad (15)$$

Вследствие того, что это равенство должно быть справедливо при всех значениях  $x$  и  $y$ , необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned} \varphi'(y) + \alpha_2 y &= C; \\ -\psi'(x) + \alpha_3 x &= C, \end{aligned}$$

откуда:

$$\varphi(y) = -\frac{\alpha_2 y^2}{2} + Cy + D_1; \quad (16)$$

$$\psi(x) = \frac{\alpha_3 x^2}{2} - Cx + D_2; \quad (17)$$

После подстановки  $\varphi(y)$  и  $\psi(x)$  перемещения  $u$  и  $v$  представляются уравнениями:

$$u = \frac{\alpha_1 x^2}{2} - \frac{\alpha_2 y^2}{2} + Cy + D_1; \quad (18)$$

$$v = \alpha_2 xy + \frac{\alpha_3 x^2}{2} - Cx + D_2. \quad (19)$$

Коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $C$ ,  $D_1$  и  $D_2$  должны быть выбраны так, чтобы решения (18) и (19) удовлетворяли уравнениям теории упругости и пограничным условиям.

Для плоскости основания пласта имеем:

$$x = h, \quad u = v = 0.$$

т.-е.

$$\frac{\alpha_1 h^2}{2} - \frac{\alpha_2 y^2}{2} + Cy + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad (20)$$

$$\alpha_2 hy + \frac{\alpha_3 h^2}{2} - Ch + D_2 = 0. \quad (21)$$

Эти условия должны быть выполнены при всех значениях  $y$ , что возможно только, когда

$$\alpha_2 = 0, \quad C = 0, \quad D_1 = -\frac{\alpha_1 h^2}{2}, \quad D_2 = -\frac{\alpha_3 h^2}{2}.$$

Уравнения для перемещений принимают вид:

$$u = \frac{\alpha_1}{2} (x^2 - h^2) \quad (22)$$

$$v = \frac{\alpha_3}{2} (x^2 - h^2). \quad (23)$$

К этим уравнениям следует прибавить:

$$w = 0 \quad (24)$$

Величина и направление смещения  $s$  (рис. 3) в каждой точке найдутся по уравнениям:

$$s = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{u} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \quad (26)$$

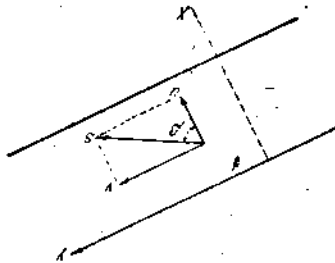
Вследствие того, что  $\operatorname{tg} \beta$  постоянен, все точки пласта должны получить параллельно направленные перемещения.

Найденные выражения для перемещений должны удовлетворять уравнениям теории упругости:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla u + X = 0; \quad (27)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla v + Y = 0; \quad (28)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla w + Z = 0; \quad (29)$$



Фиг. 3.

Вводя вместо коэффициентов Ла ме модуль касательной упругости  $G$  и коэффициент Пуассона  $\sigma$ :

$$\lambda = \frac{2\sigma G}{1 - 2\sigma}; \quad (30)$$

$$\mu = G; \quad (31)$$

получим уравнения теории упругости в следующем виде:

$$\frac{G}{1 - 2\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla u + X = 0; \quad (27')$$

$$\frac{G}{1 - 2\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla v + Y = 0; \quad (28')$$

$$\frac{G}{1 - 2\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla w + Z = 0; \quad (29')$$

Подстановка:

$$u = \frac{\alpha_1}{2} (x^2 - h^2); \quad v = \frac{\alpha_2}{2} (x^2 - h^2); \quad w = 0; \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha_1 x;$$

$$X = \delta \cos \omega; \quad Y = -\delta \sin \omega; \quad Z = 0$$

даст:

$$\frac{G}{1 - 2\sigma} \alpha_1 + G \alpha_1 + \delta \cos \omega = 0; \quad (27'')$$

$$G \alpha_2 - \delta \sin \omega = 0; \quad (28'')$$

$$0 = 0 \quad (29'')$$

<sup>1</sup> На рисунке для общности предположены оба перемещения положительными, в действительности перемещение  $v$  будет отрицательным и полное перемещение  $\theta$  пойдет, как показано на рис. 4.



Откуда:

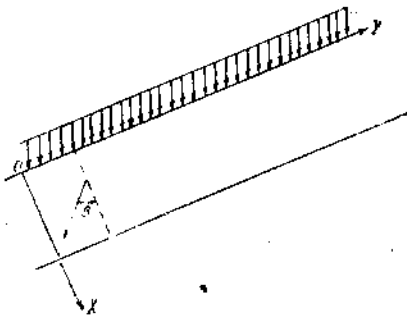
$$\alpha_1 = -\frac{\delta \cos \omega (1 - 2\sigma)}{2G(1 - \sigma)}; \quad (32)$$

$$\alpha_3 = \frac{\delta \sin \omega}{G}; \quad (33)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1 x = -\frac{\delta x \cos \omega (1 - 2\sigma)}{2G(1 - \sigma)} \quad (34)$$

$$e_y = e_z = 0$$

$$e_{xy} = e_{yz} = 0 \quad e_{xy} = \alpha_3 x = \frac{\delta x \sin \omega}{G} \quad (35)$$



Фиг. 4.

Теперь могут быть найдены и все напряжения:

$$p_{xx} = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma \theta}{1 - 2\sigma} \right) = -2G \left[ \frac{\delta x \cos \omega (1 - 2\sigma)}{2G(1 - \sigma)} + \frac{\sigma \delta x \cos \omega (1 - 2\sigma)}{2G(1 - \sigma)(1 - 2\sigma)} \right] = -\delta x \cos \omega; \quad (36)$$

$$p_{yy} = 2G \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma \theta}{1 - 2\sigma} \right) = -2G \frac{\sigma \delta x \cos \omega (1 - 2\sigma)}{2G(1 - \sigma)(1 - 2\sigma)} = -\delta x \cos \omega \frac{\sigma}{1 - \sigma}; \quad (37)$$

$$p_{zz} = 2G \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma \theta}{1 - 2\sigma} \right) = p_y = -\delta x \cos \omega \frac{\sigma}{1 - \sigma}; \quad (38)$$

$$p_{xy} = G e_{xy} = \delta x \sin \omega; \quad (39)$$

Уравнение (37) дает напряжение  $p_{yy}$ , которое, как отмечено было вначале, является величиной статически неопределенной. Коэффициент Пуассона  $\sigma$  можно определять, например, измеряя при упругой деформации равномерно нагружаемого сверху пласта угол, который составят перемещения  $z$  точек пласта с осью  $X$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \right| = \frac{\sigma(1 - \sigma)}{1 - 2\sigma} \operatorname{tg} \omega,$$

откуда

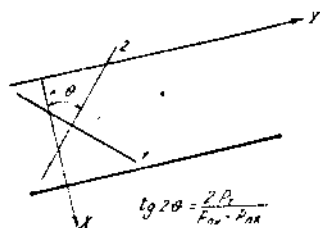
$$\sigma = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \omega}{2(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \omega)}$$

Чтобы иметь возможность судить, какие численные результаты можно ожидать получить от найденного решения для  $p_{yy}$  (37), ниже

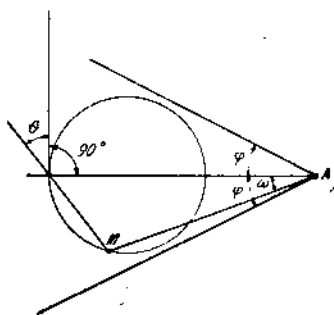
приведены величины отношения  $\frac{p_{ny}}{p_{nx}}$  при некоторых значениях  $\sigma$  и, для сравнения, указаны углы трения  $\varphi$ , при которых из уравнения Ренкина (для горизонтального пласта) получается та же величина  $\frac{p_{ny}}{p_{nx}}$

$\sigma$	$\frac{p_{ny}}{p_{nx}}$	$\varphi$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$30^\circ$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$19^\circ 40'$
$\frac{1}{2}$	1	$0^\circ$

Когда  $\sigma$  известно, по найденным уравнениям (36), (37), (38), и (39) вычисляются все напряжения в осях  $xuz$ , а затем по известным формулам могут быть определены главные оси и главные напряжения, а также напряжения на любой плоскости сечения.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

Построение главных осей показано на рисунке (5). Угол поворота главных осей может быть определен аналитически или графически при помощи круга Mohr'a, (см. рис. 11).

Направление перемещения  $s$  связано с положением главных осей очень простой геометрической зависимостью.

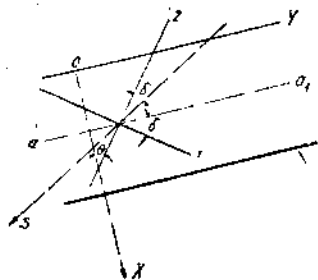
Из параллельности перемещений во всех точках пласта и равенства их между собой для точек, одинаково удаленных от плоскости верхнего ограничения, следует, что все плоскости, параллельные плоскости ограничения, перемещаются параллельно самим себе. Кроме того, плоскости, совпадающие с направлением перемещения, очевидно, вовсе не получают смещения.

Поэтому углы между плоскостями, параллельными верхнему откосу, и направлением перемещения  $s$  при деформации не будут

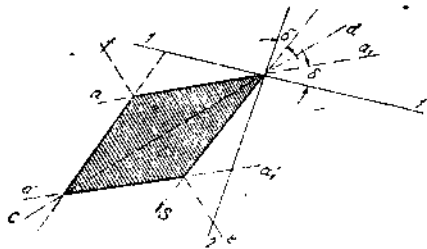
изменяться, что возможно только в том случае, если направление  $aa_1$ , параллельное плоскости откоса, и направление перемещения  $s$  будут составлять с главными осями напряжений равные по величине и противоположные по знаку углы  $\delta$  (рис. 7).

Действительно, при этом условии в элементе, выделенном по направлениям  $aa_1$  и  $s$  (рис. 8), диагонали  $cd$  и  $ef$  будут являться осями макс. и миним. скальвующего напряжения, по которым действуют равные нормальные напряжения. Вследствие этого диагонали будут получать равные относительные удлинения и углы при вершинах элемента (при условии ничтожной малости изменения угла между диагоналями) не изменятся.

Проводя прямую  $aa_1$ , параллельную откосу, и откладывая угол  $\delta$ , который она составляет с главной осью 1 от оси 2, находим направление перемещения  $s$ .



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Уравнения для перемещений  $u$  и  $v$  оказались второго порядка. Все плоскости, за исключением совпадающих с направлением смещения  $s$  и параллельных плоскостям ограничения пласта, при деформации искривляются, при чем плоскости, совпадающие с  $s$  хотя и не искривляются, но они подвергаются сжатию, и только плоскости, параллельные ограничениям пласта, перемещаются, не претерпевая никакой деформации. Поэтому, если представить себе, что в пласте до деформации была установлена плоская не деформирующаяся стенка, то только в одном случае, если она была параллельна плоскостям ограничения пласта, она не вызовет нарушения характера деформации и распределения напряжений.

При всяком ином положении стенки для сокращения характера деформации необходимо, чтобы она совершала деформацию в соответствии с деформацией пласта, что практически не осуществимо.

Правда, если предположить, что пласт перерезается стенкой после того, как деформация в нем совершилась, если стенка абсолютно жестка и неподвижна и при установке ее никаких изменений в деформации сыпучей массы не произошло, то давление, производимое сыпу-

чим телом на стенку, будет такое же, какое было по плоскости, занимаемой стенкой в неограниченном пласте.

Однако такой случай совершенно нереален.

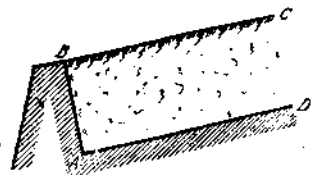
При установке стенки непременно произойдет некоторое движение прилегающих частей самой массы и затем после установки стенки, вследствие ее деформации и оседания, получатся еще некоторые перемещения.

При этом распределение напряжений в сыпучей массе должно будет подвергнуться изменению.

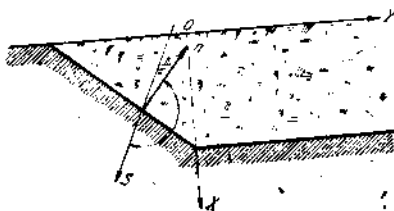
Точное решение задачи определения давления засыпки на стенку возможно только при помощи исследования деформации.

Перемещения должны удовлетворять общим уравнениям теории упругости обращаться в нуль на плоскостях  $AD$  и равняться перемещениям стенки на плоскости  $AB$ . Кроме того на плоскости  $BC$  напряжения должны равняться заданной величине.

Если все же избирается путь приближенного решения и, как это рекомендует профессор O. Mohr [Abhandlungen a. d. Gebiete der Technischen Mechanik, Berlin, 1906, Seite 233], при расчетах давления на стенки допустить применение уравнений для неограниченного пласта, то ими приближенно можно пользоваться далеко не с одинаковым правом для всех наклонов стенок.



Фиг. 9.

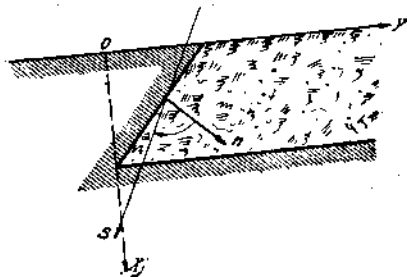


Фиг. 10.

Легко убедиться, что для стенок, отклоняющихся от направления  $\alpha$  в одну и в другую сторону, будут получаться совершенно различные условия в отношении степени применимости к ним допущения.

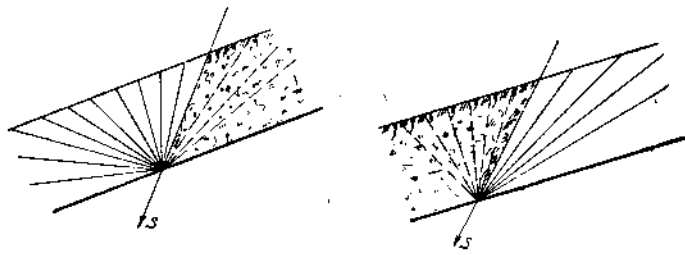
В случае, когда внешняя нормаль к стенке составляет с перемещением  $\alpha$  тупой угол (рис. 10), то, если предположить, что в сыпучем теле происходит такая же деформация, какая получается в неограниченном пласте, стенка должна будет совершать перемещения, направленные наружу от сыпучей массы, что возможно. В другом

случае, когда внешняя нормаль к стенке составляет с перемещением острый угол (рис. 11), точки стенки должны будут надвигаться на сыпучую массу вопреки действия нагрузки, сами проявляя активность, что без дополнительных сил, действующих на стенку, невозможно.



Фиг. 11.

Таким образом можно сказать: при направлениях стенки, когда угол  $(s, n)$  больше  $\frac{\pi}{2}$ , то, при известном соответствии между упругими свойствами стены и сыпучей массы, возможно при наличии стенки сохранение в сыпучей массе напряженного состояния, возникающего в неопределенно простирающемся пласте, а когда угол  $(s, n)$  меньше  $\frac{\pi}{2}$ , то при пассивной стенке в сыпучей массе не может быть напряженного состояния, найденного для бесконечного слоя.



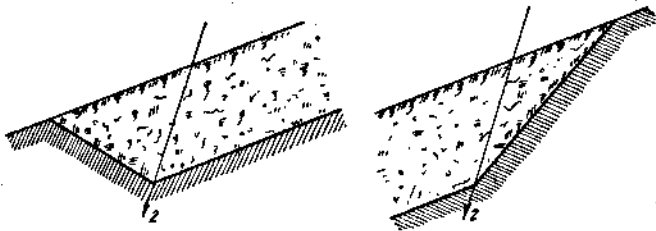
Фиг. 12.

Поэтому, во всяком случае для стенок, внешняя нормаль к которым составляет с перемещением  $s$  острый угол, пользоваться для расчета давлений на них уравнениями для напряжений в бесконечном пласте нельзя.

Поэтому к таким стенкам нельзя применять ни уравнения Ренкина, ни выведенного нами уравнения (37).

На рис. 12 показаны сплошными линиями стенки для  $\angle(s, n) > \frac{\pi}{2}$  и пунктиром для  $\angle(s, n) < \frac{\pi}{2}$ , при чем на левом рисунке слой предполагается ограниченным слева, а на правом—справа.

Полученный вывод разошелся с предположением проф. О. Mohr (см. выше упомянутую статью), что границу для углов наклона, при которых уравнение Рейкина применимо, определяет направление большего главного напряжения. По О. Mohr стенку можно рассчитывать по Рейкину, если направление 2-го [большого по абсол. вел.] главного напряжения, проведенное из основания стенки (рис. 13), проходит со стороны сыпучей массы.



Фиг. 13.

Это требование противоречит нашему только в пределах того угла, на который расходятся направление перемещения  $s$  и направление главного напряжения 2.

Для горизонтального пласта этот угол равен нулю и потому для этого частного случая критерий О. Mohr и только что найденный совпадают, а для наклонного пласта они расходятся и тем больше, чем значительнее наклон.

**The equations for the stresses in an unlimited layer of dry substance and their application to the calculation of the pressure upon the retaining walls.**

*J. Jagn.*

In the present article we offer a solution of the question of the state of stresses in an unlimited layer of dry substance or ground obtained by means of investigating the deformation. The deduction is based upon the supposition that there exists a proportional relation between the stresses and the relative elongations and shears.

Instead of Rankin's equation the solution gives the following equation for the normal stress parallel to the layer (see fig. 1):

$$p_{ny} = \delta x \frac{\sigma}{1 - \sigma} \cos \omega,$$

where  $\delta$  is volum weight,  $\sigma$  — Poisson's coefficient,  $\omega$  — angle of inclination between the layer and the horizon.

Besides the author expresses the following hypothesis: if the equation for the stresses in an unlimited layer be used approximately for calculating the pressure upon the retaining wall — it may be supposed, that the error which is likely to occur will be less considerable if the outer side of the normal to the wall forms an obtuse angle with the direction of the displacement of the deformation of the layer. But the error will be more considerable if this angle is an acute one. Therefore in this latter case it is not admissible to use the equations for stresses in an unlimited layer when computing the pressure upon the wall. In this respect the author differs from Prof. O. Mohr, who believed it were not possible to use the equation of Rankin deduced for an unlimited layer, when the normal to the wall forms an acute angle not with the displacement but with the main tension (see fig. 13).

## К вопросу о движении шара в вязкой жидкости.

А. И. Лурье.

1. В основу многочисленных исследований механики и молекулярной физики кладется закон Стокса, дающий выражение для сопротивления жидкости движущемуся в ней шару. В настоящей заметке мы хотели бы осветить один вопрос, который, насколько нам известно, в этих исследованиях не был затронут. Дело в том, что формула сопротивления Стокса выводится из основных уравнений гидродинамики вязкой жидкости в предположении прямолинейного движения в ней шара с заданной постоянной по величине скоростью. При движении же шара в некотором силовом поле (напр., в поле силы тяжести) условия применимости формулы Стокса очевидно отпадают и она должна быть заменена формулой более общего вида, выведенной Boussinesq'ом (*Théorie analytique de la chaleur*, Т. II) и Oseen'ом (*Hydrodynamik*). Нам представляется поэтому не безинтересным изучить движение шара под влиянием этой силы сопротивления Boussinesq'a—Oseen'a тем более, что разбираемая задача имеет и некоторый аналитический интерес, давая пример применения интегрального уравнения типа Volterra к вопросу механики.

Согласно Boussinesq'у и Oseen'у имеем:

$$k(t) = \frac{2\pi}{3} \rho R^3 \frac{dv}{dt} + 6\pi\mu Rv + 6\sqrt{\pi\mu\rho}R^3 \int_0^t \frac{dv(t_0)}{dt_0} \frac{dt_0}{\sqrt{t-t_0}}, \quad (1)$$

где  $k(t)$ — сила сопротивления,  $v$ — скорость шара,  $R$ —его радиус,  $\rho$ — плотность жидкости и  $\mu$  ее коэффициент вязкости. При этом предполагается, что

$$v(0) = 0, \quad (2)$$

ибо в противном случае  $k(t)$  не было бы конечно, при  $t=0$  (см. Oseen I. cit. стр. 134).



В дальнейшем будет разобран тот случай, когда внешняя сила зависит лишь от времени (в частном случае постоянна).

Уравнение поступательного движения шара имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = f_1(t) - k(t), \quad (3)$$

где

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho_1 R(t) — \text{масса шара,}$$

$f_1(t)$  — внешняя сила на него действующая.

Введя обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = w, \quad \frac{f_1(t)}{\frac{4\pi R^3}{3} \left( \rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)} = f(t), \\ \frac{9\mu}{2R^2 \left( \rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)} = \alpha^2, \quad \frac{9\sqrt{\mu\rho}}{2R \left( \rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)} = \beta^2 \end{aligned} \quad (4)$$

перепишем (3) в виде:

$$w + \alpha^2 \int_0^t w(t_0) dt_0 + \frac{\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{w(t_0) dt_0}{\sqrt{t-t_0}} = f(t), \quad (5)$$

ибо в силу (2) и (3)

$$\int_0^t w(t_0) dt_0 = v(t)$$

2. Переходя к уравнению (5), докажем предварительно теорему: пусть  $a(t)$  есть решение уравнения (5), в котором  $f(t)$  заменено единицей, т. е. уравнения:

$$a(t) + \alpha^2 \int_0^t a(t_0) dt_0 + \frac{\beta^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a(t_0) dt_0}{\sqrt{t-t_0}} = 1 \quad (6)$$

В таком случае решение уравнения (5) будет:

$$w(t) = f(0) a(t) + \int_0^t \frac{df(t_0)}{dt_0} a(t-t_0) dt_0. \quad (7)$$

Доказательство этой теоремы, которое мы здесь опускаем, получается непосредственной подстановкой (7) в (5) при условии (6). Перемена порядка интегрирования производится при этом на основании

известной формулы Дирихле (см., например, Goursat, Cours d'analyse I, § 124).

Наша задача сводится, таким образом, к решению ур. (6). Наиболее простой путь для этого есть применение преобразования Лапласа (см. В. А. Фок, Математический сборник, 1925). Умножая обе части (6) на  $e^{-st}$  и интегрируя по  $t$  в пределах от 0 до  $\infty$ , получим:

$$A(s) \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{s^2} + \frac{\beta^2}{s} \right] = \frac{1}{s^2} \quad (8)$$

где

$$A(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt \quad (9)$$

Подробностей вывода (8) также нет нужды здесь приводить. Дело сведется опять таки к применению только что упомянутой формулы Дирихле и к простым преобразованиям.

Согласно (8) и (9) мы получаем теперь:

$$A(s) = \frac{1}{s^2 + \beta^2 + \alpha^2} = \int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt \quad (10)$$

и определение  $a(t)$  связано с решением интегрального уравнения Лапласа (10). Мы воспользуемся для этого методом, предложенным Я. Д. Тамаркиным (Transactions of American Math. Soc., 28, 1926). Заметим предварительно, что корни  $s_1$  и  $s_2$  уравнения:

$$A(s) = s^2 + \beta^2 + \alpha^2 = 0$$

имеют отрицательную вещественную часть. Исследование знака дискриминанта этого уравнения показывает, что при  $\rho < 1,6\rho_1$   $s_1$  и  $s_2$  суть числа комплексные и сопряженные, при  $\rho > 1,6\rho_1$  они вещественны (и отрицательны); наконец,  $\rho = 1,6\rho_1$ ,  $s_1 = s_2$  (см. (4)).

Мы имеем далее:

$$A(s) = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

откуда следует, что функция

$$A(-is) = \frac{1}{(s - is_1)(s - is_2)}$$

не имеет полюсов в верхней полуплоскости  $Im s > 0$ .

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 a(t) &= -\frac{i}{\pi} \int_{(L)} e^{-zt} A(-iz) z dz = \\
 &= \frac{i}{\pi (s_1 - s_2)} \left\{ s_1 \int_{(L)} \frac{e^{-zt} dz}{z - is_1} - s_2 \int_{(L)} \frac{e^{-zt} dz}{z - is_2} \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

при чем за путь интегрирования  $(L)$  берется любая кривая в верхней полуплоскости, уходящая обоими концами в бесконечность. Решение (11) мы построили, непосредственно основываясь на способе Тамаркина. Здесь мы ограничимся лишь проверкой, что (11) действительно решает уравнение (10). В самом деле мы имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \int_{(L)} e^{-zt} A(-iz) z dz = \\
 &= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} z A(-iz) dz \int_0^{\infty} e^{-(s^1 + z^1)t} dt ;
 \end{aligned}$$

порядок интегрирования можно менять, т. к. интеграл (10) сходится равномерно и абсолютно при  $t > 0$ . Мы получаем:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt &= \frac{-i}{\pi} \int_{(L)} \frac{z A(-iz) dz}{z^2 + s^2} = \\
 &= \frac{i}{\pi} \int_{(L)} \frac{z A(-iz) dz}{(z + is)(z - is)}
 \end{aligned}$$

Подынтегральная функция имеет в верхней полуплоскости единственный полюс  $z = is$  (см. выше относительно  $A(-iz)$ ). С другой стороны, интеграл, взятый по полуокружности, проведенный в верхней полуплоскости и образующий вместе с  $(L)$  замкнутый контур, стремится к нулю при возрастании радиуса этой полуокружности.

На основании теоремы Коши, мы получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} a(t) dt = 2\pi i \frac{(-i)}{\pi} \frac{iA(s)s}{2is} = A(s)$$

что и требовалось доказать.

3. Заметим, что решение даваемое формулой (11) может быть приведено к известным функциям. Введем для этого обозначение:

$$\varphi(x) = \int_{(L)} \frac{e^{-z^2} dz}{z-x} \quad (12)$$

где  $\text{Im}x < 0$ . В таком случае будем иметь:

$$a(t) = \frac{i}{\pi(s_1 - s_2)} \left\{ s_1 \varphi(is_1 \sqrt{t}) - s_2 \varphi(is_2 \sqrt{t}) \right\}$$

Изучим функцию  $\varphi$ . Так как подынтегральная функция голоморфна в верхней полуплоскости, то путь  $(L)$  мы можем всегда переместить так, чтобы  $\left| \frac{x}{z} \right| < 1$ .

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{(L)} e^{-z^2} \left( \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots \right) dz = \sum_{s=0}^{\infty} x^{2s} \int_{(L)} \frac{e^{-z^2}}{z^{2s+1}} dz + \\ &+ \sum_{s=0}^{\infty} x^{2s+1} \int_{(L)} \frac{e^{-z^2}}{z^{2s+2}} dz. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь соотношениями:

$$\begin{aligned} \int_{(L)} \frac{e^{-z^2}}{z^{2s+1}} dz &= \frac{(-1)^{s+1} \pi i}{s!}, \\ \int_{(L)} \frac{e^{-z^2}}{z^{2s+2}} dz &= \frac{(-1)^{s+1} \pi}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)} \end{aligned}$$

легко выводимы из представления по Hankel'ю функций Гамма помощью контурного интегрирования (Whittaker, Modern Analysis, стр. 238).

Получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -i\pi \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^s}{s!} - \\ &- \pi x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^s}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)} = -i\pi e^{-x^2} - \sqrt{\pi} \theta(-x^2) \end{aligned}$$

при чем ряд:

$$\vartheta(z) = \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)}$$

может быть легко просуммирован.

В самом деле, замечая, что

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)} = \frac{s}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)},$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta(z)}{dz} &= \sqrt{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right)} - \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{s-1}}{\Gamma\left(\frac{2s+3}{2}\right)} = \frac{1}{z} + \frac{2z-1}{2z} \vartheta(z) \end{aligned}$$

и интеграл дифференциального уравнения:

$$\frac{d\vartheta(z)}{dz} = \frac{1}{z} + \frac{2z-1}{2z} \vartheta(z),$$

удовлетворяющий условию  $\vartheta(0) = 2$ , будет:

$$\vartheta(z) = \frac{e^z}{\sqrt{z}} \int_0^z \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du.$$

Собирая эти результаты, придем после ряда очевидных выкладок, которые вполне могут быть здесь опущены, к следующему выражению для искомого решения:

$$a(t) = \frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ s_1 e^{s_1 t} \psi(-s_1 \sqrt{t}) - s_2 e^{s_2 t} \psi(-s_2 \sqrt{t}) \right\}, \quad (14)$$

где

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2} du; \quad (\operatorname{Re} x > 0) \quad (15)$$

Для вещественных корней  $s_1$  и  $s_2$  ( $\rho > 1,6\rho_1$ ) наше решение выражено через хорошо известную и табулированную функцию  $\psi$  (см. наприм., Jahnke-Emde стр. 31). Для комплексных же корней для вычисления  $\psi$  проще всего воспользоваться рядом (13а).

При больших  $t$ , воспользовавшись асимптотическим разложением функции  $\psi$ , имеющим силу и для комплексного аргумента ( $\text{Re}x > 0$ ), получим:

$$a(t) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{\beta^2}{\alpha^4} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot t} \frac{\beta^4 - 2\alpha^2}{\alpha^8} + \dots \right\} \quad (16)$$

4. Приложим полученные результаты к двум частным случаям:

а) Движение под действием постоянной силы.

Пусть

$$f_1 = \frac{4\pi R^3}{3} \rho_1 g$$

Согласно (4), будем иметь

$$f = g \frac{2\rho_1}{2\rho_1 + \rho}$$

Ускорение и скорость шара будут даваться формулами

$$w(t) = \frac{f}{s_1 - s_2} \left\{ s_1 e^{s_1 t} \psi(-s_1 \sqrt{t}) - s_2 e^{s_2 t} \psi(-s_2 \sqrt{t}) \right\}$$

$$v(t) = \frac{f}{s_1 s_2} - \frac{f}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{e^{s_1 t} \psi(-s_1 \sqrt{t})}{s_1} - \frac{e^{s_2 t} \psi(-s_2 \sqrt{t})}{s_2} \right\}$$

при чем условия (2) выполнено.

При весьма больших  $t$  получим

$$v(t) = \frac{f}{s_1 s_2} = g \frac{2\rho_1}{2\rho_1 + \rho} \cdot \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{9} \frac{g\rho_1 R^2}{\mu}$$

$t \rightarrow \infty$

Такое же в точности значение имеет скорость  $v$  при  $t \rightarrow \infty$  в движении шара под действием силы сопротивления Стокса.

б) Мгновенная сила. Пусть  $f_1(t)$  таково, что

$$f_1(t) \neq 0 \text{ при } t < \epsilon$$

$$f_1(t) = 0 \text{ при } t > \epsilon$$

где  $\epsilon$  весьма малое число, при чем

$$\int_0^\epsilon f_1(t) dt = M_1$$

Пользуясь (7) и введя обозначение:

$$M = \frac{3M_1}{2\pi R^3 (2\rho_1 + \rho)}$$

найдем:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= f(t)a(0) + \int_0^t \frac{da(t-t_0)}{dt_0} f(t_0) dt_0 = \\
 &= M \frac{da(t)}{dt} \text{ при } t > \varepsilon, \\
 &= f(t) a(0) + M \frac{da(t)}{dt} \text{ при } t < \varepsilon; \\
 v(t) &= Ma(t) \text{ при } t > \varepsilon \\
 &= [a(t) - a(0)] + a(0) \int_0^t f(t) dt \text{ при } t < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

### **Zur Frage über die Bewegung der Kugel in einer reibenden Flüssigkeit.**

*Von Anatol Lurie.*

(Zusammenfassung).

In diesem Artikel wird die Frage von der Bewegung einer Kugel in einer reibenden Flüssigkeit unter der Bedingung des Vorhandenseins des Widerstandesetzes (1) von Boussinesq-Oseen behandelt. Die Aufgabe führt zu einer Integralgleichung von Volterra'schen Typus, welche durch die Laplace'sche Transformation endgültig gelöst wird. Im besondern werden die Fälle der konstanten Kraft und der Stosskraft behandelt.

Ленинград, декабрь 1923.

## Некоторые явления происходящие при резании металлов.

Сравнение работы резцов с положительным и отрицательным возвышением лезвия с имеющими лезвие горизонтальное.

При своих предыдущих испытаниях,<sup>1)</sup> чтобы не вводить излишних, влияющих на их результаты факторов, я умышленно пользовался токарными резцами с прямыми лезвиями, лежащими в горизонтальной плоскости проходящей через линию центров. Только при опытах высокой и низкой постановки лезвия для выяснения влияния этих постановок т. е. уменьшения вертикальной слагающей давления стружки на резец при первой постановке и увеличения ее при второй постановке я устанавливал лезвие на определенной высоте выше или ниже линии центров при сохранении параллельности лезвия и этой линии.

Обычно при заточке резцов рабочими лезвие их, оставаясь прямолинейным, по большей части наклонно в ту или другую сторону или вследствие самой формы заточки или же местной порчи той или другой стороны лезвия, которую стараются поскорее заточить сохраняя по возможности материал резца. По большей части этот наклон небольшой и не может иметь большого значения, но этот вопрос меня заинтересовал и стоял на очереди тем более, что известный инженер В. Гиплер обращает на него внимание в своих научных трудах.

**Токарное дело**—глава: Резцы для продольной обточки. Русский перевод 1922 г. стр. 123 и следующие.

**Резущий инструмент для обработки металлов снятием стружки.**

Глава:

Рациональная форма токарного резца стр. 99 и следующие. Орг. Металл. 1927 г.

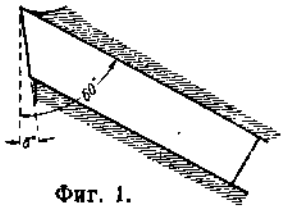
Поэтому для выяснения влияния наклона лезвия на величину давлений на токарный резец я поставил на имеющемся в механических мастерских Политехнического Института токарном станке бр. Берингер следующий проверочный опыт.

<sup>1)</sup> „Некоторые явления происходящие при резании металлов“. Известия Ленинградского Политехнического Института имени М. И. Калинина т. XXIX и XXX стр. 259 и 361.



Для имеющегося для этого станка динамометра сначала было изготовлено из одной и той же стали три реза с прямолинейными лезвиями одинаковой ширины 16 *mm*.

Первый—нормальный для динамометра с углом резания  $\alpha = 60^\circ$ , углом задней заточки  $\gamma = 6^\circ$ , с лезвием лежащем в верхней плоскости тела реза и следовательно расположенным по линии центров фиг. 1.

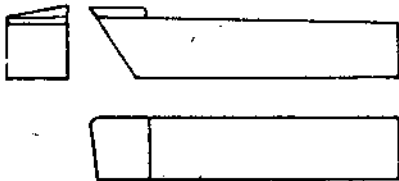


Фиг. 1.

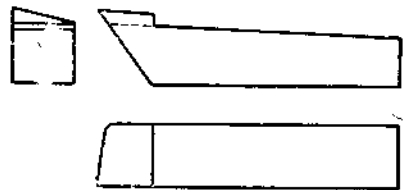
Второй резец имеет левый угол лежащий в верхней плоскости тела реза, правый же приподнятый против тела на 3 *mm*. Полученная таким образом верхняя площадка, по которой сбегает стружка, везде в продольном

направлении реза имеет угол реза  $\beta = 54^\circ$ , но с наклоном влево. Вследствие этого лезвие реза в плане образует тупой угол  $96^\circ 30'$  с левой боковой стороны реза. Такой резец В. Гиплер при подаче к передней бабке называет резцом с положительным возвышением, или резцом „с клювом“ (фиг. 2).

Третий резец является симметричным второму, т. е. у него приподнят на ту же величину левый угол, правый же лежит в верхней плоскости тела реза; заточенная таким образом площадка имеет наклон вправо, лезвие реза образует угол  $96^\circ 30'$  с правой боковой стороны реза. Такой резец В. Гиплер при той же подаче называет резцом с отрицательным возвышением (фиг. 3). Такое возвышение имеют резы Клопштока.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В. Гиплер считает, что при отрицательном возвышении две слагающие из трех составляющих давление резания являются меньшими, именно силы: вертикальное давление и давление подачи, сила же перпендикулярная оси обрабатываемого предмета становится больше.

Указанные три реза возможно установить при одинаковых плечах рычага динамометра таким образом, что лезвие первого реза полностью установится на линию центров, левый угол лезвия у второго реза будет находиться на линии центров, правый же выше его на 3 *mm*.

У третьего же резца будет обратное расположение, т. е. правый угол окажется на высоте центров, а левый будет выше на ту же самую величину 3 мм.

Пользуясь результатами исследования „Высокая и низкая постановка резцов“ <sup>1)</sup> можно наперед сказать, что у сделанных резцов с косым лезвием вертикальное давление будет меньше, чем у нормального резца с прямым лезвием, так как по сказанному точки косых лезвий стоят выше точек лезвия первого резца.

Поэтому чтобы получить вертикальную слагающую давлений одинаковую с давлениями у резцов с приподнятыми углами, необходимо было изготовить еще резец с тем же углом резания  $\alpha = 60^\circ$ , но с площадкой приподнятой на величину равную половине возвышения углов каждого лезвия при косых резцах.

Такой резец по счету четвертый и был изготовлен из той же стали с углом резания  $\alpha = 60^\circ$  и с параллельной верхней плоскости резца площадкой, дающей лезвие резца выше линии центров на 1,5 мм (фиг. 4).



Фиг. 4.

При этих условиях изготовления и одинаковой тепловой обработке резцов можно было рассчитывать на их одинаковую стойкость сохранения остроты лезвий.

Было произведено несколько опытов со сталью и один опыт с чугуном, т. к. при резании стали при подаче 1,5 мм получались колебания ртутного столба динамометра на 100 кг. При опытах на каждом материале резание происходило для всех форм резцов при одном и том же диаметре болванки. Станок предварительно разогревался и холостой ход оставался постоянным во все время работы. Резцы были острые и результаты получались согласные, хотя обрабатываемые материалы не отличались большой однородностью.

Опыт с паровозной осью происходил при скорости  $v = 7,5$  м/мин. на диаметре болванки 151,3 мм, при угле наклона лезвия первого резца с осью болванки  $\varphi = 30^\circ$  и подачах 0,5, 1,0 и 1,5 мм. Холостой ход станка был 0,8 кв. Глубина резания была переменная: 8, 7, 8 и 8,5 мм. так что ширина стружки получалась 16 мм. В нижеследующей таблице 1 приведены средние данные, при чем первые цифры выражают вертикальные давления  $P$  в кг, вторые мощность в кв.

Интересно при этих резцах течение стальных (следовательно сливных) стружек. При № 1 оно нормальное, при № 2 стружки шли свободно по направлению к передней бабке, куда во всех случаях производилась и подача; при № 3 стружка шла к задней бабке и так как там был проход теснее, то ее приходилось отбивать во избежание завязания и торможения.

<sup>1)</sup> Изв. Политех. Ин-га т. XXIX стр. 365.

Таблица 1.

Резец № обозначения	1		2		3	
	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>
0,5 . . . . .	620	1,72	615	1,71	590	1,71
1 . . . . .	1 150	2,4	1 170	2,5	1 100	2,5
1,5 . . . . .	1 600	3,2	1 670	3,2	1 550	3,2

У резцов Клопштока возвышение главного лезвия отрицательное <sup>1)</sup> т. е. соответствует нашему резцу № 3. Хотя здесь наклон небольшой около 7,8%, но все таки он дает отклонение стружки назад, заставляя ее захватывать часть бокового лезвия и производить на него небольшое давление. Мне кажется, что небольшой положительный уклон здесь был бы в этом отношении целесообразнее.

Опыт с болванкой пушечной стали (сердцевина) был мной произведен в надежде на большую однородность материала, которая не совсем оправдалась. Опыт этот я производил более тщательно. Боясь, что небольшая разница длины лезвия и углов установок  $\phi$  (лезвия и оси болванки) может повлечь за собой неточность, так как толщина стружки меняется, я сделал угол установки для первого и 4 резцов равным 30°, а затем для резцов второго и третьего для сохранения того же угла я поворачивал лезвие до соприкосновения с приточенной уже частью. Этот поворот был в ту и другую сторону около 1°12.

Диаметр болванки был 115,7 мм; скорость резания была 4,5 и 10  $\frac{м}{мин.}$  подача только 0,5 и 1,0 мм, так как при увеличении подачи увеличивался и нарост, вызывающий большее колебание давлений. Результаты предоставлены в табл. 2, при чем обозначения остаются прежние. При скорости 10  $\frac{м}{мин.}$  резцы уже были несколько припулены.

Здесь можно видеть у резца № 3 несогласованность давлений с мощностью и последняя кажется преувеличенной. Но в самом деле она и является такой, так как стружки этой стали очень вязкие, не так легко ломаются и, попадая между динамометром и болванкой,

<sup>1)</sup> Резцы Клопштока и их испытание. П. А. Незванов. Лекции по Иандр. делу для повышения квалификации инженеров. 30/I—27 г. Труды конференции по машиностроению в Ленинграде в 1928 г.

тормозят ее вращение. Повышение расхода мощности при болванке около 115,7 *mm*, скорости резания  $10 \frac{м}{мин.}$  при ширине стружки 16 *mm* и средней ее толщине 0,65 *mm* доходило до 0,3 *kw*. Этот опыт показывает, насколько важно свободное отведение стружки даже и при токарной работе, где кажется нет никаких затруднений, как при сверлении отверстий. В последнем случае при учете энергии на сверление вязкого металла приходится смотреть, что делается с кольцами спиралей стружки и тогда уменьшением скорости или подачи можно уменьшить этот расход на торможение стружки.

**Таблица 2.**

Скорость реза. м/мин.		4,5				10			
Резец обозначения его	1	2	3	4	2	3	4		
	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>	<i>Pkg</i> <i>kW</i>		
0,5	640 1,4	670 1,45	645 1,45	635 1,4	705 2,13	700 2,13	680 2,1		
1,0	1 190 1,9— —2	1 265 2,0	1 250 2,0	1 185 1,9— —2	1 250 3	1 170 3,3	1 135 2,1		

Так как в первом опыте с паровой осью площади сечения стружки разные, то для сравнения нужно взять коэффициент резания, т. е. указанные в табл. 1 величины вертикальных давлений нужно соответственно разделить на площади стружки при данных глубины и подачи. Тогда получается табл. 3.

**Таблица 3.**

Резец № обозначения	1	2	3
	Коэффициент резания $\frac{kg}{mm^2}$		
0,5	167,5	161,8	164
1,0	155,4	154	152,8
1,5	144	146,4	143,5

Если обратиться к рассмотрению цифр этой таблицы, то здесь уже эти цифры дают более определенные результаты.

По этой таблице при подаче 0,5 *mm* небольшое преимущество за резцом № 2 с положительным возвышением. Но так как динамометр, поставленный вместо поворотной головки, не поворачивался за все время испытания, то стружка, взятая резцом № 2 толще, чем стружка резцов №№ 1 и 3 и эта малая разница величины коэффициентов резания может быть объяснена или этим обстоятельством или неоднородностью материала. При подачах 1,0 и 1,5 *mm* преимущество остается за резцом № 3, т. е. с отрицательным возвышением.

При опыте с пушечной сталью угол  $\varphi$  (лезвия и оси болванки) не изменяется и так как длина лезвия резцов №№ 2 и 3 была длиннее лезвия резцов №№ 1 и 4 самое большое на 0,2 *mm*, то сечение стружки можно считать постоянным у всех 4 резцов и, следовательно, можно судить о выгоде резания тем или другим резцом только по давлениям. Но эти давления очень близки друг к другу. Из их разбора исключив резец № 1, на первое место можно поставить резец № 4, на второе—резец № 3 и на третье—резец № 2. Резец № 1 ближе подходит к № 4. Очень может быть здесь влияет большая высота нароста у резца № 1, чем у резца № 4.

Испытания на чугуне производились с болванкой диаметром 152 *mm* при 2 скоростях резания 5 и 13  $\frac{m}{min}$  подачами 0,5, 1,0 и 1,5 *mm*. Что касается глубины резания, то для сохранения одинакового наклона лезвия резцов в плане (равенства во всех случаях угла), ее пришлось изменить для резца с отрицательным наклоном для получения более точной работы всей длиной лезвия на 0,1 *mm*, то есть дать 8,1 *mm*. В таблице 4 проставлены полученные средние цифры давлений в мощности

Таблица 4.

Резец № обозн. его	1		2		3		4		При скорости
	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	<i>Pkg</i>	<i>kW</i>	
0,5	225	1	280	1,13	217	1	215	1	5
0	390	1,25	415	1,3	380	1,25	380	1,25	
1,5	520	1,5	550	1,45	520	1,42	512	1,42	
0,5	—	—	220	1,45	250	1,45	232	1,45	13
1,0	—	—	395	1,85	390	1,75	380	1,75	
1,5	—	—	535	2,35	525	2,18	520	2,18	

Что касается вертикальных давлений, то средние вертикальные давления при резце с отрицательным возвышением (№ 3) меньше, чем у резца с положительным возвышением (№ 2) точно также как и величины мощности.

Если теперь сравнить резец с отрицательным возвышением № 3 с резцом с площадкой (№ 4), то в большинстве случаев надо отдать предпочтение последнему резцу. Интересно, что в некоторых случаях резец без площадки № 1 дает меньшие вертикальные давления, чем резец № 2 и близкие к резцу с площадкой (№ 4). Но здесь нужно принять во внимание, что площадка резца № 4 постепенно стачивалась и в результате высота ее над телом резца оказалась около 1,3 *мм*, т. е. лезвие резца было поставлено выше центральной линии станка на эту величину 1,3 *мм*, т. е. на 0,8% диаметра болванки, слишком небольшую величину для получения разницы.

Для величины мощности я дал средние цифры, но если обратиться к отчетам ваттметра, то оказывается вообще, что для резцов с горизонтальными лезвиями пределы оказываются теснее, чем для резцов с наклонными лезвиями. Это показывает, что работа резцов с горизонтальными лезвиями протекает немного спокойнее.

Но вообще как при опытах со сталью, так и с чугуном разница мощности получается небольшая и на основании этих опытов нельзя утверждать о преобладающем значении других сил для того или другого случая резцов.

**Вывод.** На основании вышеизложенного можно предположить, что наклон лезвия даже около 20% не имеет значения для практических работ резцов, являющихся следствием в силу тех или других обстоятельств неправильной их заточки. Понятно меньший наклон, как он имеет место у резцов Клопштока—7 или 8%, оказывает еще меньшее значение и, пожалуй, его лучше делать при угле между главным и боковым лезвиями равными 90° слегка положительным, чтобы стружка при своем течении не задевала заднего лезвия.

Что касается состояния обработанной этими резцами при указанных подачах поверхности чугунной и стальных болванок, то разница на взгляд оказалась незаметна. Чтобы убедиться даст ли тот или другой тип резцов разницу при чистовой обработке я произвел чистовую обработку при глубине резания 0,1 *мм* осевой болванки при струе раствора соды в воде. К сожалению, при плохом состоянии станка, эти опыты не дали никакой разницы в чистоте обработанной поверхности.

Строение наростов на резцах, доходящих до 1,5 *мм* высотой тоже ничего особенного не показало и было при всех указанных случаях однообразным.

П. Незнамов.

Механическая мастерская Политехнического ин-та.

1928 г.

ОТДЕЛ III

А В И А Ц И Я

И

ВОЗДУХОПЛАВАНИЕ

# СОДЕРЖАНИЕ

## III-го ОТДЕЛА

	СТР.
<i>Воробьев, А. Г.</i> —О влиянии скорости на динамические высоты, достигаемые выполненными воздушными кораблями. . . . .	135
<i>Ростовцев, Г. Г.</i> —К расчету крыла моноплана с двумя лонжеронами. . . . .	147

---

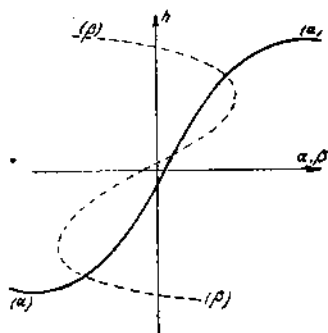


## О влиянии скорости на динамические высоты, достигаемые выполненными воздушными кораблями.

А. Воробьев.

В работе „Графоаналитический способ определения динамических высот, достигаемых выполненными воздушными кораблями“<sup>1</sup> нами дан метод для определения этих динамических высот. При этом там было обнаружено, что при данном режиме моторов, влекущем за собою известную скорость корабля, общий характер зависимости достигаемых динамически превышений  $h$  истинных высот полета корабля над его зонами равновесия выражается в зависимости от дифферента корабля  $\alpha$  графиком, представленным на фиг. I (сплошная кривая). На ней же пунктирная кривая дает зависимость между  $h$  и  $\beta$ , где  $\beta$  — угол отклонения рулей высоты.

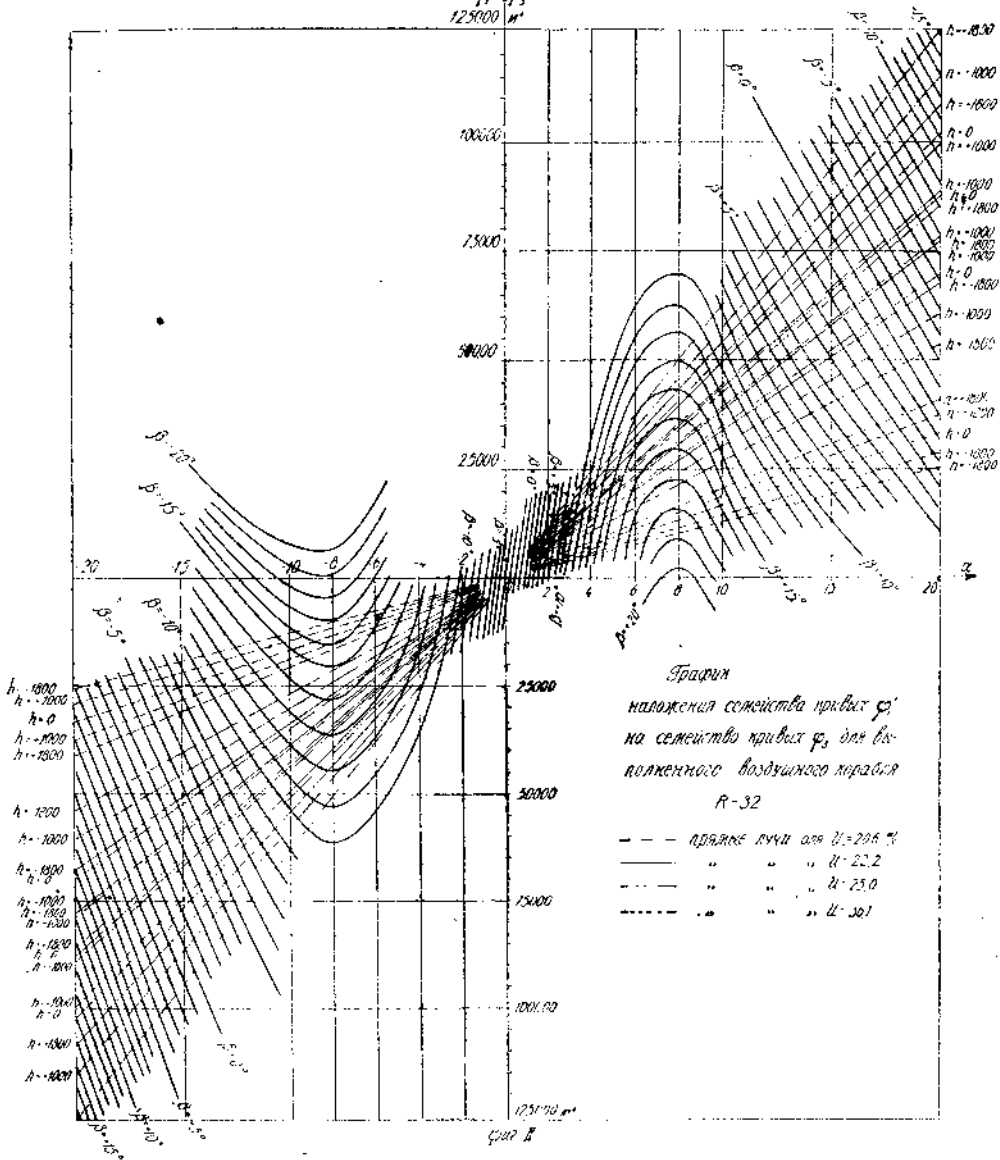
Изложенный в упомянутой работе метод дает возможность всегда и легко определить также и влияние на величину  $h$  различных обстоятельств полета, как то: режима работы моторов, положения центра тяжести полного веса корабля, размеров этого корабля и т. д. В настоящей работе мы займемся установлением влияния режима работы моторов, причем будем его именовать влиянием скорости полета. Такое наименование с точки зрения динамики полета корабля гораздо более желательно потому, что с точки зрения этой динамики существенен не сам режим работы моторов, а лишь тот результат в виде скорости полета, который при этом режиме получается. Однако, как известно при данном режиме работы моторов, скорость может быть различна, в зависимости от углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Мы в дальнейшем режим моторов будем оценивать той скоростью, которую корабль имеет при  $\alpha = \beta = 0$ .

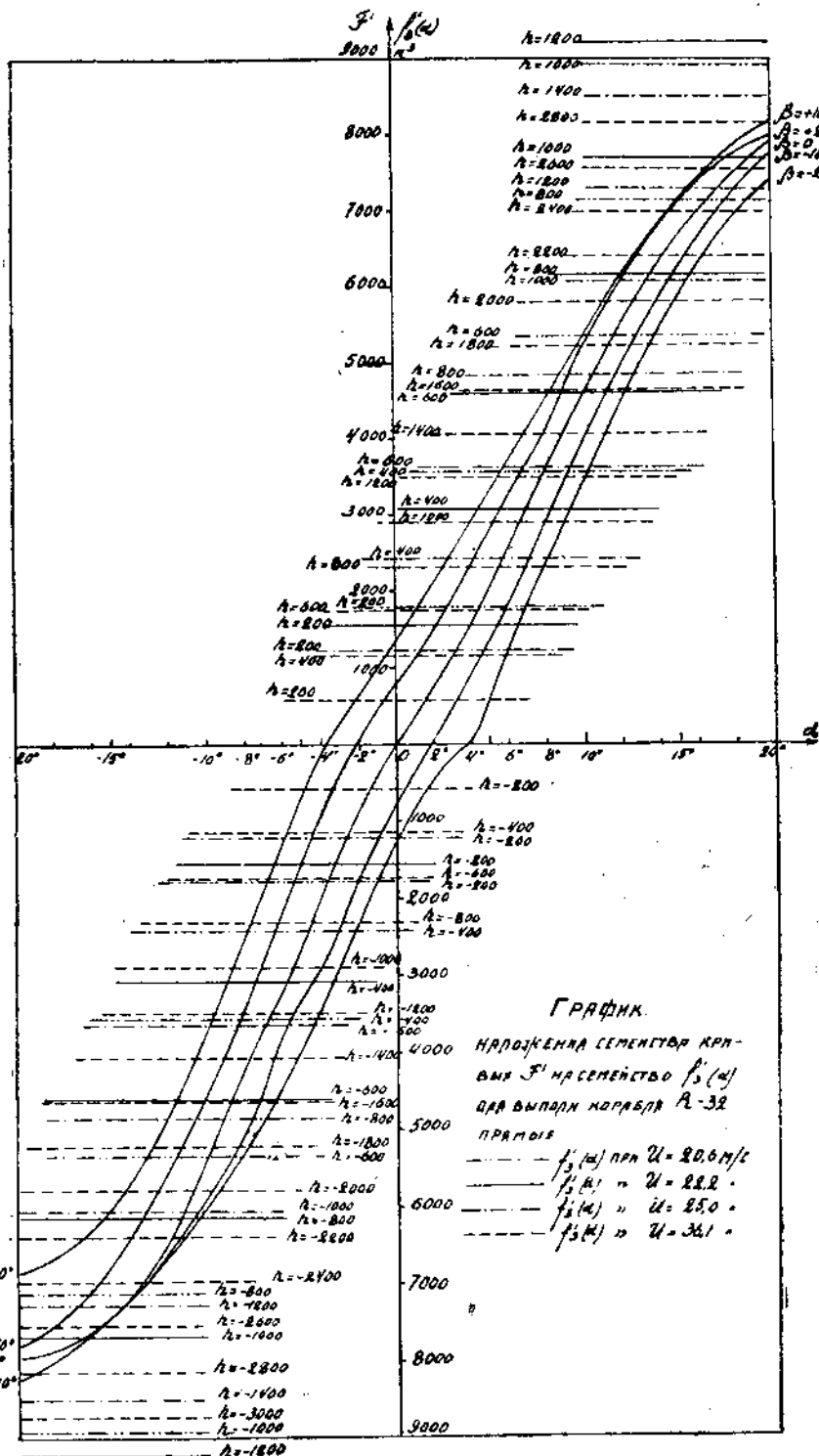


Фиг. I.

<sup>1</sup> См. „Известия Ленинградского Политехнического Института. 1927 г. Отдел техники, естествознания и математики. Том XXX“, стр. 419—447.

$P_2 \text{ в } P_1$   
125000 м





Фиг. III

Оценить влияние скорости не представляет никакого труда, воспользовавшись общим методом предложенным нами в работе „Графо-аналитический способ определения динамических высот, достигаемых выполненными воздушными кораблями“. Обращаясь к этому методу, мы можем заметить прежде всего, что изменение скорости несколько не влияет на члены статического происхождения уравнений (1) и (16)<sup>1</sup>. Это значит, что семейства кривых

$$\varphi_2'(\alpha) = \frac{a}{a'} \cdot \frac{\Omega_0}{a_0} r \sin(\delta + \alpha) \quad (I)$$

и

$$f_2'(\alpha) = \text{const.} = \frac{\Omega_0}{a_0} \left( \frac{a}{a'} - 1 \right) \quad (II)$$

в рассматриваемом случае остаются прежними. Напомним, что в формулах (I) и (II)  $a$  — весовая плотность воздуха на зоне равновесия,  $a'$  — эта же плотность на высоте, на которой корабль фактически летит,  $\Omega_0$  — полный вес выполненного корабля на уровне моря,  $a_0$  — весовая плотность воздуха на этом уровне,  $r$  — расстояние между центром подъемной силы корабля и центром тяжести полного веса корабля и  $\delta$  — угол между прямой, соединяющей эти точки и перпендикуляром из центра подъемной силы к оси корабля ( $\delta$  положительно по часовой стрелке). Таким образом, желая оценить влияние скорости, мы можем ограничиться построением для каждой скорости лишь семейств

$$\varphi_1'(\alpha) = M' + \frac{D'k}{\cos \alpha} \quad (III)$$

где, напомним,  $k$  — плечо равнодействующей сил тяги винтов по отношению к центру подъемной силы,

$$M' = \frac{M}{a'}$$

( $M$  — момент силы сопротивления корабля движению по отношению к той же точке) и

$$D' = \frac{D}{a'}$$

( $D$  — горизонтальная составляющая той же силы сопротивления), и

$$f_1'(\alpha) = \text{const.} = F'' \quad (IV)$$

где

$$F'' = \frac{F}{a'}$$

(здесь

$$F = L + D \operatorname{tg} \alpha$$

<sup>1</sup> Арабские цифры обозначают номера формул и фигур в работе „Графо-аналитический способ определения динамических высот, достигаемых выполненными воздушными кораблями“. Формулы и фигуры настоящей работы нумерованы римскими цифрами.

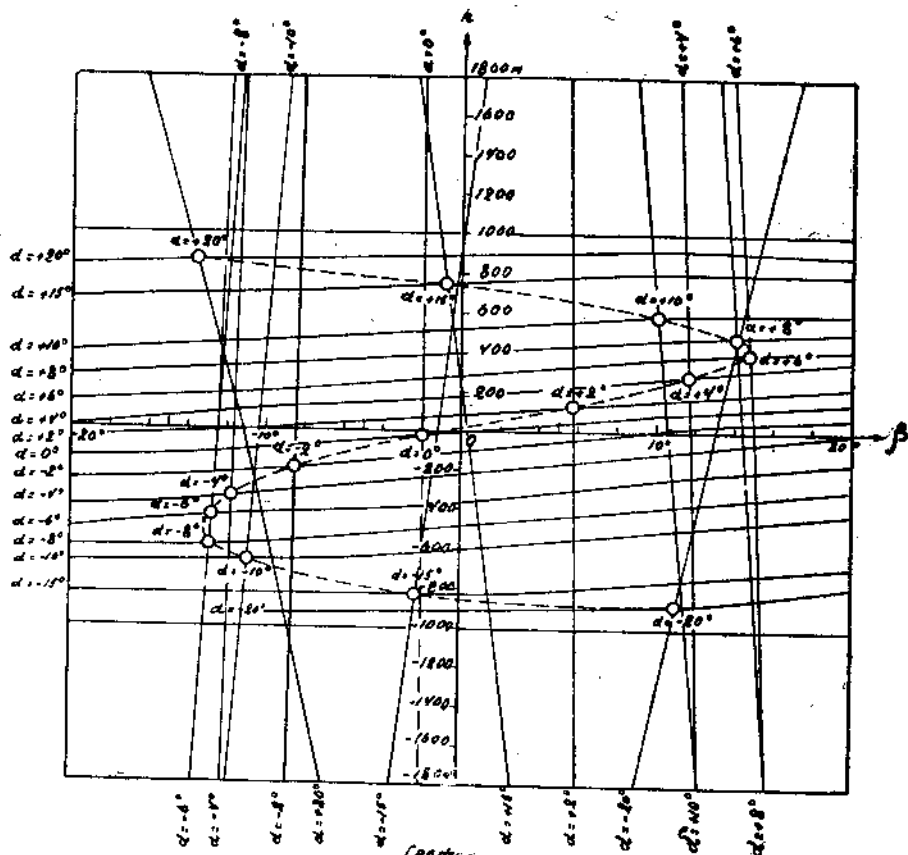


График  
для выпорненного корабля Л-38  
при  $U = 20,5$  м/с  
Фиг. 11.

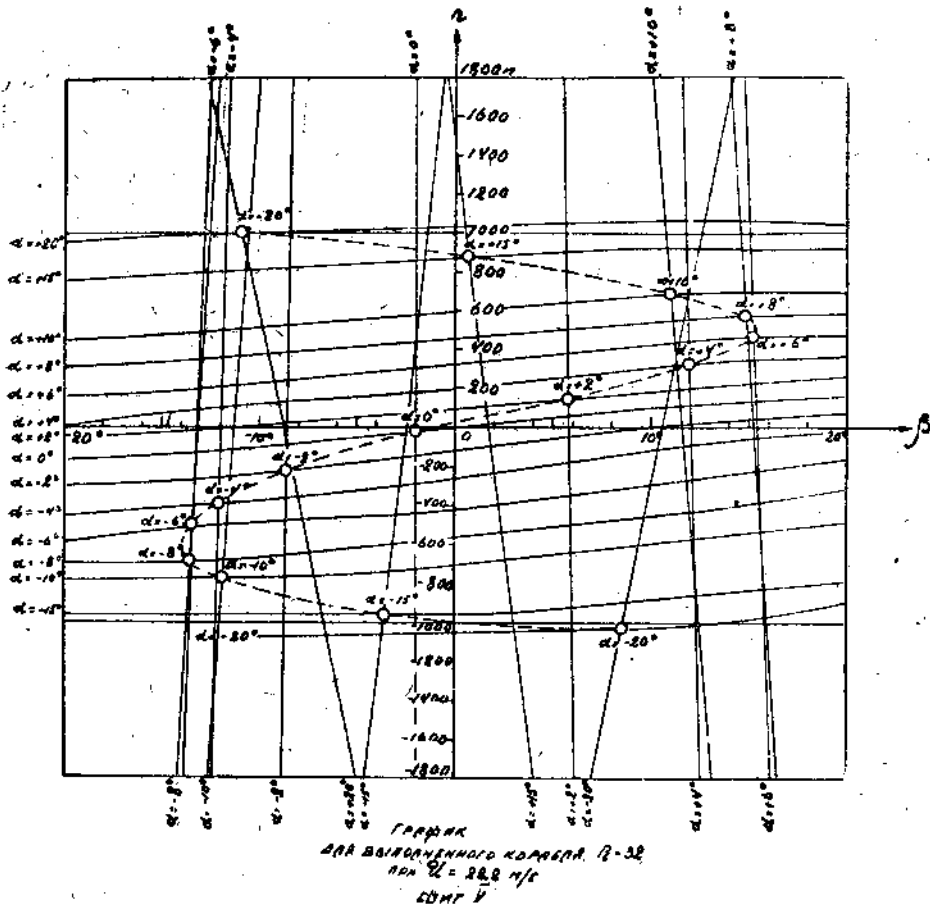
где  $L$  — вертикальная составляющая силы сопротивления корабля движению). Их легко построить если известно одно их семейство для некоторой скорости, так как понятно, что их ординаты пропорциональны квадратам скоростей. Однако, с точки зрения практической гораздо удобнее строить не кривые  $\varphi_1'(\alpha)$  и  $f_1'(\alpha)$  для различных скоростей, а для каждой скорости  $U$  построить свое семейство кривых

$$\varphi_3'(\alpha) = \varphi_2'(\alpha) \cdot \left(\frac{U_0}{U}\right)^2 \quad (V)$$

и

$$f_5'(\alpha) = f_2'(\alpha) \cdot \left(\frac{U_0}{U}\right)^2 \quad (VI)$$

где  $U_0$  — скорость, для которой уже построены кривые  $\varphi_2'(\alpha)$  и  $f_2'(\alpha)$ . Это имеет преимущество в том отношении, что кривые семейства  $f_2'(\alpha)$  являются прямыми и таковыми же в имеющем значении промежутке углов  $\alpha$  практически являются кривые  $\varphi_2'(\alpha)$ . Линии же семейства (III) и (IV) являются эмпирическими кривыми, которые строятся по точкам.



Нанеся, таким образом, на один лишь раз вычерченное семейство кривых (III) и (IV) прямые (V) и (VI), отечающие разным скоростям мы находим совокупности значений  $h$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , отвечающие условиям равновесия сил и моментов. По полученным таким образом совокупностям этих трех величин для каждой скорости, нужно построить свою диаграмму подобную фиг. 11. Пользуясь же этими диаграммами найдем ряд таблиц подобных таблице 8 и ряд графиков подобных фиг. 12. Этот ряд графиков решает задачу. Их все удобно изобразить на одном чертеже в виде семейства кривых с параметром  $U$ .

В качестве численного примера рассмотрим по прежнему корабль  $R$  32 для случая статического потолка. Мало интересно приводить подробности всех вычислений, тем более, что после вышеизложенного и того, что было написано в работе „Графо-аналитический способ определения динамических высот, достигаемых выполняемыми воздушными кораблями“ ход вычислений известен, а получаемые

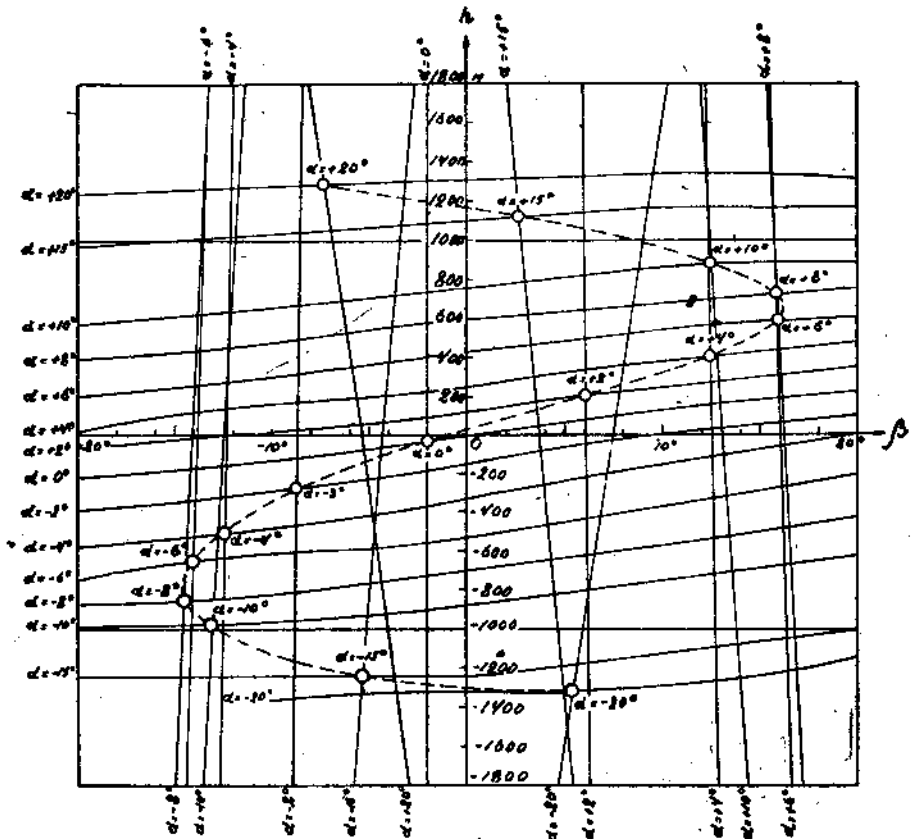


ГРАФИК  
 ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОРРЕКТА R-34  
 ДЛЯ  $U = 85 \text{ м/ч}$   
 ДИМ. II

результаты ясны. Максимальная скорость корабля  $27,8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 100 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$  и для нее все вычисления уже произведены в вышеупомянутой работе. В настоящей работе нами рассмотрены скорости: нормальная полная (в 90% от максимальной, т. е.  $0,90 \times 27,8 = 25,0 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ), крейсерская (80% от максимальной, т. е.  $0,80 \times 27,8 = 22,8 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 80 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ ) и сравнительная (41 узел =  $20,6 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 74,1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$ )<sup>1</sup>. Рассмотрен также случай  $U = 130 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 36,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Фактически скорость данного

<sup>1</sup> Об этих скоростях см.: „Военная Воздухоплавательная Школа. Нормы Английского Воздушного Министерства для расчета воздушных кораблей. Перевод с английского инженера А. Г. Воробьева“, стр. 6.

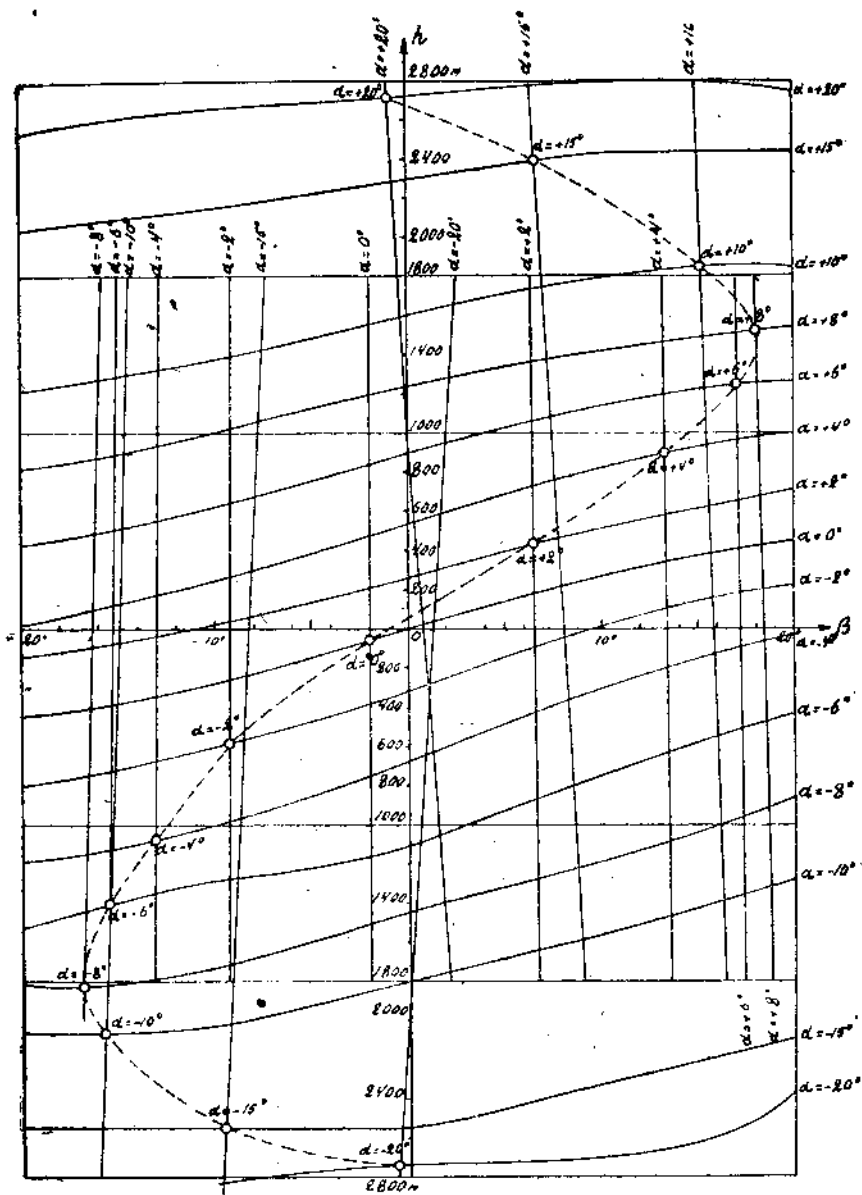
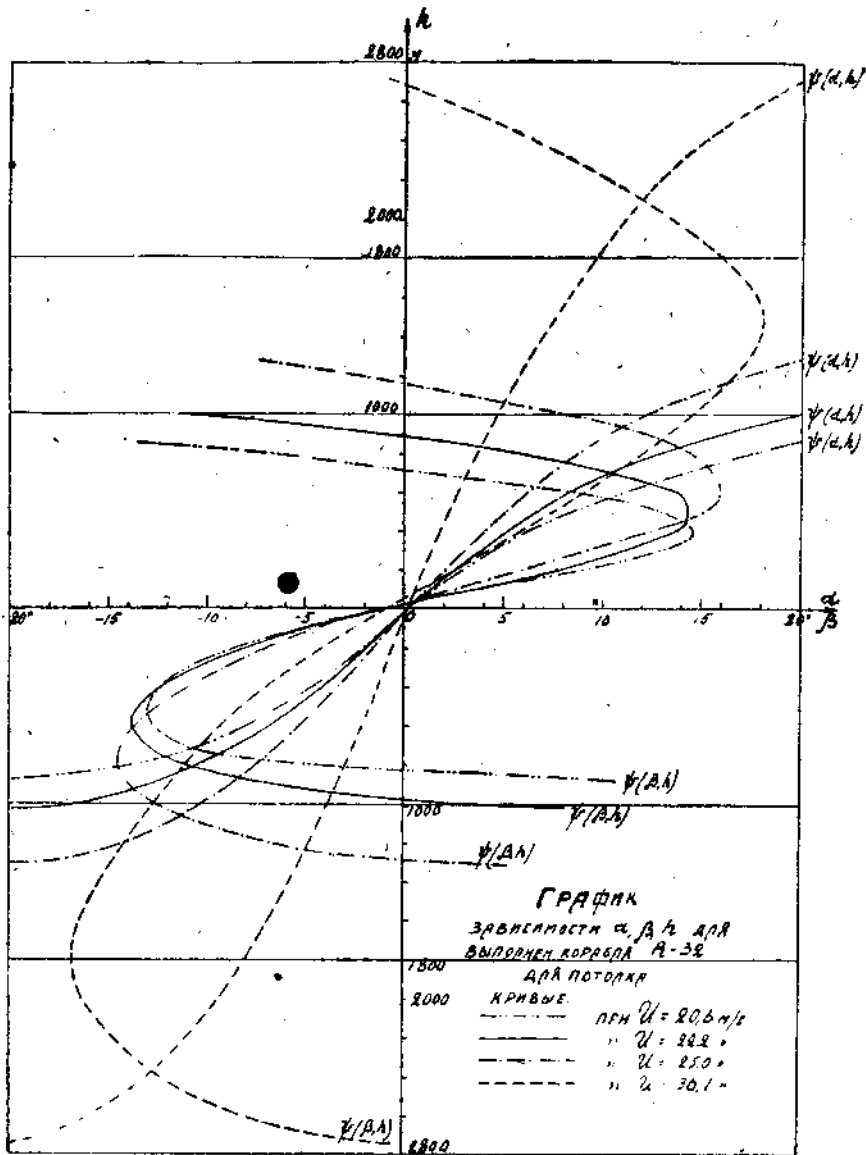


ГРАФИК  
 для выполненного корабля А-30  
 при  $V_0 = 30.1$  м/с

Лит. ПИ

корабля [этой величины не достигала. Однако она интересна с той точки зрения, что эта скорость является максимальной для когда либо построенных кораблей.





Фиг. VIII.

Таким образом построены последовательно: фиг. II, аналогичная фиг. 8, фиг. III, аналогичная фиг. 9, фиг. IV—VII (каждая для различной скорости), аналогичные фиг. 11 и, наконец, фиг. VIII, представляющая семейство кривых, аналогичных фиг. 12. При этом, фиг. VIII построена на основании помещенной в приложении таблицы, аналогичной таблице 8 и составленной на основании фиг. IV—VIII. Эти формулы дают возможность сделать несколько интересных выводов.

Из них заслуживает быть отмеченным, во-первых, то, что как и в прежней работе мы не достигли в пределах  $\alpha \leq +20^\circ$  максимума  $h$ . Таким образом, верхний предел  $\alpha$ , для возможности отыскания этого максимума должен бы был быть увеличен. К сожалению отсутствие аэродинамических данных для углов  $\alpha > +20^\circ$  не позволяет вычисления продолжить за этот предел.

Что касается минимума  $h$ , то он как будто бы намечается.

По прежнему зависимость между  $\beta$  и  $h$  имеет синусоидальный вид. Амплитуда этой синусоидовидной кривой по мере возрастания скорости растет, т. е. углы отклонения рулей высоты могут быть большими. Причина этого понятна и кроется в том, что прямые семейства (V) на фиг. II, по мере возрастания скорости образуют все меньший и меньший угол с осью абсцисс. Если бы скорость могла стать выше  $36,1 \frac{m}{c}$ , то максимум и минимум  $\beta$  стремились бы очевидно к значениям этого угла, отвечающим точкам A и B на оси абсцисс фиг. II ( $\beta = +20,4^\circ$  и  $\beta = -19,3^\circ$ ).

Фиг. IV—VII еще раз обнаруживают интересным образом те передвижения прямых  $\alpha = \text{const}$ , которые снимаются с фиг. II (фиг. 8). Наиболее реально эти передвижения выявляются для самой малой скорости (фиг. IV), где прямые  $\alpha = +20^\circ$  и  $\alpha = -20^\circ$  обладают явно выраженными наклонами и притом в различные стороны. Видно также, как этот наклон переходит через вертикальное положение при  $\alpha = 0$  по мере изменения угла  $\alpha$  от  $-20^\circ$  до  $+20^\circ$ .

Из фиг. VIII видно, что величины  $h$ , в особенности для больших скоростей получаются очень большие. Так, напр., при скорости  $36,1 \frac{m}{c}$  максимум  $h = 2740$  м. Таким образом при этой скорости рассматриваемый корабль имеет возможность подняться динамически на высоту почти в два раза большую, нежели его статический потолок (2820 м), или держаться динамически почти у уровня моря (2820—2720 = 100 м). В силу этого при нанесении на фиг. II и III кривых  $\varphi_3'(\alpha)$  и  $f_3'(\alpha)$  (являющихся прямыми) не следовало бы уже применять за отношение  $\frac{\alpha}{\alpha'}$  (см. работу „Графоаналитический способ определения динамических высот достигаемых выполненными воздушными кораблями“), линейную функцию (9), а или пользоваться показательной функцией (8) или, еще лучше, применить понятие о стандартной атмосфере. В настоящее время мы этого не делаем, имея в виду лишь иллюстрацию метода. При точном разрешении задачи это, однако, следует делать.

Таблица зависимости  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $h$  для выполненного корабля В 32 (для потолка) при различных скоростях

№№ по порядку	$h$ $m$	$U = 20,6 \frac{m}{c}$		$U = 22,2 \frac{m}{c}$		$U = 25,0 \frac{m}{c}$		$U = 36,1 \frac{m}{c}$	
		$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
		в град.	в град.	в град.	в град.	в град.	в град.	в град.	в град.
1	— 2740	—	—	—	—	—	—	— 20,0	— 0,5
2	— 2600	—	—	—	—	—	—	— 15,8	— 8,3
3	— 2400	—	—	—	—	—	—	— 13,0	— 12,3
4	— 2200	—	—	—	—	—	—	— 11,0	— 14,6
5	— 2000	—	—	—	—	—	—	— 9,0	— 16,3
6	— 1800	—	—	—	—	—	—	— 8,0	— 16,8
7	— 1600	—	—	—	—	—	—	— 6,8	— 16,4
8	— 1400	—	—	—	—	—	—	— 5,8	— 15,4
9	— 1310	—	—	—	—	— 20,0	+ 5,4	—	—
10	— 1200	—	—	—	—	— 13,9	— 7,0	— 4,7	— 14,0
11	— 1020	—	—	— 20,0	+ 8,3	—	—	—	—
12	— 1000	—	—	— 16,5	0,0	— 10,3	— 12,6	— 3,7	— 12,6
13	— 880	— 20,0	+ 11,0	—	—	—	—	—	—
14	— 800	— 13,6	— 4,7	— 10,5	— 10,9	— 7,4	— 14,5	— 2,9	— 11,0
15	— 600	— 8,0	— 12,8	— 6,9	— 13,8	— 5,2	— 13,6	— 2,0	— 9,3
16	— 400	— 4,8	— 12,4	— 4,1	— 12,2	— 3,3	— 10,9	— 1,3	— 7,0
17	— 200	— 2,1	— 8,5	— 1,9	— 8,1	— 1,5	— 7,2	— 0,5	— 4,2
18	0	+ 0,2	— 1,2	+ 0,2	— 1,1	+ 0,2	— 1,1	+ 0,2	— 0,9
19	+ 200	3,1	+ 8,7	2,6	+ 7,7	2,0	+ 6,0	1,0	+ 2,5
20	400	6,0	+ 14,7	5,2	13,8	4,0	12,4	1,8	6,0
21	600	10,5	+ 9,0	8,3	14,1	6,1	16,0	2,7	9,1
22	800	17,5	— 7,2	12,5	+ 5,8	8,8	14,5	3,6	12,0
23	860	20,0	— 13,6	—	—	—	—	—	—
24	1000	—	—	20,0	— 10,9	12,1	+ 8,4	4,6	14,6
25	1200	—	—	—	—	17,3	— 2,2	5,7	16,7
26	1280	—	—	—	—	20,0	— 7,4	—	—
27	1400	—	—	—	—	—	—	6,9	18,0
28	1600	—	—	—	—	—	—	8,4	17,7
29	1800	—	—	—	—	—	—	9,7	15,9
30	2000	—	—	—	—	—	—	11,1	13,3
31	2200	—	—	—	—	—	—	12,9	10,2
32	2400	—	—	—	—	—	—	15,0	6,6
33	2600	—	—	—	—	—	—	18,0	+ 2,0
34	2720	—	—	—	—	—	—	20,0	— 0,9

Другим источником некоторых ошибок может являться то, что как при различных скоростях полета, так даже и при одной и той же скорости, может быть различно  $k$ , фигурирующее в формуле (III). Эти различия могут получаться тогда, когда корабль имеет несколько винтов, расположенных на различных расстояниях от оси. В таком случае изменение скорости корабля может получаться не только за счет одинаковых изменений режима работы всех моторов, но и работой таковых на различных режимах вплоть до выключения одного или некоторых из них. Учесть происходящую отсюда ошибку в общем виде затруднительно. В случае необходимости это, однако, всегда можно сделать, рассматривая каждый случай особо.

Как и для прежней работы все вычисления и чертежи под нашим руководством исполнены Е. П. Иконниковым, которому вновь приношу свою глубокую признательность.

Ленинград.  
Сентябрь 1926 г.

## Ueber die Einwirkung der Geschwindigkeit auf dynamische, von Luftschiffen zu erreichende Höhen.

A. Worobieff.

Mittels des Verfahrens, beschrieben in der Abhandlung „Graphisch-analytische Methode zur Bestimmung der dynamischen, von Luftschiffen zu erreichenden Höhen“ (Bulletins des Leningrader Polytechnischen Instituts 1927, Abt. für Technik, Naturwissenschaften und Mathematik, Bd. XXX, SS. 419-447), legt der Verfasser aus die theoretischen Grundlagen und einen numerischen Beispiel der Bestimmung der Einwirkung auf dynamische Höhen der Geschwindigkeiten der Schiffsbewegung (Regim der Motorenarbeit). Er stellt dabei fest, dass es dazu genügt, zwei Graphiken anzuwenden (Abb. II und III); auf der einen (Abb. II) ergeben die verschiedenen Strahlen, auf der anderen (Abb. III) die verschiedenen, der Axe der Abszissen parallelen, Linien die zu suchenden Verbindungen von  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $h$ . Unter Anwendung von einer in einer früheren Abhandlung auserlegten Bearbeitung (Abb. IV—VII), erhält der Verfasser die Graphik VIII und die Tabelle, welche die Frage beantworten. Die Anwendung entweder der einen oder der anderen ermöglicht dem Piloten oder dem Konstruktor die Bestimmung der Differenz zwischen dynamischer und statischer Höhe des Fluges für jeden Deklinationswinkel der Höheruder ( $\beta$ ) bei gegebenem Regim der Motorarbeit ( $U$ ). Es kann dabei auch das Different des Schiffes  $\alpha$  bestimmt werden.

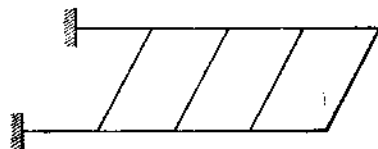
## К расчету крыла моноплана с двумя лонжеронами.

Г. Г. Ростовцев.

### § 1. Предисловие.

До последнего времени расчет скелета монопланного крыла, имеющего схему по черт. № 1, производился в том допущении, что нервюры (поперечные балки) шарнирно соединены с лонжеронами (продольные балки). Такое допущение шло в запас прочности при расчете лонжеронов, но иногда значительно утяжеляло лонжероны, а также давало преувеличенное значение, для изменения углов атаки крыла <sup>1</sup>.

Thalan <sup>2</sup> дал метод несколько упрощающий расчет всей статически неопределенной системы в случае конечного числа нервюр, способных воспринять лишь изгиб, а так же рассмотрел подробно влияние на изгиб лонжерона одной и двух нервюр, соединенных абсолютно жестко с лонжеронами.



Фиг. 1.

Biezono, Koch и Koning <sup>3</sup> дали решение той же задачи для случая бесконечно большого числа нервюр бесконечно жестких на изгиб и не могущих воспринимать кручения <sup>4</sup>.

Накопец Reiszner <sup>5</sup>, учел влияние бесконечно жестких на изгиб нервюр на изгиб лонжеронов равного сопротивления.

Как то вытекает из выводов настоящей статьи не всегда практически можно считать нервюру бесконечно жесткой на изгиб, а так же пренебрегать ее способностью передавать кручение. Конструктивное выполнение соединения нервюр с лонжеронами обычно не столь уже

<sup>1</sup> Надо заметить, что вопросу об влиянии деформации крыла на его летные характеристики вообще уделено сравнительно очень мало внимания и нет даже твердых норм для допускаемых изменений в углах атаки.

<sup>2</sup> См. Zeit. für Flugtechn. und Motorluft. 28 сентября 1925 г.

<sup>3</sup> См. Zeit. für Angew. Mathem. April 1926 г.

<sup>4</sup> Сюда же относятся дипломные работы студ. корабл. ф-та Ин-та Розанова и Кагава, несколько ранее указанной в п <sup>3</sup> работы, исследовавших 3-х лонжеронное крыло, а также 2-х лонжеронное крыло переменного сечения с абсолютно жесткими нервюрами — методом Ритца.

<sup>5</sup> См. Zeit. für Flug und Mot. 14 Apr. п. м. 26 статьи Reiszner'a.

жестко (не говоря уже о конечной жесткости самих нервюр) и на оборот соединения в особенности круглых металлических нервюр с лонжеронами вполне может допускать передачу нервюрами лонжерону скручивающих моментов.

## § 2. Постановка задачи.

Чтобы учесть все обстоятельства в конечном виде, мы предполагаем в настоящей статье остановиться на сравнительно простой конструкции скелета крыла. Как уже упомянуто, мы рассматриваем лишь скелет крыла, пренебрегая влиянием обшивки на деформацию крыла; оценка последнего вряд ли может теперь быть с успехом строго выполнена аналитически и может быть дана главным образом опытом.

Ограничиваемся предположением о малости деформации.

Пренебрегаем изменением нагрузки с деформацией крыла <sup>1</sup>.

Считаем жесткость обоих лонжеронов одинаковою и постоянной вдоль размаха крыла <sup>2</sup>.

Считаем так же, что нервюры одинакового сечения и лонжероны параллельны; в конечном сечении лонжероны защемлены на опорах.

Далее полагаем, что внешняя нагрузка приложена непосредственно к лонжеронам (напр. внутренние нервюры кругл. сечения). Если это допущение не имеет полностью места, то сказанное тем ближе к истине чем жестче нервюры, что обычно и бывает в таких случаях.

Внешнюю нагрузку, как обычно, считаем направленной  $\perp$  — по оси лонжерона.

Длины лонжеронов и нервюр, считаем неизменными, что весьма близко к действительности; так же не учитываем продольного изгиба.

Каковы бы ни были внешние силы  $r_1$  и  $r_2$ , отнесенные к ед. длины лонжеронов, мы всегда можем заменить их действие — действием составляющих  $q_1$ ,  $q_2$  и  $p_1$  и  $p_2$  направленных  $\perp$  — но и  $\parallel$  плоскости крыла; при чем в свою очередь силы  $q_1$  и  $q_2$  заменяем силами

$\frac{q_1 + q_2}{2}$  на каждом лонжероне и, направленными в разные стороны

силами  $\frac{q_1 - q_2}{2}$  и  $\frac{q_2 - q_1}{2}$ .

Первые силы вызывают изгиб крыла как целого (работают лишь лонжероны), а потому учитываются известным образом.

Вторые силы вызывают кручение крыла, вызывая реакции в связях — нервюрах.

Аналогично действие сил  $p_1$  и  $p_2$  мы заменяем действием сил

<sup>1</sup> См. ту же работу, где Reissner оценивает это обстоятельство на скручиваемом крыле балки.

<sup>2</sup> Последние допущения несколько суживают размеры применения результатов этой статьи, но сделаны из указанных выше соображений.

$\frac{p_1 + p_2}{2}$  направленных в одну сторону и изгибающих крыло в его плоскости и силами  $\frac{p_1 - p_2}{2}$  и  $\frac{p_2 - p_1}{2}$  изгибающих лонжероны в разные стороны.

Последнего рода силы не представляют для нас интереса (см. сл. Д).

Т. о. нашему рассмотрению подлежат силы  $\frac{q_1 - q_2}{2} = q$  и  $\frac{p_1 + p_2}{2} = p$ .

Мы можем рассматривать действие этих нагрузок независимо друг от друга.

Действие скручивающей крыло нагрузки <sup>1</sup> мы учтем для нашей конструкции в сл. допущениях;

А) нервюры бесконечно жестки на изгиб и неспособны скручиваться.

В) в том же допущении относительно скручивания, по конечной жесткости на изгиб.

С) Конечной жесткости на изгиб и скручивание.

Сосредоточенные силы и моменты — реакции нервюр на лонжероны считаем распределенными по длине лонжеронов; это допущение тем ближе к действительности, чем больше число нервюр и, как то отчасти следует из дальнейшего, обычно вполне практически приемлемо.

Д. В том же допущении рассчитываем раму на действие сил  $p$  лежащих в ее плоскости.

### § 3. А. Нервюры бесконечно жестки на изгиб и не способны скручиваться.

Разрезая нервюры посередине, в силу симметрии конструкции и нагрузки, получим что в местах разреза изгиб. моменты = 0 и останутся лишь реакции  $Z$ . Эти силы изгибают и скручивают лонжероны (см. черт. № 2).

Введем обозначения:

$l$  — длина лонжерона.

$2h$  — расстояние между ними.

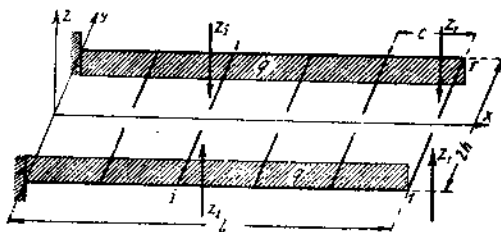
$c$  —

нервюрами.

$D$  — жесткость лонжерона на кручение.

$EI$  — " " " на изгиб.

$q$  — распределенная по длине лонжеронов равномерная внешняя нагрузка.



Фиг. 2.

<sup>1</sup> Наибольшими эти силы бывают, как известно, в случае пика (случ. С).

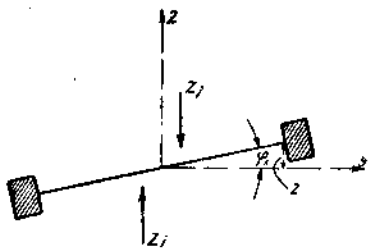
Заменим сосредоточенную силу  $Z_i$  распределенной на длине  $c$  нагрузкой  $q_x$ , так что  $q_x = \frac{Z_i}{c}$ , но крайнюю силу  $Z_i$ , считаем сосредоточенной (см. ниже).

Ось  $OX$  очевидно не искажается и не перемещается (черт. № 3). Угол кручения лонжерона

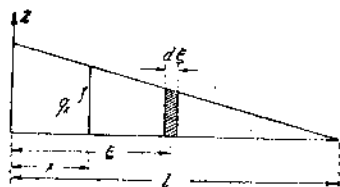
$$\varphi_x = \frac{z}{h} \quad (1)$$

С другой стороны тот же угол в сечении  $x$  (см. черт. № 4) сложится из: 1) угла поворота  $\varphi_{x_1}$  балки длиной  $x$  от действия распределенных только по ее длине сил:  $q_\xi$  ( $\xi < x$ ) и

$$\varphi_{x_1} = \int_0^x \frac{h}{D} \xi q_\xi d\xi.$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

2) угла поворота  $\varphi_{x_2}$  в сечении  $x$  балки длиной  $l$ , скручиваемой: а) нагрузкой  $q_\xi$  вне длины  $x$  ( $\xi > x$ ) и б) парой  $Z_1 h$ . Так что

$$\varphi_{x_2} = \frac{h}{D} \left\{ x \int_x^l q d\xi + Z_1 x \right\}$$

Так что  $\varphi_x = \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2} = \frac{h}{D} \left\{ \int_0^x \xi q_\xi d\xi + x \int_x^l q_\xi d\xi + Z_1 x \right\} \quad (2)$

Дифференцируя р-во (2) дважды по параметру  $x$  и, приняв во внимание (1), получим:

$$\frac{dz}{dx} = h \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{h^2}{D} \left[ \int_x^l q d\xi + Z_1 \right] \quad (3)$$

и

$$\frac{d^2z}{dx^2} = - \frac{h^2}{D} q_x \quad (4)$$



С другой стороны дифф. у-ние упругой линии лонжерона

$$EI \frac{d^2z}{dx^2} = M_{x_0} - \int_x^l q_\xi (\xi - x) d\xi - Z_1 (l - x) \quad (5)$$

где  $M_{x_0}$  — момент внешних сил, в нашем случае  $M_{x_0} = \frac{(l-x)^2}{2}$

Диф-уя (5) дважды по  $x$ , получим:

$$EI \frac{d^4z}{dx^4} = - \frac{EI h^2}{D} \cdot \frac{d^2q_x}{dx^2} = q - q_x$$

или

$$\frac{d^2q_x}{dx^2} = \frac{q_x}{a^2} - \frac{q}{a^2} \quad \text{где } a^2 = \frac{h^2 EI}{D} \quad (6)$$

Следов.

$$q_x = C_1 e^{x/a} + C_2 e^{-x/a} + q$$

Находим  $C_1$ ,  $C_2$  и  $Z_1$  из сл. начальных условий

$$1) x=0 \quad \frac{dz}{dx} = 0 \text{ следов. (р-во 3): } a \left[ C_1 e^{l/a} - C_2 e^{-l/a} - (C_1 - C_2) \right] + q l + Z_1 = 0$$

$$2) x=l \quad EI \frac{d^2z}{dx^2} = 0 \text{ следов. (р-во 4): } C_1 e^{l/a} + C_2 e^{-l/a} + q = 0$$

$$3) x=l \quad EI \frac{d^3z}{dx^3} = Z_1 = -a (C_1 e^{l/a} - C_2 e^{-l/a})$$

Обозначая  $u = l/a = \frac{l}{h} \sqrt{\frac{D}{EI}}$ , решая у-ния, получим

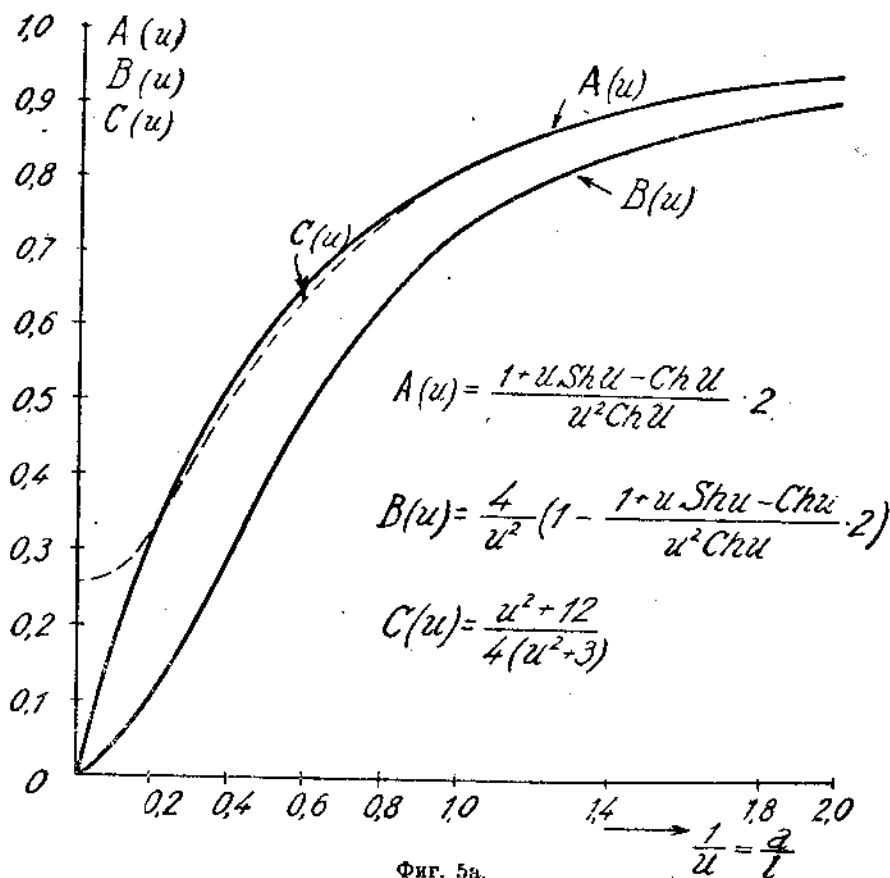
$$C_1 = \frac{u e^{-u} - 1}{e^u + e^{-u}} q; \quad C_2 = -\frac{u e^u + 1}{e^u + e^{-u}} q; \quad Z_1 = q l \frac{Shu - u}{u Chu} \quad (7)^1$$

$$\text{Т. о. } M_x = EI \frac{d^2z}{dx^2} = -a^2 q_x = \frac{q l^2}{u^2} \left[ \frac{ch t + u Sh (u - t)}{chu} - 1 \right] \quad (8),$$

где  $t = \frac{x}{a}$  и

$$M_{x_0} = \frac{q l^2}{2} \frac{1 + u Shu - chu}{u^2 chu} \cdot 2 = \frac{q l^2}{2} \cdot A(u) \quad (9)$$

<sup>1</sup> Допущение  $Z_1 \neq 0$  должно иметь место, так как в противном случае мы получим несовместные у-ния для определения  $C_1$  и  $C_2$ ; кроме того в противном случае мы имели бы, неестественную картину изгиба лонжеронов, как то видно из у-ний 3) и 4).



$M_x$  имеет аналитический минимум при

$$\text{th } t_1 = \frac{u \operatorname{ch} u}{1 + u \operatorname{sh} u}, \text{ где } t_1 = \frac{x_1}{a} < u.$$

При этом

$$M_{\min} = \frac{2}{u^2} \left( \sqrt{1 + 2 \frac{\operatorname{sh} u - u^2}{\operatorname{ch} u}} - 1 \right) \cdot \frac{q l^2}{2}$$

Нетрудно доказать, что

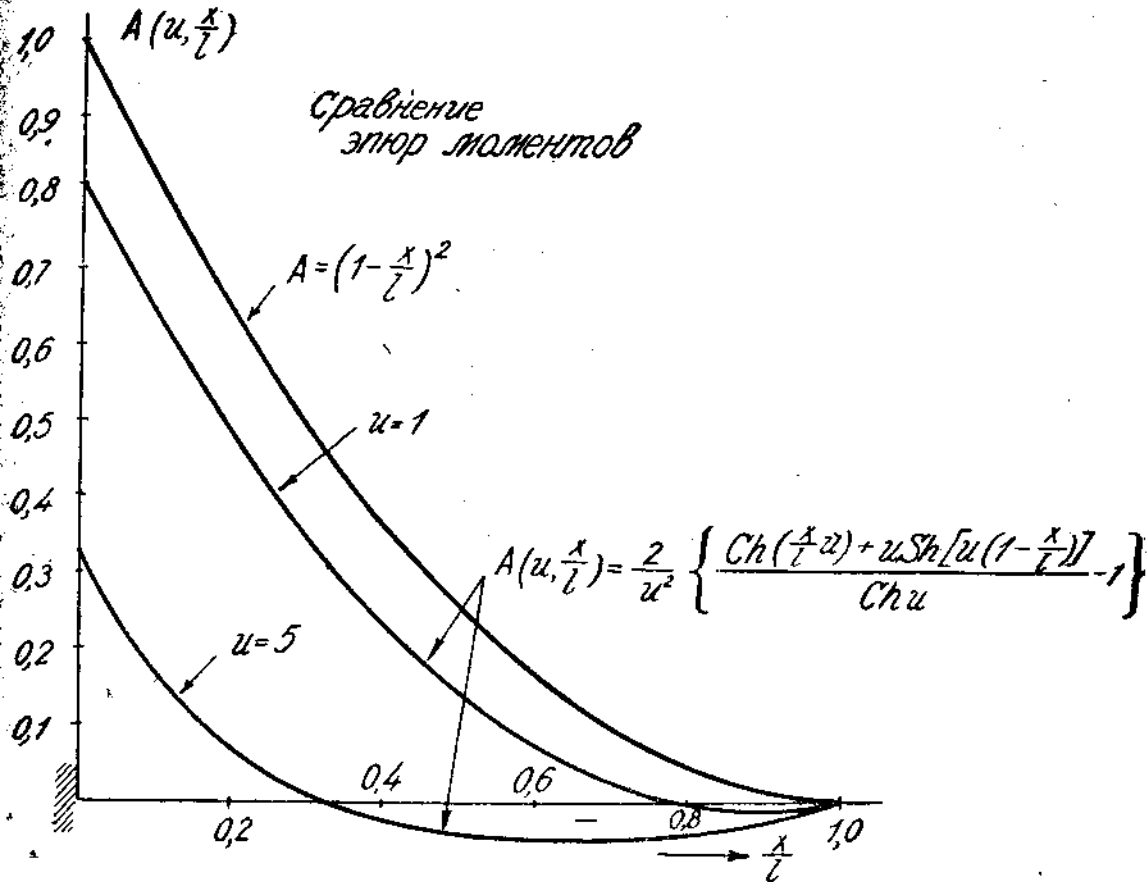
$M_{x=0} > |M_{\min}|$ , а сл.  $M_{x=0}$  и будет расчетным.

Стрелку прогиба на свободном конце получим, пользуясь (2) и (1)

$$f_{x=l} = \frac{q l^4}{8 EI} \cdot \frac{4}{u^2} \left( 1 - 2 \frac{u \operatorname{sh} u + 1 - \operatorname{ch} u}{u^2 \operatorname{ch} u} \right) = \frac{q l^4}{8 EI} \cdot B(u) \quad (10)$$

Заметим для проверки, что

$$\lim |A(u)|_{u=0} = 1 \text{ и } \lim |B(u)|_{u=0} = 1.$$



Фиг. 5б.

Вид функций  $A(u)$  и  $B(u)$ , характеризующих собой уменьшение  $M_x$  и  $f_x$  в наших условиях дан черт. 5. Там же дана для сравнения кривая  $C(u)$  по ф-ле

$$M_x = \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{u^2 + 12}{4(u^2 + 3)} = \frac{ql^2}{2} C(u)$$

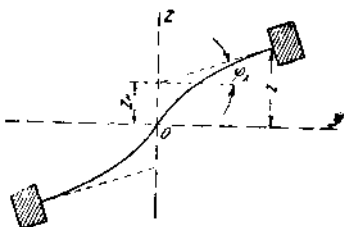
где  $C(u)$  характеризуют уменьшение момента  $M_0 = \frac{ql^2}{2}$ , для того случая, если была бы одна конечная нервюра, безж. жесткая на изгиб и не воспринимающая кручения. Как видно из черт. кривые  $A(u)$  и  $C(u)$  почти сливаются для  $u < 5$ , что указывает на то, что промежуточные нервюры практически для облегчения работы балки почти излишни при  $u < 5$ . Для  $u > 5$  и даже  $u > 3$  удобно пользоваться получающимися из формул 8) 10) приближенными формулами ( $\text{sh}u \cong \text{ch}u$  — велики).

$$A(u) = \frac{u-1}{u^3} \cdot 2 \dots (9') \quad B(u) = \frac{4}{u^2} \left( 1 - 2 \frac{u-1}{u^2} \right) \quad (10')$$

Сравнение эпюр моментов для лонжерона без учета влияния нервюр и с учетом дано черт. 5 б)  $\begin{cases} u = 1 \\ u = 5 \end{cases}$

§ 4. В. Нервиуры конечной жесткости на изгиб и не способные скручиваться.

Какое либо сечение крыла на расстоянии  $x$  от опоры примет сл. вид (черт. 6).



Фиг. 6.

Если  $z$  — прогиб лонжерона.

•  $z_u$  — точки  $O$  относит. закрепленного сечения.

•  $\varphi_x$  — угол закручивания сечения лонжерона,

то в силу малости деформаций

$$\varphi_x \cong \frac{z - z_u}{h} \quad (11)$$

Но  $z_u = z_1 + z_2$ , где  $z_1 = \frac{1}{3} \frac{q_x c}{E_u I_u} h^3$ ; где  $E_u I_u$  — жесткость нервюры на изгиб, и  $z_2 = \gamma q_x c \cdot h^2$  — прогиб от упругости заделки, где  $\gamma$  — угол поворота нервюры от действия пары  $q_x c h = 1$ .

Т. о.

$$z_u = \frac{q_x c h^3}{3 E_u I_u} \left( 1 + \frac{3\gamma_1 \cdot E_u I_u}{h} \right) = q_x \mu \quad (12)$$

Сл.

$$\varphi_x = \frac{z}{h} - \frac{q_x \mu}{h} \quad (13)$$

Диф-уя последнее равенство по  $x$ , пользуясь (2), где считаем  $Z_1 = 0$ , иначе нагрузку  $q_x$  — распределенной по всей длине лонжерона. Имеем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{h^2}{D} \int_x^l q_x d\xi + q_x' \mu \quad (14)$$

и

$$\frac{dz^2}{dx^2} = -\frac{h^2}{D} q_x + \mu q_x'' \quad (15)$$

Подставляя в у-ние (5) и диф-уя дважды

$$q_x^{iv} - q_x'' \frac{a^2}{b^4} + \frac{q_x}{b^4} - \frac{q}{b^4} = 0 \quad (16)$$

где  $a^2 = \frac{EI h^2}{D}$  и  $b^4 = EI\mu$ .

Характеристическое у-ние  $k^4 - k^2 \cdot \frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^4} = 0$  и корни

$$k_1 = 1/b \sqrt{1/2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \sqrt{1/4 \left(\frac{a^4}{b^4}\right) - 1}} \quad k_3 = -k_1$$

$$k_2 = 1/b \sqrt{1/2 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \sqrt{1/4 \left(\frac{a^4}{b^4}\right) - 1}} \quad k_4 = -k_2$$

Возможны 3 случая: 1)  $a^4 - 4b^4 > 0$ ; 2)  $a^4 - 4b^4 < 0$  и 3)  $a^4 = 4b^4$ .

В 1-ом случае общ. ин-л  $q_x = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_3 x} + C_3 e^{k_2 x} + C_4 e^{k_4 x} + q$ .

Во 2-ом случае  $k_1 = \alpha + \beta i$ ;  $k_2 = \alpha - \beta i$ ;  $k_3 = -k_1$   $k_4 = -k_2$

где  $\alpha = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1 + 1/2 \frac{a^4}{b^4}}{2}}$ ;  $\beta = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{1 - 1/2 \frac{a^4}{b^4}}{2}}$ ;

В 3-м случае  $k_1 = k_2 = \frac{a}{b^2} \sqrt{1/2}$  и  $k_3 = k_4 = -\frac{a}{b^2} \sqrt{1/2}$

Во всех 4-х случаях произв. постоянные найдутся из следующих условий:

1)  $x=0$   $z=0$ ,  $\varphi_{x=0}$  и из у-ния . . (13)  $q_{x=0} = 0$

2)  $x=0$ ;  $\frac{dz}{dx} = 0$  " " " . . (15)  $a^2 \int_0^l q_x dx + b^4 q_{x=0}' = 0$

3)  $x=l$ ;  $\frac{dz^2}{dx^2} = 0$  " " " . . (15)  $-a^2 q_{x=l} + b^4 q_{x=l}'' = 0$

4)  $x=l$ ;  $\frac{dz^3}{dx^3} = 0$  1) " " " . . (15)  $-a^2 q_{x=l}' + b^4 q_{x=l}''' = 0$

<sup>1)</sup> Такое допущение здесь естественно, иначе, так как мы считаем нервыры упругими, мы получили бы нарушение непрерывности упругой линии лонжерона, вследствие резкого изменения прогиба точки 0 на конце.

В случае вещественных корней после некоторых преобразований, получим для опред. произв. пост. сл. систему у-ний, где  $k'l = u_1$ ;  $k_2 l = u_2$

$$1) C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = q$$

$$2) \frac{C_1}{u_1^3} + \frac{C_2}{u_2^3} - \frac{C_3}{u_1^3} - \frac{C_4}{u_2^3} = q \frac{a^2}{l^2}$$

$$3) \frac{C_1 e^{u_1}}{u_1^2} + \frac{C_2 e^{u_2}}{u_2^2} + \frac{C_3 e^{-u_1}}{u_1^2} + \frac{C_4 e^{-u_2}}{u_2^2} = -q \frac{a^2}{l^2}$$

$$4) \frac{C_1 e^{u_1}}{u_1} + \frac{C_2 e^{u_2}}{u_2} - \frac{C_3 e^{-u_1}}{u_1} - \frac{C_4 e^{-u_2}}{u_2} = 0$$

Решая систему, получили:

$$C_1 = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{u_2^3} \left( \frac{1}{u_1^3} - m \right) + \frac{m e^{-u_1}}{u_1 u_2} \left( \frac{chu_2}{u_1} + \frac{shu_2}{u_2} + \frac{1}{u_2^3} \right) - \frac{e^{-u_1}}{u_2^4 u_1} \left( \frac{chu_2}{u_2} + \frac{shu_2}{u_1} \right) + \frac{m}{u_2} \left( \frac{shu_2}{u_2^3} - \frac{chu_2}{u_1^3} \right) \right] = \frac{f_1(u_1, u_2)}{\Delta}$$

$$C_2 = \frac{1}{\Delta} \left[ \frac{1}{u_1^3} \left( \frac{1}{u_2^3} - m \right) + \frac{m e^{-u_2}}{u_1 u_2} \left( \frac{chu_1}{u_2} + \frac{shu_1}{u_1} + \frac{1}{u_1^3} \right) - \frac{e^{-u_2}}{u_2^4 u_1} \left( \frac{chu_1}{u_1} + \frac{shu_1}{u_2} \right) + \frac{m}{u_1} \left( \frac{shu_1}{u_1^3} - \frac{chu_1}{u_2^3} \right) \right] = \frac{f_2(u_1, u_2)}{\Delta}$$

$$C_3 = -\frac{f_1(-u_1, u_2)}{\Delta}, \quad C_4 = -\frac{f_2(u_1, -u_2)}{\Delta}$$

где  $\Delta = \frac{2}{u_1 u_2} \left[ -\frac{2}{u_1^2 u_2^2} + chu_1 chu_2 \left( \frac{1}{u_1^4} + \frac{1}{u_2^4} \right) - \frac{shu_1 shu_2}{u_1 u_2} \left( \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} \right) \right]$

$$m = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_2^2 \cdot u_1^2} = \frac{a^2}{l^2}$$

Т. о.

$$M_{x=0} = \frac{q l^2}{2} \cdot 2 \left\{ m [(chu_1 - 1)(chu_2 - 1) - \frac{u_1^2}{u_2^2} chu_1 (chu_2 - 1) - \frac{u_2^2}{u_1^2} chu_2 (chu_1 - 1)] + \frac{m^2 u_1^2 u_2^2 chu_1 chu_2 - 2(1 + (u_2^2 - u_1^2) \left[ \frac{shu_1 chu_2}{u_1} - \frac{shu_2 chu_1}{u_2} + u_1 u_2 shu_1 shu_2 \cdot m \right] - \frac{2 shu_1 shu_2}{u_1 u_2})}{+ chu_1 chu_2} - m shu_1 shu_2 u_1 \cdot u_2 \right\} = \frac{q l^2}{2} D(u_1, u_2) \quad (17)$$

В случа комплексных корней, чтобы не пересчитывать  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  ищем общ. ин-л в той же форме, заметив  $u_1 = l(\alpha + \beta i) = v_1 + iv_2$  и  $u_2 = k_2 l = v_1 - iv_2$ , найдем после некоторых преобразований:

$$M_{x=0} = \frac{ql^2}{2} \cdot 2 \left\{ \frac{m (Sh^2 v_1 + cs^2 v_2) [3 - m^2 (v_1^2 + v_2^2)] +}{m^2 (v_1^2 - v_2^2) (Sh^2 v_1 cs^2 v_2)} + \right. \\ \left. + 1 - \frac{8 v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \left[ 2v_1 v_2 ch v_1 cs v_2 + (v_1^2 - v_2^2) Sh v_1 Su v_2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2 v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \left[ v_1 Sn 2v_2 + v_2 Sh 2v_1 \right] + (v_1^2 + v_2^2) (Sh^2 v_1 + Sn^2 v_2) m \right\} - \\ - \frac{2 (ch^2 v_1 + cs^2 v_2)}{m (v_1^2 + v_2^2) (Sn^2 v_2 +} \\ - \frac{2}{v_1^2 + v_2^2} (Sh^2 v_1 + Sn^2 v_2) \left. \right\} \quad (17')$$

где

$$m = \frac{v_1^2 - v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2}$$

Если корни у-ния кратные, то

$$M_{x=0} = \frac{ql^2}{u^2} \frac{16 chu - 5 ch 2u + 4u sh 2u + 8u shu - 10u^2 - 11}{3 ch 2u + 2u^2 + 5} = \\ = \frac{ql^2}{2} D(u) \quad (17'')$$

где

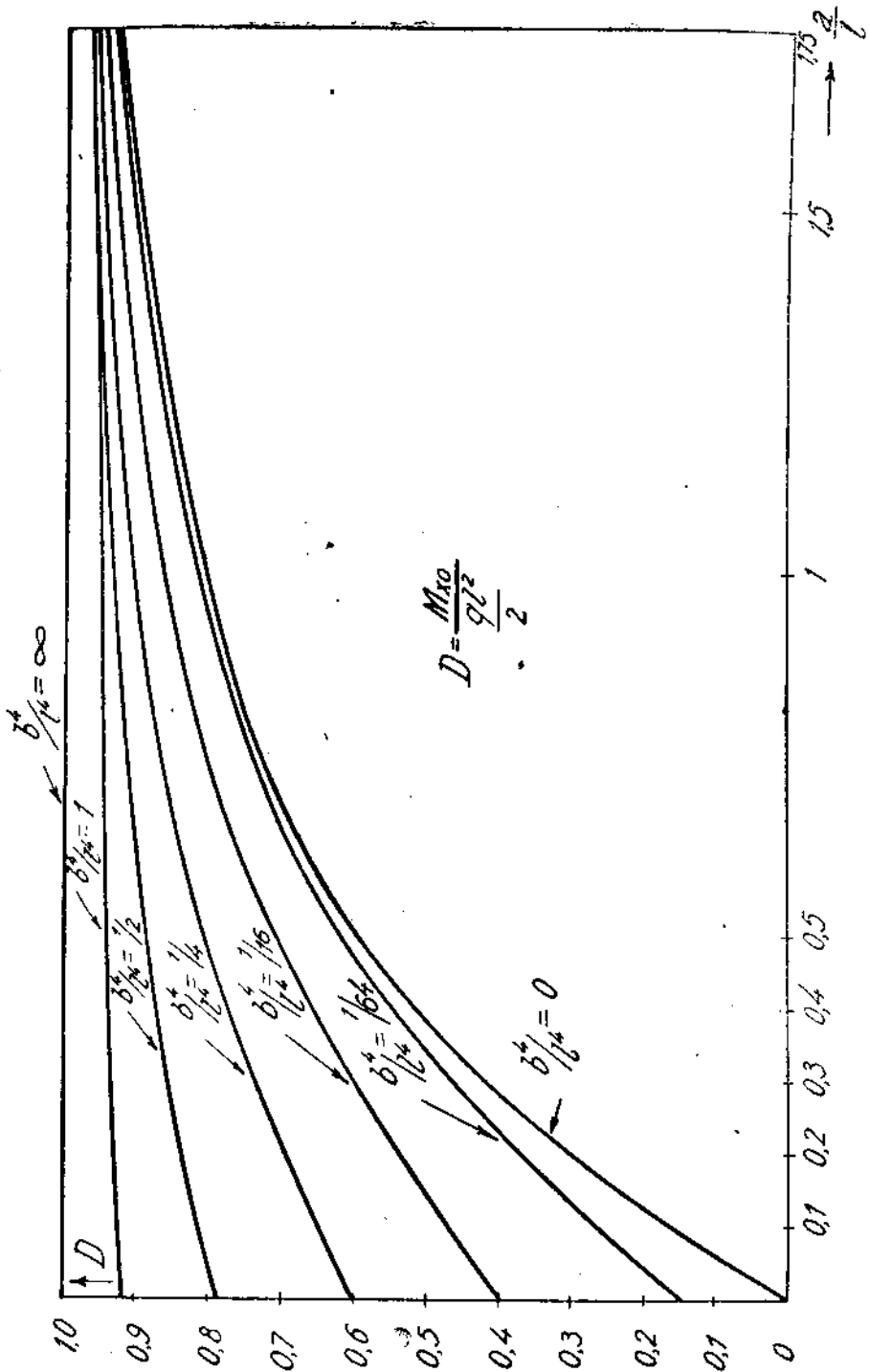
$$u = \frac{l}{a} \sqrt{2}$$

Частн. случаи. 1) Полагая в у-нии 16)  $b^4 = 0$  и  $a^4 \neq 0$  т.е.  $u_1 = \infty$ , получим раскрыв неопредел. в ф-ле (17) — формулу 9).

2) Полагая  $a^4 = 0$ ;  $b^4 \neq 0$  т.е.  $v_1 = v_2 = \frac{l}{b} \sqrt{1/2} = v$ , по ф-ле (17'), получим ( $m = 0$ )

$$M_{x=0} = \frac{ql^2}{2} \frac{sh^2 v cs^2 v + sn^2 v \cdot ch^2 v}{v^2 (1 + cs^2 v ch^2 v + su^2 v sh^2 v)} = \frac{ql^2}{2} \frac{ch^2 v - cs^2 v}{v^2 (cs^2 v + ch^2 v)}$$

3) При  $b^4 = \infty$ ;  $a \neq 0$  получим  $M_{x=0} = \frac{q \cdot l^2}{2} (v = 0)$ . Кривые  $D_1(u_1, u_2)$  даны черт. 7 в зависимости от параметров  $\frac{a}{l}$  и  $\frac{b}{l}$ . Из этих кривых



Фиг. 7.



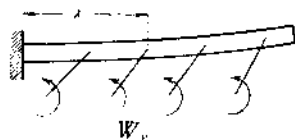
видно, что влияние конечной жесткости нервюр может сильно сказаться на  $M_{r_0}$  по сравнению с ф-ой 9) лишь при малых  $\frac{a}{l}$ . Практически при  $\frac{b}{l} > 1$  можно влиянием нервюр на крыло пренебречь.

§ 5. С. Нервюры конечной жесткости и на изгиб и на кручение.

Разница по сравнению с предыдущим (сл. *b*) та, что нервюры скручиваются парой с моментом  $W_x$  (черт. 8). В силу симметрии конструкции и нагрузки, очевидно, что середины нервюр не закручены, у опор же угол их закручивания:

$$\psi_x = \frac{W_x h}{D_n}$$

(где  $D_n$  жесткость нервюры на кручение) если защемление полное и



Фиг. 8.

$$\psi_x = W_x \left( \frac{h}{D_n} + E \right),$$

где  $E$  коэффициент упругости, если соединение упругое.

Действие этих сосредоточенных пар на лонжероны приблизительно заменяем действием распределенных изгибающих пар  $m_x$  так, что:

$$W_x = \int_{x-c}^{x+c} m_x d\xi \cong m_x c,$$

если  $c$  достаточно мало.

С другой стороны  $\psi_x = -\frac{dz}{dx}$ , а след.

$$\frac{dz}{dx} = -m_x c \left( \frac{h}{D_n} + E \right) = -m_x g \tag{18}$$

Уравнения 11), 12), 13), 14) и 15) остаются в силе и теперь, по у-ние упругой линии будет:

$$EI \frac{d^2z}{dx^2} = M_{r_0} - \int q_x (\xi - x) d\xi + \int m_x d\xi \tag{19}$$

Дифференцируя дважды по  $x$  и подставляя  $\frac{dm_x}{dx} = -\frac{1}{g} \frac{d^2z}{dx^2}$  получим:

$$EI \frac{d^4z}{dx^4} = q - q_x + \frac{1}{g} \frac{d^2z}{dx^2} \tag{20}$$

или пользуясь ур-м (15)

$$-EI \left( \frac{h^2}{D} q_r'' + \mu q_r^{IV} \right) = q - q_r + \frac{1}{g} \left( \mu q_r'' - \frac{h^2}{D} q_r \right)$$

или

$$q_r^{IV} - q_r'' \frac{a_1}{b^4} + q_r \frac{\gamma^4}{b^4} - \frac{q}{b^4} = 0 \quad (21)$$

$$\text{где } a_1^2 = h^2 \left( \frac{EI}{D} + \frac{\mu}{g} \right) = h^2 \left[ \frac{EI}{D} + \frac{1}{1 + E_1} \frac{1}{h} + \frac{3\nu EI_n}{h} \frac{D_n}{E^* \bar{I}_n} \right]$$

$$b^4 = EI \mu \text{ (см. выше)}$$

$$\gamma^2 = 1 + \frac{h D_n}{c D} \frac{1}{1 + \frac{E_1 D_n}{h}}$$

У-ние (20) того же вида, что и (16).

Характеристич. у-ние

$$k^4 - k^2 \frac{a_1}{b^4} + \frac{\gamma^4}{b^4} = 0 \quad (22)$$

$$k_1 = \frac{\gamma}{b} \sqrt[1/2]{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^2 + 1} \sqrt[1/4]{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^4 - 1}$$

и

$$k_2 = \frac{\gamma}{b} \sqrt[1/2]{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^2 - 1} \sqrt[1/4]{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^4 - 1}$$

$$k_3 = -k_1; \quad k_4 = -k_2$$

Возможны случаи:

1)  $a_1 > \sqrt{2} b\gamma$

2)  $a_1 < \sqrt{2} b\gamma$

3)  $a_1 = \sqrt{2} b\gamma$

В 1-ом случае  $q_x = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + C_4 e^{\alpha_4 x} + \frac{q}{\gamma^4}$

Во 2-ом случае корни комплексны и

$$k_1 = \alpha_1 + \beta_1 i \quad k_3 = -k_1$$

$$k_2 = \alpha_2 - \beta_1 i \quad k_4 = -k_2$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\gamma}{b} \sqrt[1/2]{\frac{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^2 + 1}{2}} \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{\gamma}{b} \sqrt[1/2]{\frac{\left(\frac{a_1}{b\gamma}\right)^2 - 1}{2}}$$

В 3-м случае  $k_1 = \frac{a_1}{b^2} \sqrt[1/2]{\quad} = k_2; \quad k_3 = k_4 = -k_1$

Произвольные постоянные определяются из тех же условий 1, 2 и 3, что и ранее, лишь 4-ое теперь согласно у-ния 19) примет вид:

$$EI \frac{d^3 z}{dx_{x=l}^3} = -m_{x=l}$$

Действительно теперь распределенные пары на лонжероне эквивалентных распредел. нагрузке интенсивности  $-\frac{dm_x}{dx}$  [у-ние 20)] и сосредоточенной силе  $m_{x=l}$  на конце.

Для 1-го случая корвей ур-ния 22) получим после упрощения

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= -\frac{q}{\gamma^4} \\ -\frac{C_1}{u_1} \alpha_1 - \frac{C_2}{u_2} \alpha_2 + \frac{C_3}{u_1} \alpha_1 + \frac{C_4}{u_2} \alpha_2 &= -\frac{q}{\gamma^4} \frac{a^2}{l^2} \\ C_1 \alpha_1 e^{u_1} + C_2 \alpha_2 e^{u_2} + C_3 \alpha_2 e^{-u_1} + C_4 \alpha_2 e^{-u_2} &= -\frac{q}{\gamma^4} \frac{a^2}{e^2} \\ \frac{C_1 e^{u_1}}{u_1} + \frac{C_2 e^{u_2}}{u_2} - \frac{C_3 e^{-u_1}}{u_1} - \frac{C_4 e^{-u_2}}{u_2} &= 0 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a &= h \sqrt{\frac{EI}{D}} \\ u_1 &= k_1 l, \quad u_2 = k_2 l \\ \alpha_1 &= \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} u_1^2; \quad \alpha_2 = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} u_2^2 \end{aligned}$$

Т. о. по сравнению с предыдущим теперь в формулы вошли параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  вместо прежних  $\frac{1}{u_1^2}$  и  $\frac{1}{u_2^2}$  (ранее  $\alpha_1 = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} u_1^2 =$

$$= \frac{b^4}{l^2} \left( \frac{a^2}{b^4} - k_1^2 \right) = \frac{k_2^2}{k_1^2 k_2^2 l^2} = \frac{1}{u_1^2}, \text{ авалогично и } \alpha_2).$$

Решая эту систему получим:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{q}{\gamma^4} \cdot \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\alpha_2}{u_2} \left( \frac{\alpha_1}{u_1} - m \right) - \frac{e^{-u_1} \alpha_2}{u_2^2 u_1} \left( u_2 \alpha_2 \operatorname{ch} u_2 + \alpha_1 u_1 \operatorname{sh} u_2 \right) \right. \\ &+ \left. \frac{m_2}{u_2} \left( \alpha_2 \frac{\operatorname{sh} u_2}{u_2} - \alpha_1 \frac{\operatorname{ch} u_2}{u_1} \right) + \frac{m e^{-u_1}}{u_1 u_2} \left( \alpha_2 + \alpha_2 u_2 \operatorname{sh} u_2 + \alpha_1 u_1 \operatorname{ch} u_2 \right) \right\} = \frac{f_1(u_1, u_2)}{\Delta} \\ C_2 &= \frac{q}{\gamma^4} \cdot \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\alpha_1}{u_1} \left( \frac{\alpha_2}{u_2} - m \right) - \frac{e^{-u_2} \alpha_1}{u_1 u_2^2} \left( u_1 \alpha_1 \operatorname{ch} u_1 + \alpha_2 u_2 \operatorname{sh} u_1 \right) \right. \\ &+ \left. \frac{m}{u_1} \left( \alpha_1 \frac{\operatorname{sh} u_1}{u_1} - \alpha_2 \frac{\operatorname{ch} u_1}{u_2} \right) + \frac{m e^{-u_2}}{u_1 u_2} \left( \alpha_1 + \alpha_1 u_1 \operatorname{sh} u_1 + \alpha_2 u_2 \operatorname{ch} u_1 \right) \right\} = \frac{f_2(u_1, u_2)}{\Delta} \\ C_3 &= -\frac{f_1(-u_1, u_2)}{\Delta} \quad \text{и} \quad C_4 = -\frac{f_2(u_1, -u_2)}{\Delta} \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{2}{u_1 u_2} \left[ chu_1 chu_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2 \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2 u_1 u_2 \left( \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} \right) shu_1 shu_2 \right]$$

Т. о.

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= EI \mu q_{x=0}'' = \gamma^4 \left[ \frac{c_1 + c_3}{u_2^2} + \frac{c_2 + c_4}{u_1^2} \right] = \\ &= \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \left( \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2} \right) m \left( \frac{chu_2}{\alpha_2} - \frac{chu_1}{\alpha_1} \right) - \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} \left( \frac{\alpha_2^2}{u_2^2} + \frac{\alpha_1^2}{u_1^2} \right) chu_1 chu_2 + \\ &\quad - \frac{1}{2 \alpha_1 \alpha_2} chu_1 chu_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \\ &+ \left( \frac{1}{u_1^2} - \frac{1}{u_2^2} \right) m \left( \frac{u_1 shu_1 chu_2}{\alpha_2} - \frac{u_2 shu_2 chu_1}{\alpha_1} \right) + \frac{u_1^4 + u_2^4}{u_1^3 u_2^3} shu_1 shu_2 \frac{q l^2}{2} \\ &\quad - \frac{u_2^2 + u_1^2}{2 u_1 u_2} shu_2 shu_2 - 1 \end{aligned}$$

где  $m = \frac{a^2}{l^2}$

Для комплексных корней найдем  $M_{x=0}$  из ф-лы 23), положив

$$u_1 = l(\alpha + \beta i) = v_1 + v_2 i \quad \alpha_1 = \left[ \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} (v_1^2 - v_2^2) \right] - i 2 \frac{b^4}{l^4} v_1 v_2 = c - id$$

$$u_2 = l(\alpha - \beta i) = v_1 - v_2 i \quad \alpha_2 = c + id$$

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \frac{q l^2 2}{2} \frac{(v_1^2 - v_2^2)(c^2 + d^2) + 8 m v_1 v_2 (c sh v_1 sn v_2 - d ch v_1 cs v_2) -}{(v_1^2 + v_2^2)(c^2 - d^2)(cs^2 v_2 + sh^2 v_1) -} \\ &\quad - \frac{2 [(v_1^2 - v_2^2)(c^2 - d^2) - 4 cd v_1 v_2] (cs^2 v_2 + sh^2 v_1) +}{-(v_1^4 - v_2^4)(sh^2 v_1 + sn^2 v_2) -} \\ &\quad + \frac{4 m v_1 v_2 [(v_1 c + d v_2) sn 2 v_2 + (c v_2 - d v_1) sh 2 v_1] +}{+ \frac{v_1^4 - 6 v_1^2 v_2^2 + v_2^4}{v_1^2 v_2^2} (sh^2 v_1 + sn^2 v_2)} \\ &\quad - \frac{(v_1^2 + v_2^2)(c^2 + d^2)}{(v_1^2 + v_2^2)(c^2 + d^2)} \end{aligned} \quad (23)$$

Если корни вещественны и кратны  $u_1 = u_2 = u$ , то поступая как и выше, найдем:

$$\begin{aligned} M_{x=0} &= \frac{q l^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left\{ 2 \frac{(z chu - 1)(ch 2u - 8zchu + 4z^3 chu + 3)}{6z - 7 + 7chn(2z - 3z^2 + z^3)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(shu - u)(2u - sh 2u)z}{4zu shu(z - 2) - ch 2u(2z - 1) + 2u^2} - 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь обозначено } z &= \frac{m}{\alpha} = \frac{\frac{a^2}{l^2}}{\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4}} u^2 \quad \text{ранее (случай В) } z = \\ &= \frac{2}{u^2} \cdot u^2 = 2 \end{aligned} \quad (23)''$$

Ф-ла 23) при  $z = 2$  обращается в ф-лу (17'')

Если  $v_1 \cong v_2 \left( \frac{a_1 b}{\gamma} - \text{мало} \right)$ , то получим частный случай ф-лы 23')

$$\begin{aligned} M_{z=0} &= \frac{q l^2}{2} \cdot 8 m (c \operatorname{sh} v \operatorname{sn} v - d \operatorname{ch} v \operatorname{cs} v) + 8 cd (c s^2 v + s h^2 v) + \\ &+ \frac{4 m v [(c + d) \operatorname{sn} 2 v + (c - d) \operatorname{sh} 2 v] - 2 (s h^2 v + s n^2 v)}{2 (c^2 - d^2) (c s^2 v + s h^2 v) - 2 (c^2 + d^2)} \end{aligned} \quad (23)'''$$

Частные случаи полученных формул.

Предварительно подытожим обозначения:

введя еще  $\epsilon^2 = E I g$ , где  $g = c h \cdot \frac{1}{D_n} \left[ 1 + \frac{E_1 D_n}{h} \right]$ ,

получим:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= \frac{h^2 E I}{D} + \frac{\mu}{g} = a^2 + \frac{\mu E I}{g E I} = a^2 + \frac{b^4}{\epsilon^2} \\ \gamma^4 &= 1 + \frac{h \cdot D_n}{c \cdot D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_1 D_n}{h}} = 1 + \frac{a^2}{\epsilon^2} \end{aligned}$$

Параметры  $a^2$ ,  $b^4$  и  $\epsilon^2$  характеризуют собой

$a^2$  — жесткость лонжерона на кручение

$b^4$  „ „ „ „ нервуры на изгиб

$\epsilon^2$  „ „ „ „ „ „ „ „ кручение.

Характеристич. у-ние переписется:

$$k^4 - k^2 \left( \frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) + \left( \frac{1}{b^4} + \frac{a^2}{b^4} \cdot \frac{1}{\epsilon^2} \right) = 0 \quad (25)$$

1) Если  $\epsilon = \infty$ , т. е. практически  $E_1 = \infty$  — т. е. нервура не может воспринимать кручения:  $a_1^2 = a^2$ ;  $\gamma^4 = 1$  и имеем случай В.

2) Если  $\epsilon = 0$ , то из характеристик. у-ния (24) получим  $\lim k_1^2 = \infty = \infty \lim k_2^2 = \frac{a^2}{b^4}$ . К-нты  $\alpha_1 = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} u_1^2$  и  $\alpha_2 = \frac{a^2}{l^2} - \frac{b^4}{l^4} u_2^2$  в пределе —  $-\infty$  и 0. Подставляя эту в ф-лу (23) получим  $M_{x=0} = 0$ , что вполне естественно.

3)  $b^4 = \infty$  т. е. практически  $\gamma_1 = \infty$ , т. е. нервюра не воспринимает изгиба, то, если  $g \neq \infty$  из у-ний 12) и 13)  $q_x = 0$ , так как иначе  $Y_x, G_x$  или  $z$  беск. велики. Вставив это в р-во (19) и приняв во внимание 18), получим дифференцируя (19)

$$m_x'' - \frac{m_x}{\epsilon^2} = \frac{q}{\epsilon^2} (l - x)$$

Это у-ние совместно с (18) и начальными условиями ( $x'_{x=0} = 0 : z''_{x=l} = 0$ ) дает

$$m_x = C_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} + C_2 e^{-\frac{x}{\epsilon}} + qx - ql$$

где

$$C_1 = \frac{ue^{-u} - 1}{e^u + e^{-u}} q; C_2 = \frac{ue^u + 1}{e^u + e^{-u}} q \quad \text{где } u = \frac{l}{\epsilon}$$

Так как

$$M_x = EI \frac{d^2 z}{dx^2} = -\epsilon^2 \frac{dm_x}{dx},$$

то

$$M_x = \frac{q l^2}{2} u^2 \left[ \frac{cht + u sh(u-t)}{chu} - 1 \right] \quad (25)$$

и

$$M_{x=0} = \frac{q l^2}{2} A(u) \quad (25')$$

Сравнивая полученное со случ. А), видим, что действие одних моментов  $m_x$  (точнее  $\frac{dm_x}{dx} \Delta x$ ) вполне идентично в этом случае с действием нагрузок  $q_x$  в случ. А. Все ф-лы для  $M_{x=0}$ ,  $M_{min}$  и  $f$  будут те же и численно совпадут, если  $a = \epsilon$ .

4) Если  $b = 0$ , т. е. нервюра беск. жестка на изгиб и при этом допустить, что  $\epsilon \neq 0$ , то, пользуясь ур-ми 15) и 19), заменив  $EI \frac{d^2 z}{dx^2}$  на  $M_x$ , получим

$$M_x'' - M_x \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \right) - q = 0$$

Начальные условия для определения  $M_x$  те же, что и в случ. А т. е.:

а)  $x = l \quad M_x = 0$

б)  $x = l \quad EI \frac{d^3z}{dx^3} = M'_x = -m_{x=l} + Z$ ; но  $m_{x=l} = -\frac{1}{g} \cdot \frac{dz}{dx}_{x=l}$  (у-ние

(18) и  $Z = \frac{D}{h^2} \cdot \frac{dz}{dx}_{x=l}$  (условие 3) откуда  $M'_{x=l} = \frac{dz}{dx} \cdot EI \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\epsilon^2} \right)_{x=l}$

Присоединив сюда еще (2)  $x = 0$ ;  $\frac{dz}{dx} = 0$ , получим аналогично во всем со случаем А, только вместо прежнего аргумента  $u = \frac{l}{a}$  во всех идентичных формулах стоит теперь  $u = \frac{l}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2}{\epsilon^2}}$ .

Так как  $u$  теперь увеличен, то и влияние нервюр естественно, как то следует из графика черт. 5 — больше.

5) Если  $a = \infty$ , т. е. лонжерон не может сопротивляться скручиванию, то по у-нию 15)  $q_x = 0$ , а следов. остается повторить сказанное в пункте 3) и снова  $u = \frac{l}{\epsilon}$ .

6) Если  $a = 0$ , то  $a_1^2 = \frac{b^4}{\epsilon^2}$ ,  $\gamma^4 = 1$  и характеристич. у-ние (24) напишется:  $k^4 - \frac{b^4}{\epsilon^2} + \frac{1}{b^4} = 0$ ; чтобы найти  $M_{x=0}$  остается подставить в одну из формул 23), 23') или 23'')  $m = 0$ .

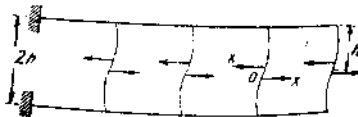
### § 6. Изгиб крыла в его плоскости.

Д) Теперь переходим к расчету нашей рамы силами, лежащими в плоскости крыла. В силу допущения, что нервюры достаточно жестки по отношению к действию на них продольных усилий, мы можем считать, как установлено выше, что на оба лонжерона действует направленная в одну сторону одинаковая нагрузка  $\frac{p_1 + p_2}{2}$ , так что силами  $\frac{p_1 - p_2}{2}$  можно пренебречь. Это будет достаточно верно, если внешние силы  $p_1$  и  $p_2$  передаются непосредственно в виде узловой нагрузки на лонжероны. В случае, если нагрузку  $p_1$  и  $p_2$  вернее считать распределенной, то в силу одинаковости нагрузок  $\frac{p_1 - p_2}{2}$  на смежные участки можно приближенно в нашем случае считать узловые опоры лонжерона — неповорачивающимися и потому каждый участок „с“ лонжерона можно разсматривать как балку на 2-х опорах с за-

щепленными концами, а следов. добавить к найденным ниже изгиб. моментам, соответствующие члены, которые будут порядка  $\frac{c^2}{l^2}$  по отношению к первым.

Так в случае полного защемлен. добав. опорный момент =  $\frac{q c^2}{12}$ .

Разрезав нервюры посередине, в силу симметрии задачи придем к заключению, что в этих точках (черт. 9) будут действовать лишь



Фиг. 9.

сосредоточенные силы  $X$ . Заменяв их действие, аналогично предыдущему, распределенными по лонжерону парами с моментами  $\mu_x$ , так что

$$c \cdot \mu_x = X \cdot h,$$

у-ние упругой линии лонжерона

$$EI_1 y'' = -p \frac{(l-x)^2}{2} + \int_x^l \mu \zeta d\zeta \quad (19'')$$

С другой стороны, в силу отсутствия смещения по оси  $OX$  точек 0

$$y/h = -\frac{X h^3}{3 E_1 i_1} \left( 1 + \frac{3 \zeta E_n i_1}{h} \right), \text{ т. е. } \frac{dy}{dx} = -g_1 \mu_x \quad (18')$$

где

$$g_1 = hc \frac{1}{3 E_n i_1} \left( 1 + \frac{3 \xi E_n i_1}{h} \right).$$

Сравнивая полученные у-ния с у-ми 18) и 19), а также п. 3 § 5-го ( $b = \infty$ ) приходим к заключению о полной аналогии, если только прежнее  $m_x$  заменить на  $\mu_x$ ,  $g$  — на  $g_1$  и  $\varepsilon^2$  на  $\varepsilon_1^2 = g_1 E I_1$ . Т. о. ф-ла для изгиб момента  $M_x$  на лонжероне:

$$M_x = \frac{p l^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left[ \frac{u \operatorname{sh}(u-t) + cht}{chu} - 1 \right] \quad (25'')$$

где

$$u = \frac{l}{\varepsilon_1}$$

и

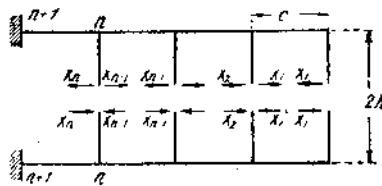
$$M_{x=0} = \frac{p l^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \frac{1 + u \operatorname{sh} u - chu}{chu} \quad (25''')$$

Все остальное остается то же, что и в случ. А (и п. 3), и след. при расчете можно пользоваться теми же графиками черт. 5.



*Погрешности результатов и более точные формулы.* Остановимся лишь на вопросе о погрешностях формул для  $M_{z=0}$  (ф-ла 25') и 25'''), где принято  $B^* = 0$  (25'), или нервюра несжимаема ф-ла (25'''), так как это предположение достаточно близко к действительности. Погрешность в определении  $M_{z=0}$  главным образом зависит, от числа нервюр —  $n$  при данном  $l$ .

Остановимся подробнее на случ.  $D$  и ф-ле (25'''), так как ф-ла (25') может быть аналогично рассмотрена лишь изменяя как указано ниже обозначения.



Фиг. 10.

Рассмотрим случай конечного числа ( $n$ ) нервюр. Тогда считая <sup>1</sup> за лишние неизвестные в раме взаимно уравновешивающиеся в каждой панели силы  $X_1, X_2, X_3, X_n$ , (черт. 10) получим в случае равномерной нагрузки  $p$  сл. систему у-ний для определения  $X_1, X_n$  в наших обозначениях:

$$\begin{aligned} X_2 - X_1 (6\alpha + 2) &= B \\ X_3 - X_2 (6\alpha + 2) + X_1 &= 7B \\ X_{i+2} - X_{i+1} (6\alpha + 2) + X_i &= B [(i+1)^3 - i^3] \\ - X_n (6\alpha + 1) + X_{n-1} &= B [n^3 - (n-1)^3] \end{aligned}$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{c}{2h} \cdot \frac{E_n i_1}{E_1 I_1} \quad (27)$$

$B = pl \cdot \alpha \frac{c}{h} \cdot \frac{c}{l}$ , где  $E_n i_1$  — жесткость нервюра,  $E_1 I_1$  лонжерона.

Предположено, что нервюры жестко соединены со стойками и лонжероны зацементированы на  $n+1$ -ой опоре. Аналогичное получим и для упругих опор; вместо  $\alpha$  вводим  $u$ :

$$\alpha = \frac{l^2}{6 \cdot \epsilon_1^2 \cdot n^2} = \frac{u^2}{6 n^2} \quad (27') \quad \text{и} \quad B \cdot h = \frac{p^2 l}{2} \cdot \frac{u^2}{3 n^4} \quad (27'')$$

где

$$\epsilon_1^2 = l^3 \frac{hc}{3 l^2} \frac{E_1 I_1}{E_n i_1} \left( 1 \times \frac{3 \zeta E_n i_1}{h} \right); \quad n = \frac{l}{c}$$

<sup>1</sup> См. работу проф. В. Г. Галеркина. „К расчету безраскосных ферм“ 1926 г. (у-ние 9).

Нам интересно найти  $M_{x=0} = pl^2 - X_n h = \frac{p^2 l}{2} \left[ 1 - \frac{u^2}{3} G(u, n) \right] = \frac{pl^2}{2} \Phi(u, n)$  . . . . (28) и вид ф-ции  $\Phi(u, n)$  дающей меру облегчения работы лонжерона.

Чтобы найти  $X_n$  (и вообще  $X_i$ ) из системы (26) решаем у-ние  $X_{i+2} - X_{i+1} \left( \frac{u^2}{n^2} + 2 \right) + X_i = B \left[ (i+1)^3 - i^3 \right]$  (26') в конечных разностях.

Общее решение у-ний (26') будет

$$X_i = C_1 k_1^i + C_2 k_2^i + \mu_i$$

где  $k_1$  и  $k_2$  найдутся из у-ния  $k^2 - \left( \frac{u^2}{n^2} + 2 \right) k + 1 = 0$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{u^2}{2n^2} + \frac{u}{n} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4n^2}} \\ k_2 &= 1 + \frac{u^2}{2n^2} - \frac{u}{n} \sqrt{1 + \frac{u^2}{4n^2}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$C_1$  и  $C_2$  найдутся из 1-го и последнего у-ния системы (26).

Из 1-го :  $X_0 = C_1 + C_2 + \mu_0 = 0$

Из 2-го :  $X_{n+1} - X_n = C k_1^n (k_1 - 1) + C_2 k_2^n (k_2 - 1) + \mu_{n+1} - \mu_n = 0$ .

Частное решение ищем в форме:

$$\mu_i = \beta_0 i^2 + \beta_1 i + \beta_2$$

Подставляя в у-ние (26') сравнением к-ов при одинаковых степенях

$$i \text{ найдем } \beta_0 = -\frac{3B}{u^2} \frac{1}{n^2}; \quad \beta_1 = \frac{3B}{u^2} \frac{1}{n^2}; \quad \beta_2 = -\frac{\frac{u^2}{6n^2} + 1}{\frac{u^4}{6n^4}} B;$$

т. о.  $\mu_0 = \beta_2$

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \beta_0 (2n+1) + \beta_1$$

и сл.

$$C_1 = \frac{k_2^n (1 - k_2) \beta_2 + \beta_1 + \beta_0 (2n+1)}{k_2^n (k_2 - 1) + k_1^n (1 - k_1)}$$

и

$$C_2 = \frac{-k_1^n (1 - k_1) \beta_2 - \beta_1 - \beta_0 (2n+1)}{k_2^n (k_2 - 1) + k_1^n (1 - k_1)}$$

$$\text{и искомое } X_n = C_1 k_1^n + C_2 k_2^n - \frac{3}{u^2} B n^2 + \frac{3}{u^2} B n - \frac{\frac{u^2}{6n^2} + 1}{\frac{u^4}{6n^4}} B$$

или

$$X_n = \frac{\beta_2 k_1^n k_2^n (k_2 - k_1) + [\beta_0 (n+1)^2 + \beta_1 (n+1) + \beta_2] (k_{2n} - k_{1n}) - [\beta_0 n^2 + \beta_1 n + \beta_2] \cdot (k_2^{n+1} - k_1^{n+1})}{k_1^{n+1} - k_2^{n+1} - k_1^n + k_2^n}$$

Подставляя найденное  $X_n$  в у-ние (28), получим, после некоторых упрощений:

$$M_{z=0} = \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left\{ \left( 1 + \frac{u^2}{6n^2} \right) \sqrt{1 + \frac{u^2}{4n^2}} + \frac{1}{2} \left[ \frac{k_1^{n+1} - k_1^{-(n+1)}}{2} + \frac{k_1^n - k_1^{-n}}{2} \right] u \right. \\ \left. \frac{2 \cdot \frac{n}{u} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{k_1^{n+1} - k_1^{-(n+1)}}{2} - \frac{k_2^n - k_1^{-n}}{2} \right]}{\left( 1 + \frac{u^2}{6n^2} \right)} \right\} = \frac{pl^2}{2} \cdot \Phi(u, n) \quad (30)$$

Иначе то же можно написать, заменив  $\frac{k^n - k^{-n}}{2} = sh(nlgk)$

и

$$\frac{k^{n+1} - k^{-(n+1)}}{2} = sh((n+1)lgk)$$

сл. образом:

$$M_{z=0} = \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left\{ \left( 1 + \frac{u^2}{6n^2} \right) \sqrt{1 + \frac{u^2}{4n^2}} + u sh \left[ (n + \frac{1}{2}) lg k_1 \right] \cdot ch \frac{lg k_1}{2} \right. \\ \left. \frac{2 \cdot \frac{n}{u} sh \frac{lg k_1}{2} ch \left[ (n + \frac{1}{2}) lg k_1 \right]}{\left( 1 + \frac{u^2}{6n^2} \right)} \right\} \quad (30')$$

Нетрудно видеть, что при  $n \rightarrow \infty$  и  $u$  конечном, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n}{u} sh \frac{lg k_1}{2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{sh \frac{lg k_1}{2}}{lg k_1 / 2} \right| = 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{lg(k_1^n)}{u} \right| = 1 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{lg k_1^n}{u} \right| = u, \text{ то}$$

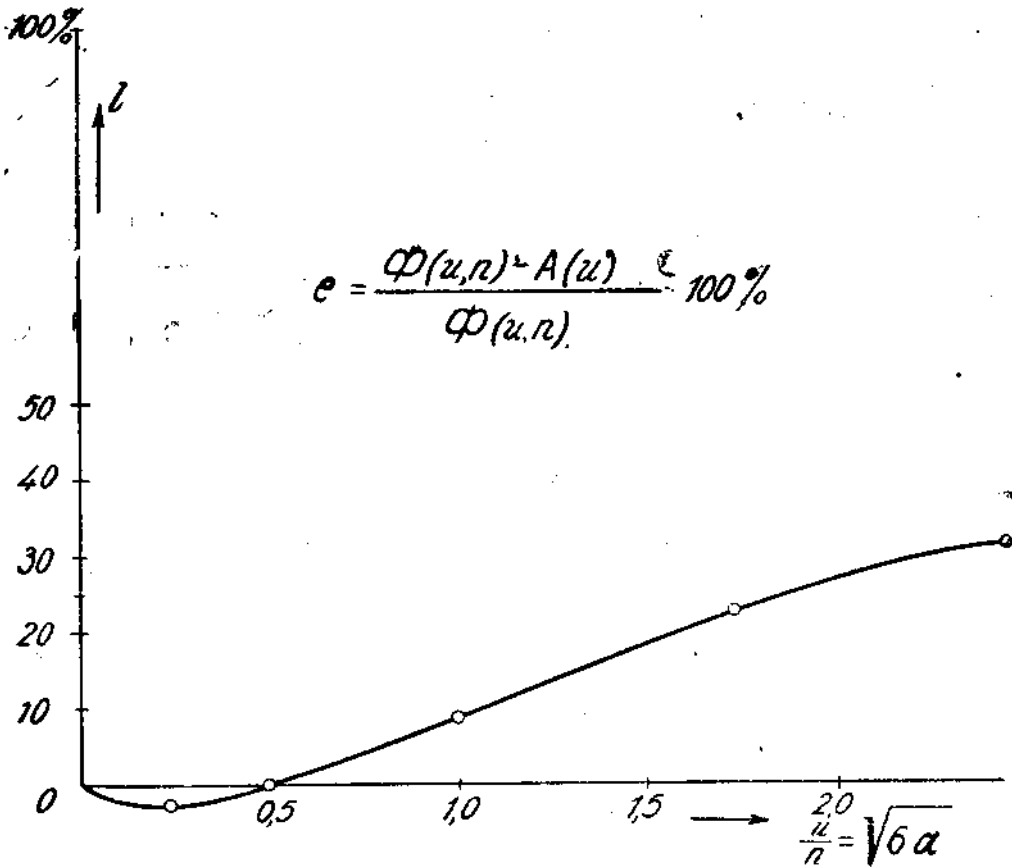
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| M_{z=0} \right| = \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left\{ \frac{1 + u sh u}{csu} - 1 \right\}$$

т.е. ф-ла (25''')

Вычисляя для конечных  $n$  и  $u$  разницу в определении  $M_{z=0}$  по ф-ле (30) и (30') и (25'''), приходим к заключению, что при практически важных  $\gamma$  от 4 до 10 и  $u$  относит. погрешность

$$\epsilon = \frac{\Phi(u, n) - A(u)}{\Phi(u, n)}$$

в определении  $M_{x=0}$  зависит почти исключительно от  $\frac{u}{n}$ , то же имеет место и при  $n > 10$ . Зависимость ошибки  $e$  от  $\frac{u}{n}$  дана черт. 11.



Фиг. 11.

Т. о. при  $\frac{u}{n} < 1$  можно пользоваться ф-ой (25'''), которая для  $n > 4$  примет вид 9)'. При большем  $\frac{u}{n}$  можно из ф-лы 30 получить достаточно точно (деля дробь на большое число  $\kappa_1^{n+1}$ ):

$$M_{x=0} \cong \frac{pl^2}{2} \cdot \frac{2}{u^2} \left[ \frac{1 + \kappa_1^{-1}}{(1 - \kappa_1^{-1})^2} \frac{1}{n/n} \cdot u - \left( 1 + \frac{u^2}{6n^2} \right) \right] \quad (30'')$$

То же заключение можно сделать и по отношению к ф-ле (25'). Действительно, при конечном числе нервюр сопротивляющихся только кручению, надлежит в каждой точке 0 (черт. 9) принять за

лишние неизвестные систему взаимно уравновешивающихся в каждой панели пар  $M_i$ .

$M_i$ . Тогда у-ние 26) аналогично переписется;

$$M_{i+2} - M_{i+1} (\alpha_1 + 2) + M_i = B_1 [(i+1)^3 - i^3] \quad (26'')$$

где

$$\alpha_1 = \frac{D_{\kappa c}}{EI h}, \quad B_1 = ql^2 \frac{\alpha_1}{6} \cdot \frac{c^2}{l^2} \text{ и вводим } u^2 = n^2 \alpha_1.$$

Теперь для  $M_{i=0}$  получим те же формулы (30) и (30') для этого случая разумея под  $u^2 = n^2 \alpha_1$ .

### § 7. Практические выводы.

Оценим величины параметров входящих в приведенные формулы.

$$1) \quad u = \frac{l}{a} = \frac{l}{h} \cdot \sqrt{\frac{D}{EI}}$$

Можно принять  $\frac{l}{h}$  от 8 до 16.

" "  $\frac{D}{EI}$  для метал. конструкц. примерно 0,5 — 0,8

" "  $\frac{D}{EI}$  " деревян. " " " 0,006 — 0,018.

Тогда  $u$  для мет. конст-ций от  $\infty$  5,6 до 14,3.

" " " дерев. " " " 0,62 до 2,1.

2) Параметр  $\frac{b^4}{l^4}$  характеризующий жесткость нервюр на изгиб:

$$\frac{b^4}{l^4} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{h^3}{l^3} \frac{EI}{E_n I_n} \left( 1 + \frac{3 \gamma_1 E_n I_n}{h} \right)$$

Если принять  $\frac{EI}{E_n I_n}$  от 1 до 20 и  $n$  от 4 до 10 то  $\frac{b^4}{l^4}$  изменяется

от:  $3,2 \cdot 10^{-3} v$  до  $0,8 \cdot 10^{-6} v$ , где  $v = 1 + \frac{3 \gamma_1 E_n I_n}{h}$

Т. о. обычно  $\frac{b^4}{l^4}$  — очень мало, если  $v$  близко к 1. Как то видно из черт. 7, практически (если  $v \cong 1$ ), можно считать нервюры бесконечно жесткими, что весьма упрощает весь расчет. В особенности это можно делать, при малых  $u$  (деревянных конструкциях лонжерона).

3) Если считать  $\frac{b^4}{l^4} = 0$ , то в ф-ле (9), надо считать, учитывая

возможность скручивания нервюр  $u_1 = \frac{l}{a} \sqrt{1 + \frac{a^2}{\varepsilon^2}}$

Параметр

$$\frac{a^2}{e^2} = \frac{h}{l} \cdot \frac{D_n}{D} \cdot \frac{1}{\gamma_2} \cdot n, \text{ где } \gamma_2 = \left(1 + \frac{E_1 D_n}{h}\right),$$

меняется, если принять

$$\frac{D_n}{D} \text{ от } 1 \text{ до } \frac{1}{20}$$

$\frac{a^2}{e^2}$  от  $1,25 \frac{1}{\gamma_2}$  до  $0,05 \frac{1}{\gamma_2}$ , т. е.  $u_1$  от  $= 1,025 u$  до  $u_1 = 1,5u$ , если  $\gamma_2 \cong 1$ .

Надо однако заменить, что, если  $\frac{u_1}{n} > 1$ , учет влияния крутящих моментов формулой 9) может как выяснено, привести к некоторым погрешностям, а потому, если  $u_1$  сильно разнится от  $u$  если преследуется большая точность, надо рассчитать балку считая  $n$  — конечным.

$$4) \text{ Параметр } u = \frac{l}{e_1} = \frac{l}{\sqrt{g_1 EI_1}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{n} \cdot \sqrt{\frac{l}{h}} \cdot \sqrt{\frac{E_n i}{EI_1}} \sqrt{\frac{1}{\gamma_2}}$$

в ф-ле (25'''), где

$$v_2 = 1 + \frac{3 \zeta E_n i}{h},$$

если принять  $\frac{E_n i}{EI_1}$  от 1 до  $\frac{1}{20}$ , изменяется от  $u \cong 2,2$  до 22 (если  $\gamma = 1$ ).

Для расчета системы в зависимости  $\frac{u}{n}$  применяем либо ф-лу (25'''), либо, (30), (30') или (30'').

Ко всему этому надо заметить, что при больших  $u$  можно, очевидно, пользоваться ф-ми (9') и (10').

В заключение заметим, что для применения настоящих упрощенных результатов, надо быть уверенным в достаточной жесткости соединений нервюры с лонжероном  $\left(\frac{b^4}{l^4} - \text{мало}\right)$ , и к осуществлению этого применять конструктивные меры. В противном случае (в особенности при больших  $u$ ) придется пользоваться ф-ми (17), (17)', (17)'' (либо черт. 7), либо 23), (23'), (23'') (23'''), которые при различных частных значениях параметров могут быть значительно упрощены.

В деревянных конструкциях, если  $u$  мало, нет смысла ставить особенно жесткие нервюры, если они к тому же недостаточно жестко скреплены с лонжероном.

При металлических конструкциях надо стараться увеличивать жесткость лонжерона на кручение и не ставить узких профилей.

Декабрь 1926 г.

## Приложение.

ИНЖЕНЕР-СТРОИТЕЛЬ  
Г. Г. САМОРОДОВ.

# МЕТОДИКА ВЫБОРА МОЩНОСТИ ГИДРОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛОВЫХ СТАНЦИЙ

С предисловием и под редакцией  
проф. А. А. Морозова.



# О Г Л А В Л Е Н И Е.

	Стр.
Предисловие . . . . .	177
Введение . . . . .	179
I. Самостоятельная работа станций без годичного и многолетнего регулирования стока . . . . .	181
§ 1. Случай нагрузки станций, прилаживающейся к естественным изменениям мощности водотока . . . . .	181
§ 2. Случай неопределенной величины нагрузки станций малой и средней мощности . . . . .	185
§ 3. Случай нагрузки, индивидуально изменяющейся в течение суток и целого года . . . . .	191
§ 4. Учет стоимости устройства резервуара для суточного регулирования . . . . .	204
§ 5. Суточное и недельное регулирование стока в связи с расчетом выбора мощности станций . . . . .	205
II. Самостоятельная работа станций при годичном и многолетнем регулировании стока . . . . .	209
§ 6. Регулирование стока и его учет при данном объеме водохранилища . . . . .	209
§ 7. Учет и определение рационального объема водохранилища . . . . .	212
1. Случай нагрузки § 1. . . . .	212
2. . . . . § 2. . . . .	215
3. . . . . § 3. . . . .	216
III. Совместная работа гидроустановок . . . . .	223
§ 8. Работа станций без годичного регулирования стока . . . . .	223
§ 9. Работа станций с годичным и многолетним регулированием стока . . . . .	233

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Насколько сравнительно просто разрешается вопрос о мощности строящейся тепловой электрической станции, где, назначая размеры этой мощности, можно руководствоваться ожидаемым размером потребления энергии в ближайшее время, настолько же сложно решается этот вопрос при постройке гидроэлектрической станции. Последующее расширение тепловой установки в связи с ростом ее нагрузки обычно может быть произведено легко и безболезненно, тогда как всякое увеличение мощности гидроэлектрической станции всегда бывает связано с большими или меньшими затруднениями. Некоторые элементы гидротехнических сооружений такой установки иногда даже совершенно не допускают последующего расширения, или оно бывает связано с чрезвычайными трудностями. В силу этого обстоятельства приходится в самом начале предвидеть некоторые запасы в размерах отдельных частей установки (напр., в деривационных каналах, тоннелях и т. д.) дабы не закрыть себе возможности будущего их расширения.

Поэтому чрезвычайно важно заранее предвидеть тот предел увеличения мощности гидроэлектрической установки, до которого можно будет идти впоследствии. Этот предел обуславливается экономической возможностью установки. Вопрос об определении наивыгоднейшей мощности установки встает, таким образом, не только в том случае, когда эта мощность должна быть осуществлена в ближайшее время, но также и тогда, когда можно рассчитывать на ее осуществление в более или менее отдаленном будущем.

Размеры наивыгоднейшей мощности, которую можно получить от данного источника энергии, определяются кроме размеров и характера ожидаемой нагрузки, еще и специфическими особенностями данного водотока, его гидрологической характеристикой, стоимостью сооружений, служащих для использования его энергии, условиями комбинированной работы данной установки с тепловыми станциями данного района, стоимостью топлива на них и т. д. Определение наивыгоднейшей мощности представляет, таким образом, достаточно сложную задачу, которая до сего времени разрешалась лишь в общих чертах и для наиболее простых случаев.

Настоящая статья Г. Г. Самородова, представляющая его аспирантскую работу, дает понятие общего решения задач для всех возможных случаев, встречающихся на практике. Систематизируя все возможные комбинации параллельной работы гидроэлектрических и силовых установок по наиболее характерным признакам, определяющим эту работу (характер нагрузок, характеристика водотока, условия регулирования водотока и т. д.) и переходя от анализа наиболее элементарных схем работы к более сложным, автор приходит к общему разрешению задачи. Метод, предлагаемый автором, несмотря на некоторую сложность его вывода, в конечном результате достаточно прост и удобно применим на практике, что, собственно говоря и требуется от решения всякой технической задачи. По полноте решения задачи работа автора не оставляет желать ничего большего и, во всяком случае, превосходит все методы, предлагавшиеся до сего времени. Можно полагать поэтому, что она представит известный практический интерес, тем более, что в нашей технической литературе можно найти весьма мало работ, затрагивающих эту весьма важную тему.

Проф. А. Морозов.

## ВВЕДЕНИЕ

Выбором мощности гидроэлектрической силовой установки называется расчет, производимый с целью установления при данных условиях режима водотока и нагрузки ее наивыгоднейшей величины.

Характер работы станций меняется с переменной типа ее нагрузки и вида суточного регулирования стока при использовании водной энергии реки с естественным гидравлическим режимом. В соответствии с этим меняется и расчет по определению ее мощности.

Кроме того, введение искусственного регулирования расходов воды в реке путем сооружения водохранилища требует дополнительного расчета для определения наивыгоднейшей емкости последнего при каждом данном условии работы станции, что усложняет общую задачу.

На ряду с этим возможна совместная работа нескольких установок с взаимным обменом лишней энергии, что при всех вышеуказанных факторах вводит дополнительные влияния, как в самый расчет по определению их мощности, так и в расчет предварительно необходимый по определению емкости водохранилищ в случае наличия таковых.

Все вышесказанное привело к необходимости расчленить работу на три тесно связанных между собою раздела. В разделе I дан основной расчет для самостоятельной работы станций соответственно при разных типах их нагрузки и разном виде суточного регулирования в условиях естественного режима водотока. В разделе II изложен, как общий учет годового и многолетнего регулирования стока для самостоятельной работы станций, так и расчет по отысканию наивыгоднейших объемов их водохранилищ соответственно для разных нагрузок с учетом суточного регулирования. В разделе III трактуются расчеты для случая совместной работы установок, как при естественном режиме водотоков с учетом разных видов суточного регулирования, так и при зарегулированном с введением характерных для этого случая методов определения наивыгоднейших объемов водохранилищ при разных схемах их расположения.

Все указанные расчеты изложены в предположении готовых данных об электрической нагрузке станций, методы определения которой приняты известными.

# I.

## Самостоятельная работа станций без годовичного и многолетнего регулирования стока.

§ 1. Случай нагрузки станций, прилаживающейся к естественным изменениям мощности водотока.

Нагрузка этого вида отвечает потреблению энергии для целей химического, металлургического, бумажного и деревообрабатывающего промышленных производств.

Здесь расчет сводится к нахождению наиболее выгодной рабочей мощности станции  $P$  при данном режиме водотока в условиях заданной нагрузки.

Пусть  $Q$  есть годовая кривая средней продолжительности расхода ( $m^3/c$ ) и мощности ( $kw$ ) водотока, а  $S$ —кривая изменения мощности водотока  $N$  по кривой  $Q$  (ординаты) в функции возможной годовой выработки  $M_0$   $kw\hbar$  энергии (фиг. 1). Тогда, полагая что установка неизменно работает  $t$  часов в сутки, будем иметь три случая расчета.

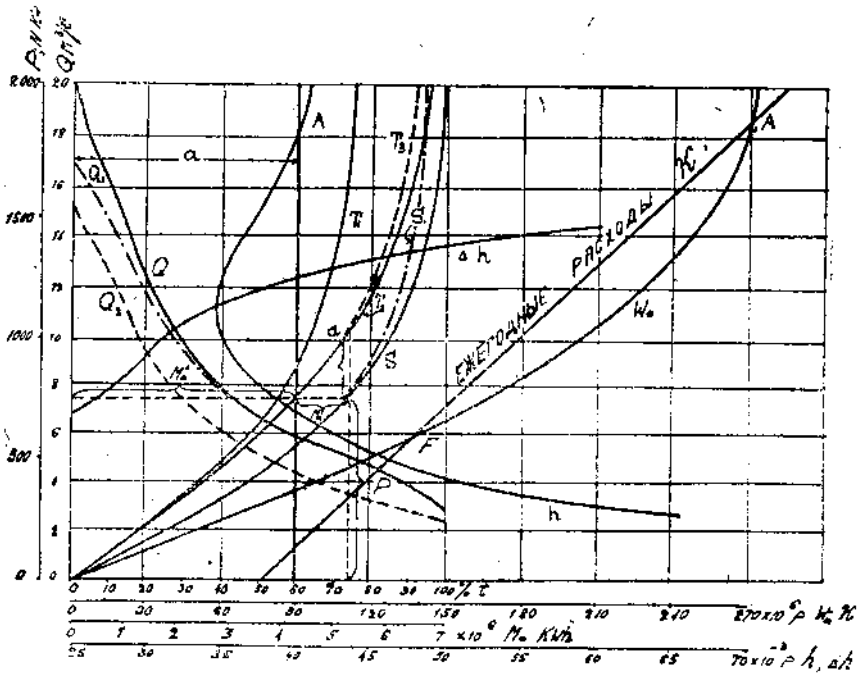
1. Гидростанция работает без суточного регулирования стока с коэффиц. пользования  $\frac{t}{24}$ .

Здесь станция любой мощностью  $P$   $kw$  будет производить количество годовой энергии  $M_0$   $kw\hbar$  в  $\frac{24}{t}$  раза меньше, чем мог бы произвести водоток с той же мощностью станции по кривой  $S$ . В силу этого зависимость  $P$  в функции  $M_0$  здесь может быть построена в виде кривой  $T_1$  путем уменьшения в  $\frac{24}{t}$  раза абсцисс кривой  $S$  для целого ряда взятых ее ординат  $N$ .

2. Гидростанция работает с полным суточным регулированием стока с коэффиц. пользования  $\frac{t}{24}$ .

Здесь при одинаковом годовом количестве производимой энергии  $M_0$   $kw\hbar$  рабочая мощность станции  $P$  должна быть в  $\frac{24}{t}$  раза больше мощности водотока  $N$  и зависимость  $P$  в функции  $M_0$  изобразится в виде кривой  $T_2$ .

3. Гидростанция имеет возможность работать с полным суточным регулированием только до определенной величины ее рабочей мощности  $P$ . То-есть существует предел производства регулирования, вызванный ограниченной емкостью б'ефа или бассейна. Этот случай аналогичен второму с той лишь разницей, что по кривой  $T_2$  после некоторой (уже выясненной) величины мощности станции (точка  $a$ ), закон изменения  $P$  в функции  $M_0$  пойдет аналогично случаю 1 при соответственно создавшемся режиме стока. Чтобы найти от лежащей на кривой  $T_2$  точки  $a$  искомую



Фиг. 1.

ветвь кривой  $T_2$ , построим путем умножения ординат кривой  $Q$  на  $\frac{t}{24}$  кривую  $Q_1$ , обозначающую естественный суточный сток, используемый станцией в предположении работы случая 1. Зная предельный (сообразно емкости б'ефа или бассейна) хранимый в течении 24— $t$  часов и используемый в течении  $t$  часов работы установки со средне-суточным значением расхода  $(Q - \frac{t}{24} Q)$  м<sup>3</sup>/с. объем воды, строим кривую  $Q_1$  ограничивающую используемый расход и мощность водотока<sup>1</sup> (фиг. 1). Кривая  $Q_1$  на ряду с первоначальной  $Q$  поведет к соответствующему уменьшению наибольших абсцисс кривой  $S$ , превращая ее в  $S_1$ , что

<sup>1</sup> При переменном напоре  $H$ , зная  $H = f(Q)$ , следует иметь дело с мощностью  $\mu HQ$ , где  $\mu$  — коэфф. проп.

в свою очередь повлечет изменение кривой  $T_2$  в  $T_1$ , могущей быть построенной по кривой  $S_1$  способом аналогичным построению кривой  $T_2$  случая 2.

Пользуясь кривыми  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , выбор мощности может быть произведен, согласно двум возможным условиям сбыта энергии.

### А. Продажная стоимость энергии в течение года постоянна.

Здесь имеем два подслучая:

а) Продажная стоимость всей энергии одинакова.

Установим продажную стоимость  $kwh$  в  $a$  руб., определяемую наименьшей себестоимостью тепловой, тогда, находя для ряда мощностей  $P$  по любой из кривых  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , производимое за год  $M_0 kwh$ , строим в зависимости от  $P$  кривую годовой выручки  $W_0 = a \cdot M_0$  (на фиг. 1 кривая  $W_0$  построена по кривой  $T_2$ ). Далее, зная несвязанные с мощностью установки ее затраты  $D$ , стоимость ее установленного  $kw d$  и годовой % эксплуатации  $\alpha$ , напомним прямую годовых расходов  $K = \alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P$ . Наивыгоднейшее значение  $P$  определится максимумом разностей абсцисс  $W_0$  и  $K$ .

Если построить в зависимости от  $P$  кривую себестоимости энергии  $h = \frac{K}{M_0}$  и кривую приращения себестоимости  $\Delta h = \frac{\Delta K}{\Delta M_0}$  (фиг. 1), где  $\Delta K$  и  $\Delta M_0$  суть увеличения для  $K$  и  $M_0$  при приращении  $F$  на  $\Delta P$ , то найденная величина  $P$  будет лежать выше минимума  $h$  и должна отвечать равенству  $\Delta h = a$ , ибо прибыль  $(W_0 - K)$  растет пока  $\frac{\Delta K}{\Delta M_0} < a$ . Отсюда условие выгодности:

$$\frac{\Delta K}{\Delta M_0} = \frac{\alpha \cdot d \cdot \Delta P}{\Delta M_0} = a \quad (1)$$

или

$$\frac{\Delta P}{\Delta M_0} = \frac{a}{\alpha \cdot d} = t g \varphi \quad (1a)$$

где  $\varphi$  — угол наклона к оси абсцисс касательной к любой из кривых  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , равный  $\arctg \frac{a}{\alpha d}$ . Искомая мощность  $P$  определяется по кривым  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$  условием (1a).

б) Продажная стоимость некоторой части всей энергии отлична от установленной.

Здесь имеется в виду дополнительный сбыт по удешевленной цене энергии, производимой в часы наименьшей загрузки станции (ночью).

Определим количество удешевленной энергии, производимой дополнительно при любой мощности станции  $P$ . Пусть при исполь-

зуюмой мощности водотока  $N$  *kw* количество производимой энергии составляет  $M_0$  *kwh* в год. Если бы станция работала 24 часа в сутки, то  $N$  определялась бы по кривой  $S$  значением  $M_0$  и представляла бы мощность станции. Но установка работает  $t$  часов в сутки, что при необходимости выработки прежнего числа  $M_0$  *kwh* требуется увеличить  $N$  в  $\frac{24}{t}$  раза, чему соответствует кривая  $T_2$ . Необходимое при

этом увеличение мощности станции до  $N + N \left(\frac{24}{t} - 1\right)$  должно покрывать помимо средне-суточной загрузки еще некоторый ее избыток за счет ежесуточно скопляемой в течение  $24 - t$  часов энергии водотока. Обращаясь к кривым  $T_2$  и  $S$ , видно, что увеличение мощности по  $T_2$  от  $N$  до  $N + N \left(\frac{24}{t} - 1\right)$  отвечает выработке добавочной энергии за год в количестве  $M_0'$  *kwh*. Если бы это количество энергии получило бы сбыт без повышения мощности станции сверх мощности водотока  $N$ , то оно явилось бы дополнительным к тому производимому установкой количеству энергии  $M_0''$ , которое определяет кривая  $T_2$  при мощности станции  $P = N$ . Мы решаем вопрос в предположении сбыта энергии  $M_0'$ , в силу чего при любой взятой мощности станции  $P = N$  производимое в часы меньшей ее загрузки количество энергии за год определяется разностью абсцисс кривых  $S$  и  $T_2$  при числе производимых  $M_0''$  *kwh*, подлежащих к сбыту по нормальному тарифу и определяемых абсциссой кривой  $T_2$ .

Пусть  $\frac{M_0''}{M_0} = n$  и стоимость энергии соответственно для количеств  $M_0''$  и  $M_0'$  равна  $a$  и  $b$  руб. за *kwh*. Тогда при мощности станции  $P = N$  годовая выручка в руб. выразится, как

$$W_0 = n \cdot M_0 \cdot a + (1 - n) M_0 \cdot b \quad (2)$$

Выражение (2) позволяет построить в функции  $P$  кривую  $W_0$ , аналогичную представленной на фиг. 1, что вместе с зависимостью  $K$  даст решение задачи, как и в подслучае а) Средняя продажная стоимость энергии  $a_0$  здесь выражается, как

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{n \cdot M_0 \cdot a + (1 - n) M_0 \cdot b}{M_0} = n(a - b) + b = \\ &= \frac{M_0''}{M_0' + M_0''} (a - b) + b \end{aligned} \quad (3)$$

Означенный метод одинаково приемлем при пользовании кривыми  $T_1$  и  $T_2$ .

<sup>1</sup> См. V. Gruenewald: Die wirtschaftliche Ausbaugröße von Wasserkraftanlagen W. 1924 Н. 4.



### В. Продажная стоимость энергии в течение года различна.

Здесь имеется в виду повышение сбыта энергии в некоторые части года путем снижения тарифа.

Зная на основании вида потребления энергии периоды года, когда выгодно повысить сбыт ее путем снижения тарифа, устанавливаем для них среднюю пониженную продажную стоимость. Затем, выбрав годовой средне-многолетний или средне-гидрологический график мощности водотока, перестраиваем таковой по продолжительности с участками площади, отвечающими количеству дешевой энергии. Далее, сокращая означенные участки до эквивалентной величины при обычной стоимости энергии, исходя из одного и того же годового числа рублей, на которые должна быть запродала льготная энергия водотока при каждой взятой его мощности, строим кривые  $S$  или  $S'$ , как наложено выше. Дальнейший расчет аналогичен случаю А.

### § 2. Случай неопределенной величины нагрузки станций малой и средней мощности.

Здесь имеется в виду станции, предназначенные к снабжению энергией районов с разнообразными потребителями, мало исследованными для составления точных графиков нагрузки, а также с быстро растущей (динамической) нагрузкой. Если возможно по условиям района предвидеть общий характер его электрификации, то расчет можно основать на учете типа будущей нагрузки, при чем результат будет тем точнее, чем меньше район и станция.

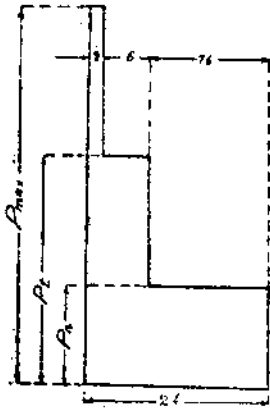
Нижеприведенный приближенный метод основан на учете типа нагрузки мелких и средних станций, работающих однотипно на освещение и моторную нагрузку совместно с тепловым резервом. Для установления типа суточной нагрузки этих станций, разбиваем сутки на три периода длительности: первый отвечает средне-пиковому максимуму  $P_{\max}$ , второй — средне-дневному максимуму  $P_d$  и третий — среднему минимуму  $P_n$  мощности нагрузки. Средне-пиковый максимум длится в среднем не более 2 часов. Средне-дневной максимум отражает интенсивность работы мелкопромышленных предприятий обычно с 8 ч. утра до 12 ч. дня и от 1 до 3 и длится в среднем  $\approx$  6 часов. Остальные 16 часов суток характеризуются наличием среднего минимума.

Суточный график нагрузки, представленный по продолжительности мощности, составит из трех четырехугольников, характеризующих последовательно длительность средне-пиковой (2 ч.), средне-дневной (6 ч.) и средне-минимальной мощности (16 ч.) с абсолютной длительностью соответственно в 2, 8 и 24 часа (фиг. 2).

При постоянных значениях степени влияния работы моторов

$h_1 = \frac{P_d}{P_{\max}}$  и коэффиц. пользования нагрузки  $A'd$  величины мощности

$P_{\max}$ ,  $P_t$  и  $P_n$  при установленной выше их длительности находятся в определенном соотношении.



Фиг. 2.

Мы имеем:

$$2 P_{\max} + 6 P_t + 16 P_n = A'\partial \cdot 24 \cdot P_{\max} \quad (4)$$

или, деля на  $P_{\max}$

$$\frac{P_n}{P_{\max}} = \frac{A'\partial \cdot 12 \cdot - 3 h_1 - 1}{8}$$

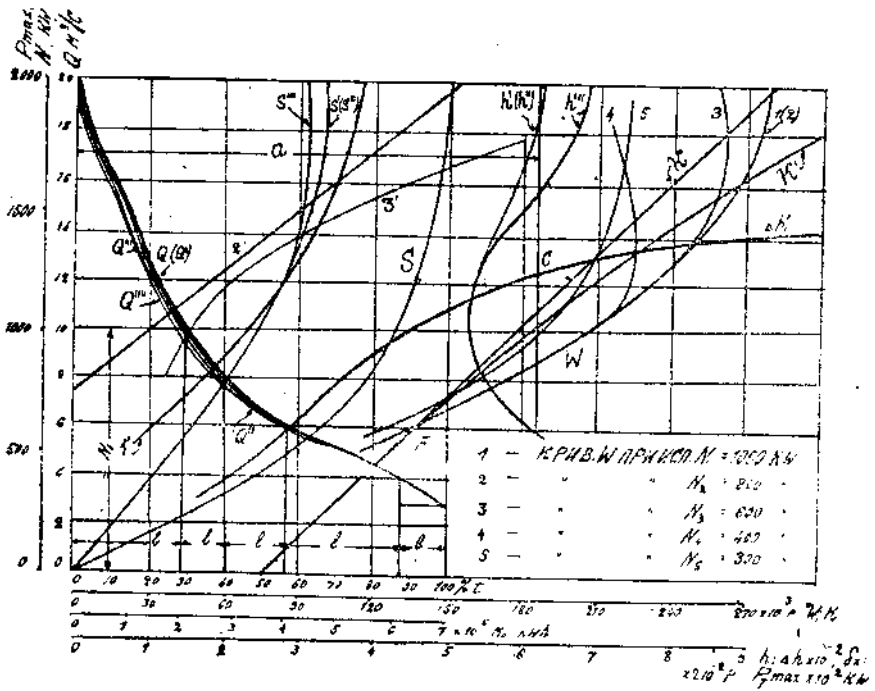
после чего

$$P_{\max} : P_t : P_n = 1 : h_1 : \frac{A'\partial - 3 h_1 - 1}{8} \quad (5)$$

Приняв  $h_1 = 0,6$  и  $A'\partial = 0,4$ , получаем

$$P_{\max} : P_t : P_n = 1 : 0,6 : 0,25$$

Пусть на фиг. 3 имеем головную кривую  $Q$  средней продолжительности расхода ( $m^3/c$ ) и мощности ( $kw$ ) водотока. Тогда общий ход



Фиг. 3.

расчета по выбору наиболее выгоднейшей величины станции при комбинированной ее работе с тепловым резервом может быть основан на варьировании ряда подобных, но различных по величине суточных диаграмм

нагрузки при нескольких взятых значениях мощности водотока по кривой  $Q$ . При чем из всех рентабельных величин станции  $P_{\max}$  самая рентабельная найдется из условия получения наибольшей годовой прибыли при данной продажной стоимости комбинированной энергии.

Установим продажную стоимость энергии в  $a$  руб. за  $kwh$ , определяемую себестоимостью тепловой. Тогда имеем три случая расчета, сообразно видам регулирования.

1. Полное суточное регулирование стока.

Задаваясь по кривой  $Q$  рядом основных значений мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$ , разбиваем каждую из них на  $n$  промежуточных  $N_0$ , для которых определяем по той же кривой периоды длительности  $l$  работы установки в днях так, чтобы  $\sum_1^n l = 365$ . Далее, сопоставляя каждую из разбитых на промежуточные значения  $N_0$  с периодами  $l$  мощностей водотока  $N_1, N_2 \dots$  с рядом подобных, но различных по величине суточных диаграмм нагрузки, найдем при каждой величине диаграммы и мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  потребную мощность теплового резерва, которая при условии его работы на низах<sup>1</sup> диаграммы в каждом из  $n$  периодов  $l$  будет равной

$$P_T = \frac{m_T}{l \cdot 24} \quad (6)$$

где  $m_T$ —число тепловых  $kwh$ , необходимых к дополнительному производству в периоде  $l$ , при чем, когда по (6)  $P_T > P_n$ , то  $P_T$  должно увеличиваться на  $(P_T - P_n) \cdot \frac{16}{8}$  и тогда

$$P_T = \frac{m_T}{l \cdot 24} + 2 \left( \frac{m_T}{l \cdot 24} - P_n \right) \quad (6a)$$

Количество же гидравлической энергии, производимой за год при каждой диаграмме и мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  соответственно составит

$$M_0 = \sum_1^n (m - m_T) \quad (7)$$

где  $m$ —число потребных по диаграмме  $kwh$  в каждом из  $n$  периодов  $l$ .

При каждой величине диаграммы и взятой к использованию мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  общая годовая валовая выручка в руб. только от продажи гидравлической энергии будет равной

$$W_0 = \sum_1^n (m - m_T) \cdot a \quad (8)$$

<sup>1</sup> О суточной работе воды и пара при равных видах регулирования см. § 3.

Учетом в (8) влияние работы теплового резерва. Т. к. действительная себестоимость энергии резерва, может быть иной, нежели принятая ее продажная цена, то для получения истинного значения валовой выручки  $W$  за год, надо выручку  $W_0$  исправить на ту сумму рублей, которая получится от произведения количества энергии  $\sum_1^n m_T$  производимой за год резервом, на соответствующую разность между действительной ее себестоимостью  $h_T$  и установленной продажной  $a$ .

При каждой величине диаграммы и взятой мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  расчетная мощность резерва  $P_{T \max}$  определяется наибольшим значением из всех  $n$  периодов  $l$  по (6) или (6а) и тогда при цене установленного теплового  $kw$  в  $p$  руб. и средне-годовом % эксплуатации резерва  $\alpha'$

$$h_T = \frac{\alpha' \cdot p \cdot P_{T \max}}{\sum_1^n m_T} + \delta \quad (9)$$

где  $\delta$ —средний прямой расход по тепловому  $kw$ . Искомая поправка в (8) будет равна

$$W_T = \sum_1^n m_T (a - h_T)$$

и тогда

$$W = \sum_1^n (m - m) a + \sum_1^n m_T (a - h_T) \quad (10)$$

Определяя по (10) при каждой взятой мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  значение  $W$  для ряда различных диаграмм суточной нагрузки, характеризующихся величиной пика  $P_{\max}$ , строим кривые 1, (2) ..., как  $W$  (абсциссы) в функции  $P_{\max}$  для значений  $N_1, N_2 \dots$  (Фиг. 3). Кривые  $W$  в сопоставлении с прямой расходов по установке  $K = \alpha D + \alpha d P_{\max}$ , где  $\alpha \cdot D$  и  $\alpha \cdot d \cdot P_{\max}$ —годовые расходы соответственно несвязанные и связанные с мощностью, определяют наивыгоднейшую величину станции по максимуму из всех наибольших разностей абсцисс  $W$  и  $K$ . Этот максимум определяется кривой 1 (2), являющейся объемлющей для всех остальных и построенной для такого значения  $N_1$ , увеличение которого уже не даст прироста чистой прибыли ( $W - K$ ). Очевидно, этому условию удовлетворяет в числе прочих и пиковая мощность водотока, по одной которой, следовательно, и можно вести расчет.

Найдем условия для получения решения. Взяв значение  $N_1$ , отвечающее удовлетворяющей решению кривой 1 (2), строим в виде  $S'$  зависимость  $P_{\max}$  (ординаты) в функции производимых за год гидравлических  $M_0 kw$  и, пользуясь таковой, строим в зависимости  $P_{\max}$  кривую изменения средней себестоимости энергии  $h' = \frac{K'}{M_0}$ , где  $K'$

ежегодные расходы по установке  $K$  с поправкой, входящей от продажи тепловой энергии, равные

$$K' = K - W_T = \alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P_{\max} - \sum_1^n m_T \cdot (a - h_T) \quad (11)$$

и изображаемые в той же функции кривой  $K'$ .

Затем, строим в зависимости от  $P_{\max}$  дифференциальную кривую  $\Delta h' = \frac{\Delta K'}{\Delta M_0}$ . Согласно (1), наиболее выгодное решение должно отвечать условию  $\Delta h' = a$ . Нанося на фиг. 3 линию продажной стоимости  $a$ , получим соответственно точке ее пересечения  $C$  с кривой  $\Delta h'$  наиболее выгодный пик суточной диаграммы  $P_{\max}$ , равный искомой мощности станции. Потребная при этом к использованию мощность водотока  $N$  равна средне-суточной мощности диаграммы.

Все мощности водотока  $N_1, N_2 \dots$  большие найденной  $N$  будут иметь различные кривые  $S', S'' \dots, h', h'' \dots$  и  $\Delta h', \Delta h'', \dots$  но, однако, так, что до наиболее выгодной величины мощности станции все они будут соответственно сливаться в одну, сохраняя при ней условие  $\Delta h' = \Delta h'' = \dots = a$ .

Пользуясь (7), (8), (9) и (10) и заменяя  $\sum_1^n m_T$  через  $M_T$ , перепишем (11) в виде

$$K' = \alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P_{\max} - (M_T \cdot a - \alpha' \cdot p \cdot P_{T \max} - M_T \cdot \delta) \quad (12)$$

Давая  $P_{\max}$  приращение  $\Delta P_{\max}$ , получим приращения для  $M_T$  и  $P_{T \max}$  соответственно в виде  $\Delta M_T$  и  $\Delta P_{T \max}$  и приращение для  $K'$ , равное

$$\Delta K' = \alpha \cdot d \cdot \Delta P_{\max} - \alpha \cdot \Delta M_T + \alpha' \cdot p \cdot \Delta P_{T \max} + \delta \cdot \Delta M_T \quad (13)$$

Заменяя в силу (7)  $\Delta M_T$  через  $-\Delta (M_0 + \sum_1^n m) = -\Delta M_0$  и деля (13) на  $\Delta M_0$ , получим

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = \frac{\alpha \cdot d \cdot \Delta P_{\max}}{\Delta M_0} + a + \frac{\alpha' \cdot p \cdot \Delta P_{T \max}}{\Delta M_0} - \delta \quad (14)$$

Т. к. наиболее выгодное решение сопровождается требованием

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = a,$$

то из (13) имеем условие

$$\frac{\alpha \cdot d \cdot \Delta P_{\max}}{\Delta M_0} + \frac{\alpha' \cdot p \cdot \Delta P_{T \max}}{\Delta M_0} = \delta \quad (15)$$

Внося за скобки  $\Delta P_{\max}$ , получим

$$\frac{\Delta P_{\max}}{\Delta M_0} \left( \alpha d + \alpha' p \frac{\Delta P_{T \max}}{\Delta P_{\max}} \right) = \delta$$

или

$$\operatorname{tg} p \cdot (\alpha \cdot d + \alpha' p \cotg \chi) = \delta \quad (16)$$

где  $\rho$  и  $\chi$  суть соответственно углы наклона касательных к кривым  $P_{\max} = f(M_0)$  и  $P_{\max} = f(P_{T \max})$  к абсциссам  $M_0$  и  $P_{T \max}$ .

Т. о., если построить зависимости  $P_{\max} = f(M_0)$  и  $P_{\max} = f(P_{T \max})$ , а затем и  $P_{\max} = f[\text{tg} \rho (\alpha \cdot d + \alpha' \cdot \rho \cotg \chi)]$  соответственно в виде 1', 2', 3', фиг. 3, то искомая мощность станции определится по кривой 3', условием (16). Т. к. в (16)  $(\alpha d + \alpha' \rho \cotg \chi) = \text{const}$ , то наимыгоднейшая величина установки зависит только от значений  $\delta$  и  $M_0$ .

### 2. Отсутствие суточного регулирования стока.

Здесь необходимо, чтобы каждая из взятых мощностей водотока  $N_1, N_2, \dots$  или одна или с дополнительной мощностью резерва была бы всегда не меньше пика  $P_{\max}$  каждого суточного графика нагрузки. Работу теплового резерва здесь следует переводить на снятие пика нагрузки. При этом весь расчет остается аналогичным случаю 1 с той лишь разницей, что все расчетные кривые должны строиться в зависимости величины станции, которая при  $N \geq P_{\max}$  должна приниматься равной пику нагрузки  $P_{\max}$ , а при  $N < P_{\max}$  — равной взятой по кривой  $Q$  мощности водотока  $N$ .

### 3. Неполное суточное регулирование стока.

Здесь надо знать суточную емкость резервуара  $V_p$  м<sup>3</sup>. Тогда средне-суточный расход, который гидростанция может представить для снятия пиков путем регулирования, будет равен

$$\gamma = \frac{V_p}{24 \cdot 3600} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Если по данной суточной диаграмме нагрузки с пиком  $P_{\max}$  и средне-суточным потребным расходом в  $Q_0$  м<sup>3</sup>/с. требуемый суточный объем воды для регулирования равен  $V$  м<sup>3</sup>, то при средне-суточном расходе регулирования равном

$$\gamma' = \frac{V}{24 \cdot 3600} \text{ м}^3/\text{с}.$$

недостающий для полного регулирования средне-суточный расход найдется, как

$$\Delta \gamma = \gamma' - \gamma = \frac{V - V_p}{24 \cdot 3600} \quad (17)$$

Пока расход водотока  $Q \geq Q_0$  расход воды в размере  $\Delta \gamma$  будет тратиться из-за ограниченности резервуара и только с момента  $Q = Q_0$  неиспользуемая величина расхода  $\Delta \gamma$  начнет убывать, пока и не сделается равной нулю при расходе  $Q = (Q_0 - \Delta \gamma)$ .

Т. о. для учета недостатка емкости резервуара, надо при каждой взятой величине графика нагрузки найти по (17)  $\Delta \gamma$  и уменьшить

ординаты кривой  $Q$  на участке ее с значением  $Q \geq Q_0$  на эту величину, сводя уменьшение до нуля на участке между  $Q = Q_0$  и  $Q = (Q_0 - \Delta\gamma)$ . Остальная часть кривой  $Q$  со значениями  $Q < (Q_0 - \Delta\gamma)$  остается без изменений.

На фиг. 3 мы имеем кривые  $Q'$ ,  $Q''$ ,  $Q'''$  и  $Q''''$ , построенные соответственно при различных суточных диаграммах нагрузки. Каждая из этих кривых, будучи превращена в кривую мощности, может служить при данной диаграмме для расчета аналогично случаю 1. При этом работу резерва следует переводить на снятие средней части графика нагрузки.

Изложенный метод расчета во всех 1, 2, 3 случаях дает самую невыгоднейшую мощность станции из всех возможных при разных величинах нагрузки данного типа, а потому применим к небольшим водотокам с сооружением станции сразу на полную мощность.

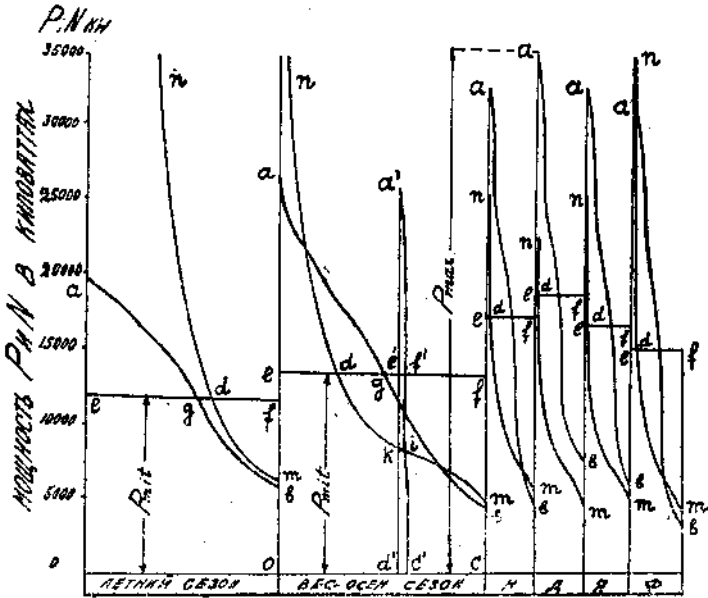
### § 3. Случай нагрузки, индивидуально изменяющейся в течение суток и целого года.

Здесь имеются в виду все станции и главным образом центральные с нагрузкой, диктуемой различной величиной и формой суточных диаграмм потребления энергии в течение года (общее электро-снабжение, заводы, фабрики).

В этом случае расчет может быть произведен путем сопоставления графиков нагрузки будущей станции с кривыми мощности водотока по отдельным характерным, как по величине и типу суточных диаграмм потребления, так и состоянию гидравлического режима используемого источника энергии периодам года. Эти периоды обычно отвечают трем сезонам: зимнему — ноябрь, декабрь, январь, февраль; летнему — апрель, май, июнь, июль и весенне-осеннему — март, август, сентябрь, октябрь. Приурочивая к каждому из них определенный вид суточной диаграммы нагрузки, отвечающий характеру средне-взвешенного суточного графика потребления, составленного с учетом потерь на основании нагрузки будничных и праздничных дней в среднем для целого периода или одного характерного месяца и имея помимо этого график изменения средней нагрузки по месяцам в течение года с учетом полных потерь, определяемых расчетным  $\%$ , можно к каждому взятому месяцу данного периода отнести приуроченный к нему вид суточной диаграммы, так, чтобы его средне-месячная мощность по годовому графику, будучи умножена на число дней ее месяца и на 24, была бы равна произведению из того же числа дней на площадь принятой суточной диаграммы, определяя полное количество потребной энергии за взятый месяц данного периода. Т. о., средне-суточная мощность диаграмм каждого месяца всех периодов должна быть принята равной средне-месячной мощ-

ности по данным годового графика. При этих условиях можно построить в каждом периоде общий график нагрузки по продолжительности.

Подобные графики следует строить целиком только для периодов, характеризующихся более равномерной средне-месячной мощностью нагрузки и небольшим маловодьем водотока. В период же с резким изменением нагрузки и значительным маловодьем, необходимо таковые строить для каждого месяца, как бы разбивая его на свои более мелкие. В наших условиях последним периодом является зимний.



Фиг. 4.

Такие кривые нагрузки  $agb$  (Фиг. 4), построенные в  $kw$  в целом для летнего и весеннего периодов и по месяцам для зимнего, дадут возможность в сопоставлении с кривыми мощности водотока  $nm$  судить об избытке и недостатке гидравлической энергии в каждом периоде различно в зависимости от вида суточного регулирования стока. Недостаток гидравлической энергии требует введения работы теплового резерва.

При полном суточном регулировании, заменяя в каждом периоде площадь кривых  $agb$  равновеликими четырехугольниками  $oefc$  с высотой  $P_{mit}$ , будем иметь недостаток гидравлической энергии  $M_{от}$ , измеряемый в каждом периоде площадью  $dfm$ . Так, взяв маловодный день периода с нагрузкой  $a'f'c'd'$ , будем иметь необходимым совпадение средне-суточной линии мощности водотока  $ki$  с средне-суточной линией, создавшейся при любом характере работы резерва, действи-



тельной диаграммы работы станции. Недостаток гидравлической энергии за взятые сутки всегда определяется площадью четырехугольника со сторонами  $ke'$  и  $ki$ . Обозначая длительность периода  $ef$  и ординаты кривой водотока соответственно через  $T$  и  $N$  и беря за элементарный период времени  $dt$  сутки, получим в  $kwh$

$$M_{от} = \sum_{t=sd}^{t=T} (P_{mit} - N). \quad 24$$

или, полагая  $dt \rightarrow 0$ , придем к площади  $dfm$ , равной

$$M_{от} = \int_{t=sd}^{t=T} (P_{mit} - N) dt \quad (18)$$

При отсутствии регулирования значение  $M_{от}$  в сравнении с (18) всегда больше на то число  $kwh$ , которое не используется при данном распределении работы станции и резерва в те часы маловодных дней, когда потребная мощность гидростанции меньше средне-суточной мощности водотока. Здесь  $M_{от}$  зависит от установленной схемы распределения площади графика нагрузки между работой станции и резерва и не может определяться ранее ее выяснения.

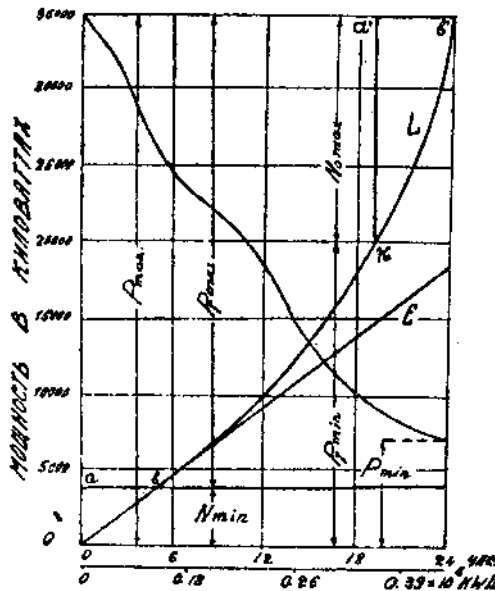
При неполном суточном регулировании, зная емкость резервуара  $V_p$  м<sup>3</sup> и потребную в каждом периоде  $V$  м<sup>3</sup>, нетрудно исправить кривые мощности водотока всех периодов учетом недоиспользованного его расхода способом, упомянутым в пункте 3 § 2, после чего определение  $M_{от}$  остается аналогичным случаю полного регулирования.

Во всех случаях регулирования мощность резерва должна определяться по одним из суток, обычно декабрьским, характеризующимся маловодным состоянием водотока и крайне развитой нагрузкой станции при том характере его работы, каковая отвечает наивыгоднейшей комбинации в распределении площади суточного графика нагрузки между работой его самого и гидростанцией. Так как наивыгоднейшая комбинация совместной работы должна при данном виде регулирования отвечать наивыгоднейшей мощности установки, зависящей в свою очередь от характера годового изменения действительно возможной к использованию мощности водотока, т. е. от условий, создающихся от самого принятого вида работы резерва, то для решения задачи необходимо при учете данного вида регулирования и ряда комбинаций совместной работы станции и резерва установить общее условие получения наивыгоднейшей мощности установки.

Примем за основной вид регулирования—вид полного суточного и выясним для него общее условие и метод расчета получения наивыгоднейшего решения, приурочивая к нему два остальных с введением соответствующих характерных для каждого из них поправок.

1. Полное суточное регулирование стока.

Пусть на фиг. 5 имеем максимальный суточный график нагрузки с пиком  $P_{\max}$  *kw* при минимальной мощности  $N_{\min}$  водотока. Строим кривую  $L$  зависимости числа потребных *kwh* по графику в функции его ординат и прямую  $E$  изменения суточной энергии водотока в функции его мощности. В данные сутки водоток производит  $ab$  *kwh*, резерв—остальное. Абсцисса  $ab$ , будучи в низшем положении на кривой  $L$ , отвечает наименьшей интенсивности регулирования при минимуме увеличенной регулированием гидравлической мощности  $N_0 = N_{0\min}$  и максимуму тепловой  $P_T = P_{T\max} = P_{\max} - N_{0\min}$ . Переноса



Фиг. 5.

$ab$  в положение  $a'b'$ , получим максимальную интенсивность регулирования при максимуме  $N_0 = N_{0\max} = a'k$  и минимуме  $P_T = P_{T\min} = P_{\max} - N_{0\max}$ . Первый случай отвечает работе резерва на пике, второй—на низе графика. Промежуточные значения  $N_0$  и  $P_T$  отвечают промежуточным схемам распределения работы станции и резерва.

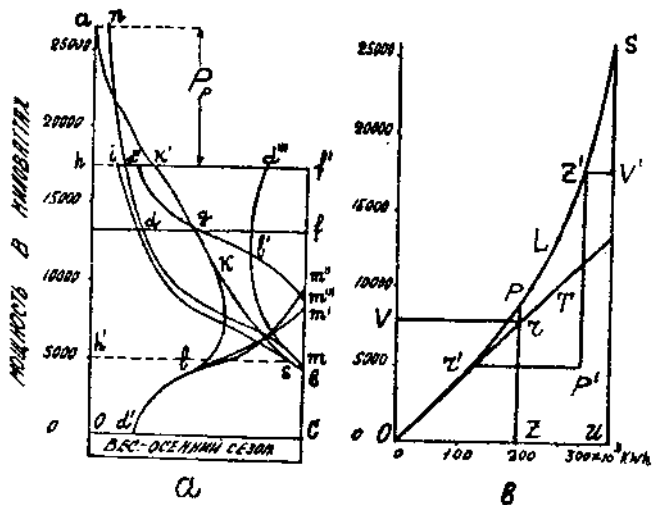
Исследуем решения для трех главнейших схем работы.

1°. Гидростанция снимает пик декабрьской нагрузки, резерв — низ.

Распространяя эту схему работы на графики всех периодов, установим характер годового изменения действительно возможной к использованию мощности водотока.

Взяв в каждом периоде пл.  $dft$ , как заранее обреченную на покрытие ее тепловой энергией, спосим ее, согласно работе резерва, на

нив в положение  $d'cm'$  (фиг. 6а). Площадь  $dfm$ , равная площади  $d'cm'$ , определяется по (18) из сопоставления кривой мощности водотока  $ndm$  и средней линии нагрузки периода, а потому кривая  $d'lm'$  есть кривая продолжительности величин средне-суточной мощности работы резерва за весь период с началом координат в точке  $c$ . Исправим кривую  $d'lm'$  на учет действительных мощностей работы резерва. Принимая график нагрузки периода за средне-сезонный суточный, строим кривую  $L$  зависимости потребного по нему числа  $kwh$  в функции ординат и прямую  $T$  изменения того же числа  $kwh$ , но в функции его средне-суточных мощностей (фиг. 6б). Взяв на кривой  $d'lm'$  любую ординату  $cm'$  и отложив по зависимости  $T$  равную ей  $rz$ ,



Фиг. 6.

получим при продолжении ее до кривой  $L$  действительную мощность  $pz$ . Продолжительность каждой такой мощности за период найдется, как

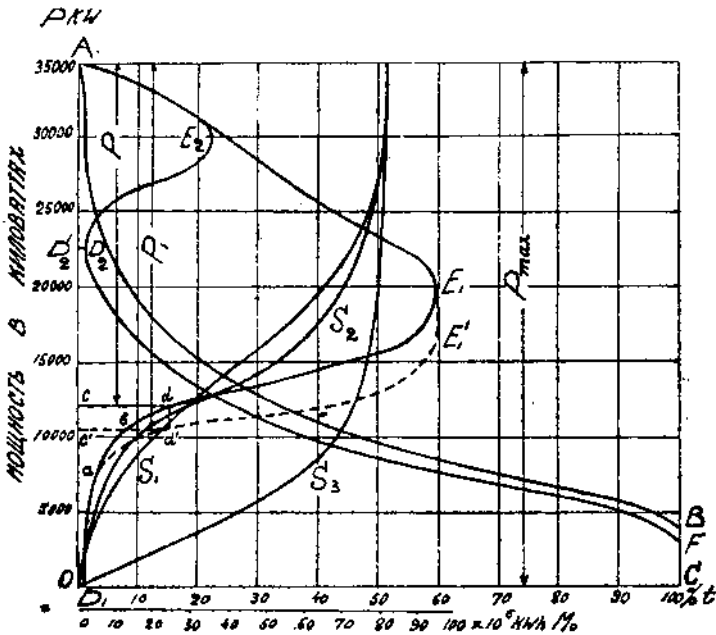
$$\tau = \frac{t}{24} \tau_0,$$

где  $\tau_0$  — продолжительность за период мощности  $rz$  по кривой  $d'lm'$ , а  $t$  — суточная продолжительность мощности  $pz$  по кривой  $agb$ . При  $rz = cm'$   $\tau_0 \approx 0$  и точка  $m'$  кривой  $d'lm'$  переместится в  $m''$ . Исправляя все ординаты кривой  $d'lm'$ , получим новую  $d'lm''$ . Вычитая из абсциссе кривой  $agb$  абсциссы кривой  $d'lm''$ , получим диаграмму  $oakd'$  изменения полезной мощности водотока в каждом периоде.

Установим вид общегодовой такой диаграммы. Так как гидро-станция работает на пиках нагрузки, то ее годовая работа должна изображаться диаграммой, построенной на условии объединения всех пиков диаграмм каждого периода  $oa kd'$  в один с одной общей вершиной. В силу этого, годовая диаграмма должна строиться путем

последовательного суммирования ряда равноудаленных от вершин  $a$  абсцисс всех диаграмм  $oa kd'$ , принимая за исходную точку построения общую вершину, отнесенную к наивысшей (декабрьской) диаграмме. По построению, искомая диаграмма, являющаяся комбинированным графиком мощности, изображается контуром  $OAE_1 dD_1$  (фиг. 7).

Строим кривую  $S_1$  зависимости возможного к выработке по графику  $OAE_1 dD_1$  числа гидравлических  $M_0 kwh$  в функции его ординат  $P$ , отсчитываемых вниз от вершины  $A$ . Задаваясь мощностями установки  $P$  в пределах  $P_{max} > P > P_{max} - P_T^1$ , определяем по кривой



Фиг. 7.

$S_1$  число  $M_0 kwh$ , а по недостающему до полного потребного  $M kwh$  находим число тепловых  $kwh$ , как  $M_T = M - M_0$ , производимых резервом с мощностью  $P_T = P_{T\ min} = Const$ . Устанавливая расчетную продажную стоимость  $kwh$  в  $a$  руб., равную себестоимости  $kwh$  при условии выработки всей энергии  $M$  на тепловой станции и принимая за годовые расходы — издержки по гидроустановке  $K = \alpha D + \alpha d P$ , а за валовую годовую выручку  $W$  — выручку по гидроустановке  $W_0 = M_0 \cdot a$ , исправленную на разность между выручкой от продажи тепловой энергии  $W_T = M_T \cdot a$  и годовыми расходами по резерву  $K_T = \alpha' \cdot p \cdot P_T + M_T \delta$ , как

$$W = M_0 \cdot a + [M_T \cdot a - (\alpha' \cdot p \cdot P_T + M_T \cdot \delta)] \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Ниже показано, что наивыгоднейшая величина станции всегда заключается только в этих пределах.

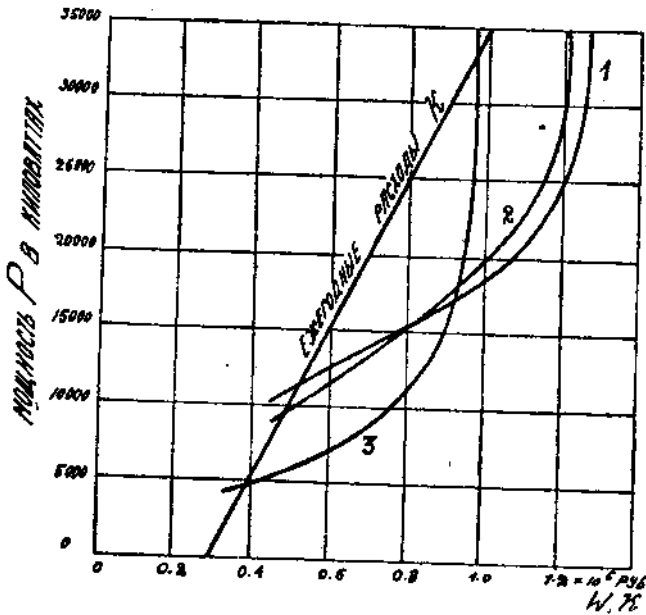
где  $\delta$  — средний прямой расход по выработке теплового  $kwh$  при данной схеме работы резерва, строим кривую 1 изменения  $W$  в зависимости  $P$  (Фиг. 8). Кривая 1 с прямой расходов  $K$  определит по максимуму ( $W - K$ ) рациональную величину станции.

Установим условия наивыгоднейшего решения. Примем за годовые расходы  $K'$  — расходы  $K$ , исправленные на разность между  $K_T$  и  $W_T$ , как

$$K' = \alpha \cdot D + \alpha \cdot d P + [(\alpha' \cdot p \cdot P_T + M_T \cdot \delta) - M \cdot a], \quad (20)$$

а за ежегодную валовую выручку значение  $W_0 = M_0 \cdot a$ . Тогда, заменяя в (20)  $M_T$  через  $M - M_0$  и давая  $P$  бесконечно малое приращение  $\Delta P$  и получая для  $M_0$  приращение  $\Delta M_0$ , будем иметь увеличение для  $K'$  равное

$$\Delta K' = \alpha \cdot d \cdot \Delta P + \Delta M_0 \cdot a - \Delta M_0 \cdot \delta$$



Фиг. 8

Деля на  $M_0$ , получим

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = \frac{\alpha \cdot d \cdot \Delta P}{\Delta M_0} + a - \delta \quad (21)$$

Здесь  $\frac{\Delta P}{\Delta M_0}$  есть  $tg$  угла  $\varphi$ , составленного касательной к кривой

$S_1$  с абсциссой  $M_0$  (Фиг. 7), а потому

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = \alpha \cdot d \cdot tg \varphi + a - \delta. \quad (21 a)$$

Т. о.  $\frac{\Delta K'}{\Delta M_0}$  есть  $f(\varphi)$ .

Кроме того, заменяя в (21)  $\Delta M_0$  через  $\Delta P \cdot t$ , где  $t$  — время взятое по комбинированному графику мощности, будем иметь

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = \frac{\alpha \cdot d}{t} + a - \delta \quad (21 \text{ б})$$

и, следовательно,  $\frac{\Delta K'}{\Delta M_0}$  есть  $f(t)$ .

Согласно (1), условие выгодности отвечает равенству  $\frac{\Delta K'}{\Delta M_0} = a$ . Тогда из (21 б) необходимо иметь  $\frac{\alpha \cdot d}{t} = \delta$ , откуда наивыгоднейшее решение отвечает условию

$$t = \frac{\alpha \cdot d}{\delta} \quad (22)$$

Т. к. для условия выгодности необходимо, чтобы  $\frac{\Delta K'}{\Delta M_0}$  было возрастающим, т. е. чтобы отношение вторичных разностей изменения  $K'$  к приращению аргумента  $\Delta M_0$ , как  $\frac{\Delta^2 \cdot K'}{\Delta M_0^2}$ , было бы  $> 0$ , то условие (22) одновременно требует в (21 а) иметь возрастающим  $tg \varphi$ , т. е. угол  $\varphi$ . Отсюда применение условия (22) должно относиться к участку  $E_1 d D_1$  кривой  $A E_1 d D_1$  комбинированного графика, как отвечающему выпуклости кривой  $S_1$ , обращенной к оси абсцисс.

Заметим, что наивыгоднейшее значение  $P$  всегда  $< P_{\max}$ , ибо иначе надо иметь  $t < OD_1$ . Но  $OD_1$ , равная абсциссе  $od'$  отнесенной к декабрю диаграммы  $oakd'$  (фиг. 6 а), тем ближе к нулю, чем точнее подсчеты, т. е. чем мельче периоды для учета изменения нагрузки и мощности водотока будут взяты для исследования, в то время как по (22)  $t = \text{const}$ .

Определяя условием (22) по графику  $OA E_1 d D_1$  значение  $P$ , необходимо поверять, чтобы

$$K = \alpha D + \alpha d P < W = W_0 + (W_T - K_T), \quad (23)$$

ибо иначе эксплуатация водотока нерациональна.

Равным образом невыгодно эксплуатировать водоток, когда  $t >$  максимальной абсциссы графика  $OA E_1 d D_1$ .

Мощность резерва определяется по декабрьским условиям, как  $P_T = P_{T \min} - P_{\max} - N_{0 \max}$ .

2°. Гидростанция снимает пик и часть низа декабрьского графика нагрузки, резерв — среднюю часть.

Пусть гидростанция в маловодные декабрьские сутки снимает пик графика площадью  $V_p \text{ kWh}$  и часть низа.

Распространяя эту схему работы на все периоды года и принимая, что снимаемые площади пиков нагрузки всех периодов постоянно равны  $V_p \text{ kWh}$  с соответственными мощностями  $P_p \text{ kW}$ , сносим пл.

$d'f'm$ , согласно работе резерва, в положение  $d''f'm'''$  (фиг. 6 а). Далее, пользуясь зависимостями  $L$  и  $T$  (фиг. 6 б), исправляем кривую  $d''l'm'''$  с началом координат в точке  $f'$  на учет действительных мощностей работы резерва. Обращаясь к  $L$ , откладываем  $zv' = P_r$  и, проводя  $v'z' \parallel ou$ , получаем точку  $z'$ . Проводя от  $z'$  вертикаль  $z'p'$  так, чтобы горизонталь  $p'r'$  равнялась числу  $kw'h$ , определяемому по зависимости  $T$  линией  $vr$  для взятой по кривой  $d''l'm'''$  любой ординаты  $f'm''' = ov$ , получим в виде  $z'p'$  действительную мощность. При продолжительности за период мощности  $ov$  по кривой  $d''l'm'''$  равной  $\tau_0$  продолжительность найденной  $z'p'$  найдется, как  $\tau = \frac{t}{24} \tau_0$ , где  $t$  — суточная продолжительность основания

$h's$  трапеции  $h'kk's$  с высотой, равной мощности  $z'p'$ , считая от линии  $hf'$ . При  $ov = f'm'''$   $\tau_0 \cong 0$  и точка  $m'''$  переместится в  $m$ . Исправляя так все координаты кривой  $d''l'm'''$ , получим новую  $d'''l'm$ . Вычитая из абсцисс кривой  $agb$  абсциссы найденной  $d'''l'm$ , получим диаграмму  $oak'ibc$  изменения полезной мощности водотока за каждый период. Т. к. в каждом периоде участки  $ohibc$  полученной диаграммы должны сниматься работой гидроустановки на низах графиков нагрузки, то, суммируя последовательно абсциссы этих участков по всем периодам, выделяем их в один общий  $OD_2'D_2FC$  фиг. 7, как часть годового комбинированного графика. Участки же  $hak'i$  фиг. 6 а должны покрываться в каждом периоде с их пиков, а потому остальная часть годового комбинированного графика должна строиться из участков  $hak'i$  диаграмм  $oak'ibc$  каждого периода приемом, аналогичным 1°. Годовой комбинированный график мощности приобретает вид диаграммы  $OA E_2 D_2 FC$  фиг. 7. При этом его ордината  $OD_2'$ , отвечающая наименьшей переходной абсциссе  $D_2'D_2$  от снятия пиков к снятию низов нагрузки определяется наибольшей величиной мощности снимаемого низа нагрузки, встретившегося за год, а участок ординаты  $AD_2'$  определяется наибольшим встретившимся к снятию ее пиком  $P_{p \max}$ . Обе эти ординаты определяются по декабрьской диаграмме нагрузки. Т. к. гидростанция прежде всего снимает пики  $hak'i$  нагрузок всех периодов года (фиг. 6 а), то ее мощность  $P$ , взятая по комбинированному графику  $OA E_2 D_2 FC$  фиг. 7 должна при  $P < P_{p \max}$  отсчитываться вниз от точки  $A$ , а при  $P > P_{p \max}$  — браться равной сумме  $P_{p \max}$  и отсчитанной вверх от точки  $O$  величины  $P' = (P - P_{p \max})$ , причем годовое число производимых ставцией  $M_0 kw'h$  определится в последнем случае по графику  $OA E_2 D_2 FC$  соответственно суммой используемых его площадей, как  $M_0 = M_{op} + M'_o$ .

Соблюдая все сказанное, строим кривую  $S_2$  зависимости  $M_0 kw'h$  (абсциссы) в функции  $P$  фиг. 7. Задаваясь рядом  $P$  в пределах  $P_{\max} > P > P_{\max} - P_T$ , определяем по  $S_2 M_0$ , а затем и  $M_T = M - M_0$ .

Пользуясь (19) и принимая  $\delta$  равным сообразно работе резерва в данном случае, строим кривую 2, как  $W = f(P)$  (фиг. 8), которая с прямой расходов  $K$  определит мощность станции максимумом ( $W - K$ ).

Примем годовые расходы  $K'$  по (20) при  $W_0 = M_0 \cdot a$ , как

$$K' = a \cdot D + a \cdot d (P' + P_{p_{\max}}) + (\alpha' \cdot p \cdot P_T + M_T \cdot \delta) - M_T \cdot a.$$

Давая  $P'$  приращение  $\Delta P'$  и получая для  $M'_0$  увеличение  $\Delta M'_0$ , получим при  $M_T = M - (M_{0p} + M'_0)$  увеличение для  $K'$ , равное

$$\Delta K' = a \cdot d \cdot \Delta P' + \Delta M'_0 \cdot a - \Delta M'_0 \cdot \delta$$

Деля на  $\Delta M'_0$ , имеем аналогично (21), (21 а) и (21 б)

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M'_0} = a \cdot d \cdot \frac{\Delta P'}{\Delta M'_0} + a - \delta \quad (24)$$

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M'_0} = a \cdot d \cdot t \varphi + a - \delta \quad (24 \text{ а})$$

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M'_0} = \frac{\alpha \cdot d}{t} + a - \delta \quad (24 \text{ б})$$

где  $\varphi$  — угол, составленный касательной к  $S_2$  с абсциссой  $M_0$ , а  $t$  — время отнесенное в нашем случае к участку  $GD'_2D_2FC$  графика  $OA E_2 D_2 FC$ . При  $\frac{\Delta K'}{\Delta M'_0} = a$  получим из (24 б) условие (22). Последнее сопровождается требованием иметь по (24 а) возрастающим  $t \varphi$ . Т. о., условие (22) применимо в нашем случае только к участку  $D_2 F$  кривой  $AE_2 D_2 F$  и весь расчет при этом сводится к определению наивыгоднейшего  $P'$ , после чего  $P = P' + P_{p_{\max}}$ .

Здесь, как и в 1°, всегда наивыгоднейшее  $P < P_{\max}$ , ибо иначе надо иметь  $t < D'_2 D_2$  фиг. 7. Но  $D'_2 D_2$ , равная абсциссе  $h i$  отнесенной к декабрю диаграммы  $o a k' i b c$  фиг. 6 а, тем ближе к нулю, чем мельче взятые периоды, т. е. чем точнее подсчеты, в то время, как  $t = \text{Const}$ .

При пользовании (22) в определении по графику  $OA E_2 D_2 FC$  значения  $P'$ , а потом и  $P$  надо результат поверять по (23).

Выгодная эксплуатация водотока имеет место всегда, когда по (22)  $t <$  наибольшей абсциссы участка  $D_2 F$  кривой  $AE_2 D_2 F$ .

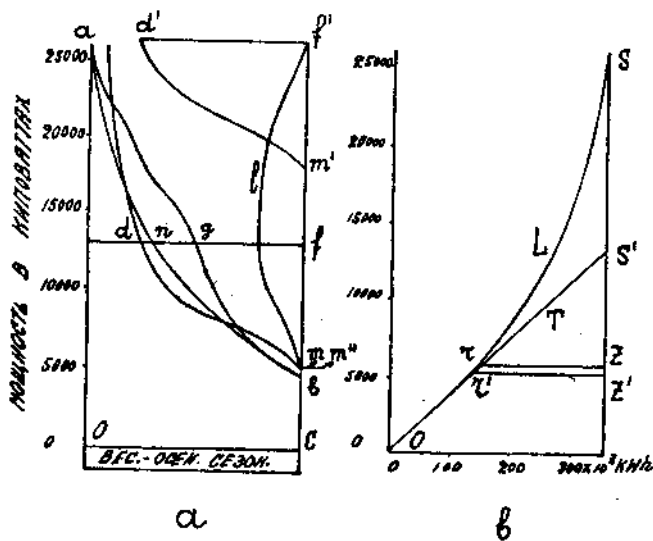
Мощность резерва определяется по декабрьским условиям, как  $P_T = P_{\max} - N_0$ .

3°. Гидростанция снимает низ декабрьского графика нагрузки, резерв — пик.

Здесь  $P_T = P_{T_{\max}}$ . Принимая схему работы неизменной для всех периодов, переносим в каждом из них площадь  $d f m$  в положение  $d' f' m'$  (фиг. 9 а). Исправляем кривую  $d' m'$  с началом координат в



точке  $f'$  на учет действительных мощностей работы резерва помощью зависимостей  $L$  и  $T$  (фиг. 9 б). Взяв любую мощность  $f' m'$  и отложив ее от точки  $s'$  зависимости  $T$  в виде  $s' z'$ , получим суточное число  $kwh r' z'$ . Относя  $r' z'$  к  $L$  в положение  $r z$ , найдем искомую мощность  $s z$  с продолжительностью за период  $\tau = \frac{t}{24} \tau_0$ , где  $\tau_0$  — продолжительность мощности  $s' z'$  по кривой  $d' m'$ , а  $t$  — суточная продолжительность основания пика нагрузки  $s z$  по кривой  $a g b$ . При  $s' z' = f' m' \tau_0 \cong 0$  и точка  $m'$  перейдет в  $m''$  при  $f' m'' = s z$ . Исправляя так все ординаты кривой  $d' m'$ , получим новую  $f' l m''$ . Вычитая из абсцисс кривой  $a g b$  абсциссы кривой  $f' l m''$ , получим диаграмму  $o a i n b c$  изменения полезной гидравлической мощности каждого периода.



• Фиг. 9.

В силу работы станции на низах нагрузки, годовой комбинированный график найдется путем объединения низов всех диаграмм  $o a i n b c$  в один общий последовательным суммированием абсцисс. Искомый график получает вид  $O A B C$  (фиг. 7). Строя кривую  $S$ , зависимости  $M_0$  (абсциссы) в функции ординат  $P$  и взяв по ней ряд  $P$  в пределах  $P_{max} > P > P_{max} - P_T$ , находим ряд  $M_0$  и  $M_T = M - M_0$ , а затем по (19) и  $W$ , принимая величину  $\delta$ , сообразно работе резерва в данном случае. Строя  $W = f(P)$  в виде кривой  $z$  (фиг. 8), находим в сопоставлении ее с прямой  $K$  наивыгоднейшую мощность  $P$  по максимуму  $(W - K)$ .

Приняв ежегодные расходы  $K'$  по (20) при  $W_0 = a \cdot M_0$ , получим выражения для  $\frac{\Delta K'}{\Delta M_0}$  в виде (21), (21 а) и (21 б) причем в (21 а)  $\varphi$  —

угол, отнесенный к кривой  $S_3$ , а в (21 б)  $t$  — время, отнесенное к графику  $OABC$ . Условие (22) также остается в силе и должно относиться ко всей кривой  $AB$  комбинированного графика.

Т. к., в точке  $A$   $t=0$ , то при  $t = \frac{\alpha \cdot d}{\delta} = \text{Const.}$  наивыгоднейшее  $P$  всегда  $< P_{\max}$ .

При пользовании (22) необходимо результат поверять по (23). Выгодная эксплуатация водотока имеет место всегда, когда по (22)  $t \leq 8760$ .

Мощность резерва находится по декабрьским условиям, как  $P_T = P_{T_{\max}} = P_{\max} - N_{0_{\min}}$ .

Как видно из 1°, 2° и 3° наивыгоднейшее  $P$  всегда связано с условием (22) и от  $\alpha$  не зависит.

Установим в общем виде основное условие выгодности на основании рассмотренных случаев комбинированной работы. По кривым фиг. 8 максимум  $(W-K)$  для каждой из них имеет на основании (19) вид

$$(W-K) = W_0 + (W_T - \alpha' \cdot p \cdot P_T - \delta \cdot M_T) - (\alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P)$$

или

$$(W-K) = \alpha \cdot M_0 + [(M - M_0) \cdot \alpha - \alpha' \cdot p \cdot P_T - \delta \cdot (M - M_0)] - (\alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P)$$

или, заменяя  $P_T$  через  $P_{\max} - N_0$  и преобразовывая:

$$(W-K) = M(\alpha - \delta) - \alpha \cdot D + \delta \cdot M_0 - \alpha \cdot d \cdot P - \alpha' \cdot p \cdot (P_{\max} - N_0) \quad (25)$$

Дадим  $N_0$  приращение  $\Delta N_0$ . Тогда получим для  $P$ ,  $M_0$  и  $\delta$  соответственно увеличения  $\Delta P$ ,  $\Delta M_0$  и  $\Delta \delta$  и для  $(W-K)$ , как

$$\Delta(W-K) = -\Delta\delta \cdot (M - M_0) + \Delta\delta \cdot \Delta M_0 + \delta \cdot \Delta M_0 - \alpha d \cdot \Delta P + \alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0$$

При максимуме  $(W-K)$  имеем  $\Delta(W-K) = 0$ , а потому:

$$-\Delta\delta \cdot (M - M_0) + \Delta\delta \cdot \Delta M_0 + \delta \cdot \Delta M_0 - \alpha \cdot d \cdot \Delta P + \alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 = 0 \quad (26)$$

Замеая  $\Delta M_0$  через  $\Delta P \cdot t$  и пренебрегая величиной  $\Delta\delta \cdot \Delta M_0$ , получим:

$$-\Delta\delta (M - M_0) + \Delta P \cdot (\delta \cdot t - \alpha d) + \alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 = 0 \quad (27)$$

Учитывая, что всякая величина наивыгоднейшей мощности станции  $P$  независимо от схемы ее совместной работы с резервом, связана условием (22), то подставляя последнее в (27), будем иметь

$$\alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 - \Delta\delta \cdot (M - M_0) = 0$$

откуда

$$\Delta N_0 = \frac{\Delta\delta \cdot M_T}{\alpha' \cdot p} \quad (28)$$

Но при уменьшении  $P_T = P_{\max} - N_0$  на величину  $\Delta N_0$  приращение  $\Delta\delta$  будет чрезвычайно мало и практически правая часть равенства (28) будет нуль, т. е.  $\Delta N_0 = 0$ . Откуда:

$$N_0 = N_{0_{\max}} \quad (28a)$$

Отсюда основным условием выгодности является требование увеличивать регулированием в маловодные декабрьские сутки мощность водотока до максимума.

Т. о. при полном суточном регулировании наивыгоднейшее  $P$  определяется расчетной схемой 1°.

Условие (28а) свидетельствует еще о том, что при любой установленной схеме комбинированной работы наивыгоднейшая мощность установки  $P$  никогда не может быть  $< N_0 = P_{\max} - P_T$ , ибо иначе наивыгоднейшее решение отвечало бы значению  $N_0$  меньшему, нежели таковое могло бы иметь место при данной схеме работы, что противоречит выводам. Т. о. наивыгоднейшее значение  $P$  заключено в пределах  $P_{\max} > P > P_{\max} - P_T$ .

### 2. Отсутствие суточного регулирования стока.

Здесь в маловодные декабрьские сутки мощность водотока  $N_{\min}$  не может быть увеличена, а потому основная задача в определении наивыгоднейшей схемы совместной работы станции и резерва должна заключаться в стремлении наиболее полного использования суточной энергии водотока. Этому отвечает работа станции исключительно на низах нагрузки.

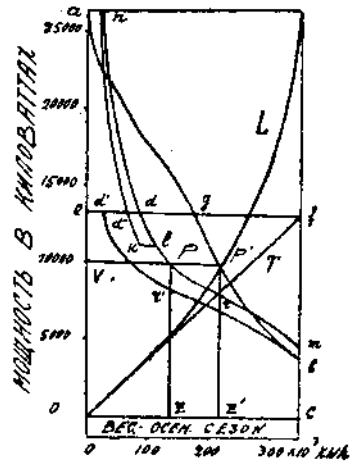
Устаовим недостаток гидравлической энергии для полного снятия нагрузки в каждом периоде помощью вышеуказанных зависимостей  $L$  и  $T$  (фиг. 10).

Взяв по кривой мощности водотока любую ординату  $pz$  и отнеся ее к  $L$  в положение  $p'z'$ , получим в виде  $vp'$  число  $kwh$  возможных к выработке без регулирования. Среднесуточная используемая мощность водотока при этом найдется по  $T$ , как  $rz'$ . Относя  $rz'$  к взятой ранее  $pz$  в положение  $r'z$ , получим точку  $r'$  новой кривой  $d'b$ , ограничивающей искомую площадь  $d'fb$  в каждом периоде.

Дальнейший расчет, как в построении годового комбинированного графика мощности, так и в отыскании наивыгоднейшей величины установки  $P$  тождествен 3° случая 1.

### 3. Неполное суточное регулирование стока.

Здесь, зная емкость резервуара  $V_p$  м<sup>3</sup> и потребную в каждом периоде  $V$  м<sup>3</sup>, находим при пользовании (17) для каждого периода неиспользованную мощность водотока в  $kwh$ , как  $\Delta N = \mu \cdot \Delta \gamma \cdot H$ , где  $H$  — напор в м., а  $\mu$  — коэфф. пропорц., на величину которой и уменьшаем ординаты  $N$  участка кривой мощности водотока с  $N \geq P_{\min}$ , сводя, это уменьшение до нуля на участке ее между  $N = P_{\min}$  и  $N = P_{\min} - \Delta N$ ,



Фиг. 10.

где  $P_{\text{mit}}$  — средне-суточная (средне-сезонная) мощность нагрузки периода. Исправленные кривые мощности водотока каждого периода  $nd''klm$  (фиг. 10), учтут площадями  $d''fmlk$  недостаток гидравлической энергии. Дальнейший расчет аналогичен случаю 1. Т. к. при этом должно выполняться, как условие (28а), так и стремление к возможно полному использованию энергии водотока в маловодные сутки, то возникает единственная наиболее выгодная схема распределения нагрузки между водой и паром, отвечающая работе гидростанции на низе и части допустимого величиной регулирования пика нагрузки, предоставляя резервуару работать в промежутке. При этом весь расчет производится по правилам 2° случая 1, где, однако, надо заметить, что в те периоды года, когда нагрузка позволяет при данной емкости б'ефа выполнять полное суточное регулирование, следует работу пара переводить на низ нагрузки, полагая, т. о., в этих периодах мощность снимаемого установкой низа нагрузки равной нулю. При этом возможно, что участок  $D_2'A F_2 D_2$  комбинированного графика мощности фиг. 7 разовьется сильнее участка  $OD_2'D_2FC$ . Тогда обращенная к оси абсцисс выпуклость кривой  $S_2$  будет отвечать участку  $A E_2 D_2$  кривой  $A E_2 D_2 F$  комбинированного графика, а потому и условие (22) должно применяться к этому ее участку. При этом  $P = P' + P_{\text{н макс}}$ , где  $P'$  уже будет мощность, определяемая условием (22), считая вниз от точки  $A$ , а  $P_{\text{н макс}}$  — возможная максимальная мощность низа, встретившаяся к снятию станцией за год.

#### § 4. Учет стоимости устройства резервуара для суточного регулирования.

Такие затраты нередко возможны, ибо целесообразность устройства специального бассейна при установке для целей регулирования подчас бывает весьма уместна.

Для случаев расчета выбора мощности, изложенных в § 1 и § 2, учет стоимости резервуара должен вводиться непосредственно в затраты по установке, сообразно ее величине. В случае же расчета, изложенного в § 3, необходимо определять наиболее выгодную емкость резервуара.

Пусть резервуар стоит  $K_p$  руб. Тогда вводя  $K_p$  в (25), получим  $(W - K) = M \cdot (a - \delta) - \alpha \cdot D + \delta \cdot M_0 - \alpha \cdot d \cdot P - \alpha' \cdot p \cdot (P_{\text{max}} - N_0) - \alpha \cdot K_p$ .

При приращении  $N_0$  на  $\Delta N_0$  будем иметь увеличение  $K_p$  на  $\Delta K_p$ , после чего

$$\Delta(W - K) = -\Delta\delta \cdot (M - M_0) + \Delta\delta \cdot \Delta M_0 + \delta \cdot \Delta M_0 - \alpha \cdot d \cdot \Delta P + \alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 - \alpha \cdot \Delta K_p \quad (29)$$

Приравнявая (29) нулю и производя те же упрощения, что и для (26) и (27), будем иметь

$$\alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 - \Delta\delta \cdot (M - M_0) - \alpha \cdot \Delta K_p = 0$$

откуда

$$\alpha' \cdot p \cdot \Delta N_0 = \Delta \delta \cdot (M - M_0) + \alpha \cdot \Delta K_p$$

Пренебрегая за малостью величиной  $\Delta \delta \cdot (M - M_0)$ , получим

$$\alpha' \cdot p = \frac{\alpha \cdot \Delta K_p}{\Delta N_0}$$

Обозначая через  $V_p$  объем резервуара и через  $\beta$  стоимость 1 м<sup>3</sup> объема при допустимых условиях понижения уровня при регулировании <sup>1)</sup>, будем иметь

$$\alpha' \cdot p = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \Delta V_p}{\Delta N_0} \quad (30)$$

откуда

$$\frac{\Delta V_p}{\Delta N_0} = \frac{\alpha' \cdot p}{\alpha \cdot \beta} = \operatorname{tg} \psi \quad (30a)$$

где  $\psi$  — угол, составленный касательной к кривой  $V_p = f(N_0)$  с абсциссой  $N_0$  и равный  $\operatorname{arctg} \frac{\alpha' p}{\alpha \beta}$ .

Т. о. наивыгоднейшее значение  $V_p$  определится по кривой зависимости  $V_p$  (ординаты) в функции увеличенной регулированием в декабре мощности водотока  $N_0$  условием (30a).

Когда же  $\beta$  неодинаково для разных  $V_p$ , следует последние приводить к фиктивным объемам  $V_{p\phi}$ , эквивалентным по стоимости первым при постоянном  $\beta$ . Далее, строя кривую связи объемов  $V_p$  с  $V_{p\phi}$  и определяя по зависимости  $V_{p\phi} = f(N_0)$  наивыгоднейший объем  $V_{p\phi}$ , находим по кривой  $V_p = f(V_{p\phi})$  истинный искомый.

По определении  $V_p$  дальнейший расчет может быть отнесен к тому или иному изложенному в § 3 случаю расчета. Заметим, что при  $\beta = 0$  в (30a) необходимо иметь  $\Delta N_0 = 0$  т. е.  $V_p$  должно быть таковым, чтобы  $N_0 = N_{0\max}$ .

### § 5. Суточное и недельное регулирование стока в связи с расчетом выбора мощности станций.

Неравномерность суточной нагрузки станции, обуславливающее введение суточного регулирования стока, обычно не остается постоянной для всех дней недели. При промышленной нагрузке более слабая потребность в энергии в предпраздничные и праздничные дни оставляет в маловодные периоды года неиспользованной часть воды в эти сутки, каковую рационально сохранять и распределять для использования между остальными днями недели. Отсюда, вместе с суточным регулированием стока возникает еще и недельное.

<sup>1)</sup> Подробнее об этом см. § 5.

Недельное регулирование стока увеличивает в маловодное время используемую мощность водотока в будни и способствует осуществлению в эти дни производства возможно полного суточного регулирования, польза которого столь ясно показана в § 3, а потому его учет при определении регулирующих средств станции весьма важен.

Пусть в условиях работы станции § 3, когда суточное потребление энергии диктуется различными диаграммами в течение года, мы имеем в период максимальной нагрузки потребное  $W$  *kwh* в неделю. Тогда средне-дневное потребное количество энергии будет  $\frac{W}{7}$  *kwh*.

Пусть полные будничные рабочие сутки требуют  $L_0'$  *kwh*, тогда пред-праздничные и праздничные сутки соответственно потребят  $\lambda \cdot L_0'$  *kwh* и  $\rho \cdot L_0'$  *kwh*, где  $\rho < \lambda < 1$

Взяв отношение

$$\omega = \frac{W}{7 \cdot L_0'}$$

получим величину недельного коэфф. пользования нагрузки. Пусть количество энергии, сберегаемое недельным регулированием в дни неполной нагрузки, равно  $V_n$  *kwh*. Тогда

$$\omega = \frac{7 L_0' - V_n}{7 L_0'}$$

откуда емкость бассейна в *kwh* для производства только недельного регулирования

$$V_n = 7 L_0' (1 - \omega)$$

Но вместе с этим должно производиться и суточное регулирование, требующее объем бассейна  $V_s$  *kwh*. Обозначим средне-суточную мощность максимальной будничной нагрузки через  $P'_{mit}$ , а время в течение которого могла бы работать станция на этой нагрузке без суточного регулирования при мощности водотока равной  $P'_{mit}$  через  $t$ . Тогда наибольшая емкость суточного бассейна в *kwh* будет равна

$$V_s = (24 - t) \cdot P'_{mit}$$

Т. к. в начальный день недели суточное и недельное наполнения бассейна могут совпадать, то максимальная потребная общая емкость резервуара в *kwh* будет равной

$$V = 7 L_0' (1 - \omega) + (24 - t) P'_{mit} \quad (31)$$

или в  $m^3$  воды

$$V = \frac{3600 \cdot 75}{736 \cdot H \cdot \eta} \left[ 7 L_0' (1 - \omega) + (24 - t) P'_{mit} \right] \quad (31a)$$

где  $\eta$  — среднее значение коэфф. полезного действия станции, а  $H$  — напор в  $m$ . Пусть допустимая емкость резервуара  $V_p < V$ . Тогда недостающая емкость в *kwh* за неделю будет равна

$$\Delta V = 7 L_0' (1 - \omega) + (24 - t) P'_{mit} - V_p$$

Т. к. согласно § 3, при расчете выбора мощности станции имеют место лишь средне-сезонные суточные графики нагрузки, то  $\Delta V$  должно вводиться в расчет, отнесенным к каждому суткам декабрьского периода в среднем, как

$$\frac{\Delta V}{7} = L_0' (1 - \omega) + \frac{1}{7} (24 - t) P'_{\text{mit}} - \frac{V_p}{7}$$

Значение  $\frac{\Delta V}{7}$  определяет средне-суточную недоиспользованную мощность водотока в  $kw$  в декабре, как

$$\Delta N = \frac{1}{24} \left[ L_0' (1 - \omega) + \frac{1}{7} (24 - t) P'_{\text{mit}} - \frac{V_p}{7} \right] \quad (32)$$

или средне-суточный недоиспользуемый декабрьский расход в  $m^3/c$ , равный

$$\Delta \gamma = \frac{75}{24 \cdot 736 \cdot H \cdot \eta} \left[ L_0' (1 - \omega) + \frac{1}{7} (24 - t) P'_{\text{mit}} - \frac{V_p}{7} \right] \quad (32a)$$

Здесь  $\Delta N$  и  $\Delta \gamma$  при емкости резервуара  $V_p$  и наличии будничных и праздничных сезонных графиков нагрузки могут быть найдены для всех периодов года, после чего и должны вводиться в расчет приемом, изложенным в § 3.

Одинаково  $\Delta N$  и  $\Delta \gamma$  могут быть найдены по (32) и (32a) и для случая нагрузки, рассмотренной в § 1, при чем здесь  $\Delta N$  и  $\Delta \gamma$  получают переменное значение, сходя на нуль при величине нагрузки, требующей резервуар емкостью  $V = V_p$ .

В естественных условиях  $V_p$  ограничивается величиной понижения уровня воды при регулировании, обусловливаемой в средне-и низконапорных установках допустимым падением  $\Delta H_p$  рабочего напора станции, а на судоходных реках еще и требованием безущербного плавания судов.

При полном регулировании потребное падение напора должно определяться, как

$$\Delta H = \Delta H_n + \Delta H_c$$

где  $\Delta H_n$  и  $\Delta H_c$  — падения, потребные соответственно при полном недельном и суточном регулировании. При  $\Delta H_p < \Delta H$  следует ограничить или  $\Delta H_n$  или  $\Delta H_c$ , или оба вместе, что безразлично.

При устройстве резервуара с затратой капитала, его емкость для методов выбора мощности, изложенных в § 1 и § 2 определяется условиями расчета, упомянутыми в § 4. Для метода же, изложенного в § 3, следует находить наивыгоднейшую его емкость. Здесь, согласно данным § 4, требуется построить кривые зависимости  $V_p$  (ординаты) в функции увеличиваемой суточным регулированием по средне-сезонному декабрьскому графику нагрузки мощности водотока  $N_0$ . При

одновременном наличии недельного и суточного регулирования стока для каждого принятого по этому графику значения  $N_0$  потребный объем резервуара в  $\text{м}^3$  следует определять, как

$$V_p = \frac{V_c \cdot 3600 \cdot 75}{V_{c \max} \cdot 736 \cdot H \cdot \eta} \left[ 7 \cdot L_0' \cdot (1 - \omega) + (24 - t) \cdot P'_{\text{mit}} \right] \quad (33)$$

где  $V_c$  — объем в  $\text{м}^3$ , потребной по средне-суточному декабрьскому графику при данном взятом значении  $N_0$ , а  $V_{c \max}$  — возможный максимальный потребный по тому же графику объем воды в  $\text{м}^3$ .

Окончательно  $V_p$  определится по кривой  $V_p = f(N_0)$ , согласно условию (30а) § 4.

Установим выражение для коэфф. полезного действия  $\epsilon$  суточного и недельного регулирования стока и способы его учета при выборе мощности станций.

Величина  $\epsilon$  зависит от степени понижения коэфф. полезного действия турбин станции при падении напора  $\Delta H$  при регулировании и увеличения гидравлических потерь по пути. Практически учет  $\epsilon$  имеет смысл только в низконапорных установках, где его величина определяется только влиянием  $\Delta H_p$ .

Если падение напора с  $H$  на  $(H - \Delta H_p)$  изменяет коэфф. полезного действия станции с  $\eta$  на  $\eta_1$ , то полагая, что в этот период установка работает с напором  $H_0 = H + \frac{\Delta H_p}{2}$  и  $\eta_0 = \frac{\eta + \eta_1}{2}$ , будем иметь по (31а) или (33) количество запасенной воды в  $\text{м}^3$ , определяемое, как

$$V_{(p)} = \Theta \cdot H \cdot \eta \left[ 7 L_0' (1 - \omega) + (24 - t) P'_{\text{mit}} \right] \quad (34)$$

где  $\Theta$  — коэфф. пропорциональности, зависящий от того, по какому из двух выражений (31а) или (33) будет написано (34), и количество воды в  $\text{м}^3$ , полезно превращенное:

$$V_{(p)0} = \Theta \cdot H_0 \cdot \eta_0 \left[ 7 L_0' (1 - \omega) + (24 - t) P'_{\text{mit}} \right] \quad (34а)$$

Деля (34а) на (34), получим

$$\epsilon = \frac{H_0 \eta_0}{H \cdot \eta} \quad (35)$$

Зная заранее агрегаты станции и изменение их  $\eta$  при данном  $\Delta H_p$ , найдем по (35)  $\epsilon < 1$ . При учете  $\epsilon$  в любом из изложенных в § 1, § 2 и § 3 методах выбора мощности станций, следует умножить на него те участки ординат вводимых в расчет кривых мощности водотока, которые используются при данном виде регулирования стока. Для случаев расчета § 1 и § 2 эти кривые имеют при неполном регулировании соответственно вид годовых кривых  $Q_1$  фиг. 1 и  $Q''$ ,



$Q''$ ,  $Q'''$  фиг. 3, а при полном — кривых  $Q$ . Для расчета же § 3 должны иметься в виду кривые мощности водотока каждого периода, подобно фиг. 10, где кривые  $nd''klm$  и  $ndm$  соответственно имеют вид для случаев неполного и полного регулирования.

Подлежащие исправлению в каждом случае расчета участки ординат той или иной установленной при данном виде регулирования упомянутой кривой, всегда равны разности ординат этой кривой и той же кривой, но исправленной в предположении отсутствия регулирования стока. Эта последняя для случаев расчета § 1 и § 2 имеет вид кривой  $Q_2$  фиг. 1, а для расчета § 3 таковая должна в каждом периоде иметь вид кривой  $d''b$  фиг. 10.

Указанное выше действие приводит к получению новых исправленных на величину потерь при регулировании кривых мощностей водотока, каковые и должны вводиться в расчет указанными ранее приемами.

## II.

### Самостоятельная работа станций при годовичном и многолетнем регулировании стока.

#### § 6. Регулирование стока и его учет при данном объеме водохранилища.

Степень увеличения производительной способности водотока в маловодное время за счет избыточной сберегаемой его энергии в многоводное определяется величиной запаса воды или емкостью водохранилища  $V_b$ . В зависимости от величины  $V_b$  запасение воды возможно или на отдельное время года или на ряд лет. В первом случае мы имеем годовичное, во втором многолетнее регулирование стока. При заданом  $V_b$  и наличии многолетних данных о расходе  $Q$ , колебании уровня  $h$  и отвечающей ему площади  $F$  зеркала воды в реке, метод определения зарегулированного расхода в обоих случаях не имеет отличия и осуществляется пользованием интегральной кривой притока.

Пусть на фиг. 11 дана такая кривая за весь срок наблюдения. Ее ординаты для каждого значения времени  $t$  представляют полное количество притекшей воды по это время с начала наблюдения, как

$$W = \int_0^t \left( Q + F \frac{dh}{dt} \right) dt,$$

где

$$\left( Q + F \frac{dh}{dt} \right)$$

секундный приток, равный сумме среднего расхода  $Q$  за время  $dt$  и деленного на  $dt$  общего объема воды  $F \cdot dh$ , потребного для изменения за это время уровня  $h$  на  $dh$  при средней площади зеркала воды  $F$  за время этого изменения. Величина

$$\left( Q + F \frac{dh}{dt} \right)$$

в каждый момент времени  $t$  определяется, как

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dW}{dt} = \frac{d \int_0^t \left( Q + F \frac{dh}{dt} \right) dt}{dt} = \left( Q + F \frac{dh}{dt} \right).$$

где  $\varphi$  — угол наклона касательной в соответствующей этому времени точке интегральной кривой к оси абсцисс. Деля на абсциссу  $t$  ординату кривой

$$W = \int_0^t \left( Q + F \frac{dh}{dt} \right) dt,$$

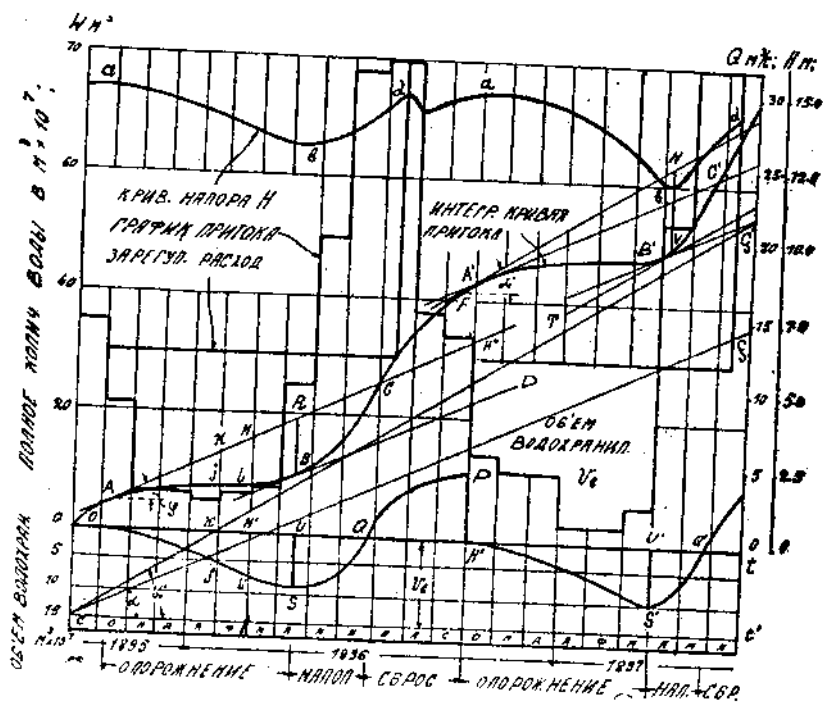
получим средний сток в м<sup>3</sup>/с за это время, равный

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\int_0^t \left( Q + F \frac{dh}{dt} \right) dt}{t}.$$

Отложим заданную емкость водохранилища  $V_0$  на оси ординат вниз от точки  $O$  и проведем  $O't' \parallel Ot$ . Тогда прямая  $O't'$  укажет границу емкости регулирующих средств за весь наблюдаемый срок. Задаваясь произвольно значением  $\operatorname{tg} \alpha$ , и проводя  $O'G$  под углом  $\alpha$  к  $O't'$ , будем иметь в периоды тех участков интегральной кривой, на которых  $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha$  необходимым пользоваться запасами водохранилища для поддержания стока  $\operatorname{tg} \alpha$ , накопление которых должно происходить в периоды, отвечающие участкам интегральной кривой с значениями  $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} \alpha$ . Примем, что к моменту равенства  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$  в точке  $A$  интегральной кривой, где касательная к ней  $AC \parallel O'G$ , водохранилище наполнено. Тогда, на всем периоде кривой со значениями  $\operatorname{tg} \varphi < \operatorname{tg} \alpha$  от  $A$  до  $B$  запасы воды будут расходоваться и только с точки  $B$ , где касательная  $BD \parallel O'G$ , надобность в водохранилище пропадает. Полное количество воды, взятое из водохранилища за период  $AB$  измеряется отрезком  $RB$ . С точки  $B$   $\operatorname{tg} \varphi > \operatorname{tg} \alpha$  и водохранилище наполняется. К моменту, отвечающему точке  $C$  водохранилище вновь наполнено и далее происходит сброс лишней воды до момента равенства  $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \alpha$

в точке  $A'$ . Аналогично далее получим ряд периодов наполнения, сброса и опорожнения водохранилища, изображаемых в последовательности кривой  $HSQP'H'S'Q'$ , если снести отрезки  $KI, ML \dots A'H''$  к оси абсцисс соответственно в положения  $K'I', M'L' \dots PH' \dots$ . Точки  $H, H' \dots$  покажут начало опорожнения водохранилища,  $S, S' \dots$  — конец опорожнения и начало наполнения,  $Q, Q' \dots$  — конец наполнения и начало сброса и точки  $P, P' \dots$  — конец сброса. Ординаты  $US, U'S' \dots$  кривой  $HSQP'H'S'Q'$  ... определяют используемый объем водохранилища в каждом случае.

Взяв период опорожнения водохранилища с максимальной ординатой  $U'S'$  ищем расход, возможный к зарегулированию на нем



Фиг. 11.

с использованием полной емкости водохранилища  $V_b$ . Обращаясь на этом периоде к участку интегральной кривой, добиваемся на нем такого положения двух параллельных касательных  $FN$  и  $TV$ , при котором вертикаль  $NV$  получается между ними равной  $V_b$ . Проводя из  $O'$  прямую  $O'G' \parallel FN$ , найдем искомый расход, равный  $\text{tg } \alpha' = \frac{G't'}{O't'}$ . Относя найденный расход к графикам хронологического притока воды  $(Q + F \frac{dh}{dt})$ , исправляем таковые учетом влияния регулирования

(фиг. 11), после чего можно построить как годовую, так и сезонные кривые средней продолжительности зарегулированного расхода и мощности, должные лечь в основу расчета выбора величины станции по правилам раздела I, сообразно данным условиям нагрузки.

Когда наполнение и опорожнение водохранилища колеблет рабочий напор станции, следует наряду с зарегулированными многолетними графиками расходов, нанести кривую  $abdabd\dots$  изменения напора  $H$ , что позволяет через произведение  $\rho QH$  получить хронологические графики мощности, с которыми и следует оперировать.

Кривая  $abdabd\dots$  строится на основании зависимости изменения напора  $H$  в функции пополнения водохранилища. Участки  $da$  кривой  $abdabd\dots$  приобретают форму на основании данных об изменении напора станции в функции расхода.

### § 7. Учет и определение рационального объема водохранилища.

Рассмотрим случай регулирования с затратой средств на сооружение водохранилища.

Здесь, в присутствии данных многолетнего наблюдения режима водотока задача сводится к нахождению наивыгоднейшего „среднего“ объема водохранилища  $V_b$ , отвечающего самой рациональной величине установки при данных условиях ее работы.

Установим для случаев работы станции § 1, § 2 и § 3 основные условия получения наивыгоднейшей величины  $V_b$  при переменной цене 1 м<sup>3</sup> его объема  $\beta$  в первоначальном предположении неизменного уровня воды в водохранилище при регулировании.

#### 1. Случай нагрузки § 1.

Зададимся рядом объемов водохранилища  $V_b$ . Тогда при каждом значении  $V_b$  и средне-годовом % эксплуатации  $\alpha$ , годовые расходы  $K$  и валовая выручка  $W_o$  выразятся, как

$$\left. \begin{aligned} K &= \alpha D + \alpha dP + \alpha \beta V_b \\ W_o &= \alpha M_{oo} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где  $M_{oo}$  — годовое число гидравлических  $kwh$ , производимых станцией мощностью  $P_{oo}$  при данном  $V_b$ .

Для ряда  $V_b$  каждая пара равенств (37) изобразится в виде прямой  $K$  и кривой  $W_o$  подобно фиг. 1, определяя наивыгоднейшую мощность станций максимумом

$$(W_o - K) = \alpha M_{oo} - \alpha D - \alpha dP - \alpha \beta V_b$$

При этом для каждого  $V_b$  в рав. (37)  $\alpha \beta V_b = \text{const.}$ , а потому условием выгодности остается (1).

Из всех наивыгоднейших  $P$  самая рентабельная будет отвечать наибольшему максимуму  $(W_o - K)$  при наивыгоднейшем  $V_b$ . Т. о., при-

няв равенство (37) отнесенным к максимумам ( $W_0 - K$ ) с переменным  $\alpha\beta V_b$  и дав  $V_b$  приращение  $\Delta V_b$ , получим увеличение для  $P$ ,  $M_{os}$ ,  $\beta$  и ( $W_0 - K$ ) соответственно в виде  $\Delta P$ ,  $\Delta M_{os}$ ,  $\Delta\beta$  и  $\Delta(W_0 - K)$ .

При максимуме ( $W_0 - K$ ) имеем  $\Delta(W_0 - K) = 0$ .

т. е.

$$\alpha\Delta M_{os} - \alpha d\Delta P - \alpha\beta\Delta V_b - \alpha\Delta\beta V_b - \alpha\Delta\beta\Delta V_b = 0$$

или

$$\frac{\alpha d\Delta P}{\Delta M_{os}} + \frac{\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b}{\Delta M_{os}} = a \quad (38)$$

Здесь  $\Delta M_{os}$  есть общее увеличение энергии при изменении  $V_b$  на  $(V_b + \Delta V_b)$ . Но с увеличением  $V_b$  на  $\Delta V_b$  величина  $\Delta M_{os}$  всегда складывается из двух приращений  $\Delta M_s$  и  $\Delta M_o$ , происходящих соответственно от непосредственного увеличения используемого водного запаса водохранилища и возникающего в силу этого изменения наивыгоднейшей мощности ставций. Т. о., (38) имеет вид

$$\frac{\alpha d\Delta P}{\Delta M_s + \Delta M_o} + \frac{\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_o} = a$$

или

$$\frac{\alpha d\Delta P}{\Delta M_o \left( \frac{\Delta M_s}{\Delta M_o} + 1 \right)} + \frac{\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_o} = a \quad (39)$$

Учитывая условие (1) и подставляя его в (39), получим

$$\frac{a}{\frac{\Delta M_s}{\Delta M_o} + 1} + \frac{\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_o} = a$$

или

$$a \frac{\Delta M_s}{\Delta M_o} \frac{\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_o} = 0$$

или

$$\alpha\Delta M_s - (\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b) = 0 \quad (40)$$

В (40)  $(\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b)$  есть приращение годовой стоимости водохранилища. Обозначим его через  $\Delta K_b$ . Тогда

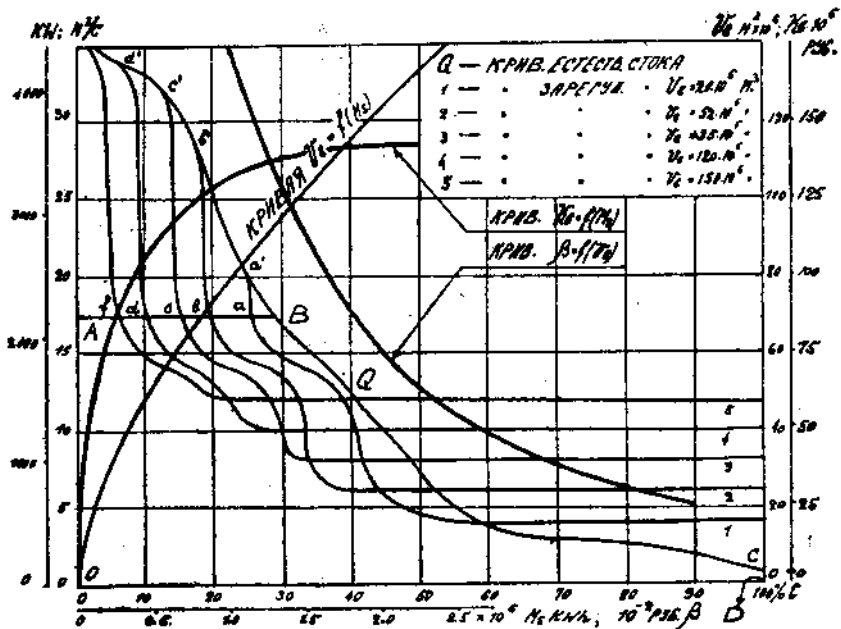
$$\frac{\Delta K_b}{\Delta M_s} = a = \operatorname{tg} \theta \quad (40a)$$

где  $\Theta$  — угол, составленный касательной к кривой  $K_b = f(M_b)$  с абсциссой  $M_b$ , равный  $\arctg a$ .

Наивыгоднейшее значение  $K_b$  определяется на кривой зависимости  $K_b$  (ординаты) в функции производимого за год водохранилищем дополнительного числа  $M_b$ ,  $kwh$  условием (40а).

Пусть имеется  $Q$  — естественная годовая кривая средней продолжительности мощности водотока, а 1, 2, 3... — зарегулированные соответственно при разных  $V_b$  (фиг. 12).

Пусть при естественном стоке и полном суточном регулировании наивыгоднейшая мощность станции определит годовое число произво-



Фиг. 12.

димых  $kwh$  площадью  $OABCD$ . Тогда при каждой из кривых 1, 2, 3... величина  $M_b$  определится соответственно площадями  $aa'B$ ,  $bb'B$ ... Откладывая  $V_b$  (ординаты) в функции этих площадей, получаем кривую  $V_b = f(M_b)$ . Зная  $\alpha$  и зависимость  $\beta = f(V_b)$ , строим помощью кривой  $V_b = f(M_b)$  зависимость  $K_b = f(M_b)$ , по которой условием (40а) определяем  $K_b$ , а затем по  $V_b = f(M_b)$  и наивыгоднейший  $V_b$ .

Указанный метод расчета применим и при остальных видах суточного регулирования, для чего кривые 1, 2, 3... должны быть исправлены подобно тому, как исправлялась на фиг. 1 кривая  $Q$  на  $Q_1$  и  $Q_2$ .

2. Случай нагрузки § 2.

Задавшись рядом  $V_b$ , выразим при каждом из них годовые расходы  $K$  и выручку  $W$ , как

$$\left. \begin{aligned} K &= \alpha D + \alpha p P_{\max} + \alpha \beta V_b \\ W &= \alpha M_{os} + (\alpha M_T - \alpha' p P_{T \max} - \delta M_T) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где за  $W$  аналогично (10) принята выручка  $W_0 = \alpha M_{os}$  с поправкой на разность между выручкой  $\alpha M_T$  от продажи энергии тепловой и годовыми расходами по резерву ( $\alpha' p P_{T \max} + \delta M_T$ ).

Для ряда  $V_b$  каждая пара рав. (41) изобразится в виде прямой  $K$  и объемлющей кривой  $W$  подобно фиг. 3, определяя наивыгоднейшую мощность станции  $P_{\max}$  максимумом

$$(W - K) = \alpha M_{os} + \alpha M_T - \alpha' p P_{T \max} - \delta M_T - \alpha D - \alpha d P_{\max} - \alpha \beta V_b \quad (42)$$

При этом в каждом из (42)  $\alpha \beta V_b = \text{const}$ , а потому условием выгодности остается рав. (15).

Отнесем (42) к максимумам  $(W - K)$  при переменном  $\alpha \beta V_b$ . Тогда, давая  $V_b$  приращение  $\Delta V_b$  и получая увеличения для  $P_{\max}$ ,  $P_{T \max}$ ,  $M_{os}$ ,  $M_T$ ,  $\beta$  и  $(W - K)$  соответственно, как  $\Delta P_{\max}$ ,  $\Delta P_{T \max}$ ,  $\Delta M_{os}$ ,  $-\Delta M_{os}$ ,  $\Delta \beta$  и  $\Delta(W - K)$ , будем иметь условием выгодности  $\Delta(W - K) = 0$ , т. е.

$$\alpha' p \Delta P_{T \max} - \delta \Delta M_{os} + \alpha d \Delta P_{\max} + \alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b = 0$$

или

$$\frac{\alpha' p P_{T \max}}{\Delta M_{os}} + \frac{\alpha d \Delta P_{\max}}{\Delta M_{os}} + \frac{\alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b}{\Delta M_{os}} = \delta \quad (43)$$

В (43), как и в случае 1  $M_{os} = M_s + M_0$ , а потому:

$$\frac{\alpha' p \Delta P_{T \max}}{\Delta M_s + \Delta M_0} + \frac{\alpha d \Delta P_{\max}}{\Delta M_s + \Delta M_0} + \frac{\alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_0} = \delta$$

или

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\Delta M_s}{\Delta M_0} + 1} \left( \frac{\alpha' p \Delta P_{T \max}}{\Delta M_0} + \frac{\alpha d \Delta P_{\max}}{\Delta M_0} \right) + \\ & + \frac{\alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_0} = \delta \end{aligned} \quad (44)$$

Заменяя в (44) выражение в скобках через (15), получим:

$$\frac{\delta}{\frac{\Delta M_s}{\Delta M_0} + 1} + \frac{\alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_0} = \delta$$

или

$$\delta \Delta M_s - (\alpha \beta \Delta V_b + \alpha \Delta \beta V_b + \alpha \Delta \beta \Delta V_b) = 0 \quad (45)$$

В (45) ( $\alpha\beta\Delta V_b + \alpha\Delta\beta V_b + \alpha\Delta\beta\Delta V_b$ ) есть приращение годовой стоимости водохранилища. Обозначая его через  $\Delta K_b$ , будем иметь:

$$\frac{\Delta K_b}{\Delta M_s} = \delta = \operatorname{tg} \lambda \quad (45a)$$

где  $\lambda$ —угол, составленный касательной к кривой  $K_b = f(M_s)$  с абсциссой  $M_s$ , равный  $\operatorname{arctg} \delta$ . Наивыгоднейшее значение  $K_b$  определяется по кривой  $K_b = f(M_s)$  условием (45a), после чего по кривой  $V_b = f(M_s)$  находится и наивыгоднейший  $V_b$ .

При полном суточном регулировании стока при комбинированной работе станции кривые

$$V_b = f(M_s) \quad \text{и} \quad K_b = f(M_s)$$

строятся аналогично случаю 1 фиг. 12.

Изложенный метод применим и при отсутствии суточного регулирования при выполнении условий, указанных в случае 2 § 2. При неполном суточном регулировании указанный расчет не применим в силу отсутствия конкретных данных о нагрузке, необходимых к установлению вводимых поправок в очертание зарегулированных кривых мощности водотока.

### 3. Случай нагрузки § 3.

Выражаем для ряда  $V_b$  годовые расходы  $K$  и выручку  $W$ , как

$$\left. \begin{aligned} K &= \alpha D + \alpha p P + \alpha \beta V_b \\ W &= \alpha M_{ss} + (\alpha M_T - \alpha' p P_T - \delta M_T) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где  $W$  взято по (19). При каждом  $V_b$  пара равенств (46) дает прямую  $K$  и кривую  $W$  аналогично фиг. 8, определяя наивыгоднейшую мощность станции  $P$  максимумом

$$(W - K) = \alpha M_{ss} + \alpha \cdot M_T - \alpha' \cdot p P_T - \delta M_T - \alpha D - \alpha d P - \alpha \beta V_b \quad (47)$$

При этом в каждом из (47)

$$\alpha \beta V_b = \operatorname{const.},$$

а потому остается в силе условие выгодности (22), которое при

$$t = \frac{\Delta M}{\Delta P}$$

получает вид

$$\frac{\Delta P}{\Delta M_{ss}} = \frac{\delta}{\alpha d} \quad (48)$$



Отнесем (47) к максимумам  $(W - K)$  при переменном  $\alpha\beta V_b$ . Тогда, давая  $V_b$  приращение  $\Delta V_b$  и получая увеличения для

$$P, P_T, M_{os}, M_T, \beta \text{ и } (W - K),$$

как

$$\Delta P, \Delta P_T, \Delta M_{os}, -\Delta M_{os}, \Delta\beta \text{ и } \Delta(W - K),$$

будем иметь условием выгодности  $\Delta(W - K) = 0$ , т. е.

$$\alpha' p \Delta P_T - \delta \Delta M_{os} + \alpha d \Delta P + \alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b = 0$$

или

$$\frac{\alpha' p \Delta P_T}{\Delta M_{os}} - \delta + \frac{\alpha d \Delta P}{\Delta M_{os}} + \frac{\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b}{\Delta M_{os}} = 0 \quad (49)$$

В (49), как и в случаях 1 и 2

$$\Delta M_{os} = \Delta M_s + \Delta M_0,$$

а потому

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha' p \Delta P_T}{\Delta M_s + \Delta M_0} - \delta + \frac{\alpha d \Delta P}{\Delta M_0 \left( \frac{\Delta M_s}{\Delta M_0} + 1 \right)} + \\ & + \frac{\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_0} = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя в (50) условие (48), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha' p \Delta P_T}{\Delta M_s + \Delta M_0} - \delta + \frac{\delta}{\frac{\Delta M_s}{\Delta M_0} + 1} + \\ & + \frac{\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b}{\Delta M_s + \Delta M_0} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\alpha' p \Delta P_T - \delta (\Delta M_s + \Delta M_0) + \delta \Delta M_0 + (\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b) = 0$$

откуда

$$\frac{\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b}{\Delta M_s} + \frac{\alpha' p \Delta P_T}{\Delta M_s} = \delta \quad (51)$$

В (51)  $(\alpha\beta \Delta V_b + \alpha \Delta\beta V_b + \alpha \Delta\beta \Delta V_b)$  есть приращение годовой стоимости водохранилища. Обозначая его через  $\Delta K_b$ , имеем

$$\frac{\Delta K_b}{\Delta M_s} \left( 1 + \frac{\alpha' p \Delta P_T}{\Delta K_b} \right) = \delta$$

или

$$\operatorname{tg} \xi (1 + \alpha' p \operatorname{ctg} \zeta) = \delta \quad (51a)$$

где  $\xi$  и  $\zeta$  суть соответственно углы наклоны к абсциссам  $M_1$  и  $P_2$  касательных к кривым

$$K_b = f(M_1) \quad \text{и} \quad K_b = f(P_2).$$

Пусть  $nm$  — естественные кривые средней продолжительности мощности водотока по периодам, а 1, 2, 3... — зарегулированные соответственно при разных  $V_b$  (фиг. 13). При полном суточном регулировании стока кривые  $nm$  в сопоставлении с нагрузками  $agb$  определяют недостаток гидравлической энергии за год, как

$$\sum_1^e \text{пл. } d'fm,$$

а зарегулированные 1, 2... соответственно, как

$$\sum_1^e \text{пл. } 1d'f, \quad \sum_1^e \text{пл. } 2d''f \dots,$$

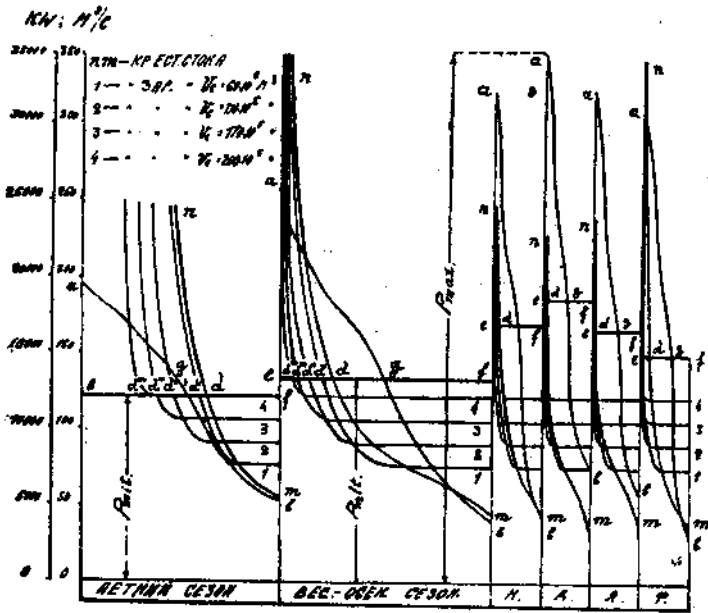
где  $e$  — число периодов. Число  $M_1$ ,  $kwh$ , производимое дополнительно каждым из  $V_b$ , определится разностями:

$$\left. \begin{aligned} \sum_1^e \text{пл. } d'fm - \sum_1^e \text{пл. } 1d'f \\ \sum_1^e \text{пл. } d'fm - \sum_1^e \text{пл. } 2d''f \\ \dots \end{aligned} \right\} = M \quad (52)$$

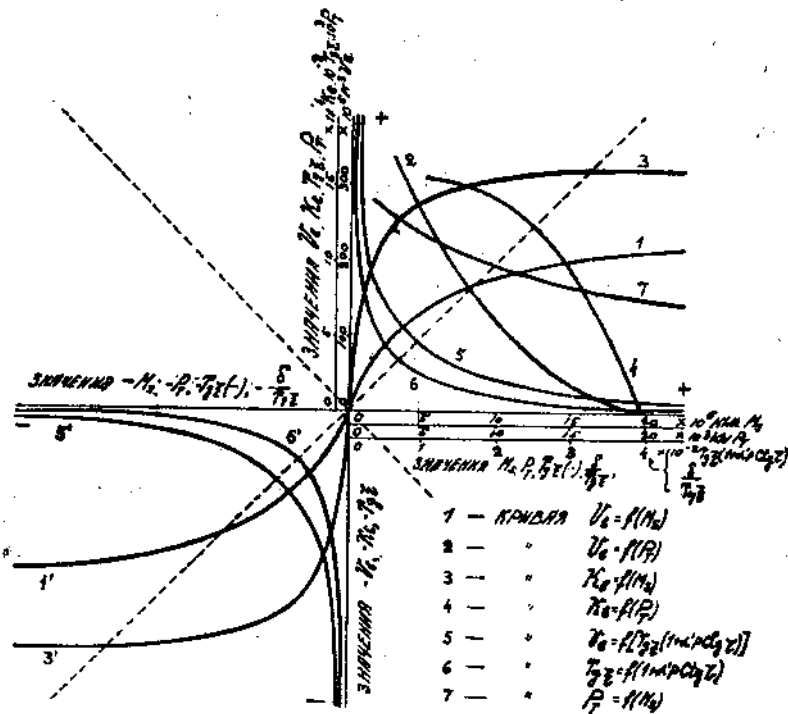
Равенства (52) представляют разности площадей комбинированных графиков мощности, построенных в сопоставлении с нагрузками  $agb$  зарегулированных кривых 1, 2... и естественных  $nm$  и дают несколько преувеличенное  $M_1$ . Однако, истинные  $M_1$  весьма близки к  $M_1$  по (52). Так, при естественных кривых  $nm$  фиг. 13 комбинированный график имеет вид  $OAE_1 dD_1$ , а при кривых 2 —  $OAE_1' D_1$  фиг. 7.

При  $t = \frac{\alpha \cdot d}{\delta} = cd$  невыгоднейшая мощность станции в первом случае равна  $P$ , а во втором  $P_1$ , причем  $M_0 = \text{пл. } c'edb$ , а  $M = \text{пл. } bE_1E_1'd'$ . По (52) же,  $M_1 = \text{пл. } OAE_1D_1 - \text{пл. } OAE_1'D_1 = \text{пл. } aE_1E_1'$ . Как видно,  $(\text{пл. } aE_1E_1' - \text{пл. } bE_1E_1'd') = \text{пл. } abd'$  ничтожна.

Пользуясь (52), строим  $V_b = f(M_1)$  в виде кривой 1 фиг. 14. Определяя при каждой из кривых 1, 2... фиг. 13 мощность резерва  $P_T$ , как



Фиг. 13.



Фиг. 14.

в 1° § 3, строим  $V_b = f(P_T)$  в виде кривой 2. Зная  $\alpha$  и пользуясь  $\beta = f(V_b)$  хотя бы из фиг. 12, строим помощью кривых 1 и 2 зависимости  $K_b = f(M_b)$  и  $K_b = f(P_T)$  соответственно в виде кривых 3 и 4. Далее определяем для ряда  $K_b$  по кривым 3 и 4 соответственно  $tg\xi$  и  $ctg\zeta$ <sup>1)</sup>. Вводя  $tg\xi$  и  $ctg\zeta$  в (51a) и зная  $\alpha'$  и  $p$ , заменяем  $K_b$  через  $V_b$  и строим кривую 5  $V_b = f[tg\xi(1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta)]$ . Наивыгоднейший  $V_b$  определяется по кривой 5 условием (51a).

Отметим, что искомый  $V_b$  всегда отвечает величинам  $tg\xi$  и  $(1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta)$ , лежащим на гиперболы  $tg\xi = f(1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta)$ , ибо (51a) есть уравнение последней в асимптотах. Т. о., откладывая  $tg\xi$  (ординаты) в функции  $\frac{\delta}{tg\xi} = (1 + \alpha' p ctg\zeta)$ , получим кривую 6 с мнимой ветвью 6'. В силу этого при  $(1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta) = 0$   $tg\xi = \pm \infty$  и наоборот. Отсюда кривая 3, а, следовательно, и кривая 1 соответственно имеют мнимые ветви 3' и 1'. Выразим  $K_b = f(M_b)$  приближенно в виде  $K_b = (b \cdot M_b)^{\frac{1}{2n+1}}$  где  $b$  — некоторой параметр, а  $n$  — число  $\geq 1$ .

Тогда  $\frac{\Delta K_b}{\Delta M_b} = \frac{b}{(2n+1) \cdot (b \cdot M_b)^{\frac{2n}{2n+1}}}$  и равенство (51a) выразится, как

$$\frac{b}{(2n+1)(b \cdot M_b)^{\frac{2n}{2n+1}}} (1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta) = \delta$$

или, умножая на

$$K_b^{2n} = (b \cdot M_b)^{\frac{2n}{2n+1}},$$

имеем

$$\frac{b}{(2n+1)} (1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta) = \delta \cdot K_b^{2n}$$

откуда

$$\frac{\delta \cdot K_b^{2n}}{(1 + \alpha' \cdot p \cdot ctg\zeta)} = \frac{b}{2n+1} = \text{const}$$

В действительности величина  $\alpha' p ctg\zeta$  с изменением  $K_b$  всегда изменяется в малых пределах, а потому, приняв приближенно  $(1 + \alpha' p ctg\zeta) = c = \text{const}$ , получим

$$\delta K_b^{2n} = \frac{bc}{2n+1} = \text{const.}$$

<sup>1)</sup>  $ctg\zeta$  есть величина отрицательная.

или

$$\delta \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot V_{\delta})^{2n} = \frac{bc}{2n+1} = \text{const}$$

или

$$(\alpha \cdot \beta \cdot V_{\delta})^{2n} [\text{tg} \xi (1 + \alpha' \cdot p \cdot \text{ctg} \zeta)] = \frac{b \cdot c}{2n+1} = \text{const}$$

Т. е. кривая  $V_{\delta} = f[\text{tg} \xi (1 + \alpha' p \text{ctg} \zeta)]$  есть искаженная гипербола с мнимой ветвью  $5'$ .

Полное изображение кривых дано на фиг. 14.

Изложенный расчет применим и при остальных видах суточного регулирования, для чего только кривые *nm* фиг. 13 должны исправляться учетом недоиспользуемой гидравлической мощности соответственно методам 2 и 3 § 8.

Во всех наложенных 1, 2, 3 случаях расчета, определив наимыгоднейший  $V_{\delta}$ , следует зарегулировать по нему расход водотока и установить для случаев 1 и 2 годовые, и для случая 3 сезонные кривые мощности. Дальнейшие расчеты по отысканию рациональных величин станций сводятся соответственно к методам раздела I.

Когда же наполнение и опорожнение водохранилища колеблет напор станции, следует в случаях 1, 2 и 3 для каждого ваятого  $V_{\delta}$  установить вид зарегулированных по нему многолетних графиков расхода  $Q$  вместе с кривыми напора  $H$  (см. фиг. 11). Это позволит через произведение  $\mu \cdot Q \cdot H$  превратить графики расхода в графики мощности, которые и послужат для построения в случаях 1 и 2 годовых, а в случае 3 сезонных кривых средней продолжительности мощности водотока. Дальнейшие расчеты по отысканию  $V_{\delta}$  производятся по изложенным правилам.

Установим смысл полученных результатов.

В случае 1 по условию (40 а) наимыгоднейший  $K_{\delta}$ , а следовательно и  $V_{\delta}$  убывает с возрастанием продажной стоимости  $a$ . Эта зависимость имеет тот смысл, что с возрастанием  $a$  нарастание чистой прибыли ( $W_{\delta} - K$ ) происходит главным образом от интенсивного увеличения наимыгоднейшей мощности станции  $P$  по условию (1 а), в силу чего надобность в водохранилище уменьшается и наоборот.

В случае 2 смысл условия (45 а) одинаков с (40 а), где лишь  $a$  заменено  $\delta$ , в силу чего  $V_{\delta}$  от  $a$  не зависит.

В случае 3 смысл условия (51а) аналогичен (45а). По данным § 3 наимыгоднейшее  $P$  растет с увеличением  $\delta$ , т. е. с уменьшением  $t = \frac{\alpha \cdot d}{\delta}$  при возрастающем  $\text{tg} \varphi = \frac{\Delta P}{\Delta M_{\delta}}$ . Отсюда с увеличением  $\delta$  нара-

стание чистой прибыли ( $W - K$ ) происходит главным образом от интенсивного роста наимыгоднейшей мощности установки  $P$ , в силу чего по (51 а) надобность в водохранилище уменьшается и наоборот. При

снижении  $\delta$  до  $\delta = 0, V_b = \infty$ . При возрастании  $\delta$  емкость  $V_b$  убывает, но она никогда не будет нуль, ибо для этого надо, чтобы  $\delta = \infty$ . Значение  $V_b$ , как и в случае 2 от  $a$  не зависит.

Установим значение  $V_b$  при  $\beta = 0$ .

В случаях 1 и 2 при  $\beta = 0$  имеем из (40) и (45) соответственно  $\Delta M_s = 0$ , что возможно только при максимуме  $M_s$ . Т. о., использование  $V_b$  здесь выгодно до получения максимума  $M_s$ , т. е. вплоть до полного отрегулирования расходов водотока.

В случае же 3 при  $\beta = 0$  имеем из (51):

$$\frac{\alpha' \cdot p \cdot \Delta P_T}{\Delta M_s} = \delta \quad (53)$$

откуда

$$\frac{\Delta P_T}{\Delta M_s} = \frac{\delta}{\alpha' \cdot p} = \operatorname{tg} \omega \quad (53 \text{ а})$$

где  $\omega$  — угол, составленный касательной к кривой  $P_T = f(M_s)$  с абсциссой  $M_s$ , равный  $\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\alpha' \cdot p}$ . Т. о., строя при пользовании кривыми 1 и 2 фиг. 14. зависимость  $P_T = f(M_s)$ , находим, что даровой объем  $V_b$  водохранилища выгодно использовать до величины, отвечающей условию (53 а) по кривой 7. Т. к. практически по (53 а)  $\operatorname{tg} \omega$  очень мал, то  $V_b$  выгодно использовать до возможного максимума.

Выясним для случаев 1, 2, 3 характер функций  $K_b = f(M_s)$ .

В случаях 1 и 2 равенства (40) и (45) соответственно дают отношения

$$\frac{\Delta K_b}{\Delta M_s} = a$$

и

$$\frac{\Delta K_b}{\Delta M_s} = \delta$$

убывающие ( $a$ , следовательно, и убывающие  $\operatorname{tg} \theta$  и  $\operatorname{tg} \lambda$ ) т. е. в обоих случаях

$$\frac{\Delta^2 K_b}{\Delta M_s^2} < 0,$$

ибо с возрастанием  $V_b$  убывает  $P$ , при котором по данным § 1 и § 2 соответственно отношения

$$\frac{\Delta K}{\Delta M_s} = a$$

и

$$\frac{\Delta K'}{\Delta M_s} = a$$

должны быть возрастающими, т. е.

$$\frac{\Delta^2 K}{\Delta M_s^2} > 0 \text{ и } \frac{\Delta^2 K'}{\Delta M_s^2} > 0.$$

В случае 3 с возрастанием  $V_b$  растет  $P$  (по фиг. 7), но равенство (61) все же является убывающим в силу более сильной убыли  $\alpha' \cdot p \cdot P_T$  в сравнении с ростом  $K_b$ , т. е. здесь  $\frac{\Delta^2 K_b}{\Delta M_b^2} + \frac{\alpha' \cdot p \cdot \Delta^2 P_T}{\Delta M_b^2} < 0$  в то время, как отношение  $\frac{\Delta \Lambda'}{\Delta M_b} = \alpha$  при наивыгоднейшем  $P$  по § 3 всегда должно быть возрастающим.

Т. о. в случаях 1, 2 и 3 кривые  $K_b = f(M_b)$ , а, следовательно, и  $V_b = f(M_b)$ , всегда обращены выпуклостью к осям  $K_b$  и  $V_b$ .

### III.

#### Совместная работа гидроустановок.

##### § 8. Работа станций без годичного регулирования стока.

Под совместной работой установок подразумевается их параллельная работа на общую объединяющую их электрическую сеть с взаимным обменом производимой ими энергии в целях возможно полного удовлетворения нагрузки каждой из них.

В такой работе могут участвовать, как установки, расположенные на одном общем водотоке, так и на нескольких с различным гидравлическим режимом. Т. к. степень взаимного пополнения недостающей энергии каждой из станций должна при этом обуславливаться установленным видом их суточной нагрузки, то, очевидно, наибольший экономический эффект совместной работы должен проявляться при объединении центральных станций с индивидуальной нагрузкой, работа которых исключительно и будет здесь рассмотрена. В этом случае пики суточной нагрузки станций могут не совпадать, а минимумы расходов в водотоках могут встречаться в различное время, что в целом увеличивает производительность установок и уменьшает мощность теплового резерва, который становится общим для данной системы станций. Кроме того, возможное несопадение пиков нагрузки станций способствует при взаимном обмене их энергии более спокойной работе каждой из них, в силу чего всегда заслуживает внимания упрощение системы регулирования агрегатов станций, что особенно ценно при наличии высокопарных установок, где проблема регулирования обнаруживается наиболее остро. Параллельно с этим объединение станций приводит к одному центральному управлению ими, что упрощает заведывание и облегчает в случае расширения системы станций дальнейшее финансирование.

Упомянутые качества совместной работы станций в результате понижают себестоимость их энергии и этим содействуют увеличению сбыта ее, чем главным образом и характеризуется основное условие

осуществления электрификации в полном смысле слова, столь важной в деле государственной экономики.

Пусть для каждой из 1, 2, ...  $n$  станций мы имеем соответственно:  $P_1, P_2, \dots, P_n$  — рабочую мощность в  $kwh$ ,  $M_{o1}, M_{o2}, \dots, M_{on}$  — производимое годовое количество гидравлической энергии в  $kwh$ ,  $M_{T1}, M_{T2}, \dots, M_{Tn}$  — годовое потребное количество тепловой энергии в  $kwh$ ,  $\alpha_1 D_1, \alpha_2 D_2, \dots, \alpha_n D_n$  — годовой расход несвязанный с мощностью;  $\alpha_1 d_1, \alpha_2 d_2, \dots, \alpha_n d_n$  — годовая цена установленного  $kwh$ ;  $P_{T1}, P_{T2}, \dots, P_{Tn}$  — приходящаяся доля общей мощности теплового резерва, равной  $P_T = P_{T1} + P_{T2} + \dots + P_{Tn}$ . Тогда при годовой цене установленного теплового  $kwh$  в  $\alpha' \cdot p$  руб., продажной цене комбинированной энергии в  $a$  руб., за  $kwh$  и среднем прямом расходе по тепловому  $kwh$  в  $\delta$  руб. будем иметь на основании (19) общую годовую прибыль:

$$\begin{aligned} (W-K) &= [a \cdot M_{o1} + (a \cdot M_{T1} - \delta \cdot M_{T1} - \alpha' \cdot p \cdot P_{T1}) - (\alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_1 \cdot d_1 \cdot P_1)] + \dots \\ &\dots + [a \cdot M_{on} + (a \cdot M_{Tn} - \delta \cdot M_{Tn} - \alpha' \cdot p \cdot P_{Tn}) - (\alpha_n \cdot D_n + \alpha_n \cdot d_n \cdot P_n)] = \\ &= \left[ \sum_1^n (a \cdot M_o + a \cdot M_T - \delta \cdot M_T) - \alpha' \cdot p \cdot P_T \right] - \sum_1^n (\alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P) \quad (54)' \end{aligned}$$

где

$$W = \left[ \sum_1^n (a \cdot M_o + a \cdot M_T - \delta \cdot M_T) - \alpha' \cdot p \cdot P_T \right]$$

есть исправленная учетом влияния работы теплового резерва общая валовая выручка от сбыта гидравлической энергии, а

$$K = \sum_1^n (\alpha \cdot D + \alpha \cdot d \cdot P)$$

есть общий годовой расход по установкам.

При максимуме  $(W-K)$  его приращение  $\Delta(W-K) = 0$ .

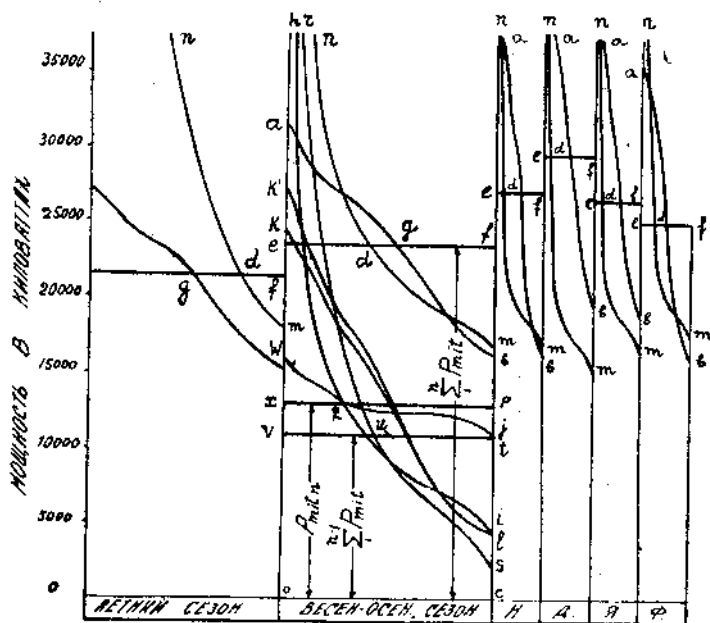
Последнее же условие выполняется только при равенстве нулю приращений в (54) всех  $n$  слагаемых, т. е. условием иметь максимум прибыли  $(W_1 - K_1), (W_2 - K_2), \dots, (W_n - K_n)$  для каждой из станций. Т. о. задача сводится к нахождению наиболее выгодной мощности каждой из установок при данном установившемся взаимном обмене их энергии и приходящейся доли общей мощности резерва.

Определим взаимный обмен энергией  $n$  станций при данном режиме водотока и заданной величине нагрузки каждой из них.

Имея для каждой из установок графики изменения мощности водотока за ряд лет, суммируем их и строим общие кривые  $n$  средней продолжительности всей гидравлической мощности по отдельным периодам года аналогично указанному в § 3 в целом для летнего и



весенне-осеннего периодов и по месяцам для зимнего (фиг. 15). Параллельно с этим, имея для трех указанных периодов года для каждой из станций суточные диаграммы нагрузки, суммируем их в каждом периоде, получая т. о. три общих суточных графика. Кроме того, имея для отдельной станции график изменения средней мощности нагрузки по месяцам в течение года, суммируем таковые, получая один общий годовой. Далее, пользуясь тремя общими сезонными суточными графиками нагрузки и одним общим годовым, строим по правилам § 3 кривые  $agb$  средней продолжительности общей нагрузки в целом для летнего и весенне-осеннего периодов и по месяцам для зимнего (фиг. 15). Сопоставляя между собой в каждом периоде кри-



Фиг. 15.

вые нагрузки  $agb$  с кривыми мощности водотока  $nm$ , имеется возможность определить методами § 3 общее недостающее количество гидравлической энергии в любом из них. При этом имеются три случая расчета. Первый отвечает условию, когда вся объединенная система станций имеет суточную емкость б'ефов, достаточную для выполнения полного суточного регулирования стока при покрытии общего максимального (зимнего) графика нагрузки; второй — когда совершенно не имеет места суточное регулирование стока во всей системе станций из-за полного отсутствия общей емкости б'ефов установок — случай требующий отсутствия емкости б'ефа в каждой из них; и третий — когда вся система станций в целом не обладает в сравнении с первым случаем достаточной общей емкостью б'ефов, что ведет к производству частичного суточного регулирования.

При всех упомянутых видах регулирования стока методы определения общего недостающего количества гидравлической энергии в любом из периодов, равно как и общей мощности теплового резерва  $P_T$  для всей системы станций в целом остаются аналогичными изложенным соответственно в 1, 2, 3 случаях § 3, как для одной станции, где за основной случай расчета принят случай полного суточного регулирования стока с приурочиванием к нему остальных двух видов путем исправления кривых мощности водотока на недоиспользуемую в сравнении с ним в этих случаях ее величину. В силу этого мы будем рассматривать в дальнейшем только основной случай полного суточного регулирования стока, считая, что при остальных двух решение остается аналогичным первому при введении упомянутых исправлений кривых мощности водотока.

Взяв один весенне-осенний сезон с продолжительностью  $T$  час., как любой из всех, и заменяя в нем кривую  $agb$  линией  $ef$  средне-

сезонной мощности нагрузки  $\sum_1^n P_{mit}$  будем иметь по данным § 3

общее возможное к использованию системой  $n$  станций количество гидравлических  $kwh$ , определяемое площадью  $oedmc$  (фиг. 15), как

$$\sum_1^n M' = \sum_1^n P_{mit} T - \int_{t=ed}^{t=T} \left( \sum_1^n P_{mit} - \sum_1^n N \right) dt, \quad (55)$$

где последний член аналогично (18) определяет количество недостающей гидравлической энергии  $M_{от}$ , равное пл.  $dftm$ , при обозначении

через  $\sum_1^n N$  значений мощности по кривой  $nm$ .

Установим из всех совместно работающих станций возможную работу одной  $n$ -ой, имеющей самостоятельную кривую мощности водотока  $ki$  с ординатами  $N_n$  и самостоятельную кривую нагрузки  $kl$  с линией  $xr$  средне-суточной мощности  $P_{mit_n}$ <sup>1</sup>. Возможное к выработке число гидравлических  $kwh$  этой станции за сезон определяется площадью  $oxzic$ , как

$$M_{on}' = P_{mit_n} \cdot T - \int_{t=xi}^{t=T} (P_{mit_n} - N_n) dt, \quad (56)$$

где последний член аналогично (55) определяет количество недостающей энергии  $M_{от_n}$ , равное пл.  $xpi$ .

<sup>1</sup> При наличии для всей системы только общей нагрузки, последнюю следует распределять между станциями условно, что на расчет не влияет.

Исключая работу  $n$ -ой установки из системы, будем иметь изменение гидравлической мощности  $n-1$  станций за сезон в виде кривой  $rs$  с ординатами  $\sum_1^{n-1} N$  и линией  $vt$  средне-сезонной мощности нагрузки  $\sum_1^{n-1} P_{mit}$ . При этом общее возможное к выработке число гидравлических  $kwh$  за сезон определится площадью  $ovusc$ , как

$$\sum_1^{n-1} M_0' = \sum_1^{n-1} P_{mit} \cdot T - \int_{t=0}^{t=T} \left( \sum_1^{n-1} P_{mit} - \sum_1^{n-1} N \right) dt, \quad (57)$$

где последний член равен пл.  $uts$ .

Вычитывая (57) из (55), получим количество гидравлической энергии от участия работы  $n$ -ой станции во всей системе, определяемое площ.  $vedmsu$ , равное

$$\left( \sum_1^n M_0' - \sum_1^{n-1} M_0' \right) = \left( \sum_1^n P_{mit} - \sum_1^{n-1} P_{mit} \right) \cdot T - \int_{i=ed}^{i=T} \left( \sum_1^n P_{mit} - \sum_1^n N \right) dt + \\ + \int_{i=ou}^{i=T} \left( \sum_1^{n-1} P_{mit} - \sum_1^{n-1} N \right) dt.$$

Или, так как

$$\sum_1^n P_{mit} - \sum_1^{n-1} P_{mit} = P_{mit_n},$$

будем иметь

$$\sum_1^n M_0' - \sum_1^{n-1} M_0' = P_{mit_n} \cdot T - \int_{i=ed}^{i=T} \left( \sum_1^n P_{mit} - \sum_1^n N \right) dt + \\ + \int_{i=ou}^{i=T} \left( \sum_1^{n-1} P_{mit} - \sum_1^{n-1} N \right) dt \quad (58)$$

Вычитая (56) из (58), получим возможное к производству за сезон добавочное число гидравлических  $kwh$  от работы  $n$ -ой станции, как эффект ее взаимного обмена энергии с остальными, равный

$$\left( \sum_1^n M_0' - \sum_1^{n-1} M_0' \right) - M_0'_n = \int_{i=az}^{i=T} \left( P_{mit_n} - N_n \right) dt + \\ + \int_{i=ou}^{i=T} \left( \sum_1^{n-1} P_{mit} - \sum_1^{n-1} N \right) dt - \int_{i=ed}^{i=T} \left( \sum_1^n P_{mit} - \sum_1^n N \right) dt \quad (59)$$

Как видно, этот эффект выражается прежде всего в уменьшении потребной тепловой энергии, ибо он целиком равен необходимому ее количеству для  $n$ -ой установки с поправкой на разность ее для сумм  $n-1$  и  $n$  станций. При этом он возникает, как результат взаимного пополнения недостающих количеств гидравлических  $kwh$  между  $n$ -ой станцией и суммой  $n-1$  за весь период.

Установим, какое именно количество гидравлических  $kwh$  производится дополнительно  $n$ -ой станцией сверх ее нагрузки для добавочного покрытия нагрузки суммы  $n-1$  станций и какое отдается последними на нагрузку этой первой.

Перестроим пл.  $vedmsu$  (фиг. 15) в пл.  $owzjc$  размещением продолжительности ее ординат  $ms...ev$  на оси абсцисс  $oc$ . Тогда все средне-суточные мощности в виде ординат кривой  $wzj$  большие и равные  $P_{mit_n}$  должны будут соответственно иметь продолжительность меньшую и равную продолжительности мощности водотока  $N_n$ , равной  $P_{mit_n}$  по кривой  $hi$   $n$ -ой станции, а ординаты ее меньшие  $P_{mit_n}$  должны иметь продолжительность большую таковой для мощности  $N_n = P_{mit_n}$  водотока  $n$ -ой станции, ибо только при этом условии и возможен обмен энергии между  $n$ -ой станцией и суммой остальных  $n-1$ . Таким образом, кривая  $wzj^1$ , ограничивающая пл.  $owzjc$ , должна пересечься с средней линией нагрузки  $n$ -ой станции  $xp$  и кривой ее мощности водотока  $hi$  в общей точке  $z$ . При этом пл.  $xwz$  определит количество гидравлических  $kwh$ , возможных к дополнительному производству  $n$ -ой установкой сверх ее нагрузки для добавочного покрытия нагрузки суммы  $n-1$  станций, а пл.  $zji$  определит долю энергии, приходящуюся на дополнительную выработку суммой  $n-1$  установок в помощь  $n$ -ой для покрытия ее нагрузки в маловодное время.

Таким образом, возможная отдача гидравлической энергии  $n$ -ой установки при совместной ее работе с суммой  $n-1$  станций измеряется пл.  $owzic$  вместо пл.  $oxzic$  для случая самостоятельной работы, а потребное число тепловых  $kwh$  измеряется пл.  $xpi$  вместо прежней пл.  $xpi$ .

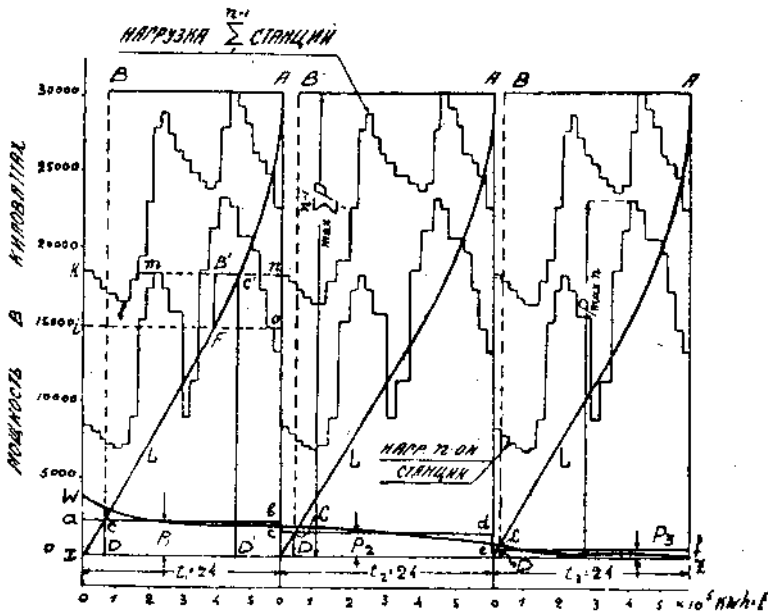
Установим вид фактической нагрузки  $n$ -ой станции в период отдачи ею дополнительного числа  $kwh$  на нагрузку суммы  $n-1$  станций в многоводные дни ее водотока в данном сезоне.

Кривая  $wz$  (фиг. 15) ограничивающая пл.  $wzx$ , определяет средне-суточные мощности, отдаваемые дополнительно  $n$ -ой установкой в многоводное время ее водотока и изменяющиеся от ординаты, равной  $xw$  до нуля в точке  $z$ . В силу этого, в течение многоводного времени  $t = xz$  данного сезона фактическая нагрузка  $n$ -ой станции будет изменяться ежесуточно от максимума со средне-суточной мощностью  $P_{mit_n, max} = ow$  до минимума с той же мощностью, равной нормаль-

<sup>1</sup> Она может быть различной формы.

ной  $P_{mit_n}$ . Выделяя пл.  $xwz$  на фиг. 16, заменим в ней кривую  $wz$  ступенчатой  $abcdefz$  с  $k$  числом ступеней соответственно с длительностями  $t_1, t_2 \dots t_k$  и средне-суточными мощностями  $p_1, p_2 \dots p_k$ , как добавочными к  $P_{mit_n}$  и определим вид фактической нагрузки  $n$ -ой станции для простоты только для ряда значений этих средне-суточных мощностей.

При мощностях  $p_1, p_2 \dots p_k$  будут соответственно производиться в сутки на  $n$ -ой установке добавочные количества гидравлических  $kwh$   $m_{0_1} = p_1 \cdot 24, m_{0_2} = p_2 \cdot 24 \dots m_{0_k} = p_k \cdot 24$ , равные таковым же, недостающим на  $n-1$  станциях, вместе взятых



Фиг. 16.

для покрытия их общей нагрузки.

Отнесем длительность каждой ступени фиг. 16 к длительности суток, т.е. примем, что  $t_1 = 24, t_2 = 24, \dots t_k = 24$  и нанесем на каждой из них суточные диаграммы нагрузок  $n$ -ой станции с пиком  $P_{max_n}$  и суммы остальных  $n-1$  с пиком  $\max_{n-1} P$ . Далее строим на каждой ступени кривую  $L$  изменения площади в  $kwh$  суммарной суточной диаграммы  $n-1$  станций (абсциссы) в функции ее ординат. Если теперь в системе  $n-1$  станций имеется полное суточное регулирование стока с общей отдачей ими в каждой из ступеней по

$$\sum_1^{n-1} E_{0_1} = \sum_1^{n-1} E - m_{0_1}, \sum_1^{n-1} E_{0_2} = \sum_1^{n-1} E - m_{0_2}, \dots \sum_1^{n-1} E_{0_k} = \sum_1^{n-1} E - m_{0_k}$$

гидравлических  $kwh$  в сутки, где  $\sum_1^{n-1} E$  есть потребное суточное количество  $kwh$  по суммарной диаграмме  $n-1$  станций, то откладывая по правилам § 3 значения  $\sum_1^{n-1} E_{0_1}, \sum_1^{n-1} E_{0_2} \dots \sum_1^{n-1} E_{0_k}$  в виде отрезков  $AB$  от вершин  $A$  кривых  $L$  и проводя вертикальные прямые  $BC$  от точек  $B$  до пересечения с кривыми  $L$ , получаем соответственно в каждой ступени мощности  $CD$ , подлежащие к снятию  $n$ -ой установкой. У нас ординаты  $CD$  в ступенях  $1, 2 \dots k$  соответственно равны  $p_1, p_2 \dots p_k$ , а потому диаграммы фактической нагрузки  $n$ -ой станции в ступенях  $1, 2 \dots k$  найдутся поднятием ее основной диаграммы соответственно на величины мощностей  $p_1, p_2 \dots p_k$ . Когда же ордината  $CD$  в любой из ступеней, напр., в 1-ой окажется равной  $C'D'$  и превзойдет  $p_1$ , то, если  $n$ -ная установка работает с полным суточным регулированием, необходимо  $m_{0_1}$  отложить влево от точки  $C'$  в виде  $C'B'$ ; при этом проведенная от точки  $B'$  вниз до пересечения с кривой  $L$  прямая  $B'F$  определит мощность, снимаемую  $n$ -ой станцией. Остальная же мощность, равная разности отрезков  $C'D'$  и  $B'F$  снимается резервом. Относя мощность  $B'F$  к диаграмме нагрузки  $n-1$  станций, получаем ее участок  $iklmno$ , подлежащий к снятию  $n$ -ой установкой. Накладывая таковой на основную диаграмму  $n$ -ой станции, получаем фактическую. Если, однако,  $n$ -ая установка, работая с полным суточным регулированием на свою основную нагрузку, не будет иметь дополнительно достаточной емкости б'ефа для полного регулирования на покрытие участка  $iklmno$  суммарной диаграммы  $n-1$  станций, следует вместо отрезка  $B'C'$  отложить от точки  $C'$  возможную дополнительную емкость ее б'ефа  $V_1$  в  $kwh$ , а остальную же долю энергии  $m_{0_1}' = m_{0_1} - V_1$  отложить вправо на низе кривой  $L$  от точки  $x$  (на фиг. 16 не указано). Относя полученные в обоих случаях по кривой  $L$  мощности к суммарной диаграмме  $n-1$  станций и налагая получаемые ее участки на основную диаграмму нагрузки  $n$ -ой установки, получим ее фактическую. Когда же  $n$ -ая установка работает на свою основную нагрузку без суточного регулирования стока или с неполным таковым (тогда кривая  $hi$  фиг. 15 соответственно должна быть исправлена способами случаев 2 и 3 § 3), необходимо в первом случае откладывать значения  $m_{0_1}, m_{0_2} \dots m_{0_k}$  только на низе кривых  $L$ , а во втором — выяснить для каждой ступени фиг. 16 свободную от работы емкость б'ефа  $V_1$  в  $kwh$   $n$ -ой станции и поступать по вышеизложенному.

Возможен случай, когда система  $n-1$  станций работает без суточного регулирования стока или с неполным таковым (при этом кривая  $nж$  фиг. 15 должна быть соответственно исправлена способами случаев 2 и 3 § 3). Тогда, согласно правилам § 3 соответственно или только низ или пик и часть низа суммарной диаграммы нагрузки

$n-1$  станций будут покрываться гидравлической энергией в каждой ступени фигуры 16. Относя эти участки к кривым  $L$ , получим при отсутствии регулирования стока их верхние зоны свободными для оперирования значениями  $m_{0_1} m_{0_2} \dots m_{0_k}$  по вышеуказанным методам в зависимости от свойств регулирования  $n$ -ой установки, а в случае неполного регулирования — средние. В обоих случаях легко выясняется фактическая нагрузка  $n$ -ой станции.

Получая, таким образом, по ступеням с длительностью  $t_1, t_2 \dots t_k$  действительные диаграммы нагрузки  $n$ -ой установки в многоводные ее дни данного периода, и зная в остальном времени периода ее основную диаграмму нагрузки, строим новую кривую  $k'l$  продолжительности мощностей фактической нагрузки  $n$ -ой станции за период взамен прежней  $kl$  (фиг. 15). Далее  $n$ -ую установку следует рассматривать, как работающую самостоятельно с кривой нагрузки периода  $k'l$ , при возможной выработке количества гидравлических  $kwh$ , равном пл. *owzic* и потребной дополнительной энергией в виде пл. *zpi*. Эти данные позволяют построить комбинированный график мощности для данного сезона по правилам § 3, сообразно принятому виду суточного регулирования  $n$ -ой станции, а сделав аналогичные расчеты для остальных периодов года, можно построить способами того же параграфа и годовой комбинированный график мощности. Дальнейшее определение мощности станции производится пользованием условием (22), в применении его к установленному сообразно виду суточного регулирования годовому комбинированному графику мощности при соблюдении соответствующих проверок, упомянутых в § 3.

Докажем, что условие (22) действительно остается в силе.

Пусть  $K'_n$  суть ежегодные расходы  $n$ -ой станции, исправленные влиянием работы, приходящейся ей доли резерва  $P_{T_n}$  и равные на основании (20)

$$K'_n = (\alpha_n D_n + \alpha_n \cdot d_n \cdot P_n) + [(a' \cdot p \cdot P_{T_n} + M_{T_n} \cdot \delta) - M_{T_n} \cdot a] \quad (60)$$

Тогда, дав мощности  $n$ -ой установки  $P_n$  приращение  $\Delta P_n$ , получим при любом виде суточного регулирования стока по годовому комбинированному графику приращение выработки гидравлической энергии  $\Delta M_{0_n}$ . Приращение  $\Delta M_{0_n}$   $n$ -ой установки при комбинированной ее работе одновременно с системой  $n-1$  станций и тепловым резервом может состояться из отрицательного приращения выработки тепловой энергии  $-\Delta M_{T_n}$  резерва, с одной стороны, и из отрицательного приращения выработки гидравлической энергии  $-\Delta \sum_1^{n-1} M_0$  на  $n-1$  станциях с другой, т.е.

$$\Delta M_{0_n} = \Delta M_{T_n} + \Delta \sum_1^{n-1} M_0 \quad (61)$$

В силу этого при увеличении  $P_n$  на  $\Delta P_n$  расходы по (60) будут равны

$$(K_n' + \Delta K_n') = [\alpha_n \cdot D_n + \alpha_n \cdot d_n \cdot (P_n + \Delta P_n)] + \\ + \left\{ [\alpha' \cdot p \cdot P_{T_n} + (M_{T_n} - \Delta M_{T_n}) \delta] - (M_{T_n} - \Delta M_{T_n}) a \right\} + \\ + \Delta \sum_1^{n-1} M_0 \cdot a$$

откуда

$$\Delta K_n' = \alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n - \Delta M_{T_n} \cdot \delta + \Delta M_{T_n} \cdot a + \Delta \sum_1^{n-1} M_0 \cdot a$$

или:

$$\Delta K_n' = \alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n - \Delta M_{T_n} \cdot \delta + M_{0_n} \cdot a$$

Деля на  $\Delta M_{0_n}$ , имеем

$$\frac{\Delta K_n'}{\Delta M_{0_n}} = \frac{\alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n}{\Delta M_{0_n}} - \frac{\Delta M_{T_n}}{\Delta M_{0_n}} \delta + a.$$

Согласно (1), имеем условие выгодности  $\frac{\Delta K_n'}{\Delta M_{0_n}} = a$ , в силу чего

$$\frac{\Delta M_{T_n}}{\Delta M_{0_n}} \delta = \frac{\alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n}{\Delta M_{0_n}} \quad (62)$$

В (62)  $\Delta M_{0_n} = \Delta P_n \cdot t$ , где  $t$  — время, взятое по годовому комбинированному графику мощности. Время  $t$  равно сумме времен работы реверса  $t_{T_n}$  и системы  $n-1$  станций  $\sum_1^{n-1} t$ , т. е.

$$t = t_{T_n} + \sum_1^{n-1} t$$

Тогда (61) напишется, как

$$\Delta P_n \cdot t = \Delta P_n \cdot t_{T_n} + \Delta P_n \sum_1^{n-1} t,$$

а (62), как

$$\frac{\Delta P_n \cdot t_{T_n}}{\Delta P_n \cdot t} \delta = \frac{\alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n}{\Delta P_n \cdot t}$$

откуда

$$t_{T_n} = \frac{\alpha_n \cdot d_n}{\delta} \quad (63)$$

Таким образом, наивыгоднейшая мощность  $n$ -ой станции  $P_n$  определяется по годовому комбинированному графику мощности временем, отнесенным к работе теплового резерва и определяемым условием (63) аналогичным (22) при возрастающем значении  $\text{tg } \varphi = \frac{\Delta P_n}{\Delta M_{0_n}}$ , согласно правилам § 3.



§ 9. Работа станций с годичным и многолетним регулированием стока.

Здесь имеется несколько основных случаев совместной работы установок в зависимости от схем расположения водохранилищ при водотоках, именно:

А. Работа установок на одном водотоке с общим (верхним) водохранилищем.

В. Работа установок на разных водотоках с отдельными при них водохранилищами.

С. Работа установок на одном водотоке с соединенными отдельными водохранилищами.

Д. Работа установок при смешанном расположении водохранилищ по схемам А, В и С.

Установим путь к определению наиболее выгодных мощностей станций при каждом из упомянутых видов их работы для общего случая расчета, именно:

*1. Учет и определение рациональных объемов водохранилищ, как функций совместной работы станций.*

Здесь, независимо от стоимости водохранилищ, рациональная емкость последних всегда связана с условиями совместной работы установок.

Рассмотрим в качестве общего случая регулирование с затратой средств на сооружения водохранилищ отдельно для работы станций по схемам А, В, С и Д.

С х е м а А.

Здесь задача сводится к определению наиболее выгодной емкости водохранилища  $V_0$  для системы  $n$  станций в том предположении, что их совместная работа может рассматриваться, как самостоятельная работа одной с суммарной нагрузкой и общей мощностью водотока. При этом метод определения наиболее выгодного значения  $V_0$  остается указанным в случае 3 § 7, как для самостоятельной работы установки.

Определив  $V_0$ , следует по нему зарегулировать расход водотока и выбрать мощность каждой из  $n$  станций по правилам § 8.

С х е м а В.

Здесь мы имеем совместную работу нескольких станций не только с взаимным обменом основной гидравлической энергией, но и с обменом энергией, дополнительно производимой водохранилищами на каждой из них.

Пусть для каждой из  $1, 2, \dots, n$  станций, работающих в условиях взаимного обмена энергией с годичным или многолетним регулированием стока мы имеем соответственно  $P_1, P_2, \dots, P_n$  — наиболее выгодную

рабочую мощность в  $kw$ ,  $M_{0s_1}, M_{0s_2}, \dots, M_{0s_n}$  — годовое производимое количество гидравлической энергии в  $kwh$ ,  $M_{T_1}, M_{T_2}, \dots, M_{T_n}$  — годовое потребное количество тепловой энергии в  $kwh$ ,  $\alpha_1 \cdot D_1, \alpha_2 \cdot D_2, \dots, \alpha_n \cdot D_n$  — годовой расход, несвязанный с мощностью,  $\alpha_1 \cdot d_1, \alpha_2 \cdot d_2, \dots, \alpha_n \cdot d_n$  — годовая цена гидравлического установленного  $kw$ ,  $\alpha' \cdot p$  — годовая цена теплового установленного  $kw$ ,  $P_{T_1}, P_{T_2}, \dots, P_{T_n}$  — долю общей мощности резерва  $P_T = P_{T_1} + P_{T_2} + \dots + P_{T_n}$ ,  $V_{b_1}, V_{b_2}, \dots, V_{b_n}$  — объем водохранилища в  $m^3$  и  $\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2, \dots, \alpha_n \cdot \beta_n$  — годовая стоимость 1  $m^3$  водохранилища (как функция объема). Тогда при прямом расходе по тепловому  $kwh$  равном  $\delta$  и продажной цене энергии в  $a$  руб. за  $kwh$  общая ежегодная прибыль выразится от всей системы  $n$  станций, как

$$\begin{aligned} (W - K) = & \left[ a \cdot M_0 + (a \cdot M_{T_1} - \delta \cdot M_{T_1} - \alpha' \cdot p \cdot P_{T_1}) - (\alpha_1 \cdot D_1 + \alpha_1 \cdot d_1 \cdot P_1 + \right. \\ & \left. + \alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot V_{b_1}) \right] + \dots + \left[ a \cdot M_{0s_n} + (a \cdot M_{T_n} - \delta \cdot M_{T_n} - \alpha' \cdot p \cdot P_{T_n}) - \right. \\ & \left. - (\alpha_n \cdot D_n + \alpha_n \cdot d_n \cdot P_n + \alpha_n \cdot \beta_n \cdot V_{b_n}) \right] = \sum_1^n (a \cdot M_{0s_i} + a \cdot M_{T_i} - \delta \cdot M_{T_i}) - \\ & - \alpha' \cdot p \cdot P_T - \sum_1^n (\alpha \cdot D + \alpha \cdot d P) - \sum_1^n \alpha \cdot \beta \cdot V_b \end{aligned} \quad (64)$$

При максимуме  $(W - K)$  имеем  $\Delta(W - K) = 0$ . Последнее условие выполняется только при равенстве нулю приращений в (64) всех  $n$  слагаемых, т. е. условием иметь максимум прибыли  $(W - K)_1, (W - K)_2, \dots, (W - K)_n$  для каждой из станций. Т. к. при этом в (64)  $P_1, P_2, \dots, P_n$  суть наиболее выгодные мощности установок, приращение функций от коих при данном  $V_b$  заведомо равно нулю, то равенство нулю приращений  $\Delta(W - K)_1, \Delta(W - K)_2, \dots, \Delta(W - K)_n$  должны вызываться приращением объемов водохранилищ  $\Delta V_{b_1}, \Delta V_{b_2}, \dots, \Delta V_{b_n}$ .

Т. о. задача сводится к определению наиболее выгодной емкости водохранилищ отдельно на каждой из станций в условиях совместной их работы с учетом влияния их регулирования стока, как на степень взаимного обмена их энергии, так и на величину приходящейся им доли мощности резерва.

Выделим из всей системы станций работу одной  $n$ -ой.

На основании (64) величина ежегодной прибыли от  $n$ -ой установки равна

$$(W - K)_n = a \cdot M_{0s_n} + a \cdot M_{T_n} - \alpha' \cdot p \cdot P_{T_n} - \delta \cdot M_{T_n} - \alpha_n \cdot D_n - \alpha_n \cdot d_n \cdot P_n - \alpha_n \cdot \beta_n \cdot V_{b_n} \quad (65)$$

Дадим  $V_{b_n}$  приращение  $\Delta V_{b_n}$ . Тогда значения  $P_n, P_{T_n}, M_{0s_n}, M_{T_n}, \beta$  и  $(W - K)$  соответственно увеличатся на  $\Delta P_n, \Delta P_{T_n}, \Delta M_{0s_n}$ ,

—  $\Delta M_{0_{sn}}$ ,  $\Delta \beta$  и  $\Delta(W-K)$ . По условию выгодности  $\Delta(W-K) = 0$ , т. е.  $\alpha' \cdot p \cdot P_{Tn} - \delta \cdot \Delta M_{0_{sn}} + \alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n + \alpha_n \cdot \beta_n \cdot \Delta V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot \Delta V_{bn} = 0$  или, для  $\Delta M_{0_{sn}}$

$$\frac{\alpha' \cdot p \cdot P_{Tn}}{\Delta M_{0_{sn}}} - \delta + \frac{\alpha_n \cdot d_n \cdot P_n}{\Delta M_{0_{sn}}} + \frac{\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \Delta V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot \Delta V_{bn}}{\Delta M_{0_{sn}}} = 0 \quad (66)$$

В (66)  $\Delta M_{0_{sn}}$  есть общее приращение энергии при изменении  $V_{bn}$  на  $(V_{bn} + \Delta V_{bn})$ . Но с увеличением  $V_{bn}$  на  $\Delta V_{bn}$  величина  $\Delta M_{0_{sn}}$  всегда складывается из трех приращений  $\Delta M_{sn}$ ,  $\Delta M_{sn}'$  и  $\Delta M_{0_{sn}}$ , из коих первое возникает непосредственно от увеличения используемого водного запаса водохранилища, второе — от увеличения в силу этого дополнительной отдачи энергии  $n$ -ой станцией системе  $n-1$  и третье — от увеличения наимыгоднейшей мощности  $n$ -ой установки, как результата наличия первых двух факторов.

Т. о., мы имеем

$$\Delta M_{0_{sn}} = \Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}' + \Delta M_{0_{sn}} \quad (67)$$

при этом  $\Delta M_{0_{sn}}$ , как обычно для случая совместной работы, может выражаться, согласно (61), как

$$\Delta M_{0_{sn}} = \Delta M_{Tn} + \sum_1^{n-1} M_{0_{sn}}$$

Заменяя в (66)  $\Delta M_{0_{sn}}$  через (67), получим

$$\frac{\alpha' \cdot p \cdot P_{Tn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}' + \Delta M_{0_{sn}}} - \delta + \frac{\alpha_n \cdot d_n \cdot \Delta P_n}{\Delta M_{0_{sn}} \left( \frac{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}'}{\Delta M_{0_{sn}}} + 1 \right)} + \frac{\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \Delta V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot \Delta V_{bn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}' + \Delta M_{0_{sn}}} = 0 \quad (68)$$

Учитывая, что при наимыгоднейшем  $P_n$  всегда имеет место условие (68), по которому

$$\frac{\Delta P_{Tn}}{\Delta M_{0_{sn}}} = \frac{\delta}{\alpha_n \cdot d_n}$$

то, подставляя последнее в (68), имеем

$$\frac{\alpha' \cdot p \cdot \Delta P_{Tn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}' + \Delta M_{0_{sn}}} + \frac{\delta}{\frac{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}'}{\Delta M_{0_{sn}}} + 1} + \frac{\alpha_n \cdot \beta_n \cdot \Delta V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot V_{bn} + \alpha_n \cdot \Delta \beta_n \cdot \Delta V_{bn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}' + \Delta M_{0_{sn}}} = \delta$$

<sup>1</sup> Для центральных станций  $\Delta M_{sn}'$  есть величина отрицательная.

откуда получаем условие выгодности аналогичное (51) в виде

$$\frac{\alpha_n \beta_n \Delta V_{bn} + \alpha_n \Delta \beta_n V_{bn} + \alpha_n \Delta V_{bn} \Delta \beta_n}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}'} + \frac{\alpha' p \Delta P_{Tn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}'} = \delta \quad (69)$$

или, обозначая  $(\alpha_n \beta_n \Delta V_{bn} + \alpha_n \Delta \beta_n V_{bn} + \alpha_n \Delta V_{bn} \Delta \beta_n)$  через  $\Delta K_{bn}$ , как приращение годовой стоимости водохранилища, получим

$$\frac{\Delta K_{bn}}{\Delta M_{sn} + \Delta M_{sn}'} \left( 1 + \frac{\alpha' p \Delta P_{Tn}}{\Delta K_{bn}} \right) = \delta$$

или

$$tg \xi_n \cdot (1 + \alpha' p \cdot cotg \zeta_n) = \delta \quad (70)$$

где  $\xi_n$  и  $\zeta_n$  суть соответственно углы наклона к абсциссам  $(M_{sn} + M_{sn}')$  и  $P_{Tn}$  касательных к кривым  $K_{bn} = f(M_{sn} + M_{sn}')$  и  $K_{bn} = f(P_{Tn})$ .

Т. о., здесь метод определения наивыгоднейшего  $V_{bn}$  для любой  $n$ -ой станции остается аналогичным изложенному в случае 3 § 7, как для самостоятельной работы установки с той лишь разницею, что здесь параллельно с учетом по правилам § 8 взаимного обмена основной энергии  $n$ -ой станции с системой  $n-1$  учитывается еще дополнительный обмен энергии  $M_{sn}'$ , происходящий от работы водохранилища  $n$ -ой станции. При этом общая наивыгоднейшая емкость во-

дохранилищ  $\sum_1^{n-1} V_b$  всех вместе взятых  $n-1$  станций всегда влияет

на приходящуюся долю мощности теплового резерва  $P_{Tn}$   $n$ -ой установки, но это влияние не ослабляет условия (70), ибо  $cotg \zeta_n = \frac{\Delta P_{Tn}}{\Delta K_{bn}}$ , как частная производная, от этого влияния не зависит, какой бы емкостью не обладали водохранилища всех  $n-1$  станций. Другими

словами, при изменении  $\sum_1^{n-1} V_b$  кривая  $K_{bn} = f(P_{Tn})$ , аналогичная кривой

4 фиг. 14, перемещается параллельно самой себе вдоль оси  $P_{Tn}$  с сохранением одного и того же  $cotg \zeta_n$  для данного  $K_{bn}$ . Очевидно, то же происходит и с кривой  $V_{bn} = f(P_{Tn})$ , аналогичной 2 фиг. 14. Если

влияние  $\sum_1^{n-1} V_b$  на  $P_{Tn}$  настолько велико, что  $P_{Tn} = 0$ , то кривая

$K_{bn} = f(P_{Tn})$  (а, следовательно, и кривая  $V_{bn} = f(P_{Tn})$ ) переходит в четвертую четверть осей координат с отрицательными  $P_{Tn}$ . При этом  $cotg \zeta_n$  для данного  $K_{bn}$  (т. е.  $V_{bn}$ ) остается тем же и условие (70) сохраняется.

Работа водохранилищ всех  $n-1$  станций, влияя на  $P_{2n}$   $n$ -ой установки влияет и на число производимых ее водохранилищем

$$(M_{2n} + M'_{2n}) \text{ kWh.}$$

Но это влияние, однако, также не изменяет силы условия (70), ибо

$$\operatorname{tg} \xi_n = \frac{\Delta K_{2n}}{\Delta M_{2n} + \Delta M'_{2n}}$$

для данного  $K_{2n}$  (т. е.  $V_{2n}$ ) от этой работы не зависит. Это видно из следующего. Если откинуть совершенно влияние работы водохранилищ  $n-1$  станций, то наиболее выгодное  $V_{2n}$   $n$ -ой установки определится по гиперболической кривой

$$V_{2n} = f[\operatorname{tg} \xi_n (1 + \alpha' p \operatorname{ctg} \zeta_n)]$$

аналогичной 5 фиг. 14 условием (70). При влиянии же работы водохранилищ  $n-1$  станций на работу  $n$ -ой, в (70)  $\operatorname{ctg} \zeta_n$  при найденном  $K_{2n}$  (т. е.  $V_{2n}$ ) остается тем же, а  $\delta = \operatorname{const.}$ , в силу чего и  $\operatorname{tg} \xi_n$  дол-

жен быть постоянным. Т. о. влияние работы  $\sum_1^{n-1} V_b$  на  $V_{2n}$  заключается только в простом перемещении параболической кривой

$$K_{2n} = f(M_{2n} + M'_{2n})$$

аналогичной 3 фиг. 14 (а, следовательно, и кривой

$$V_{2n} = f(M_{2n} + M'_{2n})$$

аналогичной 1) вдоль оси  $(M_{2n} + M'_{2n})$ .

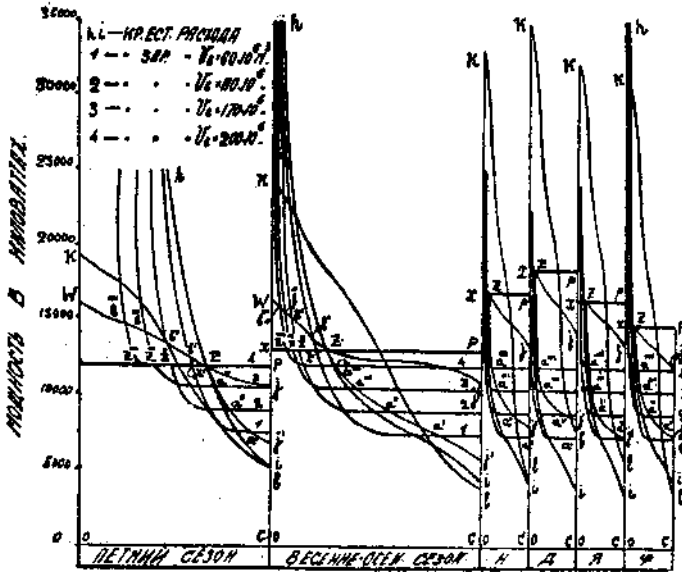
Из сказанного видно, что общая емкость водохранилищ  $n-1$  станций не влияет на наиболее выгодную емкость водохранилища  $n$ -ой установки, работающей в обычных условиях совместной работы с ними. Отсюда определение наиболее выгодного  $V_{2n}$   $n$ -ой станции может быть

произведено без учета емкости водохранилищ  $\sum_1^{n-1} V_b$  остальных  $n-1$  станций, т. е. просто только с учетом обычной совместной работы.

На основании сказанного поступаем следующим образом.

Из всей системы  $n$  станций устанавливаем методом § 8, сообразно условиям суточного регулирования стока, фактическую работу  $n$ -ой станции, как при отсутствии годовичного регулирования. Тогда при кривых мощности водотока  $hi_n$ , кривых нагрузки  $kl$  и прямых  $xr$  среднесезонной нагрузки  $n$ -ой станции, будем иметь в каждом периоде

фактически возможное к выработке число  $kwh$  в виде пл.  $owzic$  фиг. 17, часть которой в виде пл.  $xwz$  будет производиться  $n$ -ой установкой дополнительно на нагрузку  $n-1$  станций. Число недостающих  $kwh$  в каждом периоде определится пл.  $izp$ , часть которой в виде пл.  $izj$  будет покрыта дополнительно работой  $n-1$  станций, а часть в виде пл.  $jzр$  должна сниматься тепловым резервом.



Фиг. 17.

Снесем пл.  $jzр$  в каждом периоде на кривые мощности водотока в положение  $izj'$ . Тогда в каждом периоде пл.  $izj$  займет положение  $j'zр$ . Эта площадь, как покрываемая работой суммы  $n-1$  станций является в каждом периоде отнятой от нагрузки  $n$ -ой станции, при чем работа последней в конечном счете сводится к возможному производству энергии в виде площади  $owzic$  при фактически недостающем, надлежащем к выработке резервом—в виде  $izj'$ .

Пусть теперь имеются в каждом периоде зарегулированные соответствующие при разных  $V_{in}$  (фиг. 17). Тогда при каждой из кривых 1, 2, 3... число  $kwh$ , отдаваемых  $n$ -ой установкой в каждом периоде на нагрузку  $n-1$  станций определяются соответственно пл.  $xwb'z'$ ,  $xwb''z''$  и т. д. вместо прежней пл.  $xwz$ , а число потребных тепловых  $kwh$  — соответственно пл.  $a'z'z'$ ,  $a''z''z''$ , и т. д. вместо прежней пл.  $izj'$ . Т. о., при  $e$  периодов года, число производимых дополнительно водохранилищем

$$(M_m + M'_{en}) \text{ kwh}$$

определился за год при разных  $V_{bn}$  соответственно, как

$$\left. \begin{aligned} & \sum_1^i (\text{пл. } izj' - \text{пл. } a'z'z) - \sum_1^i (\text{пл. } xwz - \text{пл. } xwb'z') \\ & \sum_1^i (\text{пл. } izj'' - \text{пл. } a''z''z) - \sum_1^i (\text{пл. } xwz - \text{пл. } xwb''z'') \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} = \\ = (M_{bn} + M'_{bn}) \quad (71)$$

Равенства (71) представляют собой разность площадей годовых комбинированных графиков мощности, построенных в условиях совместной работы  $n$ -ой станции с системой  $n-1$  соответственно при зарегулированных кривых 1, 2, 3... и естественных  $hi$  и по аналогии с (52) дают значения

$$(M_{bn} + M'_{bn})$$

весьма близкие к истинным.

Пользуясь (71), строим кривую 1

$$V_{bn} = (M_{bn} + M'_{bn}) \text{ фиг. 18.}$$

Параллельно определяем при каждом  $V_{bn}$  мощности резерва  $P_{Tn}$  по правилам § 3, сообразно данному виду суточного регулирования и строим кривую 2

$$V_{bn} = f(P_{Tn})$$

При этом значения  $P_{Tn}$  здесь не будут истинными, составляющими действительную долю общей мощности резерва  $n$ -ой станции при совместной ее работе с остальными при разных  $V_{bn}$ . Истинные  $P_{Tn}$  определились бы, как приходящиеся на  $n$ -ую станцию доли общей величины резерва  $P_T$  в момент минимума общей гидравлической мощности водотоков и максимума общей нагрузки системы  $n$  станций в один из периодов года фиг. 17 при разных  $V_{bn}$  и известном

$\sum_1^{n-1} V_j$ . Но ведь изменение  $P_{Tn}$  при разных  $K_{bn}$ , т. е.  $V_{bn}$ , как

$$\frac{\Delta P_{Tn}}{\Delta K_{bn}} = \frac{\Delta P_{Tn}}{\alpha \beta V_{bn}} = \text{ctg } \zeta_n$$

не зависит от абсолютного значения  $P_{Tn}$ , что нам и важно, ибо абсолютная величина  $P_{Tn}$  не входит в условие (70) для определения

наивыгоднейшего  $V_{bn}$ . Пользуясь  $\beta = f(V_{bn})$  хотя бы из фиг. 12, строим помощью кривых 1 и 2 зависимости

$$K_{bn} = f(M_{sn} + M'_{sn}) \text{ и } K_{bn} = f(P_{Tn})$$

соответственно в виде 3 и 4. Далее определяем для ряда  $K_{bn}$  по кривым 3 и 4 соответственно  $\text{tg } \xi_n$  и  $\text{ctg } \zeta_n$ . Вводя  $\text{tg } \xi_n$  и  $\text{ctg } \zeta_n$  в (70) и заменяя  $K_{bn}$  через  $V_{bn}$ , строим при данных  $\alpha$ ,  $\alpha'$  и  $p$  гиперболическую кривую 5

$$V_{bn} = f[\text{tg } \xi_n (1 + \alpha' p \text{ctg } \zeta_n)].$$

Наивыгоднейшее  $V_{bn}$  определится по кривой 5 условием (70)

Если при всех значениях  $V_{bn}$  в пределах значений  $P_{Tn}$  от максимума до нуля величина

$$[\text{tg } \xi_n (1 + \alpha' p \text{ctg } \zeta_n)]$$

оказывается  $> \delta$ , то устройство водохранилища является не рентабельным.

Зависимости 1, 2, 3, 4 и 5 фиг. 18 имеют тождественную природу с теми же кривыми фиг. 14, а потому их исследование остается аналогичным изложенному в случае 3 § 7. При этом кривые 1, 3 и 5 получают соответственно мнимые ветви 1', 3' и 5'.

Определив изложенным расчетом наивыгоднейшее  $V_b$  для каждой из  $n$  станций, определяем методом § 6 зарегулированный расход их водотоков, после чего наивыгоднейшие их мощности определяются по правилам § 8.

Когда наполнение и опорожнение водохранилища  $n$ -ой установки колеблет ее напор, следует прибегать к приему расчета соответственно указанному в § 6.

Общий смысл полученных выше выражений остается аналогичным изложенному для случая 3 в § 7 с той лишь разницей, что здесь емкость водохранилища  $n$ -ой станции зависит от интенсивности взаимного обмена энергией между ее самой и системой остальных. Чем интенсивнее этот обмен на  $n$ -ой установке, тем труднее ее водохранилищу обрести себе рентабельность, ибо тем круче становятся кривые 1, 2 и 3, 4 и, следовательно, тем больше  $\text{tg } \xi_n$  и меньше абсолютный  $\text{ctg } \zeta_n$ , что ведет к значения

$$\text{tg } \xi_n (1 + \alpha' p \text{ctg } \zeta_n) > \delta.$$

### С х е м а С.

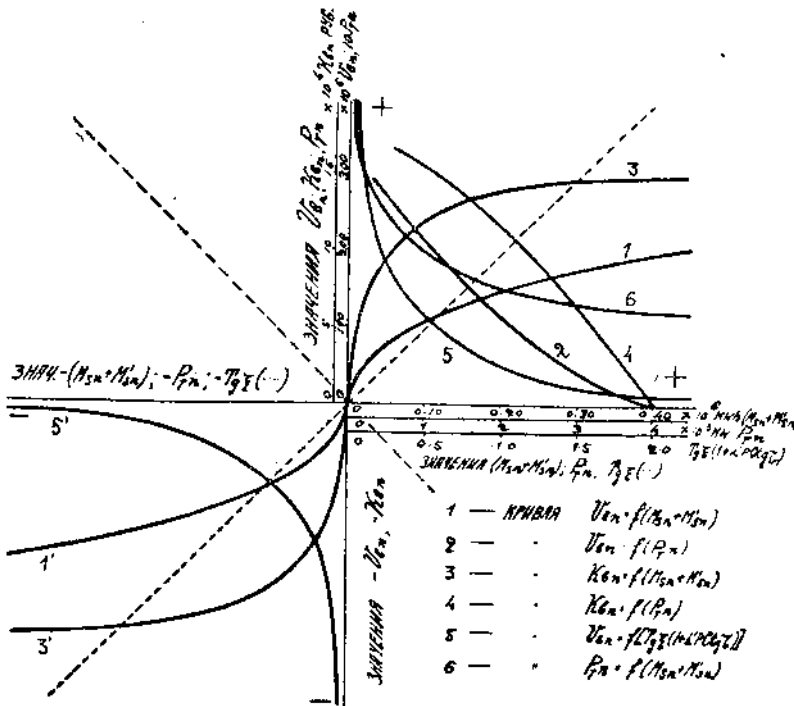
Здесь мы имеем совместную работу станций с водохранилищами, обоюдно связанными условиями режима стока. В этом случае мощность каждой нижележащей установки зависит помимо степени взаимного обмена ее энергии с остальными еще от наивыгоднейшего



объема ее водохранилища, определяемого в свою очередь режимом стока, обусловленным работой водохранилища вышележащего.

Здесь задача сводится к отысканию наиболее выгодных объемов водохранилищ станций с учетом влияния каждого вышележащего из них на режим стока нижележащего.

Чтобы установить работу водохранилищ в данном случае, рассмотрим из них возможную работу двух смежных. Пусть первое (верхнее) имеет за данный период времени при соответствующих

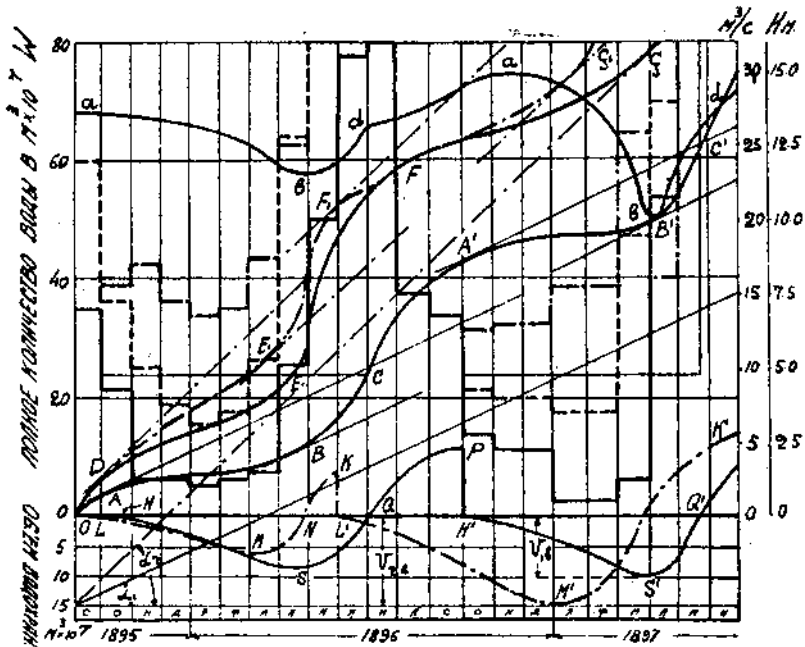


Фиг. 18.

графиках притока воды (——— линия) интегральную кривую притока  $OABCA'B'C'$  фиг. 19. Зная его емкость  $V_{Б1}$ , определяем зарегулированный им расход  $Q_1 = tg\alpha_1$  и исправляем сообразно графики притока воды на зарегулированные графики расхода (——— линия), а также строим кривые  $HSQ, H'S'Q'$  его последовательного наполнения и опорожнения способом § 6.

Пусть одновременно имеются за тот же срок графики естественного притока воды второго (нижнего) водохранилища (——— линия) и соответственно его интегральная кривая притока  $ODEFG$ . Тогда регулирование расходов воды на верхнем водохранилище будет влиять на сток нижнего тем, что в периоды опорожнения верхнего водохранилища сток нижнего будет увеличен на ту величину,

которая добавляется регулированием к естественному стоку верхнего в данный момент, а в периоды наполнения верхнего водохранилища приток нижнего будет уменьшен на величину, удерживаемую в данный момент верхним. Т. о. при зарегулированном на верхнем водохранилище расходе  $Q_1 = tg\alpha_1$  графики притока воды нижнего приобретут на фиг. 19 новый вид (----- линия), в силу чего его интегральная кривая притока  $ODEFG$  исправится в  $ODE,F,G,$ .



Фиг. 19.

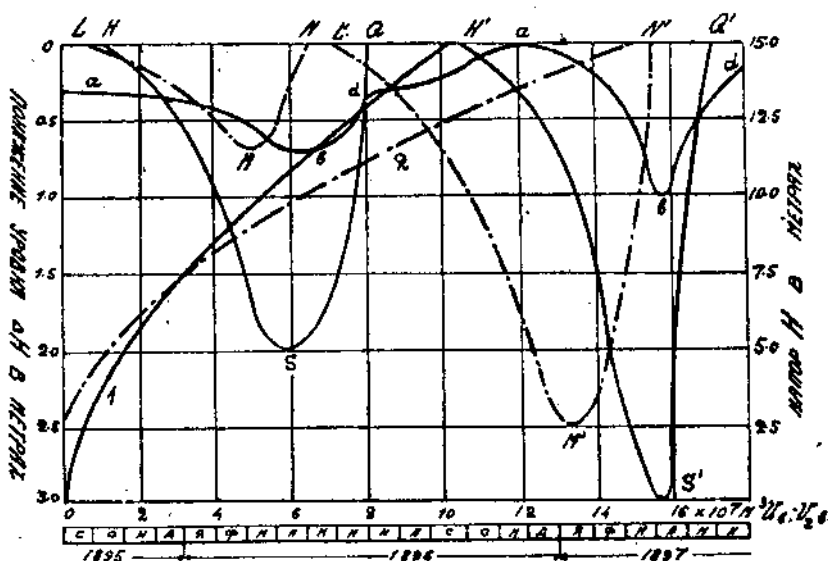
Имея эту последнюю и зная емкость нижнего водохранилища  $V_{2n}$ , определяем зарегулированный им расход  $Q_2 = tg\alpha_2$  и строим кривые  $LMN, L'M'N'$  его последовательного наполнения и опорожнения.

Далее работа водохранилищ связана с условиями колебания уровней воды в них при их наполнении и опорожнении. Если эти колебания практически малы, то напор  $H$  верхней установки будет постоянным и определится разностью отметок воды первого и второго водохранилищ. Напор же нижней определится аналогично изложенному после рассмотрения работы ее водохранилища с последующим нижележащим.

При значительных колебаниях уровней воды водохранилищ необходимо иметь соответственно для каждого из них зависимости 1 и 2 понижения уровней  $\Delta H$  в функции их объемов (фиг. 20). Пользуясь для верхнего и нижнего водохранилищ соответственно кри-

выми  $HSQ$ ,  $H'S'Q'$  и  $LMN$ ,  $L'M'N'$  фиг. 19 и зависимостями 1 и 2 фиг. 20, строим для них соответственно кривых  $HSQ$ ,  $H'S'Q'$  и  $LMN$ ,  $L'M'N'$  понижение уровней за весь период фиг. 20. Зная каждый раз отметки уровней воды в обоих водохранилищах и имея кривые понижения их уровней, строим кривую напоров  $H$  верхней станции  $abdab'd$  фиг. 19 и фиг. 20. Кривая напоров нижней станции может быть установлена аналогично после рассмотрения совместной работы ее водохранилища с последующим нижележащим.

Изложенным путем имеется возможность установить напоры всех последующих станций, после чего методом § 6 могут быть уста-



Фиг. 20.

новлены для каждой из них хронологические, а потом средне-годовые и сезонные графики мощности водотока.

Пусть в совместной работе участвуют 1, 2...  $n$  установок. Тогда, принимая обозначения схемы  $B$ , получим общее выражение для ежегодной прибыли всей системы станций.

$$(W - K) = \sum_1^n (aM_{os} + aM_T - \delta M_T) - \alpha' p P_T - \sum_1^n (\alpha D + \alpha d P) - \sum_1^n \alpha \beta V_b \quad (72)$$

При максимуме  $(W - K)$  имеем  $\Delta(W - K) = 0$ . Последнее же условие выполняется равенством нулю приращений в (72) всех  $n$  слагае-

ных, т. е. условием иметь максимум прибыли  $(W - K)_1, (W - K)_2 \dots \dots (W - K)_n$  для каждой из станций. Согласно принятым обозначениям в (72)  $P_1 P_2 \dots P_n$  суть наивыгоднейшие мощности установок, а потому условия

$$\Delta(W - K)_1 = 0, \quad \Delta(W - K)_2 = 0 \dots \Delta(W - K)_n = 0$$

должны соответственно вызываться приращениями объемов водохранилищ

$$\Delta V_{b_1}, \quad \Delta V_{b_2} \dots \Delta V_{b_n}.$$

Т. о., если объем первого (верхнего) водохранилища  $V_{b_1}$  получит приращение  $\Delta V_{b_1}$ , то в работе нижележащее, благодаря изменению своего стока, получит приращение объема  $\Delta V_{b_2}$ , в силу чего третье получит  $\Delta V_{b_3}$  и т. д. Так как при этом, согласно изложенному, необходимо иметь

$$\Delta(W - K)_1 = 0, \quad \Delta(W - K)_2 = 0 \dots \Delta(W - K)_n = 0,$$

то, очевидно, что объем каждого из водохранилищ  $V_{b_1}, V_{b_2} \dots V_{b_n}$  должен быть наивыгоднейшим, найденным при создавшемся режиме стока после того, как уже определен наивыгоднейший объем предыдущего. При этом на основании изложенных положений в схеме В наивыгоднейший  $V_{b_i}$  каждого нижеследующего водохранилища не зависит от совместной с ним работы вышележащего.

В силу сказанного, весь расчет по определению наивыгоднейших  $V_{b_1}, V_{b_2} \dots V_{b_n}$  сводится к следующему. Установив приток первого (верхнего) водохранилища задаемся рядом его объемов  $V_{b_1}$  и определяем при каждом из них зарегулированный его сток и одновременно приток для второго. Задаваясь рядом  $V_{b_2}$ , устанавливаем при каждом из них для взятых  $V_{b_1}$  зарегулированный сток с выяснением напоров первого водохранилища. Затем, определяем при каждом  $V_{b_2}$  по правилам схемы В наивыгоднейшие  $V_{b_1}$  и строим связь наивыгоднейшего  $V_{b_1}$  в функции  $V_{b_2}$ . Далее, установив при взятых  $V_{b_2}$  и наивыгоднейших  $V_{b_1}$  приток третьего, задаемся рядом  $V_{b_3}$  и определяем при каждом из них соответственно для взятых  $V_{b_2}$  зарегулированный сток с выяснением аналогично напоров второго. Затем определяем при каждом  $V_{b_3}$  наивыгоднейшие  $V_{b_1}$  и строим связь наивыгоднейшего  $V_{b_1}$  в функции  $V_{b_3}$ . Идя так далее, получим кривые связи наивыгоднейших  $V_{b_1}, V_{b_2}, V_{b_3} \dots$  соответственно в функции взятых значений  $V_{b_2}, V_{b_3}, V_{b_4} \dots$ . При этом найденное наивыгоднейшее  $V_{b_n}$  явится исходным для определения остальных. Именно, определив наивыгоднейшее  $V_{b_{n-1}}$  находим по зависимости наивыгоднейших

$$V_{b_{n-1}} = f(V_{b_n})$$

значение  $V_{bn-1}$ , а по зависимости наивыгоднейших

$$V_{bn-2} = f(V_{bn-1})$$

значение  $V_{bn-2}$  и т. д. пока не найдем  $V_{b1}$ .

Определив наивыгоднейшие  $V_{b1}, V_{b2}, \dots, V_{bn}$ , устанавливаем окончательно напоры каждой из 1, 2, ...,  $n$  станций и находим их графики мощности водотоков.

Дальнейший расчет производится по правилам § 8.

#### Схема D.

Здесь, разделяя установки по группам, характеризующимся расположением водохранилищ по схемам *A*, *B* и *C*, определяем наивыгоднейшие  $V_b$  каждой станции данной группы изложенными выше методами, после чего, установив графики мощности водотока каждой из установок, производим дальнейший расчет по правилам § 8.

Установим правила определения наивыгоднейших  $V_b$  для частного случая  $\beta = 0$ .

В схеме *A* при  $\beta = 0$  метод определения наивыгоднейшего  $V_b$  остается соответственно указанным для этого случая в § 7, где такое находится пользованием услов. (53a).

В схеме *B* при  $\beta = 0$  имеем из (69)

$$\frac{\alpha' p P_{Tn}}{\Delta M_{zn} + \Delta M'_{zn}} = \delta \quad (78)$$

или

$$\frac{\Delta P_{Tn}}{\Delta M_{zn} + M'_{zn}} = \frac{\delta}{\alpha' p} = \operatorname{tg} \omega \quad (78a)$$

где  $\omega$  — угол, составленный касательной к кривой

$$P_{Tn} = f(M_{zn} + M'_{zn})$$

с абсциссой

$$(M_{zn} + M'_{zn}),$$

равный  $\operatorname{ar} \operatorname{ctg} \frac{\delta}{\alpha' p}$ . Т. о., строя при пользовании кривыми 1 и 2 фиг. 18 зависимость 6

$$P_{Tn} = f(M_{zn} + M'_{zn}),$$

находим, что наивыгоднейший объем дарового водохранилища  $n$ -ой станции определяется значением  $V_{bn}$ , отвечающем уравнению (73a) на кривой 6 (фиг. 18).

В схеме *C* при  $\beta = 0$  ход расчета остается тем же, с той лишь разницею, что наивыгоднейшие  $V_{b1}, V_{b2}, \dots, V_{bn}$  должны опреде-

ляться по указанным для этого случая правилам схемы *B*. т. е. пользованием условия (73а).

В схеме *D* при  $\beta = 0$  по разделении установок по группам *A*, *B* и *C* наивыгоднейшие  $V_b$  определяются по указанным для этого случая правилам каждой из групп.

Заметим, что при  $\beta = 0$  пользование указанными правилами для определения наивыгоднейших  $V_b$  при совместной работе станций по каждой из схем *A*, *B*, *C* и *D* является необходимым и достаточным, ибо стремление использовать максимум объема водохранилищ при установках здесь не отвечает рентабельности решения задачи в силу влияния на таковую разнообразия режима водотоков и нагрузок самих станций, что может ограничивать наивыгоднейшую работу водохранилища той или иной установки, а иногда и требовать полного его отсутствия.

# ОГЛАВЛЕНИЕ XXXII ТОМА

## ОТДЕЛ I.

### МАТЕМАТИКА.

	СТР.
Об обобщении одного тождества В. Я. Буныковского. <i>И. И. Иванов.</i> . . . . .	
О некоторых приложениях рядов Дирихле. <i>Р. Кузьмин.</i> . . . . .	11
Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов. <i>П. Ф. Папкович.</i> . . . . .	25
К теории способа Греффе (Graeffe). <i>А. Ф. Гаврилов.</i> . . . . .	41
Применение обобщенных рядов Фурье к задаче о не гармонических колебаниях системы. <i>Л. Г. Лойцянский.</i> . . . . .	49
О средних значениях функций на окружности и сфере. <i>С. А. Гершкович.</i> . . . .	59

## ОТДЕЛ II.

### ТЕХНИКА.

Приближенное тепловое подобие для случая дымохода переменного сечения. <i>А. А. Гухман.</i> . . . . .	79
Динамика шатуна легкого двигателя внутреннего сгорания. <i>С. Струковский.</i> . . .	89
Уравнения для напряжений в неограниченном пласте сыпучего тела и их применение к расчету давления на подпорные стенки. <i>Ю. И. Ягн.</i> . . . . .	105
К вопросу о движении шара в вязкой жидкости.— <i>А. И. Лурье.</i> . . . . .	117
Сравнение работы резцов с положительным и отрицательным возвышением лезвия с имеющими лезвие горизонтальное. <i>П. Незнамов.</i> . . . . .	125

## ОТДЕЛ III.

### АВИАЦИЯ и ВОЗДУХОПЛАВАНИЕ.

О влиянии скорости на динамические высоты, достигаемые выполненными воздушными кораблями. <i>А. Г. Воробьев.</i> . . . . .	135
К расчету крыла моноплана с двумя лонжеронами. <i>Г. Г. Ростовцев.</i> . . . . .	147

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

Методика выбора мощности гидроэлектрических силовых ставций. Инженер-строитель <i>Г. Г. Самородов,</i> с предисловием и под редакцией проф. <i>А. А. Морозова</i> . . . . .	175
---	-----

# ТРУДЫ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

Р. К.

- |       |  |      |
|-------|--|------|
| № 2.  | Нордман. Статистический метод в исследованиях древне-русского хозяйственн. быта . . . . .  | — 65 |
| № 3.  | Зайцев, К. I. К вопросу о платежных книгах и платежницах . . . . .   | — 15 |
| № 4.  | Бернштейн-Коган. Численность, состав и положение петербургских рабочих . . . . .   | 1 20 |
| № 5.  | Слободзянский. Расходы по эксплуатации казенных железн. дорог . . . . .  | — 50 |
| № 6.  | Зайцев, К. I. Очерки истории самоуправления государственных крестьян . . . . .   | 1 50 |
| № 7.  | Никольский, Б. А. Причины колебания курсов русских госуд. бумаг в 1884—1904 г. . . . .   | 2 —  |
| № 8.  | Гейнц Сергей. Исторический очерк развития договора поклажи по русскому праву . . . . .   | — 75 |
| № 9.  | Смирнов, М. А. Подоходный налог во Франции . . . . .   | 1 50 |
| № 10. | Полляк, Г. С. Профессия, как объект статистического учета . . . . .  | — 75 |
| № 11. | Лурье, В. С. Организация и организации торгово-промышл. интересов в России . . . . .   | 1 20 |
| № 12. | Антошин, А. Н. Исчисление грузооборота и доходности вновь проектируемых жел. дорог и действит. результат по некоторым из них . . . . . | 1 —  |
| № 13. | Остроухов, П. А. Англо-русский торговый договор 1734 г. . . . .  | 1 30 |
| № 14. | Степанов, П. Наделение землей горнозаводского населения на Урале . . . . .   | — 75 |
| № 17. | Виноградова, М. М. Потребление водки в России и урожай . . . . .   | 1 50 |
| № 18. | Миквиц, Р. Мобилизация торговых судов во время войны по действующему международному праву . . . . .                                    | 1 50 |
| № 19. | Гибянский, И. Г. Граф Антоний Тизенгаузен и гродненская королевская мануфактура . . . . .  | — 80 |
| № 20. | Данвел-бек, П. А. Русский нефтяной экспорт и мировой рынок в период с 1904 по 1911 г.г. . . . .  | 2 —  |



# ИЗВЕСТИЯ ЛЕНИНГРАДСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

- 1904 г. Т. I в. 1—2, в. 3—4. Т. II в. 1—2, в. 3—4.  
 1905 г. Т. III в. 1—2, в. 3—4. Т. IV в. 1—2, в. 3—4.  
 1906 г. Т. V в. 1—2, в. 3—4. Т. VI в. 1—2, в. 3—4.  
 1907 г. Т. VII в. 1—2 эк. наук, в. 1—2 техн.  
 1907 г. Т. VIII в. 1—2 техн. в. 1—2 экон.  
 1908 г. Т. IX в. 1 эк. н., в. 1—2 техн. Т. X в. 1—2 эк. н.  
 1909 г. Т. XI эк. н. в. 1—2 техн. Т. XII эк. н. в. 1—2 техн.  
 1910 г. Т. XIII эк. н. в. 1—2—3 техн. Т. XIV эк. н. в. 1—2—3 техн.  
 1911 г. Т. XV эк. н. в. 1—2 техн. Т. XVI эк. н. в. 1—2 техн.  
 1912 г. Т. XVII эк. н. в. 1—2 техн. Т. XVIII эк. н. в. 1—2 техн.  
 1913 г. Т. XIX эк. н. в. 1—2 техн. Т. XX эк. н. в. 1—2 техн.  
 1914 г. Т. XXI эк. н. в. 1—2 техн. Т. XXII эк. н. в. 1—2 техн.  
 1915 г. Т. XXIII эк. н. в. 1—2 техн. Т. XXIV эк. н. в. 1—2 техн.  
 1916 г. Т. XXV в. 1—2 техн. Т. XXVI техн.  
 1918 г. Т. XXVII техн. естествозн. и математика,  
 1919 г. Т. XXVIII техн. естествозн. и математика.  
 1925 г. Т. XXIX техн. естествозн. и математика.  
 1927 г. Т. XXX техн. естествозн. и математика.  
 1928 г. Т. XXXI техн. естествозн. и математика.

## ПО ТРИ РУБЛЯ ЗА ОДИН ТОМ.

	р. и.
Кирничев, В. Л. Собрание сочинений, том I, Пгр. 1917 г. . . . .	7 —
Карл Диль. Комментарий к „основным началам“ Рикардо ч. I . . . . .	2 25
Металлургическое Отделение . . . . .	1 —
Меншуткин, Б. Н. Жизнь и деятельность Н. А. Меншуткина . . . . .	2 —
Преображенский, И. А. Сейсмич. условия постройки Семиреченской жел. дор. вост. Пишпекск. меридиана. 1918 г. . . . .	— 50
Рабинович, И. М. Применение теории конечных разностей к исследован. неразрезных балок М. 1921 г. . . . .	— 30
Слепян, Л. Проблема Униполярной индукции. Пгр. 1914 г. . . . .	— 50
„ Распространение света в пустоте. Пгр. 1916 г. . . . .	— 50
Ельяшевич, В. Б. Очерк развития форм поземельного оборота на западе 2-ое изд. СПб. 1913 г. . . . .	— 85
Черкесов, И. А. Об изомерных фенилтонилкетонах и их фенилгидразолах Пгр. 1915 г. . . . .	— 30
Замятни, Е. Исследование работы землечерпательниц Пгр. 1915 г. . . . .	— 30
Торубаев, М. Выбор для котельной установки температуры уходящих газов . . . . .	— 30
Ефремов, Н. Н. О некоторых молекулярных соединениях 1-3-5 тринитро- бензола и 2-4-6 тринитротолуола . . . . .	— 30
Добржинский, Е. Н. Русская технич. библиография 1907 г. . . . .	— 75
Цвиденек-Эюден, Горст. Охрана и страхование рабочих вып. I. Охрана рабочих. СПб. 1914 г. . . . .	— 90
Фрийдман, М. М. Винная монополия в России, очерк III . . . . .	— 50
Седигман и Стурм. Этюды по теории обложения. СПб. 1908 г. . . . .	1 —
Фан-дер-Флиет. Об основных формулах элементарной теории летания . . . . .	— 50

## РЕДАКЦИЯ и СКЛАД ИЗДАНИЯ:

Ленинград „21“, Лесное, Политехнический Институт, главное здание.  
Библиотека.