

Проф. И. П. ПРОКОФЬЕВ

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ II

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ СЕКЦИЕЙ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧЕНОГО СОВЕТА
ДОПУЩЕНО В КАЧЕСТВЕ ПОСОБИЯ
ДЛЯ ВТУЗ'ов

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТУДЕНТОВ
СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ ИМ. ТИМИРЯЗЕВА

«НОВЫЙ АГРОНОМ»

МОСКВА — 1928

М 87
ПОЛ

Проф. И. П. ПРОКОФЬЕВ

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ.

ЧАСТЬ II

1. РАБОТА УПРУГИХ СИЛ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ В СИСТЕМАХ
2. СЫПУЧИЕ ТЕЛА В ПРИЛОЖЕНИИ К РАСЧЕТУ СООРУЖЕНИЙ

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЙ СЕКЦИЕЙ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УЧЕНОГО СОВЕТА
ДОПУЩЕНО В КАЧЕСТВЕ ПОСОБИЯ ДЛЯ ВТУЗ'ов



КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО СТУДЕНТОВ
СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ ИМ. ТИМИРЯЗЕВА
«НОВЫЙ АГРОНОМ»
МОСКВА — 1928

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА

1/282155
М 8777

Московский Изд. отд. № 58698.

Црп. ав. 1160 — 17

Заказ № 1726

Государств. типография имени Е.и. Соколовой. Ленинград, Проп. Красных Командиров, 29

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Издаваемая вторая часть моего курса «Теория Сооружений» состоит из двух, не связанных между собой, разделов: 1) Работа упругих сил и определение перемещений в системах, 2) Сыпучие тела в приложении к расчету сооружений. Такое разделение соответствует программам, читаемых мною курсов в М. И. И. Т. и Т. С.-Х. А., и позволяет выделить в самостоятельную III часть расчет статически неопределимых систем.

Я остановился несколько подробнее, чем это принято в аналогичных курсах, на развитии вопроса об определении перемещений, так как заметил, что лица, хорошо усвоившие себе написание уравнений перемещений, методика их вычислений и построений, легче переходят к расчету статически неопределимых систем.

Свое изложение теории я дополнил большим количеством примеров, в которых, независимо от конкретных заданий, я старался или сопоставить влияния отдельных факторов на величину работы внутренних сил, на величину перемещения и т. п., или сопоставить разные приемы определений; поэтому я считаю, что большинство из приведенных примеров служат дополнительным развитием теории и облегчают общее понимание ее.

Во втором отделе этой части я уделил несколько большее внимание, чем это принято, вопросам учета влияния временной нагрузки на сыпучем теле и приложения теории сыпучего тела в расчетах сооружений. Это мною сделано в связи с поступающими ко мне запросами от студентов и работников в области техники.

Приступая к изданию этой части, я надеялся принести посильную помощь моим читателям и прежде всего студенчеству в процессе изучения этих интересных вопросов в общем расчете сооружений. Критика моих читателей покажет мне насколько мне удалось выполнить эту задачу.

В заключение считаю приятным для себя долгом выразить благодарность: моему сотруднику Н. И. Безухову, любезно помогшему мне проработать некоторые примеры, поставившему мне ряд интересных вопросов и просмотревшему часть корректур, И. Ф. Маслову, хорошо и тщательно выполнившему чертежи, и Издательству «Новый Агроном», быстро и хорошо проведшему издание.

Профессор *И. Прокофьев.*

I

**РАБОТА УПРУГИХ СИЛ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ
В СИСТЕМАХ**

РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ.

§ 1. Введение. Всякое сооружение под действием нагрузок, к нему приложенных, изменяет свою первоначальную форму или, как говорится, деформируется; деформация сооружения может происходить также под влиянием изменения температуры воздуха и изменения в положении опорных закреплений. Вопрос об изучении деформаций сооружений имеет большое значение в технике, так как, с одной стороны, измеренные действительные деформации, при сравнении их с расчетными деформациями, служат характеристикой состояния самого сооружения и отдельных его частей в смысле безопасности их работы, с другой стороны, знание теоретических деформаций или перемещений в отдельных точках и частях сооружения позволяет составлять те дополнительные уравнения, которые являются необходимыми при расчете статически неопределимых систем.

Процесс деформации сооружения заключается в том, что сооружение под действием каких-либо внешних причин изменяет свою первоначальную форму и принимает форму упругого равновесия, при которой влияние внешних воздействий уравновешивается сопротивлением внутренних сил. Развивающееся при этом сопротивление внутренних сил объясняется тем, что между бесконечно малыми частицами, образующими тело, происходит некоторое изменение расстояний, и развивающиеся при этом внутренние силы совершают некоторую работу, которая носит название работы внутренних сил.

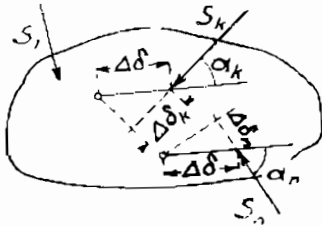
Повседневная техника изучает сооружения только в пределах упругих деформаций, т.-е. таких деформаций, при которых вся накопленная внутренняя энергия, при устранении причин, ее вызвавших, полностью расходуется на восстановление первоначальной формы сооружения; эта энергия называется потенциальной энергией.

Из сказанного вытекает, что развитие деформаций в сооружениях зависит от внешних причин, их вызвавших, и связано с развитием работы внутренних сил, а потому при изучении деформаций, прежде всего, приходится изучить зависимость работ внутренних сил от внешних нагрузок и других причин, их вызывающих.

§ 2. Зависимость между внешней и внутренней работами. Самые общие методы в изучении равновесия тел обосновываются на применении метода возможных перемещений, поэтому представляется целесообразным в вопросе изучения деформаций также исходить из него.

Этот метод, или принцип Лагранжа, формулируется так: если какая-либо материальная система находится в равновесии под действием сил, приложенных к ней, то работа этих сил на любых бесконечно малых перемещениях равна нулю.

Если мы предположим, что на какую-либо неизменяемую систему действуют взаимно уравновешивающиеся силы S_1, S_2, S_3, \dots и что эта система в целом получает некоторое бесконечно малое перемещение $\Delta\delta$, то на основании метода возможных перемещений мы можем написать:



Черт. 1.

$$\sum S_k \cos \alpha_k \cdot \Delta\delta = 0 \dots \dots (1)$$

где α угол наклона каждой силы S к направлению перемещения (черт. 1).

Величины $\Delta\delta \cdot \cos \alpha$ представляют собой нечто иное, как бесконечно малые перемещения по направлениям сил S , вызванные перемещением, данным всей системе:

$$\Delta\delta \cdot \cos \alpha_1 = \Delta\delta_1,$$

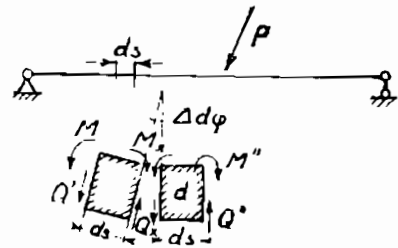
$$\Delta\delta \cos \alpha_2 = \Delta\delta_2$$

и т. д., а потому выражение (1) может быть переписано так:

$$\sum S_k \Delta\delta_k = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Принцип Лагранжа выведен для твердых тел; мы же будем иметь дело с упругими телами, в которых возникают внутренние силы и деформации которых имеют конечную величину, поэтому возникает вопрос о возможности применения к ним этого принципа.

Всякую упругую систему мы можем рассматривать, как состоящую из отдельных элементов; эти элементы, связанные между собой условиями внутренних сил и моментов и условиями возможных деформаций, мы можем рассматривать, как твердые тела.



Черт. 2.

Так, например, балку, подверженную действию изгиба, мы можем рассматривать состоящей из элементов, длиной ds , из которых каждый находится под действием внутренних моментов M_c и внутренних сил Q_c , приложенных в плоскостях сечений, вырезающих этот элемент (черт. 2); этот элемент ds мы можем рассматривать, как жесткий с возможными для него перемещениями: углом поворота $\Delta d\varphi$ и сдвигом $\Delta d\gamma$.

Если мы будем рассматривать ферму, т.-е. сочлененную систему, то в ней мы можем выделить отдельные звенья или стержни между шарнирами и рассматривать каждое из них, как одно целое, находящееся под

действием внутренних продольных сил N , направленных по линии шарниров (черт. 3); возможными перемещениями для них будут удлинение звена или стержня на величину ΔS .

Рассматривая системы в пределах упругих деформаций, когда сохраняет свою силу закон Гука: пропорциональности между нагрузкой и соответствующей ей деформацией, мы можем конечные перемещения δ , возникающие в результате деформации упругой системы, представить в виде величин, пропорциональных бесконечно малым перемещениям:

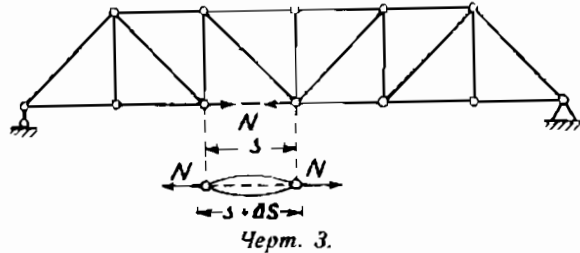
$$\delta = m \Delta \delta.$$

Это позволит работу на конечных перемещениях представить как пропорциональную работе на бесконечно малых перемещениях, а именно:

$$\sum S_k \delta_k = \sum S_k m \Delta \delta_k = m \sum S_k \Delta \delta_k = 0 \dots \dots \dots (3)$$

это уравнение удовлетворяется при любом m .

Изложенными соображениями вполне оправдывается применение начала возможных перемещений к упругим системам.



Применяя начало возможных перемещений к упругим системам, мы не можем ограничиваться написанием выражения возможной работы только внешних сил и нагрузок, так как в действительности мы рассматриваем упругие системы в состоянии упругого равновесия, т.-е. такого равновесия, когда внутренние силы уравнивают внешние силы, а потому мы должны ввести в общее выражение возможной работы работу внутренних сил. Необходимость этого очевидна из простых соображений о состоянии равновесия.

Действительно, если рассматривать какую-либо простую упругую систему, например, двухопорную ферму, находящуюся под действием сил $P_1, P_2 \dots P_n$, то под действием этих сил она прогнется, и точки приложения сил получат перемещения: $\delta_1, \delta_2 \dots$, в результате чего эти внешние силы совершат некоторую работу

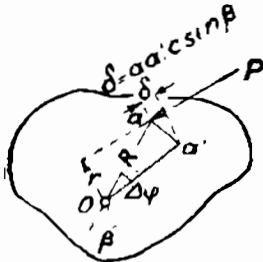
$$T = \sum P \delta \dots \dots \dots (4)$$

Работа эта не равна нулю; но то обстоятельство, что система после деформации пришла в состояние упругого равновесия, показывает, что работа внешних сил T уравновешена и уравновешена ни чем иным, как работой внутренних сил. Если мы обозначим работу внутренних сил через W , то на основании принципа Лагранжа мы должны будем написать, что

$$T + W = 0 \quad \text{или} \quad T = -W \dots \dots \dots (5)$$

из чего следует, что в пределах упругих деформаций работа внутренних сил равна работе внешних сил, но противоположна по знаку.

§ 3. Обобщенное выражение работы внешних сил. Принятое нами в основу выражение (3) возможной работы сохраняет свою силу при всякого вида нагрузках и перемещениях, что нетрудно показать на частных случаях.



Черт. 4.

1) Если система получит не линейное перемещение, как было принято выше, а угловое, т.-е. повернется на некоторый угол $\Delta\varphi$ вокруг некоторого полюса O , то по условию равновесия (черт. 4)

$$\sum Pr = 0,$$

где r — плечо каждой силы относительно точки O ; согласно чертежу 4, оно может быть выражено через расстояние R от точки O до точки a приложения силы, так:

$$r = R \cos \beta,$$

а потому

$$\sum P \cdot R \cos \beta = 0.$$

Условие равновесия не нарушится, если мы предоставим его в таком виде:

$$\sum P \cdot R \cos \beta \Delta\varphi = \sum P \cdot R \Delta\varphi \cos \beta = 0.$$

Из чертежа же 4 нетрудно видеть, что при повороте всей системы на угол $\Delta\varphi$, точка a приложения силы P опишет дугу $= R \Delta\varphi$, проекция которой на направление силы, равная $R \Delta\varphi \cos \beta$, представляет собой перемещение — δ по направлению силы P , а потому выведенное нами условие равновесия мы можем переписать так:

$$\sum PR \Delta\varphi \cos \beta = \sum P \delta = 0,$$

которое, таким образом, привелось к выражению (3) возможной работы.

2) Если на систему будет действовать пара сил или момент и система получит некоторое угловое перемещение $\delta = \Delta\varphi$, то каждая из точек приложения сил этой пары опишет дуги (черт. 5)

$$bb' = \delta' = R' \Delta\varphi$$

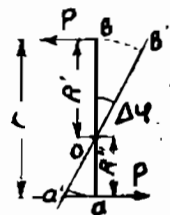
и

$$aa' = \delta'' = R'' \Delta\varphi,$$

так что сумма работ этой пары выразится так:

$$P(R'' \cdot \Delta\varphi - R' \Delta\varphi) = Pr \Delta\varphi,$$

где $r = R' + R''$ плечо пары и $Pr = M$ моменту пары.



Черт. 5.

Таким образом, выражение работы этой пары приводится к виду:

$$Pr \Delta\varphi = M \Delta\varphi = M\delta,$$

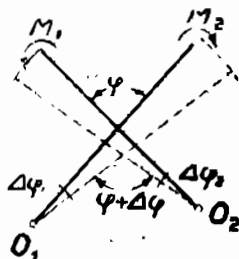
который является общим с выражением (3) возможной работы.

3) Если на систему из двух брусьев, имеющих вращение около шарниров O_1 и O_2 , действуют два равных и противоположных момента $M_1 = -M_2 = M$ (черт. 6) и если эти брусья под влиянием деформаций всей системы получают угловые перемещения $\Delta\varphi_1$ и $\Delta\varphi_2$, то работа, произведенная обоими моментами, будет:

$$M_1 \Delta\varphi_1 + M_2 \Delta\varphi_2 = M (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2).$$

Так как по геометрическому построению $\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ равно приращению $\Delta\varphi$ угла φ , образуемого стержнями, то выражение работы приводится к виду:

$$M (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2) = M \Delta\varphi = M\delta,$$



Черт. 6.

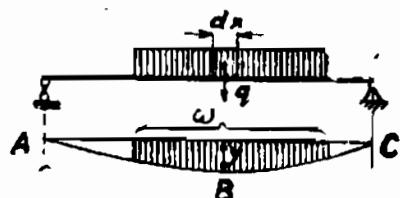
аналогичному с выражением (3).

4) Если на систему будет действовать сплошная нагрузка, интенсивностью p кг на n метр., и если точки приложения этой нагрузки получат некоторые перемещения, характеризующиеся кривой ABC (черт. 7), то, рассматривая всю нагрузку в виде отдельных сил, величиной pdx , мы можем всю работу, совершаемую ими, выразить так:

$$T = \sum p dx y = p \sum y dx.$$

Обозначая площадь, очерченную кривой ABC , через δ , мы приведем выражение работы к виду, общему с выражением (3) возможной работы

$$T = p \sum y dx = p\delta.$$



Черт. 7.

Можно было бы привести еще ряд примеров, которые показали бы, что каков бы ни был вид нагрузки на систему, работа, совершаемая ею на соответствующих перемещениях, всегда может быть приведена к общему виду,

характеризующему выражение (3). Задача сводится лишь к тому, чтобы каждому виду загрузки соответствовал свой вид перемещения.

Условимся в целях обобщения всех последующих выводов обозначать нагрузку всякого вида, включая сюда и реактивные силы, буквой S , приписывая ей значок, показывающий или точку приложения ее или группу, к которой она относится, например:

S_a — нагрузка в точке a ,

$\sum S_k$ — сумма сил группы k .

Так как под обозначением S мы будем подразумевать всякого рода нагрузку, то она может иметь различные измерения: в кг, кг \times см, кг/п. м и т. д.

Условимся также перемещения, соответствующие этим нагрузкам, обозначать греческой буквой δ , подразумевая под ней, где надо, линейное или угловое перемещение или другого вида деформацию.

Так как по ходу расчета представляется необходимым рассматривать деформации в различных точках и сечениях системы и под действием различных воздействий, то мы будем снабжать букву δ двумя значками, из которых первый будет обозначать место рассматриваемой деформации, а второй — причину, ее вызвавшую, так например:

обозначение δ_{mn} будет показывать, что рассматривается деформация в точке m , вызванная каким-либо воздействием, приложенным в точке n .

Иногда нам придется варьировать это обозначение в том смысле, что первый показатель будет определять направление, по которому определяется перемещение или деформация, а второй будет показывать причину, ее вызывающую, например:

обозначение δ_{nv} будет показывать, что рассматривается перемещение по направлению силы H от воздействия V или

обозначение δ_{nt} будет показывать, что рассматривается деформация по направлению H от действия температуры t .

Смысл той или иной комбинации значков всегда будет понятен по тексту.

При введении таких обобщающих обозначений S и δ мы можем подразумевать под буквой S не только отдельные силы, но и комбинации из них, нужно только, чтобы в последнем случае под буквой δ подразумевалась деформация, характерная для этой комбинации (см. выше примеры 3 и 4). Такое обобщение упрощает написание выражений работы.

Необходимо, однако, иметь в виду, что хотя величины S и δ , как было указано выше, могут выражаться в различных измерениях, но эти измерения должны быть таковыми, чтобы произведение из них S и δ всегда имело одинаковое измерение (кг \times см). Это положение достаточно поясняется выше приведенными примерами.

Пользуясь указанными обозначениями, мы всегда можем работу внешних сил и нагрузок S_1, S_2, \dots, S_m по перемещениям, вызванным каким-либо воздействием S_n , написать в таком виде:

$$S_1 \delta_{1n} + S_2 \delta_{2n} + \dots + S_m \delta_{mn} = \sum_0^m S_k \cdot \delta_{kn} \dots \quad (6)$$

Если перемещения будут вызваны какой-либо иной причиной (например, изменением температуры), то выражение работы напишется так:

$$S_1 \delta_{1t} + S_2 \delta_{2t} + \dots + S_m \delta_{mt} = \sum_0^n S_k \delta_{kt}$$

Таким образом, общий вид выражения работы внешних сил и нагрузок будет

$$T = \sum S_k \delta_{km} \dots \dots \dots (7)$$

§ 4. Выражение работы внутренних сил. Как известно, внутренние силы, возникающие во всякой плоскостной системе, характеризуются величинами: нормальной силой N , поперечной или касательной силой Q , изгибающим моментом M и скручивающим моментом M' . Выделяя из тела или сооружения бесконечно малый элемент, длиной ds , мы можем рассматривать его под действием указанных величин, определяющих внутренние силы (*черт. 8*).

Так как мы принимаем длину выделенной части бесконечно малой, то приращение dM , dN , dQ величин момента и сил будут бесконечно малыми и мы можем принимать, что каждый выделенный элемент находится под действием равных и противоположных величин M , N и Q . Что касается внешних сил, то, если они представляются сосредоточенными силами, мы всегда можем предположить, что при бесконечно малой длине выделенного элемента точка приложения силы совпадает с одним из сечений, и тогда эта сила не будет входить в выражение равновесия выделенного элемента; если же это силы сплошные, то равнодействующая их на бесконечно малой длине элемента будет бесконечно мала, и ею можно пренебречь.

Итак, выделенный бесконечно малый элемент ds мы можем рассматривать, как твердое тело, находящееся под действием сил N и Q и момента M , которые по отношению к элементу являются как бы внешними. Для составления выражения работы этих сил и момента нам надо знать линейные и угловые перемещения точек приложения этих сил и момента.

Если мы будем рассматривать геометрически возможные деформации в выделенном элементе, то они могут слагаться:

- 1) из удлинения, характеризующегося перемещением сечения, параллельно самому себе (*черт. 8a*) на некоторую величину $aa_1 = \Delta ds$;
- 2) из сдвига, характеризующегося перемещением сечения ab в своей же плоскости (*черт. 8c*) на некоторую величину $aa' = \Delta d\gamma$;
- 3) из поворота, характеризующегося наклоном сечения ab к своему первоначальному положению (*черт. 8b*), на некоторый угол $\Delta d\varphi$ и
- 4) из поворота, характеризующегося сдвигом сечения ab относительно первоначального положения (*черт. 8d*) вращением вокруг продольной оси на некоторый угол $= \Delta d\theta$.

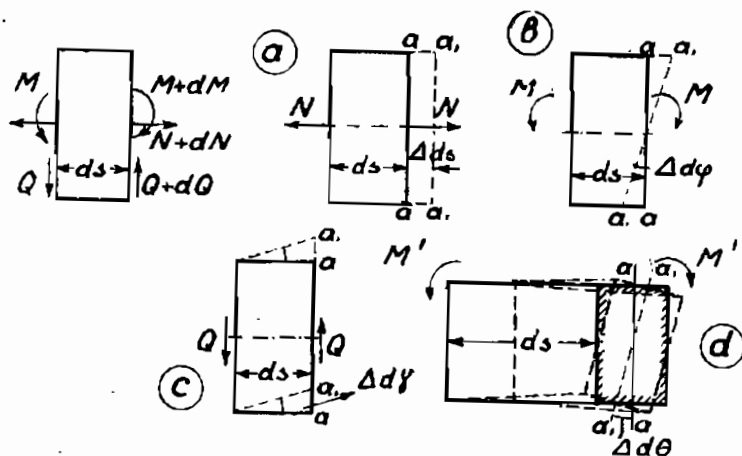
По законам механики эти простые линейные и угловые перемещения, могущие комбинироваться в деформацию сложного вида, будут вызывать работу внутренних сил и моментов только по тем перемещениям, которые соответствуют направлению действия этих сил и моментов.

Так, например, продольная сила N при продольной деформации Δds совершит работу $N \Delta ds$; при поперечном сдвиге работа ее будет равна нулю, так как перемещение нормально к направлению силы и при пово-

ротах сечения на углы $\Delta d\varphi$ и $\Delta d\theta$ работа ее равна нулю, так как точка ее приложения не перемещается. То же самое будет иметь место и относительно других слагающих внутренних сил: например, изгибающий момент M даст работу только при условии наклона сечения на некоторый угол $\Delta d\varphi$ и не вызовет работы при перемещениях всех других видов.

Таким образом, каков бы ни был сложный вид деформации элемента, мы для выражения работы внутренних сил всегда будем иметь слагающие следующих видов ¹⁾:

$$N \Delta ds, Q \Delta dy, M \Delta d\varphi, M' \Delta d\theta.$$



Черт. 8.

На основании закона о независимости действия сил и деформации эти слагающие в общем выражении работы суммируются; в частных случаях некоторые из них обращаются в нуль.

Рассмотрим, как выражаются величины

$$\Delta ds, \Delta dy, \Delta d\varphi,$$

вызываемые действием внешней нагрузки и действием температуры, и как влияет на величину их очертание оси элемента.

I. Действие нагрузки.

А) Если ось элемента прямая, то он представляется в виде параллелепипеда с волокнами одинаковой длины и, как известно из курсов сопротивления материалов, деформации, возникающие в таком элементе под действием сил N , Q и моментов M и M' , определяются следующими величинами.

¹⁾ Так как внутренние силы или моменты, приложенные в сечениях ab и cd элемента, равны и взаимно противоположны, то в выражение работы введена или одна сила или момент, но, в соответствии с этим, введено перемещение, характеризующее работу их обоих.

При действии продольной силы N , вызывающей одинаковое изменение длины всех волокон, удлинение каждого из них

$$\Delta ds = \frac{n}{E} ds = \frac{N}{E\omega} ds \dots \dots \dots (8a)$$

При действии изгибающего момента M , вызывающего одинаковый поворот всего сечения, величина последнего

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds \dots \dots \dots (8b)$$

При действии поперечной силы Q касательные напряжения имеют не одинаковую величину по сечению и зависят от формы последнего, а потому в этом случае величина сдвига рассматривается в отношении отдельных волокон и определяется через напряжение:

$$\Delta d\gamma = \frac{t ds}{G} \dots \dots \dots (8c)$$

При действии крутящего момента угол поворота сечения зависит от формы сечения и в общем виде определяется величиной:

$$\Delta d\theta = k' \frac{M}{GJ} ds \dots \dots \dots (8d)$$

Во всех этих выражениях: ω — площадь сечения, J — моменты инерции его, E и G коэффициенты продольной и поперечной упругости материала элемента и k' — числовой коэффициент, зависящий от формы сечения ¹⁾.

Таким образом, если предположить, что выделенный нами элемент, находящийся под действием внутренних сил N , Q и моментов M изгибающего и M' крутящего, подвергнется действию новой нагрузки, которая вызовет в нем деформации:

$$\begin{aligned} \Delta ds &= \frac{N_m ds}{E\omega}; \quad \Delta d\varphi = \frac{M_m}{EJ} ds; \\ \Delta d\gamma &= \frac{t_m ds}{G}; \quad \Delta d\theta = k' \frac{M'_m}{GJ} ds, \end{aligned}$$

то в выражение работы войдут следующие слагающие: от действия продольной силы

$$N_k \Delta ds = N_k \frac{N_m ds}{E\omega} \dots \dots \dots (9a)$$

от действия изгибающего момента

$$M_k \Delta d\varphi = M_k \frac{M_m ds}{EJ} \dots \dots \dots (9b)$$

от действия крутящего момента

$$k' M'_k \frac{M'_m}{GJ} ds \dots \dots \dots (9c)$$

¹⁾ Выражение величины коэффициента k' можно найти в курсах «Сопротивление материалов». Для брусьев круглого сечения $k' = 2$.

Что касается выражения работы от действия поперечной силы, то, вследствие неравномерности распределения касательных напряжений и величины сдвига по сечению, она определяется интегралом:

$$\int_0^{\omega} t_m d\omega \cdot \frac{t_k}{G} ds,$$

распространенным на всю площадь сечения элемента. При неравномерном распределении касательных напряжений по сечению они определяются величинами:

$$t_m = \frac{Q_m S_x}{J b} \quad \text{и} \quad t_k = \frac{Q_k S_x}{J b},$$

в которых S_x — статический момент части сечения до волокна и b — ширина сечения в месте рассматриваемого волокна.

Подставив эти значения касательных напряжений в выражение интеграла, мы можем привести его к виду:

$$\int_0^{\omega} \frac{t_m t_k}{G} d\omega ds = \frac{Q_k Q_m}{G} ds \cdot \int_0^{\omega} \frac{S_x^2 \omega}{J^2 b^2} d\omega = k Q_k \frac{Q_m}{G \omega} ds \dots (9d)$$

В этом выражении работы, приведенном к общему виду с выражениями работы от N и M , величины Q_m , Q_k , G , ω и ds , как постоянные, вынесены за знак интеграла и введен числовой коэффициент:

$$k = \int_0^{\omega} \frac{S_x^2 \omega}{J^2 b^2} d\omega,$$

зависящий от формы сечения ¹⁾.

При одновременном действии этих сил и моментов работа определяется суммой отдельных работ:

$$dW = N_k \Delta ds + M_k \Delta d\varphi + k Q_k \Delta d\gamma + k' M'_k \cdot \Delta d\theta \dots (10)$$

¹⁾ Например, для бруса прямоугольного сечения шириной b и высотой h , в котором $J = \frac{bh^3}{12}$, $\omega = bh$, $d\omega = bdz$, z — расстояние волокна от края сечения и $S_x = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$, получим:

$$k = \int_0^{\omega} \frac{S_x^2 \omega}{J^2 b^2} d\omega = 2 \frac{bh b^2 \cdot b}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)^2 b^2} \int_0^{\frac{1}{2}h} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)^2 dz = \frac{6}{5}.$$

Для бруса с круглым сечением $k = \frac{32}{27}$.

или

$$dW = N_k \frac{N_m \Delta ds}{E\omega} + M_k \frac{M_m ds}{EJ} + k Q_k \frac{Q_m ds}{G\omega} + k' M'_k \frac{M'_m ds}{GJ} \dots \dots \dots (11)$$

Б) В элементах с кривой осью, выделяемых двумя сечениями, нормальными к оси, сам элемент имеет форму клина, и волокна, образующие его, имеют разную длину (черт. 9), что вызывает более сложные формы деформаций.

Если мы будем рассматривать выделенный элемент под действием внутренней продольной силы N , то деформация его охарактеризуется тем, что сечение ab займет положение a_2b_2 .

Деформация Δds_y каждого волокна, отстоящего на расстоянии y от осевого волокна, может быть выражена так:

$$\Delta ds_y = \frac{N_m}{\omega E} ds_y = \frac{N_m}{\omega E} \left(1 + \frac{y}{\rho} \right) ds \dots \dots \dots (12)$$

в этом уравнении длина волокна ds_y выражена в функции длины ds осевого волокна,

$$ds_y = \frac{\rho + y}{\rho} ds.$$

Из выражения (12) видно, что удлинение отдельных волокон изменяется в зависимости от положения их относительно осевого волокна, вследствие чего плоскость a_2b_2 деформированного сечения получает наклонное положение по отношению к первоначальному положению ab под некоторым углом $\Delta d\varphi'$ и ее направление проходит через центр кривизны бруса.

Полученную деформацию мы можем рассматривать как образованную двумя перемещениями сечения ab , именно: сначала параллельно самому себе в положение a_1b_1 и затем поворотом его на угол $\Delta\varphi'$ в положение a_2b_2 . Первое линейное перемещение соответствует простому удлинению волокна ds :

$$\Delta ds = \frac{N_m}{E\omega} ds \dots \dots \dots (13)$$

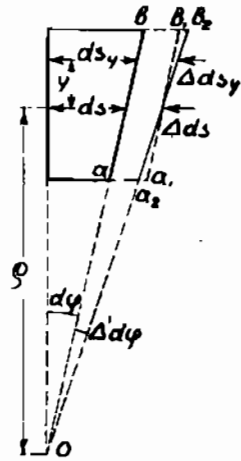
второе угловое перемещение определяется величиной:

$$\Delta d\varphi' = \frac{\Delta ds}{\rho} = \frac{N_m}{E\omega\rho} ds \dots \dots \dots (14)$$

Если рассматривать изменение длины каждого волокна как результат этих двух перемещений, то получим:

$$\Delta ds_y = \frac{N_m}{E\omega} ds + \frac{N_m}{E\omega\rho} ds \cdot y = \frac{N_m}{E\omega} \left(1 + \frac{y}{\rho} \right) ds,$$

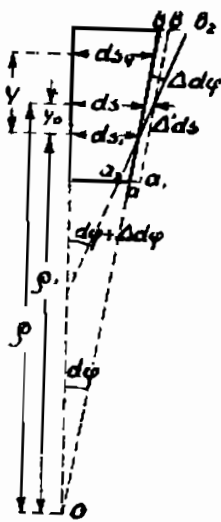
т.е. ранее выведенное выражение (12).



Черт. 9.

Таким образом, полная деформация элементарной части кривого бруса, вызываемая действием продольной силы, может быть рассмотриваемая, как состоящая из двух простых деформаций: линейной по оси бруса (13) и поворота сечения на угол $\Delta d\varphi'$ (14).

Перейдем теперь к рассмотрению полной деформации, вызываемой в элементах кривого бруса действием изгибающего момента. Под действием изгибающего момента M_m выделенный бесконечно малый клин



бруса получит новую кривизну ρ_1 , и полная деформация клина охарактеризуется тем, что сечение ab займет положение a_2b_2 .

Напряжение n_y любого волокна, отстоящего на расстоянии y от нейтрального волокна ds_1 , в зависимости от деформации клина выразится так (черт. 10):

$$n_y = E \frac{\Delta ds_y}{ds_y} = E \frac{\Delta d\varphi \cdot y}{\left(1 + \frac{y}{\rho_1}\right) ds_1} =$$

$$= E \frac{y}{\left(1 + \frac{y}{\rho_1}\right)} \frac{\Delta d\varphi}{ds_1} \dots \dots \dots (15)$$

Из условия равновесия клина следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_0^\omega n_y d\omega &= \sum_0^\omega E \frac{y}{\left(1 + \frac{y}{\rho_1}\right)} \frac{\Delta d\varphi}{ds_1} d\omega = E \frac{\Delta d\varphi}{ds_1} \sum_0^\omega \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = 0 \\ \sum_0^\omega n_y d\omega \cdot y &= \sum_0^\omega \frac{y^2}{\left(1 + \frac{y}{\rho_1}\right)} \cdot \frac{\Delta d\varphi}{ds_1} d\omega = E \frac{\Delta d\varphi}{ds_1} \sum_0^\omega \frac{y^2}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = M \end{aligned} \right\} (16)$$

в этих выражениях величины E , $\Delta d\varphi$, ds_1 постоянные для выделенного клина, а потому вынесены за знак суммы.

Первое из этих уравнений возможно только при условии, что

$$\sum_0^\omega \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} \cdot d\omega = 0 \dots \dots \dots (17)$$

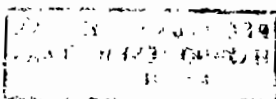
чем определяется положение нейтрального волокна.

Если во втором уравнении принять множитель

$$\sum_0^\omega \frac{y^2}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = J \dots \dots \dots (18)$$

за некоторый условный момент инерции сечения бруса, то из этого выражения получим:

$$\frac{\Delta d\varphi}{ds_1} = \frac{M}{EJ} \text{ или } \Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds_1.$$



Выразив длину волокна ds_1 через длину осевого волокна ds , получим:

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{EJ} ds_1 = \frac{M}{EJ} \left(1 - \frac{y_0}{\rho}\right) ds \dots \dots \dots (19)$$

Этим выражением определяется величина угла поворота сечения.

Подставив значение угла $\Delta d\varphi$ в выражение (15) напряжения, получим:

$$n_y = \frac{M}{J} \cdot \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} \dots \dots \dots (20)$$

Из *черт. 10* можно видеть, что поворот сечения под действием момента происходит не около плоскости осевого волокна ds , а несколько ниже него у волокна ds_1 , вследствие чего осевое волокно получает некоторое удлинение $\Delta ds'$.

Можно, как и в предыдущем случае, полную деформацию рассматривать, как суммарную, сложившуюся из двух: первой линейной $= \Delta ds'$, при которой сечение ab перемещается параллельно самому себе в положение a_1b_1 , и второй угловой, когда сечение поворачивается на угол $\Delta d\varphi$ в положение a_2b_2 . Величина углового перемещения $\Delta d\varphi$ выведена выше (см. выраж. 19); что касается линейного перемещения $\Delta ds'$, равного удлинению осевого волокна ds , то его можно определить как среднюю величину объемной деформации всего выделенного клина, из условия:

$$\Delta ds' = \frac{1}{\omega} \sum_0^{\omega} \Delta ds_y \cdot d\omega \dots \dots \dots (21)$$

Входящая в эту формулу величина Δds_y удлинения любого волокна может быть выражена через напряжение и изгибающий момент:

$$\Delta ds_y = \frac{1}{E} n_y ds_y = \frac{M_m}{EJ} \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} ds_y$$

Выразив длину волокна ds_y через длину ds осевого волокна, получим:

$$\Delta ds_y = \frac{M_m}{EJ} \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} \left(1 + \frac{y - y_0}{\rho}\right) ds$$

Подставив это выражение в формулу (21) деформации среднего волокна и вынеся в нем за знак суммы величины: ω , M_m , E , J , ρ , y_0 и ds , как постоянные для сечения бруса, приведем его к такому виду:

$$\Delta ds' = \frac{M_m \cdot ds}{EJ \cdot \omega} \left\{ \sum_0^{\omega} \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega + \frac{1}{\rho} \sum_0^{\omega} \frac{y^2}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega + \frac{y_0}{\rho} \sum_0^{\omega} \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega \right\} (22)$$

и так как

$$\sum_0^{\omega} \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = 0 \text{ и } \sum_0^{\omega} \frac{y^2}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = J'$$

то в окончательном виде:

$$\Delta ds' = \frac{M_m}{E\omega\rho} ds \dots \dots \dots (23)$$

Этой формулой определяется величина удлинения осевого волокна при изгибе кривого бруса.

Таким образом, мы получили, что от действия продольной силы N_m и изгибающего момента M_m в сечениях кривого бруса имеют место следующего вида перемещения:

при действ.	линейн. перем.	угловое перем.	
N_m	$\Delta ds = \frac{N_m}{E\omega} ds$	$\Delta d\varphi' = \frac{N_m}{E\omega\rho} ds$	} \dots \dots \dots (24)
M_m	$\Delta ds' = \frac{M_m}{E\omega\rho} ds$	$\Delta d\varphi = \frac{M_m}{EJ} \left(1 - \frac{y_0}{\rho}\right) ds$	

Действие поперечной силы Q вызывает только сдвиг сечения в своей же плоскости, как и в брус с прямой осью, и не вызывает ни удлинения осевого волокна, ни поворота сечения.

Таким образом, если в сечениях бруса с кривой осью имеют место внутренние силы N_k , Q_k и момент M_k и если в этом брус возникнут новые деформации, вызванные действием N_m и Q_m и момента M_m , то работа внутренних сил каждого бесконечно малого элемента бруса выразится суммой следующих членов:

$$dW = N_k (\Delta ds + \Delta ds') + M_k (\Delta d\varphi' + \Delta d\varphi) + Q_k \Delta d\gamma \dots \dots (25)$$

или

$$dW = N_k \frac{N_m}{E\omega} ds + N_k \frac{M_m}{E\omega\rho} ds + M_k \frac{N_m}{E\omega\rho} ds + M_k \frac{M_m}{EJ} \left(1 - \frac{y_0}{\rho}\right) ds + kQ_k \frac{Q_m}{G\omega} ds \dots \dots \dots (26)$$

Надо отметить, что входящие в это выражение работы величины $y_0 = \rho - \rho_1$ (черт. 10) и J' очень быстро приближаются, в зависимости от изменения отношения $\rho : h$, первое к нулю, а второе к величине действительного момента инерции сечения J ¹⁾, и уже при отношении $\rho : h = 4$

¹⁾ Так, например, для бруса с прямоугольным сечением y_0 и J' определяются следующими величинами.

Согласно черт. 11 мы можем принять

$$y = u - \rho_1; \quad d\omega = b \times dy = bdu,$$

тогда $\sum_0^\omega \frac{y}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = b \int_{u_2}^{u_1} \frac{u - \rho_1}{1 + \frac{u - \rho_1}{\rho_1}} du = \rho_1 b \int_{u_2}^{u_1} \frac{u - \rho_1}{u} du = 0;$

произведя интегрирование, получим:

$$\int_{u_2}^{u_1} \frac{u - \rho_1}{u} du = (u_1 - u_2) - \rho_1 (\lg u_1 - \lg u_2) = u_1 - u_2 - \rho_1 \lg \frac{u_1}{u_2} = 0$$

можно принимать $y_0 = 0$ и $J = J$. Тогда выражение (26) работы при-
дется к такому:

$$W = \frac{N_k N_m}{E\omega} ds + \frac{N_k M_m}{E\omega\rho} ds + \frac{M_k N_m}{E\omega\rho} ds + \frac{M_k M_m}{EJ} ds + k \frac{Q_k Q_m}{G\omega} ds \dots (27)$$

Это выражение работы отличается от выражения (11) работы эле-
ментов с прямой осью вторым и третьим членом своей суммы. С возра-
станием ρ эти члены быстро убывают, а потому при учете работы ими
часто пренебрегают.

II. Влияние температуры. Под влиянием изменения температуры
отдельные волокна брусьев, нагреваясь или охлаждаясь, изменяют свою
длину, что вызывает перемещение отдельных точек. Определение вели-
чин этих перемещений мы сделаем для более общего случая неравномер-
ного действия температуры, т.-е. случая, когда нижняя и верхняя часть
бруса находятся под действием разных температур t_1 и t_2 , при чем
 $t_2 > t_1$.

по чертежу

$$u_1 = \rho + \frac{1}{2} h \quad u_2 = \rho - \frac{1}{2} h \quad u_1 - u_2 = h,$$

а потому

$$u_1 - u_2 - \rho_1 \lg \frac{u_1}{u_2} = h - \rho_1 \lg \frac{2\rho + h}{2\rho - h} = 0.$$

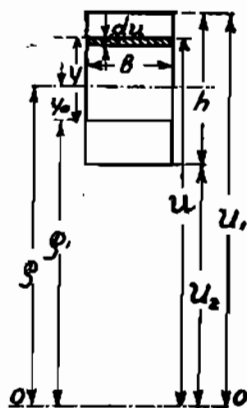
Разложив логарифм в ряд, получим $h - \rho_1 \left(\frac{h}{\rho} + \frac{h^3}{12\rho^3} + \dots \right) = 0$.

Задаваясь рядом отношений $h : \rho$, мы можем проследить
изменение величины ρ_1 и разницы $y_0 = \rho - \rho_1$ в зависимости
от этого соотношения при

$\rho = h$	$\rho_1 = \frac{12}{13}\rho$	$y_0 = \rho - \rho_1 = \frac{1}{13}h$
$\rho = 2h$	$\rho_1 = \frac{48}{49}\rho$	$y_0 = \rho - \rho_1 = \frac{1}{24,5}h$
$\rho = 4h$	$\rho_1 = \frac{192}{193}\rho$	$y_0 = \rho - \rho_1 = \frac{1}{48}h$

Из этой таблицы видно, что при отношении $\rho : h = 4$
величина $y_0 = \rho - \rho_1$ ничтожна по сравнению с остальными
размерами бруса, поэтому ею можно пренебречь.

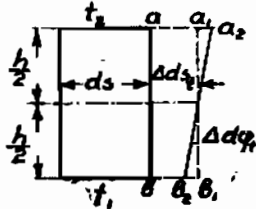
Аналогичным расчетом можно показать, что при воз-
растании отношения $\rho : h$ условный момент инерции J'
быстро приближается к действительному моменту инерции
 J сечения.



Черт. 11.

$$J = \sum_0^\omega \frac{y^2}{1 + \frac{y}{\rho_1}} d\omega = b \int_{u_2}^{u_1} \frac{(u - \rho_1)^2}{1 - \frac{u - \rho_1}{\rho_1}} du = \rho_1 b \left[\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2) - 2\rho_1(u_1 - u_2) + \rho_1^2 \lg \frac{u_1}{u_2} \right]$$

А) В брусках с прямой осью, в которых волокна выделяемых бесконечно малых частей все имеют одинаковую длину ds , сравнительное приращение длин каждого волокна будет зависеть только от разницы их нагрева. Если принять, что внутри тела приращение температуры изменяется по закону прямой, то конечная деформация выделяемого бесконечно малого клина охарактеризуется тем, что плоскость сечения, нормальная к оси бруса, займет новое положение наклонное к оси. Эту конечную деформацию можно рассматривать как суммарную: сначала из перемещения плоскости ab параллельно самой себе в положение a_1b_1 на расстояние Δds_t , а потом из поворота той же плоскости около осевого волокна на угол $\Delta\varphi_t$.



Черт. 12.

Первое перемещение может быть рассматриваемо как линейное удлинение всех волокон на величину:

$$\Delta ds_t = \alpha \frac{t_2 + t_1}{2} ds = \alpha t ds \quad \dots \quad (28)$$

где $t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$ — средняя температура, равномерная по всей высоте бруса.

Второе угловое перемещение сечения, по его относительной малости, может быть определено как тангенс, а именно:

$$\Delta\varphi_t = \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} ds = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \quad \dots \quad (29),$$

где $\Delta t = (t_2 - t_1)$ — разность между температурами в ребрах бруса.

Таким образом, если статически определимый брус ¹⁾ с прямой осью, внутри которого имеются силы N_k , Q_k и момент M_k , подвергнется влиянию изменения температуры, то каждая из бесконечно малых частей бруса совершит работу, которая определяется следующей суммой:

$$dW_t = N_k \Delta ds_t + M_k \Delta\varphi_t = N_k \alpha t ds + M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds \quad \dots \quad (30)$$

Подставляя вместо u_2 и u_1 их значения, выраженные в функции h и ρ , и разлагая $lg(u_1 : u_2)$ в ряд, получим:

$$J' = \rho_1 b \left[\rho h - 2\rho_1 h + \rho_1^2 \left(\frac{h}{\rho} + \frac{h^3}{12\rho^3} + \dots \right) \right]$$

$$J' = \rho_1 b \left[(\rho - \rho_1) h + \rho_1 h \frac{\rho - \rho_1}{\rho} + \rho_1^2 \frac{h^3}{12\rho^3} + \dots \right]$$

Как было показано выше, при $\rho : h = 4$ разность $u_0 = \rho - \rho_1$ ничтожна, так что ею можно пренебречь и $\rho = \rho_1$; тогда

$$J' = \frac{bh^3}{12} = J;$$

то же имеет место и при других формах сечений (см. проф. С. П. Тимошенко «Сопроотивление материалов» — Кривые брусья).

¹⁾ В системах статически неопределимых в выражение работы входят дополнительные члены от влияния температуры на лишние связи (о чем см. ч. III).

Б) В брусках с кривой осью сравнительное приращение длины волокон по высоте бруса будет зависеть не только от разницы температур этих волокон, но и длин самих волокон, которые по высоте в кривых брусках неодинаковы. Так как изменение длин волокон в бесконечно малом элементе кривого бруса следует закону прямой и так как мы приняли, что приращение температуры по высоте бруса следует закону прямой, то мы можем предположить, что конечная деформация выделенной части будет следовать закону прямой и охарактеризуется перемещением сечения ab в положение a_2b_2 (черт. 13).

Эту деформацию мы можем рассматривать, как и в первом случае, слагающей из двух перемещений: первого — когда плоскость ab перемещается параллельно самой себе в положение a_1b_1 на величину Δds_s и второго — когда та же плоскость поворачивается в положение a_2b_2 на угол $\Delta\varphi_t$.

Величина удлинения крайних волокон определяется величинами:

нижнего
$$\Delta ds_H = \alpha t_1 ds_H = \alpha t_1 \frac{\rho - 0,5h}{\rho} ds,$$

верхнего
$$\Delta ds_B = \alpha t_2 ds_B = \alpha t_2 \frac{\rho + 0,5h}{\rho} ds.$$

Удлинение Δds_t осевого волокна определится по величине средней температуры $t = \frac{1}{2} (t_1 + t_2)$ и равно

$$\Delta ds_t = \alpha t ds \dots \dots \dots (31)$$

что получается как средняя величина из Δds_H и Δds_B .

Величина углового перемещения $\Delta\varphi_t$ определится как тангенс из отношения катетов:

$$\Delta\varphi_t = \frac{\Delta ds_H - \Delta ds_B}{h} = \frac{\alpha}{\rho h} [t_2 (\rho + 0,5h) - t_1 (\rho - 0,5h)] ds,$$

делая приведение, получим:

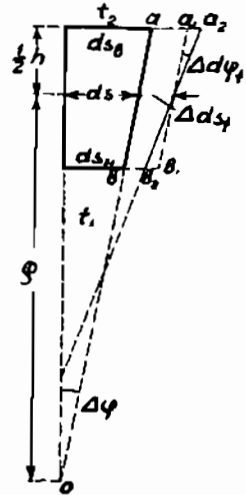
$$\Delta\varphi_t = \alpha \frac{t_2 - t_1}{h} ds + \frac{\alpha (t_2 + t_1)}{2\rho} ds = \alpha \frac{\Delta t}{h} ds + \frac{\alpha t}{\rho} ds \dots \dots \dots (32)$$

Таким образом, суммарная работа упругих сил в статически определенном кривом бруске, возникающая под влиянием температурных изменений, будет:

$$dW_t = N_2 \alpha t ds + M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds + M_k \alpha \frac{t}{\rho} ds \dots \dots \dots (33)$$

Член $\alpha \frac{t}{\rho} ds$ вообще не велик и с увеличением ρ быстро убывает, а потому им обычно пренебрегают.

Надо иметь в виду, что при выводе величин перемещений, возникающих от изменения температуры, мы предполагали нарастание ее,



Черт. 13.

а потому всюду включали знак +, при убывании температуры, перемещения будут обратные, что вызовет изменение всех знаков работы на обратные.

При одновременном действии нагрузки и температурных изменений работа внутренних сил будет определяться суммой членов выражений 11 или 27 и выраж. 33.

$$dW = N_k \frac{N_m ds}{E\omega} + N_k \alpha t ds + N_k \frac{M_m ds}{E\omega\rho} + M_k \frac{M_m ds}{EJ} + M_k \alpha \frac{\Delta t}{h} ds + \\ + M_k \alpha \frac{t}{\rho} ds + M_k \frac{N_m ds}{E\omega\rho} + k Q_k \frac{Q_m ds}{G\omega} \dots \dots \dots (34)$$

§ 5. Воображаемая и действительная работа. В последующих расчетах нам придется иметь дело с двумя видами работ: возможной или воображаемой работы (виртуальной), которая является в напряженных системах, как результат действия на них новых воображаемых нагрузок или причин, и действительной работы, которая является результатом нарастания самой нагрузки.

1. Воображаемая работа. При определении воображаемой работы мы будем исходить из предположения, что упругая система, находящаяся в напряженном состоянии под действием каких то нагрузок S_k , вызывающих в частях системы внутренние силы N_k , Q_k и моменты M_k , подвергнется новому воздействию, которое вызовет внешние перемещения δ_{km} , относящиеся к точкам приложения нагрузок и деформации отдельных элементов системы, характеризуемые величинами $\Delta_m ds$, $\Delta_m d\varphi$ и т. д.

При этих условиях работа внешних нагрузок на возможных для них перемещениях определится суммой

$$T = \sum S_k \delta_{km} \dots \dots \dots (34)$$

Что касается работы внутренних сил, уравнивающих внешние, то рассматривая всю систему, как состоящую из ряда бесконечно малых элементов, связанных между собой условием возможных деформаций, мы можем написать работу их на возможных перемещениях в таком виде:

$$-W = \int dW = \int N_k \Delta_m ds + \int N_k \Delta_m' ds + \int M_k \Delta_m d\varphi + \\ + \int M_k \Delta_m' d\varphi + k \int Q_k \Delta_m d\gamma \dots \dots \dots (35)$$

Отрицательный знак (—) введен в это выражение работы внутренних сил в соответствии со знаком работы внешних сил (форм. 34), в которой он принят положительным (+), так как работа внутренних сил всегда противоположна по знаку работе внешних сил. Это можно пояснить на следующих частных примерах.

Рассмотрим брусок, находящийся под действием растягивающей силы P (черт. 14), в сечениях которого имеют место внутренние силы N , и предположим, что этот брусок подвергнется новому растяжению, вызывающему

перемещение δ_{pn} по направлению силы P . Тогда внешняя работа определится произведением $+P \cdot \delta_{pn}$; что касается работы внутренних сил, то, так как в любом сечении $a-a$ сила N , как растягивающая, будет направлена вверх, а само сечение под влиянием нового удлинения перемещается книзу, то работа внутренних сил определится величиной $= -N_k \Delta_m ds$.

Рассмотрим случай бруса, изгибаемого силами P (черт. 15), что вызывает в сечениях бруса положительные моменты, направление которых показано на черт. 15в. Если предположить, что этот брусок подвергся новому изгибу в ту же сторону, то все точки приложения сил P получат возможные смещения δ_{pm} и все отдельные сечения возможные для них повороты $\Delta_m d\varphi$. Этот новый изгиб, совпадающий по направлению с изгибом от сил P , вызовет работу внешних сил $= +\Sigma P \cdot \delta_{pm}$. Что касается работы внутренних сил, то так как при принятом направлении нового изгиба верхние волокна элементов (черт. 15) сожмутся, а нижние растянутся, то сечения, к которым приложены моменты M_p , повернутся в стороны противоположные направлениям этих моментов и работа определится величиной $= -M_p \Delta_m d\varphi$.

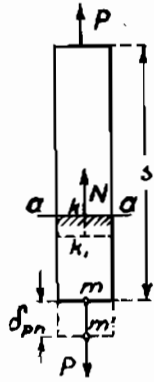
Если бы воображаемый новый изгиб был направлен в сторону противоположную изгибу, вызываемому силами, то работа внешних сил имела бы знак минус, а работа внутренних сил знак (+).

Так как выражение (34) работы внешних сил и выражение (35) работы внутренних сил относятся к одной и той же системе, находящейся в условии упругого равновесия, то, на основании принципа Лагранжа, мы можем написать, что

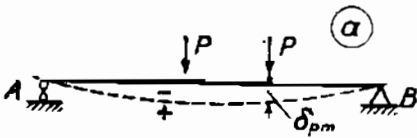
$$\sum S_k \delta_{km} - \left[\int N_k (\Delta_m ds + \Delta'_m ds) + \int M_k (\Delta_m d\varphi + \Delta'_m d\varphi) + k \int Q_k \Delta_m d\gamma \right] = 0 \dots \dots \dots (36)$$

Если предположить, что деформации $\Delta_m ds$, $\Delta_m d\varphi$ и др. являются результатом действия внутренних сил N_n и Q_n и момента M_n , то выражение (36) возможной работы приведет к виду:

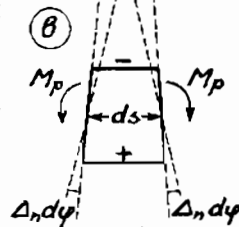
$$\sum S_k \delta_{km} = \int N_k \frac{N_m ds}{E\omega} + \int N_k \frac{M_m ds}{E\omega\rho} + \int M_k \frac{M_m ds}{EJ} + \int M_k \frac{N_m ds}{E\omega\rho} + k \int Q_k \frac{Q_m ds}{G\omega} \dots \dots \dots (37)$$



Черт. 14.



Черт. 15а.



Черт. 15в.

Если деформации $\Delta_m ds$, $\Delta_m d\varphi$ и др. являются результатом одновременного действия температуры, то выражение (36) возможной работы приводится к виду ¹⁾.

$$\sum S_k \delta_{km} = \int N_k \frac{N_m ds}{E\omega} \pm \alpha t \int N_k ds + \\ + \int M_k \frac{M_m ds}{EJ} \pm \alpha \Delta t \int M_k \frac{ds}{h} + k \int Q_k \frac{Q_m ds}{G\omega} \dots \dots \dots (38)$$

Знак в выражении работы, вызываемой действием температуры, проще всего определяется по сопоставлению деформаций от действия температуры и от воображаемой единичной нагрузки.

Если, например, продольная сила N_k , вызываемая единичной нагрузкой, положительна, а действие температуры вызывает удлинение, то работа внутренних сил отрицательна, а потому в правой стороне выражения 38 должен быть знак плюс.

Если, например, единичная нагрузка вызывает изгиб балки книзу ($+M_k$), а действие температуры вызывает изгиб кверху (перегрев верхних волокон), то работа внутренних сил положительна, а потому в правую сторону выраж. 38 войдет знак минус.

В сочлененных системах, в которых внутренние силы характеризуются только продольными усилиями, выражение возможной работы внутренних сил представится в виде суммы интегралов, определяющих работу отдельных стержней или звеньев

$$\sum S_k \delta_{km} = \sum_0^l \int \frac{N_k N_m ds}{E\omega}$$

Но так как в каждом стержне сочлененной системы усилия N_k и N_m — постоянны и обычно площадь сечения ω также постоянна, то это выражение приводится к виду:

$$\sum S_k \delta_{km} = \sum_0^l \frac{N_k N_m}{E\omega} s \dots \dots \dots (39)$$

где s — длина отдельных стержней.

2. Действительная работа. До сих пор мы рассматривали работу как результат перемножения сил или моментов, имеющих место в системе, на любые возможные перемещения соответствующие им. Между тем накопление работы может явиться результатом деформаций, возникающих в системе, первоначально не нагруженной, под действием самих внешних нагрузок к ней приложенных. В этом случае мы будем иметь дело с действительными нагрузками и действительными деформациями им соответствующими, почему будем называть работу, получаемую в результате их взаимодействия, действительной работой в отличие от воображаемой или фиктивной работы, получаемой в результате расчета на основании начала возможных перемещений.

¹⁾ Взят случай системы с прямыми осями, в которой $\rho = \infty$

Будем рассматривать упругую систему, находящуюся в ненагруженном состоянии и предположим, что на нее начнет действовать какая-либо нагрузка S_k , постепенно нарастающая от нуля до конечного значения. Эта нагрузка вызовет одновременно перемещения δ_k точек приложения всех нагрузок и развитие внутренних сил N и Q и моментов M с соответствующими им деформациями $\Delta_k ds$, $\Delta_k d\gamma$, $\Delta_k d\varphi$ и т. д.

При указанном нарастании нагрузок, работа их в любое мгновение будет определяться произведением величины нагрузки S_x , соответствующей этому мгновению, на перемещение $d\delta$, также соответствующее этому мгновению, т. е.

$$dT = S_x d\delta$$

Полная же работа определяется интегралом

$$T = \int_0^{\delta_k} S_x d\delta.$$

Разрешение этого интеграла будет возможно, если будет известна зависимость между нарастанием нагрузки и деформацией; но так как мы во всех выводах «Теории Сооружений» принимаем, что нарастание сил пропорционально нарастанию деформации, то эту зависимость можно выразить в общем виде так:

$$S = \alpha \delta.$$

Тогда полное выражение работы представится в таком виде:

$$T = \int_0^{\delta_k} \alpha \delta d\delta = \frac{\alpha}{2} \delta_k^2 = \frac{1}{2} S_k \delta_k \dots \dots \dots (40)$$

Отсюда следует, что если нагрузка возрастает от нуля до конечного значения (S_k), то работа равна половине произведения из конечного значения нагрузки на конечную величину перемещения δ_k .

То же имеет место и в выражении работы внутренних сил и моментов, которые при выводе упругой системы из ненагруженного состояния всегда нарастают от нуля до конечного значения, равно как и вызываемые ими деформации. В соответствии с чем количество работы, накапливаемой в системе, напишется так:

$$-W = \int \frac{1}{2} N_k (\Delta_k ds + \Delta'_k ds) + \int \frac{1}{2} M_k (\Delta_k d\varphi + \Delta'_k d\varphi) + k \int \frac{1}{2} Q_k \Delta_k d\gamma \dots \dots \dots (41)$$

Так как оба выражения (40 и 41) относятся к одной и той же системе, находящейся в условии упругого равновесия, то сумма их равна нулю, из чего следует, что

$$\frac{1}{2} \sum S_k \delta_{kk} = \frac{1}{2} \left[\int N_k (\Delta_k ds + \Delta'_k ds) + \int M_k (\Delta_k d\varphi + \Delta'_k d\varphi) + k \int Q_k \Delta_k d\lambda \right] \dots \dots \dots (42)$$

Подставляя сюда вместо величины $\Delta_k ds, \Delta_k d\varphi$ и др. их значения, выраженные через внутренние силы (выр. 24), получим:

$$\frac{1}{2} \sum S_k \delta_{kk} = \frac{1}{2} \int \frac{N_k^2}{E\omega} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M_k^2}{EJ} ds + \int \frac{M_k N_k}{E\omega\rho} ds + \frac{k}{2} \int \frac{Q_k^2}{G\omega} ds \quad (43)$$

Из сопоставления выражения 43 и 37 видно, что первое является частным случаем второго.

В сочлененных системах выражение действительной работы внутренних сил будет (срав. выр. 53):

$$-W = \frac{1}{2} \sum_0^l \frac{N_k^2}{E\omega} s \dots \dots \dots (44)$$

Суммируя работу внешних и внутренних сил получим:

$$\frac{1}{2} \sum S_k \delta_{kk} = \frac{1}{2} \sum_0^l \frac{N_k^2}{E\omega} s \dots \dots \dots (45)$$

При условии постепенного нарастания нагрузок и деформаций, вся развивающаяся работа внутренних сил во всякое мгновение имеет величину только достаточную для уравновешивания работы внешних нагрузок и при устранении последних вся полностью идет на восстановление первоначальной формы ненагруженного состояния, из чего следует, что выражения (43 и 45) представляют собой величины потенциальной энергии — V системы, которая противоположна по знаку работе внутренних сил.

$$V = T = -W \dots \dots \dots (46)$$

При действии динамической нагрузки, когда нагрузка прикладывается к системе полной своей величиной, указанная зависимость между нарастанием нагрузки и вызываемой ею деформацией не имеет места, и работа совершаемая ею определяется произведением конечного значения ее S_k на конечную величину деформации δ'_k , т. е.

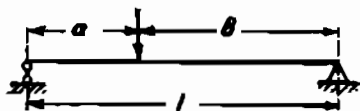
$$T = \sum S_k \delta'_k,$$

при чем конечная деформация δ'_k по своей величине не равна величине деформации δ_k , вызываемой статическим действием нагрузки той же величины.

Внутренние силы и моменты, вызываемые действием внезапной нагрузки, не могут иметь мгновенного нарастания и нарастают постепенно от нуля до конечного значения, поэтому при динамическом действии нагрузки нет уравнивания в любой момент времени между работой внутренних сил и работой внешней нагрузки. Имеющая место в этих случаях избыточная часть работы внешних нагрузок вызывает колебания системы, сопровождающиеся увеличением деформаций: прогибов, углов поворотов и т. д. В случае если динамическое действие нагрузки прекращается, то колебания, вызванные ею, затухают и система приходит в состояние упругого равновесия, такое же, какое она имела бы при систематическом действии нагрузки.

В последующем мы будем рассматривать только работу, вызываемую статическим действием нагрузки.

При выводах общих формул (выр. 37, 43) нами принималось во внимание влияние продольных N и поперечных Q сил. Надо, однако, отметить что обычно работой поперечных сил пренебрегают по незначительности ее в сравнении с количеством работы от изгиба и продольной силы. В силу тех же соображений в расчетах систем с ломаными осями (рамы) очень часто пренебрегают работой от продольных сил. В примерах 1 и 2 сделано сопоставление влияния сил N и Q на общее количество работы в системе.



Черт. 16.

Пример 1. Показать отношение количества потенциальной энергии от момента и поперечной силы в балке, показанной на черт. 16.

Количество потенциальной энергии в изгибаемой балке определяется формулой (43):

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \frac{k}{2} \int_0^l \frac{Q^2}{G\omega} dx.$$

Так как момент и поперечная сила имеют различные выражения для правого и левого участка балки, то потенциальная энергия определяется суммой интегралов, относимых к каждому участку.

При написании выражения переменного момента и поперечной силы в функции абсцисс и пределов интегрирования, можно или сохранять для обоих участков одно начало координат, или для каждого участка выбрать свое начало.

Приравняв начало координат на левой опоре балки, получим выражение потенциальной энергии в таком виде:

$$V = \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^a \left(\frac{P \cdot b}{l} x \right)^2 dx + \int_a^l \left[\frac{Pb}{l} x - P(x-a) \right]^2 dx \right\} + \\ + \frac{k}{2G\omega} \left\{ \int_0^a \left(\frac{P \cdot b}{l} \right)^2 dx + \int_a^l \left(\frac{Pb}{l} - P \right)^2 dx \right\}$$

Приняв начало координат для левого участка на левой опоре балки и для правого участка балки на правой опоре балки, получим выражение потенциальной энергии в таком виде:

$$V = \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^a \left(\frac{Pb}{l} x \right)^2 dx + \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} x \right)^2 dx \right\} + \\ + \frac{k}{2G\omega} \left\{ \int_0^a \left(\frac{Pb}{l} \right)^2 dx + \int_0^b \left(\frac{Pa}{l} \right)^2 dx \right\}$$

Произведя интегрирование того и другого выражения, получим в обоих случаях:

$$V = \frac{1}{6EJ} \frac{P^2 a^3 b^3}{l} + \frac{k}{2G\omega} \frac{P^2 ab}{l}$$

Выбор того или другого способа написания потенциальной энергии делается по соображению об упрощении процесса интегрирования. В рассматриваемом случае, очевидно, второе выражение потенциальной энергии проще для вычисления.

Для выяснения соотношения между количествами потенциальной энергии от момента и поперечной силы предположим, что балка имеет прямоугольное сечение размерами $c \times h$ см² тогда:

$$J = \frac{ch^3}{12}, \quad \omega = c \cdot h \quad k = \frac{6}{5} \quad (\text{примеч. на стр. 16}).$$

Кроме того мы можем принять $G = 0,4E$.

Подставляя эти данные в выражение потенциальной энергии и делая приведение, получим:

$$V = \frac{P^2 ab}{Elch} \left(\frac{a \cdot b \cdot 12}{6 \cdot h^2} + \frac{6}{5 \cdot 2 \cdot 0,4} \right) = \frac{P^2 ab}{2 \cdot Elch} \left(4 \frac{ab}{h^2} + 3 \right).$$

Выразим участки a и b в долях пролета и предположим, что груз P стоит посредине балки, тогда множитель, стоящий в скобках, приведет к виду:

$$4 \frac{1}{4} \frac{l^2}{h^2} + 3 = \frac{l^2}{h^2} + 3.$$

Следовательно, соотношение между количествами потенциальной энергии от момента и поперечной силы будут изменяться в зависимости от соотношения $l^2 : h^2$.

При отношении:

$$\frac{l}{h} = 5 \quad \frac{l^2}{h^2} = 25$$

$$\frac{l}{h} = 7 \quad \frac{l^2}{h^2} = 49$$

$$\frac{l}{h} = 10 \quad \frac{l^2}{h^2} = 100$$

Количество потенциальной энергии от поперечной силы по отношению к таковому же от момента будет:

$$\frac{3}{25} = 12\%$$

$$\frac{3}{49} = 6,1\%$$

$$\frac{3}{100} = 3\%$$

Из чего следует, что соотношение количества потенциальной энергии от поперечной силы и момента вообще невелико и нарастает с уменьшением отношения длины пролета к высоте балки.

Пример 2. Показать отношение количества потенциальной энергии от момента и нормальной силы в арочной системе, показанной на *черт. 17* с нагрузкой силой P , приложенной в среднем шарнире S . Сечение постоянное.

Опорные реакции в обоих шарнирах $= \frac{1}{2} P$.

Горизонтальный распор $H = \frac{P \cdot b}{2(2h + b)}$

$\cos \alpha = \sin \alpha = 1 : \sqrt{2}$ длина $c = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$.

Определяем величину потенциальной энергии, исходя из выражения:

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2}{E\omega} s + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} ds$$

$$V = \frac{1}{2E\omega} \left[2 \cdot \frac{P^2}{4} h + 2 \left(\frac{P}{2} \sin \alpha + \frac{P \cdot b}{2(2h + b)} \cos \alpha \right)^2 c \right] +$$

$$+ \frac{1}{2EJ} \left\{ 2 \int_0^h \frac{P^2 b^2}{4(2h + b)^2} y^2 dy + 2 \int_0^c \left[\frac{P}{2} z \cos \alpha - \frac{P \cdot b}{2(2h + b)} z \sin \alpha \right]^2 dz \right\}$$

Проинтегрировав и подставив вместо $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$ их величины получим:

$$V = \frac{P^2}{4E\omega} \left\{ h + \frac{c(h + b)^2}{(2h + b)^2} \right\} + \frac{P^2}{EJ} \cdot \frac{b^2}{4(2h + b)^2} \left\{ \frac{h^3}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^3}{3 \cdot 2} \cdot \frac{(2h + b)^2}{b^2} - \frac{2(2h + b)}{b} \cdot \frac{c^3}{3 \cdot 2} + \frac{c^3}{3 \cdot 2} \right\}$$

Подставив $c = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$ и сделав приведение, получим:

$$V = \frac{P^2}{4E\omega} \left\{ h + \frac{b \sqrt{2} (h + b)^2}{2(2h + b)^2} \right\} + \frac{P^2 b^2}{4EJ(2h + b)^2} \left\{ \frac{h^3}{3} + \frac{h^2 b \sqrt{2}}{6} \right\}$$

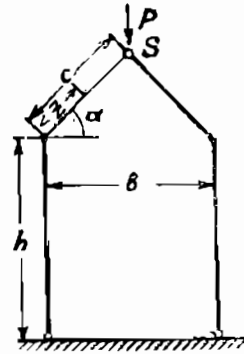
Из полученного выражения видно, что количество потенциальной энергии зависит от соотношения $h : b$ и $J : \omega$.

1) Примем $b = h$, тогда

$$V = \frac{P^2}{4E} \left\{ \frac{1}{\omega} \left(h + \frac{h \sqrt{2} \cdot 4 h^2}{2 \cdot 9 h^2} \right) + \frac{h^2}{J \cdot 3 \cdot 9 h^2} \left(h^3 + \frac{h^3 \sqrt{2}}{2} \right) \right\};$$

отсюда

$$V = \frac{P^2 h}{216 E \omega} \left\{ 3(18 + 4\sqrt{2}) + \frac{h^2}{\rho^2} (2 + \sqrt{2}) \right\}.$$



Черт. 17.

Предположим, что сечение рамы прямоугольника в этом случае $\rho^2 = d^2 : 12$, тогда для определения соотношения количеств $V_1 : V_2$ потенциальной энергии, вызываемой действием продольной силы N и изгибающим моментом M , будем иметь соотношение:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3(18 + 4\sqrt{2})}{\frac{h^2}{d^2} 12(2 + \sqrt{2})} = \frac{70,8}{40,8 \frac{h^2}{d^2}}$$

Если $\frac{h}{d} = 5$, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{70,8}{25 \cdot 40,8} = \approx 0,07$, т.-е. $\approx 7\%$.

Если $\frac{h}{d} = 10$, то $\frac{V_1}{V_2} = \frac{70,8}{100 \cdot 40,8} = 0,017$, т.-е. $1,7\%$.

2) Примем $b = \frac{1}{2} h$, тогда

$$V = \frac{P^2}{4E} \left\{ \frac{1}{\omega} \left(h + \frac{h\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{9h^2 \cdot 4}{25h^2} \right) + \frac{h^2 \cdot 4}{4 \cdot J \cdot 3 \cdot 25h^2} \left(h^3 + \frac{h^3 \sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

отсюда

$$V = \frac{P^2 h}{300 E \omega} \left\{ 3(100 + 9\sqrt{2}) + \frac{h^2}{\rho^2} (4 + \sqrt{2}) \right\}$$

Предположив, как и в первом случае, сечение прямоугольным, получим для определения соотношения количеств потенциальной энергии от действия продольной силы и момента выражение:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{3(100 + 9\sqrt{2})}{\frac{h^2}{d^2} \cdot 12(4 + \sqrt{2})} = \frac{337,8}{64,8 \cdot \frac{h^2}{d^2}}$$

Если $\frac{h}{d} = 5$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{337,8}{25 \cdot 64,8} = 0,208$, т.-е. $20,8\%$.

Если $\frac{h}{d} = 10$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{337,8}{100 \cdot 64,8} = 0,053$, т.-е. $5,3\%$.

Из приведенных сравнительных подсчетов можно сделать заключение, что влияние продольных сил на количество потенциальной энергии вообще невелико и возрастает с уменьшением отношения $b : h$, т.-е. в под'емистых рамах.

Пример 3. Показать, как изменится количество потенциальной энергии в балке, показанной на *черт. 18*, и нагруженной равномерной нагрузкой на половине своей длины, если она подвергается действию силы P , приложенной снизу, как показано на *черт. 18*.

В момент начала действия силы P балка уже испытывает напряжение и в сечениях ее имеют место моменты M_q от нагрузки q . По отношению

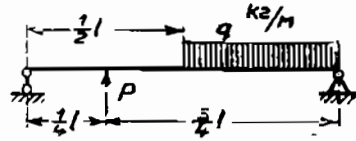
к новым деформациям, возникающим от действия нагрузки P , эти моменты M_q имеют конечную величину, поэтому добавочное количество потенциальной энергии в балке, возникающее от действия силы P , определится выражением:

$$V = - \int_0^l M_q \Delta d \varphi_p + \frac{1}{2} \int_0^l M_p \Delta d \varphi_p$$

или

$$V = - \int_0^l M_q \frac{M_p}{EJ} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_p^2}{EJ} ds$$

в котором $(-M_p)$ момент, вызываемый в сечениях балки нагрузкой P . Влиянием поперечных сил мы пренебрегаем.



Черт. 18.

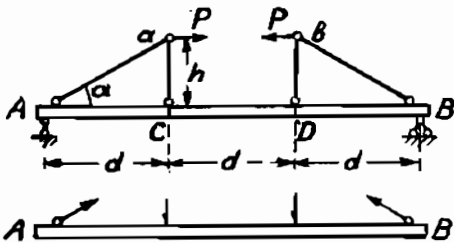
Определяя моменты в функции абсцисс и соответствующих пределов, получим:

$$V = - \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^{\frac{1}{4}l} \frac{ql}{8} \cdot \frac{3P}{4} x^2 dx + \int_{\frac{1}{4}l}^{\frac{1}{2}l} \frac{ql}{8} \left[\frac{3}{4} Px - P \left(x - \frac{l}{4} \right) \right] x dx + \right. \\ \left. + \int_{\frac{1}{2}l}^{\frac{3}{4}l} \left[\frac{3}{8} qlx - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{1}{4} P x dx \right\} + \frac{1}{2EJ} \left\{ \int_0^{\frac{1}{4}l} \left(\frac{3}{4} Px \right)^2 dx + \int_{\frac{1}{4}l}^{\frac{3}{4}l} \left(\frac{1}{4} Px \right)^2 dx \right\}$$

отсюда

$$V = \frac{1}{EJ} \left[- \frac{1}{2048} qPl^4 + \frac{12}{2048} P^2 l^3 \right]$$

Пример 4. Пользуясь условием равенства внешней и внутренней работы, определить изменение расстояния ab в системе, показанной на черт. 19.



Черт. 19.

Рассматриваемая система — комбинированная и состоит из жесткой изгибаемой балки AB и сочлененных частей AaC и BbD , следовательно, работа внутренних сил будет определяться выражением вида:

$$V = \sum \frac{N^2}{2E\omega} s + \int_A^B \frac{M^2}{2EJ} ds.$$

В нижеследующей таблице показана длина s отдельных частей и вычислены величины N и M , возникающие в отдельных частях этой системы под действием силы P .

Наименов. части	Длина <i>м</i>	Прод. усил. <i>кг</i>	Изгиб.
<i>Aa</i> и <i>Bb</i>	$d \cdot \cos \alpha$	$P \cdot \cos \alpha$	—
<i>aC</i> и <i>bD</i>	$h = d \operatorname{tg} \alpha$	$P \cdot \operatorname{tg} \alpha$	—
<i>AC</i> и <i>BD</i>	d	P	$Px \operatorname{tg} \alpha$
<i>CD</i>	d	P	$P \cdot h$

Подставляя эти значения в выражение потенциальной энергии и проинтегрировав, получим:

$$V = \frac{2P^2}{2 \cos^2 \alpha E \omega_1} \cdot \frac{d}{\cos \alpha} + \frac{2P^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot h}{2E \omega_2} + \frac{P^2 \cdot 3d}{2E \omega} + \frac{2P^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{2EJ} \cdot \frac{d^3}{3} + \frac{P^2 h^2}{2EJ} d.$$

Вследствие симметрии системы и нагрузки первый, второй и четвертый члены выражения работы непосредственно удвоены.

Работа внешней силы P , вызываемая перемещениями δ' и δ'' точек a и b , напишется так:

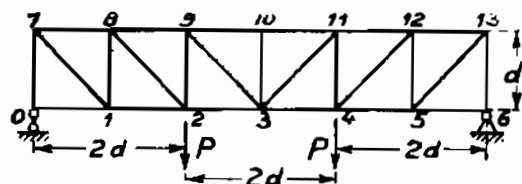
$$T = \frac{1}{2} P \delta' + \frac{1}{2} P \delta'' = \frac{1}{2} P (\delta' + \delta'') = \frac{1}{2} P \Delta ab.$$

Приравняв выражения работ внешней и внутренней получим:

$$\Delta ab = \frac{2P^2 d}{E} \left[\frac{1}{\cos^2 \alpha \cdot \omega_1} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\omega_2} + \frac{3}{2\omega_3} + \frac{5}{6} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{J} d^2 \right],$$

где h заменено равной ему величиной $d \operatorname{tg} \alpha$.

Пример 5. Написать выражение потенциальной энергии для шарнирно-стержневой системы (черт. 20) с симметричным нагружением силами P .



Черт. 20.

В рассматриваемой системе потенциальная энергия определяется выражением (45):

$$V = \frac{1}{2} \sum \frac{N^2}{E \omega} s.$$

Вычисление ее проще всего вести при помощи таблицы, в которую вносятся в порядке номенклатуры: площади сечений ω , и длина s каждого элемента системы, и усилия, N в каждом из них, определяемые по расчету; по этим данным вычисляется количество потенциальной энергии $\frac{N^2}{E \omega} s$ в каждом стержне, которые затем суммируются.

№№ элементов	ω $\text{с}^2\text{м}$	s м	N тн	N^2	$\frac{N^2}{\omega} s$
0 — 1	ω_n	d	0	0	0
1 — 2	ω_n	d	+ P	P^2	$\frac{1}{\omega_n} P^2 d$
2 — 3	ω_n	d	+ 2 P	$4 P^2$	$4 \frac{1}{\omega_n} P^2 d$
7 — 8	ω_s	d	- P	P^2	$\frac{1}{\omega_s} P^2 d$
8 — 9	ω_s	d	- 2 P	$4 P^2$	$4 \frac{1}{\omega_s} P^2 d$
9 — 10	ω_s	d	- 2 P	$4 P^2$	$4 \frac{1}{\omega_s} P^2 d$
7 — 1	ω_p	$d\sqrt{2}$	+ P $\sqrt{2}$	$2 P^2$	$\frac{1}{\omega_p} 2\sqrt{2} P d$
8 — 2	ω_p	$d\sqrt{2}$	+ P $\sqrt{2}$	$2 P^2$	$\frac{1}{\omega_p} 2\sqrt{2} P d$
9 — 8	ω_p	$d\sqrt{2}$	0	0	0
0 — 7	ω_c	$h = d$	- P	P^2	$\frac{1}{\omega_c} P^2 d$
1 — 8	ω_c	$h = d$	- P	P^2	$\frac{1}{\omega_c} P^2 d$
2 — 9	ω_c	$h = d$	0	0	0

Суммируя последний столбец, получим:

$$\sum \frac{N^2}{\omega} s = P^2 d \left(\frac{5}{\omega_n} + \frac{9}{\omega_s} + \frac{4\sqrt{2}}{\omega_p} + \frac{2}{\omega_c} \right).$$

Эта сумма вычислена для половины системы, а потому при вычислении полной энергии она должна быть удвоена. Отмечаем, что в таблицу не введен элемент 3—10, который не имеет симметричного, а потому он должен прибавляться к удвоенной сумме особо; в рассматриваемом случае усилие в нем = 0.

Таким образом, общее количество потенциальной энергии в системе напишется так:

$$V = 2 \frac{1}{2E} P^2 d \left(\frac{5}{\omega_n} + \frac{9}{\omega_s} + \frac{4\sqrt{2}}{\omega_p} + \frac{2}{\omega_c} \right) 100 \text{ м. см.}$$

В это выражение введен множитель 100 для приведения результата к одинаковому измерению в см, так как длины элементов s были введены в таблицу в метрах.

§ 6. Характерные свойства потенциальной энергии. Под потенциальной энергией мы подразумеваем ту часть работы упругих сил, которая

полностью расходуется на восстановление первоначальной формы деформируемой системы. Выведенные условия зависимости между работой внешних и внутренних сил и выражения работы их позволяют представить потенциальную энергию в виде функций от внешних и внутренних сил.

Потенциальная энергия во всякий момент упругой деформации равна работе внешних сил, а потому согласно выражения (46)

$$V = T = \frac{1}{2} \sum S_k \delta_k \dots \dots \dots (47)$$

Так как по условию (5) работа внешних сил равна и противоположна по знаку работе внутренних сил, то потенциальная энергия будет равна работе внутренних сил по величине, но противоположна по знаку; (см. выр. 46)

$$V = -W = \frac{1}{2} \int \frac{N_k^2}{E\omega} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M_k^2}{EJ} ds + \int \frac{M_k N_k}{E\omega\rho} ds + \frac{k}{2} \int \frac{Q_k^2}{G\omega} ds (48)$$

Отметим некоторые характерные свойства упругой энергии.

1. Потенциальная энергия выражается однородной функцией второй степени от перемещений или внешних сил. Это положение непосредственно вытекает из выражения (47).

На основании закона Гука всякое перемещение в пределах упругих деформаций является линейной функцией от вызывающей его силы или момента и может быть представлено в виде члена $a_k S_k$. Всякое же конечное перемещение δ_1 , по закону независимости действия сил, может быть рассматриваемо как сумма перемещений, вызываемых действием отдельных нагрузок S ; на основании этого мы можем написать:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= a_{11} S_1 + a_{12} S_2 + \dots \dots \dots + a_{1m} S_m \\ \delta_2 &= a_{21} S_1 + a_{22} S_2 + \dots \dots \dots + a_{2m} S_m \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_m &= a_{m1} S_1 + a_{m2} S_2 + \dots \dots \dots + a_{mm} S_m \end{aligned} \quad (49)$$

На основании тех же соображений, каждая внешняя сила или момент могут рассматриваться как некоторая функция от перемещения, т.-е. $A_k \delta_k$ и мы можем каждую из нагрузок S выразить как линейную функцию от перемещений в таком виде:

$$\begin{aligned} S_1 &= A_{11} \delta_1 + A_{12} \delta_2 + \dots \dots \dots + A_{1m} \delta_m \\ S_2 &= A_{21} \delta_1 + A_{22} \delta_2 + \dots \dots \dots + A_{2m} \delta_m \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_m &= A_{m1} \delta_1 + A_{m2} \delta_2 + \dots \dots \dots + A_{mm} \delta_m \end{aligned} \quad (50)$$

Пользуясь этими выражениями, мы можем равенство (47) представить или в функции только перемещений, подставив в него выражения (50), или в функции только нагрузок S , подставив в него выражения (49).

В первом случае мы будем иметь:

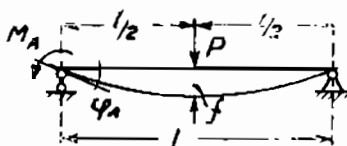
$$2V = A_{11} \delta_1^2 + A_{12} \delta_1 \delta_2 + \dots + A_{21} \delta_2 \delta_1 + A_{22} \delta_2^2 + \dots + A_{m1} \delta_1 \delta_m + A_{m2} \delta_2 \delta_m + \dots + A_{mm} \delta_m^2 \dots \quad (51)$$

чем подтверждается положение о том, что потенциальная энергия является однородной функцией второй степени от перемещений.

Во втором случае мы будем иметь:

$$2V = a_{11} S_1^2 + a_{12} S_1 S_2 + \dots + a_{21} S_2 S_1 + a_{22} S_2^2 + \dots + a_{m1} S_m S_1 + \dots + a_{mm} S_m^2 \dots \quad (52)$$

чем подтверждается положение о том, что потенциальная энергия является однородной функцией второй степени от нагрузки (внешних сил).



Черт. 21.

Для пояснения примера рассмотрим балку, лежащую на 2-х опорах и нагруженную грузом P посредине и моментом M_A на левой опоре (черт. 21).

Действие этих нагрузок согласно данным курсов сопротивления материалов вызовут:

$$\left. \begin{aligned} \text{прогиб посредине } f &= \frac{Pl^3}{48 EJ} - \frac{M_A l^2}{16 EJ} \text{ в общем виде } f = a_{11} P - a_{12} M_A \\ \text{угол поворота } \varphi_A &= -\frac{Pl^2}{16 EJ} + \frac{M_A l}{3 EJ} \quad \gg \quad \varphi_A = -a_{21} P + a_{22} M_A \end{aligned} \right\} (53)$$

Согласно выражения 40 потенциальная энергия для этого случая напишется так:

$$V = \frac{1}{2} Pf + \frac{1}{2} M_A \varphi_A = \frac{1}{2} P^2 a_{11} - \frac{1}{2} P M_A a_{12} - \frac{1}{2} M_A P a_{21} + \frac{1}{2} M_A^2 a_{22}$$

после подстановки величин a_{11} , $a_{12} = a_{21}$ и a_{22} и приведения получим:

$$V = \frac{l}{96 EJ} \left[P^2 l^3 - 6 l P M_A + 16 M_A^2 \right] \quad (54)$$

Пользуясь значениями f и φ_A можно выразить величины P и M_A в функции этих перемещений:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_{22} f + a_{12} \varphi_A}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{48 EJ (16 f + 3 \varphi_A l)}{7 l^3} \\ M_A &= \frac{a_{21} f + a_{11} \varphi_A}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} = \frac{48 EJ (3 f + l \varphi_A)}{7 l^2} \end{aligned} \quad (55)$$

Подставив эти величины M_A и P в уравнение 47 получим:

$$W = \frac{1}{2} P f + \frac{1}{2} M_A \varphi_A = \frac{1}{2} \frac{48 EJ}{7 l^3} (16 f + 3 \varphi_A l) f + \frac{1}{2} \frac{48 EJ}{7 l^2} (3 f + l \varphi_A) \varphi_A$$

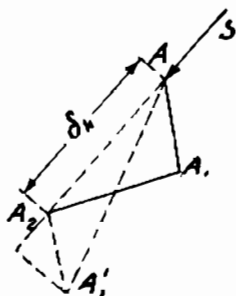
и после приведения:

$$V = \frac{24 EJ}{7 l^8} \left[16 f^2 + 6 l f \varphi_A + l^2 \varphi_A^2 \right] \dots \dots \dots (56)$$

2. Потенциальная энергия всегда положительна. Это вытекает непосредственно из самого понятия. Действительно потенциальная энергия — это та часть работы упругих сил, которая восстанавливает первоначальную форму системы. Следовательно, если последовало упругое изменение формы системы, то в ней появилось накопление некоторого положительного количества энергии потребной на восстановление первоначальной формы.

Внешние нагрузки могут быть различных знаков, так например, система может находиться под действием положительного или отрицательного момента, что может вызвать положительную (выгиб вниз) или отрицательную (выгиб кверху) деформацию, но накапливающаяся при этом потенциальная энергия в обоих случаях будет положительной и израсходуется на восстановление первоначальной формы.

В выражение потенциальной энергии могут входить отрицательные члены (см. пример 2), но они не вызывают превращение ее в отрицательную величину, а только показывают уменьшение того количества ее, которое имелось в системе до начала воздействия на нее новой нагрузки.



Черт. 22.

3. Количество потенциальной энергии зависит только от конечной величины деформации и не зависит от того в каком порядке нарастала эта деформация.

Действительно, количество потенциальной энергии, накапливающейся в системе, измеряется произведением конечной величины нагрузки на конечную величину деформации и совершенно безразлично каким путем придет точка A (черт. 22) приложения нагрузки в конечную точку A_2 : непосредственно или через промежуточное положение A_1 или A_1' : проекция δ_k конечной деформации AA_2 на направление нагрузки S от этого не изменится.

Поясним это на частном примере, для чего определим нарастание потенциальной энергии в балке под действием нагрузки $q_u - P$ (см. черт. 18) в предположении разной последовательности действия этой нагрузки. Пусть M_q и $-M_p$ будут моменты, вызываемые действием этой нагрузки в сечениях балки.

Предположим, что балка находилась сначала под действием только нагрузки q , а потом подверглась действию нагрузки $(-P)$. Тогда общее количество потенциальной энергии, накопившейся в ней, определится слагаемыми (ср. пример 2):

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{M_q^2}{EJ} ds + \left[\frac{1}{2} \int \frac{M_p^2}{EJ} ds - \int \frac{M_q M_p}{EJ} ds \right].$$

Теперь предположим, что обе нагрузки действуют одновременно; соответственно этому полное количество потенциальной энергии в системе будет:

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{(M_q - M_p)^2}{EJ} ds = \frac{1}{2} \int \frac{M_q^2}{EJ} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M_p^2}{EJ} ds - \int \frac{M_q M_p}{EJ} ds.$$

Это количество энергии в точности равно полученному при первом предположении.

Аналогично можно показать, что как бы ни был изменен порядок действия нагрузки, конечное количество потенциальной энергии, накапливающейся в системе, будет оставаться одно и то же.

§ 7. Зависимость между внешними силами и потенциальной энергией. Предположим, что нагруженной и, следовательно, деформированной упругой системе дано некоторое бесконечно малое возможное перемещение, вследствие чего все уже имеющиеся перемещения: $\delta_1, \delta_2 \dots$ получат дополнительные перемещения $d\delta_1, d\delta_2 \dots d\delta_m$.

тогда упругая энергия получит приращение

$$dV = S_1 d\delta_1 + S_2 d\delta_2 + \dots + S_m d\delta_m \dots (57)$$

Но так как энергия V есть линейная функция перемещений $\delta_1, \delta_2 \dots$, то по правилам дифференцирования будем иметь:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial \delta_1} d\delta_1 + \frac{\partial V}{\partial \delta_2} d\delta_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial \delta_m} d\delta_m \dots (58)$$

Вычитая это равенство из предыдущего, получим:

$$\left(S_1 - \frac{\partial V}{\partial \delta_1} \right) d\delta_1 + \left(S_2 - \frac{\partial V}{\partial \delta_2} \right) d\delta_2 + \dots + \left(S_m - \frac{\partial V}{\partial \delta_m} \right) d\delta_m = 0.$$

Так как сообщенные системе перемещения $d\delta_1, d\delta_2 \dots$ могут быть взяты произвольными и не равны нулю, то следовательно, последнее равенство возможно только при условии, что

$$\begin{array}{l} S_1 - \frac{\partial V}{\partial \delta_1} = 0 \\ S_2 - \frac{\partial V}{\partial \delta_2} = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} S_1 = \frac{\partial V}{\partial \delta_1} \\ S_2 = \frac{\partial V}{\partial \delta_2} \\ \dots \dots \dots \end{array} \dots (59)$$

Из чего следует, что внешние силы и моменты, действующие на систему, суть частные производные от упругой энергии по соответственным перемещениям.

Применим это положение к частному случаю, для чего воспользуемся данными примера предыдущего параграфа и рассмотрим балку свободно лежащую на 2-х опорах и нагруженную силой P и моментом M_A .

Потенциальная энергия, выраженная в функции перемещений f и φ_A (см. форм. 56)

$$V = \frac{24 EJ}{7 l^3} [16 f^2 + 6 l f \varphi_A + l^2 \varphi_A^2]$$

Производная из нее по перемещению f

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{24 EJ}{7 l^3} (32 f + 6 l \varphi_A) = P$$

Производная по перемещению φ_A

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_A} = \frac{24 EJ}{7 l^3} (6 l f + 2 l^2 \varphi_A) = M_A,$$

что вполне соответствует величинам P и M_A , выраженным в функции перемещений f и φ_A (сравни форм. 55)

Пользуясь полученной зависимостью, что внешние силы и моменты (нагрузка) определяются как частные производные из выражения потенциальной энергии по соответствующим перемещениям, и учитывая то, что всякая нагрузка есть линейная функция от перемещений (см. выраж. 50), мы должны прийти к выводу, что потенциальная энергия является однородной функцией второй степени от перемещений.

Действительно, то обстоятельство, что производная из потенциальной энергии является функцией первого порядка от перемещений.

$$\frac{\partial V}{\partial \delta_1} = S_1 = A_{11} \delta_1 + A_{12} \delta_2 + \dots + A_{1m} \delta_m,$$

показывает, что потенциальная энергия должна быть функцией второго порядка относительно перемещений. При этом она должна быть однородной, так как если бы в нее входили члены первого порядка, то в ее производную вошли бы постоянные члены, независимые от изменения формы, чего нет.

Таким образом, мы пришли к выводу уже указанному нами в предыдущем параграфе.

§ 8. Зависимость между перемещениями и потенциальной энергией (теорема Кастильяно). Аналогично выводу предыдущего параграфа можно показать, что всякое перемещение определяется частной производной из выражения перемещения по соответствующей ей нагрузке.

Для доказательства рассмотрим систему, находящуюся под действием нагрузок S_1, S_2, \dots, S_m с соответствующими им перемещениями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$.

Предположим теперь, что какая-либо из нагрузок S_k получила приращение ΔS_k . Так как все перемещения являются линейными функ-

ниями от нагрузок (см. выраж. 49), то в связи с приращением нагрузки S_k перемещения δ получат приращения:

$$\Delta\delta_1 = \frac{\partial\delta_1}{\partial S_k} \Delta S_k, \quad \Delta\delta_2 = \frac{\partial\delta_2}{\partial S_k} \Delta S_k \dots (60)$$

При этих приращениях перемещений нагрузки, приложенные к системе, совершат добавочную работу, которая выразится величиной:

$$\Delta T = S_1 \Delta\delta_1 + S_2 \Delta\delta_2 + \dots (S_k + \frac{1}{2} \Delta S_k) \Delta\delta_k + \dots (61)$$

Это приращение работы внешних нагрузок, как известно, равно приращению потенциальной энергии, а потому, пренебрегая величиной $\Delta S_k \Delta\delta_k$, как малой величиной высшего порядка, мы можем написать:

$$\Delta V = S_1 \frac{\partial\delta_1}{\partial S_k} \Delta S_k + S_2 \frac{\partial\delta_2}{\partial S_k} \Delta S_k + \dots + S_k \frac{\partial\delta_k}{\partial S_k} \Delta S_k + \dots$$

откуда в пределе

$$\frac{\partial V}{\partial S_k} = S_1 \frac{\partial\delta_1}{\partial S_k} + S_2 \frac{\partial\delta_2}{\partial S_k} + \dots + S_k \frac{\partial\delta_k}{\partial S_k} + \dots (62)$$

То же приращение потенциальной энергии мы можем получить, исходя из общего выражения ее (47):

$$V = \frac{1}{2} S_1 \delta_1 + \frac{1}{2} S_2 \delta_2 + \dots + \frac{1}{2} S_k \delta_k.$$

Беря производную по S_k получим:

$$2 \frac{\partial V}{\partial S_k} = S_1 \frac{\partial\delta_1}{\partial S_k} + S_2 \frac{\partial\delta_2}{\partial S_k} + \dots + \delta_k + S_k \frac{\partial\delta_k}{\partial S_k} \dots (63)$$

Сопоставляя выражения (62) и (63) найдем, что

$$\frac{\partial V}{\partial S_k} = \delta_k \dots (64)$$

что и требовалось доказать.

Применим сделанный вывод к частному примеру, разобранным в § 6.

По данным этого примера потенциальная энергия для 2-хопорной балки, нагруженной посредине грузом P и на опоре моментом M_A , выраженная в функции их, напишется так (см. форм. 54):

$$V = \frac{l}{96EJ} \left[P^2 l^3 - 6l P M_A + 16 M_A^2 \right].$$

Производная из этих выражений по P

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{l}{96EJ} \left[2Pl^3 - 6M_A l \right] = f,$$

что в точности соответствует величине прогиба, вызываемого действием силы P и момента M_A (см. выраж. 53).

То же имеет место и относительно угла поворота φ_A .

$$\frac{\partial V}{\partial M_A} = \frac{l}{96EJ} \left[-6l \cdot P + 32M_A \right] = \varphi_A'$$

Выведенное условие $\frac{dV}{dS_k} = \delta_k$ известно под названием теоремы

Кастильяно и употребляется для определения перемещений.

Не останавливаясь здесь на изучении применения этой теоремы к расчетам, о чем будем говорить ниже, покажем, какой вид будет иметь равенство (64), когда потенциальная энергия будет выражена через работу внутренних сил.

Общий вид потенциальной энергии, выраженной через работу внутренних сил:

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{E\omega} ds + \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EJ} ds + \frac{k}{2} \int \frac{Q^2}{G\omega} ds.$$

Частная производная из этого выражения по нагрузке S_k , определяющая перемещение δ_k по направлению этой нагрузки, напишется так:

$$\delta_k = \frac{\partial V}{\partial S_k} = \int \frac{N}{E\omega} \frac{\partial N}{\partial S_k} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial S_k} ds + k \int \frac{Q}{G\omega} \frac{\partial Q}{\partial S_k} ds \dots (65)$$

§ 9. Теорема о взаимности работ (Бетти). При составлении выражения возможной работы мы исходим из предположения, что упругая система, находящаяся под действием нагрузок S_k , получает новые деформации δ_{km} , вызываемые воздействием на нее новых нагрузок S_m ; при этом предположении возможная работа определялась выражением:

$$\sum S_k \delta_{km} = \int N_k \frac{N_m}{E\omega} ds + \int M_k \frac{M_m}{EJ} ds + k \int Q_k \frac{Q_m}{G\omega} ds \dots (66)$$

в котором N_k , Q_k и M_k — внутренние силы, вызываемые в системе действием первой нагрузки и N_m , Q_m , M_m , — внутренние силы, вызываемые действием второй нагрузки.

Правая сторона выражения (66) не изменит своей величины, если мы переставим в ней множители

$$\int N_m \frac{N_k}{E\omega} ds + \int M_m \frac{M_k}{EJ} ds + k \int Q_m \frac{Q_k}{G\omega} ds,$$

но такая перестановка множителей изменяет смысл левой стороны, а именно по смыслу перестановки нагрузки S_m , вызывающие внутренние силы N_m , Q_m и M_m , становится начальной нагрузкой на систему, и нагрузки S_k — последующей нагрузкой. Таким образом, если мы обозначим перемещения, вызываемые действием нагрузки S_k по направлению нагрузок S_m , через δ_{mk} , то по смыслу перестановки будем иметь:

$$\sum S_m \delta_{mk} = \int N_m \frac{N_k}{E\omega} ds + \int M_m \frac{M_k}{EJ} ds + k \int Q_m \frac{Q_k}{G\omega} ds \dots (67)$$

Из сопоставления выражений (66) и (67) вытекает, что

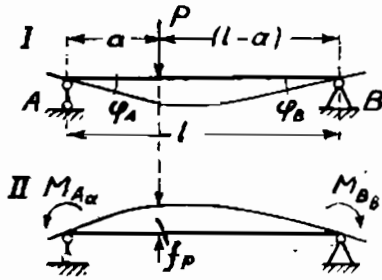
$$\sum S_k \delta_{km} = \sum S_m \delta_{mk} \dots \dots \dots (68)$$

в этом и заключается теорема о взаимности работ.

Если мы условимся рассматривать два случая последовательного нагружения системы нагрузками 1 и 2 состояния (S_k и S_m), вызывающими перемещения δ_{km} и δ_{mk} , то выведенная нами зависимость (выр. 68) формулируется так: возможная работа нагрузок первого состояния на соответствующих им перемещениях, вызываемых силами второго состояния, равна возможной работе нагрузок второго состояния на соответствующих им перемещениях, вызываемых силами первого состояния.

Эта теорема, известная под названием теоремы Бетти, имеет широкое применение при расчете статически неопределимых систем, облегчая и обобщая составление дополнительных уравнений.

Поясним смысл этой теоремы на простом примере, для чего рассмотрим простую двухопорную балку (черт. 23) в предположении нагружения ее в 1 состоянии силой P и во 2 состоянии моментами M_A и M_B .



Черт. 23.

Из курсов сопротивления материалов известно, что углы поворотов сечений на опорах, вызываемые действием нагрузки P , будут:

$$\varphi_{AP} = - \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6lEJ} \quad \varphi_{BP} = \frac{Pa(l^2-a^2)}{6lEJ}$$

Из тех же курсов известно, что прогиб на расстоянии a от левой опоры, вызываемый действием моментов M_A и M_B , приложенных в опорных сечениях, будет:

$$f_p = (f_{pA} + f_{pB}) = - \frac{a(l-a)}{6lEJ} [M_A(2l-a) + M_B(l+a)].$$

Пользуясь этими данными, составляем выражения возможных работ в двух предположениях:

$$\begin{aligned} \sum S_k \delta_{km} &= -P(f_{pA} + f_{pB}) = -P \frac{a(l-a)}{6lEJ} [M_A(2l-a) + M_B(l+a)] \\ \sum S_m \delta_{mk} &= -M_A \varphi_{AP} - M_B \varphi_{BP} = -M_A \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6lEJ} - \\ &\quad - M_B \frac{Pa(l^2-a^2)}{6lEJ}. \end{aligned}$$

Как и надо было ожидать, правые стороны этих выражений равны между собой.

§ 10. Теорема о взаимности перемещений (Максвелла). Эта теорема может быть рассматриваема, как следствие из теоремы о взаимности работ. Действительно, по теореме о взаимности работ мы имеем, что (см. форм. 68)

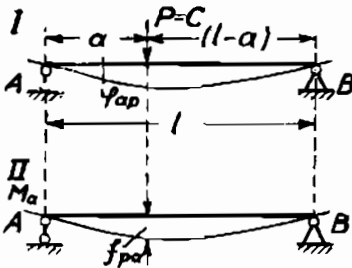
$$\sum S_k \delta_{km} = \sum S_m \delta_{mk}$$

Но теорема не теряет своего смысла, если вместо ряда нагрузок S_k в первом состоянии и ряда нагрузок S_m во втором состоянии мы будем иметь только по одной нагрузке, из чего следует, что

$$S_k \delta_{km} = S_m \delta_{mk} \dots \dots \dots (69)$$

Предположим теперь, что нагрузки S_k и S_m независимо от своих измерений количественно равны; тогда сокращая обе части равенства на один и тот же множитель, получим:

$$\delta_{km} = \delta_{mk} \dots \dots \dots (70)$$



Черт. 24.

из чего следует, что независимо от своих измерений эти перемещения количественно равны. В этом и заключается теорема о взаимности перемещений, которая формулируется так: если нагрузка первого состояния количественно равна нагрузке второго состояния, то перемещение, вызываемое второй нагрузкой по направлению первой, количественно равно перемещению, вызываемому первой нагрузкой по направлению второй.

Оба вида загрузения количественно равны.

Поясним смысл этой теоремы на простом примере, для чего рассмотрим балку, лежащую на 2 опорах (черт. 24) и загружаемую при 1 состоянии грузом $P=C$ кг, приложенным на расстоянии a от левой опоры и при 2 состоянии моментом $M_A = C$ кг м, приложенном на левой опоре.

Из курсов сопротивления материалов известно, что угол φ_{AP} поворота опорного сечения, вызываемого действием груза P :

$$\varphi_{AP} = - \frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6lEJ} = - \frac{Ca(l-a)(2l-a)}{6lEJ}$$

Из тех же курсов известно, что прогиб f_{PA} в точке на расстоянии a от левой опоры от действия момента M_A , приложенного на опоре:

$$f_{PA} = - \frac{M_A a(l-a)(2l-a)}{6lEJ} = - \frac{Ca(l-a)(2l-a)}{6lEJ}$$

Из сопоставления выражений φ_{AP} и f_{PA} видно, что правые стороны их количественно равны, а потому

$$\varphi_{AP} = f_{PA},$$

но измерения их различны.

Эта теорема значительно облегчает работу по определению деформаций и расчету статически неопределимых систем, так как из нее непосредственно видно, что перемещения со сходственными значениями равны количественно, а потому нет надобности их пересчитывать. Кроме того, она позволяет заменять сложное иногда вычисление перемещения δ_{km} простым вычислением перемещения δ_{mk} , что иногда значительно облегчает работу (см. пример 12^а).

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

§ 11. **Общий вид выражения перемещения.** В случае действия на систему одной какой-либо нагрузки S_k выведенная выше зависимость (см. форм. 37) между возможными работами внешних сил (нагрузок) и внутренних сил напишется так ¹⁾:

$$S_k \delta_{km} = \int N_k \frac{N_m}{E\omega} ds + \int M_k \frac{M_m}{EJ} ds + k \int Q_k \frac{Q_m}{G\omega} ds.$$

Мы можем предположить, что эта одиночная нагрузка S_k по величине равна единице; тогда это равенство примет вид:

$$\delta_{km} = \int \bar{N}_k \frac{N_m}{E\omega} ds + \int \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds + k \int \bar{Q}_k \frac{Q_m}{G\omega} ds \dots (71).$$

Входящие в правую часть этого равенства члены легко могут быть определены расчетом, так как в них входят: величины внутренних усилий N_m , Q_m и M_m , вызываемых в частях системы действительной нагрузкой (S_m), величины внутренних усилий \bar{N}_k , \bar{Q}_k и \bar{M}_k , вызываемых в частях системы воображаемой единичной нагрузкой ($S_k = 1$) и величины ω и J — площадь и момент инерции сечений в частях системы.

Таким образом, равенство (71) служит для непосредственного определения перемещения в точке или сечении системы, вызываемого действием заданной нагрузки. Формула эта известна под названием формулы Максвелла-Мора.

Формула (71) может быть представлена в таком виде:

$$\delta_{km} = \int \bar{N}_k \Delta_m ds + \int \bar{M}_k \Delta_m d\varphi + k \int \bar{Q}_k \Delta_m d\gamma \dots (72).$$

Этот вид формулы является более общим, так как под величинами Δds , $\Delta d\varphi$, $\Delta d\gamma$ мы можем подразумевать деформации, вызываемые действием любых причин, и тогда этой формулой будет определяться перемещение вызываемое любой причиной. Например, при определении перемещения от влияния температуры мы будем иметь:

$$\delta_{kt} = \int \bar{N}_k \Delta ds_t + \int \bar{M}_k \Delta d\varphi_t \dots (73)$$

¹⁾ Влияние кривизны не введено.

или (сравни форм. 30)

$$\delta_{kt} = at \int \bar{N}_k ds + a\Delta t \int \bar{M}_k ds \dots \dots \dots (74).$$

В последующем нам часто придется иметь дело с определением перемещений от нагрузки грузом = 1. Для того, чтобы отличить этот вид перемещений от действительных, условимся их писать так:

$$\bar{\delta}_{km} = \int \bar{N}_k \frac{\bar{N}_m}{E\omega} ds + \int \bar{M}_k \frac{\bar{M}_m}{EJ} ds + k \int \bar{Q}_k \frac{\bar{Q}_m}{G\omega} ds \dots \dots \dots (75)$$

где \bar{N}_k , \bar{Q}_k и \bar{M}_k — внутренние силы от воображаемой единичной нагрузки, прикладываемой по направлению определяемого перемещения, а \bar{N}_m , \bar{Q}_m и \bar{M}_m — внутренние [силы от единичной нагрузки, действием которой вызывается перемещение.

В частном случае, когда будет определяться перемещение в точке приложения и по направлению единичной нагрузки, то формула (75) будет иметь вид:

$$\bar{\delta}_{kk} = \int \frac{\bar{N}_k^2}{E\omega} ds + \int \frac{\bar{M}_k^2}{EJ} ds + k \int \frac{\bar{Q}_k^2}{G\omega} ds \dots \dots \dots (76).$$

Если будет определяться перемещение в сочлененной системе, то формула (71) преобразуется в такую:

$$\delta_{km} = \sum \bar{N}_k \Delta ds_m = \sum \bar{N}_k \frac{N_m}{E\omega} ds \dots \dots \dots (77)$$

(сравни форм. 39).

Таким образом, вопрос об определении перемещений связан с введением в систему фиктивной единичной нагрузки. Рассмотрим несколько характерных частных случаев введения такой нагрузки.

1) Если определяется линейное перемещение какой-либо точки системы, сплошной или сочлененной, то по направлению искомого перемещения прикладывается сила = 1 (*черт. 25*). Силе может быть дано направление в ту или другую сторону по линии перемещения, но надо помнить, что если при окончании расчета знак перемещения будет отрицательный, то это будет означать, что действительное перемещение направлено в сторону, противоположную принятому направлению силы = 1.

2) Если будет определяться изменение расстояния между двумя точками a и b системы, то в целях упрощения расчета следует прикладывать одновременно к этим двум точкам две взаимнопротивоположные силы = 1 (*черт. 26*). Каждая из них определяет перемещение точки, к которой она приложена; сложением же этих двух перемещений определяется искомое изменение расстояния $a - b$.

Перемещение по направлению силы = 1, приложенной в точке a , напишется так:

$$\delta_{am} = \int \bar{N}_a \Delta ds_m + \int \bar{M}_a \Delta d\varphi_m + k \int \bar{Q}_a \Delta d\gamma_m$$

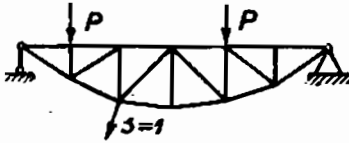
Перемещение по направлению силы $= 1$, приложенной в точке b , напишется так:

$$\delta_{bm} = \int \bar{N}_b \Delta ds_m + \int \bar{M}_b \Delta d\varphi_m + k \int \bar{Q}_b \Delta d\gamma_m$$

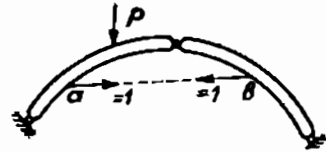
Суммируя их, получим полное перемещение:

$$\delta_{abm} = (\delta_{am} + \delta_{bm}) = \int (\bar{N}_a + \bar{N}_b) \Delta ds_m + \int (\bar{M}_a + \bar{M}_b) \Delta d\varphi_m + k \int (\bar{Q}_a + \bar{Q}_b) \Delta d\gamma_m$$

Из последнего выражения видно, что суммарное перемещение может быть вычислено по сумме внутренних усилий и моментов, вызываемых одновременным действием единичных сил, приложенных в точках a и b .



Черт. 25.

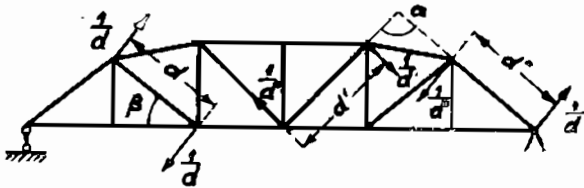


Черт. 26.

Введение же в расчет сразу двух единичных сил значительно сокращает подсчеты, что видно из того, что при таком нагружении опорные реакции от единичной нагрузки равны нулю, следовательно, в выражение перемещения будут входить внутренние усилия только тех частей системы, которые лежат между точками a и b .

Принято давать этим двум единичным силам направление, растягивающее расстояние; отрицательный знак, получаемый в результате подсчетов, показывает, что расстояние укорачивается.

3) Если определяется угол поворота какого-либо сечения в сплошных системах, относительно какой-либо неподвижной прямой (чаще вертикальной или горизонтальной), то в рассматриваемом сечении прикладывается момент $= 1$.



Черт. 27.

В системах, сочлененных при определении угла поворота какого-либо стержня относительно какой-либо неподвижной прямой вместо момента $= 1$, вводится пара с моментом $= 1$.

(черт. 27, угол β). Введение пары обосновывается тем, что в стержневой системе нагрузка должна передаваться в узлы, а потому, если определяется угол поворота какого-либо стержня cd , то по концам его прикладываются силы p , образующие пару; величина этих сил определяется из условия:

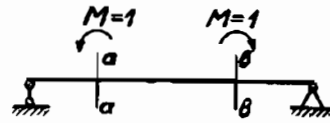
$$pd = 1, \text{ откуда } p = \frac{1}{d}$$

где d — длина стержня, угол поворота которого определяется.

Выбор направления момента или пары безразличен, но надо помнить, что получаемый после расчетов отрицательный знак свидетельствует о том, что действительный поворот сечения или стержня направлен в сторону, противоположную принятому направлению момента или пары.

4) Если определяется изменение угла между двумя сечениями в сплошных системах или угла между двумя стержнями, то к этим сечениям прикладывается два равных взаимнопротивоположных момента $= 1$ (черт. 28); к стержням же прикладываются две равные взаимнопротивоположные пары с силами (черт. 27, угол α):

$$p' = \frac{1}{d'} \text{ и } p'' = \frac{1}{d''}$$

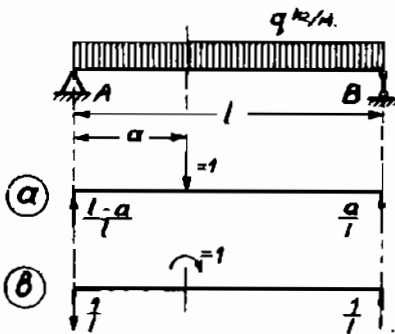


Черт. 28.

Такая двойная единичная нагрузка упрощает общий расчет по тем же соображениям, какие были указаны для случая определения изменения расстояния между двумя точками.

Принято давать моментам и парам такое направление, чтобы они своим действием вызывали приращение угла между рассматриваемыми сечениями или стержнями; знак минус, получаемый при окончательном расчете, покажет, что рассматриваемый угол убавляется.

Пример 6. Определить прогиб и поворот сечения балки, лежащей на 2-х опорах и нагруженной сплошной нагрузкой (черт. 29).



Черт. 29.

Для определения перемещений обоих видов пользуемся формулой (71), не принимая в учет влияния поперечной силы.

Моменты в любых сечениях балки от действительной, в рассматриваемом случае, равномерно распределенной нагрузки определяются формулой:

$$M = \frac{1}{2} qx(l-x).$$

Для определения прогиба в точке на расстоянии a от левой опоры прикладываем в этой точке воображаемый груз $= 1$ (черт. 29-а); моменты, вызываемые действием этого груза в сечениях балки, будут определяться величинами:

в левой части балки
$$\bar{M} = \frac{1 \cdot (l-a)}{l} x,$$

в правой части балки
$$\bar{M} = \frac{1}{l} a x.$$

Таким образом, выражение прогиба напишется в таком виде:

$$\delta_{aq} = \frac{1}{EJ} \left[\int_0^a \frac{1}{2} qx(l-x) \frac{l-a}{l} x dx + \int_0^{l-a} \frac{1}{2} qx(l-x) \frac{a}{l} x dx \right]$$

Проинтегрировав получим:

$$\delta_{aq} = \frac{q}{2IEJ} \left[(l-a) \left(\frac{1}{3} la^3 - \frac{1}{4} a^4 \right) + al \frac{(l-a)^3}{3} - a \frac{(l-a)^4}{4} \right]$$

откуда после приведения

$$\delta_{aq} = \frac{q(l-a)a}{24EJ} (l^3 + al - a^2)$$

при $a = (l-a) = 0,5l$ $\delta_{aq} = \frac{5}{384} ql^4$.

Для определения угла поворота сечения, прикладываем в сечении воображаемый момент $M=1$ и даем ему направление по часовой стрелке (черт. 29b).

Вызываемые действием этого фиктивного момента, моменты в сечениях балки определяются величинами:

для левой части балки $\bar{M} = -\frac{1}{l} x,$

для правой части балки $\bar{M} = +\frac{1}{l} x$

$$\delta_{aq} = \varphi_{aq} = \frac{1}{EJ} \left[-\int_0^a \frac{1}{2} qx(l-x) \frac{x}{l} dx + \int_0^{(l-a)} \frac{1}{2} qx(l-x) \frac{x}{l} dx \right]$$

Проинтегрировав получим:

$$\varphi_{aq} = \frac{q}{2IEJ} \left[-\frac{l}{3} a^3 + \frac{1}{4} a^4 + \frac{l}{3} (l-a)^3 - \frac{1}{4} (l-a)^4 \right]$$

отсюда после приведения

$$\varphi_{aq} = \frac{q}{24EJ} [l^3 - 6l^2a + 4a^3]$$

при $a=0$ сечение по левой опоре $\varphi_{Aq} = +\frac{ql^3}{24EJ}$,

при $a = \frac{l}{2}$ сечение по середине опоры $\varphi_{\frac{l}{2}q} = 0,$

при $a=l$ сечение на правой опоре $\varphi_{Bq} = -\frac{ql^3}{24EJ}$.

В последнем случае знак (—) показывает, что на левой опоре поворот сечения происходит не по ходу часовой стрелки, как было принято направлением $M=1$, а против хода.

Пример 7. 1) Определить изменение расстояния между точками a и b рамы, показанной на черт. 30, вызванное неравномерным нагревом ее разной температурой внутри и снаружи рамы, как показано на том же

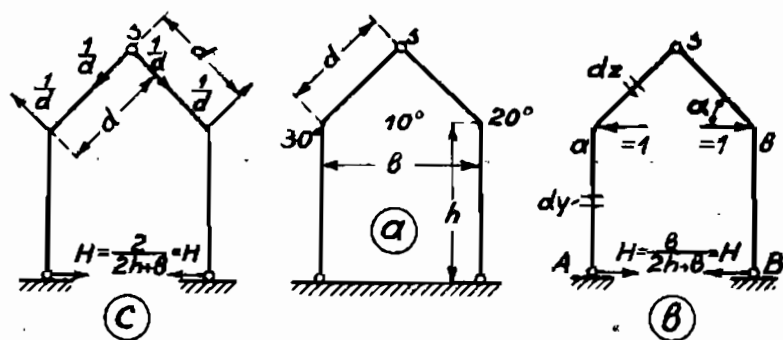
чертеже; 2) определить в той же раме изменение наклона между стержнями as и bs .

Обе части рамы нагреты неодинаково: средний нагрев левой стороны $t' = \frac{1}{2}(30 + 10) = 20^\circ$, средний нагрев правой стороны $t'' = \frac{1}{2}(20 + 10) = 15^\circ$, разница в нагреве крайних волокон левой стороны $\Delta t' = 30 - 10 = 20^\circ$, правой стороны $\Delta t'' = 20 - 10 = 10^\circ$.

1) Так как требуется определить изменение расстояния между 2 точками, то прикладываем две взаимнопротивоположные силы, как показано на черт. 30-б.

Эти силы вызывают распор:

$$H = \frac{b}{2h + b}$$



Черт. 30.

Для определения изменения расстояния пользуемся формулой (74)

$$\delta_{at} = at \sum \bar{N}s + \frac{a\Delta t}{c} \int \bar{M} ds.$$

Применительно к рассматриваемой системе получим:

$$\begin{aligned} \delta_{abt} = & -at' \left[0h + \left(\frac{b}{2h+b} - 1 \right) d \cos \alpha \right] - at'' \left[\left(\frac{b}{2h+b} - 1 \right) d \cos \alpha + \right. \\ & \left. + 0h \right] + \frac{a\Delta t'}{c} \int_0^h \frac{b}{2h+b} \cdot y dy + \frac{a\Delta t'}{c} \int_0^d \left(1 - \frac{b}{2h+b} \right) z \cdot \sin \alpha \cdot dz + \\ & + \frac{a\Delta t''}{c} \int_0^d \left(1 - \frac{b}{2h+b} \right) z \sin \alpha \cdot dz + \frac{a\Delta t''}{c} \int_0^h \frac{b}{2h+b} y dy. \end{aligned}$$

Здесь c — толщина рамы, принятая одинаковой по всей ее длине.

В учете возможной работы продольной силы принят знак (—), потому что, если исходить из направления распора, то направление деформаций, вызываемых температурой и единичной силой, будут противоположными; исходя из тех же соображений, при учете возможной работы от изгиба принят знак (+).

Подставляя величины t' , t'' , $\Delta t'$, $\Delta t''$ и сделав приведение получим:

$$\delta_{abt} = \alpha 20^\circ \frac{2h}{2h+b} \frac{d}{\sqrt{2}} + \alpha 15^\circ \frac{2h}{(2h+b)} \frac{d}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha 20^\circ}{c} \frac{b}{2h+b} \frac{h^2}{2} + \alpha \frac{20^\circ}{c} \frac{2h}{2h+b} \frac{d^2}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha \cdot 10^\circ}{c} \frac{2h}{2h+b} \frac{d^2}{2\sqrt{2}} + \frac{\alpha \cdot 10^\circ}{c} \frac{b}{2h+b} \frac{h^2}{2}$$

Так как по чертежу $d = \frac{b}{2} \sqrt{2}$, то

$$\delta_{abt} = \frac{hb}{(2h+b)} \alpha (20^\circ + 15^\circ) + \frac{b}{2h+b} \frac{h^2}{2} \frac{\alpha}{c} (20^\circ + 10^\circ) + \frac{hb^2}{(2h+b)2\sqrt{2}} \frac{\alpha}{c} (20^\circ + 10^\circ)$$

$$\delta_{abt} = \frac{hb}{2h+b} \alpha \left[35^\circ + \frac{h}{2c} 30^\circ + \frac{b}{2\sqrt{2}} \frac{1}{c} 30^\circ \right]$$

2) Для определения перекоса угла у среднего шарнира прикладываем к стержням as и bs по паре сил $= \frac{1}{d}$, как показано на *черт. 30 с.*

Действие этих пар вызывает распор $H = \frac{2}{2h+b}$.

Руководясь приведенной выше общей формулой, составляем выражение перемещения:

$$\delta_{st} = -\alpha t' \frac{2}{2h+b} \cdot d \cos \alpha - \alpha t'' \frac{2}{2h+b} d \cdot \cos \alpha + \alpha \frac{\Delta t'}{c} \int_0^h \frac{2}{2h+b} y dy + \frac{\alpha \Delta t'}{c} \int_0^d \left[\frac{2}{2h+b} z \sin \alpha dz - \frac{1}{d} z \cdot dz \right] + \frac{\alpha \Delta t''}{c} \int_0^d \left[\frac{2}{2h+b} z \sin \alpha - \frac{1}{d} z \right] dz + \frac{\alpha \Delta t''}{c} \int_0^h \frac{2}{2h+b} y dy.$$

Проинтегрировав и сделав приведение, получим:

$$\delta_{st} = -\frac{2}{2h+b} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \alpha (20^\circ + 15^\circ) + \alpha \frac{2}{2h+b} \cdot \frac{h^2}{2c} 20^\circ + \frac{2}{2h+b} \cdot \frac{d^2}{2\sqrt{2}} \alpha \cdot \frac{20^\circ}{c} - \alpha \frac{d}{2c} 20^\circ + \frac{2}{2h+b} \cdot \frac{d^2}{2\sqrt{2}} \cdot \alpha \frac{10^\circ}{c} - \alpha \frac{d}{2c} 10^\circ + \frac{2}{2h+b} \cdot \frac{h^2}{2c} \alpha \cdot 10^\circ$$

После подстановки $d = \frac{1}{2} b \sqrt{2}$ и приведения

$$\delta_{st} = + \frac{1}{2h+b} \alpha \left[-b \cdot 35^\circ + \frac{h^2}{c} 30^\circ + \frac{b^2}{c2\sqrt{2}} 30^\circ \right] - \frac{b\sqrt{2}}{4 \cdot c} \alpha 30^\circ$$

Пример 8. Показать влияние деформации решетки на величину прогиба в ферме с параллельными поясами (черт. 31-а) в зависимости от изменения отношения $h : l$.

Для обозначения влияния вида и положения нагрузки примем напряжения $n = \frac{N}{\omega}$ в элементах фермы пропорциональными тем соотношениям, какие имеют место в фермах, исходя из допускаемого на растяжении 1.000 кг/см^2 ; величины этих напряжений выписаны в нижеследующей таблице.

В той же таблице выписаны длины s элементов и вычислены значения $\frac{N \cdot s}{\omega}$, входящие в выражение перемещения, которое для фермы, как опирающейся системы, определяется по формуле (77).

$$\delta_{\text{ср}} = \sum N \cdot \frac{N \cdot s}{E \omega}$$

В той же таблице выписаны величины усилий \bar{N} от груза $= 1$, приложенного в узле № 4 по направлению искомого перемещения.

ТАБЛИЦА.

Номера элементов.	Длина s в метр.	Напряжение $\frac{N}{\omega} \text{ кг/см}^2$.	$\frac{1}{100} \frac{N}{\omega} s$.	$\bar{N} \text{ кг}$.	$\frac{1}{100} \frac{N \cdot s}{\omega}$.
0-1	d	1.000	$10 d$	0	0
1-2	d	1.000	$10 d$	$\frac{1}{2} : \text{tga}$	$5 d : \text{tga}$
2-3	d	1.000	$10 d$	$\frac{1}{2} : \text{tga}$	$10 d : \text{tga}$
3-4	d	1.000	$10 d$	$\frac{3}{2} : \text{tga}$	$15 d : \text{tga}$
17-16		— 800	— $8 d$	$-\frac{1}{2} : \text{tga}$	$4 d : \text{tga}$
16-15	d	— 800	— $8 d$	$-\frac{1}{2} : \text{tga}$	$8 d : \text{tga}$
15-14	d	— 800	— $8 d$	$-\frac{3}{2} : \text{tga}$	$12 d : \text{tga}$
14-13	d	— 800	— $8 d$	$-\frac{2}{2} : \text{tga}$	$16 d : \text{tga}$
0-17	$d \text{ tga}$	— 700	— $7 d \text{ tga}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2} d \text{ tga}$
17-1	$d : \text{cosa}$	800	— $8 d : \text{cosa}$	$+\frac{1}{2} : \text{sina}$	$\frac{4 d}{\text{cosa} \cdot \text{sina}}$
1-16	$d \text{ tga}$	— 700	— $7 d \text{ tga}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2} d \text{ tga}$
16-2	$d : \text{cosa}$	800	$8 d : \text{cosa}$	$+\frac{1}{2} : \text{sina}$	$\frac{4 d}{\text{cosa} \cdot \text{sina}}$
2-15		— 700	— $7 d \text{ tga}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2} d \text{ tga}$
15-3	$d : \text{cosa}$	800	$8 d : \text{cosa}$	$+\frac{1}{2} : \text{sina}$	$\frac{4 d}{\text{cosa} \cdot \text{sina}}$
3-14	$p \cdot \text{tga}$	— 700	— $7 d \text{ tga}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2} d \text{ tga}$
14-4	$d : \text{cosa}$	800	$8 d : \text{cosa}$	$+\frac{1}{2} : \text{sina}$	$\frac{4 d}{\text{cosa} \cdot \text{sina}}$
4-13	$d \cdot \text{tga}$	— 800	— $d : \text{tga}$	0	0

Элементы поясов.

Элементы решетки.

Суммируя отдельно члены, определяющие деформацию поясных элементов и деформацию решетки, получим выражение прогиба в таком виде:

$$\delta_{4P} = 2 \frac{100d}{E} \left[\frac{70}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{2} \left(28 \operatorname{tg}\alpha + \frac{32}{\cos\alpha \cdot \sin\alpha} \right) \right]$$

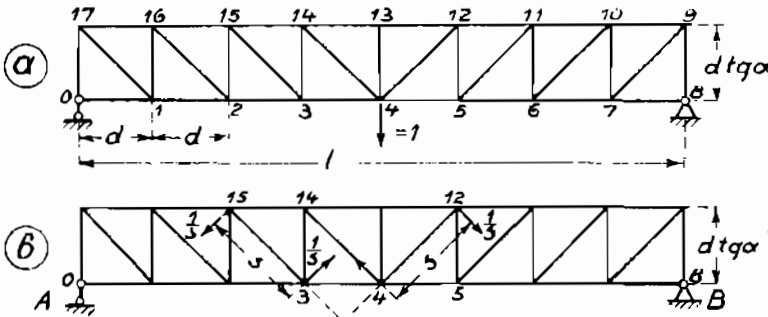
или

$$\delta_{4P} = \frac{200d}{E \operatorname{tg}\alpha} \left[70 + 2 \frac{7 \cdot \sin^2\alpha + 8}{\cos^2\alpha} \right]$$

при $\alpha = 45^\circ$:

$$\delta_{4P} = \frac{200d}{E} \left[70 + 4(3,5 + 8) \right] = \frac{200d}{E} (70 + 4 \cdot 11,5).$$

Из рассмотрения этой формулы и таблицы легко видеть, что при сохранении одной и той же высоты и длины панели, но с изменением



Черт. 31.

числа их, т.е. длины пролета, будет происходить резкое изменение первого члена скобок, характеризующего усилия в поясах, в нем будет происходить нарастание на величину усилия прибавляемой средней панели; во втором же члене скобок будет изменяться первый множитель, который будет нарастать в зависимости от нарастания числа панелей. В результате изменения мы получим:

при 6 панел. $\delta_{4P} = \frac{200d}{E} [39 + 3 \cdot 11,5]$

» 8 » $\delta_{4P} = \frac{200d}{E} [70 + 4 \cdot 11,5]$

» 10 » $\delta_{4P} = \frac{200d}{E} [110 + 5 \cdot 11,5].$

Влияние деформации поясов и решетки определяется соотношениями:

при 6 панел. $\frac{h}{l} = \frac{1}{6} \quad \frac{3 \cdot 11,5}{39 + 3 \cdot 11,5} = 0,47$ или 47% ,

» 8 » $\frac{h}{l} = \frac{1}{8} \quad \frac{4 \cdot 11,5}{70 + 4 \cdot 11,5} = 0,38$ » 38% ,

» 10 » $\frac{h}{l} = \frac{1}{10} \quad \frac{5 \cdot 11,5}{110 + 5 \cdot 11,5} = 0,34$ » 34% .

Из чего следует, что влияние решетки на величину прогиба возрастает с увеличением отношения $h : l$.

Полученное большое соотношение влияния решетки на деформацию объясняется прежде всего тем, что в основу расчета принято невыгоднейшее загрузение всех элементов фермы, как поясов, так и раскосов, что может иметь место при подборе сечений их по заданному постоянному загрузению фермы.

В действительности при определении прогиба дается невыгоднейшее загрузение, соответствующее его наибольшей величине, например, загрузение всего пролета, что никогда не соответствует наибольшему усилию в решетке, а потому она несет очень незначительные усилия, вследствие чего влияние решетки на прогибы быстро падает и в худших случаях не превосходит десяти процентов.

Отметим также и то, что полученное большое влияние решетки на величину прогиба свойственно фермам с параллельными поясами и уменьшается в фермах с криволинейными очертаниями, что нетрудно проследить из сопоставления фермы с параллельными поясами и фермы параболической, имеющих равные пролеты и равные высоты [посредине и находящихся в условиях одинакового загрузения. В ферме параболической при сплошном загрузении всей длины равномерной нагрузкой усилие раскосов, как известно, равно нулю, усилие же стоек ничтожно, вследствие чего влияние решетки на величину прогиба в этих фермах сводится к ничтожной величине. Влияние решетки будет нарастать с приближением криволинейного контура к очертанию фермы с параллельными поясами.

Пример 9. Сопоставить влияние момента продольных сил и поперечных сил на величину перемещения кривого бруса показанного на *черт. 32*.

1) Предположим брус очерченным по дуге круга радиусом $r = \frac{36}{\pi}$ м и составим выражение перемещения подвижного конца его под действием силы $= 1$, приложенной по направлению линии опорных сопротивлений.

Вертикальные слагающие опорных реакций от действия этой силы $= 0$, горизонтальная реакция у неподвижной опоры $= 1$.

Выражение перемещения для этого случая приводится к виду:

$$\bar{\delta}_{nn} = \int_0^l \bar{M}_n^2 \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \bar{N}_n^2 \frac{ds}{E\omega} + k \int_0^l \bar{Q}_n^2 \frac{ds}{G\omega}$$

Для всех сечений рассматриваемого бруса:

$$\bar{M}_n = -y = -\left(r \cdot \sin \varphi - \frac{r}{2}\right); \quad \bar{N}_n = -1 \cdot \sin \varphi; \quad \bar{Q}_n = -1 \cdot \cos \varphi.$$

И так как длины $ds = r d\varphi$, то выражение перемещения может быть переписано так:

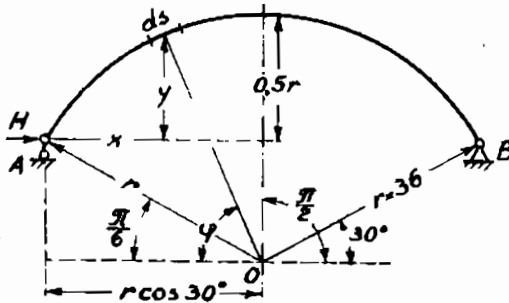
$$\bar{\delta}_{nn} = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(r \sin \varphi - \frac{r}{2}\right)^2 \frac{rd\varphi}{EJ} + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \frac{rd\varphi}{E\omega} + 2k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \frac{rd\varphi}{G\omega}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{mn} = & 2 \frac{r^3}{EJ} \left\{ -\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi + \cos \varphi + \frac{1}{4} \varphi \right\} \frac{\pi}{6} + \\ & + 2 \frac{r}{\omega} \left\{ -\frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right\} \frac{\pi}{2} + \frac{2kr}{\omega G} \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right\} \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\bar{\delta}_{mn} = \frac{2r^3}{EJ} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8} \sqrt{3} \right) + \frac{2r}{E\omega} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + \frac{2kr}{G\omega} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$$



Черт. 32.

Первый член этого выражения представляет собой влияние момента, второй — влияние продольной силы и третий — влияние поперечной силы.

Для сопоставления этих влияний примем, что сечение бруса прямоугольно и имеет размеры $1 \times h$ см², тогда:

$$\omega = 1 \cdot h \text{ см}^2, \quad J = \frac{1 \cdot h^3}{12} \text{ см}^4,$$

$$\rho^2 = \frac{J}{\omega} = \frac{h^2}{12} \text{ см}^2,$$

кроме того $k = \frac{6}{5}$ (см. стр. 16) и $G = \frac{2}{5} E$.

Подставив эти значения в выражение перемещения получим:

$$\bar{\delta}_{mn} = \frac{2r^3}{EJ} \left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3}{8} \sqrt{3} \right) + \frac{\rho^2}{r^2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8} \right) + 3 \frac{\rho^2}{r^2} \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right]$$

После подстановки значения π и приведения:

$$\bar{\delta}_{mn} = \frac{2r^3}{EJ} \left[0,136 + \frac{h^2}{r^2} 0,0617 + \frac{h^2}{r^2} 0,077 \right].$$

Из сопоставления величин, характеризующих влияние момента продольной силы и поперечных сил, на величину перемещения видно, что влияние продольных и поперечных сил нарастает с увеличением отношения $h : r$. При обычном же отношении $h < 0,1r$ влияние продольных и поперечных сил на величину деформации становится незначительным по сравнению с влиянием момента.

2) Перемещение ключевой точки того же бруса под действием той же горизонтальной силы, приложенной в шарнире подвижной опоры, определится по формуле:

$$\bar{\delta}_{\text{пр}} = \int_0^s \frac{\bar{M}_u \bar{M}_p}{EJ} ds + \int_0^s \frac{\bar{N}_u \bar{N}_p}{E\omega} ds + k \int_0^s \frac{\bar{Q}_u \bar{Q}_p}{G\omega} ds.$$

$$\bar{M}_u = -y = -\left(r \sin \varphi - \frac{1}{2} r \right) \quad \bar{M}_p = \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} (r \cos 30^\circ - r \cos \varphi)$$

$$\bar{N}_u = -\sin \varphi \quad \bar{N}_p = -\frac{1}{2} \cos \varphi$$

$$\bar{Q}_u = -\cos \varphi \quad \bar{Q}_p = +\frac{1}{2} \sin \varphi.$$

Подставив эти значения в выражение перемещения получим:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_{\text{пр}} = & -2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (r \cos 30^\circ - r \cos \varphi) \left(r \sin \varphi - \frac{r}{2} \right) \frac{rd\varphi}{EJ} + \\ & + 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \frac{rd\varphi}{E\omega} - 2k \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \frac{rd\varphi}{G\omega}. \end{aligned}$$

После интегрирования получим:

$$\bar{\delta}_{\text{пр}} = -\frac{r^3}{EJ} \left(\frac{5}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12} \pi \right) + \frac{r}{E\omega} \frac{3}{8} - \frac{k \cdot r}{G\omega} \frac{3}{8}.$$

- Приняв, как и раньше, сечение бруса прямоугольным $1 \times h$, $k = 6 : 5$ и $G = \frac{2}{5} E$ получим:

$$\bar{\delta}_{\text{пр}} = \frac{r^3}{EJ} \left[-0,172 + \frac{h^2}{r^2} 0,031 - \frac{h^2}{r^2} 0,093 \right]$$

Как и в первом случае влияние продольных сил и поперечных сил нарастает с увеличением отношения $h : r$ и становится незначительным для отношений $h < 0,1 r$.

Сделанное исследование не является исчерпывающим, так как влияние продольных и поперечных сил зависит не только от соотношения $h : r$, но и от соотношения подъема к пролету, однако, оно достаточно характеризует степень влияния этих сил на деформацию по сравнению с влиянием момента. Заслуживает внимания то, что при принятых соотношениях $G : E$ и $k = 6 : 5$ влияние поперечных сил на величину деформаций больше, чем продольных сил.

Пример 10. В ферме, показанной на черт. 31 и находящейся в тех же условиях загрузки, определить величину изменения угла между раскосами 3—15 и 4—12.

Для определения этого угла прикладываем к раскосам 3—15 и 4—12 пары с моментами $= 1$, каждая из сил этих пар $= \frac{1}{s} = \frac{\cos \alpha}{d}$.

Опорные реакции от действия этих пар $= 0$, а потому во всех элементах фермы за исключением элементов, заключенных между раскосами 3—15 и 4—12, равны нулю.

Усилия в элементах между указанными раскосами будут:

$$\text{элемент (14—13 и 13—12)} \quad \bar{N}_{14,13} = \frac{1}{s} \cdot s \cdot \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha} = + \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{» (15—14)} \quad \bar{N}_{15,14} = \frac{1}{s} \cdot s \cdot \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{» (3—4)} \quad \bar{N}_{3,4} = - \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\text{» (15—3) и (4—12)} \quad \bar{N}_{15,3} = - \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha} \cdot \cos \alpha.$$

В остальных элементах усилия равны $= 0$. Пользуясь данными таблицы примера № 8 составляем выражение деформации рассматриваемого угла φ .

$$\Delta \varphi_p = \frac{100}{E} \left[\frac{8d}{\cos \alpha} \cdot \left(- \frac{\cos \alpha}{d \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 - \frac{1}{d \operatorname{tg} \alpha} (10d + 3 \cdot 8d) \right]$$

Отсюда после приведения:

$$\Delta \varphi_p = - \frac{100}{E \operatorname{tg} \alpha} (16 + 34) = \frac{-50 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-1}{400 \operatorname{tg} \alpha}.$$

§ 12. Определение перемещений как производной потенциальной энергии. Выше (§ 8) мы вывели, что всякое перемещение определяется производной из выражения потенциальной энергии по соответствующей силе (форм. 65):

$$\delta_k = \int \frac{N}{E\omega} \frac{\partial N}{\partial S_k} ds + \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial S_k} ds + k \int \frac{Q}{G\omega} \frac{\partial Q}{\partial S_k} ds \dots \dots (78)$$

Это выражение может быть также рассматриваемо как частный случай из общего вида выражения перемещения (форм. 71).

Действительно, величину момента, продольной и поперечной силы в любом сечении мы можем всегда представить в таком виде:

$$\begin{aligned} M &= S_1 \bar{M}_1 + S_2 \bar{M}_2 + \dots \dots + S_k \bar{M}_k + \dots \dots \\ N &= S_1 \bar{N}_1 + S_2 \bar{N}_2 + \dots \dots + S_k \bar{N}_k + \dots \dots \\ Q &= S_1 \bar{Q}_1 + S_2 \bar{Q}_2 + \dots \dots + S_k \bar{Q}_k + \dots \dots \end{aligned} \quad (79)$$

где \bar{M}_k , \bar{N}_k и \bar{Q}_k соответственно момент, нормальная сила и поперечная сила в том же сечении от нагрузки, равной единице, приложенной и действующей по направлению нагрузки S_k .

Производная из этих выражений M , N и Q по какой-либо нагрузке S_k вычисляется так:

$$\frac{\partial M}{\partial S_k} = \bar{M}_k \quad \frac{\partial N}{\partial S_k} = \bar{N}_k \quad \frac{\partial Q}{\partial S_k} = \bar{Q}_k.$$

Подставив эти значения производных в форм. (78) получим:

$$\delta_k = \int \frac{N}{E\omega} \bar{N}_k ds + \int \frac{M}{EJ} \bar{M}_k ds + k \int \frac{Q}{G\omega} \bar{Q}_k ds,$$

что вполне аналогично форм. (71).

Нетрудно видеть, что разница между выражением перемещения как производной (по теореме Кастильяно) и выражением перемещения по теореме Мора заключается в том, что по теореме Кастильяно непосредственно определяется перемещение только по направлению действия нагрузки, тогда как по теореме Мора определение перемещения не связано с нагрузкой.

Чтобы использовать теорему Кастильяно для определения перемещения в любом месте независимо от действительной нагрузки, приходится вводить фиктивную нагрузку в виде силы $P_0 = 0$ или момента $M_0 = 0$ по направлению искомого перемещения и, взяв производную для этого фиктивного нагружения, в конечном результате приравнять члены, в которые войдут величины P_0 или M_0 нулю, как вызванные фиктивной нагрузкой.

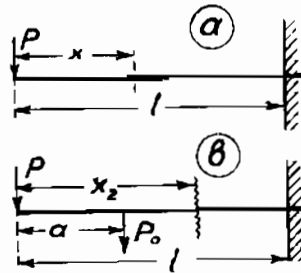
Например, если рассматривать прогиб балки заделанной одним концом от действия сосредоточенного груза P , приложенного на ее конце (черт. 33а) то выражение момента в любом сечении балки будет: $M = -Px$, производная из этого выражения будет $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$; следовательно, перемещение по направлению силы P согласно формулы (78):

$$\delta_{pp} = \frac{\partial V}{\partial P} = \int_0^l \frac{Px}{EJ} x dx = \frac{1}{3} \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Если для того же вида нагружения потребуется определить прогиб на расстоянии a от свободного конца балки, то для этого надо будет приложить к балке фиктивную нагрузку в виде силы P_0 (черт. 33б) и составить выражение производных из моментов по этой силе; которые будут:

для участка от 0 до a :

$$M = -Px_1 \quad \frac{\partial M}{\partial P_0} = 0$$



Черт. 33.

для участка от a до l :

$$M = -Px_2 - P_0(x_2 - a) \quad \frac{\partial M}{\partial P_0} = -(x_2 - a).$$

На основании этого перемещение в точке на расстоянии a от свободного конца напишется так:

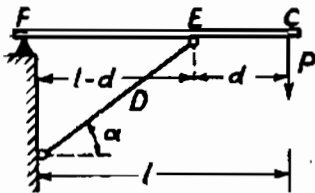
$$EJ\delta_a = \frac{\partial V}{\partial P_0} = \int_a^l [Px_2 + P_0(x_2 - a)](x_2 - a) dx,$$

отсюда после интегрирования:

$$EJ\delta_a = \frac{P}{3}(l^3 - a^3) - \frac{Pa}{2}(l^2 - a^2) + P_0 \frac{(l-a)^3}{3}.$$

Так как в действительности $P_0 = 0$, то действительное перемещение

$$EJ\delta_a^* = \frac{P}{3}(l^3 - a^3) - \frac{Pa}{2}(l^2 - a^2).$$



Черт. 34.

Сделанное сопоставление выражений перемещений по теоремам Кастильяно и Мора показывают, что пользование первой из них целесообразно в частных случаях, когда определяется перемещение по направлению действия нагрузки.

Пример 11. Определить просадку конца балки в системе, показанной на черт. 34, от действия груза P , приложенного на конце балки.

Подкос D , подпирающий балку, испытывает усилие, определяемое из условия:

$$-P \cdot l - D(l-d) \sin \alpha = 0 \text{ откуда } D = -P \frac{l}{(l-d) \sin \alpha}.$$

Это усилие подкоса в месте прикрепления его к балке разлагается:

$$\text{на вертик. составляющую} = D \sin \alpha = -P \frac{l}{l-d}$$

$$\text{и горизонт.} \quad \gg \quad = D \cos \alpha = +P \frac{l}{l-d} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Под действием нагрузки и усилия подкоса балка будет изгибаться и моменты в ее сечениях будут:

$$\text{на участке } CE \quad M' = -Px$$

$$\gg \quad EF \quad M'' = -Px + P \frac{l}{l-d} (x-d).$$

Для определения перемещения по теореме Кастильяно составляем производные из выражений моментов и продольных усилий:

$$\frac{\partial M'}{\partial P} = -x$$

$$\frac{\partial M''}{\partial P} = -x + \frac{l}{l-d} (x-d)$$

$$\frac{\partial D \cos \alpha}{\partial P} = \frac{l}{l-d} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\partial D}{\partial P} = -\frac{l}{(l-d) \sin \alpha}.$$

Пользуясь форм. (78) составляем выражение перемещения применительно к рассматриваемому случаю:

$$\delta_{pp} = \frac{1}{EJ} \int_0^d Px^2 dx + \frac{1}{EJ} \int_d^l P \left[-x + \frac{l}{l-d}(x-d) \right]^2 dx + \\ + \frac{P}{E\omega_1} \frac{l^2}{(l-d)^2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} (l-d) + \frac{P}{E\omega_2} \frac{l^2}{(l-d)^2 \sin^2 \alpha} \cdot \frac{(l-d)}{\cos \alpha}$$

Произведя интегрирование и сделав приведение, получим:

$$\delta_{pp} = \frac{P}{EJ} \left[\frac{l^3}{3} - \frac{2l}{l-d} \cdot \frac{2l^3 - 3dl^2 + d^3}{6} - l^2 \frac{(l-d)}{3} \right] + \\ + \frac{P}{E\omega_1} \frac{l^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{(l-d)} + \frac{Pl^2}{E\omega_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha (l-d)}$$

Пример 12. Определить перемещение конца кривого параболического бруса, показанного на *черт. 35* и нагруженного силой P .

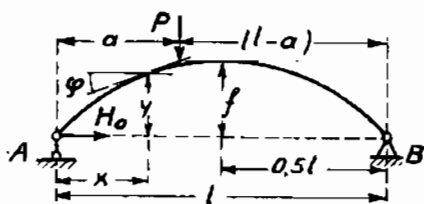
Уравнение кривой оси бруса, отнесенное к началу координат в шарнире левой опоры:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x),$$

где f подъем бруса.

Опорные реакции определяются величинами:

$$\text{левая } A = \frac{P(l-a)}{l}, \quad \text{правая } B = \frac{Pa}{l}$$



Черт. 35

Так как требуется определить горизонтальное перемещение подвижной (левой) опоры, то прикладываем к ней воображаемую силу H_0 . Эта сила вызывает только горизонтальное опорное сопротивление в правой опоре.

Составляем выражения моментов и нормальных сил для обеих частей арки от действия нагрузок P и H_0 и выписываем производные из них по силе H_0 , так как перемещение определяется по направлению этой силы.

В левой части:

$$M = \frac{P(l-a)}{l} x - H_0 y \quad \frac{\partial M}{\partial H_0} = -y$$

$$N = \frac{P(l-a)}{l} \sin \varphi + H_0 \cos \varphi \quad \frac{\partial N}{\partial H_0} = \cos \varphi$$

В правой части:

$$M = \frac{Pa}{l} x - Hy \quad \frac{\partial M}{\partial H_0} = -y$$

$$N = \frac{Pa}{l} \sin \varphi + H_0 \cos \varphi \quad \frac{\partial N}{\partial H_0} = \cos \varphi$$

Руководясь форм. 77, составляем выражение перемещения для заданного случая

$$\begin{aligned} \delta_{np} = & \frac{1}{EJ} \int_0^a \left[\frac{P(l-a)}{l} x - H_0 y \right] (-y) ds + \frac{1}{EJ} \int_0^{(l-a)} \left(\frac{Pa}{l} x - Hy \right) (-y) ds + \\ & + \frac{1}{E\omega} \int_0^a \left[\frac{P(l-a)}{a} \sin \varphi + H_0 \cos \varphi \right] \cos \varphi \cdot ds + \\ & + \frac{1}{E\omega} \int_0^{l-a} \left[\frac{Pa}{l} \sin \varphi + H_0 \cos \varphi \right] \cos \varphi ds. \end{aligned}$$

Для пологого очертания бруса, когда $\frac{f}{l} < \frac{1}{5}$ можно принять $\sin \varphi = 0$ и $\cos \varphi = 1$, что позволяет пренебречь влиянием членов, в которые входит множителем $\sin \varphi$ и заменить ds через dx , тогда выражение перемещения приведет к такому:

$$\begin{aligned} \delta_{np} = & -\frac{P(l-a)}{lEJ} \int_0^a xy dx + \frac{H_0}{EJ} \int_0^a y^2 dx - \frac{Pa}{lEJ} \int_0^{l-a} xy dx + \\ & + \frac{H_0}{EJ} \int_0^{l-a} y^2 dx + \frac{H_0}{E\omega} \int_0^a \cos^2 \varphi dx + \frac{H_0}{E\omega} \int_0^{l-a} \cos^2 \varphi \cdot dx. \end{aligned}$$

Так как в рассматриваемом случае сила H_0 принята фиктивной и равна 0, то все интегралы, в которые она входит множителем, оставляем без рассмотрения.

Производим интегрирование первого и третьего члена, подставив в него y из уравнения кривой оси:

$$\begin{aligned} \int_0^a xy dx &= \frac{4f}{l^2} \int_0^a x^2 (l-x) dx = \frac{4f}{l^2} \left[l \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \right] = \frac{1}{3} \frac{fa^3(4l-3a)}{l^2} \\ \int_0^{l-a} xy dx &= \frac{4f}{l^2} \int_0^{l-a} x^2 (l-x) dx = \\ &= \frac{4f}{l^2} \left[l \frac{(l-a)^3}{3} - \frac{(l-a)^4}{4} \right] = \frac{1}{3} \frac{f(l-a)^3(l+3a)}{l^2}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение перемещения полученные величины интегралов, приводим его к такому:

$$\delta_{np} = -\frac{Pf}{3l^2 EJ} \left[a^3 (l-a) (4l-3a) + a(l-a)^3 (l+3a) \right].$$

Сделав приведение, получим:

$$\delta_{np} = -\frac{P_f}{3l^2 EJ} a (l-a) (l^2 + la - a^2).$$

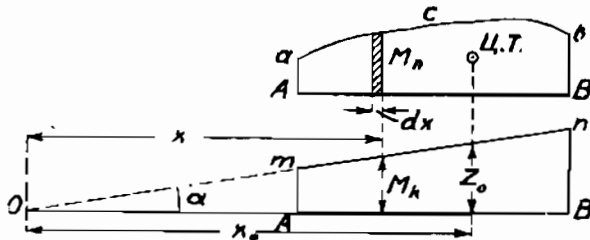
Перемещение направлено влево и величина его зависит от положения груза.

§ 13. Вычисление перемещений, вызываемых изгибающим моментом, при помощи эпюр моментов. Влияние изгибающего момента на величину перемещений характеризуется интегралом вида:

$$\delta_{km} = \int \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds \dots \dots \dots (80)$$

в нем произведение $\bar{M}_k M_m$ представляет собой ничто иное, как произведение ординат эпюры моментов M_m от действительной нагрузки на ординаты эпюры моментов \bar{M}_k от единичной нагрузки, отнесенных к одному и тому же сечению системы.

Эпюра моментов от действительной нагрузки может быть очерчена прямыми или кривыми, что зависит от вида нагрузки; эпюра же моментов от единичной нагрузки в системах с прямыми осями



Черт. 36.

всегда очерчивается прямыми. Последнее свойство позволяет преобразовать интеграл выражения (80).

Предположим, что мы имеем некоторый прямолинейный участок AB системы (черт. 36), на котором эпюра моментов от действительной нагрузки очерчена по некоторой кривой acb , а эпюра моментов от единичной нагрузки по некоторой прямой mn , наклоненной к оси системы под углом α . Ординату эпюры от единичной нагрузки в любом сечении этого участка мы можем выразить так: $\bar{M}_k = x \operatorname{tg} \alpha$, т.-е. через абсциссу ее x относительно точек пересечения прямой mn с осью рассматриваемого участка системы. Тогда перемещение δ_{km} , вызываемое загрузением этого участка может быть представлено в таком виде:

$$\delta_{km} = \int_A^B \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} dx = \operatorname{tg} \alpha \int_A^B \frac{M_m}{EJ} x dx \dots \dots \dots (89)$$

Если момент инерции J на рассматриваемом участке постоянный, то

$$\delta_{km} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EJ} \int_A^B x \cdot M_m dx \dots \dots \dots (90).$$

Входящий в полученное подынтегральное произведение множитель $M_m dx$ представляет собой бесконечно малый элемент площади эпюры $d\omega = M_m dx$, а все произведение $x d\omega$ представляет собой нечто иное как статический момент этого элемента площади относительно точки O пересечения прямой mn с осью участка системы, а потому мы можем выраж. (90) переписать так:

$$\delta_{km} = \frac{tga}{EJ} \int_A^B x d\omega = \frac{tga}{EJ} \Omega x_0 \dots \dots \dots (91)$$

где x_0 — расстояние центра тяжести эпюры моментов от действительной нагрузки до точки пересечения прямой mn с осью участка AB системы; в последующем эту точку O будем называть исходной точкой единичной эпюры.

Из чертежа 36 легко видеть, что произведение

$$x_0 tga = z_0,$$

т.е. представляет собой ординату эпюры моментов от единичной нагрузки под центром тяжести эпюры моментов от действительной нагрузки, отсюда следует, что

$$\delta_{km} = \frac{1}{EJ} \Omega z_0 \dots \dots \dots (92)$$

Если система состоит из ряда прямолинейных участков и интегралы выраж. 89 распространяются на каждый участок, то сделанный вывод определения перемещения по эпюре моментов также распространяется на каждый участок и полное перемещение выразится суммой вида:

$$\delta_{km} = \frac{1}{EJ} \sum \Omega z_0 \dots \dots \dots (92)$$

в которой каждый член определяет влияние отдельных участков эпюры на величину перемещения.

Итак: в системах с прямыми осями перемещения, вызываемые действием изгибающего момента, могут быть вычислены как сумма из произведений на каждом участке площади эпюры моментов от действительной нагрузки на ординату эпюры моментов от единичной нагрузки, взятую под центром тяжести площади первой эпюры на этом участке.

При вычислении перемещений по формуле 92 знак перемещения определяется алгебраически, как результат произведения, т.е. если знаки площади эпюры моментов от действительной нагрузки и соответствующей ей ординаты z_0 одинаковые, то перемещению соответствует знак плюс (+), если знак указанной площади и соответствующей ей ординаты z_0 разные, то перемещению соответствуют знак минус (—).

Выше мы приняли, что момент инерции на рассматриваемом участке постоянен, но общий вывод не нарушится, если мы будем иметь дело с переменным моментом инерции.

Прежде всего отметим, что если момент инерции меняется по длине системы по участкам, то в этом случае эпюру единичной нагрузки надо разбить на участки, соответствующие границам постоянных моментов инерции, и тогда сделанные выводы остаются в силе.

Если момент инерции меняется непрерывно, то тогда можно разбить эпюру моментов на малые участки ds конечной длины, и приняв для них некоторые средние величины ординат M_m эпюры и момента инерции, вычислить для них величины $\frac{M_m}{J}$. Полученные путем таких подсчетов

величины можно принять за фиктивные грузы $du = \frac{M_m}{J} ds$ и тогда выражение (89) перемещения, переписывается в таком виде:

$$\delta_{km} = \int_A^B \bar{M}_k \frac{M_m}{EJ} ds = \frac{tg \alpha}{E} \sum^B x du \dots \dots \dots (93)$$

В этом выражении сумма представляет собой величину статического момента фиктивных упругих сил du относительно исходной точки единичной эпюры моментов. Этот статический момент может быть выражен через равнодействующую U фиктивных упругих сил du на соответствующее ей плечо x , а потому выражение перемещения приведет к виду:

$$\delta_{km} = \frac{tg \alpha}{E} x'_0 U = \frac{1}{E} U z'_0 \dots \dots \dots (94)$$

что вполне соответствует выражению (92) с той разницей, что рассматривается не действительная площадь эпюры моментов от нагрузки, а площадь эпюры моментов измененная в отношении $1:J$.

В соответствии с изменением контура эпюры единичной нагрузки могут иметь место упрощения в процессе вычисления по форм. (92).

1) Если эпюра от единичной нагрузки имеет форму треугольника с вершиной на одном из концов рассматриваемого участка системы (черт. 37), то в этом случае ордината

$$z'_0 = \frac{M_B}{I} x_0$$

и формула (92) напишется так:

$$\delta_{km} = \frac{\bar{M}_B}{EJ} \frac{1}{I} \Omega x_0$$

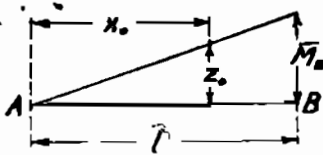
Когда треугольная эпюра является результатом действия единичной силы, приложенной в вершине треугольника, то $\bar{M}_B = 1l$, а потому в этом случае

$$\delta_{km} = \frac{1}{EJ} \Omega x_0 \text{ измерение в см} \dots \dots \dots (95)$$

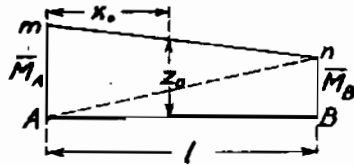
Когда треугольная эпюра является результатом действия единичного момента $\bar{M}_B = 1$, то в этом случае

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{l} \Omega x_0 \text{ число отвлеч.} \dots \dots \dots (96)$$

2) Если эпюра от единичной нагрузки на рассматриваемом участке имеет вид трапеции (черт. 38), с ординатами по концам \bar{M}_A и \bar{M}_B , то ордината z_0 , соответствующая центру тяжести эпюры моментов от дей-



Черт. 37.



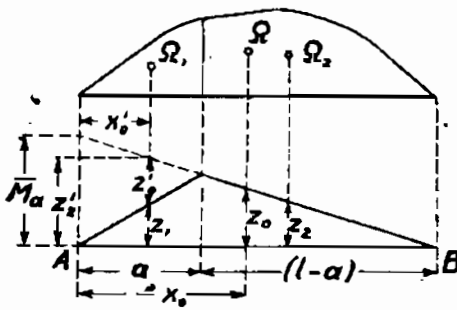
Черт. 38.

ствительной нагрузки, проще всего определяется из 2-х треугольников, на которые разбивается трапеция; соответственно чему выражение перемещения напишется так:

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} \frac{\Omega}{l} \left[\bar{M}_A (l - x_0) + \bar{M}_B x_0 \right] \dots \dots \dots (97)$$

где x_0 — расстояние ординаты z_0 от левого конца рассматриваемого участка.

Как следствие из этого случая трапециевидной формы вытекает случай прямоугольного очертания эпюры, когда прямая mn очертания эпюры параллельна оси системы. В этом случае ординаты M_A и M_B равны между собой, а потому выражение перемещения приводится к виду:



Черт. 39.

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} \Omega \bar{M}_A \dots \dots \dots (98)$$

при $M_A = 1 \quad \delta_{км} = \frac{1}{EJ} \Omega$

3) Если эпюра от единичной нагрузки имеет ломаное очертание в пределах прямолинейного участка AB (черт. 39), то вычисление может быть сделано путем

разбивки участка на два в пределах a и $(l - a)$ прямолинейного очертания эпюры и тогда перемещение определится как сумма из выражения:

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} \left[\Omega_1 z_1 + \Omega_2 z_2 \right] \dots \dots \dots (99)$$

где Ω_1 и Ω_2 — площади эпюры моментов от действительной нагрузки на участках a и $(l - a)$, a z_1 и z_2 — ординаты, соответствующие центрам тяжести этих площадей.

При таком очертании эпюры часто, в целях упрощения расчета, представляется целесообразным переходить к полной площади Ω эпюры моментов от действительной нагрузки, что можно сделать путем преобразования следующего вида.

Ординаты z_1 и z_2 каждой из прямых, очерчивающих эпюру, могут быть выражены через ординату другой прямой так:

$$z_1 = z'_2 - z'_0.$$

Заменяв в выражении (99) перемещения ординату z_1 ее выражением через z'_2 , получим:

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} [\Omega_1 z'_2 + \Omega_2 z_2 - \Omega_1 z'_0].$$

Но ординаты z'_2 и z_2 относятся к одной и той же прямой, очерчивающей эпюру, а потому сумму 2-х статических моментов $\Omega_1 z'_2 + \Omega_2 z_2$ можно заменить равным ей статическим моментом Ωz_0 ; тогда выражение перемещения переписывается так:

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} [\Omega z_0 - \Omega_1 z'_0] = \frac{1}{EJ} \left[\Omega \frac{\bar{M}_A}{l} (l - x_0) - \Omega_1 \frac{M_A}{a} x'_0 \right] \dots \dots (100).$$

Рассматриваемый вид эпюры имеет место, например, в балке, лежащей на 2-х опорах, при определении прогиба в ней на расстоянии a от опоры A . В этом случае ордината $\bar{M}_A = a$ и все выражение перемещения приводится к виду:

$$\delta_{км} = \frac{1}{EJ} \left[\Omega \frac{l - x_0}{l} a - \Omega_1 x'_0 \right] \dots \dots \dots (101).$$

К вопросу об определении перемещения при помощи эпюр моментов мы можем подойти также исходя из условия представления упругой кривой при изгибе прямых стержней, как веревочной кривой, образующейся на тех же стержнях под действием фиктивной нагрузки в виде эпюры моментов, т.е. исходя из сравнения дифференциальных уравнений ¹⁾:

$$\left. \begin{array}{l} \text{веревочной кривой} \quad Hy'' = -p \\ \text{и упругой кривой} \quad EJy'' = -M \end{array} \right\} \dots \dots \dots (102).$$

Как известно из теории изгиба: угол наклона касательных к упругой кривой определяется выражением:

$$EJy' = [Q] \text{ — т.е. величиной поперечной силы от площади эпюры моментов, как фиктивной нагрузки}$$

¹⁾ Подробнее смотри отдел изгиба в курсах сопротивления материалов.

и ординаты упругой кривой определяются выражением:

$$EJy = [M] \text{ — т.е. величиной статического момента от площади эпюры моментов, как фиктивной нагрузки.}$$

При чем надо помнить, что величины $[Q]$ и $[M]$ вычисляются с учетом фиктивных опорных реакций, которые определяются из условия закрепления рассматриваемой системы на концах.

Таким образом, если мы воспользуемся эпюрой моментов, как фиктивной нагрузкой на рассматриваемую систему, то, пользуясь выведенными зависимостями, мы сможем вычислить: линейные перемещения по уравнению

$$\delta_{км} = y = \frac{[M]}{EJ} \dots \dots \dots (103)$$

угловые перемещения по уравнению

$$\varphi_{км} = y' = \frac{[Q]}{EJ} \dots \dots \dots (104)$$

в которых $[M]$ и $[Q]$ —момент и поперечная сила в рассматриваемом сечении от фиктивной нагрузки эпюрой моментов действительной нагрузки.

Если момент инерции будет переменный, то в этом случае в уравнении упругой кривой надо принять не действительные ординаты эпюры моментов, а приведенные в виде фиктивных ординат

$$u = \frac{M}{J}$$

и тогда для выражения перемещений и углов поворота мы будем иметь выражения:

$$y = \frac{1}{E} [Q_u]$$

и

$$y' = \frac{1}{E} [M_u] \dots \dots \dots (105)$$

аналогичные уравнениям (103) и (104), но от приведенной фиктивной нагрузки.

В курсах сопротивления материалов, при изучении изгиба, подробно прорабатывается процесс вычисления линейных и угловых перемещений в прямых брусках при помощи эпюры моментов, как фиктивной нагрузки.

Эти приемы вычисления остаются в силе и при определении перемещений в системах с ломаным очертанием, как, например, рамы и др. (см. пример 12).

При вычислении перемещений в системах с ломаной осью надо помнить, что точки приложения фиктивной нагрузки всегда относятся к оси бруса и, следовательно, центры тяжести эпюр моментов лежат на осях соответствующих участков.

Знаки перемещений определяются из самих выражений моментов и поперечных сил; при этом придерживаются правила, что положительному знаку эпюры моментов соответствует действие фиктивной нагрузки вправо и книзу, отрицательному же знаку эпюры моментов — действие фиктивной нагрузки влево и вверх.

В заключение можно указать, что в большинстве случаев изложенный прием вычисления перемещений, как статических моментов и поперечных сил для фиктивной нагрузки, уступает в простоте написания и определения знака изложенному выше приему вычислений по двум эпюрам моментов действительной и единичной.

К преимуществам способа вычисления по двум эпюрам надо отнести общность его как для определения линейных, так и угловых деформаций. И те и другие определяются из сопоставления эпюр моментов, но различие в них заключается только в порядке измерения ординат эпюры моментов от единичной нагрузки: когда определяется линейное перемещение, ординаты эпюры измеряются в линейных единицах (см. 95); когда определяются угловые перемещения, ординаты эпюры измеряются отвлеченными числами (см. 96).

В нижеследующих примерах показаны процессы вычисления при помощи эпюр моментов и сделано сопоставление этих приемов вычисления с приемом непосредственного интегрирования.

Пример 13. Требуется определить линейное перемещение и угол поворота в сечении K ломаного бруса, показанного на *черт. 40* и находящегося под действием силы H .

Для определения линейного перемещения точки K надо знать перемещение ее по горизонтальному и вертикальному направлениям, для чего прикладываем в этой точке горизонтальную и вертикальную силу $= 1$, эпюры моментов от этих сил построены на *черт. 40* под буквами b и c . Для определения угла поворота сечения прикладываем в нем момент $= 1$; эпюра моментов от действия этого момента показана на *черт. 40 d*. На этом же чертеже под буквой a построена эпюра моментов от действия силы H ; эта эпюра построена в предположении, что вместо силы H действует сила $= 1$, а потому в окончательном результате все члены должны быть увеличены в H раз.

В последующих вычислениях каждое из перемещений определялось тремя способами сразу: интегрированием, рассмотрением эпюры действительной нагрузки как фиктивного нагружения и сопоставлением эпюр моментов от действительной и фиктивных нагрузок.

А. Определение горизонтального перемещения.

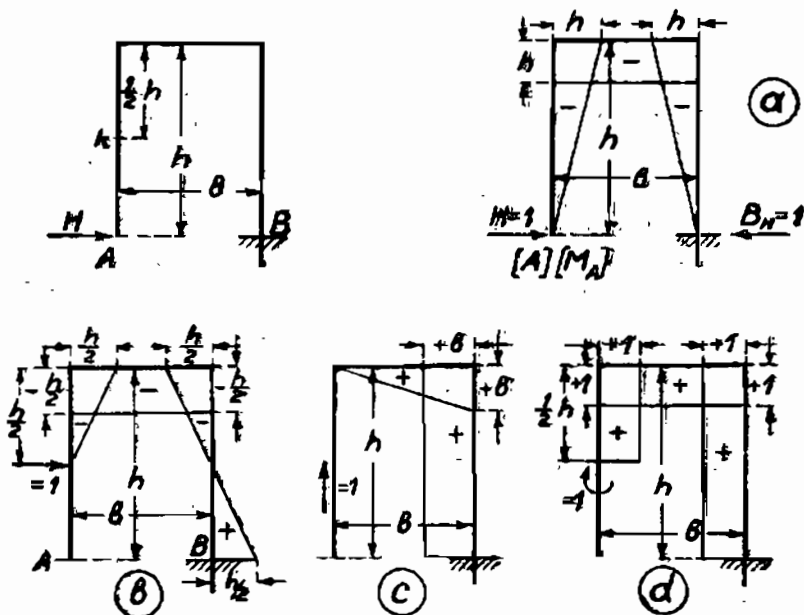
1) Для определения этого перемещения интегрированием составляем выражение:

$$EJ\bar{\delta}_{KH} = \int_0^{\frac{h}{x}} y \, ody + \int_{\frac{h}{x}}^h y \left(y - \frac{h}{2} \right) dy + \int_0^b h \frac{h}{2} dx +$$

$$+ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y \left(y - \frac{h}{2} \right) (-dy) - \int_{\frac{h}{2}}^0 y \left(\frac{h}{2} - y \right) (-dy).$$

Произведя интегрирование получим:

$$EJ\bar{\delta}_{\text{кк}} = \frac{1}{3} \left(h^3 - \frac{h^3}{8} \right) - \frac{h}{4} \left(h^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{h^2}{2} b - \frac{1}{3} \left(\frac{h^3}{8} - h^3 \right) + \\ + \frac{h}{4} \left(\frac{h^2}{4} - h^2 \right) - \frac{h^3}{16} + \frac{h^3}{24} = \frac{3}{16} h^3 + \frac{h^2 b}{2}$$



Черт. 40.

2) При вычислении того же перемещения из рассмотрения эпюры, показанной на черт. 40-а, как фиктивной нагрузки, надо составить выражение статического момента площади этой эпюры относительно горизонтальной оси, проходящей через точку К. Ниже, для сопоставления приемов учета, составлены выражения момента относительно этой оси из условий рассмотрения эпюры справа и слева от сечения лежащих.

При рассмотрении эпюры, справа от сечения лежащей, обращаем внимание на то, что правый конец системы заделан и, следовательно, здесь нет ни фиктивных опорных реакций, ни фиктивного опорного момента, а потому момент от площади эпюры определяется только ее частью справа от сечения лежащей, а именно:

$$EJ\bar{\delta}_{\text{кк}} = \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{2}{3} h - \frac{1}{2} h \right) + bh \cdot \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} \frac{h^3}{4} - \frac{1}{3} h + \\ + \frac{h^3}{4} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{3}{16} h^3 + \frac{bh^2}{2}$$

В этом выражении все знаки приняты обратными, так как рассматривается момент нагрузки, справа от сечения лежащей.

При вычислении статического момента нагрузки, слева от сечения лежащей, надо прежде всего учесть то, что левый конец системы свободный, а потому здесь могут иметь место фиктивные опорные реакции и фиктивный опорный момент, которые определятся из условий: фиктивная опорная реакция — из условия возможного в этом сечении угла поворота

$$EJ\bar{\varphi}_A = -\left(2 \cdot \frac{1}{2} h^2 + bh\right);$$

фиктивный опорный момент — из условия возможного перемещения этой точки в горизонтальном направлении

$$EJ\bar{\delta}_A = \left(2 \cdot \frac{1}{2} h^2 \cdot \frac{2}{3} h + bh \cdot h\right) = \frac{2}{3} h^3 + bh^2.$$

Самое же выражение статического момента эпюры, слева от сечения лежащей, напишется так:

$$EJ\bar{\delta}_{KK} = \frac{2}{3} h^3 + bh^2 - (h^2 + bh) \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{4} \cdot \frac{1}{6} h = \frac{3}{16} h^3 + \frac{bh^2}{2}.$$

3) Вычисление того же перемещения путем сопоставления эпюр моментов от действительной и единичной нагрузок может быть сделано по форм. (92) так: (см. черт. 40а и б)

$$\begin{aligned} EJ\bar{\delta}_{KK} &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \frac{h}{3} + \frac{h^2}{4} \cdot \frac{1}{4} h + bh \cdot \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{h}{6} = \\ &= \frac{3}{16} h^3 + \frac{bh^2}{2}. \end{aligned}$$

Здесь следует отметить, что иногда процесс вычисления перемещения вида $\bar{\delta}_{KK}$ может быть упрощен заменой его, на основании теоремы о взаимности перемещений, вычислением перемещения $\bar{\delta}_{KK}$. Применяя это положение в рассматриваемом случае, надо будет принять эпюру от силы $= 1$, приложенной в точке K , за действительную нагрузку, а эпюру от силы $H=1$ за единичную нагрузку.

Тогда выражение перемещения напишется так:

$$\begin{aligned} EJ\bar{\delta}_{KK} &= EJ\bar{\delta}_{KK} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \cdot \frac{5}{6} h + b \frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{8} \cdot \frac{5}{6} h - \frac{1}{2} \frac{h^2}{4} \cdot \frac{h}{6} = \\ &= \frac{3}{16} h^3 + \frac{bh^2}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, по всем разобранным способам горизонтальное перемещение

$$EJ\bar{\delta}_{KK} = EJH \cdot \bar{\delta}_{KK} = H \left(\frac{3}{16} h^3 + \frac{bh^2}{2} \right).$$

О преимуществах каждого способа в смысле простоты можно судить по процессу составления выражения и приведению его к окончательному виду.

В. Определение вертикального перемещения.

1. Непосредственным интегрированием по форм. (80) (черт. 40 и черт. 40-б).

$$EJ\bar{\delta}_{\text{вн}} = \int_0^b x h dx + \int_h^0 y b (-dy) = \frac{1}{2} b^2 h + \frac{1}{2} b h^2.$$

2. Путем рассмотрения эпюры моментов (черт. 40-а) как фиктивной нагрузки по форм. 103.

а) по статическому моменту эпюры, лежащей справа от вертикальной оси, проходящей через точку K :

$$EJ\bar{\delta}_{\text{вн}} = bh \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} h^2 b;$$

б) по статическому моменту эпюры, лежащей слева от той же оси; так как левый конец системы свободный, то на нем имеют место:

$$\text{фиктивн. опорн. момент} = bh \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} h^2 b = EJ\delta_A,$$

$$\text{реакция} = - \left(2 \cdot \frac{h^2}{2} + bh \right) = EJ\varphi_A,$$

а потому перемещение

$$EJ\bar{\delta}_{\text{вн}} = \frac{1}{2} b^2 h + \frac{1}{2} h^2 b;$$

влияние фиктивной опорной реакции и самой эпюры отпало, так как направление их совпадает с вертикальной осью.

3. Путем сопоставления эпюр от действительной и единичной нагрузки по форм. (92) (черт. 40с и 40-а):

$$EJ\delta_{\text{вн}} = bh \cdot \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} h^2 b.$$

Таким образом, полное вертикальное перемещение:

$$EJ\delta_{\text{вн}} = EJH\bar{\delta}_{\text{вн}} = H \left(\frac{1}{2} b^2 h + \frac{1}{2} b h^2 \right).$$

С. Определение угла поворота сечения.

1. Определение путем непосредственного интегрирования по форм. (80) (черт. 40 и 40-а):

$$EJ\bar{\varphi}_{\text{вн}} = - \int_{\frac{h}{2}}^h y dy - \int_0^b h dx - \int_h^0 y (-dy) = - \left[\frac{1}{2} \left(h^2 - \frac{h^2}{4} \right) + hb + \frac{h^2}{2} \right] = - \frac{7}{8} h^2 - hb.$$

2. Путем рассмотрения эпюры моментов как фиктивной нагрузки по форм. (104):

а) из выражения поперечной силы для эпюры, справа от сечения лежащей

$$EJ\bar{\varphi}_{KH} = - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + h \right) \frac{h}{2} + bh + \frac{1}{2} h^2 \right] = - \frac{7}{8} h^2 - bh;$$

б) из выражения поперечной силы от эпюры, слева от сечения лежащей

$$EJ\bar{\varphi}_{KH} = - \left(2 \frac{1}{2} h^2 + bh \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = - \frac{7}{8} h^2 - bh,$$

в котором первые два члена представляют собой фиктивную опорную реакцию.

3. Путем сопоставления эпюр от действительной и единичной нагрузки (черт. 40а и д) по форм. (92):

$$EJ\bar{\varphi}_{KH} = - \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{2} h \right) \cdot \frac{1}{2} h \cdot 1 - bh \cdot 1 - \frac{1}{2} h^2 \cdot 1 = - \frac{7}{8} h^2 - bh.$$

На основании теоремы о взаимности перемещений, по которой $\bar{\varphi}_{KH} = \varphi_{HK}$, то же угловое перемещение может быть определено из условия рассмотрения эпюры от единичного момента (черт. 40-д), как действительной нагрузки и эпюры H , как единичной нагрузки (черт. 40-а).

$$\begin{aligned} EJ\bar{\varphi}_{KH} = EJ\bar{\varphi}_{HK} &= - \frac{1}{2} h \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} h - b \cdot 1 \cdot h - h \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} h = - \\ &= - \frac{7}{8} h^2 - bh. \end{aligned}$$

Таким образом, полное угловое перемещение:

$$EJ\varphi_{KH} = EJ H \bar{\varphi}_{KH} = - H \left(\frac{7}{8} h^2 + bh \right).$$

Знак показывает, что оно направлено против хода часовой стрелки, т.е. в направлении обратном принятому для $m=1$.

Пример 14. Требуется определить вертикальное перемещение и поворот в сечении двухопорной балки на расстоянии a от левой опоры (черт. 41), при условии загрузки балки сплошной равномерной нагрузкой q кг/пог. м.

Эпюры моментов от действительной нагрузки и от единичных нагрузок силой $=1$ и моментом $=1$ построены на том же чертеже 41 под буквами b и c .

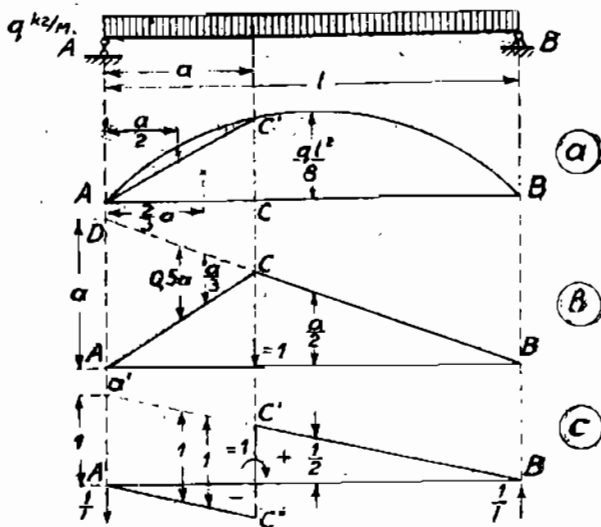
Применяя метод сравнения эпюр от действительной и единичной нагрузок, можно вычислить перемещения по формуле 100.

Площадь всей эпюры от действительной нагрузки:

$$\Omega = \frac{2}{3} \frac{ql^2}{8} \cdot l = \frac{ql^3}{12}.$$

Центр тяжести этой площади лежит посредине пролета AB , а потому ордината z_0 , определяемая по эпюре единичной нагрузки, $= \frac{1}{2} a$.

Площадь Ω_1 эпюры моментов от действительной нагрузки на участке α может быть вычислена, как сумма площадей треугольника $AC'C$ и параболы AC''



Черт. 41.

$$\Omega_1 = \frac{1}{2} a \frac{qa(l-a)}{2} + \frac{2}{3} \frac{qa^2}{8} a.$$

Ординаты, соответствующие центрам тяжести этих слагающих площадей и определяемые по эпюре единичной нагрузки на участке ACD , будут: для треугольника $\frac{2}{3} a$, для параболы $\frac{a}{2}$. Таким обра-

зом, выражение перемещения по форм. (100) напишется так:

$$EJ \delta_{aq} = \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{a}{2} - \frac{qa^2(l-a)}{4} \cdot \frac{2}{3} a - \frac{qa^3}{12} \cdot \frac{a}{2};$$

отсюда после приведения получим:

$$EJ \delta_{aq} = \frac{q}{24} a(l-a)(l^2 + la - a^2),$$

что вполне соответствует выводу, сделанному в примере 6.

Угол поворота сечения может быть определен по той же форм. (100), как разность влияния всей нагрузки на всем пролете и влияния ее на участке AC . При учете влияния на участке AC , ордината единичной нагрузки определяется по прямоугольнику $Aa'C'C''$.

Таким образом, выражение углового перемещения напишется так:

$$EJ \varphi_{aq} = \frac{ql^3}{12} \cdot \frac{1}{2} - \left[\frac{qa^2(l-a)}{4} + \frac{qa^3}{12} \right] 1;$$

отсюда после приведения получим:

$$EJ \varphi_{aq} = \frac{q}{24} (l^3 - 6a^2l + 4a^3).$$

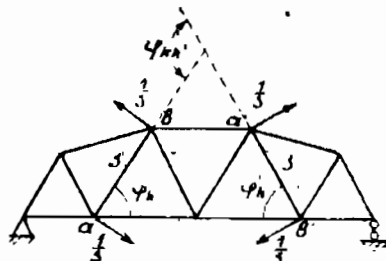
что в точности соответствует выражению, полученному в примере 6.

Отметим, что вычисление тех же перемещений по форм. (99) было бы сложнее, чем сделанное выше.

§ 14. Упрощения, вносимые условиями симметричности. Условие симметричности, как в самой системе, так и в характере ее загрузки, нередко приводит к упрощению в процессе вычисления перемещения, так как при этих условиях подынтегральные выражения и пределы интегралов получают более простой вид, эпюры моментов имеют менее сложное очертание и т. д., поэтому очень часто искусственное приведение несимметричного нагружения к симметричному, неизменяющему в целом работы системы в заданных условиях, значительно упрощает процесс расчета.

Предложим, что рассматривается угловое перемещение какого-либо стержня симметричной фермы, симметрично нагруженной (черт. 42).

Для определения этого углового перемещения нужно приложить к стержню фиктивную нагрузку в виде пары с моментом $= 1$. Эта фиктивная нагрузка вносит несимметричность в нагружение и, при вычислении перемещения, сумма, определяющая его



Черт. 42.

$$\Delta \varphi_k = \sum \bar{N}_k \frac{N \cdot s}{E \omega}$$

будет иметь столько слагающих, сколько имеется в ферме стержней.

Обратим внимание на то, что, вследствие симметричности фермы и симметричности ее загрузки, стержень $a'b'$ будет иметь то же по величине угловое перемещение, как рассматриваемый стержень ab ему симметричный, а потому угол взаимного поворота этих двух стержней равен удвоенной величине углового перемещения каждого из них.

Для определения угла взаимного поворота двух стержней надо, как известно, приложить к каждому из них по паре с моментом $= 1$. В этом случае ферма получает симметричное нагружение двумя фиктивными парами, которое вызывает усилия только в стержнях фермы, лежащих между этими парами; вследствие этого вычисление суммы, определяющей величину этого взаимного углового поворота, будет проще, чем суммы, определяющей угловое перемещение каждого из стержней.

Так как по условию симметрии

$$\Delta \varphi_k = \Delta \varphi'_k = \frac{1}{2} \Delta \varphi_{kk'} = \frac{1}{2} \sum_k^{k'} \bar{N}_{kk'} \frac{N \cdot s}{E \omega},$$

то представляется целесообразным, в целях сокращения вычислений, использовать свойство симметрии и заменить определение углового перемещения стержня ab , определением его по углу взаимного поворота симметричных стержней ab и $a'b'$.

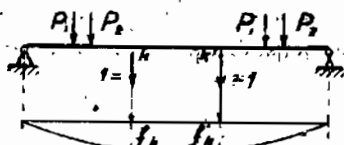
Такое использование условий симметрии может быть сделано для всякого вида перемещений. Например, в симметричной двухопорной балке

с симметричным нагружением (черт. 43) прогибы двух точек оси, симметрично расположенных относительно центра балки, будут равны, а потому прогиб каждой из точек может быть определен из условия:

$$f_k = \frac{1}{2} f = \int \bar{M}_{kk} \frac{M ds}{EJ},$$

где $\bar{M}_{kk} = \bar{M}_k + \bar{M}_k$ — момент в сечениях балки от сил $P_k = 1$ и $P_k = 1$, приложенных в этих сечениях по направлению перемещения.

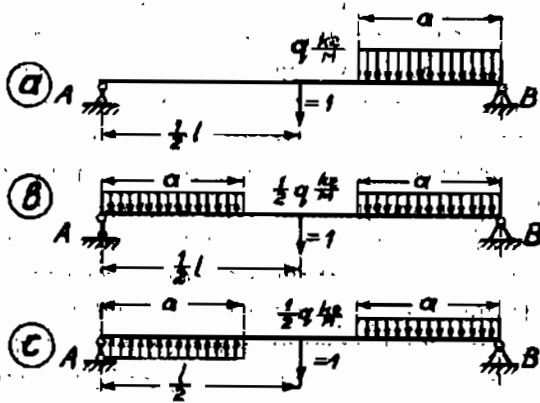
Ниже в примере 15 сопоставлены процессы расчетов при условии несимметричного нагружения и при условии использования симметричности.



Черт. 43.

Упрощение, вносимое симметричностью нагружения, может быть использовано не только для фиктивного нагружения, но и для действительной нагрузки. Если введение симметричности нагружения в фиктивной нагрузке связывалось с условием перехода к определению деформации, пропорциональной определяемой по заданию, то при замене несимметричного действительного нагружения симметричным, последней должно выбираться так, чтобы суммарное действие симметричного нагружения было равноценно заданному несимметричному.

Например, при определении прогиба в центре балки при несимметричном нагружении ее (черт. 44) сплошной нагрузкой q кг на пог. м на протяжении от левого конца можно вместо заданного нагружения рассматривать ту же балку в двух условиях нагружения, а именно: под действием симметрично расположенной нагрузкой интенсивностью $0,5 q$ кг на пог. м (черт. 44) и под действием симметрично расположенной нагрузки с одинаковой интенсивностью $0,5 q$ кг на пог. м, но разных знаков (черт. 44). Обе эти нагрузки суммируясь приводят к заданной нагрузке. Вопрос сводится лишь к тому — насколько такая замена упростит процесс вычисления.



Черт. 44.

Если кроме несимметричного расположения действительной нагрузки само место определяемого перемещения сдвинуто с оси симметрии, то приходится приводить к симметричному состоянию как действительную нагрузку, так и фиктивное нагружение, соблюдая указанные выше условия.

Если кроме несимметричного расположения действительной нагрузки само место определяемого перемещения сдвинуто с оси симметрии, то приходится приводить к симметричному состоянию как действительную нагрузку, так и фиктивное нагружение, соблюдая указанные выше условия.

Пусть, например, требуется определить перемещение в точке s балки от нагрузки, расположенной несимметрично, как показано на черт. 45. Несимметричное нагружение можно рассматривать как симметричное,

предложив его на два вида загрузки, как показано на *черт. 45b* и *c*.

Вследствие указанного изменения в расположении нагрузки произойдет изменение величин перемещений в точке *c*.

Если при заданном нагружении перемещение в точке *c* определялось величиной δ_c и в симметрично расположенной ей точке *c'*, перемещение измерялось величиной δ'_c , то при симметричном нагружении по схеме *черт. 45b* перемещение в точке *c* определится суммой:

$$\frac{1}{2}(\delta_c + \delta'_c).$$

Также, очевидно, что при нагружении по схеме *черт. 45c* перемещение в той же точке *c* определится разностью:

$$\frac{1}{2}(\delta_c - \delta'_c)$$

что следует из того, что левая часть загрузки по этой схеме имеет знак обратный заданной. Складывая величины этих перемещений получим:

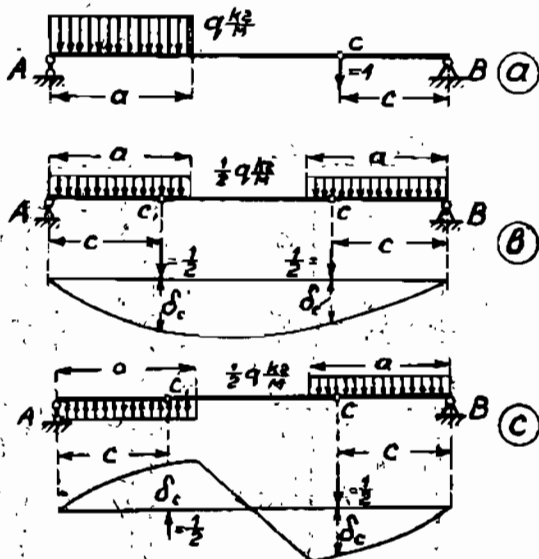
$$\frac{1}{2}(\delta_c + \delta'_c) + \frac{1}{2}(\delta_c - \delta'_c) = \delta_c,$$

т.е. величину искомого перемещения в точке *c*.

Отсюда следует, что при несимметричном нагружении и несимметрично расположенном месте определяемого перемещения нужно заменить заданную действительную нагрузку симметричными нагрузками, по своему действию на систему равноценными заданной нагрузке и затем, в соответствии с этими видами загрузок, дать такое расположение фиктивной единичной нагрузки, чтобы она в сумме своих воздействий на систему приводилась к требуемому по заданию фиктивному нагружению. Это позволит составить выражения перемещений по фиктивной нагрузке и, просуммировав их, получить искомое перемещение.

В заключение отметим, что этот прием использования симметричности в конечном результате имеет целью привести эпюры моментов к более простым и симметричным очертаниям. В простых балках такие преобразования не дают ощутительных результатов, но в таких системах как рамы, фермы и др. они могут приводить к значительным упрощениям.

Пример 15. Требуется определить перемещение точки *c* в трехшарнирной раме (*черт. 46*) с расположенной на ней сплошной равномерно распределенной нагрузкой.



Черт. 45.

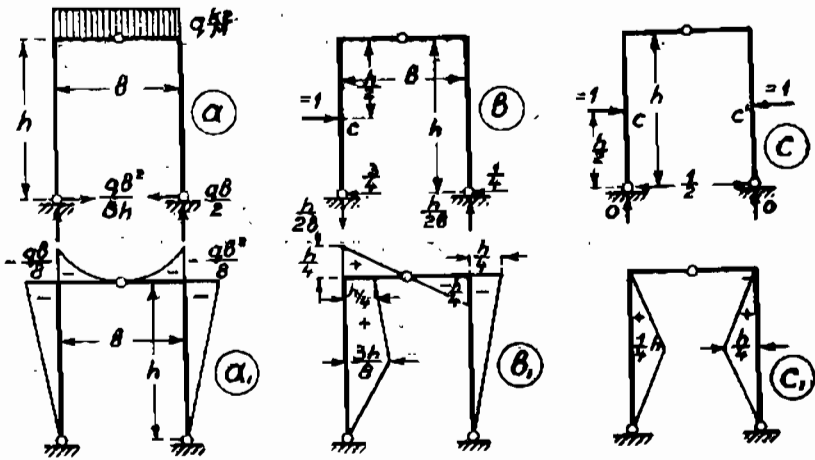
I. При непосредственном определении перемещения мы будем иметь следующие его выражения (черт. 46а и б):

а) при интегрировании

$$EJ\delta_{ca} = - \int_0^{\frac{1}{2}h} \frac{qb^2}{8h} y \frac{3}{4} y dy - \int_{\frac{1}{2}h}^h \frac{qb^2}{8h} y \left[\frac{3}{4} y - 1 \left(y - \frac{h}{2} \right) \right] dy +$$

$$+ \int_0^b \left(\frac{qb}{2} x - \frac{qb^2}{8h} h - \frac{qx^2}{2} \right) \left(-\frac{h}{2\theta} x + \frac{3}{4} h - 1 \cdot \frac{h}{2} \right) dx +$$

$$+ \int_0^h \frac{qb^2}{8h} y \cdot \frac{1}{4} y dy;$$



Черт. 46.

б) при определении по эпюрам моментов (черт. 46а, и в₁)

$$EJ\delta_{ca} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} h - \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{5}{16} h -$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{7}{24} h + \frac{1}{2} h \frac{qb^2}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} h = - \frac{qb^2 h^2}{128}$$

II. Пользуясь приемом использования симметричности деформаций, будем рассматривать раму загруженной двумя симметричными грузами = 1, приложенными один против другого (черт. 46с). При таком рассмотрении, искомое перемещение точки с будет равно половине перемещения, получаемого для принятого фиктивного нагружения. Его выражения будут:

а) при непосредственном интегрировании

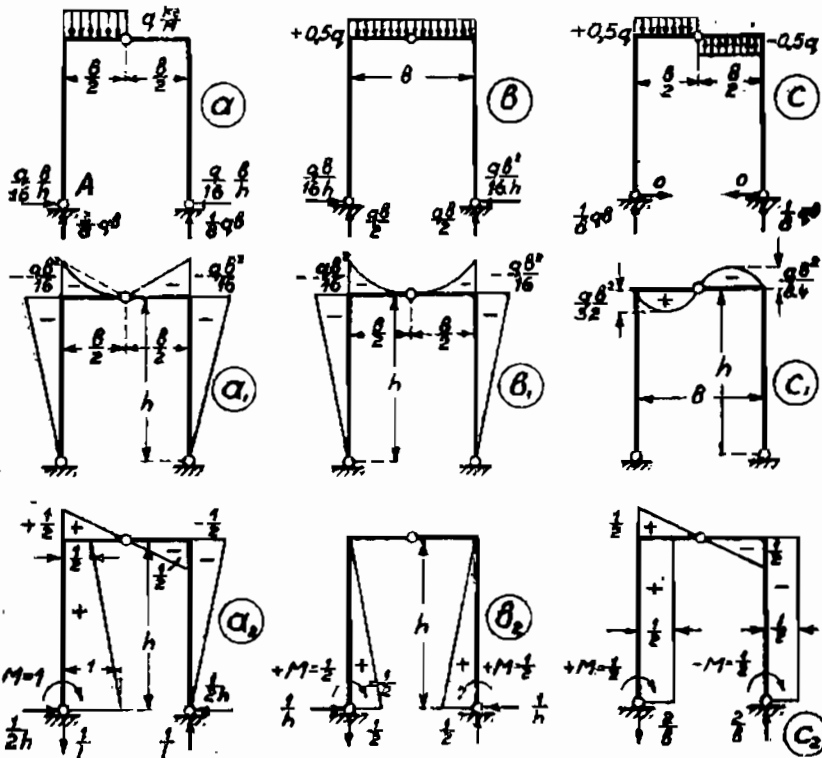
$$EJ_{\text{сч}} = \frac{1}{2} \left\{ - \int_0^{\frac{1}{2}h} \frac{qb^2}{8h} y \frac{1}{2} y dy - \int_{\frac{1}{2}h}^h \frac{qb^2}{8h} y \left[\frac{1}{2} y - \left(y - \frac{h}{2} \right) \right] dy \right\} 2 = - \frac{qb^2 h^2}{128};$$

б) при определении по эпюрам моментов (черт. 46а и с)

$$EJ_{\text{сч}} = - \frac{1}{2} 2 \left(\frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{4} h \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qb^2}{8} \right) = - \frac{qb^2 h^2}{128}.$$

Сравнительное преимущество очевидно.

Пример 16. Пусть требуется определить угол поворота сечения на опоре А трехшарнирной рамы, показанной на черт. 47 и нагруженной



Черт. 47.

сплошной равномерной нагрузкой q кг на пог. м, расположенной на половине ширины рамы.

Для заданного расположения нагрузки эпюра моментов будет иметь вид, показанный на черт. 47а.

Для определения угла поворота в шарнире A прикладываем к нему момент $= 1$; эпюра, соответствующая действию этого момента, показана на *черт. 47a₂*.

Пользуясь этими двумя эпюрами составляем выражение перемещения:

$$EJ\varphi_{Aq} = -\frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{16} qb^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} q \frac{b^2}{8 \cdot 4} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{4} + \\ + \frac{1}{2} h \cdot \frac{1}{16} qb^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{qb^2}{384} (b - 4h).$$

Применяя метод симметричности, можно заданную нагрузку привести к двум видам загрузки: сплошного нагружения рамы нагрузкой интенсивностью $0,5 q$ кг на пог. м (*черт. 47b*) и нагрузкой той же интенсивности, но с разными знаками, расположенной как показано на *черт. 47c*. Эпюры для этих видов загрузки показаны на *черт. 47b₁* и *черт. 47c₁*.

Соответственно этим видам загрузки фиктивная единичная нагрузка должна быть сделана: в первом виде загрузки из двух моментов $= 1/2$ с направлением симметричным относительно оси рамы (*черт. 47b₂*); во втором виде загрузки она должна быть сделана также из двух моментов $= 1/2$, но с направлением несимметричным относительно оси рамы (*черт. 47c₂*). В сумме эта единичная нагрузка приводится к моменту $= 1$, приложенному в шарнире A , согласно требованию задания.

Пользуясь указанными эпюрами составляем выражение перемещения для обоих видов загрузки и суммируем их.

Легко видеть, что в данном случае для принятых симметричных загрузок контуры эпюр проще и составление по ним выражения перемещения проще.

$$EJ\varphi_{Aq} = 2 \left\{ -\frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{qb^2}{16} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{qb^2}{8 \cdot 4} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right\} = \\ = \frac{qb^2}{384} (b - 4h).$$

§ 15. Формула для определения угловых деформаций в фермах. При определении прогибов в фермах и их графическом построении, приходится вычислять деформации углов, образуемых ее стержнями. В целях облегчения вычислений, ниже выведена формула, в которой деформации углов выражены в функции напряжений ее стержней.

Рассмотрим простейший вид фермы — треугольник ABC шарнирный в узлах (*черт. 48*) и определим приращение угла θ_a в этом треугольнике, происходящее под влиянием усилий в стержнях этого треугольника, характеризующихся напряжениями n_a , n_b и n_c .

Для определения угловой деформации $\Delta \theta_a$ прикладываем, как всегда, к стержням AC и AB по моменту $= 1$, в виде пар силами $1/s_c$ и $1/s_b$. Эти пары вызовут в стержнях треугольника единичные усилия \bar{N}_a , \bar{N}_b и \bar{N}_c , величина которых определяется из выражения момента в узле A :

$$\bar{N}_a = \frac{1}{h_a} \frac{1}{s_a} \cdot s_b = + \frac{1}{h_a}$$

из выражения моментов в узлах B и C:

$$\bar{N}_b = -\frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{s_b} h_b \operatorname{ctg} \theta_c = -\frac{1}{s_c} \operatorname{ctg} \theta_c,$$

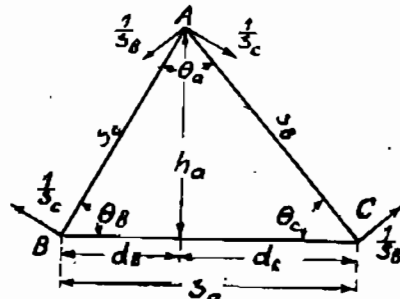
$$\bar{N}_c = -\frac{1}{h_c} \cdot \frac{1}{s_c} h_c \operatorname{ctg} \theta_b = -\frac{1}{s_b} \operatorname{ctg} \theta_b.$$

Для составления выражения деформации угла воспользуемся формулой (77), по которой

$$E \Delta \theta_a = \sum \bar{N} \frac{N}{\omega} s = \sum \bar{N} n s.$$

Подставляя сюда величины N , соответствующие рассматриваемому случаю, получим:

$$E \Delta \theta_a = +\frac{1}{h_a} n_a s_a - \frac{1}{s_b} \operatorname{ctg} \theta_c n_b s_b - \frac{1}{s_c} \operatorname{ctg} \theta_b n_c s_c \dots \dots \dots (105)$$



Черт. 48.

По чертежу $s_a = d_b + d_c$ и так как

$$\frac{s_a}{h_a} = \frac{d_b}{h_a} + \frac{d_c}{h_a} = \operatorname{ctg} \theta_b + \operatorname{ctg} \theta_c,$$

то формулу (105) можно провести к такому виду:

$$E \Delta \theta_a = n_a (\operatorname{ctg} \theta_b + \operatorname{ctg} \theta_c) - n_b \operatorname{ctg} \theta_c - n_c \operatorname{ctg} \theta_b.$$

или

$$E \Delta \theta_a = (n_a - n_b) \operatorname{ctg} \theta_c + (n_a - n_c) \operatorname{ctg} \theta_b \dots \dots \dots (106)$$

Эта формула является общей для определения деформации угла в любом треугольнике по напряжениям его сторон и легко запоминается по виду: деформация угла в треугольнике определяется суммой разностей напряжений в стороне противолежащей и смежной, помноженных на котангенс угла заключенного между ними.

Выражая напряжения через соответствующие им деформации:

$$n_a = E \frac{\Delta s_a}{s_a} \quad n_b = E \frac{\Delta s_b}{s_b} \quad n_c = E \frac{\Delta s_c}{s_c}$$

и, подставив их значения в формулы 105 и 106, получим их в таком виде:

$$\Delta \theta_a = \frac{\Delta s_a}{h_a} - \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{ctg} \theta_c - \frac{\Delta s_c}{s_c} \operatorname{ctg} \theta_b,$$

$$\Delta \theta_a = \left(\frac{\Delta s_a}{s_a} - \frac{\Delta s_b}{s_b} \right) \operatorname{ctg} \theta_c + \left(\frac{\Delta s_a}{s_a} - \frac{\Delta s_c}{s_c} \right) \operatorname{ctg} \theta_b \dots \dots (107)$$

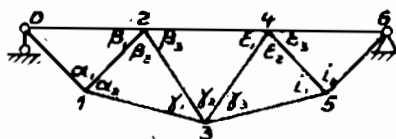
Пользуясь этой формулой, можно определить, например, деформацию угла в треугольнике при неравномерном нагреве сторон его.

При нагреве сторон треугольника на t_a , t_b и t_c градусов, деформация угла

$$\Delta \theta_{at} = \alpha [(t_a - t_b) \operatorname{ctg} \theta_c + (t_a - t_c) \operatorname{ctg} \theta_b].$$

Отсюда следует, что при одинаковом нагреве сторон треугольника, углы треугольника не деформируются.

Зная деформацию углов в треугольнике, не трудно перейти к выражению деформации углов в фермах, которые по условиям неизменяемости своей образуются из треугольников.



Черт. 49.

Так, например, выражение деформации угла при узле 3 в ферме показанной на черт. 49, образующегося из трех углов γ_1 , γ_2 , γ_3 , принадлежащих трем треугольникам 132, 234 и 435, входящим в состав фермы, напишется на основании форм. (106) так:

$$E \Delta \theta_3 = (n_{12} - n_{13}) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (n_{12} - n_{23}) \operatorname{ctg} \beta_2 + (n_{24} - n_{23}) \operatorname{ctg} \beta_3 + \\ + (n_{24} - n_{43}) \operatorname{ctg} \epsilon_1 + (n_{45} - n_{43}) \operatorname{ctg} \epsilon_2 + (n_{45} - n_{35}) \operatorname{ctg} i_1.$$

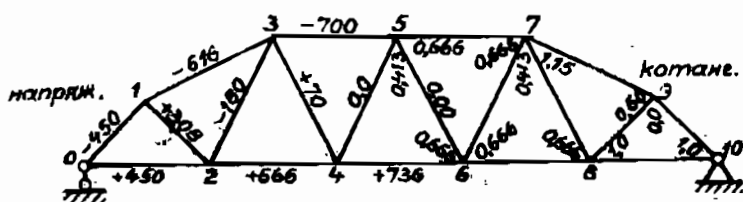
Вообще, если узлы ферм образованы из треугольников, то деформация каждого узла может быть вычислена по формулам вида:

$$\Delta \theta_a = \sum \left[\left(\frac{\Delta s_a}{s_a} - \frac{\Delta s_b}{s_b} \right) \operatorname{ctg} \theta_c + \left(\frac{\Delta s_a}{s_a} - \frac{\Delta s_c}{s_c} \right) \operatorname{ctg} \theta_b \right] \cdot (108).$$

В фермах с более сложным очертанием, в состав образования решетки которых входят четырехугольники и другие контуры, применение формул (108) возможно только путем дополнительных переходных расчетов, о чем смотри ниже § 23.

Числовой пример.

Пусть требуется определить деформации углов при узлах нижнего пояса фермы, показанной на черт. 50.



Черт. 50.

Расчетные напряжения n в стержнях фермы и котангенсы углов ее показаны на том же чертеже.

Пользуясь формулой (106) составляем выражения деформаций для углов при узле 2 и 4.

$$E \Delta \theta_2 = (-450 - 450)1 + (-450 - 308) \cdot 0 + (-616 - 308)0,6 + (-616 + 180)1,15 + (70 + 180)0,413 + (70 - 666) \frac{2}{3} = -2280,5$$

$$\Delta \theta_2 = -\frac{2250,5}{2 \cdot 10^6} = -0,0011253.$$

$$E \Delta \theta_4 = (-180 - 666) \frac{2}{3} + (-180 - 70)0,413 + (-700 - 70) \cdot \frac{2}{3} + (-700 + 0) \frac{2}{3} + (0 - 736) \frac{2}{3} = -2065,25$$

$$\Delta \theta_3 = -\frac{2065,25}{2 \cdot 10^6} = -0,0010326.$$

§ 16. Линии влияния перемещений. До сих пор мы рассматривали перемещения или деформации и определяли величину их для заданного положения нагрузки, однако, может возникнуть вопрос об определении возможного наибольшего перемещения данной точки или наклона стержня и т. д. Ответ на этот вопрос может быть дан построением линии влияния перемещения.

Всякая линия влияния, как известно, определяется величиной ординаты под рассматриваемым положением груза. В линии влияния для какой-либо деформации ординаты ее под местом положения груза = 1 должны быть пропорциональны величине деформации. Отсюда вытекает, что для построения линии влияния перемещения δ_{km} надо вычислить величины этих перемещений для ряда положений груза = 1 на системе, отложить эти величины или величины им пропорциональные в виде ординат под положением груза и провести через вершины этих ординат кривую, которая дает очертание искомой линии влияния.

Согласно теореме о взаимности перемещений, по которой

$$\bar{\delta}_{km} = \bar{\delta}_{mk},$$

вычисление искомого перемещения $\bar{\delta}_{km}$, при переменном положении груза = 1, может быть заменено вычислением перемещений $\bar{\delta}_{mk}$ для ряда точек системы вызываемых действием единичной нагрузки, приложенной по направлению исследуемого перемещения. Эти перемещения $\bar{\delta}_{mk}$ будут линейными и представят собой прогибы точек системы, по которым перемещается груз = 1.

Отсюда следует, что линия прогиба системы возникающего от действия единичной нагрузки, приложенной по направлению исследуемого перемещения, является линией влияния этого перемещения.

Этим положением облегчается построение линий влияния перемещений, так как оно позволяет аналитическое построение, связанное с рядом больших вычислений, заменить графическим построением линии прогиба, о чем смотри дальше § 25.

Пример 17. Построить линию влияния перемещения конца кривого бруса, показанного на *черт. 51*.

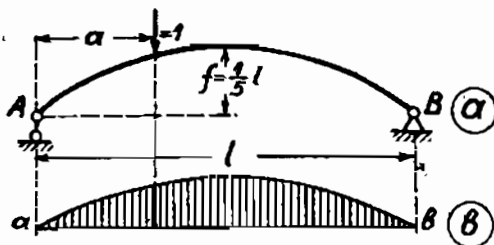
В примере 12 для такого же бруса была вычислена величина перемещения конца его под действием груза P , приложенного на расстоянии a от левого конца, а именно:

$$E\bar{J}_{np} = -P \frac{J}{3I^2} a (l-a) (l^2 + la - a^2),$$

при $P=1$

$$E\bar{J}_{np} = -\frac{f}{3I^2} a (l-a) (l^2 + la - a^2)$$

На основании теоремы о взаимности мы можем написать, что



Черт. 51.

$$E\bar{J}_{pn} = E\bar{J}_{np} = -\frac{1}{3} \frac{f}{I^2}$$

$$a (l-a) (l^2 + la - a^2),$$

чем определяется прогиб в любой точке бруса от действия силы $H=1$, приложенной по направлению возможного перемещения левого конца бруса.

Давая a ряд значений, получим величины прогибов для соответственных точек оси кривого бруса. Отложив их от прямой в виде ординат и соединив их кривой, получим линию возможных вертикальных перемещений оси бруса, т.е. линию прогибов (*черт. 51b*) от действия силы $H=1$, которая вместе с тем является линией влияния для горизонтального смещения точки A .

Пример 18. Построить линию влияния деформации угла $12-0-1$ в ферме, показанной на *черт. 52*.

Величина деформации углов в ферме определяется по формуле (106):

$$E\Delta\alpha = (n_{12,1} - n_{0,12}) \operatorname{ctg}\beta + (n_{12,1} - n_{0,1}) \operatorname{ctg}\alpha.$$

При любом положении груза $P=1$ на расстоянии nd справа от узла 12, усилия в элементах ферм, входящих в формулу деформаций, определяются выражениями:

$$-\bar{N}_{0,12} = \bar{N}_{12,1} = A : \sin\alpha = \frac{m-n}{m} \cdot \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\bar{N}_{0,1} = A \frac{d}{h} = \frac{m-n}{m} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

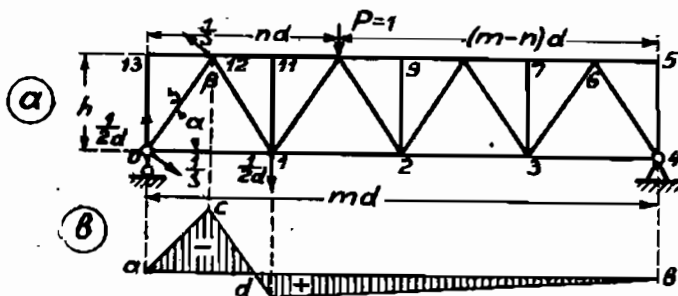
При положении груза $P=1$ в узле 12, усилия в стержнях 0—12 и 0—1 определяются по той же формуле, усилие же в стержне 12—1 определяется по формуле:

$$\bar{N}_{12,1} = (A-1) \frac{1}{\sin \alpha} = -\frac{n}{m} \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Предположив, что площади сечений в стержнях 0—12, 12—1, 0—1 соответственно равны ω_1 , ω_2 и ω_3 , можно выражения деформаций представить в таком виде:

при положении груза $P=1$ в узле 1, т.е. справа от узла 12:

$$E \Delta_{\alpha_{11}} = \frac{m-n}{m} \left[\left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} \right) \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \left(\frac{1}{\omega_2 \sin \alpha} - \frac{1}{\omega_3 \operatorname{tg} \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha \right],$$



Черт. 52.

при положении груза $P=1$ в узле 12:

$$E \Delta_{\alpha_{12}} = \frac{1}{m} \left[\left(-\frac{n}{\omega_2} + \frac{m-n}{\omega_1} \right) \frac{\operatorname{ctg} \beta}{\sin \alpha} + \left(-\frac{n}{\omega_2 \sin \alpha} - \frac{m-n}{\omega_3 \operatorname{tg} \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha \right].$$

Если принять $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ и выразить угол β через угол α

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg}(180 - 2\alpha)} = \frac{-(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha},$$

то после подстановки и приведения получим:

$$\begin{aligned} E \Delta_{\alpha_{11}} &= \frac{m-n}{m} \left[\frac{-2(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} + \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] = \\ &= \frac{m-n}{m \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} [\operatorname{tg}^2 \alpha - \cos \alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E \Delta_{\alpha_{12}} &= \frac{1}{m} \left[\frac{(-2n + m)(-1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} + \left(\frac{-n}{\sin \alpha} - \frac{m-n}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{m \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha} \left[\left(\frac{m}{2} - 1 \right) \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{m}{2} - (m-1) \cos \alpha \right] \end{aligned}$$

В последнем выражении $n=1$.

Из первой формулы непосредственно видно, что при всех положениях груза = 1 справа от узла 12 линия влияния изменяется пропорционально $(m - n) : m$, т.е. по прямой.

При $m = 8$ и $\alpha = 45^\circ$, величины ординат под узлами 12 и 11 будут:

$$E \Delta \alpha_{11} = \frac{6}{8 \cdot 1 \cdot 0,7} (1 - 0,7) = 0,32$$

$$E \Delta \alpha_{12} = \frac{1}{8 \cdot 1 \cdot 0,7} [4 - 1 - 4 - (8 - 1) \cdot 0,7] = -1,05.$$

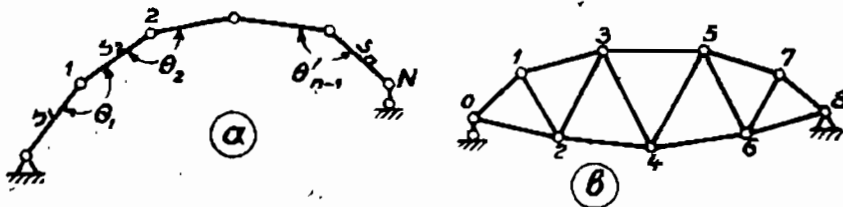
Первая из них положительна, вторая отрицательна, а потому, если предположить передачу груза = 1 во все узлы, то, при принятых положениях, контур линии влияния очертится по ломаной $a c e b$ (черт. 52).

ГРАФИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.

§ 17. Общие соображения. В курсах сопротивления материалов и графической статики подробно разбирается вопрос о графическом построении упругой кривой как веревочной для брусьев с прямой осью; это построение делается для фиктивного нагружения той же балки эпюрой моментов от действительной нагрузки. Нам остается обобщить методику графического построения, распространить ее на другие виды брусьев, на фермы и вообще статически определяемые системы.

Здесь могут быть различные подходы, мы воспользуемся геометрическим анализом построения деформаций, для чего будем исходить из рассмотрения деформации шарнирной цепи.

К виду шарнирной цепи могут быть приведены всякого рода системы. Брус сплошного сечения с любым очертанием оси может быть приведен к виду шарнирной цепи, со включением в шарнирах соответствующих внутренних сил и моментов, чем ограничиваются возможные деформации цепи (*черт. 53a*). Всякая ферма может быть рассматриваема, как образующаяся из отдельных шарнирных цепей, связанных условиями возмож-



Черт. 53.

ных для них деформаций, обусловливаемых внутренними усилиями фермы. Так, например, показанная на *черт. 53b* ферма *AB* может быть рассматриваема как состоящая из шарнирных цепей $0-1-3-5-7-8$, или $0-1-2-3-4-5-6-7-8$, или $0-1-2-4-6-8$ и т. д. К такому же виду шарнирных цепей приводятся более сложные и комбинированные системы, которые в основе своего образования всегда имеют или простые брусья или простую ферму.

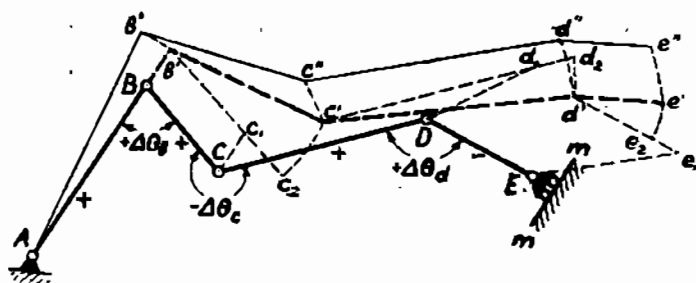
§ 18. Построение диаграммы перемещений для шарнирной цепи. Для выяснения вопроса о построении перемещений в шарнирных цепях рассмотрим произвольную цепь $A-B-C-D-E$ (*черт. 54*), в которой

каждое звено получило некоторую продольную деформацию $\pm \Delta s$ и каждый угол получил некоторую угловую деформацию $\pm \Delta \theta$. Величины этих деформаций определяются аналитически по величине внутренних сил N или моментов M , как это было показано в предыдущих параграфах.

Прежде всего проследим, как геометрически построится перемещение каждого шарнира цепи в отдельности и всей цепи в целом, являющихся результатом сложения линейных и угловых деформаций.

Для проведения этого построения предположим, что звено AB цепи не может вращаться вокруг шарнира A . При этом предположении шарнир B может иметь только линейное перемещение, направленное по оси стержня AB и равное долевному удлинению его Δs_1 , при чем соответственно знаку деформации оно будет направлено или в исходящую сторону, если Δs положительно, или во внутрь стержня, если Δs отрицательно.

Перемещение шарнира C будет зависеть от перемещения шарнира B , вследствие чего шарнир C переместится в положение c_1 и это перемещение его Bc_1 будет равно и параллельно перемещению Bb' . Кроме того он получит перемещение $c_1c_2 = \Delta s_2$ от долевого удлинения стержня BC , направленное параллельно оси этого стержня; и, наконец, он получит перемещение по причине деформации угла у шарнира B , вследствие чего точка C опишет дугу c_2c' , которая по малости деформаций вообще может быть заменена касательной, нормальной к направлению стержня $B-C$ и может быть принята равной $s_2 \times \Delta \theta_b = BC \times \Delta \theta_b$. Таким образом, полное перемещение шарнира определяется геометрической равнодействующей Cc' из всех указанных отдельных перемещений.



Черт. 54.

Положение шарнира D будет зависеть от перемещения шарнира C и под влиянием последнего он переместится на величину $Dd_1 = Cc'$.

Далее под влиянием деформации в стержне CD этот шарнир переместится в точку d_2 на величину $d_1d_2 = \Delta s_3$ и $\parallel CD$ и, наконец, под влиянием деформации: во-первых, угла $\Delta \theta_b$ он дополнительно к имевшему место перемещению шарнира C повернется на дугу длиной $= s_3 \Delta \theta_b$ ¹⁾ и, во-вторых, под влиянием деформации угла $\Delta \theta_c$ — на дугу длиной $= s_3 \Delta \theta_c$; в общей сложности он повернется на длину дуги $d_2d' =$

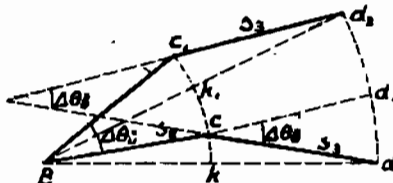
¹⁾ При деформации угла $\Delta \theta_b$, узел D переместится в положение d_2 (черт. 55); отложив дугу $d_1d_2 =$ дуге cc_1 , получим $c_1d_2 = cd_1 = cd = s_3$, угол же $dc_1d_1 = \Delta \theta_b$, а потому дополнительная дуга, описанная узлом D , при повороте на угол $\Delta \theta_b$ будет $= CD \Delta \theta_b = s_3 \Delta \theta_b$.

$s_2(\Delta\theta_b + \Delta\theta_c)$. По малости деформаций это последнее перемещение по дуге может быть принято направленным по касательной, т.е. по направлению нормальному к CD . Таким образом, полное суммарное перемещение шарнира D определится равнодействующим отрезком Dd' .

Аналогичные построения могут быть сделаны для всех шарниров цепи, и мы получим последовательно перемещенные положения их и т. д.

Если конец цепи не стеснен какими-либо условиями в своем перемещении, то он может занять любое положение, но если перемещения его связаны, как это имеет место в рассматриваемом нами случае, в котором конец цепи E может иметь перемещение только по плоскости $m-m$, то полученное при построении деформированного состояния цепи положение точки e' должно удовлетворить этому условию; если оно не удовлетворено, то это является результатом сделанного в начале допущения о неподвижности звена AB , которое при заданных условиях под влиянием деформаций всей цепи должно повернуться.

Исправление этой ошибки должно быть сделано приведением точки e' на линию $m-m$, что может быть достигнуто поворотом всей цепи, как жесткого целого, вокруг шарнира A , вследствие чего она займет положение $A'b''c''d''e''$ и действительные перемещения шарниров в конечном результате будут определяться отрезками Bb'' , Cc'' и т. д.



Черт. 55.

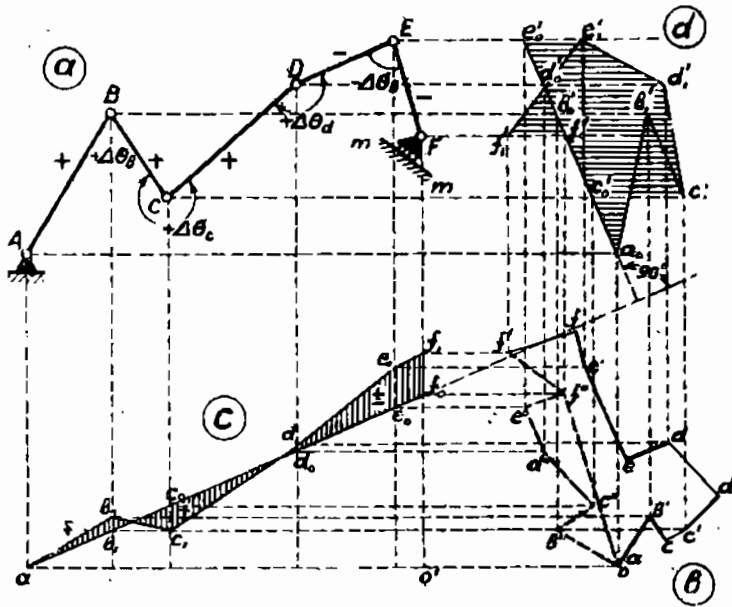
Исправление этой ошибки должно быть сделано приведением точки e' на линию $m-m$, что может быть достигнуто поворотом всей цепи, как жесткого целого, вокруг шарнира A , вследствие чего она займет положение $A'b''c''d''e''$ и действительные перемещения шарниров в конечном результате будут определяться отрезками Bb'' , Cc'' и т. д.

Так как упругие деформации стержней и углов очень невелики по сравнению с основными размерами самой системы, то построение их, показанное выше в масштабе чертежа, представляется невозможным. Это неудобство устраняется тем, что определение перемещений отдельных шарниров возможно, независимо от масштаба чертежа, путем построения отдельной диаграммы перемещений.

Действительно, длина Δs_1 , на которую перемещается шарнир B , может быть построена, исходя из любой точки O (черт. 56b) путем отложения по направлению, параллельному стержню AB отрезка $Ob' = \Delta s_1$. Полное перемещение шарнира C получится, если к перемещению ob' присоединить, во-первых, перемещение $b'c$, вызываемое продольной деформацией Δs_2 стержня BC , которое должно быть отложено по направлению, параллельному этому стержню, и, во-вторых, перемещение cc' , вызываемое деформацией угла $\Delta\theta_b$ и равное по величине $s_2 \Delta\theta_b$, которое должно быть отложено по направлению перпендикулярному к направлению стержня BC или к отрезку $b'c$. Таким образом, полное перемещение шарнира c по величине и направлению определяется отрезком oc' . Полное перемещение шарнира D получится, если к перемещению oc' точки C присоединить отрезок $c'd$, параллельный стержню CD и определяющий перемещение шарнира D под влиянием продольной деформации Δs_3 этого стержня, и отрезок dd' нормальный стержню CD и равный

$s_B (\Delta \theta_b + \Delta \theta_c)$, которым определяется перемещение шарнира D под влиянием деформаций углов $\Delta \theta_b$ и $\Delta \theta_c$; таким образом, полное перемещение шарнира D по величине и направлению определится отрезком od' . Далее аналогичным путем строятся перемещения шарниров E и F , которые по величине и направлению определяются отрезками oe' и of .

В результате построения мы получили, что перемещение шарнира F определяется отрезком of' , наклоненным к плоскости $m-m$, тогда как по условию подвижности направление перемещения шарнира F возможно только по направлению $m-m$. Это несоответствие, как уже было сказано выше, является результатом неправильного предположения о неподвижности исходного стержня AB , которое должно быть исправлено



Черт. 56.

поворотом всей системы вокруг шарнира A . Этому повороту шарнира F вокруг точки A будет соответствовать перемещение нормальное к линии AF .

Эти два перемещения шарнира F , одно происходящее под влиянием деформаций цепи, другое — от поворота, суммируясь, должны дать перемещение по направлению плоскости возможного движения, т.е. направлению $m-m$. Величина последнего определится, если мы разложим отрезок of' на направление перемещения of'' от поворота, проведя of'' нормально к прямой AF и на направление $f''f' \parallel m-m$. Полученный таким образом отрезок $f''f'$ представит собой по величине и направлению действительное перемещение шарнира F , при чем оно будет направлено от точки f'' к f' , так как оно является равнодействующей двух перемещений, из которых одно направлено от f'' к o и второе от o к f' .

Вследствие поворота всей системы вокруг шарнира A , все шарниры системы получают перемещения, которые будут иметь направление, нормальное к прямым, соединяющим эти шарниры с точкой A ; так, например, перемещение шарнира B будет нормально к прямой AB , перемещение шарнира C будет нормально к прямой AC и т. д.; и все они будут проходить через точку O . Что касается величин самих перемещений отдельных шарниров, то они будут пропорциональны их расстоянию от центра вращения, т.е. должны удовлетворять отношениям:

$$\frac{ob''}{of''} = \frac{AB}{AF}; \quad \frac{oc''}{of''} = \frac{AC}{AF} \text{ и т. д. (109)}$$

Эти отношения будут удовлетворены, если на отрезке of'' построить фигуру, подобную очертанию системы; построенная таким образом фигура $ob'' c'' d'' e'' f''$ будет повернута относительно основной фигуры на 90° и своими отрезками ob'' , oc'' of'' определит перемещения шарниров B , C F , происходящее вследствие поворота основной системы вокруг шарнира A .

Складывая эти перемещения с ранее полученными под влиянием деформаций, получим окончательные действительные перемещения шарниров, которые определятся как отрезки замыкающих, построенных на перемещениях от поворота и от деформации. Соответственно этому они будут иметь направление от буквы с двойным значком к буквам с одиночным значком.

Построение диаграммы перемещений имеет то преимущество, что она может быть сделана в любом масштабе, независимо от масштаба чертежа.

При построении ее необходимо учитывать знаки деформаций $\pm \Delta s$ и $\pm \Delta \theta$, откладывая отрезки соответственно этим знакам. Так знак продольной деформации Δs учитывается отложением отрезков по направлению растяжения стержня (на черт. 56 стержни AB , BC) или сжатия (на черт. 50 стержни DE , EF); знак угла поворота $\Delta \theta$ учитывается отложением перпендикулярных отрезков по направлению поворота, соответствующего уменьшению (на черт. 50 угол $\Delta \theta_1$) или увеличению угла (на черт. 50 угол $\Delta \theta_2$, $\Delta \theta_3$).

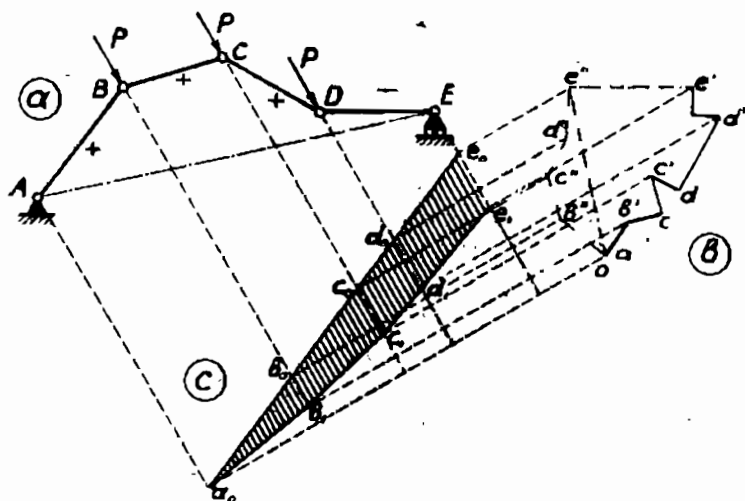
§ 19. Построение эпюр перемещений. Техника в большинстве случаев своих задач нуждается в определении не действительных перемещений всех точек цепи, а проекций их на определенное направление, например, на направление действия сил или нагрузки.

Для выполнения этого построения проводят из всех узлов цепи (черт. 57а) линии, параллельные заданному направлению, и сносят на них проекции отрезков действительных перемещений каждого узла, полученных на диаграмме перемещений (черт. 57а). Так как расстояния узлов цепи от исходного узла A и расстояния исходных точек b'' , c'' e'' связаны между собой соотношениями (109), то проекции их на заданные направления расположатся на одной прямой $a_0 b_0 c_0 d_0 e_0$ (черт. 57с),

без чего эти соотношения не могут иметь места. Точки этой прямой будут служить исходными точками для определения перемещений по заданному направлению, другие концы отрезков этих перемещений будут засекаются проекциями точек b', c', \dots, e' на линиях заданного направления. Полученный таким построением многоугольник $a_0 - b_1 - c_1 - \dots - e_1$ представляет собой эпюру перемещений узлов на заданном направлении.

На *черт. 56* показано построение эпюры для вертикального и горизонтального направления.

Эпюра вертикальных перемещений очерчена многоугольником $a b_1 e_1 d_1 e_1 f_1$ и имеет замыкающую $a_0 f_0$ (*черт. 56c*), она получена снесением с диаграммы перемещений (*черт. 56b*) проекций их на вертикальные

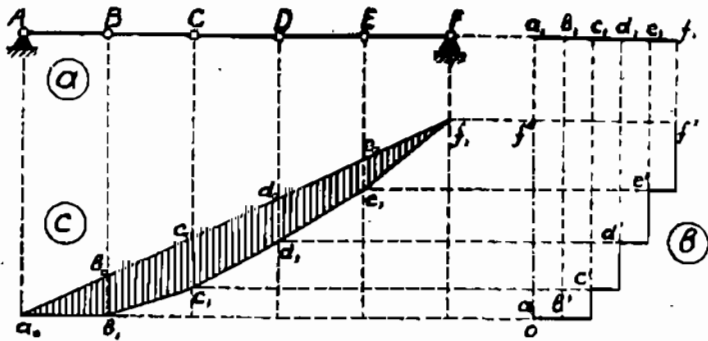


Черт. 57.

линии. Эпюра горизонтальных перемещений (*черт. 56d*) построена путем проектирования тех же перемещений с диаграммы перемещений на горизонталь проведенные через шарниры цепи, таким образом получают точки $a'_0, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1, f'_1$. Точка a'_0 определяется снесением на горизонталь шарнира A начальной неподвижной точки O диаграммы перемещений; через эту точку должна проходить замыкающая эпюры; в то же время замыкающая $a'_0 - f'_0$ должна быть перпендикулярна к направлению $a - f_0$ замыкающей эпюры вертикальных перемещений, что непосредственно вытекает из соотношений выражения (109). Это свойство замыкающей позволяет провести ее в эпюре горизонтальных перемещений. Точки a'_0, b'_0, \dots, f'_0 этой замыкающей служат исходными точками для определения горизонтальных перемещений шарниров. Так, например, горизонтальное перемещение шарнира C определится отрезком $c'_0 c'_1$, перемещение шарнира F отрезком $f'_0 - f'_1$ и т.д.

В технике принято эпюру вертикальных перемещений называть линией прогибов; в соответствии с этим мы будем называть эпюру горизонтальных перемещений линией сдвигов.

В частном случае, когда цепь представляет собой прямую линию (черт. 58), диаграмма перемещений характеризуется тем, что все перемещения, вызываемые удлинениями стержней, имеют одно и то же направление, параллельное цепи, и все перемещения, вызываемые деформациями углов, имеют направление, перпендикулярное к направлению цепи. Если прямая цепь горизонтальна и имеет условие опорной подвижности также в горизонтальной плоскости (а это часто случается в мостовых фермах), то прогибы ее шарниров будут зависеть исключительно от деформации углов и горизонтальные сдвиги их будут зависеть исключительно от удлинений стержней.



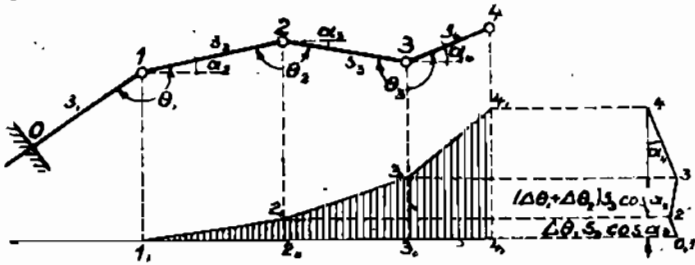
Черт. 58.

Мы показали построение эпюр перемещений при помощи диаграмм перемещений. Поставим себе задачу о построении эпюр перемещения, независимо от диаграмм перемещения, и исследуем этот вопрос, учитывая в отдельности влияния деформации углов и продольной деформации стержней.

§ 20. Определение перемещений при помощи упругих грузов.

Мы показали построение эпюр перемещений при помощи диаграмм перемещений. Поставим себе задачу о построении эпюр перемещения, независимо от диаграмм перемещения, и исследуем этот вопрос, учитывая в отдельности влияния деформации углов и продольной деформации стержней.

I. Влияние деформации углов. Если не учитывать влияния продольных деформаций Δs стержней цепи на величину перемещений шарниров, то перемещение по любому направлению каждого шарнира цепи будет определяться суммой слагаемых из проекций на это направление действительных перемещений, являющихся результатом деформации углов во всех предшествующих шарнирах, что видно из диаграммы перемещений (черт. 59).



Черт. 59.

Так что в общем виде перемещение шарнира k по заданному направлению, согласно диаграммы перемещений, напишется в виде такой суммы:

$$\delta_k = -\{s_2 \Delta \theta_1 \cos \alpha_2 + s_3 (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2) \cos \alpha_3 + s_4 (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 + \Delta \theta_3) \cos \alpha_4 + \dots + s_k (\Delta \theta_1 + \Delta \theta_2 + \dots + \Delta \theta_{k-1}) \cos \alpha_k\} \dots (110)$$

в которых α — углы наклонов стержней цепи к направлению, нормальному к направлению перемещения.

Знак минус (—) введен в силу того соображения, что положительному приращению угла соответствуют подъемы шарниров цепи, т.е. отрицательное перемещение.

Выражение (110) может быть переписано так:

$$\delta_k = - \left\{ \begin{aligned} &\Delta \theta_1 (s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \dots + s_k \cos \alpha_k) + \\ &+ \Delta \theta_2 (s_3 \cos \alpha_3 + \dots + s_k \cos \alpha_k) + \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \Delta \theta_{k-1} s_k \cos \alpha_k \end{aligned} \right\} \dots (111)$$

Если обозначить расстояние каждого шарнира цепи до шарнира k по направлению, перпендикулярному к направлению перемещения, через

$$(a_k - a_1), (a_k - a_2) \dots (a_k - a_{k-1}),$$

то эти расстояния, согласно *черт. 60*, могут быть выражены в функции длин звеньев в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} (a_k - a_1) &= s_2 \cos \alpha_2 + s_3 \cos \alpha_3 + \dots + s_k \cos \alpha_k \\ (a_k - a_2) &= s_3 \cos \alpha_3 + \dots + s_k \cos \alpha_k \\ \dots \dots \dots \\ (a_k - a_{k-1}) &= s_k \cos \alpha_k \end{aligned}$$

Подставив эти длины вместо сумм в выражение (111), приведем его к виду:

$$\delta_k = - \left\{ \Delta \theta_1 (a_k - a_1) + \Delta \theta_2 (a_k - a_2) + \dots + \Delta \theta_{k-1} (a_k - a_{k-1}) \right\}$$

или в обобщенном виде:

$$\delta_k = - \sum_0^{k-1} \Delta \theta (a_k - a) = - \sum_0^{k-1} w (a_k - a) \dots (112)$$

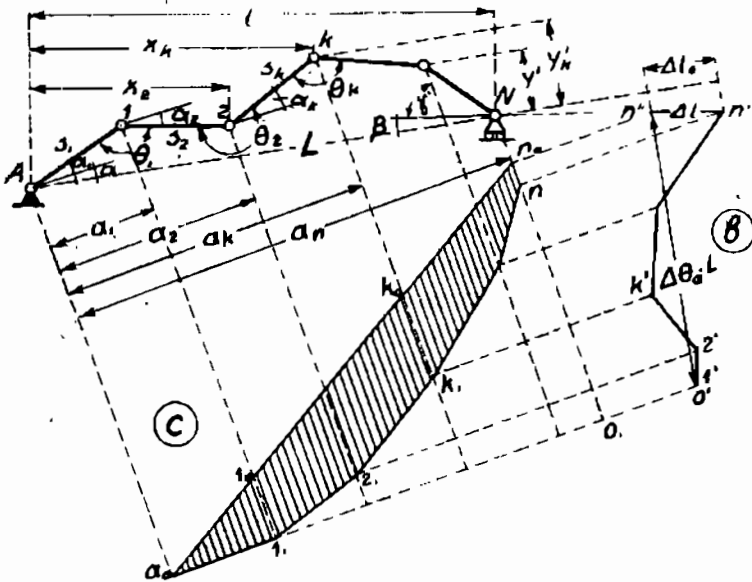
Если принять величины $\Delta \theta$ за фиктивные упругие грузы w , направленные параллельно искомому перемещению, то само перемещение может быть рассматриваемо, как статический момент фиктивных упругих грузов w относительно точки искомого перемещения.

Полученное выражение (112) перемещения определяет собой действительное перемещение только в том случае, если один конец цепи не стеснен в своем движении опорными закреплениями, что имеет место в цепи, заделанной одним концом (*черт. 59*), в которой поворот свободного конца зависит только от деформации углов. Если обозначить расстояние последнего шарнира N от начала цепи по направлению перпендикулярному перемещению через a_n , то перемещение свободного конца цепи (согласно форм. 112) напишется так:

$$\delta_n = - \sum_0^{(n-1)} \Delta \theta (a_n - a) \dots (113)$$

Но если цепь на своих концах связана опорными закреплениями, то учет влияния опорных закреплений, как было выяснено в предыдущем параграфе должен быть сделан, путем поворота всей системы, как одного целого, вокруг неподвижного шарнира A так, чтобы подвижной шарнир другого конца цепи лег на плоскость возможной подвижности.

Предположим, что плоскость движения конца цепи наклонена под углом γ к направлению перемещения (черт. 60а) и что линия опорных шарниров $A-N$, имеющая длину L , наклонена под углом α к направлению нормальному к направлению перемещения. Дуга, на которую должна



Черт. 60.

быть повернута вся система вокруг шарнира A , определяется отрезком on'' (черт. 60b), который может быть рассматриваем, как проекция отрезка $o_1n_1 + n_1n_o$, а потому угол поворота $\Delta\theta_a$ всей системы, соответствующий этой дуге, выразится так:

$$\Delta\theta_a = \frac{1}{L} \cdot \frac{o_1n_1 + n_1n_o}{\cos \alpha} = \frac{o_1n_1 + n_1n_o}{a_n} \dots \dots \dots (114)$$

В этом выражении отрезок o_1n_1 представляет собой величину перемещения опорного узла N по заданному направлению, а потому может быть определен по выражению (113); отрезок же n_1n_o представляет собой перемещение, являющееся результатом скольжения конца цепи по плоскости движения, и может быть выражен через величину этого скольжения $\Delta l = n'n''$, а именно $n_1n_o = \Delta l \cos \gamma$.

Подставляя значения отрезков o_1n_1 и n_1n_o в формулу (114) получим:

$$\Delta\theta_a = \frac{1}{a_n} \left\{ \sum_0^{n-1} \Delta\theta (a_n - a) + \Delta l \cos \gamma \right\} \dots \dots \dots (115)$$

Если плоскость подвижности конца цепи нормальна к направлению искомого перемещения, чему соответствует угол $\gamma = 90^\circ$, то величина угла $\Delta \Theta_a$ определяется выражением:

$$\Delta \Theta_a = \frac{1}{l} \sum_0^{n-1} \Delta \Theta (l-x) = \frac{1}{l} \sum_0^{n-1} w (l-x) \dots (116)$$

в котором $a_n = l$ — расстояние между крайними шарнирами цепи (черт. 60) и $a = x$ — расстояние от промежуточных шарниров до крайнего левого шарнира.

Это выражение может быть рассматриваемо, как опорная реакция балки пролетом $= l$ при действии на нее упругих грузов w .

Определяемая этим путем величина $\Delta \Theta_a$ остается постоянной при всех направлениях перемещений.

Вследствие поворота всей системы на угол $\Delta \Theta_a$, все шарниры ее, независимо от ранее вычисленных перемещений (112) переместятся еще раз, описав дуги пропорциональные их расстояниям от шарнира A и равные $\Delta \Theta_a \times a$, где a расстояние любого шарнира от A по направлению нормальному к направлению перемещения.

Полное же перемещение каждого шарнира, являющееся результатом перемещений от поворота вокруг шарнира A и перемещений от деформации всех углов, лежащих слева от рассматриваемого, определится как разность этих 2-х перемещений:

$$\delta_k = \Delta \Theta_a a_k - \sum_0^{k-1} \Delta \Theta (a_k - a) = \Delta \Theta_a \cdot a_k - \sum_0^{k-1} w (a_k - a) \dots (117)$$

Первый член этого выражения представляет собой момент фиктивной опорной реакции $\Delta \Theta_a$ относительно рассматриваемого шарнира k , а второй момент относительно того же шарнира упругих грузов w слева от него лежащих, а потому это выражение перемещения может быть рассматриваемо как момент от фиктивной нагрузки силами $w = \Delta \Theta$, что соответствует выражению (112) для цепи закрепленной одним концом.

Если плоскость подвижности конца цепи ненормальна к направлению искомого перемещения, то согласно формулы (115) величина поворота системы около шарнира A должна быть скорректирована введением члена

$$\frac{1}{a_n} \Delta l \cos \gamma,$$

и тогда выражение перемещения любого шарнира в соответствии с формулой (117) напишется в таком виде:

$$\delta_k = \Delta \Theta_a a_k + \frac{a_k}{a_n} \Delta l \cos \gamma - \sum_0^{k-1} \Delta \Theta (a_k - a) \dots (118)$$

В частном случае, определения перемещения подвижного конца цепи в направлении плоскости подвижности опор, чему соответствует $\gamma = 0$ и $a_k = a_n = l$, величина перемещения согласно формулы (118) будет:

$$\delta_n = \frac{l}{l} \sum_0^{n-1} \Delta \Theta (l-y) + \frac{l}{l} \Delta l - \sum_0^{n-1} \Delta \Theta (l-y) = \Delta l \quad \dots (119)$$

где y — расстояние шарниров цепи до плоскости подвижности.

Для определения величины Δl в функции упругих грузов w воспользуемся выражением перемещения по направлению линии AN концевых шарниров цепи. Для этого случая расстояние a_k между шарниром N и A , нормальное к направлению перемещения, равно нулю, а потому, если обозначить расстояние остальных шарниров до линии AN через $a = y'$, то выражение (118) перемещения для этого случая приведет к такому:

$$\delta'_n = \sum_0^{n-1} \Delta \Theta y' \quad \dots \dots \dots (120).$$

Из чертежа 60 непосредственно видно, что если плоскость подвижности конца цепи составляет с линией AN опорных шарниров угол β , то перемещение Δl по направлению подвижности может быть определено из условия, что перемещение δ'_n является проекцией перемещения Δl , т.е.

$$\Delta l \cos \beta = \delta'_n,$$

отсюда

$$\Delta l = \frac{1}{\cos \beta} \sum_0^{n-1} \Delta \Theta y' \quad \dots \dots \dots (121)$$

Подставив это значение Δl в выражение (118), получим последнее полностью выраженным в функции нагрузки упругими грузами $w = \Delta \Theta$

$$\delta_k = \frac{a_k}{l} \left\{ \sum_0^{n-1} \Delta \Theta (l-a) + \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \sum_0^{n-1} \Delta \Theta y' \right\} - \sum_0^{k-1} \Delta \Theta (a_k - a) \quad \dots \dots \dots (122)$$

Эта формула позволяет, зная величины $\Delta \Theta$ деформации углов и положение шарниров цепи, вычислить перемещения любого шарнира цепи по любому направлению; в зависимости от последнего будут меняться величины расстояния a и угол γ .

II. Влияние продольных деформаций. Из *черт. 61* можно видеть, что влияние продольных деформаций Δs на величину перемещения любого шарнира по заданному направлению определяется суммой проекций на это направление действительных перемещений, вызываемых продольными усилиями во всех предшествующих стержнях

$$\delta_k = \pm \sum_0^k \Delta s \sin \alpha \quad \dots \dots \dots (123)$$

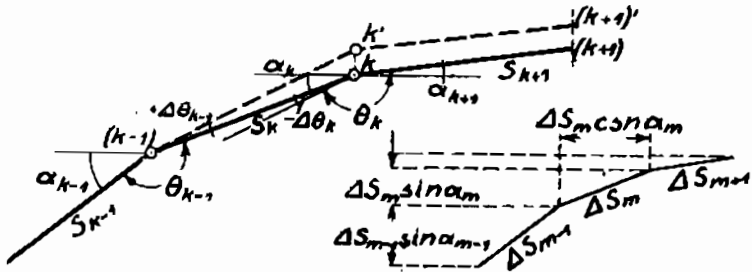
где α — угол наклона каждого стержня к линии нормальной к направлению перемещения.

Знак перемещения зависит от направления стержня и знака усилия в нем.

Аналогично перемещение любого шарнира по направлению нормальному к предыдущему определится суммой проекций $\Delta s \cos \alpha$ тех же деформаций

$$\delta_k' = \pm \sum_0^k \Delta s \cos \alpha \dots \dots \dots (124)$$

Для того, чтобы перейти от вычисления проекций к расчету по упругим грузам, надо выявить: каковой должна быть деформация угла, чтобы перемещение, вызываемое ею, было равно перемещению, вызываемому долевой деформацией.



Черт. 61.

Выше было показано, что при угловых деформациях перемещение вызываемое ими по любому направлению определяется выражением (110):

$$\delta_k = \Delta \theta_k s_k \cos \alpha_k.$$

Следовательно, если линейное перемещение $= \Delta s_k \sin \alpha_k$, то угловая деформация, вызывающая такое перемещение, определится из условия:

$$\pm \Delta s_k \sin \alpha_k = \Delta \theta_k' s_k \cos \alpha_k;$$

отсюда

$$\Delta \theta_k' = \pm \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k \dots \dots \dots (125)$$

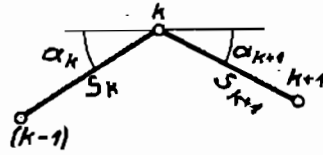
Знак этой деформации зависит от знака продольного усилия и знака угла α ; при положительных значениях углов α , чему соответствует направление звеньев, показанное на *черт. 61a*, и растягивающих усилиях в стержнях, долевая деформация каждого левого звена будет вызывать уменьшение угла, а деформация каждого правого звена — увеличение угла заключенного между ними. Например, удлинение стержня s_k вызывает подъем шарнира K и всех последующих, как это показано пунктиром на *черт. 61a*; этот подъем связан с поворотом стержня s_k , вследствие чего угол $\theta_{(k-1)}$ нарастает, а угол θ_k убывает. Следовательно, при указанном направлении звеньев, принимаемом за основной, полная деформация угла $\Delta \theta_k$, вызывающая те же перемещения узлов цепи, как и долевые деформации, определится суммой:

$$\Delta \theta_k' = - \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \dots \dots \dots (126)$$

Отсюда, например, следует, что если угол α_{k+1} будет иметь отрицательное направление (черт. 62), но усилие в стержне будет положительное, то второй член выраж. (126) будет отрицательным и т. д.

Исключением являются случаи, когда стержни цепи параллельны направлению перемещения, чему соответствует угол $\alpha = 90^\circ$ и $tg \alpha = \infty$. Для этих случаев вычисление фиктивного груза невозможно и приходится вычислять перемещение непосредственно по величинам Δs , о чем сказано ниже.

III. Совместное влияние угловых и продольных деформаций. Сделанные выводы позволяют привести учет перемещений вызываемых угловыми и продольными деформациями в цепи к одновременному определению их как статических моментов от фиктивных грузов w , величина которых определяется суммой



Черт. 62.

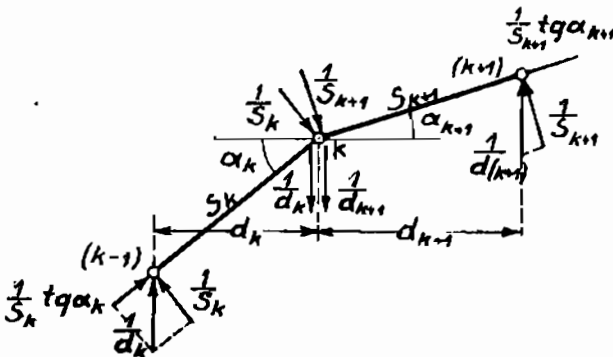
$$w_k^0 = \Delta \theta_k - \frac{\Delta s_k}{s_k} tg \alpha_k + \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} tg \alpha_{k+1} \dots \dots (127)$$

Путем замены величины $\frac{\Delta s_k}{s_k}$ равной ей величиной $\frac{N}{\omega E}$ или $\frac{n}{E}$ можно формулу (127) представить в таком виде:

$$w_k^0 = \Delta \theta_k - \frac{1}{E} (n_k tg \alpha_k - n_{k+1} tg \alpha_{k+1}) \dots (127 \text{ bis})$$

Отметим, что это выражение упругого груза может быть получено также аналитически путем общего приема определения деформации угла при помощи пар с моментами = 1, прикладываемых к стержням охватывающим угол.

Если этим парам дать направление определяемого перемещения, как это, например, показано на черт. 63, то силы, входящие в них, будут определяться величинами:



Черт. 63.

$$\frac{1}{d_k} = \frac{1}{s_k \cos \alpha_k}$$

$$\text{и } \frac{1}{d_{k+1}} = \frac{1}{s_{k+1} \cos \alpha_{k+1}}$$

Действие их на стержни может быть рассматриваемо как действие равнодействующих из слагаемых, из которых одни направлены перпендикулярно к оси стержня и равны:

$$\frac{1}{d_k} \cos \alpha_k = \frac{1}{s_k}$$

$$\frac{1}{d_{k+1}} \cos \alpha_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1}}$$

а другие направлены по оси стержня и равны:

$$\frac{1}{d_k} \sin \alpha_k = \frac{1}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k \qquad \frac{1}{d_{k+1}} \sin \alpha_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_{k+1}.$$

Действие первых слагающих должно быть рассматриваемо как действие пар с моментом $= 1$, силы которых направлены перпендикулярно к осям стержней, т. е. таких пар, которыми вообще пользуются при определении деформации углов и, следовательно, введением их определится деформация угла $\Delta \Theta_k$, зависящая от всех внутренних сил системы.

Что касается вторых слагающих, направленных по осям стержней, то введение их в воображаемую работу системы повлечет за собой включение членов, определяющих влияние продольных деформаций, т. е. членов вида:

$$- \Delta s_k \frac{1}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k \qquad + \Delta s_{k+1} \frac{1}{s_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_{k+1}.$$

Первому из них приписан знак минус (—), потому что при положительном направлении угла α_k единичная слагающая сжимает стержень. Таким образом величина упругого груза w_k^0 , являющаяся в результате действия пар с силами $\frac{1}{d}$, направленными по линиям искомого перемещения, выразится так:

$$w_k^0 = \Delta \Theta_k - \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \dots \dots (127')$$

что вполне соответствует выражению (127) упругого груза и может быть преобразовано в формулу (127 bis).

Таким образом, если вычисление упругих грузов делается при помощи единичных пар с силами, направленными по направлению искомого перемещения, то тем самым вводится в учет влияние на перемещение как деформации углов, так деформации шарнирной цепи.

Из выражения 127 видно, что члены, характеризующие влияние продольных деформаций, зависят от углов α — наклона стержней к направлению перемещения, а потому, при изменении направления перемещения величины упругих грузов должны пересчитываться и только при определении перемещения по направлению перпендикулярному первоначальному можно использовать то же значение α , но с введением соответствующей поправки.

При определении перемещения по направлению перпендикулярному к первоначальному, перемещение (см. 125)

$$\Delta \Theta'_k s_k = \Delta s_k \operatorname{tg} \alpha_k,$$

введенное вместо перемещения от долевой деформации, отзовется на перемещении по перпендикулярному направлению в виде своей проекции:

$$= - \Delta s_k \operatorname{tg} \alpha_k \sin \alpha_k.$$

Чтобы парализовать это влияние, как несоответствующее действительному, необходимо включить в окончательное выражение перемещения корректирующие члены в виде суммы:

$$\sum_0^k \Delta s \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha = \sum_0^k \Delta s \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

и добавить член (см. 124)

$$\sum_0^k \Delta s \cos \alpha,$$

определяющий действительное перемещение от влияния продольной деформации Δs по этому направлению (см. выраж. 124) ¹⁾

Тогда окончательная формула, определяющая перемещение по этому направлению, напишется так:

$$\delta_k' = w_a^o a_k - \sum_0^{k-1} w^o (a_k - a) + \sum_0^k \Delta s \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \sum_0^k \Delta s \cos \alpha \dots (128)$$

Последние два члена в этой формуле могут быть тригонометрически преобразованы

$$\Delta s \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \Delta s \cos \alpha = \frac{\Delta s}{\cos \alpha},$$

а потому

$$\delta_k' = w_a^o a_k - \sum_0^{k-1} w^o (a_k - a) + \sum_0^k \frac{\Delta s}{\cos \alpha} \dots (128 \text{ bis})$$

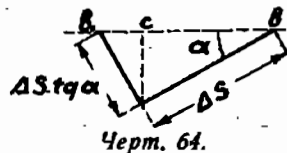
в этом выражении величины w^o вычисляются по форм. (127 или 127 bis).

Если направление перемещений совпадает с направлением хорды, соединяющей рассматриваемый шарнир с опорным шарниром цепи, то выражение перемещения шарнира k приводится к виду (см. черт. 65).

$$\delta_k' = \sum_0^{k-1} w^o y + \sum_0^k \frac{\Delta s}{\cos \alpha} \dots (129)$$

где y — расстояние шарниров цепи до хорды.

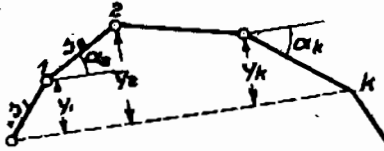
¹⁾ Геометрический смысл этих поправок легко может быть показан на диаграмме перемещений. Если представить себе (черт. 64), что продольная деформация стержня Δs заменена угловой $= \Delta s \operatorname{tg} \alpha$, имеющей направление перпендикулярное к направлению Δs , то введение этой деформации отзовется на перпендикулярном направлении тем, что точка «b» займет положение b_1 . Для исправления этой невязки потребуется ввести поправки, которые исправили бы положение точки b ; эти поправки будут:



$$b_1 c + cb = \Delta s \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha + \Delta s \cos \alpha = \frac{\Delta s}{\cos \alpha}$$

Формулы 128 и 129 иногда называют формулой приращения длины хорды шарнирного многоугольника.

Если учет влияния продольных деформаций не включен в величину деформации углов цепи, то изменение длины хорды шарнирного многоугольника определяется суммой двух деформаций, определяемых формулами (121 и 124):



Черт. 65.

$$\Delta l_k = \sum_0^{k-1} \Delta \theta \cdot z + \sum_0^k \Delta s \cos \alpha \quad (130)$$

где z — ординаты шарниров относительно хорды, а α — углы наклоны звеньев цепи к хорде.

§ 21. Применение веревочного многоугольника для построения эпюр перемещений. В предыдущем параграфе было установлено, что всякое перемещение может быть определено, как статический момент от фиктивных сил w равных угловым деформациям $\Delta \theta$, вызываемым в системе действительной нагрузкой. Из графостатики же известно, что всякий статический момент может быть определен при помощи веревочного многоугольника, как произведение отрезка y , параллельного равнодействующей и измеряемого между крайними сторонами веревочного многоугольника, на полюсное расстояние H :

$$M = y \times H.$$

Применяя это свойство веревочного многоугольника к построению перемещений, надо, приняв величины угловых деформаций за фиктивные силы w , построить для них силовой многоугольник в масштабе, определяемом условием, что полюсное расстояние $H = 1$, и по нему — веревочный многоугольник.

Условие $H = 1$ вытекает из того, что перемещение δ , определяемое статическим моментом в веревочном многоугольнике определяется произведением:

$$\delta = M = y \cdot H = y \cdot 1 \dots \dots \dots (131)$$

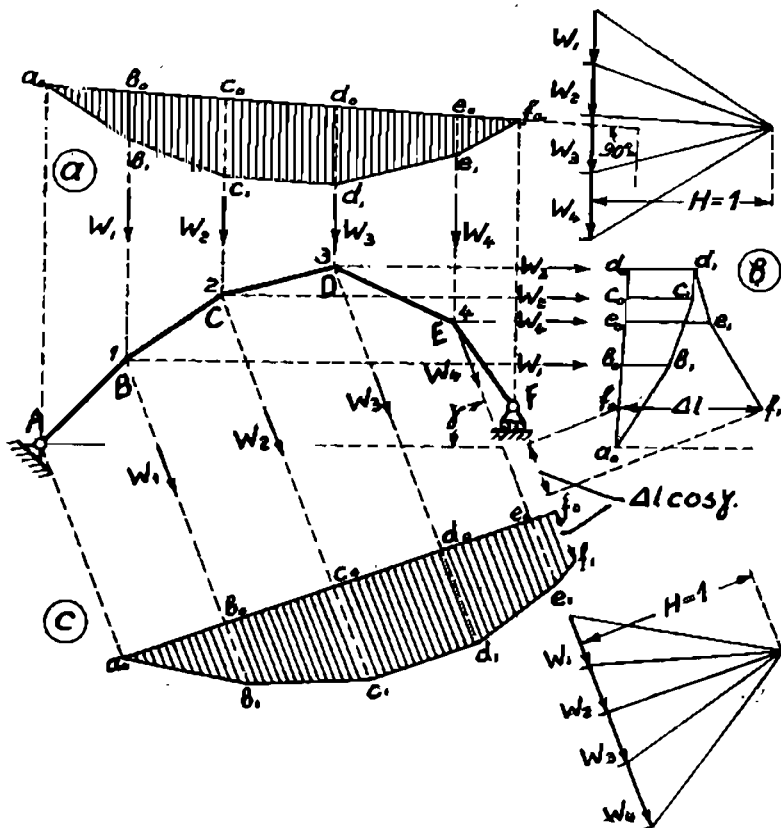
Следовательно, для того, чтобы отрезки между крайними сторонами веревочного многоугольника, построенного для фиктивной нагрузки в виде угловых деформаций, непосредственно определяли перемещения, необходимо, чтобы полюсное расстояние равнялось единице.

Построение веревочного многоугольника для фиктивных грузов $w = \Delta \theta$ производится так же, как для обычных грузов. На *черт. 66* сделано построение веревочных многоугольников для вертикального (*a*), горизонтального (*b*) и для косога (*c*) направления сил.

Если определяется перемещение по направлению перпендикулярному к направлению плоскости подвижности опор, то положение замыкающей веревочного многоугольника определяется нулевыми точками на верти-

калях опорных шарниров (черт. 66а), так как опорные точки не имеют смещения в этом направлении; лучом же параллельным замыкающей в силовом многоугольнике засекаются опорные реакции упругих грузов (см. выр. 116).

При определении перемещения по направлению подвижности опор, т.е. по направлению перпендикулярному к предыдущему случаю, направление замыкающей в новом веревочном многоугольнике, построенном для фиктивных сил, повернутых на 90° , будет перпендикулярно к направлению замыкающей предыдущего случая (см. § 18), что дает возможность



Черт. 66.

провести ее через точку a_0 , соответствующую положению шарнира неподвижной опоры (черт. 66 в). В результате этого построения отрезком f_0f_1 определяется величина перемещения Δl по направлению подвижности опор.

Зная величину отрезка Δl можно построить эпюру перемещения по любому направлению. Как следует из вывода форм. (118) положение замыкающей в этом случае должно быть исправлено поворотом на величину:

$$\delta_n = \pm \Delta l \cos \gamma,$$

в которой γ — угол наклона плоскости движения опор к направлению искомых перемещений. Отрезок δ_n откладывается от первоначального

положения замыкающей $a_0 f_1$ (черт. 66с) по направлению линии, проходящей через опорный шарнир, кверху или книзу, смотря по направлению перемещения Δl ; полученной этим построением точкой f_0 определяется положение новой замыкающей $a_0 f_0$, соответствующей условиям опорного закрепления.

Построенными описанным путем веревочными многоугольниками определяются перемещения всех точек цепи по заданному направлению, поэтому сам веревочный многоугольник, при полюсном расстоянии равном единице, представляет собой эпюру возможных перемещений.

В выражение деформаций непременно входит общим множителем коэффициент упругости E , который делает численные величины деформаций незначительными. Вынесение его как общего множителя позволяет увеличить числовые значения деформаций и тем облегчить их отложение на силовом многоугольнике. Но так как с изменением величины сил изменяется величина самого многоугольника, то для устранения этого необходимо соответственно увеличить полюсное расстояние, т.е. помножить его на величину E .

Построение веревочного многоугольника проводится в масштабе чертежа системы обычно уменьшаемом в k раз против натуральной величины; следовательно, чтобы получить перемещения в натуральную величину, необходимо в k раз уменьшить полюсное расстояние.

Наконец, надо иметь в виду, что перемещения в системах вообще незначительны и даже в натуральном размере трудно измеряемы, а потому целесообразным представляется получить их для производства измерений увеличенным в m раз. Такое увеличение их в веревочном многоугольнике может быть получено путем уменьшения полюсного расстояния в m раз.

Таким образом, выбор единицы масштаба в силовом многоугольнике должен делаться так, чтобы отрезок, определяющий собой величину $H=1$, удовлетворял изложенным выше условиям, т.е. определялся по формуле:

$$H=1 \frac{E}{k \cdot m} \dots \dots \dots (132)$$

Если, например, принять, что $E=21 \cdot 10^6$, что уменьшение масштабного чертежа $k=300$, что желательное увеличение действительных перемещений $m=14$, то величина отрезка, определяющего H , исчислится так:

$$H=1 \cdot \frac{21 \cdot 10^6}{300 \cdot 14} = 500.$$

Следовательно, если принять на чертеже длину этого отрезка $= 5 \text{ см}$, то силовой масштаб определяется условием $1 \text{ см} = 100$.

Этот же вопрос о переходном множителе от веревочного многоугольника к эпюре прогиба может быть решен в обратном порядке, а именно— задавшись полюсным расстоянием вычислить переводный коэффициент $1:m$, который согласно выражения (132) определится так:

$$\frac{1}{m} = \frac{H k}{E} \dots \dots \dots (132 \text{ bis})$$

Отметим еще одно свойство, непосредственно вытекающее из построения эпюры перемещений, как веревочного многоугольника.

По свойству веревочного многоугольника лучи, проводимые в силовом многоугольнике параллельно направлению сторон веревочного многоугольника, засекают на силовом многоугольнике отрезки, равные поперечным силам в сечении, соответствующем взятой стороне.

В рассматриваемых случаях деформации цепи силовой многоугольник образуется из фиктивных упругих грузов $w = \Delta\theta$, а потому отрезки, засекаемые на нем лучами, параллельными сторонам веревочного многоугольника, представляют собой сумму угловых деформаций, слева от рассматриваемого сечения лежащих.

Отсюда, как общее правило, что полный угол поворота любого стержня цепи может быть определен как поперечная сила от фиктивных упругих грузов.

§ 22. Эпюры перемещений в системах со сплошным сечением. В системах со сплошными сечениями под действием внешних сил возникают моменты, нормальные и поперечные силы; влиянием последних на величину деформации и перемещений обычно пренебрегают.

1) Влияние моментов. Под влиянием изгибающих моментов оси систем изгибаются и смежные сечения их наклоняются одно относительно другого на угол $\Delta\varphi$, величина которого, согласно теории изгиба, определяется выражением:

$$\Delta\varphi = \frac{M}{EJ} ds \dots \dots \dots (133).$$

Если рассматривать ось таких систем как бы состоящей из отдельных звеньев длиной ds , соединенных между собой воображаемыми шарнирами и находящихся в равновесии под действием внешних сил и внутренних моментов, то приращения углов $\Delta\varphi$ могут быть приняты за фиктивные грузы и использованы для определения перемещений по формулам (112 и 117).

Подставляя выражения $\Delta\varphi$ приращений углов в формулу (117), приводим ее к виду:

$$\delta_x = \frac{1}{E} \left[\frac{a_k}{a_n} \sum_0^{n-1} \frac{M}{J} ds (a_n - a) - \sum_0^{k-1} \frac{M}{J} ds (a_k - a) \right]. (134).$$

При постоянном моменте инерции:

$$\delta_k = \frac{1}{EJ} \left[\frac{a_k}{a_n} \sum_0^{n-1} M ds (a_n - a) - \sum_0^{k-1} M ds (a_k - a) \right]. (135).$$

Так как $M ds$ представляет собой элементарные площади эпюры моментов, а произведения $M ds (a_n - a)$ и $M ds (a_k - a)$ представляют собой моменты этих площадей эпюры: первое относительно опорного конца цепи, а второе относительно сечения k , в котором определяется перемещение, то, следовательно, величина линейного перемеще-

ния любой точки системы может быть определена как момент фиктивной нагрузки площадью эпюры моментов, рассматриваемой в условиях закрепления концов системы.

Это положение известно из рассмотрения упругой кривой при изгибе прямых брусьев, как веревочной кривой, что, таким образом, является частным случаем деформации шарнирной цепи.

Если моменты инерции не постоянны по длине участков системы, то удобным представляется принять какой-либо средний момент инерции J_o , а остальные рассматривать по величине их отношений $J_o : J_k$. При этом условии величина перемещения напишется так:

$$\delta_k = \frac{1}{EJ_o} \left[\frac{a_k}{a_n} \sum_0^{n-1} \frac{J_o}{J_1} M ds (a_n - a) - \sum_0^{k-1} \frac{J_o}{J} M ds (a_k - a) \right] \quad (136).$$

Разница в вычислении по этой формуле по сравнению с предыдущей будет заключаться в том, что в ней за фиктивную нагрузку должны приниматься не действительные площади эпюры моментов, а измененные в отношении $J_o : J$.

Изложенные соображения показывают, что для таких систем при построении эпюр перемещений помощью веревочного многоугольника, за фиктивные силы должны быть приняты величины:

$$EJw = M ds \quad \text{или} \quad EJ_o w = \frac{J_o}{J} M ds.$$

Для этих сил должен быть построен силовой многоугольник в масштабе сил удовлетворяющем условию $H=1$ с учетом соображений изложенных в § 21. По этому силовому многоугольнику строится веревочный многоугольник, замыкающая которого должна удовлетворять условиям опорных закреплений.

2) Влияние момента и продольных сил. При совместном действии момента и продольных сил, величины фиктивных грузов вычисляются по форм. (127), которая приводится к виду:

$$Ew_k^o = \frac{M_k}{J} ds - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \dots \quad (137).$$

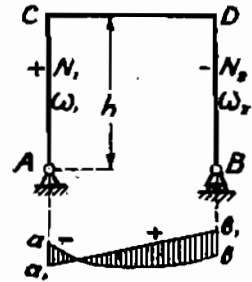
По этим фиктивным грузам строятся силовой и веревочный многоугольники.

Могут иметь место случаи, когда направление осей некоторых изломов системы будут параллельны направлению, определяемого перемещением; для таких изломов α будет $= 90^\circ$ и $\operatorname{tg} \alpha$ будет равен бесконечности, что делает невозможным введение таких членов в формулу фиктивных грузов. В этих случаях учет влияния продольных деформаций таких стержней на величину перемещений надо делать непосредственно по эпюре перемещений, изменяя сумму ее ординат на величину деформации стержня

$$\Delta s = \frac{N}{E\omega} s.$$

Например, при построении эпюры прогиба в брус, показанном на *черт. 67*, в котором для стержней *AC* и *BD* $tg \alpha = \infty$, а для стержня *CD* $\alpha = 0$, эпюра прогибов должна быть построена только по фиктивным грузам от влияния моментов; эта эпюра будет иметь вид некоторой кривой *ab* (*черт. 67в*). Влияние на эту эпюру продольных деформаций стержней *AC* и *BD*, из которых первый испытывает растяжение $+\Delta s_1$, а второй сжатие $-\Delta s_2$ учитывается следующим путем: стержень *AC* вызывает поднятие конца *C* на величину $\Delta s_1 = \frac{N_1 h}{E \omega_1}$, что влечет уменьшение ординат эпюры *ab*, стержень же *BD*, вызывает опускание точки *D* на величину $\Delta s_2 = -\frac{N_2 h}{E \omega_2}$, чему соответствует увеличение ординат эпюры *ab*. Отложив отрезки $+\Delta s_1$ книзу от точки *a* и $-\Delta s_2$ вверх от точки *b*, проводим новую замыкающую *a₁b₁*. Заштрихованная эпюра покажет действительные перемещения части *CD* системы с учетом влияния изгибающих моментов и продольных сил.

Если определяются перемещения, происходящие под влиянием изменения температуры, то определение величин фиктивных грузов должно быть сделано по деформациям, вызываемым влиянием изменения температуры, а именно:



Черт. 67.

1) угол поворота сечений определяется по форм. (29):

$$\Delta \varphi_i = \alpha \Delta t \frac{ds}{c},$$

где Δt — разница температур крайних волокон сечения, а c — высота сечения.

2) Удлинение стержней по форм. (28):

$$\Delta s_i = \alpha t \cdot s,$$

где t — температура осевого волокна.

Таким образом величина фиктивных упругих грузов будет определяться по формуле:

$$W_i^0 = \alpha \Delta t \frac{ds}{c} - \alpha t \cdot tg \alpha_k + \alpha t \cdot tg \alpha_{k+1} \dots \dots \dots (138).$$

По этим грузам строятся силовой и веревочный многоугольники.

3) Влияние поперечных сил. При изучении перемещений шарнирной цепи учитывалось влияние деформации углов, обусловливаемое внутренней неизменяемостью системы, и влияние продольных сил, направленных по осям стержней между шарнирами. В системах со сплошными сечениями направление внутренней равнодействующей может не совпадать с направлением оси стержня, что повлечет за собой разложение ее на нормальную и поперечную силу.

Учет влияния поперечных сил на величину перемещений цепи отразится на общей диаграмме перемещений тем, что в нее должны будут

войти отрезки, определяющие перемещение каждого шарнира под влиянием сдвига.

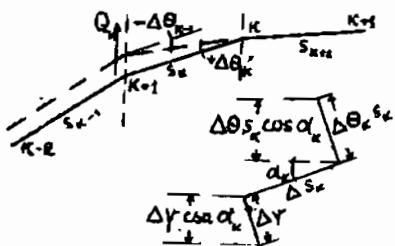
Величина сдвига каждого стержня будет определяться величиной

$$\Delta \gamma_k = k \frac{t}{G} s_k,$$

где k — коэффициент, зависящий от формы сечения, $\Delta \gamma_m$ — деформация от сдвига и s_k — длина стержня ¹⁾.

На диаграмме перемещений (черт. 68) влияние сдвигов будет учитываться отложением отрезков $= \Delta \gamma$ по направлению нормальному к осям соответствующих стержней.

Проекции этих отрезков на направление искомого перемещения будут определяться величинами:



$$\begin{aligned} \Delta \gamma_k \cos \alpha_k &= k \frac{t_k}{G} s_k \cdot \cos \alpha = \\ &= \frac{k}{G} t_k a_k, \end{aligned}$$

Черт. 68.

Нетрудно видеть, что влияние их на величину перемещений будет аналогично влиянию деформаций $\Delta \theta$ углов цепи (см. выраж. 111).

Отсюда непосредственно можно сделать вывод, что учет влияния поперечных сил отзовется на величине фиктивных грузов w тем, что в их выражение, аналогично членам $\Delta \theta_n$, должны будут войти члены $\frac{k}{G} t_k$ и $\frac{k}{G} t_{k+1}$, характеризующие влияние поперечных сил в прилегающих стержнях; положительное значение поперечной силы вызывает увеличение угла справа лежащего и убывание угла слева лежащего. Таким образом, при учете влияния поперечных сил выражение (127) преобразуется в такое:

$$w_k^o = \Delta \theta_k - \frac{\Delta s_k}{s_k} \operatorname{tg} \alpha_k + \frac{\Delta s_{k+1}}{s_{k+1}} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + \Delta \gamma_k - \Delta \gamma_{k+1}, \quad (139)$$

которое может быть приведено к виду (см. выраж. 137):

$$E w_k^o = \frac{M}{J} ds - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + k \frac{E}{G} t_k - k \frac{E}{G} t_{k+1}. \quad (140)$$

Пример 19. Построить эпюры перемещений в раме, показанной на черт. 69 и нагруженной сплошной равномерной нагрузкой $p = 500 \text{ кг/п. м}$.

Опорные реакции рамы:

$$A = \frac{1}{10} \cdot 500 \cdot 6 \cdot 3 = 900 \text{ кг.} \quad B = \frac{1}{10} \cdot 500 \cdot 6 \cdot 7 = 2100 \text{ кг.}$$

¹⁾ Так как учет влияния сдвига относится к системам со сплошным сечением, то длина s_k рассматривается как бесконечно малая.

Вычисление фиктивных грузов w сделано по эпюре моментов. Построение последней сделано по ординатам, которые были вычислены через определенные равные промежутки: на наклонном стержне рамы через $\Delta s = 1,00$ м и на горизонтальном стержне $\Delta s = 1,2$ м.

В нижеследующей таблице выписаны: величины ординат эпюры, площади отдельных участков эпюры моментов и те же площади, измененные в отношении моментов инерции.

Это изменение сделано для горизонтальной части рамы, в которой отношение моментов инерции $J_0 : J_1 = 1 : 1,2$.

№М участ.	Длина участка ds —м	Расстояние от лев. опор. a —м	Длина загрузки x —м	Ордината эпюры мом. кг м	Площадь эпюры мом. кг м ²	Приведенная площадь $\frac{J_0}{J}$ кг м ²	Упругие грузы W кг м ²
0	0	0	—	—	360	360	w_1
1	1,0	0,8	—	720	—	—	—
2	1,0	1,6	—	1440	1080	1080	w_2
3	1,0	2,4	—	2160	1800	1800	w_3
4	1,0	3,2	—	2880	2520	2520	w_4
5	1,0	4,0	—	3600	3240	3240	w_5
6	1,2	5,2	1,2	4320	4752	3960	w_6
7	1,2	6,4	2,4	4320	5184	4320	w_7
8	1,2	7,6	3,6	3600	4752	3960	w_8
9	1,2	8,8	4,8	2160	3456	2880	w_9
10	1,2	10,0	6,0	0	1206	1080	w_{10}

Вычисленные площади приняты за упругие грузы w , точки приложения которых отнесены к осям рамы.

При построении силового многоугольника полюсное расстояние принято $H = 10\,000$ кг м², самое же построение его сделано в масштабе $1 \text{ см} = \frac{1}{3} 10^4$.

По этому силовому многоугольнику построены веревочные многоугольники для вертикального и горизонтального направления угругих грузов. Так как обе опоры не имеют смещения в вертикальном направлении, то замыкающая $a_1 b_1$ первого многоугольника определяется пересечением крайних лучей веревочного многоугольника с опорными вертикалями. Замыкающая $a_2 b_2$ во втором многоугольнике должна проходить через точку a_2 , как неподвижную, и должна быть перпендикулярна к замыкающей $a_1 b_1$ первого многоугольника.

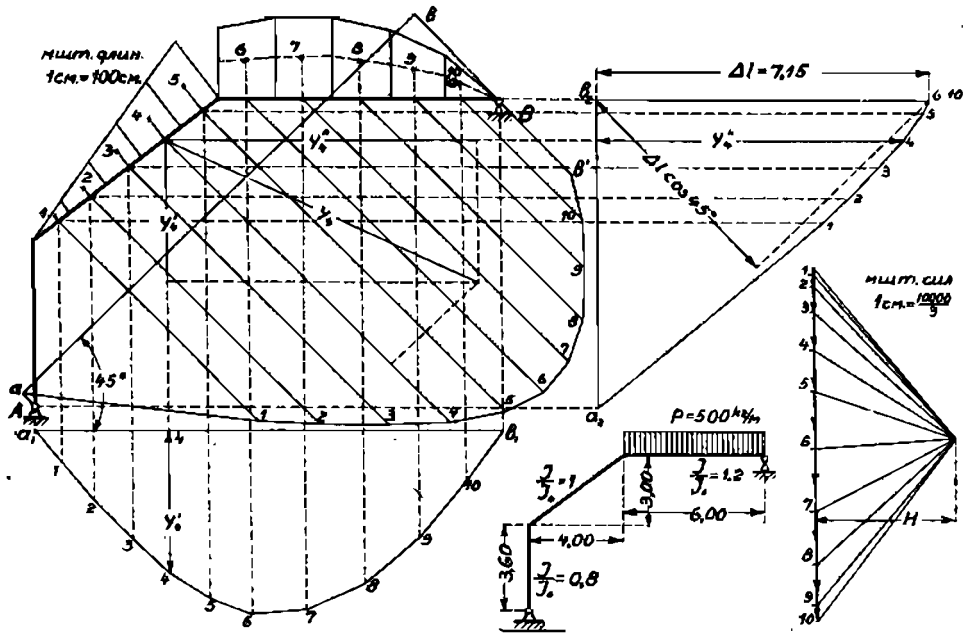
Переход от веревочного многоугольника к эпюрам перемещений должен быть сделан введением масштабного множителя, который определяется из условия (132):

$$\frac{1}{m} = \frac{H \cdot K}{E J_0} = \frac{10^4 \cdot 100^3 \cdot 100}{2 \cdot 10^6 \cdot J_0} = \frac{10^4}{2 \cdot J_0}$$

Если, например, принять $J_0 = 80\,000 \text{ см}^4$, то действительные перемещения будут в 16 раз меньше полученных построением.

Пользуясь этими двумя взаимноперпендикулярными эпюрами, можно определить действительное перемещение любой точки рамы, которое построится, как геометрическая равнодействующая из вертикального и горизонтального перемещений этой точки. Такое построение сделано на черт. 69 для точки 4.

На том же чертеже сделано построение эпюры перемещений для направления сил под углом 45° к горизонту. Положение замыкающей



Черт. 69.

в ней определяется из условия, что проекция перемещения конца B на это направление $bb' = \Delta l \cdot \cos 45^\circ$ и в рассматриваемом случае оно должно быть прибавлено к эпюре перемещений, полученных построением веревочного многоугольника.

Величина Δl может быть определена аналитически.

Фиктивная опорная реакция (A) по форм. (116):

$$\frac{1}{EJ_0} [A] = \frac{1}{l} \sum_0^{n-1} w (l-a) = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2} \cdot 3600 \cdot 5 \cdot 7,33 - 3600 \cdot 5,6 - \right. \\ \left. - 4320 \cdot 4,21 - 3960 \cdot 3,0 - 2830 \cdot 1,87 - 1080 \cdot 0,8 \right) = 12237 \text{ кг м}^2.$$

Момент фиктивных сил относительно шарнира B (по форм. 117):

$$\frac{1}{EJ_0} [M_B] = \frac{1}{EJ_0} \left\{ [A] h - \sum_0^{n-1} w y \right\} = \\ = \frac{1}{EJ_0} \left(12237 \cdot 6,6 - \frac{1}{2} 3600 \cdot 5 \cdot 1 \right) = \frac{71814}{EJ_0} \text{ кг м}^3;$$

отсюда перемещение

$$\Delta l = \frac{71814 \cdot 100^3}{2 \cdot 10^6 \cdot J_0} = \frac{71814}{2 J_0} \text{ см}_0'$$

по построению

$$\Delta l = 7,15 \cdot \frac{1}{m} = \frac{7,15 \times 10^4}{2 J_0} \text{ см.}$$

Пример 20. Определить перемещения оси кривого бруса, показанного на *черт. 70*, под действием горизонтальной силы H , приложенной у подвижной опоры, как показано на *черт. 70* с учетом влияния моментов, продольных и поперечных сил.

Ось бруса очерчена по дуге круга радиусом $r = \frac{36}{\pi}$.

Центральный угол дуги 120° .

Длина оси бруса $L = 2 \cdot 36 \cdot \frac{120}{360} = 24 \text{ м.}$

Расстояние между опорными шарнирами $l = 2 r \cdot \sin 60^\circ = 19,84 \text{ м.}$

Для построения эпюры прогибов графическим путем разбиваем брус по длине на 12 равных частей, длиной каждая $\Delta s = 2,00 \text{ м.}$

Центры тяжести этих участков будут расположены так, как это показано на *черт. 70* на левой половине бруса.

Для вычисления величин упругих грузов воспользуемся формулой (140):

$$Ew_k^0 = \frac{M}{J} ds - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{m+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + k \frac{E}{G} t_k - k \frac{E}{G} t_{k+1}.$$

А) Учет влияния моментов.

Так как нами рассматривается перемещение, вызываемое действием горизонтальной силы H , приложенной по линии опорных шарниров, то моменты во всех сечениях будут пропорциональны ординатам y_k оси бруса, которые определяются по формуле:

$$y_k = r \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2} r = r \left(\sin \alpha_k - \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, величина упругого груза будет определяться выражением:

$$w_k = \frac{y_k}{EJ} ds = \frac{r}{EJ} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \right) ds = \frac{2r \cdot 10^4}{EJ} \left(\sin \alpha_k - \frac{1}{2} \right) = C \cdot \left(\sin \alpha_k - \frac{1}{2} \right).$$

Пользуясь этой формулой, получим:

$$-w_1 = C \left(\sin 35^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,5736 - 0,5) = 0,0736 \cdot C$$

$$-w_2 = C \left(\sin 45^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,7071 - 0,5) = 0,2021 \cdot C$$

$$-w_3 = C \left(\sin 55^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,8191 - 0,5) = 0,3191 \cdot C$$

$$-w_4 = C \left(\sin 65^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,9063 - 0,5) = 0,4063 \cdot C$$

$$-w_5 = C \left(\sin 75^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,9659 - 0,5) = 0,4659 \cdot C$$

$$-w_6 = C \left(\sin 85^\circ - \frac{1}{2} \right) = C(0,9962 - 0,5) = 0,4962 \cdot C,$$

где $C = \frac{2r}{EJ} \cdot 10^4$.

Для построения эпюр перемещений строим силовой многоугольник из вычисленных упругих грузов с полюсным расстоянием $H = 2,5$ единицы и по нему два веревочных многоугольника. Первый (черт. 70 б) при вертикальном направлении упругих грузов для эпюры вертикальных перемещений и второй (черт. 70 в') для горизонтального направления упругих грузов для эпюры горизонтальных перемещений.

Действительные перемещения определяются отрезками между соответствующими крайними сторонами этих многоугольников помножением их на масштабный множитель $1:m$, вычисляемый из условия (132)

$$H = 2,5 = \frac{1}{C \cdot 200 \cdot m}, \text{ откуда } \frac{1}{m} = \frac{2,5 \cdot 2r \cdot 10^4 \cdot 200}{EJ} = 10^7 \cdot \frac{r}{EJ}$$

Таким образом, согласно построения:

1) наибольший сдвиг точки А

$$\delta_{nn} = \frac{r}{EJ} \cdot 10^7 \cdot 3,58$$

2) наибольший прогиб ключевой точки

$$\delta_{pn} = \frac{r}{EJ} \cdot 10^7 \cdot 2,25.$$

По аналитическому подсчету перемещения тех-же точек (см. пример 9)

$$\delta_{nn} = \frac{2r^3}{EJ} \cdot 0,136 = \frac{r}{EJ} \cdot \frac{2 \cdot 36^3}{3,14^3} \cdot 10^6 \cdot 0,136 = 3,573 \cdot 10^7 \cdot \frac{r}{EJ}$$

$$\delta_{pn} = \frac{2r^3}{EJ} \cdot 0,172 = \frac{r}{EJ} \cdot \frac{36^3}{3,14} \cdot 10^6 \cdot 0,172 = 2,26 \cdot 10^7 \cdot \frac{r}{EJ}$$

В) Влияние продольных сил на перемещения определяется членами:

$$Ew_k = n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} - n_k \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{N_{k+1}}{\omega} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} - \frac{N_k}{\omega} \operatorname{tg} \alpha_k,$$

но так как вообще $N = -1 \cdot \cos \alpha$, то общее выражение упругого груза для вертикальных перемещений будет:

$$w_k = \frac{-1}{E\omega} \left(\sin \alpha_{k+1} - \sin \alpha_k \right) = C^1 \left(\sin \alpha_k - \sin \alpha_{k+1} \right)$$

Пользуясь этой формулой, получим:

$$w_1 = C^1 (\sin 57,5^\circ - \sin 50^\circ) = C^1 (0,8434 - 0,7660) = 0,0774 C^1$$

$$w_2 = C^1 (\sin 50^\circ - \sin 40^\circ) = C^1 (0,7660 - 0,6428) = 0,1232 C^1$$

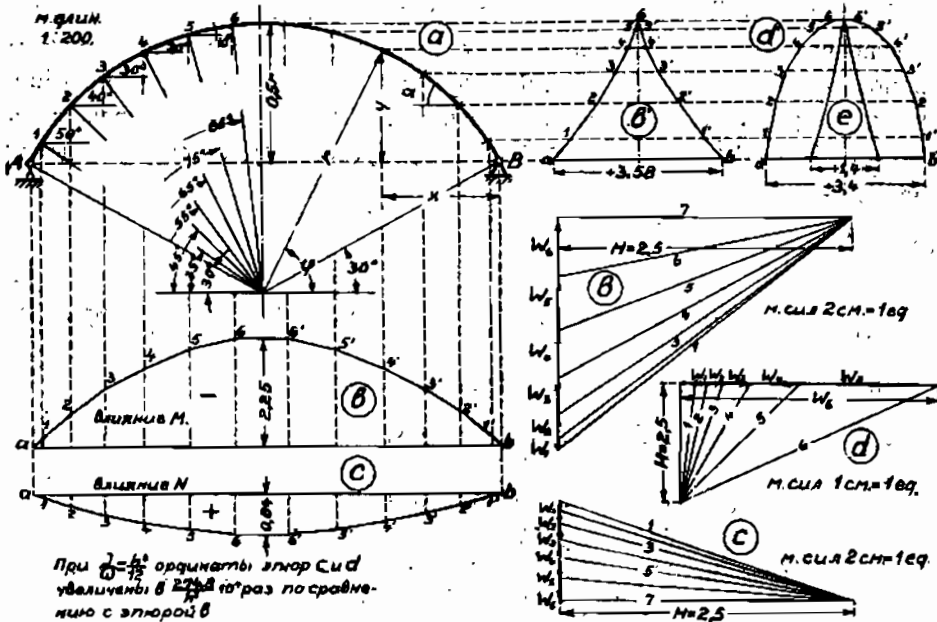
$$w_3 = C^1 (\sin 40^\circ - \sin 30^\circ) = C^1 (0,6428 - 0,5000) = 0,1428 C^1$$

$$w_4 = C^1 (\sin 30^\circ - \sin 20^\circ) = C^1 (0,5000 - 0,3420) = 0,1580 C^1$$

$$w_5 = C^1 (\sin 20^\circ - \sin 10^\circ) = C^1 (0,3420 - 0,1736) = 0,1684 C^1$$

$$w_6 = C^1 (\sin 10^\circ - \sin 0^\circ) = 0,1736 C^1$$

Приняв эти грузы за силы, строим для них силовой многоугольник с полюсным расстоянием $H = 2,5$ и веревочный многоугольник (черт. 70 с).



При $\frac{1}{2} = \frac{h^2}{r}$ ординаты элор С и d увеличены в $\frac{1}{2}$ раз по сравнению с элорой в

Черт. 70.

Ординаты этого многоугольника, измеряемые в масштабе

$$\frac{1}{m} = C^1 \cdot 200 \cdot 2,5 = \frac{500}{E\omega}$$

определяют величины действительных прогибов, вызываемых влиянием продольных сил.

Под ключевой точкой этот прогиб

$$\delta_{пр} = \frac{500}{E\omega} \cdot 0,84 = \frac{420}{E\omega} \text{ см.}$$

По аналитическому расчету в прим. 9 прогиб этой точки определен выражением:

$$\delta_{пр} = \frac{r \cdot h^2}{EJ} \cdot 0,031 = \frac{3600 \cdot 12}{3,14} \cdot 0,031 = \frac{426,5}{E\omega} \text{ см.}$$

в этом выражении $r = \frac{3600}{\pi}$ см и $\omega = \frac{J}{r^3} = \frac{J \cdot 12}{h^2}$ см.²

По сравнению с эпюрой прогибов от влияния момента эпюра прогибов от продольных сил построена в увеличенном масштабе, это увеличение равно отношению масштабов:

$$\frac{10^7 \cdot r}{EJ} : \frac{500}{E\omega} = \frac{10^7 \cdot 36 \cdot \omega}{3,14 \cdot J \cdot 500} = 22,9 \cdot 10^4 \frac{\omega}{J} = \frac{274,8 \cdot 10^4}{h^2}$$

В этом отношении h — высота сечения. Например, при $h = 100$ см эпюра перемещений от влияния продольных сил будет иметь увеличение в 274,8 раз по сравнению с эпюрой — от влияния моментов.

Для определения горизонтальных перемещений от влияния продольных сил, величины упругих грузов должны быть пересчитаны, так как углы наклонов осей отдельных частей бруса к направлению перемещения будут другие; именно они будут дополнительными к рассматривавшимся углам α_k . В связи с этим выражение упругого груза w приведет к такому:

$$Ew_k = n_{k+1} \operatorname{ctg} \alpha_{k+1} - n_k \operatorname{ctg} \alpha_k$$

или

$$w_k = \frac{-1}{E\omega} (\cos \alpha_{k+1} \operatorname{ctg} \alpha_{k+1} - \cos \alpha_k \operatorname{ctg} \alpha_k) = C' (\cos \alpha_k \operatorname{ctg} \alpha_k - \cos \alpha_{k+1} \operatorname{ctg} \alpha_{k+1}).$$

Численные величины новых упругих грузов:

$$w_1 = C' (\cos 50^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ - \cos 57\frac{1}{2} \operatorname{ctg} 57\frac{1}{2}) = C' (0,643 \cdot 0,839 - 0,537 \cdot 0,637) = C' \cdot 0,197$$

$$w_2 = C' (\cos 40^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ - \cos 50^\circ \operatorname{ctg} 50^\circ) = C' (0,766 \cdot 1,192 - 0,643 \cdot 0,839) = C' \cdot 0,374$$

$$w_3 = C' (\cos 30^\circ \operatorname{ctg} 30^\circ - \cos 40^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ) = C' (0,866 \cdot 1,732 - 0,766 \cdot 1,192) = C' \cdot 0,587$$

$$w_4 = C' (\cos 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ - \cos 30^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ) = C' (0,940 \cdot 2,748 - 0,866 \cdot 1,732) = C' \cdot 1,082$$

$$w_5 = C' (\cos 10^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ - \cos 20^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ) = C' (0,985 \cdot 5,671 - 0,940 \cdot 2,748) = C' \cdot 3,003$$

$$w_6 = C' (0 - \cos 10^\circ \operatorname{ctg} 10^\circ) = C' (0 - 0,985 \cdot 5,67) = -C' \cdot 5,59.$$

Так как элемент бруса между точками 6—6' горизонтален и параллелен перемещению, то влияние его на величину перемещения учитываем особо: путем введения в эпюру продольной деформации этого элемента, величина этой деформации

$$\Delta ds = \frac{-N \cdot ds}{E\omega} = \frac{-1 \cdot 200}{E\omega} = -C' \cdot 200 \text{ см.}$$

В масштабе эпюры это составляет

$$\Delta ds = \frac{-C' \cdot 200}{500 \cdot C'} = -0,4 \text{ см.}$$

Построив для вычисленных упругих грузов силовой многоугольник (черт. 70 d) с полюсным расстоянием $H = 2,5$ един., строим по нему веревочный многоугольник (черт. 70 d') и, дойдя в нем до направления фиктивной силы 6, откладываем по ее направлению отрезок $\Delta ds = -0,4$ см; получив точку 6', продолжаем построение веревочного многоугольника до конца.

По этой эпюре горизонтальное перемещение шарнира

$$\delta_{\text{ш}} = 3,4 \cdot \frac{500}{E_{\omega}} = \frac{1700}{E_{\omega}} \text{ см.}$$

По аналитическому расчету (см. прим. 9) то же перемещение

$$\delta_{\text{ш}} = \frac{2 \cdot r \cdot h^2 \cdot 0,0617}{EJ} = \frac{2 \cdot 3600 \cdot 12 \cdot 0,0617}{3,14 \cdot E_{\omega}} = \frac{1698}{E_{\omega}} \text{ см.}$$

в этом выражении величина $\frac{h^2}{J} = \frac{12\rho}{J}$ заменена равной ей величиной $\frac{12}{\omega}$

С) Влияние поперечных сил на перемещения определяется в выше приведенном выражении членами.

$$E\omega_k = +k \frac{E}{G} t_k - k \frac{E}{G} t_{k+1} = k \frac{E}{G} \left(\frac{Q_k}{\omega} - \frac{Q_{k+1}}{\omega} \right).$$

Так как для рассматриваемого бруса вообще

$$Q = -1 \cdot \sin \alpha,$$

то для определения величин фиктивных грузов будем иметь выражение:

$$\omega_k = \frac{-k}{G\omega} (\sin \alpha_k - \sin \alpha_{k+1}) = C'' (-\sin \alpha_k + \sin \alpha_{k+1}).$$

$$\omega_1 = C'' (-\sin 57\frac{1}{2}^\circ + \sin 50^\circ) = C'' (-0,8434 + 0,7660) = -0,0774 C''$$

$$\omega_2 = C'' (-\sin 50^\circ + \sin 40^\circ) = C'' (-0,7660 + 0,6428) = -0,1232 C''$$

$$\omega_3 = C'' (-\sin 40^\circ + \sin 30^\circ) = C'' (-0,6428 + 0,5000) = -0,1428 C''$$

$$\omega_4 = C'' (-\sin 30^\circ + \sin 20^\circ) = C'' (-0,5000 + 0,3420) = -0,1580 C''$$

$$\omega_5 = C'' (-\sin 20^\circ + \sin 10^\circ) = C'' (-0,3420 + 0,1736) = -0,1684 C''$$

$$\omega_6 = C'' (-\sin 10^\circ + \sin 0^\circ) = C'' (-0,1736 + 0) = -0,1736 C''$$

В этих выражениях $C'' = \frac{k}{G\omega}$.

Из сопоставления величин этих упругих грузов с таковыми же, вычисленными для определения вертикальных перемещений от влияния продольных сил, видно, что они отличаются между собой только множителями C' и C'' , при чем множитель C'' может быть выражен через C' , так

$$C'' = \frac{Ek}{G} \cdot \frac{1}{E_{\omega}} = \frac{Ek}{G} C'.$$

Если принять $E:G = 5:2$ и $k = 6:5$, то

$$C'' = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot C' = 3 C'.$$

Таким образом мы пришли к выводу, что упругие грузы, соответствующие влиянию поперечных сил, будут в 3 раза больше таковых же, соответствующих влиянию продольных сил, и противоположны им по знаку.

Такое соотношение позволяет не строить нового веревочного многоугольника для получения эпюры перемещений, а воспользоваться эпюрой (черт. 70 с), построенной при учете влияния продольных сил, но для получения действительных ординат эпюры перемещений от поперечных сил, ординаты эпюры (С) должны быть увеличиваемы в три раза или, что то же, они должны помножаться на множитель

$$\frac{1}{m} \cdot 3 = C \cdot 200 \cdot 2,5 \cdot 3 = \frac{1500}{E\omega}$$

По аналитическому расчету (прим. 9) вертикальное перемещение от влияния поперечных сил также в три раза больше, чем от влияния продольных сил:

Так как величины упругих грузов, вызываемых действием поперечных сил, не зависят от угла наклона элемента, к направлению перемещения, то они могут быть использованы также для определения горизонтальных перемещений.

Для этого строим по силовому многоугольнику (С) веревочный многоугольник (е) (черт. 70).

По этому многоугольнику величина горизонтального перемещения шарнира А определяется отрезком = 1,4. Действительная же величина перемещения:

$$\delta_{\text{нн}} = 1,4 \cdot \frac{1500 \cdot 2100}{E\omega} = \frac{2100}{E\omega} \text{ см.}$$

По аналитическому расчету (см. прим. 9) величина этого перемещения

$$\delta_{\text{нн}} = \frac{2 \cdot r \cdot h^2}{EJ} \cdot 0,077 = \frac{2 \cdot 3600 \cdot 12 \cdot 0,077}{3,14 \cdot E\omega} = \frac{2120}{E\omega} \text{ см,}$$

что совпадает с результатами графического построения.

§ 23. Построение эпюр перемещений в простых фермах. В § 17 уже указывалось на то, что каждая ферма может быть разложена на ряд шарнирных цепей, связанных условиями жесткости самой фермы (черт. 53б). Обычно рассматриваются цепи из однородных стержней, т.-е. поясных или решетчатых. Если по условиям задачи нужно знать прогиб одного пояса, то целесообразно брать цепь из стержней этого пояса, если же нужно знать прогибы или перемещения всех узлов фермы, то целесообразнее брать цепь из стержней решетки, в которую войдут узлы всей фермы.

Таким образом, задача о построении эпюр перемещений в фермах сводится к построению перемещений цепи под влиянием деформации углов, к ней прилегающих, и деформаций стержней, в нее входящих.

В фермах, образованных из простых треугольников, вычисление деформации $\Delta \theta$ любого угла можно делать по формуле (108):

$$E \Delta \theta = \sum [(n_a - n_b) \operatorname{ctg} \theta_c + (n_a - n_c) \operatorname{ctg} \theta_b] \dots (141)$$

Прием вычисления деформаций по этой формуле показан в § 15.

Если не учитывается влияние деформаций стержней цепи, то вычисленные по этой формуле деформации углов ее принимаются за фиктивные грузы w . При этом надо помнить, что все выводы о деформации цепи были сделаны в предположении, что деформации $\Delta \theta$ относятся к углам, расположенным с нижних сторон звеньев цепи, а потому, если по конструкции фермы приходится вычислять деформацию углов, расположенных с верхних сторон звеньев, то эта деформация должна вводиться в выражение фиктивного груза с обратным знаком, так как нарастание верхнего угла сопровождается убыванием нижнего, и наоборот.

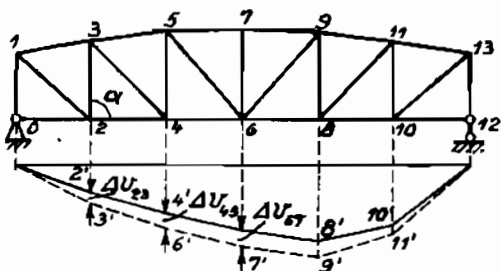
При одновременном учете деформаций углов и стержней цепи величина фиктивных грузов определяется по формуле (127 bis), которая приводится к виду:

$$E W = \sum [(n_a - n_b) \operatorname{ctg} \theta_c + (n_a - n_c) \operatorname{ctg} \theta_b] - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \dots (141 \text{ bis}).$$

При применении этой формулы могут иметь место случаи, когда некоторые из звеньев цепи будут параллельны направлению определяемого перемещения, как это имеет место, например, при определении вертикальных прогибов в фермах со стойками,

если шарнирная цепь ее принята по ходу решетки (черт. 71).

При такой параллельности $\operatorname{tg} \alpha_k$ и $\operatorname{tg} \alpha_{k+1}$ обращаются в бесконечность, что делает невозможным вычисление фиктивных грузов. Обойти это положение можно изменив ход шарнирной цепи, направив ее, например, по одному



Черт. 71.

из поясов 0-2-4-6 (черт. 71), что позволит вычислить упругие грузы в узлах этой цепи и построить для них эпюру перемещений. Переход же к узлам 3-5-7 другого пояса может быть сделан через стойки; действительно, узлы 3, 5, 7 и другие могут переместиться по направлению стойки только на величину удлинения их $= \Delta s$, а потому, если от соответствующих точек эпюры, построенной для пояса 2-4-6, отложить отрезки Δs , то получится эпюра перемещений пояса 3, 5, 7 (см. пример 23).

Если цепь заканчивается опорной стойкой (черт. 71), то эпюра перемещений должна быть исправлена введением в нее влияния деформации стойки, подобно тому, как это было показано для случая рамы черт. 6б (также пример 21).

В фермах со сложной решеткой, образующей в своих пересечениях четырехугольники и другие фигуры (черт. 72, 73), вычисление деформаций

углов непосредственно по формуле (141) невозможно. В этих случаях возможны специальные геометрические переходы от одного угла к другому с использованием той же формулы.

Так, например, если в каком-либо четырехугольнике (*черт. 72*) будут известны усилия в стержнях его образующих и будет определена деформация одного из углов, хотя бы Θ_1 , то определение деформации остальных углов четырехугольника можно сделать исходя из предположения, что между узлами 2 и 4 имеется упругая связь s_{24} , удовлетворяющая условию деформации угла Θ_1 . Это предположение позволит написать следующую зависимость:

$$E \Delta \Theta_1 = (n_{24} - n_{12}) \operatorname{ctg} \alpha_2 + (n_{24} - n_{14}) \operatorname{ctg} \beta_2,$$

откуда

$$n_{24} = \frac{E \Delta \Theta_1 + n_{12} \operatorname{ctg} \alpha_2 + n_{14} \operatorname{ctg} \beta_2}{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \beta_2}.$$

Определив по этой формуле условное напряжение n_{24} , можно вычислить деформации углов Θ_2 или Θ_4 , как сумму деформаций углов их образующих, например:

$$E \Delta \Theta_2 = (n_{14} - n_{24}) \operatorname{ctg} \beta_2 + (n_{14} - n_{12}) \operatorname{ctg} \Theta_1 + \\ + (n_{34} - n_{24}) \operatorname{ctg} \beta_1 + (n_{34} - n_{23}) \operatorname{ctg} \Theta_3.$$

Определение деформации угла Θ_3 может быть сделано по той же формуле из треугольника 3, 4, 2 с условным напряжением n_{24} в стороне 2—4.

Пользуясь вариациями этого приема, можно определять деформации в фермах с различными типами сложных решеток ¹⁾, однако, более общим приемом является вычисление деформации угла аналитически по формуле:

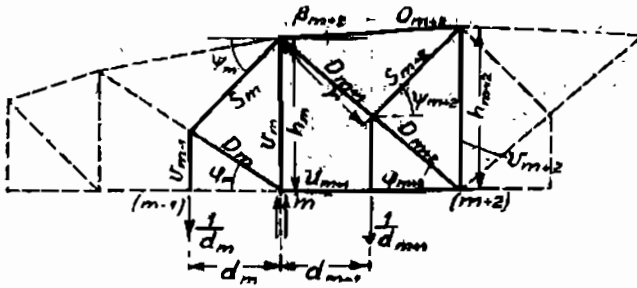
$$\Delta \Theta = \sum \bar{N} \frac{N}{E w^3} s,$$

где \bar{N} — продольные усилия в стержнях системы от действия двух пар с моментами $= 1$, приложенных к двум стержням, образующим рассматриваемый угол. При этом надо иметь в виду, что, если силы этих пар будут направлены по направлению искомого перемещения, то ими будет учтено как влияние деформации угла цепи, так и деформации стержней (см. выражение 127) ¹⁾.

Например, для определения упругого груза в узле m нижнего пояса шпренгельной фермы (*черт. 73*) надо приложить две пары с силами $\frac{1}{d_m}$ и $\frac{1}{d_{m+1}}$ к стержням $(m-1)$ m и $m(m+1)$ пояса и затем

¹⁾ См. статью Н. П. Щапова в 3 томе Трудов Моск. Инст. Инж. Транспорта. 1927 г.

определить усилия в стержнях фермы от действия этих пар. Так как от действия этих двух равных пар опорные реакции фермы $= 0$; то



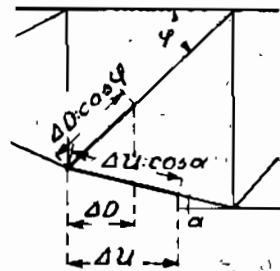
Черт. 73.

усилие во всех стержнях фермы, кроме обведенных жирными линиями, равны нулю. Усилия же в работающих стержнях будут:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{m-1} &= \frac{1}{d_m}; & V_m &= \frac{1}{h_m} \operatorname{tg} \varphi_m - \frac{1}{d_m} - \frac{1}{d_{m+1}}; & \bar{V}_{m+1} &= \frac{1}{d_{m+1}} \\ \bar{D}_m &= -\frac{1}{h_m \cos \varphi_m} & \bar{S}_m &= \frac{1}{h_m \cos \psi_m} \\ \bar{U}_{m+1} &= \bar{U}_{m+2} = -\frac{1}{h_m} & \bar{O}_{m+2} &= -\frac{d_{m+2}}{d_{m+1} h_{m+2} \cos \beta_{m+2}} \\ \bar{S}_{m+2} &= \frac{d_{m+2}}{d_{m+1} h_{m+2} \cos \psi_{m+2}} & \bar{D}_{m+1} &= \frac{(d_{m+2} + h_{m+2})}{(d_{m+1} + h_m)} \frac{1}{h_{m+2} \cos \varphi_{m+2}} \\ \bar{D}_{m+2} &= \frac{1}{h_m \cos \varphi_{m+2}} & \bar{V}_{m+2} &= -\frac{1}{h_m} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} \end{aligned}$$

Таким образом, величина деформации угла или, что то же, величина упругого груза в нем определится выражением:

$$\begin{aligned} -w_m &= \frac{1}{u_m} \left(\frac{\Delta S_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \Delta U_{m+1} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+2}} + \frac{\Delta D_{m+2}}{\cos \varphi_{m+2}} \right. \\ &\quad \left. - \Delta V_{m+2} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} + \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_m \right) + \frac{1}{h_{m+2}} \left(\frac{\Delta S_{m+2}}{d_{m+1} \cos \psi_{m+2}} - \frac{d_{m+2}}{d_{m+1} \cos \beta_{m+2}} + \frac{\Delta D_{m+1} d_{m+2}}{d_{m+1} \cos \varphi_{m+2}} \right) + \frac{\Delta V_{m-1}}{d} + \\ &\quad + \frac{\Delta V_{m+1}}{d_{m+1}} - \frac{\Delta V_m}{d_m} - \frac{\Delta V_{m+1}}{d_{m+1}} \end{aligned}$$



Черт. 74.

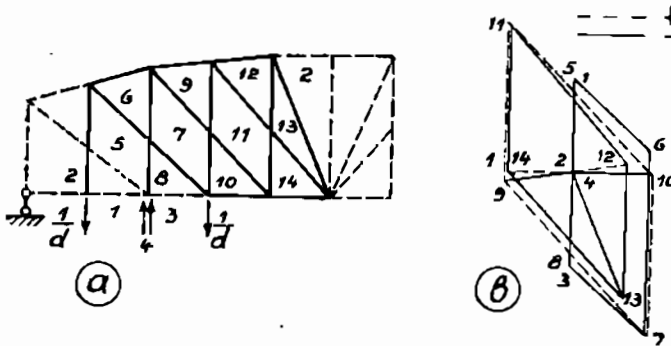
При составлении этой формулы было принято, что все деформации от действительной нагрузки имеют знак плюс.

Характерная особенность таких формул, заключается в том, что деформации делятся на косинусы, что позволяет заменить вычислительный процесс графическим построением проекций этих деформаций на оси тех же стержней. Для этого строят ферму в большом масштабе (черт. 74), откладывают в горизонтальном направлении от соответствующих узлов величины ΔU , ΔD и затем проектируют их на ось соответствующего

стержня, на котором засекаются отрезки $\Delta U: \cos \alpha$, $\Delta D: \cos \varphi$ и т. д. (см. также пример 23). В более сложных фермах, как, например, двух-раскосная (черт. 75) и другие, в которых усилия от единичных пар распространяются на большое число стержней, целесообразным является аналитическое определение усилий заменить построением плана Кремона (см. черт. 75b) и затем по полученным на нем усилиями \bar{N} составить выражение упругого груза по формуле:

$$w = \sum \bar{N} \Delta N.$$

Ниже, в особом разделе, выписан ряд формул, определяющих величину упругого груза для ферм с различными наиболее ходовыми типами решеток.



Черт. 75.

Если пренебречь влиянием решетки на величину деформации углов, что в некоторой степени равноценно неучету влияния поперечной силы Q в системах со сплошными сечениями, то формула 141 bis приведет к виду:

$$\begin{aligned} Ew_k &= \sum (n_a \operatorname{ctg} \theta_c + n_a \operatorname{ctg} \theta_b) - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} = \\ &= \frac{E \Delta s}{h} - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1}. \end{aligned}$$

Но так как вообще для поясных стержней

$$\Delta s = \frac{Ns}{E\omega} = \frac{M}{h} \frac{s}{E\omega},$$

то

$$Ew_k = \frac{M}{h^2} \frac{s}{\omega} - n_k \operatorname{tg} \alpha_k + n_{k+1} \operatorname{tg} \alpha_{k+1} \dots \dots \dots (142)$$

Если принять ωh^2 за некоторый момент инерции (J), то полученное выражение деформации угла будет аналогично выражению (137) в системах со сплошной стенкой.

Если пренебречь также влиянием продольных деформаций стержней цепи, то формула 142 приведет к виду:

$$Ew_k = \frac{M}{\omega h^2} s = \frac{M}{(J)} s \dots \dots \dots (143)$$

и будет аналогична выражению (133) фиктивных грузов в сплошных системах. Так как по условию расположения поясных стержней деформации углов цепи всегда положительны:

$$\text{в верх. п. } Ew = + \frac{M}{(J)} s$$

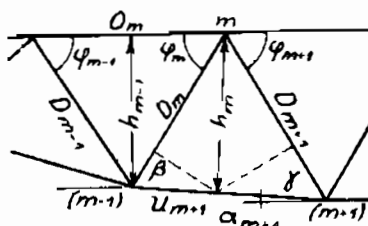
$$\text{в нижн. п. } Ew = - \left[\frac{-M}{(J)} s \right] = + \frac{M}{(J)} s,$$

то, следовательно, при указанных допущениях, величины упругих грузов в фермах будут пропорциональны эпюрам моментов от рассматриваемой нагрузки, измененным в отношении $1 : \omega h^2$, и знаки прогибов будут зависеть от знаков эпюры моментов.

При определении прогиба прямого пояса фермы формула 143 дает величину прогибов достаточно близкую к действительным значениям его и может служить для приближенного определения величин прогибов.

Выражение фиктивных грузов для различных видов решетки ферм. Во всех последующих формулах усилия N от действительной нагрузки и соответствующие им деформации ΔN приняты положительными.

1) Ферма с треугольной решеткой (черт. 76).



Черт. 76.

Фиктивный груз верхнего узла m 1):

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} \right] \dots (144-a)$$

Фиктивный груз нижнего узла $(m-1)$:

$$w_{m-1} = \frac{1}{h_{m-1}} \left[-\Delta O_m + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m-1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} \right] \dots (144-b)$$

2) Раскосная ферма типа, показанного на черт. 77-а.

Фиктивный груз в узле m нижнего пояса:

$$w_m = - \frac{1}{h_m} \left[- \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} + \frac{\Delta O_m}{\cos \beta} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} - \Delta V_m (tg \varphi_{m+1} + tg \beta) \right] \dots (145a)$$

1) Это выражение фиктивного груза легко получается из формулы 127 путем тригонометрического преобразования.

По этой формуле величина фиктивного груза

$$w_m = \frac{\Delta S_a}{h} - \frac{\Delta S_b}{S_b} ctg \beta - \frac{\Delta S_c}{S_c} ctg \gamma - \frac{\Delta S_b \gamma}{S_b} tg \varphi_m - \frac{\Delta S_c}{S_c} tg \varphi_{m+1}.$$

Из чертежа непосредственно видно, что

$$S_b = h_b [ctg \beta + ctg (90 - \varphi_m)] = h_b (ctg \beta + tg \varphi_m) \\ S_c = h_c [ctg (90 - \varphi_m) + ctg \gamma] = h_c (tg \varphi_{m+1} + ctg \gamma).$$

Подставив эти величины в выражение фиктивного груза и сделав приведение получим:

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left(\frac{\Delta S_a}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta S_b}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta S_c}{\cos \varphi_{m+1}} \right).$$

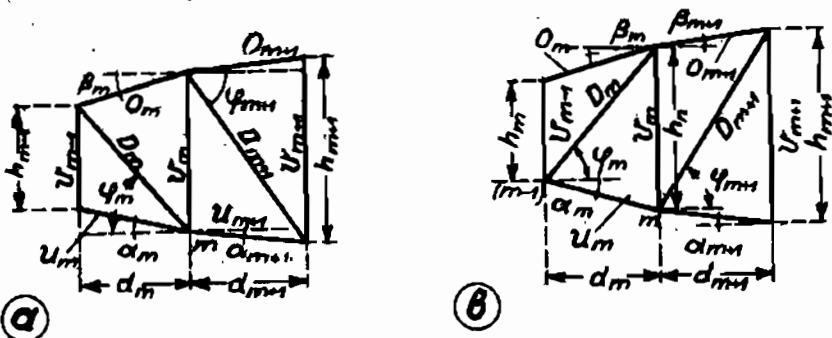
Фиктивный груз в узле m верхнего пояса

$$\omega_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} \right] \quad (145a)$$

3) Для типа фермы, показанной на черт. 77b.

Фиктивный груз, приложенный в нижнем узле m :

$$\omega_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) \right] \quad (145b)$$



Черт. 77a б.

Фиктивный груз, приложенный в верхнем узле:

$$\omega_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} - \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) - \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_m} \right] \quad (145b')$$

4) Раскосная ферма типа, показанного на черт. 77с.

Фиктивный груз в узле m нижнего пояса:

$$\omega_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{-\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) \right] \quad (145c)$$

Фиктивный груз в узле m верхнего пояса:

$$\omega_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\Delta O}{\cos \beta_m} - \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right] \quad (145c')$$

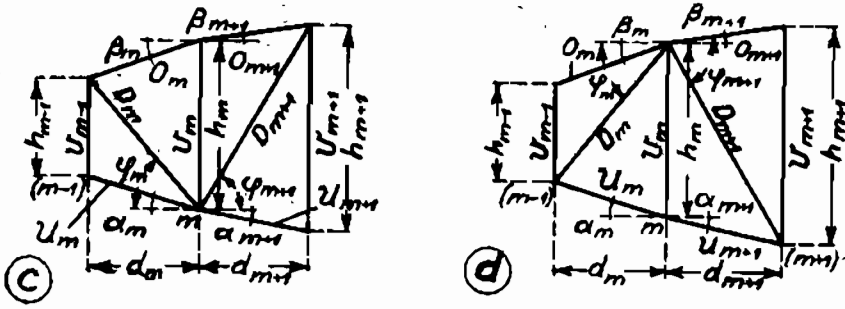
5) Для типа фермы, показанной на черт. 77d.

Фиктивный груз, приложенный в нижнем узле m :

$$w_m = -\frac{1}{h_m} \left[-\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} - \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (tg \varphi_m + tg \varphi_{m+1}) \right] \dots \dots \dots (145d)$$

Фиктивный груз, приложенный в верхнем узле:

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (tg \alpha_m - tg \alpha_{m+1}) \right] (145d')$$



Черт. 77c d.

6) Ферма с полураскосной решеткой (черт. 77e).

Фиктивный груз в нижнем узле:

$$w_m = -\frac{1}{h_m} \left[\Delta O_{m+1} - \Delta U_{m+1} + \frac{1}{\cos \varphi} \left(-\Delta D_m + \Delta D'_m + \Delta D_{m+1} - \Delta D'_{m+1} \right) + tg \varphi \left(2 \Delta V_{m-1} + \Delta V'_{m+1} - 3 \Delta V_m - \Delta V'_m + \Delta V_{m+1} \right) \right] \dots \dots \dots (145e)$$

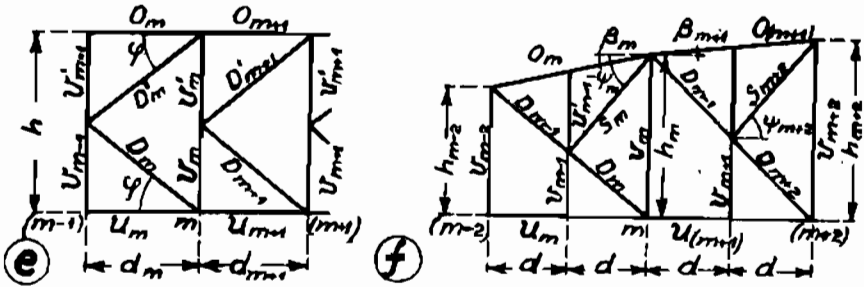
Фиктивный груз в верхнем узле m :

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[\Delta U_{m+1} - \Delta O_{m+1} + \frac{1}{\cos \varphi} \left(-\Delta D'_m + \Delta D_m + \Delta D'_{m+1} - \Delta D_{m+1} \right) + tg \varphi \left(2 \Delta V_{m-1} + \Delta V'_{m+1} - 3 \Delta V_m - \Delta V'_m + \Delta V_{m+1} \right) \right] \dots \dots \dots (145e')$$

7) Раскосная ферма со шпренгелями (черт. 77f).

Фиктивный груз в нижнем узле:

$$\begin{aligned}
 w_m = & -\frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta S_m}{\cos \psi_m} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \Delta U_{m+1} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+2}} + \right. \\
 & + \frac{\Delta D_{m+2}}{\cos \varphi_{m+2}} + \Delta V_{m-1} 2 \operatorname{tg} \varphi_{m+2} - 4 \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+2} + \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_m + \\
 & \left. + 2 \Delta V_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} - \Delta V_{m+2} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} \right] - \frac{1}{h_{m+2}} \left[\frac{\Delta S_{m+3}}{\cos \psi_{m+2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+2}} - \frac{\Delta O_{m+2}}{\cos \varphi_{m+2}} \right] \dots \dots \dots (145f)
 \end{aligned}$$



Черт. 77e 1.

Фиктивный груз в нижнем узле (m-1):

$$\begin{aligned}
 w_{m-1} = & -\frac{1}{h_m} \left[+ \frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\Delta D_{m-1}}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta S_m}{\cos \psi_m} + \right. \\
 & \left. + 2 \Delta V_{m-2} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} - 4 \Delta V_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} + 2 \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+2} \right] \dots \dots (145f)
 \end{aligned}$$

Фиктивный груз в верхнем узле:

$$\begin{aligned}
 w_m = & \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta S_m}{\cos \psi_m} + \Delta U_{m+1} - \frac{\Delta D_{m+2}}{\cos \varphi_{m+2}} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+2}} + \right. \\
 & \left. + 2 \Delta V_{m+1} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} + 2 \Delta V_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} - \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_m + \Delta V_{m+2} \operatorname{tg} \varphi_{m+2} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_{m+2}} \left[\frac{\Delta O_{m+2}}{\cos \beta_{m+2}} - \frac{\Delta S_{m+2}}{\cos \psi_{m+2}} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+2}} \right] \dots \dots (145f')
 \end{aligned}$$

Пример 21. В задачу настоящего примера входит сопоставление влияния на величину прогиба деформации поясных стержней фермы и стержней ее решетки, а также сопоставление влияния на величину прогиба деформации углов и стержней цепи.

На *черт. 78* показана ферма и выписаны площади сечений ее стержней. Прогибы определены в предположении действия на ферму груза P , приложенного в узле № 5 нижнего пояса.

$$\text{Опорные реакции: } A = \frac{3}{8} P; \quad B = \frac{5}{8} P.$$

Шарнирная цепь принята по ходу решетки, т.е. по направлению 0—1—2—3—4—5—6—7—8.

1) При определении прогибов, образующихся под влиянием деформации только поясных стержней, пользуемся для вычисления упругих грузов формулой (141), которая для рассматриваемого случая приводится к такому виду:

$$w = \frac{M}{E\omega k^2} s = \frac{2d}{Ed^2tg^2\alpha} \cdot \frac{M}{\omega} = C \frac{M}{\omega}$$

Соответственно этому

$$w_1 = C \cdot \frac{3}{8} P \cdot \frac{d}{180} = \frac{P}{240} \frac{d}{Etg^2\alpha} = C_1 1$$

$$w_2 = C \cdot \frac{3}{8} P \cdot \frac{2d}{240} = C_1 1,5$$

$$w_5 = C \cdot \frac{3}{8} P \cdot \frac{5d}{450} = C_1 2,0$$

$$w_3 = C \cdot \frac{3}{8} P \cdot \frac{3d}{450} = C_1 1,2$$

$$w_6 = C \cdot \frac{5}{8} P \cdot \frac{2d}{240} = C_1 2,5$$

$$w_4 = C \cdot \frac{3}{8} P \cdot \frac{4d}{360} = C_1 2,0$$

$$w_7 = C \cdot \frac{5}{8} P \cdot \frac{d}{180} = C_1 1,66$$

Для этих упругих сил строим силовой многоугольник (*черт. 78-а*), в котором все силы отложены в масштабе $1 \text{ см} = 2C_1$, и полюсное расстояние принято $H = 5C_1$; по этому силовому многоугольнику строим веревочный многоугольник, который очертит эпюру прогибов для указанной цепи. Так как полюсное расстояние H было принято $= 5C_1$, то для получения действительных величин прогибов надо ординаты веревочной кривой изменить помножением на коэффициент (см. форм. 132)

$$\frac{1}{m} = H \cdot K = 5C_1 \times 100d = 500C_1d.$$

Например, ордината прогиба под узлом 5, определяемая отрезком $= 2,75$, будет иметь величину:

$$f_5 = 2,75 \cdot 500 \cdot C_1d = 1375 C_1d \text{ см.}$$

Правильность построения веревочного многоугольника можно проверить аналитическим вычислением какой либо ординаты, рассматривая ферму как балку, нагруженную фиктивными грузами w (*черт. 78-а*).

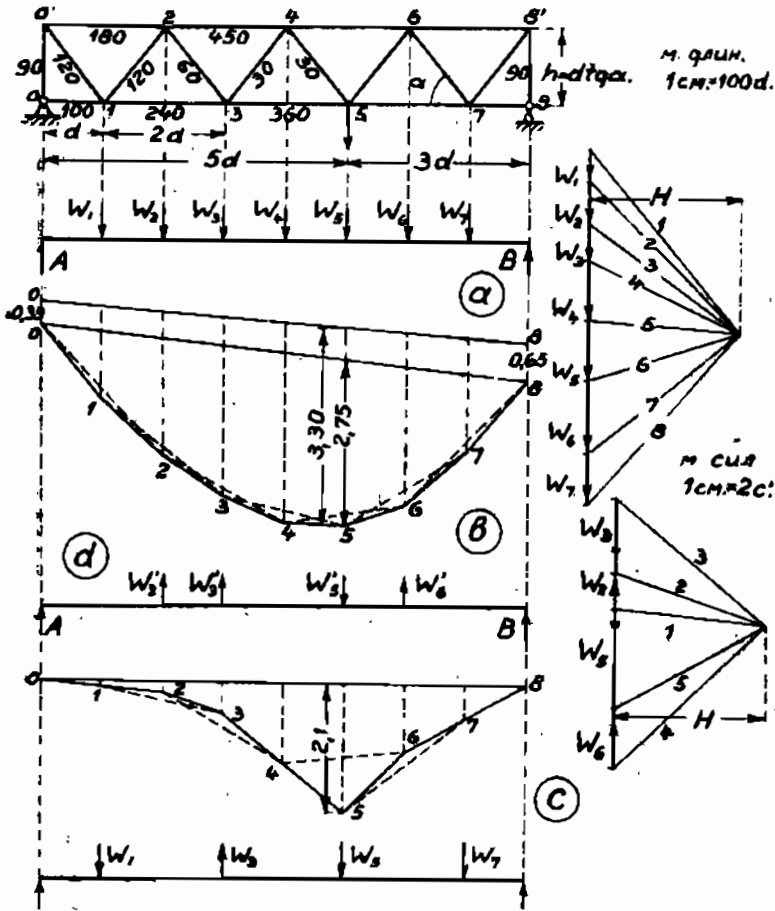
Опорная реакция (A) для этого нагружения:

$$[A] = \frac{C_1}{8d} [1 \cdot 7 + 1,5 \cdot 6d + 1,2 \cdot 5d + 2 \cdot 4d + 2,3d + 2,5 \cdot 2d + 1,66d] = 5,333 C_1.$$

Момент фиктивных грузов относительно шарнира № 5

$$f_5 = [M_5] = C_1 [5,333 \cdot 5d - 1 \cdot 4d - 1,5 \cdot 3d - 1,2 \cdot 2d - 2 \cdot d] \cdot 100 = 1376 C_1 d \text{ см.}$$

что вполне соответствует результатам, полученным графическим построением.



Черт. 78.

Построенной веревочной кривой определяются прогибы цепи из стержневой решетки; чтобы перейти к эпюрам прогибов поясов надо соединить прямыми шарниры, соответствующие каждому поясу.

Кроме того, эти эпюры должны быть исправлены на величину деформации опорных стоек, которыми заканчивается цепь из стержней. Величина деформаций каждой из опорных стоек будет:

левой
$$\Delta s_0 = \frac{3}{8} \frac{P \cdot 100 d \operatorname{tg} \alpha}{E \cdot 90},$$

правой
$$\Delta s_8 = \frac{5}{8} \frac{P \cdot 100 d \operatorname{tg} \alpha}{E \cdot 90}.$$

Для исправления эпюры откладываем эти отрезки по длине вертикалей в масштабе эпюры, т.е. разделив на множитель эпюры $= 500 C_1 d$.

$$00' = \frac{\Delta s_o}{500 C_1 d} = \frac{3 P 100 d \operatorname{tg} \alpha \cdot 240 E \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 E 90 \cdot P \cdot 500 d} = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{1,25^3}{5} = 0,39$$

$$88' = \frac{\Delta s_8}{500 C_1 d} = \frac{5 P 100 d \operatorname{tg} \alpha \cdot 240 E \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 E 90 P \cdot 500 d} = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{1,25^3}{3} = 0,65.$$

Таким образом, эпюра прогиба верхнего пояса очертится контуром 0—2—4—6—8. Эпюра прогиба нижнего пояса контуром 0—1—3—5—7—8 (черт. 78-а).

2) Перейдем теперь к учету влияния деформации решетки на величину прогибов.

Для рассматриваемой фермы определение величин упругих грузов проще всего сделать по формуле (141), которая при учете деформации только стержней решетки примет такой вид:

$$w = \frac{1}{E} (-n_b - n_c) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{-1}{E \operatorname{tg} \alpha} (n_b + n_c).$$

Соответственно этому упругие грузы определяются величинами:

$$w_1 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{3}{8} \frac{P}{120 \sin \alpha} - \frac{3}{8} \frac{P}{120 \sin \alpha} \right) = 0.$$

$$w_2 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{3 P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \frac{3 P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right] = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3 C_1}{4 \cos \alpha}$$

$$w_3 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{3 P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} - \frac{3 P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right] = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{3 C_1}{2 \cos \alpha}$$

$$w_4 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{3 P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} - \frac{3 P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right] = 0$$

$$w_5 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{3 P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} + \frac{5 P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right] = \frac{P}{240 E \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{11}{2} = \frac{11 C_1}{2 \cos \alpha}$$

$$w_6 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[\frac{-5 \cdot P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} - \frac{5 P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right] = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg} \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{5 C_1}{4 \cos \alpha}$$

$$w_7 = \frac{1}{E \operatorname{tg} \alpha} \left[-\frac{5 P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} + \frac{5 P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right] = 0.$$

Так как по наклону раскосов в ферме $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,5}{2} = 1,25$, чему соответствует угол $\alpha = 51^\circ 20'$, для которого $\cos \alpha = 0,625$, то величины упругих грузов будут:

$$w_2 = -C_1 \frac{3}{4 \cdot 0,625} = -1,2 C_1 \quad w_3 = +C_1 \frac{11}{2 \cdot 0,625} = +8,8 C_1$$

$$w_5 = -C_1 \frac{3}{2 \cdot 0,625} = -2,4 C_1 \quad w_6 = -C_1 \frac{5}{4 \cdot 0,625} = -2 C_1$$

Для этих фиктивных грузов строим силовой многоугольник (черт. 78б) при том же полюсном расстоянии $H = 5 C_1$, как и первый многоугольник, и по этому силовому многоугольнику строим веревочный, которым очерчивается эпюра прогибов цепи из стержней решетки. Переход от этой эпюры к эпюрам прогибов в поясах делается по тому же масштабу, как и в первом случае.

Величина прогиба под пятым узлом:

$$f = 2,1 \times 500 \cdot C_1 d = 1050 C_1 d \text{ см.}$$

Проверка графического построения аналитическим расчетом приводит к следующему результату:

Фиктивная опорная реакция

$$[A] = \frac{1 C_1}{8 \cdot d} [-1,2 \cdot 6d - 2,4 \cdot 5d + 8,8 \cdot 3d - 2 \cdot 2d] = +0,4 C_1$$

Момент относительно узла № 5

$$f' = C_1 [+0,4 \cdot 5d + 1,2 \cdot 3d + 2,4 \cdot 2d] 100 = +1040 C_1 d \text{ см.,}$$

что совпадает с результатами графического построения.

3) Переходим к учету влияния продольных деформаций в стержнях цепи на величину прогиба.

В этом случае величина упругих грузов определяется по формуле (142), которая приводится к виду:

$$E w_m = -n_m \operatorname{tg} \alpha_m + n_{m+1} \operatorname{tg} \alpha_{m+1} = (-n_m + n_{m+1}) \operatorname{tg} \alpha,$$

соответственно этому

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) = 0, \\ w_2 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) = \frac{-P \operatorname{tg} \alpha}{240 E \sin \alpha} \frac{3}{4} = -C_1 \frac{3}{4} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha}, \\ w_3 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{3P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) = \frac{-P \operatorname{tg} \alpha}{240 E \sin \alpha} \frac{3}{2} = -C_1 \frac{3}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha}, \\ w_4 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) = 0, \\ w_5 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} + \frac{5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{240 E \sin \alpha} \frac{11}{2} = C_1 \frac{11}{2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha}, \\ w_6 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(\frac{-5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} + \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) = \frac{-P \operatorname{tg} \alpha}{240 E \sin \alpha} \frac{5}{4} = -C_1 \frac{5}{4} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha}, \\ w_7 &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{E} \left(-\frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} + \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) = 0. \end{aligned}$$

Сопоставляя величины этих фиктивных грузов с таковыми же, являющимися в результате учета влияния решетки на деформацию углов цепи, можно видеть, что они пропорциональны между собой и первые больше последних на величину множителя $\operatorname{tg}^2 \alpha$. Следовательно, эпюра

прогибов будет подобна и отличается только масштабным множителем. Так как для рассматриваемой фермы $tg\alpha = 1,25$, то $tg^2\alpha = 1,56$, а потому все ординаты прогибов, возникающих вследствие продольных деформаций стержней цепи в 1,56 раза больше ординаты прогибов, возникающих от деформации углов цепи, вызываемых усилиями в стержнях той же решетки.

Влияние решетки на величину прогибов характеризуется резким нарастанием эпюры у места приложения груза P , что указывает на развитие больших местных деформаций, являющихся результатом растяжения стержней 4,5 и 5,6 решетки.

Ординаты полного прогиба нижнего пояса, в котором учтено влияние всех стержней фермы на деформацию углов и учтено влияние продольных деформаций в стержнях цепи, суммируются из ординат отдельных эпюр. Например, ордината под узлом № 5 определяется суммой $3,30 + 2,1 + 2,1 \cdot 1,56 = 8,68$ см и т. д.

Ниже приведен расчет этого прогиба из рассмотрения шарнирной цепи по звеньям нижней цепи (0—1—3—5—7).

Вычисление упругих грузов для этой цепи можно сделать по формуле (141) без учета влияния долевых деформаций в стержнях цепи, так как последние нормальны к направлению прогибов.

Выражения величин упругих грузов напишутся так:

$$\begin{aligned}
 -Ew_1 &= \left(-\frac{3P}{8 \cdot 90} - \frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) ctg(90 - \alpha) + \left(-\frac{3Pd}{8d \operatorname{tg} \alpha 180} - \right. \\
 &- \left. \frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \left(-\frac{3Pd}{8 \cdot 180d \operatorname{tg} \alpha} + \frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \left(\frac{3P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) ctg(180 - 2\alpha) + \left(\frac{3}{8} \frac{P}{60 \sin \alpha} - \frac{3Pd}{8 \cdot 240d \operatorname{tg} \alpha} \right) ctg \alpha. \\
 -Ew_3 &= \left(-\frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) ctg(180 - 2\alpha) + \left(-\frac{3P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \right. \\
 &- \left. \frac{3P2d}{8 \cdot 240d \operatorname{tg} \alpha} \right) ctg \alpha + \left(-\frac{3P3d}{8 \cdot 450d \operatorname{tg} \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \\
 &+ \left(-\frac{3P3d}{8 \cdot 450d \operatorname{tg} \alpha} + \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \left(\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} + \right. \\
 &+ \left. \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) ctg(180 - 2\alpha) + \left(\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} - \frac{3P4d}{8 \cdot 360d \operatorname{tg} \alpha} \right) ctg \alpha. \\
 -Ew_5 &= \left(-\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) ctg(180 - 2\alpha) + \left(-\frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} - \right. \\
 &- \left. \frac{3P4d}{8 \cdot 360d \operatorname{tg} \alpha} \right) ctg \alpha + \left(-\frac{3P5d}{8 \cdot 450d \operatorname{tg} \alpha} - \frac{3P}{8 \cdot 30 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \\
 &+ \left(-\frac{3P5d}{8 \cdot 450d \operatorname{tg} \alpha} - \frac{5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) ctg \alpha + \left(-\frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \right. \\
 &= \left. \frac{5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} \right) ctg(180 - 2\alpha) + \left(\frac{-5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} - \frac{5P2d}{8 \cdot 240d \operatorname{tg} \alpha} \right) ctg \alpha.
 \end{aligned}$$

$$Ew_7 = \left(\frac{5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} + \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) \operatorname{ctg} (180 - 2\alpha) +$$

$$+ \left(\frac{5P}{8 \cdot 60 \sin \alpha} - \frac{5P \cdot 2d}{8 \cdot 240 \operatorname{ctg} \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \left(-\frac{5Pd}{8 \cdot 180 \operatorname{ctg} \alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \left(-\frac{5Pd}{8 \cdot 180 \operatorname{ctg} \alpha} - \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha +$$

$$+ \left(-\frac{5P}{8 \cdot 90} - \frac{5P}{8 \cdot 120 \sin \alpha} \right) \operatorname{ctg} (90 - \alpha).$$

Приняв во внимание, что $\operatorname{ctg} (90 - \alpha) = + \operatorname{tg} \alpha$ и что $\operatorname{ctg} (180 - 2\alpha) = - \operatorname{ctg} 2\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$, подставляем эти значения в выражения фиктивных грузов и делаем приведение их:

$$w_1 = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(-\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{3}{8} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{7}{4} \right),$$

$$w_8 = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{15}{8 \cdot \cos \alpha} + \frac{15 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 \cdot \cos \alpha} - \frac{118}{40} \right),$$

$$w_6 = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(-\frac{39}{8 \cdot \cos \alpha} - \frac{39 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 \cdot \cos \alpha} - \frac{34}{8} \right),$$

$$w_7 = \frac{-P}{240 E \operatorname{tg}^2 \alpha} \left(\frac{5}{8 \cdot \cos \alpha} + \frac{5 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{8 \cdot \cos \alpha} - \frac{35}{12} - \frac{5}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha \right).$$

Так как для данной фермы $\operatorname{tg} \alpha = 1,25$ и $\cos \alpha = 0,625$, то цифровые величины фиктивных грузов будут:

$$w_1 = C_1 \cdot 2,16; \quad w_8 = -C_1 \cdot 4,76; \quad w_6 = C_1 \cdot 24,25; \quad w_7 = C_1 \cdot 3,61,$$

где C_1 — общий множитель $= \frac{P}{240 \cdot E \operatorname{tg} \alpha}$.

Аналитический расчет прогиба в узле № 5 по этим упругим грузам дает (черт. 78с):

фиктивную опорную реакцию

$$\{A\} = \frac{C_1}{8d} [2,16 \cdot 7d - 4,76 \cdot 5d + 24,25 \cdot 3d + 3,61 \cdot d] = 8,46 C_1$$

величину прогиба

$$f_5 = [8,46 \cdot 5d - 2,16 \cdot 4d + 4,76 \cdot 2d] 100 C_1 = 4318 C_1 d \text{ см},$$

что вполне соответствует измерениям ординат построенных эпюр, по которым прогиб в этой точке

$$f_5 = (3,30 + 2,1 + 2,1 \cdot 1,56) \cdot 500 C_1 d = 4340 C_1 d \text{ см}.$$

Пример 22. Построение эпюры прогибов и горизонтальных сдвигов в консольном мосту, показанном на черт. 79.

Для проведения этого построения надо вычислить фиктивные грузы, которые будут иметь место в узлах фермы, при действии в узле № 9 груза = 1, принятого в последующем равным 1 тонне.

Действие этого груза вызывает опорные реакции: $A = - 526,3 \text{ кг}$, $B = 1526,3 \text{ кг}$.

В нижеследующей первой таблице выписаны длины, площади поперечных сечений поясных стержней фермы и усилия в них от единичной нагрузки, приложенной в узле № 9 на конце консоли, что дает возможность вычислить величины $\frac{N \cdot s}{\omega}$. В той же таблице выписаны значения косинусов наклона поясных стержней к горизонту и вычислены величины

$$\frac{N \cdot s}{\omega \cdot \cos \alpha}$$

№ стержня	Длина стержня см	Площадь попер. сеч. в см ²	Момент т · м	Плечо усилия м	Усилие N кг	$\frac{N \cdot s}{\omega}$ кг/см	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\frac{N \cdot s}{\omega \cdot \cos \alpha}$ кг/см	$\frac{N^2 \cdot s}{1000 \cdot \omega}$
0-1	800	80	- 8,16	8,00	+ 395	- 2955	1,000	- 2955	1187,23
1-2	600	80	- 6,32	8,00	+ 790	- 5910	1,000	- 5910	4668,90
2-3	600	80	- 9,48	8,00	+ 1185	- 8865	1,000	- 8865	10505,08
3-4	608,8	20	- 12,64	8,877	+ 1423	- 7210	1,014	- 7311	10259,88
4-5	663,3	160	- 15,90	10,488	+ 1521	- 6297	1,049	- 6602	9577,74
5-6	885,1	100	- 20	13,300	+ 1503	- 6492	1,127	- 7320	9757,48
6-7	885,1	200	- 20	13,30	+ 1503	- 6492	1,127	- 7320	9757,48
7-8	663,3	260	- 12,38	10,488	- 1174	- 4800	1,049	- 5088	5705,64
8-9	608,3	180	- 6	8,877	- 876	- 5140	1,014	- 5180	3474,64
1'-2'	600	80	- 8,16	8,00	- 395	+ 2955	1,00	+ 2955	1187,23
2'-3'	600	80	- 6,32	8,00	- 790	+ 5910	1,00	+ 5910	4668,90
3'-4'	600	80	- 9,48	8,00	- 1185	+ 8865	1,00	+ 8865	10505,08
4'-5'	632,5	120	- 12,64	9,00	- 1404	+ 7400	1,00	+ 7400	10889,60
5'-6'	767,5	160	- 15,90	11,00	- 1449	+ 6986	1,00	+ 6986	10029,16
6'-7'	767,5	160	- 12,33	11,00	- 1121	+ 5377	1,00	+ 5377	6027,62
7'-8'	632,5	120	- 6,00	9,00	- 667	+ 3510	1,00	+ 3510	2241,17
							$\Sigma =$		107889,58

Во второй таблице выписаны те же величины для стержней решетки и вычислены для них величины $\frac{N \cdot s}{\omega}$. В той же таблице для раскосных

стержней вычислены величины $\frac{E \Delta s_d}{\cos \varphi} = \frac{D \cdot s_d}{\omega \cdot \cos \varphi}$ и для стоек значения

$$E \Delta s_0 \operatorname{tg} \varphi = \frac{V \cdot s_0}{\omega} \operatorname{tg} \varphi.$$

№№ стержней	Длина стержня см	Площадь сечения ω см ²	Усилия стоек кг	Усилия раскосов кг	$\frac{N \cdot s}{\omega}$ кг/см	$\frac{1}{\cos \varphi}$	$\operatorname{tg} \varphi$	$\frac{Ds}{\omega \cos \varphi}$ и $\frac{V \cdot s \operatorname{tg} \varphi}{\omega}$	$\frac{N \cdot s}{1000 \cdot \omega}$
0-1	1000	80	—	+ 695	+ 8688	$\frac{10}{6}$	—	+ 14480	6088,16
1-1'	800	80	- 556	—	- 5560	—	$\frac{8}{6}$	- 7613	3091,36
1-2	1000	80	—	+ 695	+ 8688	$\frac{10}{6}$	—	+ 14480	6038,16
2-2'	800	80	- 556	—	- 5560	—	$\frac{8}{6}$	- 7613	3091,36
2-3	1000	80	—	+ 695	+ 8688	$\frac{10}{6}$	—	+ 14480	6038,16
3-3'	800	80	- 556	—	- 5560	—	$\frac{8}{6}$	- 7613	3091,36
3-4	1000	80	—	+ 365	+ 4564	$\frac{10}{6}$	—	+ 7607	1665,86
4-4'	900	80	- 292	—	- 3285	—	$\frac{8}{6}$	- 4980	959,22
4-5	1100	100	—	+ 082	+ 902	$\frac{11}{6,325}$	—	+ 1568	73,96
5-5'	1100	100	- 67	—	- 737	—	$\frac{8,325}{9}$	- 1049	196,78
5-6	1341	120	—	- 285	- 3133	$\frac{13,41}{7,875}$	—	- 5550	907,16
6-6'	1500	120	- 187	—	- 1712	—	$\frac{11}{7,875}$	- 2453	234,15
6-7	1341	120	—	+ 372	+ 4155	$\frac{13,41}{7,875}$	—	+ 7260	1545,66
7-7'	1100	100	- 646	—	- 7105	—	$\frac{9}{6,325}$	- 11230	4945,78
7-8	1100	100	—	+ 789	+ 8679	$\frac{11,00}{6,325}$	—	+ 15080	6847,73
8-8'	900	80	- 889	—	- 10008	—	$\frac{8}{6}$	- 13344	8897,11
8-9	1000	80	—	+ 1111	+ 13887	$\frac{10,00}{6,08}$	—	+ 22840	15426,46
								$\Sigma =$	69090,82

Вычисление упругих грузов в узлах №№ 1—5 нижнего пояса должно быть сделано по формуле 145-б, которая для этой фермы приводится к такому виду:

$$w_m = -\frac{1}{h_m} \left(\Delta O_{m+1} - \frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+1} - \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_m \right)$$

$$E w_1 = \frac{-1}{800} (2955 + 2955 + 14480 - 14480 - 7613 + 7613) = -7,39 \text{ кг/см}^2.$$

$$E w_2 = \frac{-1}{800} (5910 + 5910 + 14480 - 14480 - 7613 + 7613) = -14,78 \text{ кг/см}^2$$

$$Ew_3 = \frac{-1}{800} (8865 + 8865 + 14480 - 7607 - 4320 + 7613) = -34,90 \text{ кг/см}^2.$$

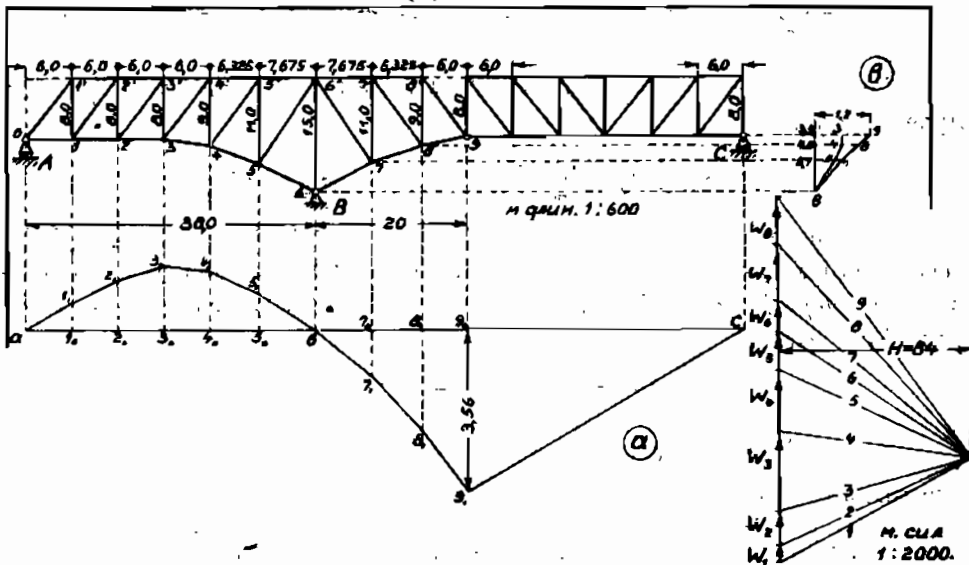
$$Ew_4 = \frac{-1}{900} (7400 + 7311 + 7607 - 1568 - 1049 + 4380) = -26,53 \text{ кг/см}^2.$$

$$Ew_5 = \frac{-1}{1100} (6936 + 6602 + 1568 + 5550 - 2453 + 1049) = -17,51 \text{ кг/см}^2.$$

Вычисление упругого груза в узле № 6 должно быть сделано по формуле 145 d, которая для данного случая приводится к виду:

$$w_6 = -\frac{2}{h_m} \left[-\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \Delta V_m \operatorname{tg} \alpha_m - \Delta V_m \frac{h_m}{d_m} \right]$$

$$Ew_6 = -\frac{2}{1500} \left[7320 + 5550 + 1712 \left(\frac{15 - 11}{7,675} - \frac{15}{7,675} \right) \right] = -13,89 \text{ кг/см}^2$$



Черт. 79.

Вычисление упругих грузов в узлах № 7—8 должно быть сделано по форм. 145-a, которая для данной фермы приводится к виду:

$$w = -\frac{1}{h_m} \left[\Delta O_m - \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \Delta V_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_m - \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+1} \right]$$

$$Ew_7 = \frac{1}{1100} (5377 + 5098 - 7260 + 15080 - 2453 + 11230) = -24,61 \text{ кг/см}^2,$$

$$Ew_8 = \frac{-1}{900} (3510 + 5160 - 15080 + 22840 - 11230 + 13344) = -20,60 \text{ кг/см}^2.$$

Величина упругих грузов в узле № 0 и № 9 не определяется, так как эти грузы не оказывают влияния на контур элюры перемещений. По вычисленным упругим грузам строим силовой многоугольник с полюсным

расстоянием $H = 84 \text{ кг/см}^2$ и по нему веревочный многоугольник abc (черт. 79а). Этот веревочный многоугольник может рассматриваться как эпюра прогибов, ординаты которой должны измеряться в масштабе, определяемом из условия (форм. 132):

$$\frac{1}{m} = \frac{84 \cdot 600}{21 \cdot 10^5} = \frac{24}{1000}$$

По чертежу ордината прогиба под узлом № 9 равна 3,56, а потому действительная величина ее

$$\bar{\delta}_y = 3,56 \cdot \frac{24}{1000} = 0,0854 \text{ см.}$$

По аналитическому расчету ордината этого прогиба

$$\bar{\delta}_y = \frac{1}{E} \sum \frac{\bar{N}^2 s}{\omega} = \frac{1}{21 \cdot 10^5} (107889,58 + 69090,82) = 0,0842 \text{ см.}$$

Горизонтальный сдвиг того же узла может быть определен по формуле (128 bis)

$$\bar{\delta}_y' = w_a^o a_k - \sum_0^{k-1} w^o (a_k - a) + \sum_0^k \frac{\Delta s}{\cos \alpha}$$

Для определения величины первых двух членов этой формулы строим веревочный многоугольник для горизонтальных направлений упругих грузов w (черт. 79б). По этому многоугольнику горизонтальный сдвиг узла № 9 равен:

$$\bar{\delta}_y' = -1,2 \cdot \frac{24}{1000} = -0,0288 \text{ см.}$$

Аналитический расчет дает:

фиктивный груз $\Delta \Theta$

$$\Delta \Theta = \frac{1}{38} [(7,39 + 2 \cdot 14,78 + 3 \cdot 34,90 + 26,53 \cdot 4) \cdot 6,00 + 17,51 \cdot 30,325 + 13,89 \cdot 38 + 24,61 \cdot 45,675 + 20,60 \cdot 52] = 124,9$$

момент этих грузов относительно узла № 9:

$$E \bar{\delta}_y' = -124,9 \cdot 700 + (26,53 + 20,60) 100 + (17,51 + 24,61) 300 + 13,89 \cdot 700 = -\frac{60350}{21 \cdot 10^5} = -0,0287 \text{ см,}$$

что совпадает с графическим построением.

Третий член $\sum_0^k \frac{\Delta s}{\cos \alpha}$, входящий в выражение полного перемещения, определяется по данным первой таблицы и так как опора B неподвижна, то в сумму, определяющую этот член, войдут только деформации стержней 6—9

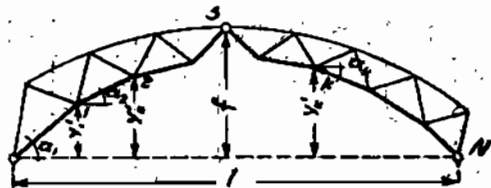
$$\sum_0^k \frac{\Delta s}{\cos \alpha} = -\frac{1}{E} (7320 + 5098 + 5160) = -\frac{17578}{21 \cdot 10^5} = -0,0084 \text{ см.}$$

Таким образом полное горизонтальное перемещение

$$\delta_0 = -0,0288 - 0,0084 = -0,0374 \text{ см.}$$

§ 24. Построение эпюр перемещений в системах с распором. Характерной особенностью статически определимых систем с распором является наличие промежуточного шарнира не связанного условиями внутренней жёсткости, что нарушает непрерывность упругой кривой. Так как введение промежуточных шарниров всегда связано с сохранением условий неизменяемости системы относительно ее закрепления, то деформации в этих шарнирах не могут быть произвольными. Эта зависимость деформаций в шарнире от опорных закреплений позволяет определить величину их при данном нагружении и от нее перейти к упругим грузам.

Если обозначить возможную деформацию угла при промежуточном шарнире через $\Delta \theta_s$, то согласно выводов, сделанных для любой шарнирной цепи, выражение приращения Δl расстояния между опорными шарнирами цепи может быть написано в таком виде (черт. 80) (форм. 129):



Черт. 80.

$$\Delta l = \sum_0^{s-1} w^0 y' + \Delta \theta_s f + \sum_{s+1}^{N-1} w^0 y' + \sum_0^N \frac{\Delta s}{\cos \alpha}.$$

Решая это уравнение относительно $\Delta \theta_s$, получим:

$$\Delta \theta_s = -\frac{1}{f} \left\{ \sum_0^{s-1} w^0 y' + \sum_{s+1}^{N-1} w^0 y' + \sum_0^N \frac{\Delta s}{\cos \alpha} - \Delta l \right\}. \quad (146)$$

Если величины деформаций углов цепи определены без учета влияния продольных деформаций стержней цепи, то величина деформации угла при промежуточном шарнире определяется из условия (см. форм. 130):

$$\Delta \theta_s = -\frac{1}{f} \left\{ \sum_0^{s-1} \Delta \theta y' + \sum_{s+1}^{N-1} \Delta \theta y' + \sum_0^N \Delta s \cos \alpha - \Delta l \right\}. \quad (147)$$

Первые три члена правой части этих уравнений представляют собой перемещение δ_N опорного шарнира N цепи по направлению линии опорных шарниров; тогда

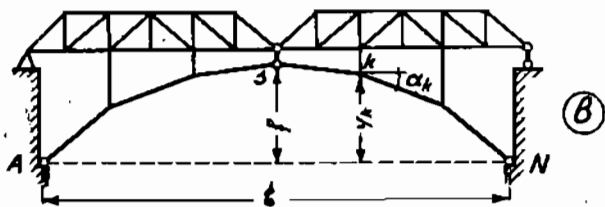
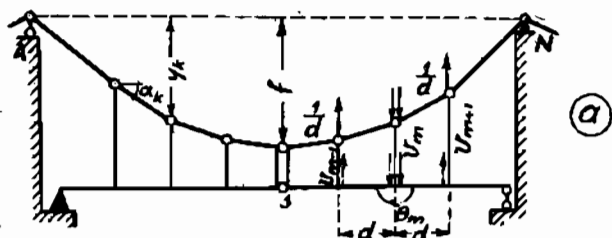
$$\Delta \theta_s = -\frac{1}{f} (\delta_N - \Delta l).$$

Величина этого перемещения δ_N может быть вычислена или построена графически при помощи фиктивных упругих грузов. Что касается последнего члена Δl , определяющего собой приращение расстояния между опорными шарнирами системы в целом, то, если эти шарниры неподвижны

$\Delta l = 0$, если же они связаны упругой затяжкой, то $\Delta l = \frac{Hl}{E\omega_n}$, где

H — усилие и ω_n — площадь сечения в затяжке.

Таким образом, зная деформации углов и стержней шарнирной цепи, выделяемой из системы, и зная условия закрепления опорных шарниров, можно определить величину возможной деформации $\Delta \Theta$.

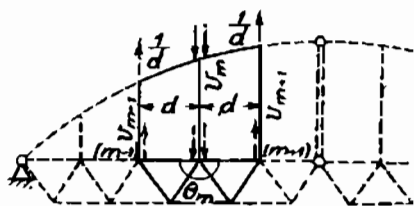


Черт. 81.

Ниже в примере 23 рассмотрено приложение выведенных положений в сквозной трехшарнирной арке.

При определении деформаций в комбинированных системах типов, показанных на черт. 81 и 82, в состав которых входят система с распором и балочная система, обеспечивающая жесткость системы, определение величины деформации угла в шарнире делается по шарнирной цепи, проводимой по оси арочной системы (арки или цепи).

Для вывода выражения величин упругих грузов в такой цепи, приложим к смежным звеньям ее по паре сил с моментами $= 1$ (черт. 82 и 81a). Действие этих двух пар не вызовет опорных сопротивлений в системе и распространится только на прилегающие подвески или стойки системы и на заключающуюся между ними часть фермы или балки жесткости. Из черт. 82 легко видеть, что усилия в подвесках или стойках будут равны приложенным к ним силам:



Черт. 82.

$$\bar{V}_{m-1} = +\frac{1}{d}; \bar{V}_m = -\frac{2}{d}; \bar{V}_{m+1} = +\frac{1}{d}$$

и действие их на ферму или балку жесткости будет характеризоваться двумя парами с моментами $= 1$, т.е. теми же двумя парами, которыми определяется деформация $\Delta \Theta$ угла фермы или балки, соответствующего положению рассматриваемого узла арочной цепи.

Таким образом, если обозначить действительные усилия в подвесках или стойках через V_{m-1} , V_m и V_{m+1} , то на основании общего аналитического выражения перемещений, выражение деформации угла в цепи напишется так:

$$\Delta \Theta'_m = \bar{V}_{m-1} \frac{V_{m-1} h_{m-1}}{E \omega_{m-1}} - \bar{V}_m \frac{V_m h_m}{E \omega_m} + \bar{V}_{m+1} \frac{V_{m+1} h_{m+1}}{E \omega_{m+1}} + \sum N \frac{N \cdot s}{\omega E}$$

В этом выражении последний член охватывает только те стержни системы, которые входят в состав выражения, определяющего деформацию угла $\Delta \theta_m$ в ферме или балке жесткости, а потому

$$\sum \bar{N} \frac{N s}{E \omega} = \Delta \theta_m.$$

Подставив это значение в выражение $\Delta \theta'_m$ и заменив в нем величины \bar{V}_{m-1} , \bar{V}_m и \bar{V}_{m+1} их значениями, выраженными через силы $\frac{1}{d}$, получим:

$$w'_m = \frac{1}{d} (\Delta h_{m-1} + \Delta h_{m-1}' - 2 \Delta h_m) + \Delta \theta_m \dots (148)$$

В этой формуле, представляющей собой выражение деформации угла шарнирной цепи в комбинированной системе, величины $\Delta \theta_m$ могут быть вычислены по одной из формул, указанных в § 22 или в § 23.

Пример 23. Построить линию прогибов для нижнего пояса трехшарнирной решетчатой арки (черт. 83), когда на арку действует сосредоточенный груз $P = 1\,000$ кг, приложенный к промежуточному шарниру.

Основные размеры фермы и площади поперечных сечений стержней выписаны в нижеприведенной таблице. В этой же таблице выписаны усилия в стержнях фермы от груза P , определенные по плану Кремона.

Изменение длин в отдельных стержнях определено с увеличением их в 10^6 раз по формуле:

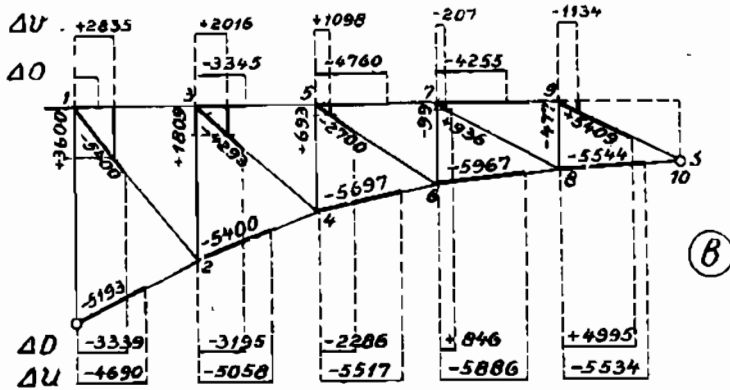
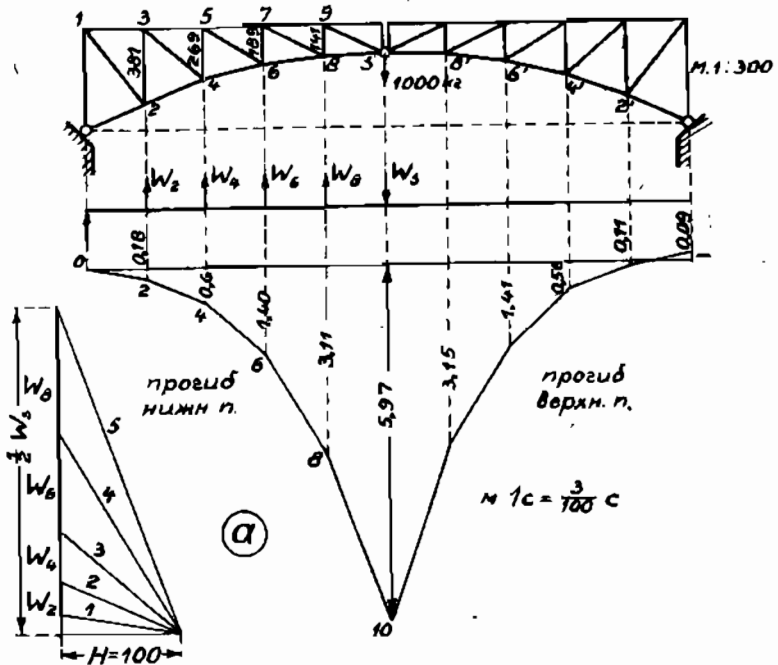
$$\Delta s = 10^6 \frac{N \cdot s}{E \omega} = \frac{10^6}{2 \cdot 10^6} \frac{N \cdot s}{\omega} = \frac{N \cdot s}{2 \cdot \omega}.$$

Результаты полученных вычислений сведены в нижеследующей таблице:

№№ эле-мента	Длина в см	Пл. сечен. ω см ²	Усилие N кг	$\frac{N \cdot s}{2 \omega}$	№№ эле-мента	Длина в см	Пл. сечен. ω см ²	Усилие N кг	$\frac{N \cdot s}{2 \omega}$
1— 3	300	30	315	1575	1— 2	485	37	— 509	— 3339
2— 5	300	30	669	3345	3— 4	403	30	— 476	— 3195
5— 7	300	30	952	4760	5— 6	355	28	— 335	— 2296
7— 9	300	30	851	4255	7— 8	331	22	+ 112	+ 846
0— 2	333	74	— 2080	— 4690	9—10	325	30	+ 922	+ 4995
2— 4	320	74	— 2338	— 5058	0— 1	525	37	+ 400	+ 2885
4— 6	310	74	— 2633	— 5517	2— 3	381	30	+ 318	+ 2016
6— 8	304	74	— 2864	— 5856	4— 5	269	22	+ 179	+ 1098
8—10	300	74	— 2730	— 5534	6— 7	189	22	— 48	— 207
					8— 9	141	22	— 355	— 1184

Вычисление упругих грузов для каждого узла фермы сделано по формуле 145а

$$w_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \Delta O_m + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_m + \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+1} \right]$$



м. деформ. 1с. - 4000 смт.

Черт. 83.

Входящие в это выражение величины

$$\Delta' U_{m+1} = \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}}; \quad \Delta' D_{m+1} = \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}}; \quad \Delta' D_m = \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m};$$

$$\Delta' V_{m-1} = \Delta V_{m-1} \operatorname{tg} \varphi_m; \quad \Delta' V_m = \Delta V_m \operatorname{tg} \varphi_{m+1}$$

определены графически, для чего на схеме фермы (*черт. 83б*) отложены в соответственных узлах по горизонтальному направлению величины удлинений каждого стержня, вычисленные в таблице, и затем эти отрезки спроектированы на направление соответствующего стержня, где таким образом засекаются отрезки, определяющие величины $\Delta' U$ и $\Delta' D$. Отрезки же $\Delta' V$ определялись в виде катетов на том же построении. Цифровые значения величин ΔO , ΔU , ΔD и ΔV выписаны на схеме (*черт. 83б*).

По этим данным вычислены величины упругих грузов, увеличенные в 10^6 .

$$w_1 = \frac{1}{381} [-1575 - 5400 - 5400 + 4293 - 3600 + 1809] = -26,1$$

$$w_4 = \frac{1}{269} [-3348 - 5697 - 4293 + 2700 - 1809 + 693] = -44,1$$

$$w_8 = \frac{1}{189} [-4761 - 5967 - 2700 - 936 - 693 - 99] = -80,1$$

$$w_8 = \frac{1}{141} [-4257 - 5544 - 936 - 5409 + 99 - 477] = -103,5$$

$$\sum w = -253,8$$

Вычисление упругого груза $Ew_s = \Delta \Theta_s$ производим по формуле (146)

$$\Delta \Theta_s = -\frac{1}{f} \left[\sum_n^b w^o y + \sum_0^{12} w^o y + \sum_0^{12} \frac{\Delta U}{\cos \alpha} \right]$$

$$\sum_2^8 w_o y = -[26,1 \cdot 144 + 44,1 \cdot 256 + 80,1 \cdot 336 + 103,5 \cdot 3,84] = -81705,6$$

$$\sum \frac{\Delta U}{\cos \alpha} = -2 [5193 + 5400 + 5697 + 5967 + 5544] = -55602;$$

отсюда

$$\Delta \Theta_s = \frac{-1}{400} [-2 \cdot 81705,6 - 55602] = +547,5.$$

По аналитическому расчету величина прогиба под шарниром, увеличенная в 10^6 раз, будет:

$$f = \left(+\frac{1}{2} 547,5 - 253,8 \right) \cdot 5 \cdot 300 + 26,1 \cdot 4 \cdot 300 + 44,1 \cdot 3 \cdot 300 + 300 + 80,1 \cdot 2 \cdot 300 + 103,5 \cdot 1 \cdot 300 = 598,9 \cdot 300.$$

Действительный прогиб:

$$f = \frac{1}{10^6} 598,9 \cdot 300 = 0,18 \text{ см.}$$

Графическое построение эпюры прогибов сделано на *черт. 83а* при помощи силового многоугольника с полюсным расстоянием $H = 100$.

Для получения действительных прогибов по веревочному многоугольнику надо ординаты его изменять в отношении, определяемом из условия (форм. 132)

$$100 = \frac{10^6}{300 \cdot m}, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{m} = \frac{3}{100}.$$

По чертежу ордината веревочного многоугольника под шарниром имеет длину 5,97 см, так что действительная длина прогиба

$$f_s = 5,97 \cdot \frac{3}{100} = 0,1791 = 0,18 \text{ см.}$$

Линия прогиба верхнего пояса может быть получена из линии прогибов нижнего пояса путем изменения ординат ее на величину деформации стоек

Ордин.	Действ. деформ.	Деформация в машт. машт. чертежа	Ордин. верев. мн.
0	$\Delta V_0 = +0,002835$	$\Delta V_0 \times \frac{100}{3} = +0,094$	- 0,094
2	$\Delta V_2 = +0,002016$	$\Delta V_2 \times \frac{100}{3} = +0,067$	0,18 - 0,07 = +0,11
4	$\Delta V_4 = +0,001098$	$\Delta V_4 \times \frac{100}{3} = +0,037$	0,60 - 0,04 = +0,56
6	$\Delta V_6 = -0,000207$	$\Delta V_6 \times \frac{100}{3} = -0,0067$	1,40 + 0,01 = +1,41
8	$\Delta V_8 = -0,001134$	$\Delta V_8 \times \frac{100}{3} = -0,037$	3,11 + 0,04 = +3,15

Эпюра прогиба этого пояса показана с правой стороны *черт. 83а*.

§ 25. Построение линий влияния перемещений. В § 16 было указано, что всякая эпюра перемещений системы, построенная для действия единичной нагрузки, может рассматриваться как линия влияния изучаемого перемещения. Изложенный выше метод построения эпюр перемещений позволяет проводить построение этих линий влияния графическим путем.

Если по направлению искомого перемещения приложить соответствующую ему единичную нагрузку, вычислить по ней фиктивные упругие грузы \bar{w} и построить по ним веревочный многоугольник, то ординаты этого многоугольника, измеряемые в масштабе, соответствующем полюсному расстоянию $H=1$, представляют собой эпюру линейных перемещений $\bar{\delta}_{k1}$ в любой точке k системы от указанной единичной нагрузки.

Так как по смыслу теоремы о взаимности

$$\bar{\delta}_{k1} = \bar{\delta}_{1k},$$

то эти ординаты могут рассматриваться как ординаты линии влияния исследуемого перемещения от действия груза = 1, приложенного в точке K .

Например, для построения линии влияния деформации угла в ферме, показанной на *черт. 84*, надо приложить к сторонам угла по паре сил с моментами $= 1$ и определить усилия в частях фермы от действия этих пар. Эти усилия будут:

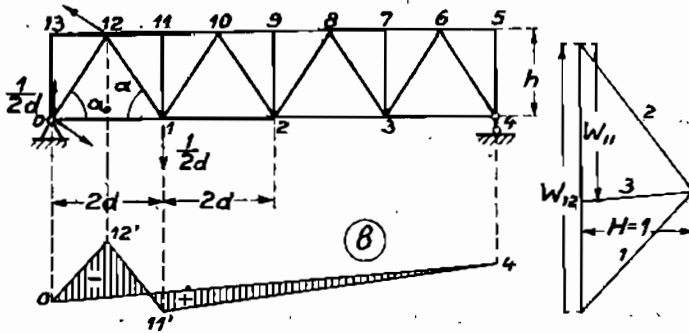
в стержне

$$0-1 \quad N_{01} = -\frac{1}{2h}$$

$$1,12 \quad N_{1,12} = \frac{1}{2d \sin \alpha} = \frac{1}{2h \cos \alpha}$$

$$0-12 \quad N_{0,12} = \frac{-\cos(180-\alpha)}{2h \cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2h \cos \alpha}$$

в остальных стержнях усилия $= 0$.



Черт. 84.

Приняв, что площади поперечных сечений во всех стержнях одинаковые и равны ω , составляем по этим усилиям выражения фиктивных грузов для верхних узлов фермы, пользуясь для этого формулой 141:

$$Ew_{12} = \frac{1}{\omega} \left[\left(-\frac{1}{2h} - \frac{1}{2h \cos \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha + \left(-\frac{1}{2h} - \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2h \cos \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{2h \cos \alpha} \operatorname{ctg} (90 - \alpha) \right] = \frac{-1}{\omega h \operatorname{tg} \alpha} \left[1 + \cos \alpha + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \cos \alpha} \right]$$

$$Ew_{11} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{2h \cos \alpha} [\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} (90 - \alpha)] = \frac{1}{\omega h \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \cos \alpha}$$

При $\alpha = 45^\circ$

$$Ew_{12} = -\frac{1}{h \omega} (1 + 0,7 + 0,7) = \frac{-2,4}{\omega h}$$

$$Ew_{11} = +\frac{1}{h \omega} \frac{2}{2 \cdot 0,7} = +\frac{1,43}{\omega h}$$

Строим для этих двух сил силовой многоугольник (*черт. 84*) с полюсным расстоянием $H=1$ и по нему—веревочный многоугольник 0—12—1—4, который является эпюрой перемещений ферм от действия двух пар с моментами $= 1$ и вместе с тем линией влияния возможных деформаций угла 12—0—1 (сравни пример 17).

В примере 23 было рассмотрено построение эпюры прогибов от действия сосредоточенного груза P , приложенного в шарнире s (черт. 83). Если принять груз $P=1$, то построенная на черт. 93 эпюра представит собой линию влияния возможных прогибов этого узла.

В примере 20 было рассмотрено построение эпюры прогибов от действия горизонтальной силы, приложенной в левом опорном шарнире (черт. 70). Если принять эту силу $=1$, то построенные на этом чертеже эпюры представят собой линии влияния возможных перемещений опорного шарнира.

Аналогичные построения можно найти в ряде других примеров.

В системах со сплошным сечением можно при построении линий влияния перемещений исходить непосредственно из общего вида выражения перемещения

$$\bar{\delta}_{1.P} = \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_P}{EJ} ds \dots \dots \dots (149)$$

В этом выражении \bar{M}_1 — моменты в сечениях системы от действия единичной нагрузки, приложенной по направлению исследуемого перемещения. Вычислив их для различных сечений, принимают величины $\frac{\bar{M}_1 ds}{EJ}$ за упругие грузы w .

В том же выражении \bar{M}_P — моменты в сечениях системы от груза $P=1$, приложенного в расстоянии a от левой опоры, так что для сечений с левой стороны от этого груза $\bar{M}_P = \bar{A}x = \frac{l-a}{l}x$, для сечений справа от него $\bar{M}_P = \frac{(l-a)}{l}x - (x-a)$.

Таким образом, выражение (149) перемещения для конечных значений ds может быть переписано так:

$$\bar{\delta}_{1P} = \frac{(l-a)}{l} \sum_0^l x \cdot w - \sum_a^l (x-a) w \dots \dots \dots (150)$$

Первая из этих сумм может быть рассматриваема как статический момент упругих сил w относительно начала координат, а вторая сумма — как статический момент относительно сечения a упругих грузов, слева от него лежащих.

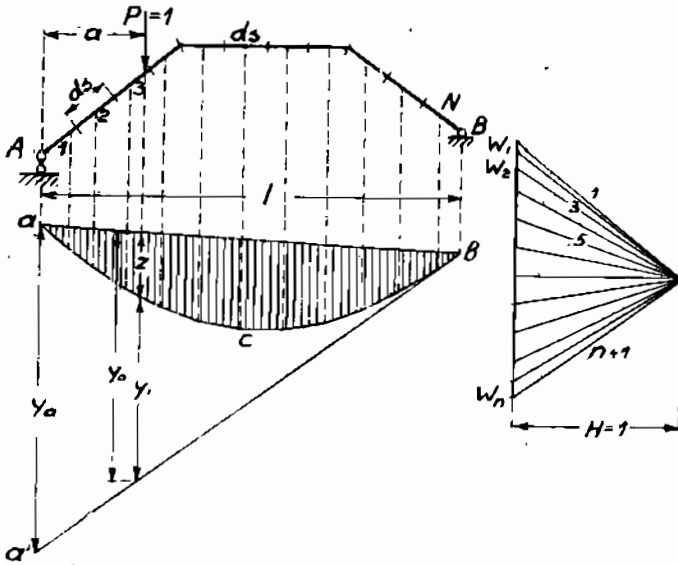
Эти статические моменты можно определить при помощи веревочного многоугольника, построенного для упругих сил w , при полюсном расстоянии $H=1$. Этим веревочным многоугольником очертится некоторая кривая acb (черт. 85). Ординатой $aa' = y_a$ между крайними сторонами 1 и N определяется величина первого статического момента и ординатой y_1 между сторонами, соответствующими сечению a и шарниру b , определяется величина второго статического момента.

Таким образом, выражение перемещения (150) вызываемое ползением груза $P=1$ в сечении на расстоянии a напишется так:

$$\delta_{1P} = \left(\frac{l-a}{l} y_a - y_1 \right) 1 \dots \dots \dots (151)$$

Из чертежа веревочного многоугольника видно, что если провести прямую $a'b$, то ее ордината $y_o = \frac{l-a}{l} y_a$, а потому

$$\bar{\delta}_{1P} = (y_o - y) = z \dots \dots \dots (152)$$



Черт. 85.

При выводе, положение груза $P=1$ было взято произвольно на расстоянии a от левой опоры. Из изложенного же видно, что какое бы значение не было дано отрезку a само построение не изменится, но в зависимости от положения груза будут определяться другие ординаты $z = y_o - y_1$.

Так как каждая из этих ординат определяет собой величину перемещения $\bar{\delta}_{1P}$ от груза $=1$, приложенного к системе над этой ординатой, то, следовательно, кривая очерчиваемая этими ординатами представляет собой линию влияния перемещения (на *черт. 85* она заштрихована).

Аналогичные построения могут быть сделаны и для других видов единичных нагрузок.

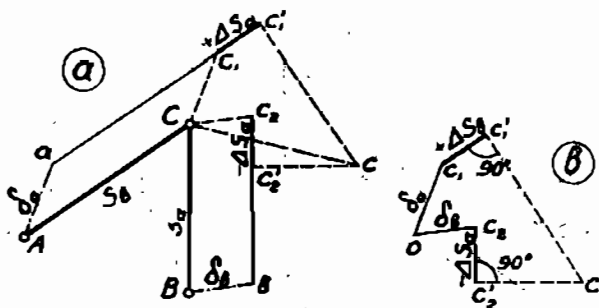
В системах с заделанным концом первый член выражения (150) отпадает.

§ 26. Построение диаграмм перемещений для ферм по способу Виллио (Williot). Изложенный в параграфе 18 прием построения диаграмм перемещений для шарнирной цепи, выделяемой из фермы, может быть распространен для построения перемещений всех узлов ферм; но так как

каждый узел ферм неизменно связан с исходной неизменяемой частью фермы, то благодаря этому условию устраняется необходимость вычисления перемещений вызываемых деформациями углов между стержнями.

Рассмотрим сначала, как построится перемещение какого-либо узла C , который присоединен к двум другим узлам A и B двумя стержнями s_a и s_b (черт. 86); при этом будем исходить из того, что оба шарнира A и B получают какие-то перемещения Aa и Bb , и оба стержня sa и sb получают деформации $+\Delta s_b$ и $-\Delta s_a$, вызываемые какими то причинами.

Если бы не было шарнира C , то вследствие перемещений, получаемых шарнирами A и B , стержни s_b и s_a переместились бы параллельно самим себе в положение ac_1 и bc_2 . Затем каждый из стержней s_b и s_a , получая



Черт. 86.

свою деформацию, вызвал бы смещение точек c_1 и c_2 в положение c'_1 и c'_2 , которые получаются путем отложения от точек c_1 и c_2 по направлению осей стержней деформации $+\Delta s_b$ и $-\Delta s_a$ с учетом знака деформации. В действительности по условию неизменяемого соедине-

ния шарнира C с шарнирами A и B конечное положение шарнира C не может определяться двумя точками c'_1 и c'_2 , и если это получилось, то объясняется тем, что мы предположили вначале, что шарнир C разобщен. В действительности указанные выше деформации вызовут вращение стержней s_a и s_b вокруг шарниров A и B и концы их c'_2 и c'_1 опишут некоторые дуги, которые пересекутся в некоторой точке c , которая определит собой истинное перемещенное положение шарнира C . Так как эти угловые деформации очень малы, то точка c может быть получена путем восстановления двух перпендикуляров к осям стержней s_a и s_b из точек c_2 и c_1 , чем заменяется проведение дуг. Таким образом, отрезком Cc определяется величина и направление перемещения шарнира C , вызываемое указанными деформациями.

Подобно тому, как это было показано при построении диаграмм перемещений шарнирных цепей, построение перемещений для рассмотренного случая может быть сделано, независимо от схемы узлов, на особом чертеже в увеличенном масштабе (черт. 86b), на котором все построение проводится от произвольного неподвижного полюса O .

Принцип этого построения был дан Виллио (Williot), имя которого ему присвоено.

Построение диаграмм в простых фермах. Как известно, в простых фермах образование их проводится путем последовательного присоединения

к основному треугольнику каждого следующего шарнира двумя стержнями. Такое образование их позволяет использовать изложенный выше принцип для построения перемещений всех узлов ферм.

Построение начинают с какого-нибудь узла, который принимается неподвижным. В фермах с большим пролетом лучше начинать построение с одного из средних узлов, так как при таком начале диаграмма получается более компактной, чем если начать построение от конечного узла.

Приняв, например, узел 3 (*черт. 87с*) за неподвижный полюс, откладывают от него, как от полюса, по направлению одного из стержней, например, по направлению стержня s_3 , его деформацию $+\Delta s_3$ и получают точку 5, определяющую перемещение шарнира 5 относительно полюса. Стержень 3—5 принят, таким образом, как бы неподвижным. Зная положение на диаграмме точек 3 и 5, можно по деформациям стержней s_7 и s_9 построить положение точки 4, определяющей перемещение шарнира 4.

Для этого откладывают от точки 3 по направлению стержня s_7 деформацию $(-\Delta s_7)$ и от точки 5—по направлению стержня s_9 его деформацию $(-\Delta s_9)$; пересечением перпендикуляров, восстановленных из концов этих отрезков, определится положение точки 4; отрезком 3—4 определяется направление и величина перемещения шарнира 4.

Далее, зная положение на диаграмме точек 3 и 4, можно найти положение точки 2, связанной с точками 3 и 4 условием деформации стержней s_5 и s_8 .

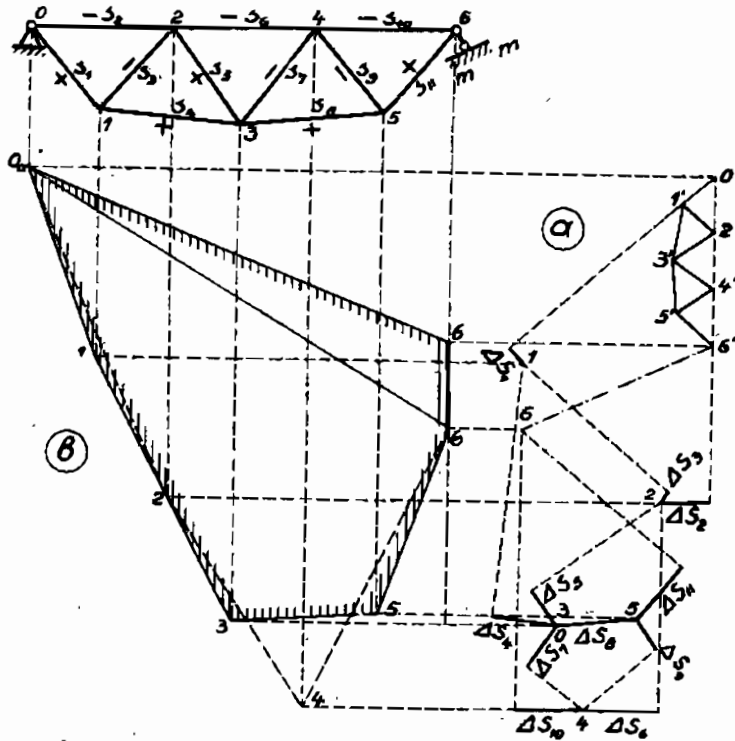
Для этого откладывают от точки 3 по направлению стержня s_5 его деформацию $+\Delta s_5$ и от точки 4 по направлению стержня s_8 его деформацию $(-\Delta s_8)$; точкой пересечения перпендикуляров, восстановленных из концов этих отрезков, определится положение точки 2 на диаграмме. По положению точек 2 и 3 на диаграмме и по деформациям $(-\Delta s_9)$ и $+\Delta s_4$ стержней s_9 и s_4 можно построить точку 1, определяющую перемещение шарнира 1 на диаграмме. Продолжая построение, далее определяют положение точки O , определяющей перемещение опорного узла O . Проводя аналогичное построение в другую сторону от стержня можно, исходя из точек 4 и 5 диаграммы, найти по деформациям $(-\Delta s_{10})$ и $+\Delta s_{11}$ стержней s_{10} и s_{11} положение точки 6, определяющей на диаграмме перемещение опорного шарнира 6.

На построенной таким образом диаграмме отрезками $\overline{34}$, $\overline{32}$, $\overline{30}$, $\overline{36}$, измеряемыми от исходной точки 3, определяется направление и величина перемещения каждого шарнира фермы.

Если отложить на чертеже фермы от каждого ее узла соответствующее ему перемещение, полученное на диаграмме, то получится контур деформированной фермы.

Очевидно, что, в результате построения диаграммы, опорные точки O и 6 фермы получают также некоторые перемещения не соответствующие условиям их закрепления. Эти перемещения опорных точек являются результатом сделанного в начале построения допущения о неподвижности

шарнира 3 и стержня s_3 . Исправление этой неточности может быть сделано следующим приемом: сначала путем поступательного движения всей деформированной фермы, как одного целого, приводят узел O неподвижной опоры в его заданное положение, а потом путем вращения всей деформированной фермы, как одного целого, вокруг шарнира неподвижной опоры приводят узел подвижной опоры на плоскость его подвижности. Перемещения узлов, соответствующие указанным двум движениям, должны быть геометрически сложены с перемещениями, полученными на диаграмме перемещений. В результате этого сложения будут получены действительные перемещения узлов.



Черт. 87.

Поступательное перемещение, которое нужно дать всей ферме, чтобы привести шарнир O неподвижной опоры в его первоначальное положение, равно отрезку $\overline{30}$ на диаграмме и так как это поступательное движение будет сообщено всем узлам фермы, то, следовательно, суммарное перемещение каждого узла фермы, слагающееся из перемещения, полученного на диаграмме, и из поступательного движения, будет определяться замыкающей между отрезками, определяющими эти перемещения.

Например, суммарное перемещение узла 4, слагающееся из перемещения $\overline{34}$ и поступательного перемещения $\overline{03}$ определится отрезком замыкающей $\overline{04}$. Это перемещение будет иметь направление от точки O к точке 4, как равнодействующая направлений $\overline{03}$ и $\overline{34}$. Такое сложение

перемещений будет справедливо для всех узлов фермы. Вместе с тем точка O на диаграмме должна быть принята за неподвижное положение шарнира O фермы.

Второе выправительное перемещение путем поворота всей фермы вокруг неподвижного шарнира должно вызывать, как это было показано для шарнирных цепей, разложение перемещения \overline{Ob} шарнира подвижной опоры по двум направлениям: по направлению плоскости движения опоры и по направлению дуги вращения, т.е. по направлению перпендикуляра к линии опорных шарниров. На *черт. 86/a* диаграммы это разложение отрезка \overline{Ob} произойдет по направлению $\overline{b'}$ b параллельному плоскости $m-m$ подвижности и по направлению $\overline{Ob'}$ перпендикулярному линии шарниров O и b фермы.

Отрезок $\overline{Ob'}$ определяет собой длину дуги, которую опишет узел b при повороте вокруг шарнира O . При этом повороте остальные шарниры фермы очертят дуги пропорциональные их расстоянию от неподвижного шарнира O . Длины этих дуг легко получить, если на отрезке $\overline{Ob'}$ диаграммы построить ферму подобную заданной.

В окончательном результате действительные перемещения узлов, слагающиеся из всех указанных выше перемещений, будут определяться отрезками, измеряемыми между одинаковыми цифрами диаграммы. Например, действительное перемещение узла 4 определится отрезком $\overline{4'4}$, узла 3 — отрезком $\overline{3'3}$ и т. д. Эти отрезки представляют собой равнодействующие двух перемещений: вращательного: $\overline{4'0}$, $\overline{3'0}$. . . и ранее полученного по диаграмме: $\overline{04}$, $\overline{03}$ и т. д., при чем эти действительные перемещения, как замыкающие, будут иметь направление от цифр с одним значком к цифрам без значка.

Построенные таким путем диаграммы перемещений могут быть использованы для построения эпюр перемещений по любому направлению, для чего надо спроектировать все полученные по диаграмме перемещения на заданное направление и провести к ним замыкающую, как это было показано для построения эпюр шарнирных цепей (19).

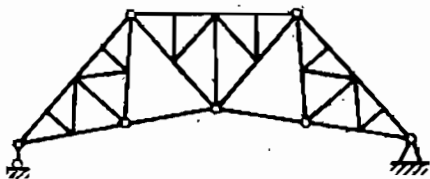
На *черт. 87/b* сделано построение эпюр прогибов нижнего и верхнего поясов фермы. (Прогиб верхнего пояса показан пунктирной линией).

Построение диаграмм в сложных фермах. В сложных фермах, образованных путем введения в основную ферму дополнительных ферм в виде шпренгельных или сквозных балочек (*черт. 88*) или путем введения промежуточных шарниров, как это имеет место в арочных системах (*черт. 89*), построение диаграммы Виллио может быть проведено исходя из того же принципа, как и в простых фермах.

В этих случаях при построении диаграммы всей системы должно быть использовано условие изменения расстояния между основными шарнирами, образующими систему. Изменение этих расстояний между основными шарнирами может быть получено из построения диаграммы Виллио для каждой дополнительной фермочки, входящей в систему.

Пусть, например, требуется построить диаграмму Виллио для арочной системы, показанной на *черт. 89*. Эта система образована из двух фермочек AS и BS с тремя основными шарнирами A , B и S .

Строим первоначально диаграмму перемещений для фермы AS , как



Черт. 88.

для простой фермы и получаем на ней точки a и s конечных шарниров ее. Так как шарнир a по заданию неподвижен, то перемещения всех узлов измеряем от этой точки, как полюса. Величина изменения расстояния между шарнирами A и S получится по этой диаграмме, если на направле-

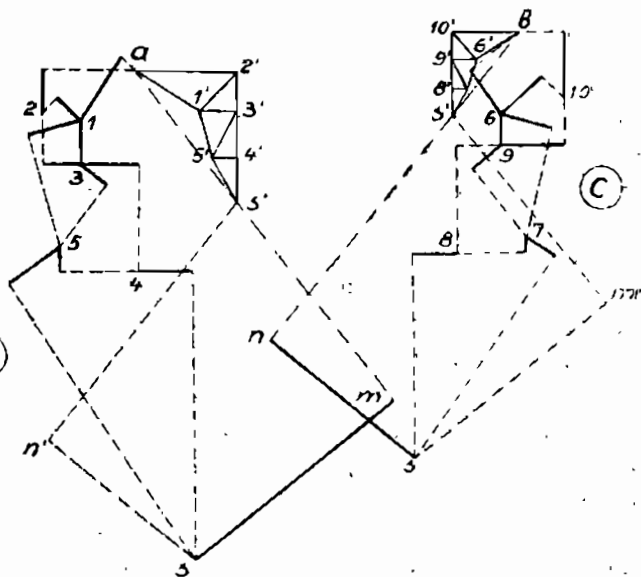
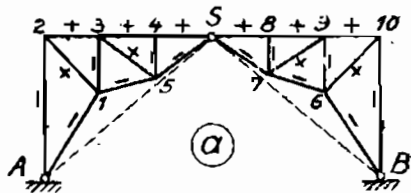
ние AS спроектировать положение точек a и s диаграммы. На *черт. 89b* эта величина получена в виде отрезка sm , который параллелен линии AS и на которую опущен перпендикуляр am из точки a .

Аналогично для определения изменения расстояния между шарни-

рами B и S строим диаграмму перемещений для фермы BS , как простой (*черт. 89b*), и получаем на ней точки b и s конечных шарниров. Величина изменения расстояния между шарнирами B и S получена на этом чертеже в виде отрезка sn , который параллелен линии шарниров B и S и на который опущен перпендикуляр из точки b ; последняя в этой диаграмме является исходной точкой, как неподвижный шарнир фермы.

Зная изменение длин AS и BS , можно на основании того же принципа неизменяемости всей системы

найти положение точки s' на диаграммах, соответствующее действительному перемещению шарнира S . Для диаграммы фермы AS , положение этой точки s' определится, если из точки s диаграммы провести линию параллельную линии шарниров BS и на ней отложить отрезок sn' , равный



Черт. 89.

отрезку sn изменения расстояния между шарнирами B и S . Перпендикуляры, восстановленные на концах отрезков, sn' и sm в точках n' и m , пересекут точку s' , которая будет служить на диаграмме фермы AS исходной точкой для изменения перемещения шарнира. Далее остается только построить на линии точек as' ферму, подобную заданной, узловые точки которой будут служить исходными точками для определения перемещений всех узлов.

Аналогичным построением на диаграмме фермы BS определяется точка s' , служащая исходной точкой для определения перемещения шарнира s на этой диаграмме. Построением на линии bs' фермы, подобной заданной BS , определяются положения исходных точек для измерения перемещений шарниров этой фермы.

Построение диаграмм Виллио может быть сделано для еще более сложных систем. Но так как построение их может быть заменено построением прогибов при помощи фиктивных грузов, то поэтому дальнейшее развитие приема Виллио считаем излишним.

II

**СЫВУЧИЕ ТЕЛА В ПРИЛОЖЕНИИ К РАСЧЕТУ
СООРУЖЕНИЙ**

1. СЫПУЧИЕ ТЕЛА.

§ 1. Сыпучие тела и их свойства. Под названием сыпучее тело мы подразумеваем совокупность мелких твердых однородных частиц, лишенных сцепления между собой и бесконечно малых по сравнению со всем телом. Примером таких тел могут служить сухой песок, бисер, семена растений и т. д.

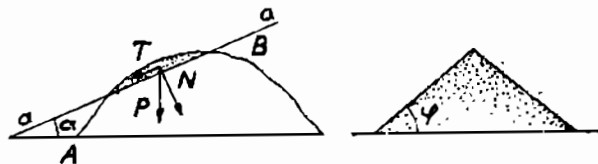
Все тела вообще как твердые, так и жидкие в теории рассматриваются, как состоящие из бесконечно малых частиц. В твердых телах эти частицы связаны между собою сцеплением и трением, что позволяет твердым телам воспринимать растягивающие напряжения и сохранять любую форму, приданную им. В идеальных жидких телах частицы не имеют ни сцепления между собой, ни трения, вследствие чего они не могут ни принимать растягивающих усилий, ни сохранять определенной формы.

Идеальные сыпучие тела не имеют сцепления между своими частицами, вследствие чего они, в отличие от твердых тел, не могут воспринимать растягивающих усилий. Но трение между частицами сыпучего тела имеет место, чем эти тела отличаются от жидких; вследствие этого трения частицы сыпучего тела могут сохранять равновесие в некоторых пределах, пока не будет нарушено трение между отдельными частицами его.

Если представить себе какое-либо сыпучее тело, ограниченное поверхностью ABC (черт. 1) и рассечь мысленно это тело какой-либо плоскостью $a-a$, наклоненной под углом α к горизонту, то, при отсутствии внешних сил, взаимодействие отсеченной и оставшейся части тела будет характеризоваться вертикальной силой P — веса отсеченной части.

Эта вертикальная сила может быть разложена на силу N , нормальную к плоскости сечения и равную $P \cdot \cos \alpha$, и на силу T , параллельную плоскости сечения и равную $P \cdot \sin \alpha$.

Сила T будет стремиться сдвинуть отсеченную часть на плоскости сечения; этому сдвигу в идеальном сыпучем теле будет противодействовать сила трения, имеющая место между частицами сыпучего тела, вели-



Черт. 1.

чина которой представляется некоторой частью $=f \cdot N$ от нормальной силы. Ясно, что пока сила T будет меньше величины fN , отсеченная часть тела будет находиться в покое. При одном и том же весе отсекаемой части сыпучего тела величины слагающих N и T будут зависеть от угла α наклона секущей плоскости и может оказаться, что, при некотором наклоне α_0 , величина T будет $> fN$, что вызовет движение отсеченной части.

Нетрудно показать, что это будет иметь место в том случае, если

$$\frac{T}{N} = \frac{P \cdot \sin \alpha_0}{P \cdot \cos \alpha_0} = \operatorname{tg} \alpha_0 > f = \operatorname{tg} \varphi,$$

т.е. если

$$\alpha_0 > \varphi,$$

где $f = \operatorname{tg} \varphi$ = коэффициенту или тангенсу угла внутреннего трения между частицами рассматриваемого сыпучего тела.

Следовательно, отсеченная часть будет находиться в равновесии, если

$$\alpha < \varphi.$$

Это условие, выведенное для некоторой части сыпучего тела, остается справедливым по отношению к отдельным частицам его, но только в этом случае секущая плоскость превращается в касательную. Если угол наклона касательной будет больше угла трения, то частицы сыпучего тела будут скатываться одна за другой, пока не придут в равновесие под влиянием внутреннего трения. Это движение будет происходить естественно, без вмешательства внешних сил, и то предельное очертание, при котором прекращается движение частиц, носит название угла естественного откоса, который в идеальном сыпучем теле является углом внутреннего трения (*черт. 1*).

Итак, идеально сыпучее тело может находиться в равновесии только до тех пор, пока угол наклона касательных к его поверхности менее угла естественного откоса.

Влияние сцепления. Если бы между частицами сыпучего тела, кроме внутреннего трения, имело бы место еще и сцепление, величина которого определяется некоторым коэффициентом γ на единицу площади, то сдвиг отсеченной части стал бы возможным только в том случае, если сдвигающая сила T превзошла бы и сопротивление от трения и сопротивление от сцепления, т.е.

$$T > fN + \gamma \omega,$$

где ω — площадь сдвига.

Отсюда видно, что движение отсеченной части или отдельных частиц не будет происходить пока

$$\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi + \frac{\gamma \cdot \omega}{N}.$$

В твердых телах, в которых сцепление $\gamma \cdot \omega$ между частицами очень велико, возможны любые формы очертания; в них возможны нормальные напряжения обоих знаков ($\pm n$) и касательные напряжения $t = f \cdot n + \gamma \cdot \omega$.

В идеально сыпучих телах, в которых $\gamma = 0$, возможны только те формы очертания, для которых угол касательной к поверхности

$$\operatorname{tga} < \operatorname{tg}\varphi \dots \dots \dots (1)$$

в них возможны только сжимающие нормальные напряжения ($-n$) и касательные $t = fn$.

В идеально жидких телах, в которых $\gamma = 0$ и угол внутреннего трения $\varphi = 0$, естественное сохранение формы невозможно; в них возможны только сжимающие нормальные напряжения ($-n$) и невозможны касательные напряжения

Сравнительная таблица.

	Нормальные напряжения	Сдвигающие напряжения	Возможная форма
Твердые тела	$\pm n$	$t = fn + \gamma \cdot \omega$	любая
Сыпучие	$-n$	$t = fn$	ограниченная угл. естеств. откосов.
Жидкие	$-n$	$t = 0$	не имеет формы

Землистые массы также относятся к сыпучим телам. Они разнообразны по своему составу и содержат в себе много вяжущих веществ, развивающих сцепление между отдельными частицами, поэтому их нельзя отнести к идеально сыпучим телам. Но их нельзя отнести также и к твердым телам, так как сила сцепления в них очень невелика; они занимают среднее место между твердыми и идеально сыпучими телами. Пока они имеют сцепление между отдельными частицами, условия их равновесия будут более благоприятные, чем в идеально сыпучем теле, что позволяет, поступаясь действительными условиями в запас прочности, рассматривать землистые сыпучие тела как идеально сыпучие.

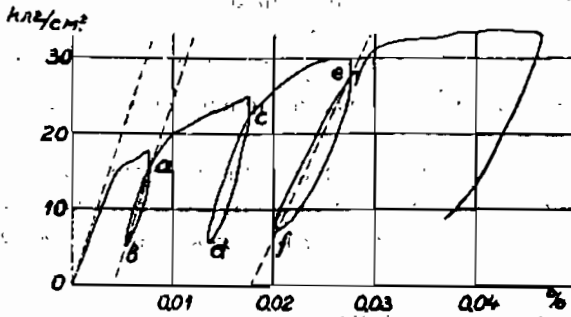
Упругие свойства. Несмотря на то, что сыпучие тела состоят из отдельных зерен, лишенных сцепления, они в своей массе сохраняют упругие свойства, имеющие место в твердых телах. Это положение вполне подтверждено опытами Терцаги¹⁾.

Указанный автор провел ряд опытов со специально отсеянной глиной и песком. Эти два вида сыпучего тела характерно различаются по виду зерен их образующих. Глина состоит из чешуйчатообразных гибких зерен слюды; песок же из жестких зерен раздробленного кварца.

¹⁾ Terzaghi „Erdbaumechanik“, изд. 1925 г., стр. 72 и 78.

В описываемых опытах применялась глина с крупностью зерен от 0,06 мм до 1 мм и песок с крупностью зерен от 0,25 мм до 1 мм.

На черт. 2 показана одна из кривых, полученных при опытах на сжатие глины. По оси абсцисс отложены деформации в процентах, по оси



Черт. 2.

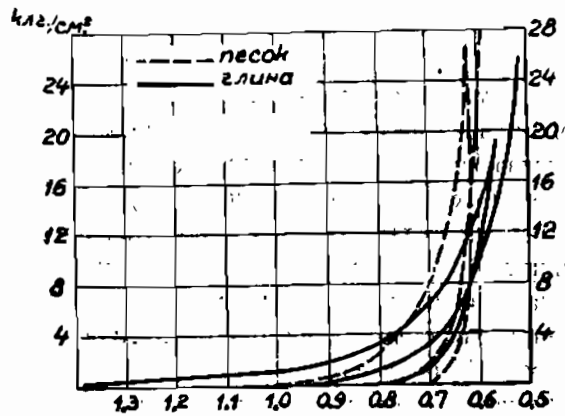
ординат — давления, выраженные в кг на кв. см.

По этой кривой, взятой из ряда аналогичных кривых, видно, что она идентична таковым же кривым, получаемым при сжатии твердых тел (бетон, камень и проч.). Подобно тому, как это имеет место в твердых телах, здесь

были отмечены явления упругого последействия, гистерезиса (в виде петель *ab*, *ef* на черт. 2).

Такие кривые были получены указанным автором как для глины, так и для песка; будучи аналогичны по своему развитию, они отличаются только количественно, что видно из черт. 2-bis, на котором сопоставлены кривые зависимости при сжатии песка и глины; по ординатам этих кривых отложены давления, в кг/см²; по абсциссам — пористость, измерявшаяся отношением пустот к объему твердых частиц. По этим кривым видно, что глина обладает большими пластическими свойствами, чем песок.

Параллельно с этими опытами на сжатие тем же автором были проведены опыты по определению коэффициента Пуассона для тех же сыпучих тел, которые показали, что для глины этот коэффициент изменяется в пределах от 0,366 — 0,39, т.-е. близок к аналогичным величинам, имеющим место в металлах; для песка он равен 0,20, т.-е. приближается к аналогичной величине в горных породах.



Черт. 2 bis.

Все эти опыты позволили сделать следующие выводы относительно упругих свойств этих двух тел:

- 1) песок лишен связности между частицами, глина обладает большей связностью между ними;
- 2) песок не пластичен, глина очень пластична;
- 3) песок после нажима быстро принимает деформацию, глина деформируется постепенно и медленно.

Если сопоставить эти два вида сыпучего тела с твердыми телами, то глину по упругим свойствам следовало бы приравнять к металлам, а песок к камням и бетону.

Величина внутреннего трения. Характерная для равновесия сыпучих тел величина внутреннего трения не есть величина постоянная для одного и того же сыпучего тела. Не говоря уже о том, что она зависит от формы зерен, т.-е. зависит от того, имеют ли зерна округленную или граненую поверхность, она зависит от того, ограничивается ли сдвиг толщиной в несколько зерен или он распространен в толстом слое массива, она зависит также от степени влажности и т. д.

Зависимость величины трения от толщины сдвигаемого слоя особенно заметна в сыпучих телах, состоящих из жестких зерен как, например, песок, гравий и др. Если сдвиг происходит в пределах определенной зоны, то этот сдвиг сопровождается полной перегруппировкой частиц (зерен) и коэффициент внутреннего трения в зоне сдвига по величине близок или равен тангенсу угла естественного откоса. Если же сдвиг частиц того же сыпучего тела происходит под действием давления, распространенного на всю массу сыпучего тела, то вызываемый этим давлением сдвиг частиц происходит во всех точках массы, и величина трения в этом случае характеризуется отношением величин главных напряжений и имеет величину значительно большую величины, определяемой углом естественного откоса.

В сыпучих телах, состоящих из упругих гибких частиц (как глина) эта разница в пределах изменения величины внутреннего трения не так заметна и по величине близка к величине тангенса угла естественного откоса.

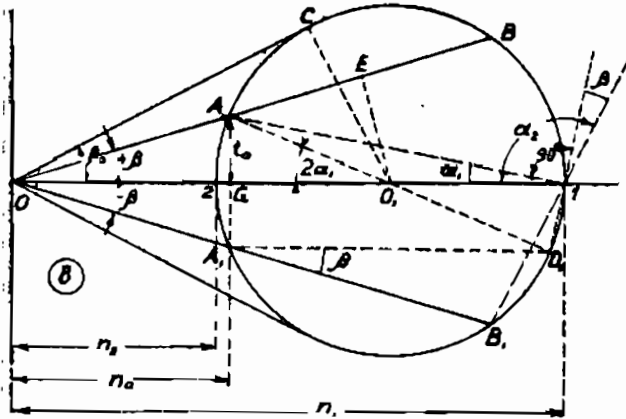
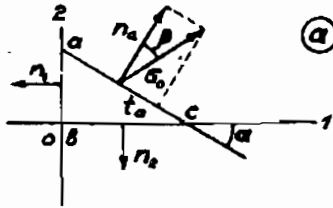
Еще большее влияние на величину внутреннего трения в сыпучих телах оказывает степень насыщения их водой. При небольшом насыщении водой частицы сыпучего тела находятся под капиллярным действием воды и между ними развивается как бы сцепление, при большем насыщении водой происходит разжижение сыпучего тела.

В нижеследующей таблице приведены данные о коэффициентах трения в некоторых характерных сыпучих телах.

Средние значения весов и углов трения сыпучих тел.

Сыпучее тело и степень его влажности	Вес куб. метра в тоннах	Угол внутр. трения
Песок сухой	1,6 — 1,65	30° — 35°
„ влажный	1,8	40°
„ мокрый	2,0	25°
Глина сухая	1,5 — 1,6	40° — 45°
„ мокрая	1,9	20° — 25°
Гравий сухой	1,8 — 1,85	35° — 40°
„ мокрый	1,95	25°
Галька граненая	1,8	45°
„ круглая	1,8	30°
Пшеница	0,7 — 0,8	30° — 35°

§ 2. Напряженное состояние в сыпучем теле. Несомненно, что каждая частица сыпучего тела как бы мала ни была испытывает напряжение от веса самого сыпучего тела и в свою очередь оказывает давление



Черт. 3аб.

на прилегающие к ней частицы того же сыпучего тела; этим объясняются упругие свойства сыпучих тел. Частицы сыпучего тела весомы и не могут считаться бесконечно малыми; но если объем рассматриваемого сыпучего тела очень велик, а зерна его образующие очень малы, то можно принять, что они бесконечно малы по сравнению со всей массой сыпучего тела, и тогда выводы о напряженном состоянии частиц твердого

тела могут быть применены к сыпучему телу.

Представляя частицу, такого тела (черт. 3а) в виде призмы, длиной равной единице и с сечением в виде треугольника, катеты которого параллельны главным плоскостям сечений, мы можем выразить зависимость между напряжениями по трем граням в таком виде:

$$n_a \cdot ac = n_1 (ac \cdot \sin \alpha) \sin \alpha + n_2 (ac \cdot \cos \alpha) \cos \alpha$$

$$t_a ac = n_1 (ac \cdot \sin \alpha) \cos \alpha - n_2 (ac \cdot \cos \alpha) \sin \alpha$$

Делая тригонометрическое преобразование и учитывая, что

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \quad \text{и} \quad 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

получим:

$$n_a = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) - \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \cos 2\alpha$$

$$t_a = \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \sin 2\alpha.$$

Графически величина этих слагающих напряжений по любой плоскости сечений может быть определена построением круга Мора (черт. 3б). Как известно центр этого круга располагается на расстоянии

$$OO_1 = \frac{1}{2} (n_1 + n_2)$$

от начала координат O , а радиус его

$$r = \frac{1}{2} (n_1 - n_2).$$

Любая точка A этого круга своими координатами определяет слагающие напряжения n_a и t_a , относящиеся к плоскости, положение которой относительно главной плоскости сечения $O-1$ определяется направлением прямой, проходящей через точку A круга и точку 1 , т.е. наиболее удаленную точку диаметра того же круга.

Действительно, если обозначить угол $A1O$ через α_1 , то угол AO_1O при центре круга будет $= 2\alpha_1$; в соответствии с этим, абсцисса точки A , определяемая отрезком OG , равна:

$$OG = n_a = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) - \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \cos 2\alpha_1$$

и ордината той же точки, определяемая отрезком AG , равна:

$$AG = t_a = \frac{1}{2} (n_1 - n_2) \sin 2\alpha_1.$$

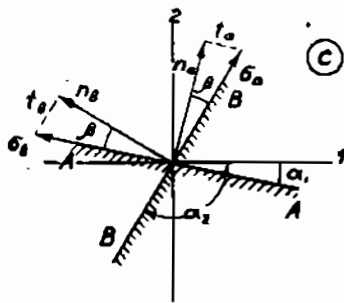
Таким образом, отрезком

$$OA = \sqrt{n_a^2 + t_a^2}$$

определяется напряжение σ_a в плоскости сечения, наклоненной под углом α_1 к главной плоскости $O1$, а углом AOO_1 наклона отрезка OA к линии $O1$ определяется угол β наклона напряжения σ_a к нормали к той же плоскости сечения, так как

$$\operatorname{tng} \beta = \frac{t_a}{n_a}.$$

Из круга Мора непосредственно видно, что каждому углу $(+\beta)$ отклонения соответствует два полных напряжения, измеряемых отрезками OA и OB ; такие же по величине напряжения соответствуют углу отклонения $(-\beta)$. Напряжение, измеряемое отрезком OA , относится к плоскости сечения $a-a$, наклоненной под углом $A1_1O_1 = \alpha$ к оси абсцисс, напряжение OB относится к сечению $b-b$, наклоненному под углом $B1O = \alpha_2$ к той же оси. Нетрудно показать, что направление этих напряжений и плоскостей сечений, к которым они относятся, связаны между собой определенными угловыми соотношениями.



Черт. 3с.

Точка D_1 , определяемая на круге путем проведения горизонтали через точку A_1 , будет симметрична точке A и лежит с ней на одном диаметре, так как угол AA_1D_1 прямой. Угол D_1B_1 , как опирающийся на дугу B_1D_1 , равен углу β , а потому угол α_2 , образуемый плоскостью B_11 с главной плоскостью, будет образовывать с плоскостью $A1$ угол $= 90^\circ + \beta$, т.е.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ + \beta.$$

Но так как напряжение σ_a , относящееся к плоскости $A1$, наклонено к последней под углом $(90^\circ + \beta)$, то следовательно, направление этого напряжения параллельно плоскости B_11 другого напряжения σ_b ; аналогично напряжение σ_b , образующее с плоскостью B_11 угол $= (90^\circ - \beta)$, будет параллельно плоскости сечения $A1$ (черт. 3с).

Такие напряжения, связанные условием, что каждое из них параллельно плоскости, в которой действует другое, называются сопряженными.

Величины сопряженных напряжений легко определяются по кругу Мора.

Меньшее напряжение, измеряемое отрезком

$$OA = OE - EA = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \cos \beta - \sqrt{O_1A^2 - O_1E^2},$$

но так как

$$O_1A = \frac{1}{2} (n_1 - n_2) = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \sin \beta_0 \quad \text{и} \quad O_1E = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \sin \beta,$$

то

$$OA = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \left\{ \cos \beta - \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \beta} \right\} \dots \dots (2)$$

аналогично большее напряжение, измеряемое отрезком

$$OB = OB_1 = OE + EB = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) \left\{ \cos \beta + \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \beta} \right\} \dots (3)$$

Все эти свойства напряженного состояния справедливы для всякого твердого тела и приложимы к сыпучим телам, удовлетворяющим условиям, указанным в § 1.

Исследование круга Мора показывает, что возможные отклонения напряжений σ в любых плоскостях сечений ограничиваются углами $\pm \beta_0$, образуемыми касательными к кругу, проводимыми через начало координат. Величина угла β_0 предельного отклонения может быть выражена через главные напряжения так:

$$\sin \beta_0 = \frac{O_1C}{OO_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \dots \dots \dots (4)$$

Решая это соотношение относительно n_2 , получим:

$$n_2 = n_1 \frac{1 - \sin \beta_0}{1 + \sin \beta_0} = n_1 \frac{1 - \cos (90^\circ - \beta_0)}{1 + \cos (90^\circ - \beta_0)} = n_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\beta_0}{2} \right) \dots (5)$$

Это соотношение между главными напряжениями справедливо для всякого тела.

В жидких телах $\beta_0 = 0$, а потому в них всегда имеет место равенство $n_1 = n_2$.

В твердых и сыпучих телах угол β_0 вообще есть некоторый неизвестный угол наклона внутреннего давления между частицами; но в сыпучих телах этот угол отклонения давления от нормали к поверхности действия не может превосходить угла φ естественного откоса, так как в противном случае начнется сдвиг частиц между собой, а потому в сыпучих телах предельный возможный угол отклонения давления $\pm \beta_0$ в худшем случае равен углу φ внутреннего трения.

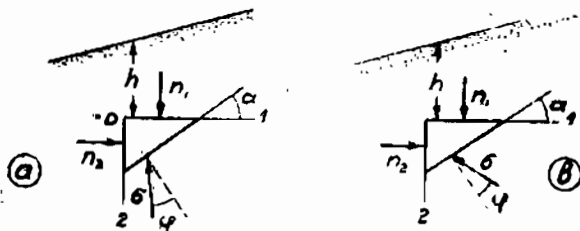
Так как угол β_0 предельного отклонения может иметь два знака $+$ и $-$ (см. круг Мора), то соответственно предельные значения соотношений главных напряжений в сыпучем теле определяются величинами:

$$n_2 = n_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (6)$$

$$n_2 = n_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (6a)$$

Полученные два предельные соотношения между главными напряжениями n_1 и n_2 в сыпучем теле, соответствуют двум моментам предельного равновесия частицы, именно, когда она под действием каких либо сил стремится сползти и когда она стремится подняться.

В первом случае напряжение по какой либо наклонной плоскости (черт. 4a), вызываемое сопротивлением прилегающих



Черт. 4.

частиц, отклоняется книзу от перпендикуляра к этой плоскости, т. к. сопротивление, вызываемое трением, будет направлено против движения частицы.

Во втором случае напряжение, вызываемое сопротивлением по той же плоскости (черт. 4b), по той же причине будет отклоняться кверху от перпендикуляра к той же плоскости.

Нетрудно видеть, что при одной и той же глубине погружения частицы сыпучего тела, т.-е. при одном и том же значении $n_1 = \delta h$, где δ — вес единицы сыпучего тела, давление частицы n_2 будет больше при условии ее выпирания, чем при условии ее сползания (см. выраж. 6).

Если принять угол естественного откоса $\varphi = 30^\circ$, то при активном давлении (сползание)

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg}^2 30^\circ = 0,333n_1,$$

при пассивном давлении (выпирание)

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg}^2 60^\circ = 3,00n_1.$$

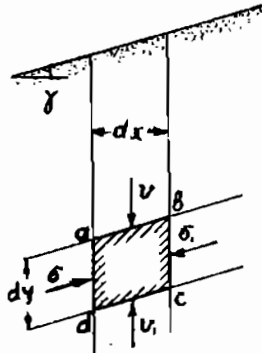
Среди указанных предельных отклонений напряжений на угол $\pm \beta_0$ может иметь место случай, когда $\beta = 0$ и, следовательно, $n_2 = n_1$.

Такое соотношение между главными напряжениями в сыпучем теле скорее всего может соответствовать случаю, когда сыпучее тело занимает неограниченное пространство, ограничено горизонтальной плоскостью и находится в полном покое. В этом случае «натуральное» боковое давление его частиц n_2 равно n_1 , т.е. = весу столба сыпучего тела, лежащего выше

$$n_2 = n_1 = \delta h (7)$$

где h высота столба, а δ — вес единицы объема сыпучего тела.

§ 3. Теория Ранкина (Rankine). Если в сыпучем теле (черт. 5), занимающем неограниченное пространство, находящемся в равновесии



Черт. 5.

и ограниченном плоскостью наклоненной под углом γ к горизонту, выделить какую либо частицу $abcd$ двумя вертикальными сечениями и двумя сечениями, параллельными поверхности, то эта частица будет находиться в равновесии под действием вертикальных сил v и v_1 и двух сил σ и σ_1 , параллельных поверхности.

Пренебрегая объемным весом частицы, как величиной бесконечно малой по сравнению с весом столба высотой — h , соответствующего глубине положения частицы, можно величину силы v_1 принять равной силе v действующей на частицу сверху

$$v_1 = v = \delta \cdot dx \cdot 1 \cdot \cos \gamma \cdot h.$$

С отнесением этих сил к единице длины, мы будем иметь напряжения, которые оба будут иметь вертикальное направление:

$$v = \delta \cdot h \cos \gamma.$$

Переходя к силам σ и σ_1 и относя их к единице высоты, мы будем иметь два напряжения, которые должны быть равны и взаимно противоположны, т.к. в противном случае частица $abcd$ перемещалась бы этими силами. Условие же равенства и взаимной противоположности заставляет признать, что эти два напряжения могут быть направлены только параллельно плоскости, ограничивающей сыпучее тело, т.е. под углом γ к горизонту.

Отмечая, что напряжения v , действующие по граням, параллельным поверхностям сыпучего тела, сами параллельны вертикальным граням и что напряжения σ , действующие по вертикальным граням, сами параллельны поверхности сыпучего тела, мы должны признать, что эти напряжения являются сопряженными напряжениями, величины коих определяются выражениями (2 и 3). Из этих двух напряжений — напряжения σ меньше напряжений v и образуют угол γ с перпендикуляром к вертикальной плоскости, а потому

$$\sigma = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) (\cos \gamma - \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma})$$

$$v = \frac{1}{2} (n_1 + n_2) (\cos \gamma + \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma})$$

Из соотношения этих напряжений следует, что

$$\sigma = v \frac{\cos \gamma - \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma}},$$

подставляя в него значение

$$v = \delta h \cos \gamma,$$

получим:

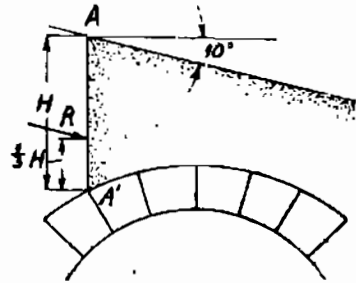
$$\sigma = \delta h \cos \gamma \frac{\cos \gamma - \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{\sin^2 \beta_0 - \sin^2 \gamma}}.$$

Этим выражением определяется напряжение в любой точке неограниченного сыпучего тела, но в нем остается неизвестным угол β_0 . Однако, если рассматривать сыпучее тело в условии предельного равновесия, то угол β_0 должен быть принят равным углу φ естественного откоса и тогда выведенное соотношение напряжений получает определенное решение, по которому

$$\sigma = \delta h \cos \gamma \frac{\cos \gamma - \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \gamma}}{\cos \gamma + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \gamma}} \dots \dots \dots (9)$$

Этим выражением определяется величина напряжения, направление же его будет параллельно поверхности сыпучего тела.

Пример 1. Пусть требуется определить давление сыпучего тела по плоскости AA' (черт. 6) высотой H , при условии, что поверхность сыпучего тела наклонена под углом $\gamma = 10^\circ$ к горизонту, что угол $\varphi = 30^\circ$ и что вес куб. метра сыпучего тела $\delta = 1600$ кг.



Черт. 6.

По формуле (9) для любой точки плоскости AA' на глубине будем иметь напряжение:

$$\sigma = 1600 \cdot h \cdot 0,985 \frac{0,985 - \sqrt{0,5^2 - 0,174^2}}{0,985 + \sqrt{0,5^2 - 0,174^2}} = 558,4 \cdot h.$$

Полное давление по плоскости AA' будет:

$$R = \int_0^H \sigma \, dh = 558,4 \cdot \frac{H^2}{2}.$$

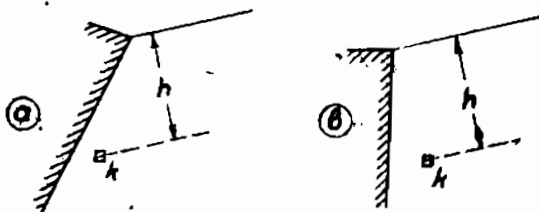
Направлено оно под углом 10° к горизонту.

Точка приложения его на плоскости определяется из условия:

$$y_0 = \frac{M}{R} = \frac{\int_0^H \sigma \cdot h \, dh}{R} = \frac{558,4 \cdot \frac{1}{3} H^3}{558,4 \cdot \frac{1}{2} H^2} = \frac{2}{3} H,$$

т.е. на расстоянии двух третей высоты от верхней плоскости AA' .

Однако, опыты показывают, что величины давлений сыпучего тела на ограждающие его поверхности, вычисленные по формуле Ранкина, не совпадают с опытными наблюдениями. Это несовпадение опытов с расчетом объясняется тем, что Ранкин в основу своих выводов положил условие напряженного состояния неограниченной массы однородного сыпучего тела, что, естественно, не может иметь места вблизи поверхностей, ограждающих сыпучее тело, где условия неограниченности массы нарушаются близостью ограждающей поверхности, ее положением, трением частиц сыпучего тела по поверхности и т. д.



Черт. 7.

На черт. 7 показаны две стенки, ограничивающие одно и то же сыпучее тело, но имеющие разные наклоны; трудно предположить, чтобы частица *K* этого сыпучего тела в обоих случаях была одинаково

напряжена и оказывала одинаковое давление на стенку.

Еще большая неопределенность имеет место в вопросе влияния трения сыпучего тела по ограждающей поверхности, где коэффициент трения зависит от целого ряда неподдающихся учету факторов, как-то: степень шероховатости стенки, ее влажности и проч.

Принципы, выставленные Ранкин'ом в последующем были развиты математическим анализом целым рядом авторов: Levy, Boussinesque'ом, Resal'ем, Белзецким и друг., но до тех пор, пока вопрос о влиянии ограждающей поверхности на состояние сыпучего тела не будет разрешен, вычисление давления по этим, иногда сложным, формулам будет оставаться приближенным.

Этим обстоятельством объясняется то, что методы Ранкина и других авторов, исходящие из условий напряженного состояния, не получили широкого распространения на практике; и в настоящее время продолжают пользоваться графическими приемами определения давления, дающими приближенные, но достаточно подтверждаемые опытами, величины.

В тех случаях, когда коэффициент трения по ограждающей поверхности принимается равным нулю ($\varphi_0 = 0$), расчеты по формулам Ранкина дают результаты, совпадающие с графическими методами.

Частные случаи.

1) Для случая, когда плоскость стенки вертикальна и не имеет трения ($\varphi_0 = 0$) и поверхность сыпучего тела горизонтальна, напряжение в плоскости стенки определяемое по формуле (9), равно:

$$\sigma = \delta h \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \delta \times h \times \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

т.-е. определяется величиной главного напряжения p_2 (см. форм. 5).

Полное давление на стенку

$$R = \int_0^H \sigma dh = \frac{1}{2} \delta h^2 \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (10)$$

2) Для случая, когда плоскость стенки вертикальна, трение по ней $\varphi_0 = 0$ и поверхность сыпучего тела направлена под углом естественного откоса ($\gamma = \varphi$), величина напряжения в плоскости стенки, определяемая по формуле (9), будет:

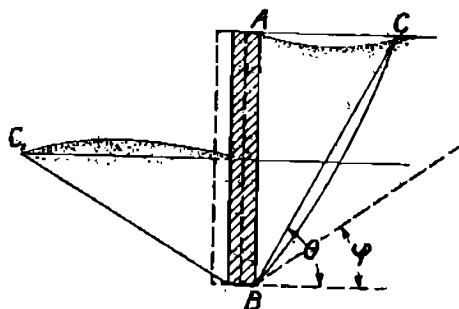
$$\sigma = \delta h \cos \varphi \frac{\cos \varphi - \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varphi}} = \delta h \cos \varphi,$$

полная величина давления на стенку

$$R = \int_0^H \sigma dh = \frac{1}{2} \delta h^2 \cos \varphi \dots \dots \dots (11)$$

и направлено параллельно поверхности сыпучего тела.

§ 4. Метод Coulomb'a (Кулона). Этот способ расчета давления сыпучего тела на стенки, его ограждающие, основан на ряде гипотез, изложенных ниже, что заставляет многих авторов относиться к нему скептически. Однако, расчеты сооружений, обоснованные на этом методе, дают такие простые решения, что техника широко им пользуется, тем более, что и опытные наблюдения не дают больших расхождений. Терцаги, проводивший ряд опытов, пишет так: «в заключение можно сказать что принцип Coulomb'a, в высокой мере подходит для расчета подпорных стенок без различия высоты»¹⁾.



Черт. 8.

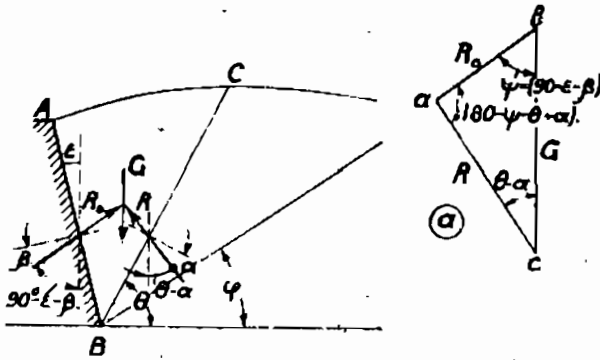
Если представить себе абсолютно жесткую плоскость, погруженную в сыпучее тело (черт. 8) и получившую возможность сдвинуться параллельно самой себе под влиянием большей одной стороны тем же сыпучим телом, то вследствие этого сдвига часть сыпучего тела, расположенного справа, сползет по некоторой поверхности, след которой на черт. 8 обозначен кривой BC. Опыт показывает, что угол наклона этой поверхности к горизонту больше угла естественного откоса. Под влиянием того же сдвига плоскости BA часть сыпучего тела, расположенного с левой стороны, будет выперта кверху, при чем, как показывает опыт, это выпирание произойдет по некоторой кривой поверхности со следом BC'.

Как кривизна поверхности сползания, так и кривизна поверхности выпирания незначительны, что позволяет признать их за плоскости: плоскость сползания и плоскость выпирания.

1) Terzaghi «Erdbaumechanik» 1925, стр. 326.

Для определения давления R_0 , производимого сыпучим телом на единицу длины стенки AB его ограждающей (черт. 9), Кулон предложил рассматривать всю сползающую призму ABC , как бы затвердевшей в виде клина. Сползанию этого клина будут противодействовать силы R_0 — сопротивления ограждающей стенки AB и сопротивление — R неподвижной части сыпучего тела.

Так как по обоим плоскостям скольжения этого воображаемого клина будет иметь место трение, то сила R_0 будет отклонена кверху под углом $(90 - \beta)$ к плоскости стенки и сила R также будет отклонена вверх под углом $(90 - \alpha)$ к плоскости сползания. Обе эти силы, как силы реактивные, будут уравновешивать давление веса G клина, а потому все три силы должны пересекаться между собой в одной точке и образовывать замкнутый силовой многоугольник



Черт. 9.

силовым многоугольником abc (черт. 9а).

Если обозначить угол наклона стенки к вертикали ϵ , а угол образуемый — плоскостью сползания с горизонтом θ , то из геометрического образования не трудно показать, что угол между силою R_0 и силою G в силовом треугольнике $\psi = 90^\circ - \epsilon - \beta$, как угол равный углу $(90^\circ - \epsilon - \beta)$ между силою R_0 и вертикалью, проведенной через точку приложения ее на стенке AB ; и что угол между силою R и силою G в силовом треугольнике равен $(\theta - \alpha)$, как угол равный углу $(\theta - \alpha)$ между силою R и вертикалью, проведенной через точку приложения ее на плоскости сползания. Третий угол силового многоугольника, как дополнительный угол, равен $(180^\circ - \psi - \theta + \alpha)$.

Следует отметить, что если ограждающая плоскость будет иметь наклон в сторону сыпучего тела, то угол α будет входить в выражение угла ψ со знаком $+$, а потому ψ будет $= 90^\circ + \epsilon - \beta$.

Таким образом, из силового треугольника устанавливается следующая зависимость между давлением R_0 на стенку и весом G призмы сползания:

$$R_0 = G \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + \psi - \alpha)} = G \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\theta + 90^\circ - \epsilon - \beta - \alpha)} \dots (12)$$

В это выражение входят три неизвестных: α , β , θ , что делает задачу неопределенной.

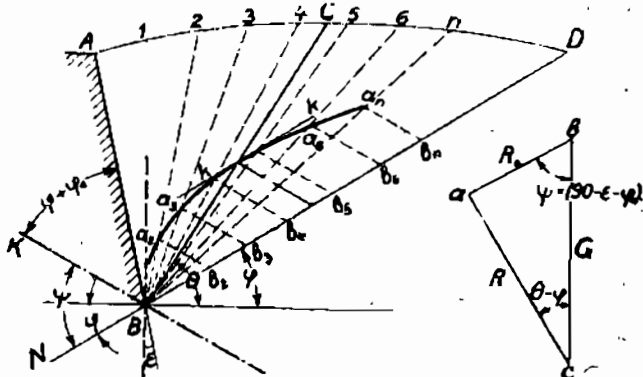
Для разрешения этой неопределенности Кулон предложил рассматривать призму сползания в состоянии предельного равновесия. Этому состоянию соответствует момент, когда призма еще

не двигается, но может двинуться. По условию естественного равновесия сыпучего тела, это состояние возможно только в том случае, если угол наклона равнодействующей R к плоскости сползания $= (90^\circ - \alpha) = (90^\circ - \varphi)$, т.е. $\alpha = \varphi$ углу внутреннего трения сыпучего тела и угол $\beta = \varphi_0$ углу трения между сыпучим телом и плоскостью стены. Такое предположение делает направление реактивной силы R_0 независимым от направления плоскости сползания, определяемого углом θ , вследствие чего угол ψ в силовом многоугольнике при любом направлении плоскости сползания остается неизменяемым. Направление же силы R , хотя будет изменяться в зависимости от направления плоскости скольжения, но всегда будет наклонена к ней под углом $(90^\circ - \varphi)$. Таким образом, величина силы R_0 в выражении (12) будет определяться в функции одного переменного угла θ наклона плоскости сползания, т. к. переменная величина веса G призмы является функцией того же угла θ

$$R_0 = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \psi - \varphi)} \dots \dots \dots (13)$$

В этом уравнении каждому значению θ соответствует некоторое значение R_0 , но расчет прочности и устойчивости стенки должен производиться по возможно наибольшему давлению.

Для отыскания плоскости сползания с наибольшим давлением Кулон воспользовался следующим геометрическим построением.



Черт. 10.

Если совместить силовой треугольник abc вершиной c с точкой B , ограждающей плоскости AB (черт. 10), и стороной cb с направлением естественного откоса, то вследствие равенства углов $(\theta - \varphi)$, его сторона ca совместится с направлением плоскости сползания соответствующей этому силовому многоугольнику. Это совмещение будет иметь место при любой плоскости сползания, т. к. для всех их угол $(\theta - \varphi)$ силового многоугольника будет изменяться в соответствии с углом θ наклона плоскости.

Все силовые многоугольники $Ba_n b_n$ для различных плоскостей сечения будут иметь различное очертание, но направление стороны $a_n b_n$ в них остается постоянным, как зависящее от угла ψ .

Это направление может быть построено независимо от плоскости сползания. Действительно, если провести к следу AB секущей плоскости линию BK под углом $\varphi + \varphi_0$ (черт. 10), то угол KBN ,

образуемый этой линией с направлением естественного откоса, будет $=\psi$, что нетрудно видеть из геометрического образования этого угла, состоящего из прямого угла, образуемого горизонтальной и вертикальной плоскостями, плюс φ и минус ε и $(\varphi + \varphi_0)$, что составит:

$$90^\circ + \varphi - \varepsilon - (\varphi + \varphi_0) = 90^\circ - \varepsilon - \varphi_0 = \psi.$$

Эта линия получила название основной линии, т. к. при помощи ее, как это видно в последующем изложении, производится определение плоскости сползания с наибольшим давлением.

Зная направление основной линии и задаваясь рядом возможных положений плоскостей сползания B_1, B_2, \dots, B_n можно вычислить величины: G_1, G_2, \dots, G_n весов призм обрушения отсекаемых этими плоскостями и отложить их в виде отрезков Vb_1, Vb_2, \dots, Vb_n на линии естественного откоса. На основании изложенного выше линии $b_1a_1, b_2a_2, \dots, b_na_n$, проводимые параллельно основной линии BK засекут на соответствующих плоскостях сползания точки a_1, a_2, \dots, a_n и образуют силовые многоугольники, соответствующие каждой плоскости сползания, и сами отрезки $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n$ будут определять собой в масштабе сил величины давлений $R_{01}, R_{02}, \dots, R_{0n}$.

Если через точки a_1, a_2, \dots, a_n провести кривую, то она охарактеризует изменение величин R_0 при любом направлении плоскости сползания. Наибольшее значение давления R_0 определится отрезком a_0b_0 , измеряемым в масштабе силового построения, и будет иметь место при сползании по плоскости BC , проходящей через точку a_0 касания к кривой давлений касательной параллельной линии естественного откоса.

Построение, сделанное Кулон'ом на основании допущений: 1) что поверхность сползания — плоскость, 2) что ограждающая (секущая) плоскость AB совпадает с плоскостью сползания и 3) что затвердевшая призма сползания находится в состоянии предельного равновесия, дает приближенное решение с тем меньшей ошибкой, чем ближе удовлетворяются поставленные условия и чем ближе приближается поверхность AOD , ограничивающая сыпучее тело к плоскости.

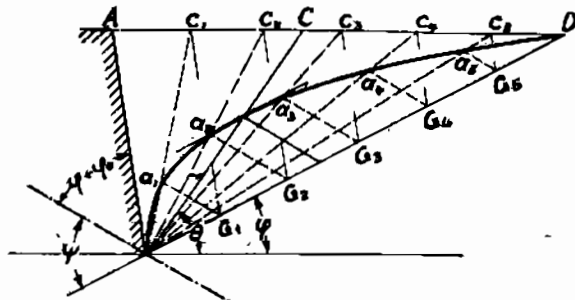
Частный случай. Для случая прямой стенки и прямого откоса (*черт. 11*) построение Кулона упрощается в зависимости от соотношений, имеющих место в этом случае.

Действительно, если стенка и поверхность прямые, то, как бы ни проходила плоскость сползания, вес G призмы сползания будет пропорционален площади треугольника BAC и будет равен $\frac{1}{2} \delta \cdot AC \cdot h$. Веса же любых призм сползания будут относиться между собой, как их основания, т.-е.

$$G_1 : G_2 : G_3 \dots = AC_1 : AC_2 : AC_3 \dots$$

Это соотношение между весами призм обрушения позволяет не определять их величин для построения Кулона, а откладывать на линии естественного откоса отрезки BG_1, BG_2, \dots , пропорциональные отрезкам AC, AC_2, \dots , что достигается проведением прямых C_1G_1, C_2G_2, \dots параллельных направлению плоскости BA .

Далее, проводя через точки G_1, G_2, \dots прямые, параллельные основной линии, мы будем получать точки a_1, a_2, \dots , которыми очертится кривая Кулона.



Черт. 11.

§ 5. Построение Ребхана (Rebhann). Расчет прочности и устойчивости стенок требует, чтобы расчетная величина давления R_o , определяемая из выражения (13), имела наибольшее значение. Это условие будет удовлетворено, если первая производная равна нулю.

Так как в выражении (13)

$$R_o = G \frac{\sin (\theta - \varphi)}{\sin (\theta + \psi - \varphi)}.$$

переменным является угол θ , от которого также зависит величина давления G , то первая производная из этого выражения напишется так:

$$\frac{dR_o}{d\theta} = \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin (\theta - \varphi)}{\sin (\theta + \psi - \varphi)} + G \frac{\sin (\theta + \psi - \varphi) \cos (\theta - \varphi) - \cos (\theta + \psi - \varphi) \sin (\theta - \varphi)}{\sin^2 (\theta + \psi - \varphi)} \dots (14)$$

Приравнявая выражение производной нулю, мы можем найти величину веса G призмы сползания, удовлетворяющей этому условию

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \cdot \frac{\sin (\theta - \varphi) \sin (\theta + \psi - \varphi)}{\sin (\theta + \psi - \varphi - \theta + \varphi)} = - \frac{dG}{d\theta} \cdot \frac{\sin (\theta - \varphi) \sin (\theta + \psi - \varphi)}{\sin \psi} \dots (15)$$

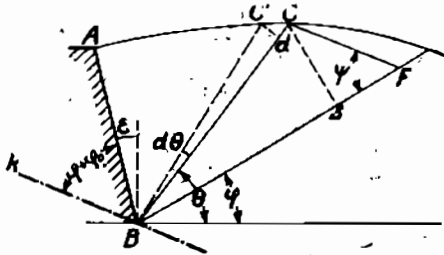
Для выяснения этой зависимости можно воспользоваться следующим геометрическим построением (черт. 12).

Пусть BC будет некоторая плоскость сползания, направленная под углом θ к горизонту. Всякое изменение положения этой плоскости на угол $d\theta$ вызовет изменение веса призмы ABC на величину dG , которая определяется весом призмы с основанием CBC^1 , а именно:

$$dG = \frac{1}{2} \delta \cdot BC \cdot C^1 d = - \frac{1}{2} \delta \cdot BC^2 \cdot d\theta.$$

В этом выражении: δ — вес единицы объема сыпучего тела, $C'd$ — высота треугольника основания призмы, которая, по малости всей площади, может быть принята равной $CC' = BC \times d\theta$.

Знак величины dG должен быть принят отрицательным, так как с увеличением угла θ , объем и вес G призмы сползания убывает, и наоборот.



Черт. 12.

Производя далее построение силового треугольника путем проведения линии CF параллельно основной линии и опустив из вершины его C на основание перпендикуляр CS , мы можем по-

казать, что

$$CS = BC \cdot \sin(\theta - \varphi) \quad \text{и} \quad \frac{BF}{BC} = \frac{\sin(\theta + \psi - \varphi)}{\sin \psi}$$

Подставляя полученные значения dG и синусов углов в выражении (15) веса G призмы, получим:

$$G = \frac{1}{2} \delta \cdot BC^2 \cdot \frac{CS}{BC} \cdot \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2} \delta \cdot CS \cdot BF \dots (16)$$

но так как вес G призмы может быть выражен как объем через площадь основания призмы: $G = \text{пл. } ABC \cdot \delta$, то полученное выражение (16) может быть приведено к виду:

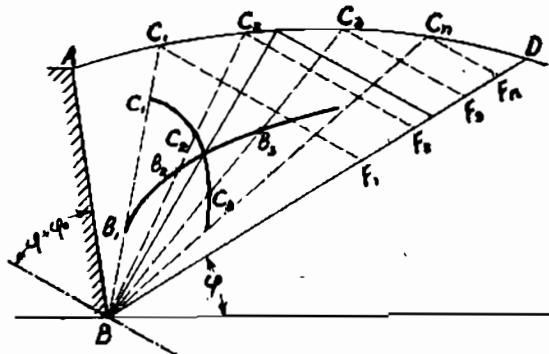
$$G = \text{пл. } ABC \cdot \delta = \frac{1}{2} \delta \cdot CS \cdot BF$$

из чего следует, что

$$\text{площадь } ABC = \text{площади } CBF \dots (17)$$

Итак: наибольшее значение давления на ограждающую плоскость будет иметь место для той плоскости сползания, для которой площадь отсекаемой ею призмы сползания будет равна площади силового треугольника, построенного на следах плоскости сползания и естественного откоса.

Это свойство может быть использовано для отыскания плоскости сползания с наибольшим давлением на ограждающую плоскость, что достигается следующим построением.



Черт. 13.

Проведя ряд возможных плоскостей сползания BC_1, BC_2, \dots (черт. 13), вычисляем для них площади ABC , которые откладываем в виде отрезков: Vb_1, Vb_2, \dots, Vb_n на соответственных линиях BC_1, BC_2, \dots от точки V . Далее, построив на следах BC_1, BC_2, \dots плоскостей сползания силовые треугольники $BC_1F_1, BC_2F_2, \dots, BC_nF_n$, вычисляем их площади и откладываем их в виде отрезков: Vc_1, Vc_2, \dots, Vc_n на линиях соответствующих следов плоскостей сползания и в том же масштабе, как и отрезки Vb . Полученные путем этих построений ряды точек: b_1, b_2, \dots, b_n и c_1, c_2, \dots, c_n намечают собой кривые изменения величины площадей оснований призм сползания и площадей силовых треугольников.

Нетрудно видеть, что равенство площади основания призмы сползания и площади соответственного силового треугольника будет иметь место в пересечении этих двух кривых, следовательно, через эту точку должна проходить плоскость сползания BC с наибольшим давлением R_0 на ограждающую стенку, равным отрезку CF в масштабе силового треугольника, в котором BF равно весу призмы — G .

§ 6. Построение Понселе (Poncelet). Исходя из допущений Кулона, Понселе предложил для случаев, когда поверхность сыпучего тела есть плоскость, построение, непосредственно определяющее положение плоскости сползания. Это построение обосновано на следующем геометрическом доказательстве.

Пусть имеется сыпучее тело, имеющее плоскую поверхность ACD и ограниченное секущей плоскостью AB (черт. 14). Согласно теореме Ребхана плоскость сползания BC , дающая наибольшее давление R_0 на ограждающую плоскость AB , отсекает в сыпучем теле призму, основание которой ABC равно площади CBF силового треугольника, построенного на следу плоскости сползания.

Проведя через точку F линию FH параллельно линии следа плоскости сползания, мы получим новый треугольник BCH , равный треугольнику BCF и, следовательно, равный треугольнику ABC :

$$\triangle BCH = \triangle BCF = \triangle ABC.$$

Так как в равных треугольниках ABC и BCH общая вершина и одинаковая высота, то, следовательно, основания их $AC = CH$.

Из построения взаимно параллельных линий

$$HF \parallel BC \text{ и } AE \parallel CF \parallel KB$$

непосредственно видно, что

$$\frac{BF}{BD} = \frac{CH}{CD},$$

но так как $CH = AC$, то

$$\frac{BF}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

в свою очередь

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EF}{FD} = \frac{BF - BE}{BD - BF},$$

а потому

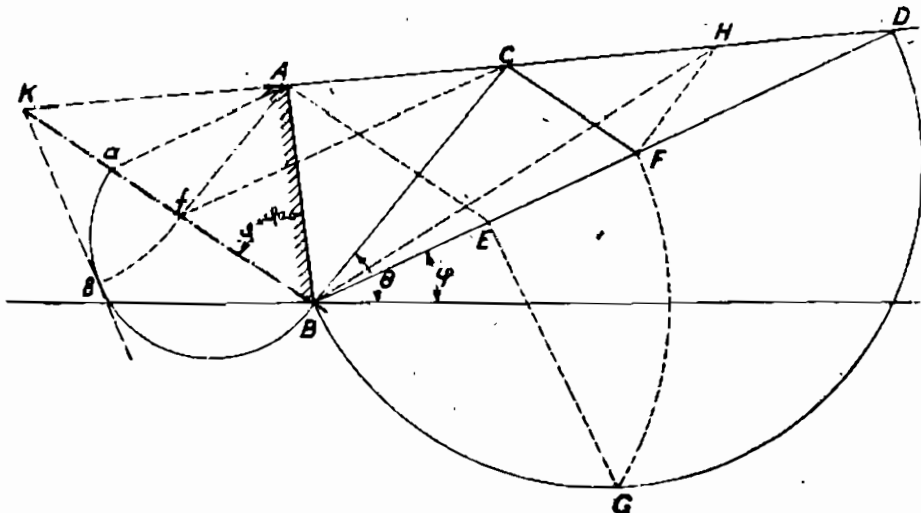
$$\frac{BF}{BD} = \frac{BF - BE}{BD - BF}.$$

Перемножая крайние и средние члены, получим:

$$BF \cdot BD - BF^2 = BD \cdot BF - BE \cdot BD,$$

откуда

$$BF^2 = BF \cdot BD \dots \dots \dots (18).$$



Черт. 14.

Следовательно, основание BF силового треугольника, определяющего наибольшее давление на секущую плоскость, есть среднее пропорциональное между длиной BD всей линии естественного откоса и отрезком BE , отсекаемым на нем же линией, параллельной основной линии.

Так как отрезки BE и BD не зависят от положения плоскости сползания, то определение их может быть сделано непосредственно по заданию; остается только найти к ним среднюю пропорциональную BF , что не представляет затруднения.

Если на длине BD (черт. 14), как на диаметре построить полуокружность и из точки E поставить перпендикуляр EG , то по общему геометрическому свойству $BG^2 = BD \times BE$, а потому $BG = BF$.

Таким образом, для отыскания по способу Понселе плоскости с наибольшим давлением на ограждающую стенку, надо: проведя в заданном сыпучем теле (черт. 15) плоскость BD естественного откоса, построить на ней полуокружность; затем провести линию AE параллельно основной линии BK и восставить из точки E перпендикуляр к линии естественного откоса; получив при помощи последнего на окружности точку G , засечь

на линии естественного откоса отрезок $BF = BG$. Проведя далее из точки F линию FC параллельно основной линии, мы получим точку C , определяющую положение плоскости сползания с наибольшим давлением R_0 .

То же определение плоскости обрушения с наибольшим давлением R_0 может быть сделано аналогичным построением относительно основной линии KB .

Для доказательства его проводим через точки A и C (черт. 14) линии Aa и cf параллельно линии естественного откоса. Так как получающийся при этом построении

$$\triangle CfB = \triangle CFB = \triangle CBA,$$

то линия Af должна быть параллельна линии BC .

Вследствие параллельности линии:

$$Af \parallel BC \text{ и } Aa \parallel Cf$$

будем иметь соотношение:

$$\frac{KB}{Kf} = \frac{KC}{KA} = \frac{Kf}{Ka},$$

откуда

$$Kf^2 = KB \times Ka,$$

т.-е. отрезок Kf является средним пропорциональным между всем отрезком BK основной линии и отрезком Ka , отсекаемым на ней линией Aa параллельной плоскости естественного откоса.

Так как направление основной линии и отрезков KB и Ka не зависит от угла Θ наклона плоскости обрушения, то они могут быть определены независимо от нее. Остается найти среднюю пропорциональную к ним, что может быть сделано путем построения полуокружности на отрезке Ba , как на диаметре (черт. 14). Касательная Kb к этой полуокружности, проведенная через точку K , будет средняя пропорциональная между KB и Ka ,

а потому

$$Kb = \sqrt{KB \times Ka} = Kf.$$

Сделав из точки K засечку точки f радиусом $Kb = Kf$ и проведя из точки f линию $fC \parallel$ линии BD естественного откоса, мы получим точку C , определяющую положение плоскости сползания с наибольшим давлением R_0 .

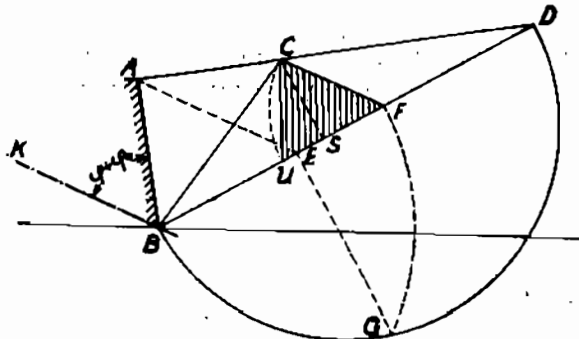
Определение величины давления. Построением Понселе определяется не только положение плоскости обрушения с наибольшим давлением R_0 , но оно может служить и для определения величины давления.

В общем виде величина R_0 давления на стенку определяется выражением (13).

$$R_0 = G \frac{\sin (\Theta - \varphi)}{\sin (\Theta + \psi - \varphi)}.$$

Подставляя в него величину G , которая по построению Понселе может быть выражена через площадь треугольника BCF (черт. 15), получим:

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot BF \cdot CS \frac{\sin (\theta - \varphi)}{\sin (\theta + \psi - \varphi)} \dots \dots \dots (19)$$



Черт. 15.

где δ — вес куб. метра сыпучего тела, а CS — длина перпендикуляра, опущенного из вершины C на направление плоскости естественного откоса.

Из соотношения сторон того же треугольника BCF следует, что

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\sin (\theta - \varphi)}{\sin (\theta + \psi - \varphi)},$$

а потому выражение давления (19) может быть приведено к виду:

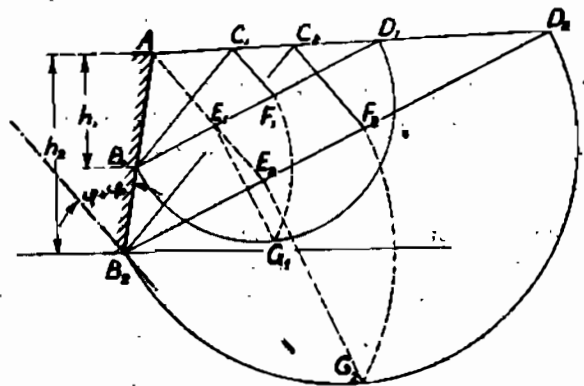
$$R_0 = \frac{1}{2} \delta CF \cdot CS = \frac{1}{2} \delta \cdot CF^2 [\sin \psi \dots \dots \dots (20).$$

В этом выражении отрезки CF и CS измеряются в масштабе длин.

Если на том же чертеже из точки F радиусом FC засечь на линии плоскости естественного откоса точку U , то площадь треугольника FUC может служить для определения давления R_0 . Действительно, площадь этого треугольника $= \frac{1}{2} UF \cdot CS = \frac{1}{2} CF \cdot CS$, а потому, если помножить ее на вес δ единицы объема сыпучего тела, то получим:

$$\frac{1}{2} CF \cdot CS \times \delta = R_0 \dots (21).$$

Отметим, что если ограждающая стенка и поверхность сыпучего тела прямолинейны, то величина давления R_0 прямо пропорциональна квадрату высоты стенки.



Черт. 16.

В этом случае построения по способу Понселе, проводимые для любой высоты стенки h_1, h_2, \dots будут подобны между собой (черт. 16), что позволяет написать соотношения:

$$\frac{C_1 F_1}{C_2 F_2} = \frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} = \frac{AB_1}{AB_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Величины давлений R_0 для этих высот стенок и их соотношение между собой будут:

$$\frac{R'_0}{R_0} = \frac{\frac{1}{2} \delta \cdot C_1 F_1^2 \cdot \sin \psi}{\frac{1}{2} \delta \cdot C_2 F_2^2 \cdot \sin \psi} = \frac{C_1 F_1^2}{C_2 F_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

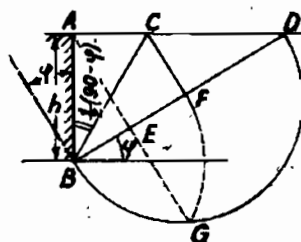
из чего следует, что при прямой стенке и прямой поверхности давление R_0 является прямой функцией квадрата высоты и может быть представлено в таком виде:

$$R = \frac{1}{2} \delta \cdot k^2 h^2 \sin \psi \dots \dots \dots (22)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от наклона ограждающей плоскости и наклона поверхности сыпучего тела.

§ 7. Частные случаи. 1. Поверхность сыпучего тела горизонтальна, поверхность стенки вертикальна и лишена трения ($\varphi_0 = 0$).

В этом случае угол $\epsilon = 0$, а потому угол $\psi = 90^\circ - \epsilon - \varphi_0 = 90^\circ$ и $\sin \psi = 1$.



Черт. 17.

Величина отрезка CF , входящая в выражение (21) давления R_0 , определяется обычным

геометрическим построением по способу Понселе (черт. 17).

Но так как, по условию прохождения плоскости обрушения BC с наибольшим давлением R_0 , площади треугольников ABC и BCF равны между собой, то стороны их CF и AC равны между собой, также углы ABC и CBF равны между собой и каждый из них равен $\frac{1}{2} (90^\circ - \varphi)$, что позволяет написать следующее равенство:

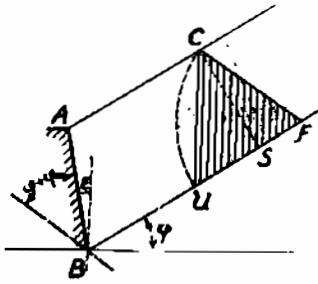
$$CF = AC = h \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

а потому наибольшая величина давления R_0 в этом случае выразится так:

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot CF^2 \sin \psi = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (23)$$

Последнее выражение вполне соответствует величине давления на такую же стенку, определяемого по формуле Ранкина (см. выраж. 10).

2. Поверхность сыпучего тела ограничена плоскостью естественного откоса. В этом случае (черт. 18) линия естественного откоса пересекает поверхность сыпучего тела в бесконечности, что делает построение по способу Понселе невозможным. Но определение величины наибольшего давления может быть сделано без указанного построения по выражению (21).



Черт. 18.

Действительно, отрезок CF параллельный основной линии и заключенный между следом поверхности сыпучего тела и линией естественного откоса является постоянной величиной; отрезок CS равен расстоянию между теми же прямыми. Этими отрезками определяется давление

$$R_o = \frac{1}{2} \delta \cdot CF \cdot CS = \delta \cdot \text{пл.} \triangle CFU$$

Если при том же наклоне поверхности сыпучего тела стенка будет вертикальна ($e=0$), то величина наибольшего давления R_o может быть выражена аналитически так (черт. 19):

$$CS = h \cos \varphi;$$

$$CF = CS : \cos \varphi_o,$$

а потому

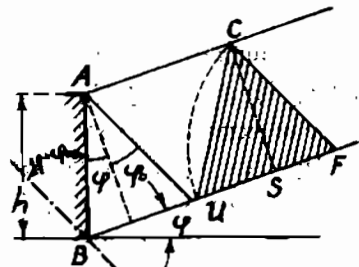
$$R_o = \frac{1}{2} \delta \cdot \frac{h^2 \cdot \cos^2 \varphi}{\cos \varphi_o} \cdot \sin \psi =$$

$$= \frac{1}{2} \delta h^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \varphi_o} \dots (24)$$

Если принять $\varphi = \varphi_o$, то выражение этого давления будет соответствовать выражению, определенному по формуле 11.

§ 8. Направление давления. Направление давления сыпучего тела по отношению к плоскости его ограждающей до сего времени остается невыясненным. Вообще оно характеризуется углом, именуемым углом трения сыпучего тела по стенке; величина его зависит от очертания самого сыпучего тела, его физических свойств, от характера отделки стенки, от степени ее влажности и целого ряда других факторов не поддающихся учету.

Вообще же, даже при устранении всех указанных факторов, угол действительного наклона давления на ограждающую поверхность не совпадает с углом трения сыпучего тела по этой поверхности.



Черт. 19.

По опытам Мюллер-Бреслау¹⁾ угол наклона давления на стенку измерялся величиной 26° — 28° , тогда как угол трения сыпучего тела по стенке в этом случае был равен 34° .

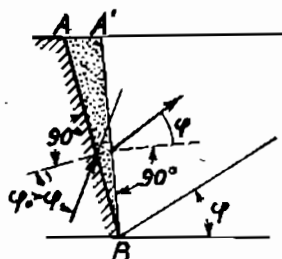
По опытам Фельд²⁾ угол наклона давления изменялся с изменением высоты стенки:

при изменении от 13 до 136 см	угол наклона от 21° до 32°
высоты стенки » 15 » 69 »	изменялся » 3° » 31°

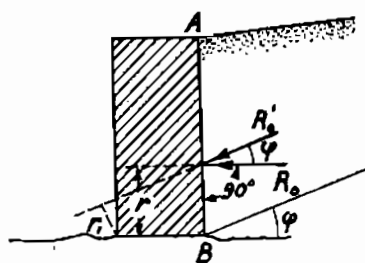
При большем изменении высоты угол наклона оставался почти постоянным.

По опытам Терцаги угол наклона давления относительно стенки изменялся в зависимости от изменения давления, производившегося на сыпучее тело:

при изменении нагрузки от 0,88 до 3,87 кг/см ²
угол наклона изменялся от $6^{\circ}6'$ до $13^{\circ}24'$.



Черт. 20.



Черт. 21.



В виду всего изложенного в расчетах при выборе величины угла ϕ_0 приходится руководиться рядом соображений.

Прежде всего представляется невероятным, чтобы угол наклона ϕ_0 имел отклонение ниже горизонта или был бы отрицательным по отношению к перпендикуляру к ограждающей плоскости; в последнем случае это соответствовало бы тому, что частицы сыпучего тела должны были бы перемещаться кверху.

Что он не должен быть больше угла ϕ естественного откоса, вытекает из того соображения, что при этом условии для сдвига частиц сыпучего тела по ограждающей плоскости потребовался бы больший наклон давления R_0 , чем для сдвига частиц внутри самого сыпучего тела, следовательно, в этом случае надо было бы ожидать, что сдвиг произойдет не по ограждающей плоскости, а вблизи нее по некоторой плоскости BA' внутри сыпучего тела (черт. 20); частицы сыпучего тела как бы прилипнут к стенке и увеличат ее до плоскости, в которой угол наклона давления = ϕ .

Из изложенного следует, что изменение угла ϕ_0 возможно в пределах от 0 до ϕ .

¹⁾ Müller-Breslau. «Erddruck auf Stützmauern» изд. 1906.

²⁾ Feld «Lateral Earthpressure». — Trans. Am. Soc. — Vol. 86.

При установлении угла наклона φ_0 следует иметь в виду, что с изменением этого угла меняется не только направление R_0 , но и его величина, что непосредственно видно из силового треугольника (*черт. 21*), однако, это изменение величины незначительно. Гораздо более чувствительно влияет изменение направления на величину статического момента относительно подошвы ограждающей плоскости, а потому и на устойчивость ее.

Нетрудно видеть, что горизонтальное направление является худшим по возрастанию момента, а потому это направление принимается в расчетах всех ответственных сооружений, в особенности в тех, где имеется возможность смачивания ограждающих плоскостей, как например, в устоях мостов, набережных и т. п. Если ограждающая поверхность наклонена вперед, то можно принимать давление R_0 направленным по перпендикуляру к ограждающей плоскости, чему соответствует $\varphi = \varphi_0$.

Принимая $\varphi_0 = 0$, мы повышаем требования относительно устойчивости, но это неэкономично, а потому представляется желательным повышать значение φ_0 особенно, если заполняющее сыпучее тело утрамбовано и изолировано от влаги.

Вопрос о возможных верхних пределах для φ_0 остается весьма неясным. Многие авторы (Винклер, Мюллер-Бреслау, Меллер и др.) рекомендуют принимать его в некоторой части от φ , а именно в пределах от $\frac{1}{8} \varphi$ до $\frac{3}{4} \varphi$.

Проф. Петерсен ¹⁾ предлагает принимать давление при вертикальных ограждающих плоскостях направленным параллельно поверхности сыпучего тела; выбор такого направления вполне оправдывается тем, что при нем сохраняется пересечение в одной точке сил G веса призмы сползания и сопротивлений R_0 и R (*см. схемы черт. 24*). Но если это вполне приемлемо для случаев, когда поверхность сыпучего тела имеет подъем (т.-е. угол γ положителен), то для случаев, когда поверхность сыпучего тела имеет снижение, такое предположение не может быть принято, так как в этом случае давление R_0 будет направлено сверху вниз, что будет соответствовать подъему частиц сыпучего тела кверху; поэтому для таких случаев, повидимому, надо принимать направление давления R_0 горизонтальным.

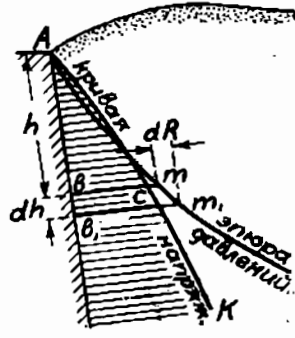
Точно также при наклонном положении ограждающих плоскостей предложение о согласовании направления давления на них с направлением поверхности сыпучего тела, как видно из последующего параграфа (*схемы черт. 24*), не находит себе оправдания в условии пересечения в одной точке всех сил, и если при наклоне ограждающей плоскости вперед эти соображения еще могут быть приняты в основу выбора направления давления, то при наклоне ограждающей плоскости назад они совершенно неприемлемы. При наклоне ограждающей плоскости назад целесообразнее всего принимать направление давления горизонтальным.

¹⁾ Prof. R. Petersen—Erddruck auf Stützmauern. 1924. стр. 62.

§ 9. Точка приложения давления. В меньшей степени, чем при выборе направления давления, имеются неясности и в вопросе о точке приложения давления. В настоящее время принято определять точку приложения давления по центру тяжести эпюры напряжений, имеющей место по ограждающей плоскости под действием давления на нее сыпучего тела.

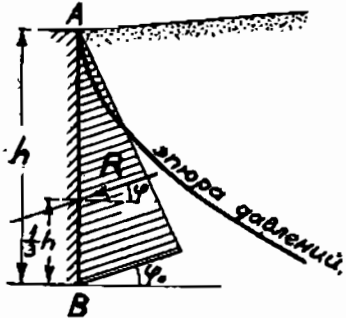
Рассмотрим этот прием для более общего случая прямой ограждающей плоскости и криволинейного очертания сыпучего тела.

В этом случае давление R_0 сыпучего тела для различных высот ограждающей плоскости не имеет закономерного изменения своей величины. Величины давлений R_0 могут быть определены для каждой высоты ограждающей плоскости одним из изложенных выше способов (§ 4 и § 5). Вычисленные для ряда высот величины давлений могут быть отложены в виде ординат по отношению к ограждающей плоскости. Кривая, проведенная через вершины этих ординат, охарактеризует изменение давлений по высоте стенки (черт. 22).



Черт. 22.

Так как напряжение в общем виде определяется формулой $n = \frac{dR}{dh}$ при условии, что в пределе $dh = 0$, то величины напряжений в отдельных точках по высоте ограждающей плоскости могут быть вычислены по разности ординат эпюры давлений. Так, например, в точке «b» на высоте h это напряжение определится отношением:



Черт. 23.

$$n = \frac{b_1 m_1 - b m}{dh} \dots \dots \dots (25).$$

Отложив вычисленные величины напряжений в виде ординат в соответствующих точках по высоте ограждающей плоскости и проведя через их вершины кривую, получим эпюру напряжений ACK (черт. 22); площадь этой эпюры будет равна давлению R_0 на соответствующую ей высоту ограждающей плоскости; центром же тяжести эпюры определяется положение давления, как равнодействующей площади эпюры напряжений.

Для случая прямой ограждающей плоскости и прямой поверхности сыпучего тела (черт. 23), та же задача, о положении точки приложения давления, проще решается аналитически, так как в этом случае величины давлений для различных высот ограждающей плоскости определяются одной и той же формулой (22):

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta k^2 h^2 \sin \phi.$$

Из этой формулы видно, что давление изменяется вдоль высоты плоскости по параболе.

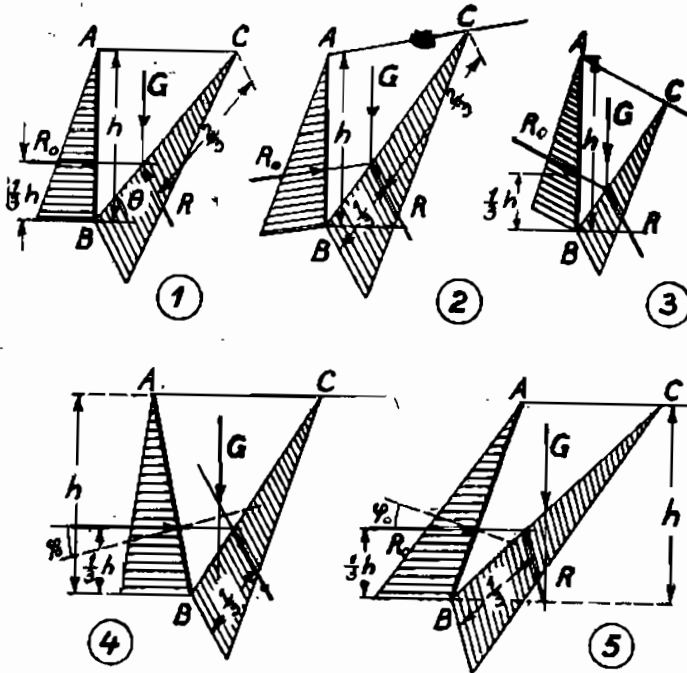
Величина напряжения на единицу высоты плоскости определяется как производная из выражения давления:

$$n = \frac{dR_0}{dh} = \delta k^2 h \cdot \sin \psi \dots \dots \dots (26).$$

Полученное выражение представляет собой прямую; следовательно, эпюра напряжений будет иметь вид треугольника, нарастающего от нуля у вершины ограждающей плоскости до наибольшей высоты у ее подошвы =

$$= \delta \cdot k^2 H \sin \psi.$$

Равнодействующая этой эпюры, т.е. площадь ее определяет давление по величине, а центром тяжести площади эпюры определяется точка приложения давления. Таким образом, в случае прямой ограждающей плоскости и прямой поверхности сыпучего тела точка прило-



Черт. 24.

жения давления лежит на одной трети высоты ограждающей плоскости.

В таком виде решается на практике вопрос о точке приложения давления сыпучего тела к прямой ограждающей плоскости при прямой поверхности; однако, это не всегда удовлетворяет основной предпосылке теории Кулона о том, что направление веса G призмы сползания и сопротивлений R_0 и R должны пересекаться в одной точке, как взаимно уравновешивающиеся.

На *черт. 24* построен ряд схем эпюр напряжений для различных наклонов ограждающей плоскости AB и поверхности AC сыпучего тела. Распространение эпюр напряжений как по ограждающим плоскостям AB , так и по плоскостям сползания BC показано в соответствии с формулой (26) по прямым. Направление давлений R_0 принято параллельным

поверхностям AC сыпучего тела, направление R принято под углами $(90^\circ - \varphi)$ к плоскостям сползания BC .

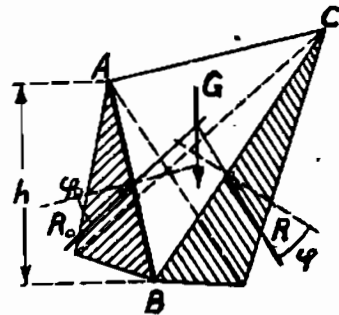
Из рассмотрения эпюр непосредственно видно, что *схемы 1 и 2* вполне удовлетворяют основным гипотезам: силы R_0 , R и G пересекаются в одной точке и первые две из них приложены на $1/3$ расстояния от подошвы B . *Схема 3* хотя и удовлетворяет этим требованиям, но направление силы R_0 сверху вниз не соответствует условию сползания призмы ABC . *Схемы 4 и 5* не удовлетворяют условию пересечения указанных сил в одной точке.

В связи с этими невязками целым рядом авторов был высказан ряд предположений, вносящих поправки.

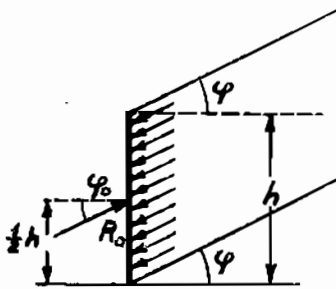
Мюллер Бреслау ¹⁾ на основании своих опытов высказывает предположение о том, что поверхность скольжения BC не есть плоскость, а некоторая вогнутая поверхность, вследствие чего эпюра напряжений по длине ее не будет изменяться по прямой и центр тяжести ее передвинется кверху. Такое предположение в некоторых случаях вносит улучшение в разрешение вопроса; например, если по схемам 3 и 5 направление R_0 принять горизонтальным, то смещение силы R кверху удовлетворит условию пересечения в одной точке.

Тот же автор, а также Петерсен ²⁾ высказывают предположение о том, что точка приложения давления R_0 не всегда лежит на высоте $1/3 h$ от подошвы, но может уклоняться, поднимаясь до половины высоты. Делая такое предположение, Петерсен исходит из того, что формула (26), определяющая площадь треугольника, не дает указания о его форме и, если ее изменить (*черт. 25*), то центр тяжести давления будет лежать выше одной трети высоты. Свои предположения автор подтверждает рядом соображений о возможных условиях сползания призмы и ее уравнивания.

С предположениями указанных авторов о том, что для предельного случая наклона поверхности сыпучего тела под углом естественного откоса, точку приложения давления R_0 надо считать приложенной на половине высоты ограждающей плоскости, можно согласиться; в этом случае нет явно выраженной призмы сползания и можно предположить, что давление распределяется равномерно по высоте ограждающей плоскости (*черт. 26*).



Черт. 25.



Черт. 26.

¹⁾ Müller Breslau «Erddruck auf Stützmauern» 1906.

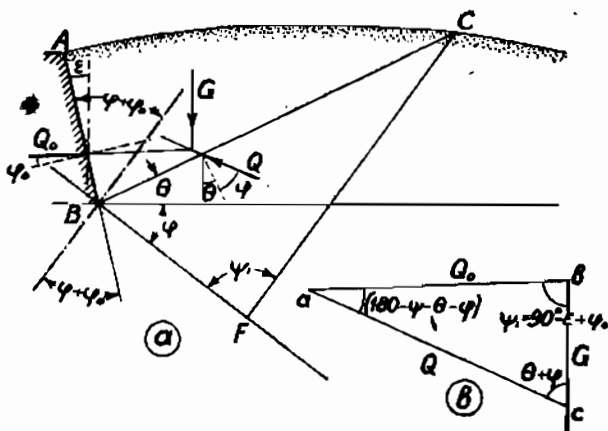
²⁾ Petersen «Druck auf Stützmauern» стр. 36—56.

Для всех остальных возможных наклонов поверхностей указанными авторами не дается никаких определенных указаний о положении точки приложения давления и только устанавливается возможный предел ее расположения от $1/3$ до $1/2$ высоты.

В виду неопределенности вопроса следует пока для практических расчетов сохранить установившееся положение, что вообще точка приложения давления на ограждающую плоскость определяется центром тяжести эпюры напряжений.

В частных случаях (например, по схеме 4, черт. 24) условие пересечения в одной точке сил R_0 , R и G может быть обеспечено выбором направления R_0 с сохранением точки приложения его на одной трети высоты ограждающей плоскости.

§ 10. Отпор сыпучего тела. До сих пор мы рассматривали активное давление сыпучего тела, имеющее место при его сползании, но может



Черт. 27.

иметь место пассивное сопротивление сыпучего тела, когда, вследствие каких-либо причин, ограждающая плоскость давит на сыпучее тело и последнее оказывает отпор этому давлению.

Если предположить, что ограждающая плоскость под действием каких-либо сил получит смещение в сторону сыпучего тела, то естественно ожидать, что не-

которая часть сыпучего тела сдвинется и приподнимется вверх (черт. 27). Распространяя на этот случай теорию Кулона о том, что сдвиг сыпучего тела вообще происходит по некоторой плоскости, что сыпучее тело сдвигается, приняв как бы форму затвердевшего клина, мы можем принять, что в этом случае давление Q_0 со стороны ограждающей плоскости уравновешивается весом G призмы выпирания и сопротивлением Q , имеющимся по плоскости BC выпирания.

Направление давления Q_0 и сопротивления Q вообще неизвестно, но если рассматривать тело в состоянии предельного равновесия, то мы можем принять, как и раньше, что давление Q_0 будет направлено под углом $(90^\circ - \varphi_0)$ к ограждающей плоскости, сила Q будет направлена под углом $(90^\circ - \varphi)$ к плоскости выпирания; при чем как сила Q_0 , так и сила Q будут направлены вниз от перпендикуляра к плоскостям, к которым относится их действие, так как силы трения, входящие в качестве слагающих в их состав, будут направлены книзу, как силы, сопротивляющиеся сдвиганию вверх.

Эти три силы Q_0 , Q и G , как находящиеся в равновесии, образуют замкнутый силовой треугольник abc (черт. 27). Направление силы Q_0 не зависит от направления плоскости выпирания, но направление силы Q сопротивления по плоскости BC зависит от направления этой плоскости, а потому построение силового многоугольника невозможно без определения положения плоскости выпирания.

Придерживаясь того же метода обоснования, как и при определении давления R_0 в призме сползания, мы можем показать из геометрического построения, что в силовом треугольнике угол между силою Q_0 и весом G , обозначенный $\psi_1 = 90^\circ - \alpha + \varphi_0$, и угол между силой Q и G равен $(\theta + \varphi)$. Оба эти угла отличаются от соответствующих им углов в силовом треугольнике призмы сползания (черт. 7) знаком при углах φ и φ_0 .

В соответствии с этим величина давления Q_0 определится из силового треугольника выражением:

$$Q_0 = G \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta + \psi_1 + \varphi)} \dots \dots \dots (27)$$

подобным выражению давления (13) при сползании сыпучего тела, но с обратными знаками при углах φ и φ_0 .

Если при сползании сыпучего тела мы ставили задачей отыскание плоскости с наибольшим давлением R_0 , как опасным, то при условии сопротивления сыпучего тела мы должны будем искать плоскость возможного выпирания с наименьшим сопротивлением Q_0 .

Этому условию будет удовлетворять плоскость, для которой

$$\frac{dQ_0}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left[G \frac{\sin(\theta + \varphi)}{\sin(\theta + \psi_1 + \varphi)} \right] = 0$$

Сопоставляя это выражение с выражением (14) производной в доказательстве теоремы о равновеликости площадей призмы сползания и силового треугольника, построенного на плоскости сползания и линии естественного откоса, мы можем отметить, что они идентичны и отличаются друг от друга знаками при углах φ и φ_0 , а потому мы можем по аналогии написать выражение веса призмы выпирания (черт. 28):

$$G = - \frac{dG}{d\theta} \frac{\sin(\theta + \varphi) \sin(\theta + \psi_1 + \varphi)}{\sin \psi_1} = \frac{1}{2} \delta \cdot BF \cdot CS.$$

Основываясь на этом свойстве, мы можем распространить доказательство Понселе и для этого случая и показать, что плоскость с наименьшим сопротивлением Q_0 выпиранию будет плоскость (черт. 28), которая удовлетворяет условию:

$$BF^2 = BE \cdot BD$$

т.е. плоскость, для которой основание BF силового треугольника, построенного на ее следе и линии естественного откоса, есть средняя пропорциональная между

получаемыми путем преобразования из общего выражения (27) величины Q_0 .

В геометрическом представлении величина отпора Q_0 определяется площадью треугольника CFU , в котором сторона $FU = FS$ (сравн. выр. 21).

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta FU \cdot CS = \frac{1}{2} \delta FC \cdot CS \dots \dots \dots (29)$$

В случае прямой ограждающей плоскости и прямой поверхности сыпучего тела построения, проводимые для определения положения плоскости выпирания и величины отпора для разных высот ограждающей плоскости, остаются подобными между собой, что позволяет выразить величину отпора Q_0 формулой общего вида:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta k_1^2 h^2 \sin \psi_1$$

(сравн. выр. 22):

Полная аналогия в выводе и в выражении величины отпора Q_0 сыпучего тела с давлением его R_0 позволяет применить по отношению к отпору все соображения, высказанные по вопросу о направлении и точке приложения отпора, какие были высказаны (§ 8 и § 9) по отношению к активному давлению сыпучего тела.

В случае прямой стенки и прямой поверхности сыпучего тела эпюра напряжений по ограждающей плоскости от действия отпора определится уравнением:

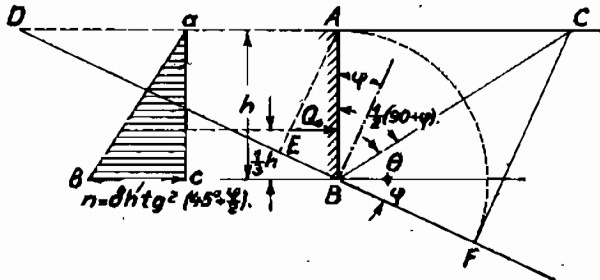
$$n = \frac{dQ_0}{dh} = \delta k_1^2 h \sin \psi_1 \dots \dots \dots (30)$$

Следовательно, эпюра напряжений будет иметь вид треугольника и точка приложения отпора будет лежать на $1/3$ высоты от подошвы, ограждающей плоскости.

В частном случае (черт. 29), когда поверхность сыпучего тела горизонтальна ($\gamma = 0$) и ограждающая поверхность вертикальна ($e = 0$) и не имеет трения по поверхности ($\varphi_0 = 0$), величина отпора Q_0 аналогична выражению активного давления R_0 для такого случая:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (31)$$

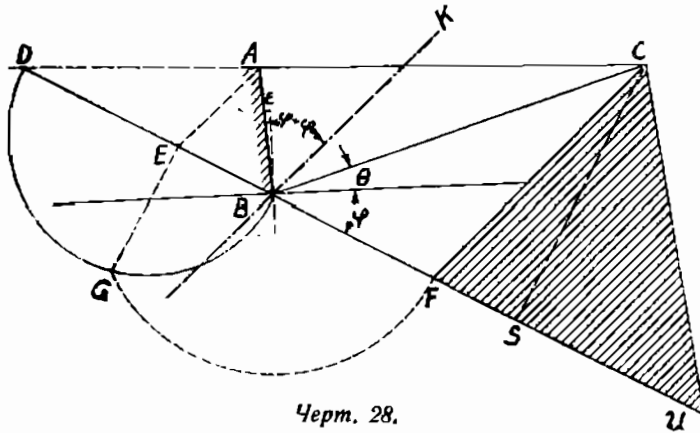
Вывод выражения величины Q_0 для этого случая непосредственно вытекает из геометрического построения (черт. 29), по которому $AB = h$,



Черт. 29.

отрезками BD и BE , получаемыми на линии естественного откоса пересечением в точке D этой линии с линией поверхности и пересечением той же линии в точке E с линией $AE \parallel BK$ (основной линии). Но все построение Понселе для этого случая надо проводить, учитывая, что знак при углах φ и φ_0 отрицательный.

Построение (черт. 28) начинается с проведения линии естественного откоса под углом φ , который в этом случае должен быть отложен книзу



Черт. 28.

от горизонта так, чтобы линия естественного откоса образовывала с линией плоскости выпирания угол $(90^\circ + \varphi)$. В соответствии с этим точка D пересечения линии естественного откоса с линией поверх-

ности выпученого тела получится со стороны противоположной положению выпученого тела относительно ограждающей плоскости.

Основная линия, проходящая под углом $(\varphi + \varphi_0)$ к ограждающей плоскости и образующая с линией естественного откоса угол $\psi_1 = 90^\circ - \varepsilon - \varphi_0$, в этом случае пройдет по отношению ограждающей плоскости со стороны выпученого тела; на чертеже 28 это будет линия BK .

Проведя через точку A верха ограждающей плоскости прямую AE параллельно основной линии BK , мы получим на линии BD отрезок BE , нужный для нахождения средней пропорциональной между ним и отрезком BD . Последнее может быть сделано путем построения полуокружности на отрезке BD , как на диаметре и проведением перпендикуляра к нему из точки E до пересечения с полуокружностью в точке G .

Полученная в результате построения хорда BG удовлетворяет условию средней пропорциональности между отрезками BD и BE , а потому определяет собой отрезок BF .

Отложив на линии естественного откоса со стороны призмы выпирания отрезок $BF = BG$, проводим через точку F прямую FC параллельно основной линии и засекаем ею на поверхности выпученого тела точку C , определяющую положение линии BC призмы выпирания.

Аналогично определению величины давления R_0 в призме сползания (§ 10), величина отпора Q_0 в призме выпирания определяется выражениями:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta CF \cdot CS = \frac{1}{2} \delta CF^2 \sin \psi_1 \dots \dots \dots (28)$$

получающимися путем преобразования из общего выражения (27) величины Q_0 .

В геометрическом представлении величина отпора Q_0 определяется площадью треугольника CFU , в котором сторона $FU = FS$ (сравн. выр. 21).

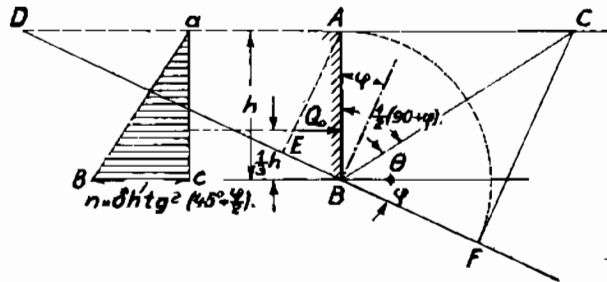
$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta F U \cdot C S = \frac{1}{2} \delta F C \cdot C S \dots \dots \dots (29)$$

В случае прямой ограждающей плоскости и прямой поверхности сыпучего тела построения, проводимые для определения положения плоскости выпирания и величины отпора для разных высот ограждающей плоскости, остаются подобными между собой, что позволяет выразить величину отпора Q_0 формулой общего вида:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta k_1^2 h^2 \sin \psi_1$$

(сравн. выр. 22).

Полная аналогия в выводе и в выражении величины отпора Q_0 сыпучего тела с давлением его R_0 позволяет применить по отношению к отпору все соображения, высказанные по вопросу о направлении и точке приложения отпора, какие были высказаны (§ 8 и § 9) по отношению к активному давлению сыпучего тела.



Черт. 29.

В случае прямой стенки и прямой поверхности сыпучего тела эпюра напряжений по ограждающей плоскости от действия отпора определится уравнением:

$$n = \frac{dQ_0}{dh} = \delta k_1^2 h \sin \psi_1 \dots \dots \dots (30)$$

Следовательно, эпюра напряжений будет иметь вид треугольника и точка приложения отпора будет лежать на $1/3$ высоты от подошвы, ограждающей плоскости.

В частном случае (черт. 29), когда поверхность сыпучего тела горизонтальна ($\gamma = 0$) и ограждающая поверхность вертикальна ($e = 0$) и не имеет трения по поверхности ($\varphi_0 = 0$), величина отпора Q_0 аналогична выражению активного давления R_0 для такого случая:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \text{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (31)$$

Вывод выражения величины Q_0 для этого случая непосредственно вытекает из геометрического построения (черт. 29), по которому $AB = h$,

как катет треугольника ABD , является средней пропорциональной между гипотенузой BD и ближайшим к нему отрезком BE , а потому

$$AB^2 = BD \cdot BE = BF.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники ACB и CBF равны между собой, а потому углы в них при вершине B равны между собой и имеют величину $= 1/2 (90^\circ + \varphi)$ и стороны $CF = AC = h \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$.

Подставляя значение CF в общее выражение (28) отпора Q_0 получим:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta CF^2 \sin \psi_1 = \frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (32)$$

Из сопоставления выражений (23 и 32) активного и пассивного давления сыпучего тела видно, что при одинаковой высоте ограждающей поверхности величина пассивного давления (отпора) больше активного давления.

Если принять $\varphi = 30^\circ$, то для частного случая вертикальной ограждающей поверхности и горизонтальной поверхности, отношение этих давлений будет:

$$\frac{Q_0}{R_0} = \frac{\frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2} \right)}{\frac{1}{2} \delta \cdot h^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{30^\circ}{2} \right)} = \frac{2,999}{0,333} = \approx 9.$$

Этим свойством сыпучих тел, — оказывать гораздо большее сопротивление давлению, чем самому оказывать давление, — объясняется устойчивость всех больших сооружений.

§ 11. Поверхность сыпучего тела ломаная. Способ Понселе отыскания положения плоскости сползания основан на построении силового треугольника равновеликого площади основания призмы сползания. Это построение возможно, если само основание призмы сползания имеет форму треугольника. Если же призма сползания имеет форму многоугольника, то последняя должна быть преобразована в равновеликую [треугольную форму, что может быть сделано разными приемами, но все они в конечном результате будут давать приближенное решение для давления R_0 , т. к. сами не будут соответствовать действительному распределению массы.

Пусть имеется сыпучее тело, ограниченное сверху ломаной поверхностью AD_1D_2 (черт. 30), с ограничивающей плоскостью AB .

Пока плоскость сползания будет ложиться своим верхним концом в пределах первого излома AD_1 , мы будем иметь дело с прямой поверхностью, что относится к простейшему случаю построения Понселе.

Но как только плоскость сползания BC ляжет во второй излом, мы будем иметь дело с четырехугольной призмой сползания BAD_1C , которую для проведения построения Понселе надо привести к треугольному виду. Так как при построении силового треугольника BFC , равновеликого основанию призмы, вершина его C должна лечь на грани D_1D_2 , то пре-

образование четырехугольной призмы BAD_1C в треугольную должно быть сделано с сохранением направления линии D_1D_2 .

На *черт. 30* это перестроение сделано проведением прямой $AA_1 \parallel BD_1$ до пересечения с прямой D_1D_2 , что дает треугольник BA_1D_1 , равный треугольнику BAD_1 , а потому треугольник BA_1D_2 равновелик площади BAD_1D_2 .

Дальнейшее построение производится как для сыпучего тела с поверхностью A_1D с исходной точкой A_1 , из которой проводится линия A_1E , параллельная основной линии BK ; далее определяется средняя пропорциональная $BG^2 = BF^2 = BD \times BE$ и проводится прямая $FC \parallel BK$, чем определяется положение точки C и плоскости обрушения BC .

Следует обратить внимание на то, что несмотря на смещение точки A в положение A_1 , основная линия остается старая, что соответствует основному положению, по которому основная линия образует угол $\psi = 90^\circ - \varepsilon - \varphi$ с линией естественного откоса.

Если бы при окончательном построении плоскость обрушения попала бы вершиной в пределы третьего излома D_2D_3 , то потребовалось бы сделать перестроение, преобразовав основание призмы в треугольник, относенный к линии D_2D_3 .

При ломаном очертании сыпучего тела эпюра напряжений будет иметь также ломаное очертание (*черт. 30*).

Пока плоскость сползания BC будет лежать в пределах первого излома AD_1 поверхности, напряжение будет изменяться по прямой ab_1' , уравнение которой в общем виде будет (см. выраж. 26):

$$n = \frac{dR}{dh} = \delta k^2 h \sin \psi$$

с началом координат в точке a .

С переходом плоскости сползания BC в пределы второго излома величина давления R_0 будет изменяться по кривой с уравнением общего вида:

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta k_1^2 h_1^2 \sin \psi$$

с началом a_1 , отнесенным к точке A_1 , и напряжение будет изменяться по прямой $a_1 b_1' b_1'$ с уравнением:

$$n = \frac{dR'_o}{dh} = \delta k_1^2 h_1 \sin \psi,$$

которая будет иметь начало в точке a_1 и должна иметь общую ординату $b_1 b_1'$ с первой прямой ab_1' , что обуславливается переходом плоскости сползания через точку D_1 поверхности сыпучего тела ¹⁾.

Точка приложения давления определится положением центра тяжести эпюры.

§ 12. Учет давления нагрузки, расположенной на сыпучем теле. Учет влияния нагрузки, расположенной на сыпучем теле, на величину его активного или пассивного давления проще всего может быть сделан при помощи особого построения, обоснованного на методе Кулона, по которому величина давления определяется по формуле (13):

$$R_o = G \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \psi - \varphi)}.$$

Но так как в этом случае мы будем иметь дело не только с весом G призмы сползания или выпирания, но и с нагрузками различного вида, то лучше привести эту формулу к обезличенному виду, т.-е. рассматривать ее в условии действия груза $P=1$, а именно:

$$\bar{R}_o = 1 \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin(\theta + \psi - \varphi)} \dots \dots \dots (33)$$

Пользуясь для определения этого давления построением Кулона, мы должны будем отложить (*черт. 31*) по направлению линии естественного откоса отрезок $BN=1$, представляющий собой силовую единицу и силовой масштаб, а затем провести через конец N отрезка линию $N-O_1$, параллельную основной линии; далее, проводя прямые $B_1, B_2 \dots B_9$, соответствующие различным плоскостям сползания, мы засечем на прямой $N-O_1$ отрезки: $N_1^1, N_2^1, \dots N_9^1$; эти отрезки, измеряемые в масштабе сил $BN=1$, определяют собой величины $R_1, R_2 \dots R_9$ давлений на стенку AB от груза $=1$, при условии сползания по соответствующим плоскостям.

Если отложить полученные отрезки $N_1^1, N_2^1, \dots N_9^1$ на вертикалях от точек $1, 2, \dots 9$, соответственных плоскостей сползания, и затем соединить вершины этих отрезков кривой, то полученная таким построением кривая A^1-D охарактеризует собой измене-

¹⁾ В действительности положение точки A и (прил.) не является постоянным, положение ее будет меняться в зависимости от изменения высоты на участке $B_1 B$; так что пропорциональности в выражениях давления R'_o не будет, а потому эпюра напряжений на этом участке будет криволинейна. Однако, эта криволинейность невелика и с достаточной степенью точности для практики может быть принята прямолинейной, как указано выше.

ние давления на стенку в зависимости от положения груза $=1$ на поверхности $A-D$.

Легко видеть, что если на поверхности сыпучего тела будет расположен какой-либо груз P , то наибольшее давление R_p на ограждающую плоскость, соответствующее этому положению груза, будет определяться плоскостью скольжения, проходящей через точку приложения груза. Так, например, если груз P будет помещен в точке 5, то наибольшее давление на стенку будет соответствовать плоскости $B-5$ и определяется величиной

$$R_5 = P \cdot y_5 \dots (34)$$

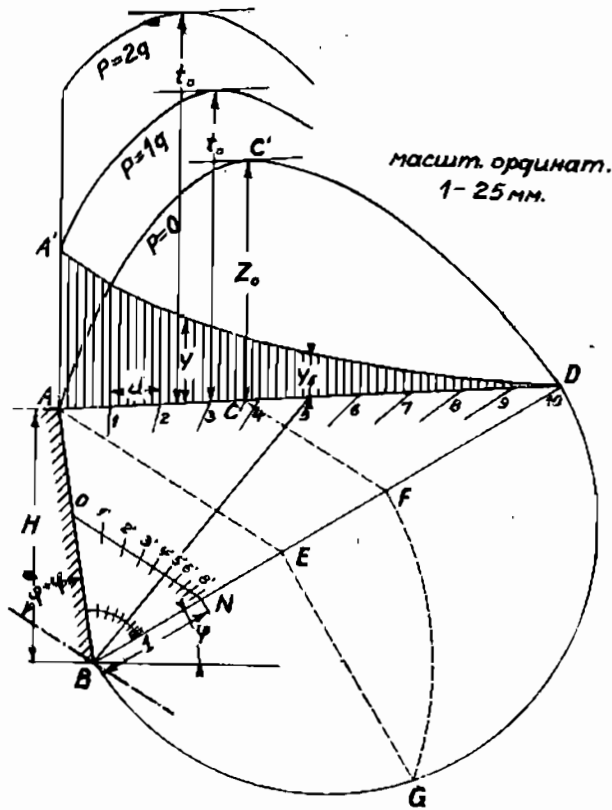
Действительно, все плоскости, лежащие слева от точки 5, не будут захватывать груз P , а потому не могут быть вводимы в расчет. Все же плоскости, лежащие справа от точки 5, хотя и будут захватывать груз P , но величины давлений на стенку, при сползании по этим плоскостям, будут меньше, так как будут определяться постепенно снижающимися ординатами.

При помощи этой кривой $A'-D$, без особых затруднений, определяется также давление на стенку при расположении на поверхности сыпучего тела системы грузов. Так как нам известно, что при сползании по любой плоскости, величина давления на стенку зависит от всех грузов, расположенных между стенкой и этой плоскостью, то при наличии системы грузов, определение расчетного наибольшего давления связано с сопоставлением давлений, определяемых для плоскостей, проходящих через точки приложений отдельных грузов; величины этих давлений будут:

$$R_1 = P_1 y_1,$$

для плоскости второго груза

$$R_2 = (P_1 + P_2) y_2,$$



Черт. 51.

для плоскости третьего груза

$$R_3 = (P_1 + P_2 + P_3) y_3$$

и т. д.

Наибольшее из этих давлений должно быть принято как расчетное. Кривая $A'D$, определяющая ординаты давлений, не зависит от вида и величины нагрузки, что дает возможность пользоваться ею не только для учета всякого вида загрузки сыпучего тела, но и от самого сыпучего тела на протяжении до линии естественного откоса.

Давление от веса самого сыпучего тела. Если бы вопрос об определении давления сыпучего тела был связан только с отысканием наибольшего давления его самого, то наиболее просто это можно было бы сделать известным построением Понселе, но так как при наличии временной нагрузки возникает необходимость определения давления по разным плоскостям сползания, то приходится пользоваться более общим способом исследования изменения давления в зависимости от изменения положения плоскостей сползания, что может быть сделано при помощи кривой $A'D$ на основании следующих соображений.

Разбив поверхность AD на n равных частей (удобнее всего на 10 частей) и проведя через них плоскости возможных сползаний, мы будем иметь для каждой части, отсекаемой этими плоскостями, один и тот же объем:

$$v = \frac{1}{2} d \cdot H = \frac{1}{n} \text{ объема призмы } ABD,$$

где d — длина каждой части, H — глубина стенки. Вес g каждой из этих частей будет одинаковый

$$g = v \cdot \gamma = \frac{1}{2} d H \gamma \dots \dots \dots (35)$$

В соответствии с этим, веса всех призм относительно любой плоскости сползания могут быть выражены величинами, кратными весу g отдельной части. Например, для плоскости $B-5$ вес призмы сползания будет:

$$G_5 = 5g \text{ и вообще } G_m = mg.$$

Такое выражение веса призм сползания в кратных величинах позволяет построить эпюру давлений сыпучего тела без вычисления весов G , исходя из соображения, что величины давлений пропорциональны этим весам и выражаются так:

$$R_5 = G_5 y_5 = 5g \cdot y_5$$

и вообще

$$R_m = g \cdot m \cdot y_m = \frac{1}{2} \gamma \cdot d \cdot H \cdot m \cdot y_m \dots \dots \dots (36).$$

Выделив множитель g , мы можем перестроить кривую $A'D$, помножив каждую ее ординату на соответствующее число m , так что ординаты z новой кривой соответственно будут (*черт. 31*):

$$z_1 = 1 y_1, \quad z_2 = 2y_2, \quad z_3 = 3y_3.$$

Вершинами этих ординат очертится кривая AC_1D , ординаты которой по умножении их на величину веса g , определяют собой давление на ограждающую плоскость от веса сыпучего тела, соответствующее плоскости сползания, проходящей через подошву основания ординаты:

$$R_k = g z_k.$$

Эта кривая AC_1D в точности соответствует кривой эпюры давлений Кулона. Наибольшее давление сыпучего тела определится по этой кривой ординатой, засекаемой касательной кривой, проводимой параллельно поверхности AD . На *черт. 31* этому соответствует точка C' с ординатой z_0 .

В сущности для целей практики построение самой кривой не всегда нужно, как это видно из последующего изложения. Важно знать положение плоскости сползания BC с наибольшим давлением сыпучего тела, что может быть сделано при помощи обычного построения Понселе.

Давление сыпучего тела с сосредоточенной нагрузкой на нем. Предположим первоначально, что на поверхности сыпучего тела действует один сосредоточенный груз. Если груз находится на участке CD справа от плоскости BC с наибольшим давлением R_0 на стенку от одного сыпучего тела, то, так как ординаты y и z обеих кривых в этой части убывают, наибольшее давление от действия сосредоточенного груза и сыпучего тела может иметь место только по плоскости сползания, проходящей через точку приложения груза, и определяется выражением:

$$R_p = Py_k + gz_k = (P + m_k g) y_k \dots \dots \dots (37)$$

Если величина этого давления больше R_0 , то она должна быть принята как расчетная. Соотношение величин этих давлений легко определяется следующим выражением:

$$R_0 = z_0 g \leq g \left(\frac{P}{g} + m_k \right) y_k.$$

или

$$z_0 \leq \left(\frac{P}{g} + m_k \right) y_k \dots \dots \dots (38).$$

Когда сосредоточенный груз расположен слева от плоскости BC наибольшего давления R_0 , то, так как ординаты y кривой $A'D$ возрастают, а ординаты $z = my$ убывают, нельзя непосредственно указать положение плоскости с наибольшим давлением R_p , но вполне ясно, что эта плоскость должна лежать между точкой приложения груза и плоскостью BC .

Определение положения этой плоскости проще всего сделать путем построения кривой, характеризующей изменение этих давлений в зависимости от положения плоскости сползания, и так как вообще

$$R_p = (P + mg)y = g \left(\frac{P}{g} + m \right) y \dots \dots \dots (39)$$

то ординаты этой кривой определяются выражением:

$$t = \left(\frac{P}{g} + m \right) y \dots \dots \dots (40)$$

Задаваясь рядом точек (удобнее всего точками ранее принятого деления поверхности AD), вычисляем ординаты для небольшого участка, лежащего влево от плоскости BC до точки приложения груза P . Наибольшей ординатой построенной кривой определяется наибольшее расчетное давление R_p^o

$$\max R_p^o = gt_o$$

Для всякого положения груза P между ограждающей плоскостью AB и местом наибольшей ординаты t_o , наибольшее давление на стенку будет соответствовать плоскости, проходящей через подошву наибольших ординат t_o , так как независимо от положения груза, давление на ограждающую плоскость при сползании по этой плоскости будет:

$$\max R_p = gt_o$$

Не только величина ординаты t_o зависит от величины P и соотношения $P:g$, но и положение ее зависит от этого. На *черт. 31* построены такие кривые для соотношений:

$$P:g = 1, \quad P:g = 2, \quad P:g = 3,$$

устанавливающие перемещение наибольшей ординаты t_o в сторону ограждающей плоскости по мере возрастания отношения P .

Предположим теперь, что на поверхности сыпучего тела расположена система сосредоточенных грузов $P_1, P_2 \dots P_n$. Включение каждого груза в вес призмы сползания вызывает резкое изменение давления R_p на стенку при прохождении плоскости скольжения через точку приложения груза; а потому возможное наибольшее расчетное давление надо искать относительно плоскостей, соответствующих точкам приложения грузов, или же оно может иметь место также по плоскости, соответствующей наибольшему давлению R^o одного сыпучего тела.

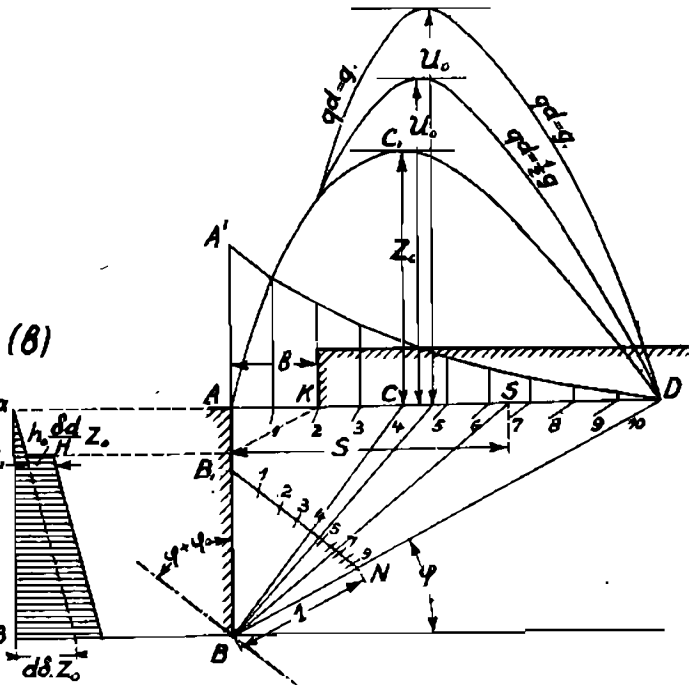
Если расстояние каждого груза от ограждающей плоскости AB обозначить через $a_1, a_2 \dots a_n$, то каждому из этих расстояний будет соответствовать вес призмы обрушения:

$$G_1 = g \cdot \frac{a_1}{d}; \quad G_2 = g \cdot \frac{a_2}{d};$$

где d — длина одной части принятого деления поверхности $AD = L$. Тогда выражение величины давления относительно любой плоскости, проходящей через точку приложения любого груза P_k , напишется так:

$$R_k = \left(P_1 + P_2 + \dots + P_k + g \frac{a_k}{d} \right) y_k \dots \dots \dots (41)$$

Сопоставляя величины этих давлений между собой, можно найти наибольшее расчетное из них. В большинстве случаев, при более или менее равных грузах, это наибольшее давление совпадает с плоскостью, проходящей через точку приложения груза, близко лежащего к плоскости BC наибольшего давления одного сыпучего тела.



Черт. 32.

Давление сыпучего тела со сплошной нагрузкой на нем. Рассмотрим случай, когда на поверхности сыпучего тела расположена равномерная нагрузка весом q кг на погонный метр (черт. 32).

Если эта нагрузка расположена не сплошь по всей поверхности сыпучего тела, а начинается только на расстоянии b от ограждающей плоскости, то величина давления по любой плоскости скольжения, проходящей через точку S на расстоянии s от стенки, определится следующим выражением:

$$R_q = \left[q (s-b) + g \frac{s}{d} \right] y = \bar{g} \left[\frac{q}{g} (s-b) + \frac{s}{d} \right] y \dots \dots \dots (42)$$

Если мы будем вычислять величины давления для определенных точек поверхности AD , для каждой из которых $s = md$, то та же формула переписется так:

$$R_q = g \left[\frac{qd}{g} \left(m - \frac{b}{d} \right) + m \right] y = g \cdot u \dots \dots \dots (43)$$

Определение наибольшего значения R_q может быть проще всего сделано путем построения кривой, ординаты которой

$$u = \left[\frac{qd}{g} \left(m - \frac{b}{d} \right) + m \right] y \dots \dots \dots (44)$$

Положением наибольшей ординаты этой кривой определяется плоскость сползания с наибольшим давлением R_q .

В качестве примера на *черт. 32* построена такая кривая для случая, когда $qd = \frac{1}{2}g$ и $b = 2d$, а потому выражение ординаты u преобразуется в такое:

$$u = [0,5 (m - 2) + m] y = (1,5 m - 1) y.$$

Давая m ряд значений, начиная с $m = 2$ — места начала нагрузки получим:

$m = 2$	$u_2 = 2y_2$	$m = 6$	$u_6 = 8y_6$
$m = 3$	$u_3 = 3,5y_3$	$m = 7$	$u_7 = 9,5y_7$
$m = 4$	$u_4 = 5y_4$	$m = 8$	$u_8 = 11y_8$
$m = 5$	$u_5 = 6,5y_5$	$m = 9$	$u_9 = 12,5y_9$

На том же чертеже проведено аналогичное построение кривой для случая $qd = g$.

Из произведенного построения кривых AUD давлений R_q можно видеть, что при неполном загрузении поверхности сыпучего тела плоскости BK с наибольшим давлением R_q отклоняются от ограждающей плоскости больше, чем плоскость BC с наибольшим давлением одного сыпучего тела, но это отклонение незначительно.

Когда нагрузка q расположена по всей поверхности сыпучего тела, т.е. $b = 0$, то выражение наибольшего давления приводится к виду:

$$R_q = (qd + g) my \dots \dots \dots (45)$$

представляющему собой ординаты кривой пропорциональной кривой AC_1D давления одного сыпучего тела; из чего следует, что в этом случае плоскость наибольшего давления R_q^0 совпадает с плоскостью наибольшего давления одного сыпучего тела.

Если выразить вес сплошной нагрузки в удельном весе сыпучего тела, т.е. принять $q = h_0 \delta$ и если $g = \frac{1}{2} Hd \delta$, то формула (45) по подстановке в нее значений q и g примет такой вид:

$$R_q = \frac{1}{2} d \delta (2 h_0 + H) my \dots \dots \dots (46)$$

Сопоставляя полученное выражение с аналогичным выражением (36) давления R_o одного сыпучего тела, можно видеть, что соотношение их:

$$\frac{R_q}{R_o} = \frac{\frac{1}{2} \delta d (2h_o + H) m y}{\frac{1}{2} \delta d H \cdot m y} = \frac{2h_o + H}{H} \dots \dots \dots (47)$$

из чего следует, что при сплошном загрузении сыпучего тела наибольшее давление R_q может быть определено по величине давления R_o одного сыпучего тела путем умножения его на отношение $(2h_o + H) : H$.

Например, если при действии одного сыпучего тела давление его на ограждающую плоскость определялось выражением (22):

$$R_o = \frac{1}{2} \delta k^2 H^2 \sin \psi,$$

то давление того же сыпучего тела со сплошной нагрузкой q на нем будет определяться выражением такого вида:

$$R_q = R_o \frac{2h_o + H}{H} = \frac{1}{2} \delta k^2 (2h_o + H) H \sin \psi \dots \dots \dots (48)$$

На основании изложенного можно сказать, что при помощи кривой $A'D$, характеризующей изменение давлений на ограждающую плоскость от действия груза $= 1$, можно определить давление сыпучего тела с любым видом нагрузки на нем.

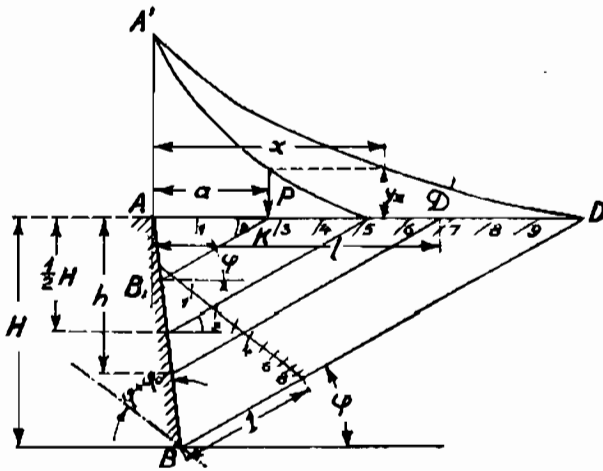
§ 13. Точка приложения и направление давления при действии временной нагрузки на сыпучее тело. Также как и при действии одного сыпучего тела, так и при действии сыпучего тела с нагрузкой на нем принято определять точку приложения давления по центру тяжести эпюры напряжений, соответствующей этому давлению.

Как можно видеть из сказанного в предыдущем параграфе, плоскости сползания с наибольшими давлениями при совместном действии сыпучего тела и нагрузки на нем изменяют свой наклон в зависимости от высоты ограждающей плоскости и положения нагрузки на поверхности сыпучего тела; по этому обстоятельству можно заранее сказать, что закономерности в изменении величин давления для различных высот одной и той же ограждающей плоскости не будет; и только для случая сплошного загрузения равномерной нагрузкой всей поверхности сыпучего тела, когда отношение давлений $R_q : R_o = (2h_o + H) : H$ постоянно (см. выраж. 47) имеет место закономерность в изменении давлений по высоте ограждающей плоскости.

В виду отсутствия закономерности в изменении давления по высоте ограждающей плоскости приходится для построения эпюры напряжений вычислять величины давлений для отдельных высот и по ним уже строить эпюру напряжений (см. § 9). Для вычислений давлений при различных

высотах ограждающей плоскости с успехом может быть использована кривая $A'D$ от единичной нагрузки, построенная для полной высоты H , ограждающей плоскости.

Действительно, ординаты этой кривой зависят от угла ε — наклона ограждающей плоскости к вертикали, от угла γ — наклона поверхности



Черт. 33.

сыпучего тела к горизонту, углов φ и φ_0 — внутреннего трения сыпучего тела и трения его ограждающей плоскости, но не зависят от высоты ее; следовательно, для любой высоты ограждающей плоскости ординаты кривой $A'D$ будут сохранять свою длину, но расстояние между ними, равное

$$d = \frac{1}{n} L, \text{ будет}$$

уменьшаться соответственно уменьшению длины L поверхности сыпучего тела, засекаемой линией естественного откоса, а так как положение последней будет зависеть от расчетной высоты — h ограждающей плоскости, то, следовательно, относительное изменение расстояний d' между ординатами кривой $A'D$ будет пропорционально высотам стенки, а именно:

$$\frac{d'}{d} = \frac{h}{H} \dots \dots \dots (49)$$

а сама кривая по мере уменьшения высоты стенки будет становиться все круче и круче.

На *черт. 33* сделано построение этих кривых для случая полной высоты и половины высоты ограждающей плоскости.

Необходимо отметить, что с изменением базы кривой $A'D$ изменится относительное положение на ней неподвижной нагрузки, а потому ординаты этих кривых, соответствующие заданному положению нагрузки, будут различные; однако, можно показать, что определение давления от нагрузки при разных высотах ограждающей плоскости можно сделать не перестраивая кривых, воспользовавшись подобием их, для чего потребуется вычислить положение той ординаты y_x кривой, которая будет соответствовать относительному положению x груза на базе новой кривой.

Пусть положение груза на основной кривой $A'D$ при базе ее L и высоте ограждающей плоскости — H определяется расстоянием a (*черт. 33*),

тогда для новой кривой $A'D'$ с базой l и при высоте ограждающей плоскости h относительное положение x груза определится из условия:

$$x = \frac{a \cdot L}{l} = \frac{aL}{hL}, H = \frac{a \cdot H}{h} \dots \dots \dots (50)$$

Это выражение показывает, что если мы не будем перестраивать кривую, то для случая высоты h ограждающей поверхности ордината y соответствующая положению груза на новой кривой, будет равна ординате y_x , взятой на расстоянии x на первоначальной кривой.

Например, если груз P на первоначальной кривой расположен на расстоянии $x = 0,27 L$, то для случая, когда $h = 0,5 H$, ординату y_x на первоначальной кривой надо взять на расстоянии (черт. 33):

$$a = \frac{0,27 L}{0,5 H} H = 0,54 L.$$

Следует отметить ту высоту ограждающей плоскости, когда отношение $h:H = x:L$; в этом случае относительное положение груза на кривой $A'D'$

$$a = \frac{x \cdot H}{h} = L.$$

Это случай, когда относительное положение груза P на базе кривой совпало с ее концом, а потому ордината $y_x = 0$, т. е. груз перестает действовать на ограждающую плоскость.

Эта характерная высота ограждающей плоскости, на которую не распространяется действие груза, легко определяется путем проведения через точку приложения груза линии естественного откоса. На *черт. 33* это будет линия KB_1 и соответствующая ей высота стенки AB_1 .

Перейдем теперь к выяснению характера эпюр напряжений при различных видах загрузки.

Действие одного сыпучего тела. При определении давления одного сыпучего тела мы исходили из веса g единичной призмы (выраж. 35):

$$g = \frac{1}{2} d H \delta.$$

При высоте ограждающей стенки h и соответствующем изменении базы, когда $d' = d \frac{h}{H}$, вес единичной призмы g' будет:

$$g' = \frac{1}{2} d' h \delta = \frac{1}{2} \frac{d \delta}{H} h^2.$$

Так как в случае действия одного сыпучего тела наклон плоскости сползания для любых высот ограждающей плоскости остается один и тот же, то относительное положение их на кривых $A'D$ нагрузок остается одно и то же, а потому для всех высот стенок ордината z_0 характери-

зующая давление по плоскости сползания, будет одна и та же. Отсюда следует, что давление R_0 от одного сыпучего тела для любой высоты стенки будет определяться выражением:

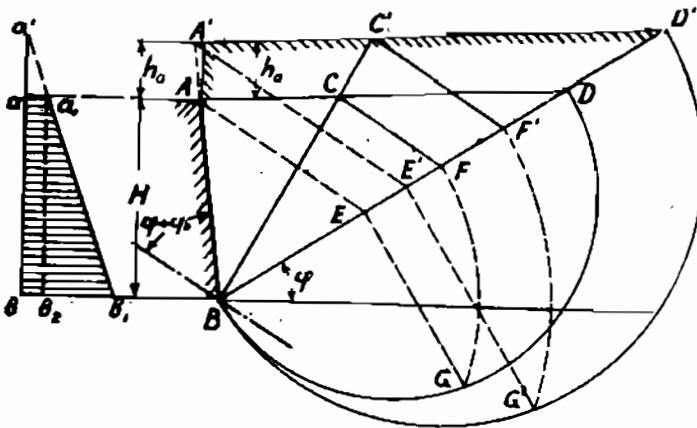
$$R_0 = z_0 g' = \frac{1}{2} z_0 \frac{d\delta}{H} h^2 \dots \dots \dots (51),$$

т.е. давление изменяется по закону параболы.

Соответствующая ей эпюра напряжений будет иметь очертание по прямой с уравнением:

$$n = \frac{dR_0}{dh} = z_0 \frac{d\delta}{H} h \dots \dots \dots (52)$$

(срав. выраж. 26).



Черт. 34.

Точка приложения давления будет находиться на $1/3$ высоты ограждающей плоскости.

Действие сыпучего тела со сплошной нагрузкой. Выше было указано, что в том случае, когда сплошная нагрузка расположена по всей

поверхности сыпучего тела, давление R_q на ограждающую плоскость определяется отношением (47):

$$R_q : R_0 = (2h_0 + h) : h \dots \dots \dots (53)$$

и может быть выражено так:

$$R_q = R_0 \frac{2h_0 + h}{h} = \frac{1}{2} z_0 \frac{d\delta}{H} (2h_0 + h) h$$

Соответствующая этим давлениям эпюра напряжений определится уравнением:

$$n = \frac{dR_q}{dh} = z_0 \frac{d\delta}{H} (h_0 + h) \dots \dots \dots (53a)$$

т.е. будет очерчена прямой, но имеет вид трапеции (черт. 34), ордината которой при вершине ограждающей плоскости $= z_0 \frac{d\delta}{H} h_0$ и у подошвы ее $= z_0 \frac{d\delta}{H} (h_0 + H)$.

Точка приложения давления будет находиться в центре тяжести этой трапеции.

Если сплошная нагрузка расположена только на части поверхности сыпучего тела, то, как было указано выше, она не вызывает изменения давления сыпучего тела на высоту AB_1 (черт. 32) ограждающей плоскости, определяемую проведением через начальную точку k нагрузки прямой kB_1 , параллельной естественному откосу, а потому эпюра напряжений на протяжении этой высоты остается такой же, какой была при действии одного сыпучего тела, т. е. очерченной по прямой, идущей из точки a .

По высоте, ниже точки B_1 нагрузка, расположенная на сыпучем теле, начинает оказывать давление на ограждающую плоскость, при чем это давление для любой высоты будет определяться выражением (44):

$$R'_q = g' \left[\frac{qd'}{g'} \left(m - \frac{b}{d'} \right) + m \right] y = g' u \dots \dots \dots (54)$$

Так как выражение давления в этом случае зависит от соотношения $qd' : g'$, то кривые, очерчиваемые ординатами u , не будут подобны между собой, а потому плоскости сползания с наибольшими значениями u не будут параллельны между собой, результатом чего является незаконмерность в изменении величин давления R'_q для различных высот. В связи с этим эпюра напряжений перестает иметь прямолинейное очертание, но это очертание близко к прямой.

Для целей практики можно принять, что плоскости сползания останутся параллельными, тогда задача упрощается и можно построить эпюру напряжений, исходя из следующих соображений.

Выражение (54) давления R'_q может быть преобразовано в такое:

$$R'_q = [qd'm - qb + g'm] y_0 = \left[q_0 \frac{dh}{H} m - qb + \frac{1}{2} \delta \frac{dh^2}{H} m \right] y_0.$$

Соответствующая этим давлениям эпюра напряжений определится уравнением:

$$n = \frac{dR'_q}{dh} = \left[q \frac{d}{H} m + \delta d \frac{h}{H} m \right] y_0.$$

Заменив в этом выражении q равной ему величиной dh_0 и делая приведение, получим:

$$n = (h_0 + h) \delta \frac{d}{H} m y_0 \dots \dots \dots (55)$$

но так как по смыслу кривой $A'D$ единичных нагрузок $z_0 = m y_0$, то полученное уравнение прямой, очерчивающей эпюру напряжений, в точности соответствует уравнению (52); из чего следует, что при принятом допущении эпюра напряжений (черт. 32) будет иметь очертание в верхней части от A до B по прямой, соответствующей действию одного сыпучего тела; на уровне точки B_1 она делает скачек $= h_0 \frac{\delta d}{H} z_0$ и далее очерчивается прямой параллельной прямой очертания при действии одного сыпучего тела.

Точка приложения давления определится центром тяжести полученной суммарной эпюры.

Действие сыпучего тела с сосредоточенной нагрузкой. Предположим, что сосредоточенный груз P приложен на расстоянии x от ограждающей плоскости (черт. 35).

Прежде всего отметим, что на некоторую высоту AB ограждающей плоскости, отсекаемую линией KB_1 , проводимой чрез точку K приложения груза параллельно линии естественного откоса, груз не будет действовать, а потому эпюра напряжений на этом участке будет очерчена по прямой, соответствующей давлению одного сыпучего тела.

Начиная с пункта B_1 ограждающей плоскости, груз P войдет в зону естественного откоса, а потому он начнет оказывать давление на ограждающую плоскость; это давление будет возрастать по мере увеличения высоты стенки. Пока груз будет занимать положение между плоскостями естественного откоса и плоскостями сползания ненагруженного сыпучего тела, что имеет место в пределах высоты B_1B_2 , наибольшее давление, как это указывалось выше, будет иметь место или при сползании по плоскости, проходящей через точку приложения груза, или по плоскости сползания, соответствующей ненагруженному состоянию сыпучего тела. Определение наибольшего из них может быть сделано путем сравнительных подсчетов.

Наибольшее давление для ненагруженного состояния для любой высоты ограждающей плоскости вычисляется по формуле (51).

Наибольшее давление для нагруженного состояния для той же высоты h определяется формулой (37):

$$R_p = (G + P) y_x = \left(\frac{1}{2} \delta a h + P \right) y_x \dots \dots \dots (56)$$

в которой ордината y_x должна быть взята из основной кривой $A'D$ по относительному положению на ней груза P (см. выраж. 50), а именно на расстоянии:

$$x = a \frac{H}{h}.$$

По этим величинам давлений, вычисленным для разных высот, строится кривая давлений, которая служит для последующего вычисления ординат эпюры напряжений. Такая эпюра, построена в нижеследующем числовом примере.

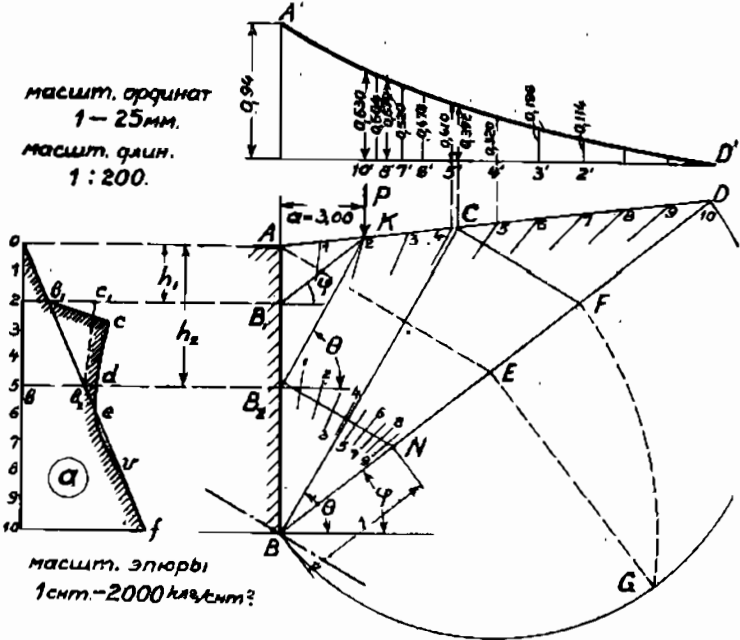
Обычно под влиянием включения давления от сосредоточенного груза P эпюра напряжений (черт. 35а), начиная с уровня B_1 , начинает резко расти до точки C , а затем с нарастанием высоты до точки B_2 ординаты эпюры начинают постепенно падать, асимптотически приближаясь к ординатам эпюры при ненагруженном состоянии.

Особого внимания заслуживает точка B_2 на ограждающей плоскости; положение этой точки определяется плоскостью сползания ненагруженного состояния, проходящей через точку k приложения груза P ; следо-

вательно, по этой плоскости имеет место совпадение наибольшего давления от ненагруженного состояния сыпучего тела с давлением от включения полного груза P , т.-е. давление будет иметь величину:

$$R_p = \left(\frac{1}{2} \delta a h + P \right) y_0 \dots \dots \dots (57)$$

Если отнести это положение к эпюре напряжений, то по смыслу эпюры, давление от одного сыпучего тела должно определяться площадью треуголь-



Черт. 35.

ника Ob_2b , равного по величине $\frac{1}{2} \delta a h y_0$; давление же, вызываемое действием сосредоточенного груза $= P y_0$ должно определяться приделком к площади этого треугольника площади $b_1 c d b_2$.

Для всех высот ограждающей плоскости ниже точки B_2 груз P будет располагаться на участке между ограждающей плоскостью и плоскостью сползания ненагруженного состояния сыпучего тела; как указывалось в предыдущем параграфе, здесь будет иметь место сначала нарастание суммарного давления, а потом убывание.

Величина давления по плоскости сползания, проходящей через точку приложения сосредоточенного груза, в этом случае определяется также по формуле (56).

Как можно видеть из последующего числового примера, это явление продолжающегося нарастания отмечается на эпюре участком $b_2 d e$, который, однако, быстро стремится к слиянию с эпюрой напряжений соответствующей ненагруженному состоянию.

Точка e эпюры соответствует положению плоскости сползания, проходящей через точку положения груза P и определяемую по черт. 31

ординатой t_0 . Эта точка является характерной, так как ниже нее эпюра напряжений от суммарного давления сыпучего тела и нагрузки почти сливается, а еще ниже даже прямо сливается с эпюрой от давления ненагруженного сыпучего тела:

Некоторые авторы¹⁾ предлагают рассматривать приросток эпюры в виде треугольника b, c, b_2 (черт. 35) с подошвой, соответствующей уровню точки B_1 и с вершиной на уровне точки B_0 , из которых первая определяется плоскостью естественного откоса, а вторая плоскостью сползания, соответствующей ненагруженному состоянию и проходящей через точку приложения груза P . Такое предположение упрощает расчет в том смысле, что позволяет считать точку приложения давления, вызываемого действием сосредоточенного груза, на одной трети расстояния B_1B_2 , считая от точки B_1 . Что касается величины самого давления, то в соответствии с этим, оно должно определяться давлением по плоскости сползания одного сыпучего тела, т. е. будет определяться величиной P_{y_0} по формуле (57), и площадь треугольника должна равняться этому давлению.

Однако, такое упрощение не совсем соответствует действительному нарастанию эпюры напряжений, как это можно видеть по черт. 35 и 56, а потому ближе к действительности будет определение точки приложения давления по центру тяжести эпюры (см. пример § 16).

Если загрузка сыпучего тела будет состоять не из одного сосредоточенного груза, а из нескольких, то задача об определении точек приложения давлений может быть разрешена путем рассмотрения каждого груза в отдельности. По упрощенному методу расчета эпюры напряжений в этом случае будет состоять из основного треугольника, соответствующего давлению ненагруженного сыпучего тела, с рядом приращков, соответствующих давлению сосредоточенных грузов, границы которых определяются плоскостями, параллельными углу естественного откоса, и плоскостями, параллельными плоскостям сползания при ненагруженном состоянии, проходящими через точки приложения сосредоточенных грузов.

Направление давлений. Вопрос о направлении давлений относительно ограждающей плоскости при совместном действии сыпучего тела и нагрузки страдает большой неясностью.

Ввиду неясности вопроса о том, как изменяется направление давления сыпучего тела под действием на него нагрузки, принято: или считать это давление по тому же направлению, которое было принято для ненагруженного состояния, или же ставить его в худшие условия, принимая его нормально действующим к ограждающей плоскости, за исключением тех случаев, когда ограждающая плоскость наклонена назад; в последнем случае направление давления следует принимать горизонтальным.

Для пояснения изложенного в настоящем параграфе рассмотрим следующие числовые примеры.

Пример 2. Пусть даны высота ограждающей плоскости $H = 10$ метр., положение сосредоточенного груза P весом 8000 кг, определяемое рас-

¹⁾ Krey «Erddruck und Tragfähigkeit des Baugrundes» 1918, стр. 23—24.

стоянием $a = 3$ метра, вес сыпучего тела $\delta = 1.800$ кг в куб. метре, длина поверхности сыпучего тела $AD = L = 15$ метрам.

На *черт. 35* построена кривая $A'D'$ от единичной нагрузки для полной высоты $H = 10$ метрам ограждающей плоскости.

Положение плоскости сползания ненагруженного состояния найдено построением Понселе и засекает на поверхности сыпучего тела точку C на расстоянии $AC = 6,2$ метра от верха ограждающей плоскости.

В соответствии с положением груза P положение точек B_1 и B_2 на ограждающей плоскости определяется следующими высотами:

$$\text{точки } B_1 \dots h_1 = H \frac{3}{15} = 2 \text{ метра;}$$

$$\text{точки } B_2 \dots h_2 = H \frac{3}{6,2} = 4,84 \text{ метра}$$

В нижеследующей таблице вычислены величины давлений на ограждающую плоскость для разных высот ее через один метр:

1) для случая давления одного сыпучего тела по формуле (51), которая принимает вид:

$$R_o = \frac{1}{2} \frac{1800 \cdot 1,5}{10} \frac{6,2}{1,5} 0,392 h^2 = 218,7 h^2;$$

где $y_o = 0,392$ по измерению на кривой $A'D'$;

2) для давлений от совместного действия сыпучего тела и сосредоточенного груза P по плоскостям сползания, проходящим через точку приложения груза, по формуле (56):

$$R_p = \left(\frac{1}{2} 1800 \cdot 3,00h + 8000 \right) y_x = \left(2700h + 8000 \right) y_x,$$

в которой значение ординат y_x определяется по относительному положению груза из выражения $x = \frac{3 \cdot 10}{h}$;

3) для давления от совместного действия сыпучего тела и сосредоточенного груза $P = 8000$ кг по плоскостям сползания ненагруженного состояния по формуле (56):

$$R_p = \left(\frac{1}{2} 1800 \frac{1,5}{10} \cdot \frac{6,2}{1,5} h^2 + 8000 \right) 0,392 = 218,7 h^2 + 3136,$$

в которой $y_o = 0,392$.

В той же таблице по величине наибольших давлений вычислены ординаты эпюры напряжений из условия, что

$$n = \frac{dR}{dh} = \frac{R_k - R_{k-1}}{dh}.$$

Высота h , м	Давление одного с. т. по формуле $218,7h^2$	Давление нагруженного сыпуч. тела				Наибольш. расчетное давление R_k	Ординаты эпюры напряжений $\lambda = \frac{dR}{dh}$
		Длин. x , м	Ордината y_x	По форм. $(2700h + 8000) \cdot x$	По форм. $218,7h^2 + 8136$		
1	218,7	0	0	0	—	218,7	218,7
2	874,8	0	0	0	—	874,8	556,1
2,5	1.366,9	12	0,114	1.682	—	1.682	1.814
3	1.968,3	10	0,196	3.155	—	3.155	3.146
4	3.499,2	7,5	0,320	6.016	—	6.016	3.861
5	5.467,5	6	0,410	8.815	—	8.815	2.799
6	7.873,2	5	0,473	11.447	11.009	11.447	2.682
7	10.718,3	4,29	0,520	13.988	13.852	13.988	2.541
8	13.996,8	3,75	0,570	16.872	17.182	17.182	3.145
9	17.714,7	3,33	0,604	—	20.850	20.850	3.718
10	21.870,0	3,00	0,630	—	25.006	25.006	4.156

Вычисленные в последней графе величины напряжений приняты за ординаты и по ним построена эпюра напряжений (черт. 35а), которая характеризует нарастание эпюры для этого частного случая.

По этой эпюре площадь приростка b_1ce по полученным размерам $= \frac{1}{2} 4,2 \times 1700 = 3570$ кг.

Величина давления по выражению (57):

$$P_{y_0} = 8000 \cdot 0,392 = 3136 \text{ кг.}$$

Некоторое снижение расчетной величины по сравнению с площадью эпюры объясняется тем, что в последующем нарастании избыток в площади b_1ce покрывается уменьшением площади на участке ev .

Пример 3. Пусть требуется определить давление на стенку AB (черт. 36) от действия сыпучего тела со сплошной нагрузкой q кг на участке KD .

Особенность этого примера заключается в том, что сыпучее тело ограничено ломаной AKD . Для того, чтобы получить в этом случае равновеликие веса g единичных призм, надо разделить на равные части— d' участок AK , а потом в соответствии с расстоянием 7 и 9 м от подошвы B стенки до линий AK и KD разделить участок KD на части d' так, чтобы они удовлетворяли условию равенства единичных весов g :

$$g = \frac{1}{2} d \cdot 7 = \frac{1}{2} d' \cdot 9,$$

отсюда

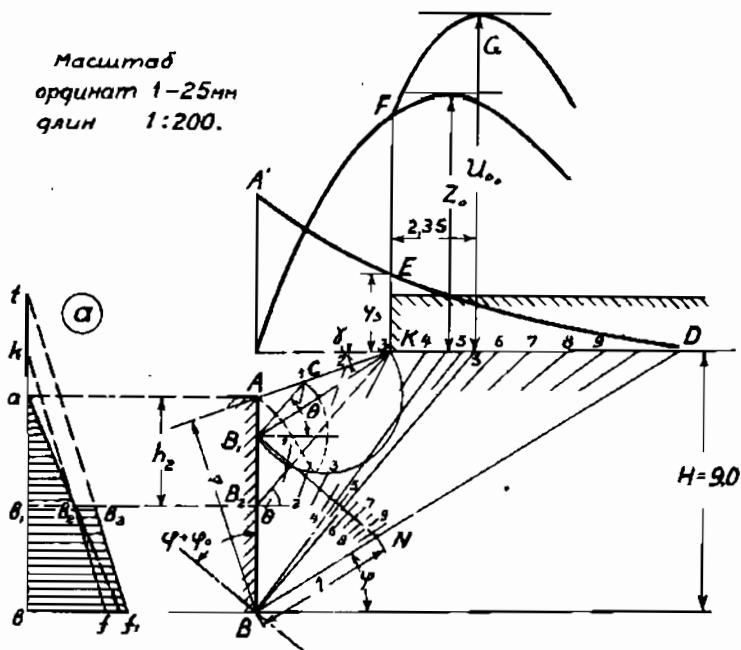
$$\frac{d'}{d} = \frac{7}{9}$$

Разделив поверхность AKD на указанные участки d и d' , производим, изложенным в § 12 приемом, построение кривой $A'D$, которая в этом случае будет иметь перелом в точке E .

Величина наибольшего давления при заданном загрузении сыпучего тела определяется по формуле (54), которая для этого случая переписывается так:

$$R_q = (q \cdot d' n + gm) y_n,$$

где qd' — сплошная нагрузка на участке d' , n — число участков, считая от точки k , m — число участков, считая от точки A , в рассматриваемом случае $m = n + 3$, и y_n — ордината кривой $A'ED$, соответствующая рассматриваемому участку n .



Черт. 36.

Если принять, например, $qd' = h_0 d' \delta = 0,7g$, то та же формула давления переписывается так:

$$R_q = [(0,7 + 1) n + 3] g y_n = a_n g.$$

Давая n ряд значений, мы можем построить кривую FG , ординаты которой будут определять величины давлений по различным плоскостям сползания B_4, B_5 и т. д.

$n = 1$	$R_q = 4,7 g \cdot y_1$	$n = 4$	$R_q = 9,8 g \cdot y_4$
$n = 2$	$R_q = 6,4 g \cdot y_2$	$n = 5$	$R_q = 11,5 g \cdot y_5$
$n = 3$	$R_q = 8,1 g \cdot y_3$		и т. д.

Ординатой U_0 этой кривой определяется наибольшее давление от сыпучего тела на стенку:

$$R_0 = u_0 g = 2,35 \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot d \cdot \delta = 2,35 \frac{7}{2} \cdot 1,6 \cdot 1800 = 23688 \text{ кг.}$$

Для определения точки приложения этого давления строим эпюру напряжений (черт. 36-а).

Пока плоскость возможного сползания будет лежать в пределах участка AK , эпюра напряжений будет изменяться по прямой ab_2 . Граница в этой прямой может быть найдена построением Пюсселе; для чего проводим через точку K прямую KB_1 , параллельную естественному откосу, находим по ней обычным приемом плоскость B_1C сползания и, проведя через точку K линию KB_2 , параллельную B_1C , определяем высоту h_2 стенки, на которую будет распространяться прямая ab_2 эпюры напряжений.

Для высот стенки ниже точки b_2 плоскости возможных сползаний будут иметь переменный наклон в зависимости от высоты стенки, а потому эпюра напряжений должна иметь криволинейное очертание, но, принимая во внимание сделанное выше допущение (см. черт. 32), можно считать, что эпюра напряжений и ниже точки B_2 будет очерчиваться по прямым kb_2f при отсутствии нагрузки и при наличии нагрузки q по прямой tb_2f ; таким образом, эпюра напряжений будет иметь очертание по контуру $ab_2b_3f_1b$.

Ординаты ее $b_1b_2 = \delta d \cos \gamma \cdot 3y_B$ (см. форм. 52).

$$\text{» » } bf = \delta d' z_0 \quad \text{» » »}$$

$$\text{» » } bf_1 = \delta \frac{d'}{H} (h_0 + H) z_0 \quad (\text{см. форм. 55}).$$

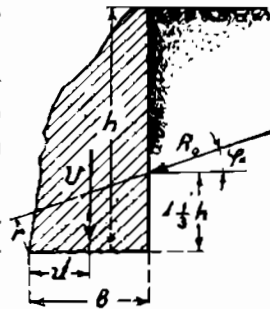
II. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ СЫПУЧЕГО ТЕЛА В РАСЧЕТАХ СООРУЖЕНИЙ.

I. МАССИВНЫЕ СТЕНКИ.

§ 14. Расчет каменных и бетонных стенок. Вследствие большой жесткости каменных и бетонных стенок, давление сыпучего тела на заднюю грань их стремится вызвать или опрокидывание стенки путем вращения ее вокруг нижнего переднего ребра, или сдвиг ее по основанию; одновременно то же давление, слагаясь с весом самой стенки, будет вызывать сжатие в швах стенки. В первом случае давлением сыпучего тела нарушается устойчивость стенки, во втором — ее прочность.

Условия устойчивости. Опрокидывающему действию момента M , вызываемому давлением сыпучего тела на стенку, противодействует удерживающий момент M_0 от действия веса самой стенки.

Устойчивость стенки будет обеспечена, если момент удерживающий будет больше момента опрокидывающего.



Черт. 37.

$$\frac{M_0}{M} = m > 1 \dots \dots \dots (58).$$

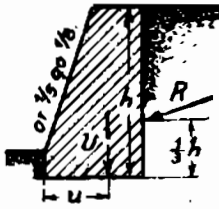
Это отношение, характеризуемое величиной m , называется коэффициентом устойчивости. Обычно, в целях обеспечения запаса устойчивости против случайных причин, принимают $m =$ от 1,5 до 2.

Если стенку, у которой задняя грань вертикальна и имеет высоту h (черт. 37), а основание имеет ширину b , рассматривать под действием давления R_0 сыпучего тела, приложенного к задней грани на $1/3$ высоты ее и направленного под углом $(90^\circ - \varphi_0)$ к ней, то условие устойчивости ее можно выразить в таком виде:

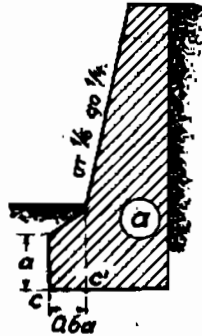
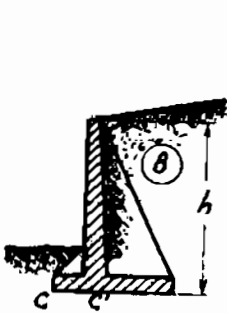
$$\frac{M_0}{M} = \frac{V \cdot u}{R_0 \left(\frac{1}{3} h \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0 \right)} \geq m.$$

В этом выражении V — вес самой стенки, u — плечо этого веса относительно переднего ребра основания стенки и $\left(\frac{1}{3} h \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0 \right)$ — плечо давления R_0 относительно того же ребра.

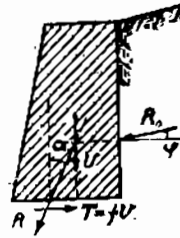
Из этого выражения можно видеть, что с выносом переднего ребра вперед будет увеличиваться плечо u и уменьшаться плечо давления R_0 , следовательно, коэффициент устойчивости будет повышаться. Этим объясняется то, что на практике стремятся придать, где это возможно, передним граням стенок уклон вперед (черт. 38) или даже снабжать их специальным носом C . C' (черт. 39). Увеличение устойчивости может быть достигнуто также запрокидыванием стенки назад (черт. 41); при этой форме стенки значительно отодвигается центр тяжести веса стенки и этим увеличивается плечо.



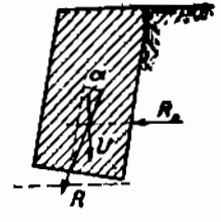
Черт. 38.



Черт. 39.



Черт. 40.



Черт. 41.

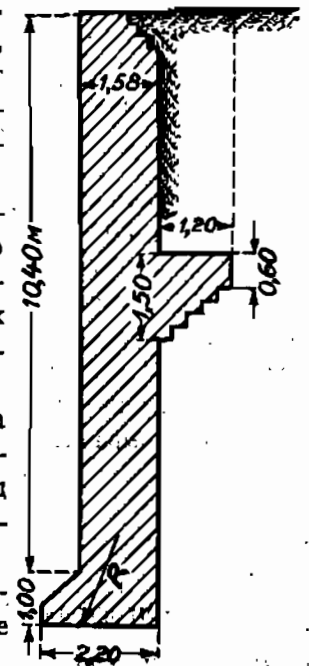
Иногда устойчивость стенок повышают устройством особых площадок с задней стороны стенки (черт. 41 bis). При сохранении размеров основания стенки, устройством такой площадки вводится в расчет вес земли, действующей на нее, чем равнодействующая всех сил приближается к центру основания стенки.

На черт. 41 bis показаны размеры стенки, сделанной у Миклетонского туннеля. Несмотря на то, что грунт, поддерживаемый этой стенкой, имел угол внутреннего трения $\varphi = 30^\circ$, удалось, при указанных размерах стенки, достигнуть прохождения равнодействующей внутри площади основания.

Сдвигающее действие давления сыпучего тела парализуется с одной стороны трением, развивающимся в плоскости основания и в швах кладки под действием веса стенки, а с другой стороны — сцеплением кладки и заложением стенки в землю.

Если V — вес кладки и $R_0 \cos \varphi_0$ — горизонтальная слагающая давления сыпучего тела, то условие устойчивости против сдвига напишется так:

$$R_0 \cos \varphi_0 < f \times V = V \operatorname{tg} \varphi',$$



Черт. 41 bis.

где $f = \operatorname{tg} \varphi'$ — коэффициент трения (черт. 40), по плоскости сдвига обычно принимаемый:

- 1) в швах свежей кладки $\varphi' = 27^\circ$, $f = 0,5$;
- 2) в швах затвердевшей кладки $\varphi' = 35^\circ$, $f = 0,7$;
- 3) в плоскости подошвы, т.-е. трение кладки:
 - по сухой земле $\varphi^1 = 27^\circ - 33^\circ$ $f = 0,5 - 0,6$
 - по сырой земле $\varphi^1 = 19^\circ$ $f = 0,35$

Так как отношение $\frac{R_0 \cos \varphi_0}{V} = \operatorname{tg} \alpha$ — угла наклона равнодействующей этих давлений к перпендикуляру к плоскости сдвига, то условие устойчивости против сдвига требует, чтобы угол наклона равнодействующей к перпендикуляру плоскости сдвига был меньше угла трения

$$\frac{R_0 \cos \varphi_0}{V} = \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi' \dots \dots \dots (59).$$

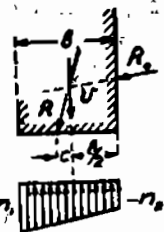
В этом условии устойчивости запасом прочности служит сила сцепления в швах кладки и отпор грунта на высоту заложения стенки.

Увеличение устойчивости против сдвига может быть повышено приданием уклона основанию и швам стенки так, чтобы передние ребра их были приподняты относительно задних (черт. 41); при таком устройстве направление равнодействующей давлений $R_0 \cos \varphi_0$ и V приближается к перпендикуляру относительно этих плоскостей, следовательно $\operatorname{tg} \alpha$ уменьшается.

Условия прочности. Вес V вышележащей кладки и давление R_0 сыпучего тела на высоту вышележащей части стенки, слагаясь между собой геометрически дают равнодействующую R (черт. 42), которая почти всегда вызывает в швах кладки или в основании стенки внецентренное сжатие.

Напряжение, развивающееся при этом как в швах кладки, так и в плоскости основания, определяется по формуле:

$$n = \left[\frac{V}{\omega} \pm \frac{M}{W} \right] \dots \dots \dots (60)$$



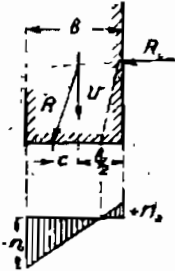
Черт. 42.

в которой ω — площадь шва или основания, W — момент сопротивления их, V — вертикальная слагающая равнодействующей R и M — момент равнодействующей относительно оси, проходящей через центр тяжести плоскости шва или основания.

Эпюра напряжений в этом случае будет очерчена по прямой (черт. 42), нулевая точка которой в зависимости от момента внецентренности может лежать вне пределов сечения стенки и внутри его. В последнем случае, вблизи задней грани стенки будут иметь место растягивающие напряжения, что если и допустимо — то в очень малых пределах (от 2 до 4 кг/см²). Поэтому общее правило в каменных и бетонных стенках требует, чтобы равнодействующая всех сил, приложенных к вышеле-

жащей части стенки, пересекала сечение стенки и основания внутри ядра сечения.

Для прямоугольного сечения стенки выражение (60) напряжения может быть преобразовано подставкой в него значений $M = V \cdot c$ $\omega = b \times 1 \text{ см}^2$ и $W = \frac{b^3 \cdot 1}{6} \text{ см}^3$ и тогда наибольшее напряжение на сжатие сечения будет определяться выражением вида:



Черт. 43.

$$n_1 = \frac{V}{b} \left(1 + \frac{6c}{b} \right).$$

Если равнодействующая давлений пересекает сечение на границе ядра сечения, то $c = \frac{1}{6} b$ и наибольшее напряжение будет:

$$n_1 = 2 \frac{V}{b}.$$

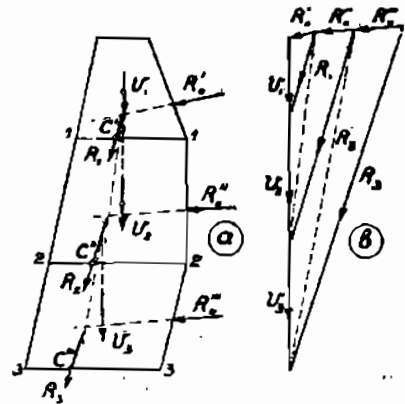
Если равнодействующая давлений пересекает сечение вне ядра сечения (черт. 43), то в расчет сжатия войдет только часть площади сечения, равная $3 \left(\frac{b}{2} - c \right)$ и наибольшее напряжение будет определяться величиной:

$$n_1 = \frac{2}{3} \frac{V}{0,5b - c}.$$

Уничтожение растягивающих напряжений может быть достигнуто срезанием нижней задней части стенки, как показано пунктиром на черт. 43. Такое срезание стенки мало нарушает устойчивость стенки, но значительно уменьшает внецентренность, так как центр тяжести сечения перемещается в сторону переднего ребра сечения.

Кривая давлений. Точка пересечения C (черт. 44) какого-либо шва с равнодействующей R веса кладки и давления сыпучего тела называется центром давления, а кривая, соединяющая центры давлений $C_1 - C_2 - C_3$, называется кривой давлений.

На черт. 44 сделано определение точек кривой давления в стенке с ломаным очертанием задней плоскости, для чего рассмотрено условие устойчивости в трех швах. Построение проведено путем последовательного сложения при помощи силового многоугольника (черт. 44) давлений R_0', R_0'', R_0''' , действующих на стенку, и весов V_1, V_2 и V_3 отдельных частей



Черт. 44.

стенки. Сложением сил V_1 и R_0' получена точка C' , точка кривой давления на шве 1—1; сложением сил R_1 , V_2 и R_0'' — точка C'' и далее сложением сил R_2 , V_3 и R_0''' — точка C''' . Кривая давлений, проходящая через эти точки, на чертеже не нанесена.

Эта кривая своим положением дает наглядное представление о степени устойчивости и прочности всей стены и каждой ее части. Согласно вышесказанного, кривая давлений в каменных стенках должна проходить в пределах ядра сечений во всех швах и составлять с нормальными к плоскостям швов угол α меньший угла трения.

Выведенные условия устойчивости и прочности подпорных стенок должны быть удовлетворены при любом профиле стены; последний же должен быть выбран так, чтобы стенка была экономически выгодна, т.е. объем ее был наименьшим.

§ 15. Рациональные формы стенок. Рациональная форма стенок зависит от вида и расположения сил, на нее действующих. Мы можем рассматривать эту задачу для наиболее простого случая давления одного сыпучего тела без нагрузки.

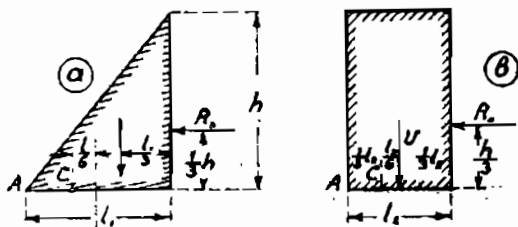
Давление сыпучего тела мы примем по выражению (22):

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta k^2 h^2 \sin \psi = \frac{1}{2} \delta \mu h^2,$$

где

$$\mu = k^2 \sin \psi.$$

Сопоставляя между собою треугольный и прямоугольный профили стенок, как предельное, мы можем рассматривать экономичность каждого из них в смысле удовлетворения условиям устойчивости и прочности при сохранении высоты и изменении только основания.



Черт. 45.

Треугольный профиль (чертеж 45-а) удовлетворит условию устойчивости, если будет удовлетворено условие:

$$\frac{1}{2} l_1 h \cdot \frac{2}{3} l_1 \delta_1 = m \frac{1}{2} \delta \cdot \mu h^2 \cdot \frac{1}{3} h,$$

откуда

$$l_1 = h \sqrt{\mu \frac{m \delta}{2 \delta_1}}.$$

Этот профиль удовлетворит требованию сжатия всего сечения, если будет удовлетворено условие прохождения равнодействующей через крайнюю точку ядра сечения:

$$\frac{1}{2} l_1 h \cdot \frac{1}{6} l_1 \delta_1 = \frac{1}{2} \delta h^2 \mu \frac{1}{3} h,$$

откуда

$$l_1 = h \sqrt{2\mu \frac{\delta}{\delta_1}}$$

В обоих выражениях δ и δ_1 — соответственно вес единицы объема сыпучего тела и кладки.

Из сопоставления выражений длины l_1 и l'_1 оснований профиля в обоих случаях можно видеть, что если принять коэффициент устойчивости $m=2$, то отношение длин l_1 и l'_1 будет:

$$l'_1 = l_1 \sqrt{2} = 1,41l_1.$$

Следовательно, если для этого профиля будет удовлетворено условие прочности, то будет удовлетворено условие устойчивости.

Перейдем к прямолинейному профилю (черт. 45 б).

Этот профиль удовлетворит условию устойчивости, если будет соблюдено условие:

$$l_2 h \cdot \frac{1}{2} \delta_1 = m \cdot \frac{1}{2} \delta \mu h^2 \cdot \frac{1}{3} h,$$

откуда

$$l_2 = h \sqrt{\frac{1}{3} \mu m \frac{\delta}{\delta_1}}$$

Этот профиль удовлетворит требованию прочности, т.е. только сжатию по всему сечению, если будет соблюдено условие:

$$l_2 h \cdot \frac{1}{6} l_2 \delta_1 = \frac{1}{2} \delta \mu h^2 \cdot \frac{1}{3} h,$$

откуда

$$l_2 = h \sqrt{\mu \frac{\delta}{\delta_1}}$$

Из сопоставления выражений длин l_2 и l'_2 можно видеть, что если даже принять $m=2$, то

$$l'_2 = l_2 \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,22l_2.$$

Следовательно, и в этом случае условие устойчивости будет соблюдено, если будет соблюдено условие прочности.

Остается сопоставить объемные отношения первого и второго профилей, удовлетворяющих условиям устойчивости и прочности.

Объем стенки треугольного профиля:

$$V_1 = \frac{1}{2} l_1 h = \frac{1}{2} h^2 \sqrt{2\mu \frac{\delta}{\delta_1}}$$

Объем стенки прямоугольного профиля:

$$V_2 = l_2' h = h^2 \sqrt{\mu \frac{\delta}{\delta_1}}$$

Отношение этих объемов:

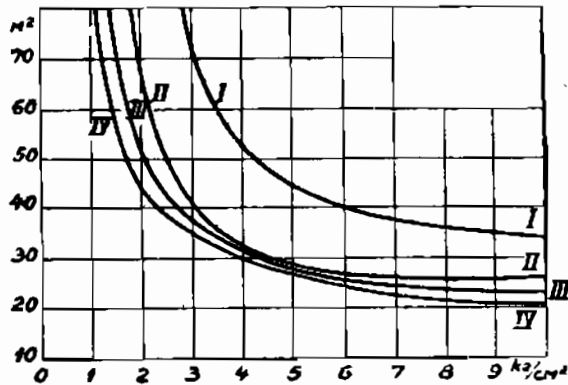
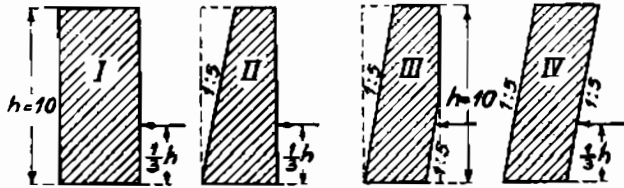
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} = 0,71,$$

отсюда

$$V_1 = 0,71 V_2,$$

т.е. объем треугольного профиля выгоднее объема прямоугольного.

Площадь основания треугольного профиля определена в функции высоты, следовательно прочности этого профиля во всех его сечениях по высоте будут одинаковыми и кривая давлений будет проходить во всех швах в расстоянии одной трети от края, тогда как в прямоугольном профиле это соотношение будет нарушено и сечения будут избыточны.



Черт. 46.

Осуществление треугольного профиля на практике встречает затруднения по конструктивным соображениям, обусловливаемым кладкой, необходимостью смятения острых углов и т. д.

Профиля близкие к треугольной [форме встречаются только в плотинах, где давление воды действительно нормально к поверхности стенки.

В других инженерных сооружениях придание подпорным стенкам треугольной формы вызывает большое стеснение лежащего перед ними пространства реки, проезда и т. д., поэтому в таких сооружениях применение этого профиля не делается, и он заменяется профилями типов, показанных на *черт. 46*.

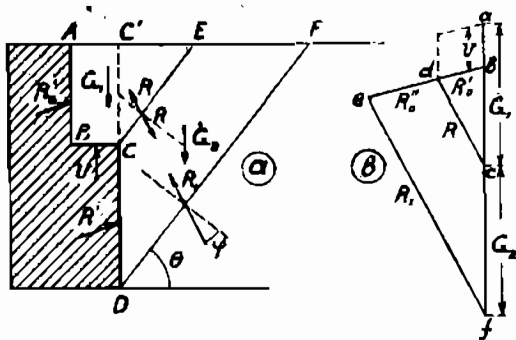
О сравнительной экономичности профилей стенок, показанных на *черт. 46*, можно судить по диаграммам ¹⁾, характеризующим изменение размеров стенок в плане (ординаты) в зависимости от величины принятых напряжений (абсциссы). Диаграммы на *черт. 46* перенумерованы соответственной нумерации профилей. Построение диаграмм сделано при одних и тех же высотах стенок, углах естественного откоса φ и при горизонтальной поверхности земли.

¹⁾ R. Petersen «Erddruck auf Stützmauern». 1924.

Из сопоставления диаграмм видно, что менее всего экономичны стенки с прямоугольным профилем (I). Профиля II, III и IV стенок мало разнятся между собой по своим размерам в плане и только при очень низких допускаемых напряжениях профиль IV дает несколько меньшие размеры, чем профили II и III.

Если же принять во внимание трудность производства работ по схеме III и IV, а также малую устойчивость профиля IV в незасыпанном состоянии, то следует признать, что наиболее соответствующим целям практики является профиль II стенки.

За невозможностью придавать уширение стенки путем выдвигания вперед передней грани стенки, на практике нередко уширяют основание стенки путем придания задней грани ее уступчатой формы (черт. 47).

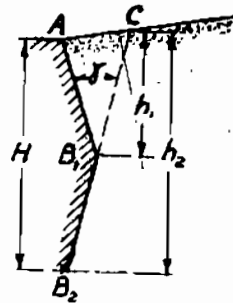


Черт. 47.

Учет давления сыпучего тела остается таким же как на стенку с прямой задней гранью DC' , что нетрудно видеть по следующим соображениям. Если представить, что под давлением сыпучего тела стенка сместится, то вследствие этого смещения образуется сдвиг по плоскостям DF и CE . Прилагая к этому случаю гипотезы Кулона, мы можем предположить, что часть призмы $ABCE$ будет находиться под действием сил: веса G_1 этой части призмы, давления R_0' сыпучего тела по грани AB стенки, вертикального давления V по грани BE и сопротивления R сыпучего тела по грани EC ; все эти силы образуют замкнутый многоугольник $abcd$ (черт. 47). В свою очередь часть призмы $ECDF$ будет находиться под действием сил: веса G_2 этой части призмы, давления R верхней части сыпучего тела по плоскости EC , сопротивления R_0'' стенки по плоскости CD и сопротивления R_1 сыпучего тела по плоскости DF ; все эти силы образуют замкнутый многоугольник $cfe'dc$ (черт. 47). Так как силы R_0' и R_0'' по условию трения по граням стенки должны иметь одинаковый наклон, сила R является в обоих многоугольниках общей и силы G_1 и G_2 обе направлены вертикально, то несомненно первый силовой многоугольник сливается со вторым, как показано на том же чертеже 47. Из чего видно, что полное давление R_0 сыпучего тела должно быть учитываемо по призме $C'DF$ как бы для стенки с задней плоскостью CD .

Сопоставляя этот профиль стенки с рассмотренными ранее, можно определенно указать, что по сравнению с прямоугольным профилем он находится в худших условиях, так как вследствие более легкого веса засыпки $ABC'S$ центр тяжести общего веса стенки (черт. 47/a) сместится вперед, что, конечно, ухудшает условие устойчивости и очень неблагоприятно отзовется на распределении напряжения по сечению в плане, вызывая очень часто растягивающее напряжение у заднего ребра стенки.

§ 16. Стенка с ломаным очертанием задней грани. В стенках с ломаным очертанием задней грани (черт. 48) расчет давления сыпучего тела осложняется вопросом о том, как распределяется это давление по грани AB_1 и по грани B_1B_2 . Решение этого вопроса может быть сделано приближенно на основании более или менее обоснованных допущений.



Черт. 48.

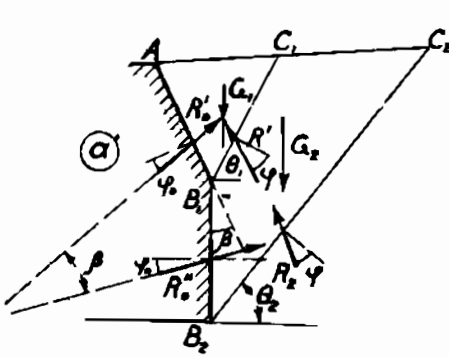
Некоторые авторы ¹⁾ допускают, что в этом случае расчет давления в каждой грани должен производиться относительно плоскости соответствующей этой грани. Так, например, для определения давления на грань B_1B_2 (черт. 48) плоскость этой грани должна быть продолжена до поверхности сыпучего тела, а само давление на грань B_1B_2 должно быть определено, как разница давлений по плоскости B_2C для высот h_1 и h_2 , соответствующих верхней и нижней точкам грани B_1B_2 , в общем виде это давление выражалось бы формулой (см. выраж. 22):

$$R_o'' = \frac{1}{2} \delta k^2 (h_2^2 - h_1^2) \sin \psi \dots \dots \dots (61)$$

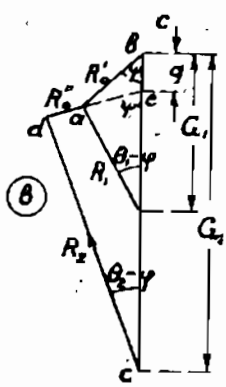
Определение величины этого давления может быть сделано также графическим способом Понселе.

Недостатком этого допущения является то, что в нем не учитывается влияние веса треугольника AB_1C на давление R_o'' по нижней грани.

Другой подход к решению этой задачи обосновывается на следующих



Черт. 49.



соображениях, Если предположить, что при бесконечно малом движении стенки, сползание сыпучего тела произойдет по некоторой плоскости B_2C_2 , то в момент предельного равновесия, спол-

зающая часть $AB_1B_2C_2$ (черт. 49) будет находиться в равновесии под действием силы своего веса G_2 , реактивных сил давлений на стенку R_o' , R_o'' и реактивной силы R_2 по плоскости B_2C_2 . По условию предельного равновесия: силы R_o' и R_o'' будут наклонены к граням стенки под углами $(90^\circ - \varphi_0)$ и сила R_2 к плоскости сползания B_2C_2 под углом $(90^\circ - \varphi)$; (φ_0 — угол

¹⁾ Resal, Poussée des Terres, 1903, стр. 157 и др.

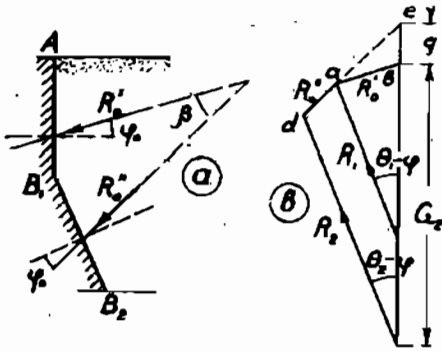
трения земли по стенке и φ — угол естественного откоса земли). Так как сползающая часть рассматривается в условии предельного равновесия, то действующие на нее силы должны образовывать замкнутый многоугольник $dabc$ (черт. 49 б).

Входящая в состав этого многоугольника сила R'_0 может быть определена обычным приемом Понселе, как давление на стенку с плоской гранью AB_1 при прямом очертании поверхности AD сыпучего тела. На черт. 51 произведено это построение, для чего через точку B_1 проведена основная прямая под углом $(\varphi + \varphi_0)$ к грани AB_1 , определена средняя пропорциональная $B_1F_1 = B_1G_1 = B_1D_1 \times B_1E_1$ и проведением

прямой $F_1C_1 \parallel$ основной линии определена плоскость сползания B_1C_1 . Как известно, построенный треугольник $B_1C_1F_1$ равновелик площади призмы сползания AB_1C_1 и подобен силовому треугольнику abc_1 , а потому

$$G_1 = \delta \times \text{плоч. } \triangle AB_1C_1 = \delta \times \text{плоч. } \triangle B_1C_1F_1$$

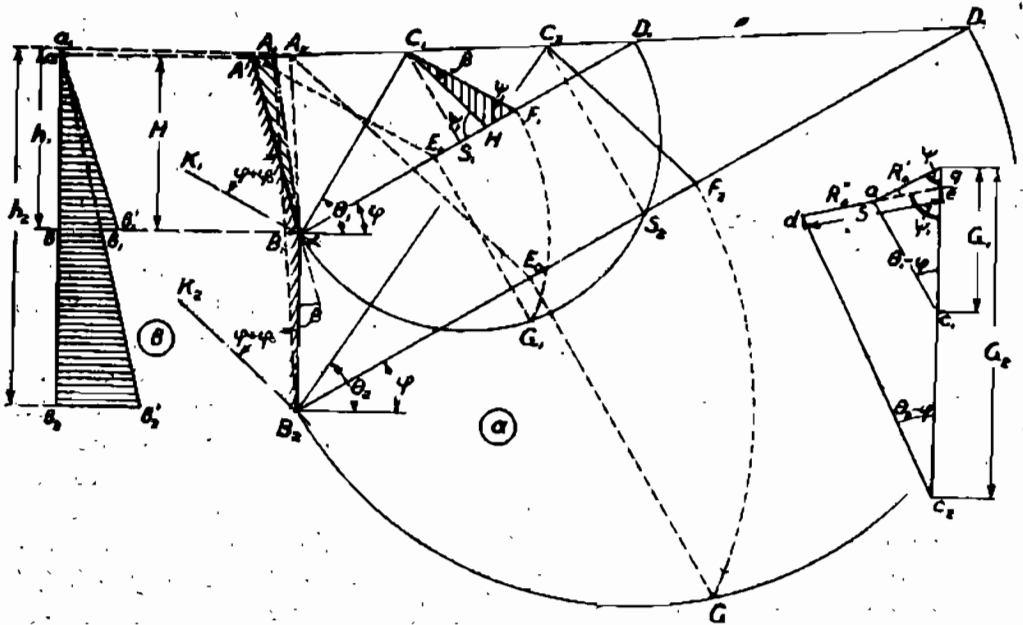
$$\triangle B_1C_1F_1 \sim \triangle abc_1$$



Черт. 50.

давление

$$R'_0 = \frac{1}{2} \delta_1 C_1 F_1^2 \sin \varphi$$



Черт. 51.

Применение того же приема для определения давления R'_0 невозможно, так как силовой многоугольник dac_1c_2 имеет форму четырех-

угольника. Для получения силового многоугольника в виде треугольника продолжают направление давления R_0'' до пересечения с направлением веса G в точке e . Если принять отрезок de за силу S_0 , то треугольник dec будет образован силами S_0, R_2 и весом $(G_2 - g)$ части призмы сползания. Таким образом, определение силы S_0 станет возможным, если будет определен отрезок de равный весу g .

Определение величины g делают на основании следующих геометрических соображений:

В треугольнике abe угол bae , образуемый направлениями сил R_0' и R_0'' , равен углу β , образуемому направлениями граней AB_1 и B_1B_2 стенки, что непосредственно следует из того, что эти обе силы наклонены под одним и тем же углом $(90^\circ - \varphi_0)$ к этим граням. Точно также основные линии B_1K_1 и B_2K_2 , наклоненные под углом $(\varphi_0 + \varphi)$ к граням стенки, образуют в своем пересечении угол β , а потому, если в полученном на черт. 51 треугольнике $B_1C_1F_1$ провести через точку C_1 линию C_1H параллельно основной линии B_2K_2 , то угол между прямыми C_1F_1 и C_1H также будет равен углу β . Таким образом треугольник C_1HF_1 , имеющий в своем составе углы β и ψ будет подобен силовому треугольнику bae , имеющему в своем составе те же углы ¹⁾.

Из подобия треугольника $B_1C_1F_1 \sim abc$, и $C_1HF_1 \sim abe$ непосредственно следует, что

$$\frac{g}{G_1} = \frac{be}{bC_1} = \frac{F_1H}{F_1B_1}$$

Помножая числитель и знаменатель на величину $\frac{1}{2} \delta \cdot C_1S_1$ получим:

$$\frac{g}{G_1} = \frac{F_1H}{F_1B_1} \cdot \frac{\frac{1}{2} \delta \cdot C_1S_1}{\frac{1}{2} \delta \cdot C_1S_1} = \frac{\delta \text{ площ. } \triangle C_1F_1H}{G_1} \dots \dots (62)$$

из чего следует, что величина g определяется площадью треугольника C_1F_1H , умноженной на величину δ веса земли.

Зная величину g , которую надо вычесть из общего веса G_2 призмы сползания, можно перейти к определению силы S_0 . Для этого надо площадь $AB_1B_2C_2$, определяющую вес O возможной призмы сползания, уменьшить на величину площади C_1HF_1 , определяющей вес g , это делается построением на грани AB_1 треугольника AB_1A_1 равновеликого треугольнику C_1HF_1 . После такого перестроения вес призмы сползания будет определяться весом призмы с четырехугольным основанием $B_2B_1A_1C_2$ равным $(G_1 - g)$. Вес этой призмы будет несколько меньше веса

¹⁾ Если угол образуемый гранями стенки будет не выпуклый, как показано на черт. 49, а вогнутый, как показано на черт. 50, то условие учета веса g не изменится, но он будет уже не вычитаться из общего веса G_2 призмы сползания, а прибавляться к нему. В соответствии с этим при построении по способу Понселе треугольника $B_1F_1C_1$ линия C_1H , параллельная основной линии B_2K_2 , пройдет не внутри этого треугольника, а вне его, правее линии C_1F_1 .

призмы B_2CC_2 , принимаемой первым вариантом (*черт. 48*), что отзывается на положении плоскости сползания, которая притягивается к стенке, и что служит к увеличению давления R_0 на последнюю.

После того, как будет введена поправка на величину веса g определение давления R_0 на грань B_1B_2 может быть сделано по разности отрезков de и ae силового многоугольника (*черт. 51 b*).

$$R_0'' = de - ae = S_0 - T_0.$$

Величина этого давления равна разности давления S_0 , определяемого отрезком de , и давления T_0 , определяемого отрезком ae , относящихся к нижней и верхней точкам грани B_1B_2 .

Определение величины этих давлений S_0 и T_0 может быть сделано приемом Понселе. И так как призма сползания, относящаяся к точке B_2 будет иметь форму четырехугольника $A_1B_1B_2C_2$, то для проведения построения Понселе, нужно спрямить стороны A_1B_1 и B_1B_2 , не нарушая веса всей призмы, что может быть сделано перестроением треугольника $A_1B_1B_2$ в равновеликий ему $A_2B_1B_2$ путем проведения линии $A_2B_1 \parallel A_1B_2$. Не трудно видеть, что при таком перестроении всякая призма $A_1B_1B_2C_2$, отсекаемая любой плоскостью B_2C_2 , будет равновелика призме $A_2B_2C_2$. Полученная точка A_2 служит исходной точкой для определения способом Понселе положения плоскости сползания B_2C_2 .

Это построение проведено на *черт. 51*, на котором A_2E_2 параллельна основной линии B_2K_2 , отрезок $B_2F_2 = \sqrt{B_2E_2 \times B_2D_2}$ и линия $F_2C_2 \parallel B_2K_2$. Согласно этого построения давление

$$S_0 = \frac{1}{2} \delta \cdot C_2 F_2^2 \sin \psi_1 \dots \dots \dots (63)$$

Что касается величины T_0 , то это давление относится к точке B_1 грани B_1B_2 и должно быть определено для призмы сползания с поправкой на вес g_1 а потому при определении этого давления T_0 за исходную точку для построения должна быть принята точка A_1 .

Из изложенного видно, что при этом способе определение величин S_0 и T_0 ведется из разных исходных точек A_1 и A_2 ; это указывает на то, что простой закономерности, как это имеет место при сплошной высоте стенки, в изменении давления по высоте грани B_1B_2 нет и очертание эпюры на протяжении ее не будет прямолинейно.

Так как вообще расхождение точек A_1 и A_2 между собой невелико, то в целях упрощения расчета и лучшего согласования можно принять их как бы совпадающими, что позволит считать давление на высоте грани B_1B_2 изменяющимся закономерно и выразить его в таком виде:

$$R_0'' = \frac{1}{2} \delta k_1^2 (k^2 - h_1^2) \sin \psi_1 \dots \dots \dots (64),$$

в этом выражении h — переменная высота по ребру B_1B_2 , измеряемая от принятой точки A_2 , а h_1 — расстояние точки B_1 от той же точки A_2 .

В соответствии с изложенным эпюра напряжений для стенки с лопатым очертанием будет иметь вид, показанный на *черт. 51b*. В пределах первой грани эпюра напряжений будет иметь очертание по треугольнику abb_1 , как это имеет место вообще в плоских стенках при плоской поверхности сыпучего тела. Прямая ab' , очерчивающая эту часть эпюры, определяется уравнением:

$$n' = \frac{dR'_0}{dh} = \delta \cdot k^2 h \sin \psi.$$

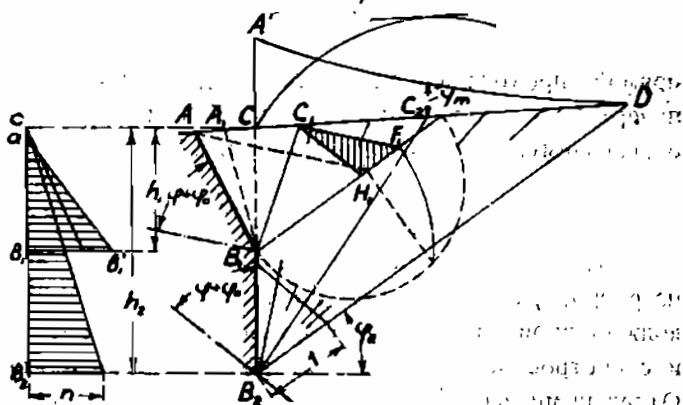
В пределах грани B_1B_2 стенки эпюра напряжений очерчивается также по прямой, определяемой уравнением:

$$n'' = \frac{dR''_0}{dh} = \delta k_1^2 h \sin \psi_1.$$

Это есть уравнение прямой, проходящей через точку a_2 , соответствующую точке A_2 , принятой общей для всей грани B_1B_2 .

Таким образом, при принятых допущениях, давление R'_0 на грань B_1B_2 определяется площадью трапеции $bb_1b'_2b_2$, центром тяжести которой определяется точка приложения давления R'_0 на эту грань.

Изложенный прием определения давления на грани ломаной стенки еще более усложняется при введении сосредоточенных давлений и местных загрузок поверхности земли. Для решения задачи в этом случае можно предложить использовать кривую единичных давлений (см. § 12), согласовав ее использование с некоторыми из положений настоящего параграфа.



Черт. 52.

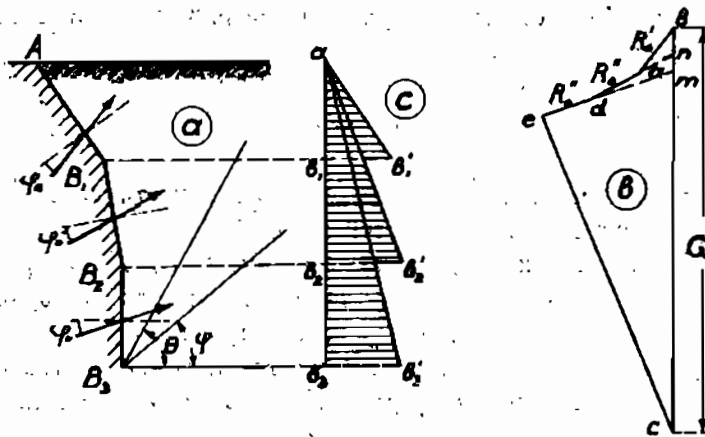
Определение давлений по верхней грани AB_1 стенки не представляет затруднения и проводится как для всякой плоской стенки при плоской поверхности земли. Что касается последующей грани B_1B_2 стенки, то для нее построение кривой единичных давлений должно быть относительно к плоскости B_2C (*черт. 52*), как определяющей наклон грани и проводится обычным способом. Однако, сюда должна быть включена поправка на влияние отсечаемой части AB_1C призмы сползания.

Этот учет может быть сделан исключением из общего веса призмы сползания веса g , как это было изложено выше в этом параграфе. Тогда давление по плоскости B_2C , вычисляемое по кривой единичных давлений, должно быть исправлено прибавлением влияния веса части A_1B_1C .

Таким образом, если ордината кривой единичных давлений, соответствующая плоскости сползания B_2C_2 , будет y_m , то полное давление на плоскость B_2C определится выражением (черт. 52):

$$S_0 = \frac{1}{2} \delta [CC_2 \cdot h_2 + AC_1 \cdot h_1] y_m \quad (65)$$

Нетрудно видеть, что для различных точек грани B_2B_1 влияние веса придатка A_1B_1C будет неодинаково, вследствие чего плоскости обрушения



Черт. 53.

не будут оставаться параллельными между собой, а потому эпюра напряжений не будет очерчиваться по прямой. Однако, это отклонение от прямой невелико и для целей практики может быть принято, что эпюра изменяется по

прямой, проходящей через точку c , соответствующую уровню точки C поверхности земли и имеющей наибольшую ординату на уровне точки B_2 определяемую величиной (см. форм. 52):

$$n = CC_2 \delta y_m$$

Что касается учета давления на стенку и ее грани от действия нагрузки, расположенной по поверхности сыпучего тела, то такое должно производиться по формулам § 12 с отношением их к плоскости B_2C и с построением по ним суммарной эпюры напряжений по данным § 13. Отдельными частями площади такой эпюры напряжений определяются давления на грани стенки и центрами тяжести этих частей определяются точки приложений давлений относительно граней.

Ниже приведен числовой пример определения давлений на стенку с использованием кривой единичных нагрузок.

Многогранная стенка. Выше был рассмотрен случай двугранной ломаной стенки, но могут быть случаи стенки многогранной. Очевидно, что с увеличением числа граней стенки (черт. 53) будет возрастать число сторон силового многоугольника, определяющего равновесие призмы сползания. Процесс определения давлений на отдельные грани такой стенки будет тот же, что и для двугранной стенки.

Определив давление R_0' на первую грань, переходят к определению давления R_0'' на вторую грань, рассчитывая это давление как разность

давлений отрезков ($dn - an$) (черт. 53b), далее определяют давление R_0' как разность отрезков ($em - dm$) и т. д.

На этом же чертеже 53c показана схема изменения эпюры напряжений для такого вида стенки.

§ 17. Влияние напластования земли за стенкой. Пусть имеется стенка с плоской задней гранью AB_1B_2 (черт. 54), на которую действует земля в виде двух слоев: верхнего толщиной AB_1 с весом δ_1 и углом естественного откоса φ_1 и нижнего толщиной B_1B_2 с весом δ_2 и углом естественного откоса $\varphi_2 < \varphi_1$.

Особенностью этого случая будет то, что плоскость сползания, очевидно, будет не прямой, а ломаной, в зависимости от разности углов естественного откоса; и так как по условию $\varphi_2 < \varphi_1$, то мы должны предположить, что плоскость сползания будет очерчена некоторой ломаной $B_2E_2C_2$, в которой часть B_2E_2 будет положе, чем часть E_2C_2 .

Исходя из принципов Кулона, мы можем сказать, что вес призмы сползания будет уравниваться реакциями по стенке: R_0' по плоскости AB_1 и R_0'' по плоскости B_1B_2 , соответственно наклоненных к стенке под углами $(90^\circ - \varphi_0')$ и $(90^\circ - \varphi_0'')$ и реакциями по земле: R' по плоскости E_2C_2 и R'' по плоскости B_2E_2 , соответственно наклоненных к этим плоскостям под углами $(90^\circ - \varphi_1)$ и $(90^\circ - \varphi_2)$.

Все эти силы должны образовывать замкнутый многоугольник, который на черт. 54b показан контуром $abcdea$.

Если рассматривать часть стенки высотой AB_1 , находящуюся под действием однородной массы земли, то давление R_0' на эту часть стенки не будет зависеть от нижележащей земли и может быть определено обычным построением Понселе, которым определится также направление плоскости сползания.

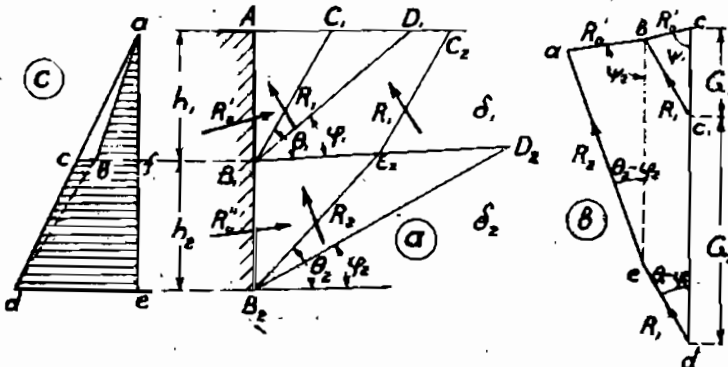
На силовом многоугольнике $abcdea$ этим давлениям будет соответствовать треугольник bcc_1 , в который входят реакция стены R_0' , вес призмы AB_1C_1 и R' реакция земли по плоскости B_1C_1 .

Переходя к рассмотрению части B_1B_2 стены, мы должны считать, что она находится под давлением призмы $B_1C_1C_2E_2B_2$ с приложенным к ней давлением R по плоскости B_1C_1 . Все силы, действующие на часть B_1B_2 стенки, как находящиеся в равновесии, должны образовывать замкнутый контур силового многоугольника, что мы и имеем по контуру $abcdea$. В этом контуре известны силы $bc_1 = R$ и $c_1d =$ весу призмы $B_1C_1C_2E_2B_2$; так что предстоит разложение равнодействующей этих сил на три направления: направление R_0'' — имеется по заданию, направления R' и R'' — неизвестны.

Естественнее всего предположить, что при движении всей стенки, сползание в пределах верхнего слоя произойдет по плоскости E_2C_2 , параллельной плоскости B_1C_1 , и направление давления R' будет параллельно давлению R . При этом предположении силы R и R' должны быть равны между собой, так как если бы это не имело места, то из условия равновесия по плоскости выходило бы, что верхняя призма $B_1C_1C_2E_2$ должна

была бы перемещаться; следовательно, в силовом многоугольнике отрезок bc_1 параллелен и равен отрезку de .

Таким образом, задача сводится к рассмотрению силового треугольника abe , в котором отрезок be = весу призмы $B_2B_1C_1C_2E_2$. Эту



последнюю можно рассматривать как треугольную призму $B_2B_1E_2$ с равномерной нагрузкой на ней в виде призмы $B_1C_1C_2E_2$, что разрешается просто из условия рассмотрения давления сы-

Черт. 54.

пучего тела со сплошной нагрузкой на нем (см. выраж. 53).

Из изложенного следует, что давление на верхнюю часть стенки определяется выражением (22):

$$R'_0 = \frac{1}{2} \delta_1 k_1^2 h_1^2 \sin \psi_1,$$

где h_1 — высота стенки от A до B_1 ; и давление на нижнюю часть R''_0 стенки определяется выражением (53):

$$R''_0 = \frac{1}{2} \delta_2 k_2^2 h_2 (2 h_0 + h_2) \sin \psi_2,$$

где h_2 — высота стенки от B_1 до B_2 .

Но так как $h_0 = h_1 \frac{\delta_1}{\delta_2}$, то давление R''_0 может быть переписано так:

$$R''_0 = \frac{1}{2} k_2^2 (2 \delta_1 h_1 h_2 + \delta_2 h_2^2) \sin \psi_2 \dots \dots \dots (66).$$

Эпюра напряжений, соответствующая этим давлениям, будет иметь вид, показанный на черт. 54/c, и будет состоять в верхней части из треугольника abf с наибольшей ординатой $bf = \delta_1 k_1^2 h_1 \sin \psi$ и в нижней части из трапеции $cfed$ с ординатами:

$$\begin{aligned} cf &= \delta_1 k_1^2 h_1 \sin \psi_2 \\ de &= \delta_2 k_2^2 \left(h_1 \frac{\delta_1}{\delta_2} + h_2 \right) \sin \psi_2 \dots \dots \dots (67). \end{aligned}$$

Она будет иметь уступ на уровне точки B , что объясняется тем, что с переходом в слой грунта B_1B_2 плоскость сползания изменяет своё направление.

В частном случае горизонтальной поверхности земли, вертикальной стенки и при условии $\varphi_0 = 0$ ординаты эпюры напряжений будут определяться величинами:

$$bf = \delta_1 h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

$$cf = \delta_1 h_1 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_2}{2} \right),$$

$$de = \delta_2 \left(h_2 + \frac{\delta_1}{\delta_2} h_1 \right) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_2}{2} \right).$$

Отношение ординат bf и cf будет:

$$\frac{bf}{cf} = \frac{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi_2}{2} \right)}.$$

Если $\varphi_1 = 35^\circ$ и $\varphi_2 = 30^\circ$, то это отношение:

$$\frac{bf}{cf} = \frac{\operatorname{tg}^2 28^\circ 30'}{\operatorname{tg}^2 30'} = \frac{0,543^2}{0,5774^2} = \approx 0,9,$$

что свидетельствует о значительном нарастании давления при слабом нижнем слое земли.

В действительности, повидимому, резкого скачка в эпюре напряжения не будет, он будет смягчен условиями перехода из одного слоя в другой, но во всяком случае очертание эпюры должно быть принято по линии bd (черт. 53/с) так, чтобы ордината de сохранила свою величину.

§ 18. Влияние воды. Нередко случается, что стенки, ограждающие землю, бывают погружены в воду, как, например, это имеет место в набережных, шлюзах и т. д. Когда стенка погружена в воду и последняя распространяется как с передней, так и с задней стороны ее, то давление воды на стенку взаимно уравнивается и вводить его в расчет нет надобности. Но вода, проникая в землю, не только оказывает давление на стенку, но она также понижает коэффициенты трения как внутреннего сыпучего тела, так и трения его по поверхности стенки, а затем своим давлением на частицы сыпучего тела понижает их вес и тем уменьшает давление на стенку. Худшим случаем действия воды будет тот, когда вода будет сосредоточена только сзади стенки, внутри сыпучего тела; этот случай мы и рассмотрим ниже.

Давление самой воды на стенку при установившемся уровне ее определяется по законам гидростатики величиной:

$$W = \frac{1}{2} \delta h_2^2 = \frac{1}{2} 1000 h^2,$$

где δ — вес куб. метра воды = 1000 кг.

Влияние ее на снижение коэффициентов и внутреннего трения земли и трения земли по стенке учитывается выбором соответствующих значений углов φ и φ_0 ; обычно угол φ_0 трения земли по стенке в этом случае принимается равным нулю.

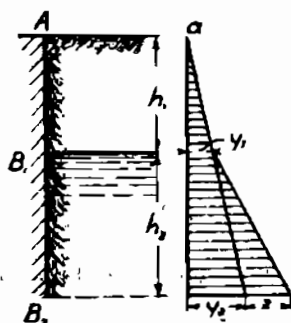
Влияние давления воды на снижение давления земли может быть учитываемо как отрицательное давление. Если давление сыпучего тела определяется выражением:

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta_1 k^2 h^2 \sin \psi,$$

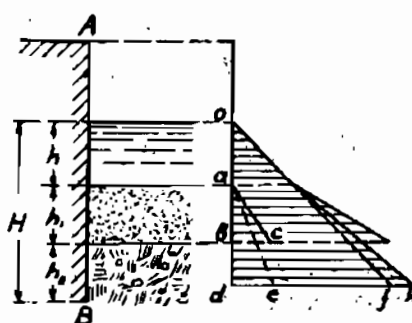
то уменьшение давления от того же объема сыпучего тела должно быть учитываемо выражением:

$$-R_0' = \frac{1}{2} \delta k^2 h^2 \sin \psi = \frac{1}{2} 1000 k^2 h^2 \sin \psi.$$

Но так как частицы земли не заполняют всего объема и между ними остается 30% — 45% пустот¹⁾, то снижение объемного давления



Черт. 55a.



Черт. 55b.

должно быть исправлено введением в последнее выражение коэффициента пустотности α по величине равного 55 или 70 процентам, а потому

$$-R_0' = \alpha \cdot \frac{1}{2} \delta k^2 \cdot h^2 \sin \psi.$$

В соответствии с изложенным для случая давления земли, находящейся на высоте h_2 в воде (черт. 54), эпюра напряжений по высоте стенки построится так: давление сыпучего тела, как такового, будет распространяться на всю высоту $H = h_1 + h_2$ стенки и ординаты эпюры, соответствующие этому давлению, будут определяться величинами:

$$y_1 = \delta_1 k^2 h_1 \sin \psi$$

$$y_2 = \delta_1 k^2 (h_1 + h_2) \sin \psi.$$

Начиная с уровня h_1 , на стенку начнет действовать давление воды и одновременно последует снижение давления сыпучего тела от взвешивания его частиц водой. Это изменение давления будет характеризоваться прямой, ординаты которой определяются суммой:

$$z = \delta h_2 - \alpha \delta k^2 h_2 \sin \psi = \delta h_2 (1 - \alpha k^2 \sin \psi).$$

Таким образом, полная ордината эпюры напряжений на глубине $h_1 + h_2$ определяется выражением:

$$y_2 + z = \delta_1 k^2 h_1 \sin \psi + h^2 [\delta + k^2 \sin \psi (\delta_1 - \alpha \delta)] \dots \dots \dots (68).$$

Если вода покрывает землю, как это часто бывает с передней стороны стенок набережных (черт. 55b), то учет влияния ее на давление земли производится по соображениям, изложенным выше.

¹⁾ Terzaghi «Erdbaumechanik», изд. 1925, стр. 11.

Предположим, что земля под водой состоит из двух слоев с разными коэффициентами внутреннего трения φ_1 и φ_2 , из которых $\varphi_2 > \varphi_1$, тогда эпюра напряжений для давления одной земли определяется ординатами:

$$bc = \delta' h_1 k_1^2 \sin \psi_1 = \delta' h_1 m_1$$

$$de = (\delta' h_1 + \delta'' h_2) k_2^2 \sin \psi_2 = (\delta' h_1 + \delta'' h_2) m_2 \dots (68 \text{ bis}),$$

где $m_1 = k_1^2 \sin \psi_1$ и $m_2 = k_2^2 \sin \psi_2$.

Полная же эпюра от суммарного давления воды и земли будет очерчена ломаными и наибольшая ордината ее будет слагаться из

$$\text{влияния воды } df = \delta H,$$

влияния сыпучего тела $fk = (\delta' h_1 + \delta'' h_2) m_2 - (\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) m_2 \delta$, где α_1 и α_2 — коэффициенты пустотности в обоих слоях земли.

§ 19. Пример 4. Расчету подлежит каменная стенка набережной; очертание стенки показано на черт. 56, высота стенки от дна 5,00 м, глубина заложения основания 2,00 м, глубина воды 1,50 м; дно со стороны воды водопроницаемо; поверхность набережной горизонтальна и на ней находятся два сосредоточенных давления весом по 11000 кг, положения которых показано на том же чертеже.

При расчете принято, что угол естественного откоса со стороны набережной $\varphi = 30^\circ$, угол естественного откоса смоченного грунта со стороны воды $\varphi_1' = 20^\circ$, угол трения грунта по кладке $\varphi_0 = 0$.

Устойчивость и прочность стенки проведена в ее характерных швах, а именно: в шве *aa* на глубине 2,5 м от верха стенки, где имеет место излом профиля стенки, в шве *bb* на глубине 3,5 метра на высоте уреза воды, в шве *cc* на глубине 5,00 м, на уровне дна и в основании *dd* на глубине 7,00 метров.

В нижеследующей таблице «А» исчислены веса отдельных частей кладки в соответствии с делением ее указанными швами, а также вычислены моменты этих весов относительно переднего ребра шва, отделяющего каждую часть. При расчете веса было принято, что вес одного кубического метра кладки равен 2400 кг.

ТАБЛИЦА «А»

Шов	Объем кладки в м ³	Вес кладки в кг.	Плечо ц. тяж. относительно задн. грани	Момент относительно передней грани в кг. м.
<i>a — a</i>	$\frac{1}{2} (1,0 + 3,25) 2,5 = 5,31$	12744	1,70 м	12744 (3,25 — 1,70) = 19753
<i>b — b</i>	$\frac{1}{2} (3,25 + 3,55) 1,0 = 3,4$	8160	1,70 »	8160 (3,55 — 1,70) = 15096
<i>c — c</i>	$\frac{1}{2} (3,55 + 4,00) 1,5 = 5,66$	13584	1,90 »	13584 (4,0 — 1,90) = 28526
<i>d — d</i>	$4,0 \times 2,0 = 8,0$	19200	2,00 »	19200 (4,0 — 2,00) = 38400
	Полный вес	53688		

Моменты тех же весов кладки относительно нижеследующих швов определяются величинами:

шов $b-b$

$$M_b = 19753 + 15096 + 19753 \cdot 0,30 = 40775 \text{ кг м};$$

шов $c-c$

$$M_c = 40775 + 28526 + (19753 + 15096) \cdot 0,45 = 85003 \text{ кг м};$$

шов $d-d$

$$M_d = 85003 + 38400 = 123403 \text{ кг м}.$$

Давление земли со стороны набережной определялось в предположении, что вес одного кубического метра ее равен 1800 кг.

Величина давления на верхнюю скошенную грань определена из построения Понседе, которое произведено на *черт. 5б*; и так как линия естественного откоса, проведенная из точки «а» задней грани едва захватывает положение первого груза, то давление последнего на эту часть стенки не принималось в расчет.

Согласно форм. 20 величина давления на эту часть стенки

$$R_0 = \frac{1}{2} 1800 \cdot 2,15 \cdot 1,85 = 3580 \text{ кг}$$

и направлено нормально к грани Aa .

Так как грань стенки Aa наклонена к горизонту под углом β , тангенс которого $= \frac{2,5}{1,5} = 1,666\dots$, то

$$\beta = 31^\circ, \quad \sin \beta = 0,857, \quad \cos \beta = 0,515.$$

В соответствии с этим давление R_0 на стенку разлагается на
 вертикальное $= 3580 \cdot 0,515 = 1844 \text{ кг}$,
 горизонтальное $= 3580 \cdot 0,857 = 3068 \text{ кг}$.

Моменты этих давлений относительно передней грани шва будут:

вертикал. давления $M_0 = +1844 \times (3,25 - \frac{1}{3} 1,5) = 5071 \text{ кг м}$,

горизонт. $M_1 = -3068 \times \frac{1}{3} 2,50 = -2546 \text{ кг м}$.

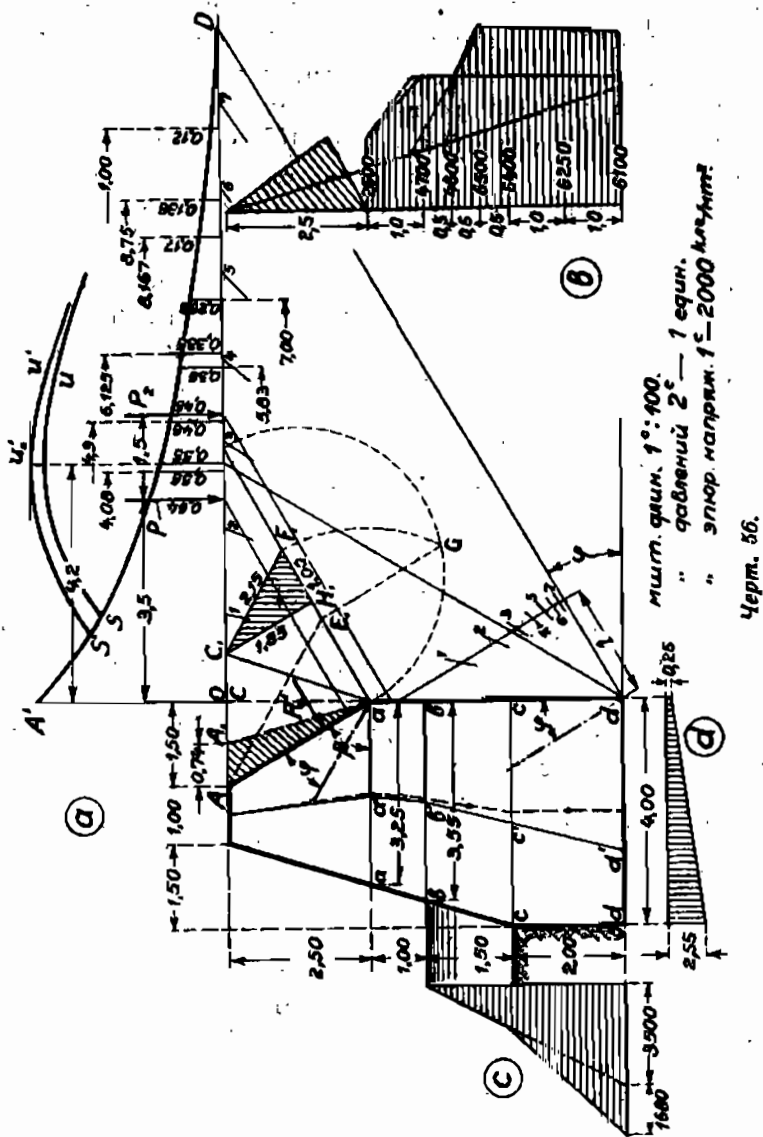
Точка приложения равнодействующей давлений по шву Aa относительно передней грани его определяется из условия:

$$X = \frac{19753 + 5071 - 2546}{12744 + 1844} = 1,53 \text{ м},$$

т.е. давление проходит в средней трети.

Давление земли на следующую грань ad стенки определено с учетом влияния излома.

Влияние излома учтено путем графического построения (см. § 16). Согласно этого построения треугольник $C_1F_1H_1$, образуемый прямыми



параллельными основным линиям и имеющий площадь $\frac{1}{2} \cdot 1,00 \cdot 1,85 = 0,925$ кв. м, подлежит вычету из площади призмы сползания, что и проведено путем построения на чертеже треугольника aAA_1 , площадью равного 0,925 кв. м. В соответствии с этим построением площадь $\triangle aA_1C$,

входящая в вес призмы сползания, действующей на грань ad , определяется величиной:

$$\text{вес } A_1Ca = 1800 \left(\frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 1,5 - 0,925 \right) = 1800 \cdot 0,950 = 1710 \text{ кг.}$$

Определение величины давления на отдельные части грани ad стенки произведено при помощи эпюры напряжений. Сама эпюра напряжений, как имеющая ломаное криволинейное очертание, построена по точкам из расчета давлений для различных высот стенок, что сделано при помощи кривой единичных нагрузок (см. § 13). Построение этой кривой $A'D$ проведено на *черт. 56*; при помощи ординат этой кривой построена кривая su , своей вершиной определяющая положение плоскости сползания с наибольшим давлением без учета влияния придатка A_1Ca к призме сползания, а затем уже построена кривая $s'u'$, в которой учтено влияние указанного придатка путем прибавления к ординатам кривой su дополнительных частей ординат кривой $A'D$ по соотношению площади придатка A_1Ca и площади единичной части $Cd1$.

$$\frac{\text{плоч. } A_1Ca}{\text{плоч. } Cd1} = \frac{0,950}{\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1,5} = 0,181.$$

Вершиной этой кривой определяется площадь сползания с наибольшим давлением от одного сыпучего тела; ордината кривой $A'D$, соответствующая этой плоскости сползания, $= 0,55$ и отстоит на расстоянии $4,2$ от грани Cd .

Давление самого сыпучего тела на грань Cd стенки при разных высотах h ее определена по форм. 51

$$R_a = \frac{1}{2} \frac{1800 \cdot 4,2}{7,0} 0,55 h^2 + 0,950 \cdot 1800 \cdot 0,55 = 297 h^2 + 940;$$

значения величин этих давлений приведены в таблице «В».

Величины давлений на стенку, вызываемые одновременным действием земли и сосредоточенных грузов, определены по формуле 56.

При учете давления от одного первого груза

$$R_p = \left(\frac{1}{2} 1800 \cdot 3,5 h + 1800 \cdot 0,950 + 11000 \right) y_x = (3150 h + 12700) y_x \text{ кг,}$$

входящая в это выражение ордината y_x единичной кривой определялась в зависимости от высоты — h по расстоянию (см. форм. 50):

$$X = \frac{3,5 \cdot 7}{h} = \frac{24,5}{h};$$

при учете давления от обоих грузов давление

$R_p = \left(\frac{1}{2} 1800 \cdot 5 h + 1800 \cdot 0,950 + 2 \cdot 11000 \right) y_{\text{в}} = (4500 h + 23700) y_{\text{в}} \text{ кг,}$
 в этом выражении величина ординаты y_x определялась по расстоянию:

$$X = \frac{5 \cdot 7}{h} = \frac{35}{h}.$$

В таблице «В» сделана сводка величин давления, определенных по указанным формулам при различных высотах h стенки.

ТАБЛИЦА «В»

Высота h	Давление от одной земли	Давление с одним сосре- доточенным грузом				Давление от 2-х сосредото- ченных грузов			
	R_q	x	y	Давл. R_p	Ординарн. эпюр напр	x	y	Давл. R_p	Ординарн. эпюр напр.
2,5	2.796	9,8	0,10	2.057	—	—	—	—	—
3,0	3.613	8,167	0,17	3.766	3.416	—	—	—	—
3,5	—	7,00	0,258	6.122	4.712	10	0,085	3.946	3.786
4,0	5.692	6,125	0,335	8.450	4.656	8,75	0,138	5.839	6.081
5,0	8.365	4,9	0,46	13.087	4.637	7,00	0,258	11.920	6.336
6,0	11.632	4,08	0,56	17.696	4.609	5,83	0,36	18.256	6.054
7,0	15.493	3,50	0,64	22.240	4.544	5,0	0,445	24.310	—

В той же таблице вычислены ординаты эпюр напряжений по высоте стенки от совместного действия земли и сосредоточенных грузов; ординаты этих эпюр определены по выражениям:

$$\text{ординаты} = \frac{\text{разность давлений}}{\text{разность высот}} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$$

На *черт. 56/в* по вершинам этих ординат построены кривые, очерчивающие эти эпюры напряжений.

Построенные эпюры напряжений позволяют вычислить давления на отдельные части стенки и моменты, вызываемые этими давлениями относительно швов кладки стенки. Эти вычисления проведены в таблице «С», в которой выписаны: ординаты эпюр напряжений, площади отдельных частей эпюры, плечи их относительно подошвы части и вычислены моменты их относительно подошвы каждой части.

ТАБЛИЦА «С»

Части	Основные размеры	Площади кг	Плечи метр.	Моменты кг метр.
I	2.600 . 1,00	2.600	$\frac{1}{2} \cdot 1,00 = 0,50$	— 1.300
	$(4.700 - 2.600) \cdot \frac{1}{2} 1,00$	1.050	$\frac{1}{8} \cdot 1,00 = 0,33$	— 347
II	4.700 . 0,50	2.350	$\frac{1}{2} \cdot 0,50 = 0,25$	— 588
III	4.600 . 0,50	2.300	$\frac{1}{2} \cdot 0,50 = 0,25$	— 575
	$(6.500 - 4.600) \cdot \frac{1}{2} 0,50$	475	$\frac{1}{8} \cdot 0,50 = 0,167$	— 793
	6.400 . 0,50	3.200	$\frac{1}{2} \cdot 0,50 = 0,25$	— 800
IV	6.250 . 1,00	6.250	$\frac{1}{2} \cdot 1,00 = 0,50$	— 3.125
V	6.100 . 1,00	6.100	$\frac{1}{2} \cdot 1,00 = 0,50$	— 3.050

Вышепроизведенные вычисления давлений и моментов на отдельные части стенки позволяют вычислить моменты относительно отдельных характерных швов стенки:

1) шов $b-b$

$$M_b = 5071 + 1844 \cdot (3,55 - 3,25) - 2546 - 3068 \cdot 1 - 1300 - 347 = \\ = 5624,2 - 7261 = -1637 \text{ кг м};$$

2) шов $c-c$

$$M_c = -1637 + 1844 \cdot (4,00 - 3,55) - (3068 + 2600 + 1050) \cdot 1,50 - \\ - 588 - 2350 \cdot 1,00 - 575 - 793 - (2300 + 475) \cdot 0,50 - 800 = \\ = -17377 \text{ кг м};$$

3) шов $d-d$

$$M_d = -17377 - (3068 + 2600 + 1050 + 2350 + 2300 + 475) \cdot 2,00 - \\ - 3125 - 6250 \cdot 1,00 - 3050 = -53500 \text{ кг м}.$$

Давление на стенку со стороны воды складывается из давления одной воды до уровня дна и давления от совместного действия воды и земли до уровня подошвы стенки.

$$\text{Давление воды на стенку } R_w = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 1000 \sqrt{1,5^2 + 0,45^2} = 1185 \text{ кг}$$

$$\text{Горизонтальная слагающая этого давления} = \frac{1}{2} 1,5^2 \cdot 1000 = 1125 \text{ кг}$$

$$\text{Плечо этого давления} = \frac{1}{8} \sqrt{1,5^2 + 0,45^2} = 0,52 \text{ м}$$

Момент этого давления относительно шва:

$$M = 1185 \cdot 0,52 = + 616 \text{ кг м.}$$

Давление на фундаментальную часть стенки, по условию водопроницаемости грунта определяется следующими величинами:

$$\text{давление воды } R_w = \frac{1}{2} \cdot 3,5^2 \cdot 1000 = 6125 \text{ кг;}$$

давление грунта в соответствии с форм. 68 bis

$$R_g = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot (1800 - 0,6 \cdot 1000) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{20^\circ}{2} \right) = 1680 \text{ кг,}$$

где 0,6 — коэффициент пустотности.

Момент этих давлений относительно подошвы стенки определяется выражением:

$$M'_d = 6125 \cdot \frac{3,5}{3} + 1680 \cdot \frac{2,0}{3} = + 8267 \text{ кг м.}$$

Вычисленные моменты, величины давлений и веса кладки позволяют определить положение равнодействующих относительно характерных швов стенки:

1) шов $b - b$

$$\text{сумма мом.} = + 40775 - 1637 = 39138 \text{ кг м.}$$

$$\text{вертик. слаг. равнод.} = 12744 + 8160 + 1844 = 22748 \text{ кг;}$$

$$\text{горизонт. слаг. равнод.} = 3068 + 2600 + 1050 = 6718 \text{ кг}$$

$$\text{точка прилож. равнод.} = \frac{39138}{22748} = 1,72 \text{ м}$$

$$\text{тангенс угла накл. равнод.} = \frac{6718}{22748} = 0,296;$$

2) шов $c - c$

$$\text{сумма мом.} = 85003 - 17377 + 616 = 68242 \text{ кг м}$$

$$\text{вертик. слаг. равнод.} = 22748 + 13584 = 36332 \text{ кг}$$

$$\text{горизон. слаг. равнод.} = 6718 + 2300 + 475 + 3200 = 12693 - 1185 = \\ = 11508 \text{ кг}$$

$$\text{точка прилож. равнод.} = \frac{68242}{36332} = 1,88 \text{ м}$$

$$\text{тангенс угла накл. равнод.} = \frac{11508}{36332} = 0,317;$$

3) основание $d - d$

$$\text{сумма момент.} = 123403 - 53500 + 8267 = 78170 \text{ кг м}$$

$$\text{верт. слаг. равнод.} = 36332 + 1920 = 55532 \text{ кг}$$

$$\text{гориз. слаг. равнод.} = 12643 + 6250 + 6100 - 6125 - 1680 = 18238 \text{ кг}$$

$$\text{точка прилож. равнод.} = \frac{78170}{55532} = 1,44 \text{ м}$$

$$\text{тангенс угла наклона равнод.} = \frac{18238}{55532} = 0,33$$

Из произведенного расчета видно, что кривая давлений, очерченная на *черт. 56/a* точками a_1, b, c, d_1 проходит всюду в пределах ядра сечения и что углы наклонов равнодействующих к нормальям плоскостей швов менее углов трения кладки по кладке и кладки по грунту, а потому устойчивость стенки обеспечена.

Коэффициент устойчивости на опрокидывание:

$$m = \frac{123403 + 8267}{53500} = 2,4 > 2,$$

т.е. больше двух.

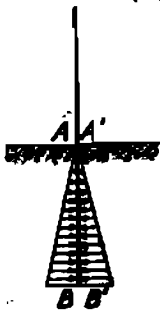
Напряжение грунта в подошве стенки определяется выражением (60):

$$n = \frac{55532}{4,0 \times 1,0} + \frac{55532 \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 1,44 \right) 6}{4^2 \cdot 1} = 25560 \text{ кг/м}^2 = 2,56 \text{ кг/см}^2$$

допустимость такого напряжения зависит от качества грунта.

Г И Б К И Е С Т Е Н К И.

§ 20. Обоснование расчета. Тонкая гибкая пластинка, погруженная в землю и предоставленная самой себе, уже испытывает напряжение по поверхности $A'B'$ и AB (*черт 57*) от давления на них земли, которое, как известно, пропорционально глубине погружения и распределение которого по высоте пластинки определяется эпюрой напряжений, имеющей форму треугольника. Это напряжение имеет место с той и другой стороны пластинки, а потому взаимно уравновешивается.

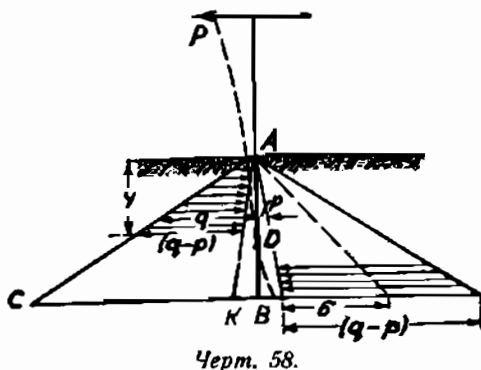


Черт. 57.

Под действием каких-либо боковых сил, например, силы P (*черт. 58*), пластинка будет изгибаться, чем ее работа отличается от работы жестких стенок, при чем изгиб будет распространяться также на ее часть AB , погруженную в землю, вследствие чего пластинка будет стремиться повернуться вокруг некоторой точки D . Эта точка D не может совпадать с низом пластинки B , так как при этом предположении момент, вызываемый действием силы P , ничем не был бы уравновешен, она не может совпадать со серединой участка AB , так как такое положение точки D соответствует заделке при действии на нее только момента; следовательно, эта точка D занимает некоторое промежуточное положение на нижней части участка.

Вследствие стремления пластинки повернуться около точки D , верхняя часть AD будет давить на землю и вызовет в ней развитие пассивного сопротивления, которое по общему закону должно возрастать пропорционально глубине. Так как с противоположной стороны одновременно имеет место активное давление земли, то все точки по высоте пластинки на участке AD будут находиться под действием двух взаимно - противоположных давлений земли: пассивного — q и активного — p .

Вследствие того же поворота пластинки нижняя часть ее DB начнет давить на землю в сторону, противоположную давлению верхней части, что вызовет пассивное сопротивление земли, которое будет нарастать в зависимости от глубины погружения отдельных точек; однако, это пассивное сопротивление может и не достигать своего наибольшего значения, так как степень развития напряжений по высоте этой части DB зависит от положения точки D , высоты h и от характера развития эпюры напряжений в верхней части AD .



Если бы мы имели дело с перемещением жесткой пластинки параллельно самой себе, то нарастание эпюр напряжений активного и пассивного давлений было бы пропорционально глубине h погружения точек, и разница напряжений $(q - p)$ определялась бы сложением прямых AC и AK (черт. 58). В общем виде эта разница напряжений могла бы быть выражена так:

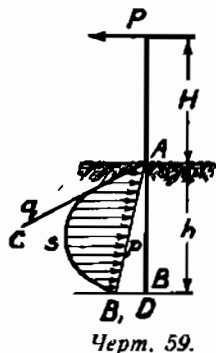
$$q - p = mh \dots \dots \dots (69),$$

где m — коэффициент, зависящий от очертания земли, ее физических свойств и т. д.

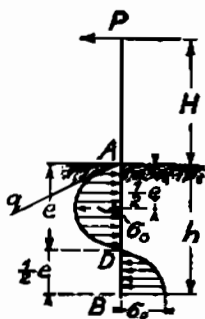
Для частного случая горизонтальной поверхности земли и горизонтального направления ее давления на вертикальную пластинку ($\varphi_0 = 0$) этот коэффициент определяется выражением:

$$m = \delta \left[\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \dots \dots (70)$$

Если же предположить, что та же стенка перемещается, вращаясь около точки B , как шарнира (черт. 59), то при таком перемещении точка B , как неподвижная, не будет вызывать пассивного сопротивления со стороны земли, все же остальные точки плоскости AB будут вызывать его. Таким образом, все точки по высоте плоскости AB , как и в предыдущем случае, будут находиться под действием разницы активного и пассивного напряжений, но развитие этой разницы напряжений будет иное. Повидимому, в этом случае эпюра напряжений пассивного давления будет изменяться по некоторой кривой ASB , которая в верхней части будет иметь своей касательную линию AC пассивного напряжения, а затем, постепенно отклоняясь, в нижней части начнет быстро приближаться к прямой AB_1 , которую пересечет в точке B_1 . Таким образом, разница пассивного и активного давления по высоте плоскости AB определится заштрихованной плоскостью ASB_1 .



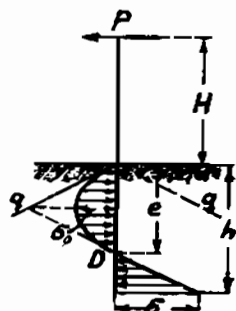
Аналогичное явление имеет место и при вращении плоскости AB вокруг некоторой точки D (черт. 62), которая является как бы неподвижным шарниром. Верхняя часть ее AD будет находиться под действием суммарного напряжения, изменяющегося по некоторой кривой, имеющей ординаты, равные нулю у поверхности земли и у точки D . В нижней части ее будет иметь место аналогичное явление; нарастание напряжений будет происходить по некоторой кривой DS_1 , которая будет иметь наибольшую ординату BS_1 внизу плоскости и будет иметь общую касательную с кривой AD в точке D .



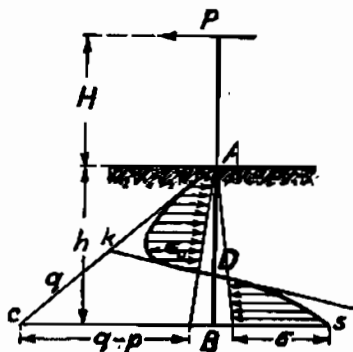
Черт. 60.

В этом предположении об изменении суммарной эпюры напряжений по кривым остается невыясненным вопрос о форме и распространении этих кривых. Некоторые авторы принимают очертание их по симметричным закономерным кривым: по синусоиде ¹⁾ или параболе ²⁾. С таким предположением согласиться нельзя.

Если предположить, как это делает проф. Белзецкий, что эпюра напряжений изменяется по симметричной синусоиде (черт. 60), то в этом случае наибольшие напряжения σ_0 и σ будут равны, а потому вся эпюра, связанная одним общим уравнением, будет иметь одно свободное переменное, вследствие чего нельзя удовлетворить двум условиям равновесия статики, что сумма проекций на горизонтальную ось и сумма моментов всех сил равна нулю. Кроме того выбор такой кривой с равными напряжениями σ и σ_0 делает опасным напряжение верхней части σ_0 , так как допускаемое сопротивление грунта в верхней части меньше, чем в нижней; с этой точки зрения, такое развитие напряжений представляется неестественным.



Черт. 61.



Черт. 62.

Проф. G. Prudon, приняв для верхней части изменение эпюры напряжений по параболе, в нижней части принял очертание эпюры напряжений по касательной к указанной параболе в точке D (черт. 61). Этим он достиг того, что напряжение $\sigma > \sigma_0$, но и при этом предположении напряжение σ связано уравнением касательной к верхней кривой и находится в определенном отношении к σ_0 , зависящем от отношения $(h - l) : l$, а потому очертание всей

касательной к верхней кривой и находится в определенном отношении к σ_0 , зависящем от отношения $(h - l) : l$, а потому очертание всей

¹⁾ Проф. С. И. Белзецкий. „Статика сооружений“ 1914 г., стр. 83.

²⁾ Проф. G. Prudon. Genie Civil. 1926 г. № 5, стр. 117.

эпюры будет связано одним свободным переменным, чем нельзя удовлетворить двум условиям статики.

Очевидно, что кривые, очерчивающие эпюру, должны быть разные и верхняя кривая должна быть асимметрична, с большим нарастанием в своей нижней части (черт. 62). Решить задачу с такими асимметричными кривыми не представляется возможным, поэтому вполне понятным является предположение, делаемое в целях упрощения расчета, в том смысле, чтобы принять очертание эпюры по прямым.

В дальнейшем мы будем исходить из предположения, что в верхней части AD эпюра напряжений будет нарастать до некоторой точки K по прямой AK , ординаты которой удовлетворяют условию (69) предельного значения разности пассивного и активного давления:

$$(q - p) = \sigma y.$$

В точке K эпюра будет иметь излом, начинает убывать, и дальше имеет очертание по прямой KF , пересекающей ось плоскости AD в точке D . При таком очертании эпюры ординаты ее в точке K и внизу у точки B будут больше, чем при очертании по кривым, следовательно, такое предположение идет в запас прочности. Само очертание видоизменяется по двум переменным: напряжению σ и расстоянию $(h - y)$, выбор которых может быть сделан по условию удовлетворения двум уравнениям статики.

Таким образом, приняв очертание эпюры по двум прямым AK и KF (черт. 63), мы можем для случая действия на пластинку AB какой либо горизонтальной силы P , приложенной на высоте H от точки A , написать следующие два условия равновесия:

проекция на горизонтальную ось, по которой

$$\frac{1}{2} mh^2 - \frac{1}{2} (mh + \sigma) (h - y) - \frac{P}{b} = 0 \dots \dots (71)$$

сумма моментов относительно точки B равняется:

$$\frac{1}{6} mh^3 - \frac{1}{6} (mh + \sigma) (h - y)^2 - \frac{P}{b} (H + h) = 0 \dots \dots (72)$$

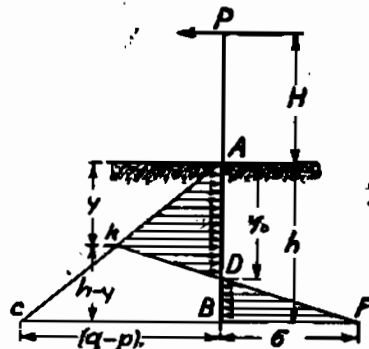
В этих уравнениях b — ширина пластинки.

Подставляя из первого уравнения во второе значение

$$h - y = \frac{mh^2 - 2 \frac{P}{b}}{mh + \sigma} \dots \dots \dots (73)$$

получим:

$$\frac{1}{6} mh^3 - \frac{1}{6} \frac{\left(mh^2 - 2 \frac{P}{b}\right)^2}{mh + \sigma} - \frac{P}{b} (H + h) = 0 \dots \dots$$



Черт. 63.

Решая его относительно σ , получим:

$$\sigma = \frac{(mh^2 - 2\frac{P}{b})^2}{mh^3 - 6\frac{P}{b}(H+h)} - mh.$$

или

$$\sigma = \frac{(bmh^2 - 2P)^2}{b[bmh^3 - 6P(H+h)]} - mh \quad (74)$$

Этим уравнением устанавливается зависимость между наибольшим напряжением σ в нижнем конце плоскости AB и глубиной h заложения ее.

Задавая значение h , можно определить соответствующую этой глубине величину напряжения σ , которое должно быть равно или менее допустимого для этой глубины и принимаемого $= mh$.

Можно исходить и из обратного положения, а именно, задавшись предельным значением напряжения $\sigma = mh$ ввести его в уравнение (74), которое после преобразования примет вид:

$$h^4 - 8\frac{P}{bm}h^2 - 12\frac{PH}{bm}h - 4\frac{P^2}{b^2m^2} = 0 \quad (74bis)$$

Обозначив величину $2\frac{P}{bm}$, как постоянную $= T$, получим:

$$h^4 - 4Th^2 - 6THh - T^2 = 0.$$

Из рассмотрения условий равновесия (71 и 72) нетрудно видеть, что при одной и той же величине P горизонтальной силы контур эпюры напряжений в заделанном конце (*черт. 63*) будет изменяться в зависимости от соотношения величин $H:h$, в соответствии с чем будут изменяться положения нулевой точки D и вершины верхнего треугольника определяемой ординатой y .

На *черт. 64* построена кривая, изображающая изменение отношения $y:h$ в зависимости от отношения $H:h$ ¹⁾ при условии предельного напряжения в нижнем конце заделки $\sigma = mh$.

¹⁾ Уравнение кривой получается из уравнений 71 и 72 путем подстановки в них значения $\sigma = mh$ и исключения из них величины $P:b$;

$$\frac{1}{6}mh^3 - \frac{1}{3}mh(h-y)^2 - \left[\frac{1}{2}mh^2 - mh(h-y) \right](H+h) = 0.$$

После исключения общих множителей и приведения получим:

$$2y^2 + 2hy + 6Hy + 2h^2 + 3Hh = 0.$$

После деления на h^2

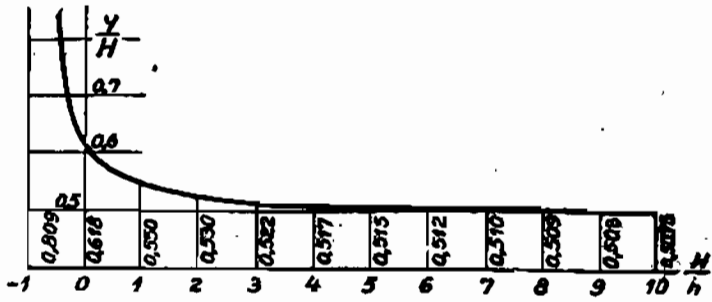
$$\left(\frac{y}{h}\right)^2 + \left(3\frac{H}{h} + 1\right)\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(3\frac{H}{h} + 2\right) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{y}{h} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(3\frac{H}{h} + 1\right)^2 + 2\left(3\frac{H}{h} + 2\right) - \frac{1}{2}\left(3\frac{H}{h} + 1\right)}.$$

Из рассмотрения этой кривой видно, что при таком большом соотношении, как $H:h=10$, величина $y=0,507h$ при чем это отношение $y:h$ остается

достаточно постоянным до отношения $H:h=2$, отсюда оно начинает быстро расти; при $H:h=0$, т.е. для случая, когда горизонтальная сила P совпадает с направлением поверхности земли $y=0,618h$ и, наконец, когда точка приложения силы P лежит на глубине $\frac{2}{8}h$ ниже земли $y=h$. Последний случай есть ни что иное, как обычное давление земли.



Черт. 64.

В соответствии с этим изменяется положение нулевой точки D , определяемое условием (черт. 63):

$$h - y_0 = \frac{\sigma}{\sigma + my} (h - y) \dots \dots \dots (75)$$

После подстановки в это выражение величины $\sigma = mh$ и преобразования получим:

$$y_0 = \frac{2hy}{h + y}$$

Таким образом, в соответствии с изменением отношения $H:h$ будем иметь:

- при $H:h=10$ $y=0,507h$ $y_0=0,67h$
- » $H:h=2$ $y=0,53h$ $y_0=0,69h$
- » $H:h=0,5$ $y=0,575h$ $y_0=0,73h$
- » $H:h=0$ $y=0,618h$ $y_0=0,76h$
- » $H:h=-\frac{2}{8}$ $y=-1$ $y_0=\infty$

Отсюда следует, что для обычных соотношений $H:h$ от 5 до 2 величина y близка к $0,5h$ и положение нулевой точки эпюры близко к $\frac{2}{8}h$.

Значение этих условий облегчает предопределение необходимой глубины заложения $-h$, для чего может быть использована формула (72).

Пример 5. Пусть требуется определить необходимую глубину заложения h для случая, когда на пластинку AB , шириной 0,3 метра, действует сила $P=0,2$ т, приложенная на высоте $H=2$ метрам.

Будем рассматривать грунт, для которого вес куб. метра

$$\delta = 1,8 \text{ т и угол естественного откоса } \varphi = 30^\circ.$$

Для случая горизонтальной поверхности земли и нормального давления земли на пластинку величину коэффициента m будет

$$m = 1,8 [tg^2 60^\circ - tg^2 30^\circ] = 4,8 \text{ м/м}^2$$

Задавшись глубиной заложения $h = 1,8 \text{ м}$ по формуле (74) будем иметь:

$$\sigma = \frac{(0,3 \cdot 4,8 \cdot 1,8^2 - 2 \cdot 0,2)^2}{0,3[0,3 \cdot 4,8 \cdot 1,8^2 - 6 \cdot 0,2(2 + 1,8)]} - 4,8 \cdot 1,8 = 7,1 \text{ м/м}^2,$$

что меньше допускаемого напряжения для рассматриваемого грунта, для которого

$$mh = 4,8 \cdot 1,8 = 8,64 \text{ м/м}^2.$$

Очевидно, что в рассматриваемой случае величина h могла быть несколько уменьшена.

Положение наибольшей ординаты верхнего треугольника определяется по формуле (73):

$$y = 1,8 - \frac{4,8 \cdot 1,8^2 - 2 \cdot \frac{0,2}{0,3}}{4,8 \cdot 1,8 + 7,1} = 0,81 \text{ м} = 0,45h.$$

и положение нулевой точки по формуле (75):

$$y_0 = 1,8 - \frac{7,1}{7,02 + 4,8 \cdot 0,81} (1,8 - 0,81) = 1,165 \text{ м} = 0,647h.$$

Воспользуемся этим примером, чтобы обратить внимание на особенность формулы (74).

В знаменатель этой формулы входит разность, которая убывает очень быстро, а так как числитель представляет собой квадрат и, следовательно, всегда положителен, то легко может оказаться, что при некотором отношении $H:h$ выражение напряжения примет отрицательное значение. Это будет иметь место, когда h взято недостаточным.

В рассмотренном примере это имеет место уже при $h = 1,4 \text{ м}$.

Таким образом, получение отрицательного значения напряжения указывает на необходимость увеличивать глубину заделки.

§ 21. Расчет шпунтовых стенок. Шпунтовые стенки представляют собой ряд брусчатых или досчатых свай, забитых в землю и служащих для поддержания земляной засыпки. Под действием этой засыпки шпунтовая стенка стремится или опрокинуться или сломаться. Первое обусловливается устойчивостью стенки, второе—ее прочностью.

Условие устойчивости. Шпунтовая стенка, поддерживающая земляную массу, не имеет прямо выраженной горизонтальной силы P , действие которой заменяется превышением давления сыпучего тела с одной стороны по сравнению с другой. Величина этого превышения вполне является, если представить себе эпюры распределения напряжений с каждой стороны шпунта (черт. 65).

Если предположить, что грунт вокруг стенки однородный, то эпюры напряжений от активных давлений будут иметь вид треугольников: с задней стороны шпунта треугольника GBF и с передней стороны — треугольника ABE , в которых стороны GF и AE имеют одинаковый наклон, а потому разница площадей этих эпюр определяется площадью GBB_1A_1 .

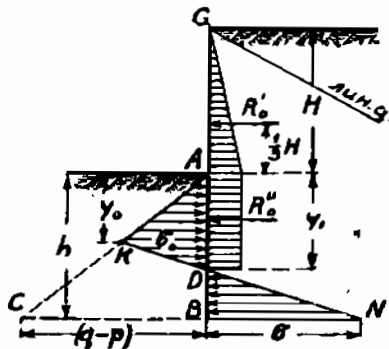
Таким образом давление, вызывающее опрокидывание стенки, определяется активным давлением грунта на верхнюю часть AG стенки, которое вообще определяется выражением:

$$R'_0 = \frac{1}{2} \delta k_1^2 H^2 \sin \psi$$

и избытком того же давления на нижнюю часть высотой y_1 , которое по условию построения эпюры вообще определяется выражением (черт. 66):

$$R''_0 = \delta k_1^2 H y_1 \sin \psi.$$

Точки приложения этих давлений соответственно площадям эпюры будут находиться: давления R'_0 — на расстоянии одной трети H от точки A и давления R''_0 — на расстоянии половины y_1 от той же точки.



Черт. 66.

В условиях изгиба стенки под действием избыточного давления грунта, она будет иметь смещение, вращаясь вокруг некоторой точки D , и сопротивление, оказываемое грунтом по высоте AB , будет таковым же, как это было указано в предыдущем параграфе. Эпюра напряжений этого сопротивления будет очерчена по двум треугольникам $AKDNB$.

Вследствие такого вида смещения эпюра активного давления с задней стороны шпунтовой стенки будет иметь распространение только до глубины y_1 , положения точки D , ниже нее будет иметь место пассивное сопротивление грунта.

Таким образом, условие устойчивости шпунтовой стенки надо рассматривать под действием давлений, определяемых эпюрами напряжений,

показанных на *черт. 66*. Если принять длину стенки = 1,0 метру, то условия равновесия для нее, согласно схеме *черт. 66*, напишутся так:

$$\frac{1}{2} mh^2 - \frac{1}{2} (mh + \sigma) (h - y_0) - R_0' - R_0'' = 0 \quad \dots \quad (76)$$

$$\frac{1}{6} mh^3 - \frac{1}{6} (mh + \sigma) (h - y_0)^2 - R_0' \left(\frac{1}{3} H + h \right) - R_0'' \left(h - \frac{1}{2} y_1 \right) = 0 \quad (77)$$

Входящая в эти выражения величина y_1 определяется из соотношения:

$$h - y_1 = \frac{\sigma}{\sigma + \sigma_0} (h - y_0) \quad \dots \quad (78)$$

в котором

$$\sigma_0 = m y_0.$$

Решение этих уравнений осложняется тем, что в выражение постоянного члена входит неизвестное y_1 , вследствие чего повышается количество неизвестных. Проще всего решать эти уравнения приближенно, выразив величину y_1 в долях глубины заложения h ; обычно в шпунтовых стенках y_1 изменяется в пределах от $0,70 h$ до $0,80 h$.

Приняв для первого приближения $y_1 = \frac{3}{4} h$, определяют из первого уравнения (77) величину $(h - y_0)$:

$$(h - y_0) = \frac{mh^2 - 2(R_0' + R_0'')}{(mh + \sigma)} \quad \dots \quad (79)$$

по подстановке величины $(h - y_0)$ во второе уравнение (77), решают его относительно напряжения σ :

$$\sigma = \frac{[mh^2 - 2(R_0' + R_0'')]^2}{\left[mh^3 - 6R_0' \left(\frac{1}{3} H + h \right) - 6R_0'' \left(h - \frac{1}{2} y_1 \right) \right]} - mh \quad \dots \quad (80)$$

Полученное выражение напряжения σ аналогично выражению (74). Задаваясь величиной h , определяют величину σ , которая в этом случае должна удовлетворять условию разности пассивного напряжения с задней стороны стенки и активного напряжения с передней стороны стенки, а именно:

$$\sigma \text{ должно быть } \leq \delta \left[(H + h) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - h \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Вводить коэффициент запаса устойчивости или, что тоже понижает допускаемое напряжение, нет надобности, так как в выведенном условии устойчивости стенки не учитывается трение, имеющее место по боковым граням выпираемых призм, сцепление грунта и т. п., что служит в запас устойчивости.

Вычислив напряжение σ , надо проверить величину u_1 по выражению (76) и если эта величина будет близка принятой в расчете $0,75 h$, то произведенным расчетом можно удовлетвориться; в противном случае надо произвести пересчет по новому значению u_1 .

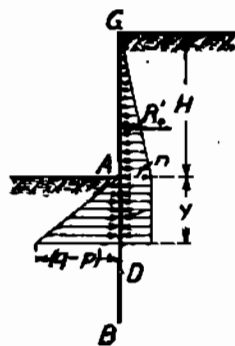
Условие прочности. Условие прочности стенки проверяется по напряжениям, развивающимся в самой стенке под действием сил к ней приложенных.

Так как стенка подвергается изгибу, то напряжение в ней должно быть проверено по месту наибольшего момента, которое, как известно, определяется условием:

$$\frac{dM}{dx} = Q = 0.$$

Из чертежа эпюры непосредственно видно, что это условие может быть удовлетворено только в пределах части AD стенки.

Для некоторой высоты — y этой части (черт. 67) выражение поперечной силы напишется так:



Черт. 67.

$$Q = -R_0' - ny + \frac{1}{2} my^2 = 0 \dots \dots \dots (81)$$

Определив из этого уравнения длину y , которой соответствует место наибольшего момента, нетрудно вычислить величину самого момента по выражению:

$$M = -\frac{1}{2} \delta H \left[H \left(\frac{1}{3} H + y \right) + y^2 \right] \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{1}{6} my^3 \dots (82)$$

Величина напряжения в шпунтовых стенках определяется по обычной формуле на изгиб

$$n = M : W.$$

На основании опытов Энгельса, Якоби и др. напряжение в сваях деревянных шпунтовых стенок допускается несколько большим, чем это принято при обычных расчетах прочности дерева на изгиб, что объясняется несовершенством изложенного расчета шпунтовых стенок, в котором не учитывается ряд факторов, повышающих устойчивость. Указанные авторы допускают при расчетах на изгиб дерева в шпунтовых стенках напряжение в 150 кг/см^2 и даже до 200 кг/см^2 .

Числовой пример 6. Пусть требуется рассчитать шпунтовую стенку высотой $= 2,00 \text{ м}$, поддерживающую землю, вес которой $\delta = 1,8 \text{ т}$ и угол внутреннего трения которой $\varphi = 30^\circ$.

Если предположить, что трение земли по стенке близко к нулю, т.е. $\varphi_0 = 0$, то при горизонтальной поверхности сыпучего тела будем иметь:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{1}{2}30^\circ\right) &= \frac{1}{3} \\ m &= 1,8 \left[\operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{1}{2}30^\circ\right) - \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{1}{2}30^\circ\right) \right] = 4,8 \text{ м.} \end{aligned}$$

Примем для предварительного расчета, что глубина положения нулевой точки эпюры напряжений $y_1 = 0,8h$ и сама глубина заложения $h = 2,1$ м.

Величины давлений на стенку со стороны возвышенной части земли будут:

в части над дном котлована

$$R_0' = \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{3} = 1,2 \text{ м,}$$

в части ниже дна котлована

$$R_0'' = 1,8 \cdot 2 \cdot 0,8 h \frac{1}{3} = 0,96h \text{ м.}$$

Наибольшее напряжение σ , соответствующее нижним концам свай, определится по формуле (80)

$$\sigma = \frac{[4,8 \cdot 2,1^2 - 2(1,2 + 0,96 \cdot 2,1)]^2}{4,8 \cdot 2,1^2 - 6 \cdot 1,2 \left(\frac{1}{3}2,0 + 2,1\right) - 6 \cdot 0,96 \cdot 2,1 \left(2,1 - \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 2,1\right)} - 4,8 \cdot 2,1 = 13,41 \text{ м/м}^2$$

допускаемое же $= 4,8(2 + 2,1) = 19,68 \text{ м/м}^2 > 13,42 \text{ м/м}^2$.

Проверяем положение нулевой точки: для чего по формуле (77) определяем

$$h - y_0 = \frac{4,8 \cdot 2,1^2 - 2(1,2 + 0,96 \cdot 2,1)}{4,8 \cdot 2,1 + 13,41} = 0,61 \text{ м,}$$

а затем по формуле (76)

$$h - y_1 = \frac{13,41 \cdot 0,61}{13,41 + 4,8(2,1 - 0,61)} = 0,38 \text{ м,}$$

отсюда $y_1 = 2,1 - 0,38 = 1,72$ м, что составляет

$$\frac{1,72}{2,1} = 0,82h$$

почти равно принятому $y_1 = 0,8h = 1,68$ м, почему пересчета не требуется.

Место наибольшего момента определяется из условия (формула 81):

$$Q = -1,2 - 1,8 \cdot 2 \cdot y^{1/8} + 1/2 \cdot 4,8 \cdot y^2 = 0,$$

отсюда

$$y = 1 \text{ м.}$$

Величина наибольшего момента по формуле 82:

$$M = -1/2 \cdot 1,8 \cdot 2 \left[2 \frac{1}{3} (2+1) + 1^2 \right]^{1/8} + 1/8 \cdot 4,8 \cdot 1^3 = -1,8 \text{ т. м.}$$

Если принять для устройства шпунта доски толщиной в 7,5 см, то напряжение в них от изгиба будет:

$$\sigma = \frac{1 \cdot 1800 \cdot 100}{1/8 \cdot 100 \cdot 7,5^2} = 192 \text{ кг/см}^2.$$

§ 22. Расчет отдельных столбов. Отдельно стоящие столбы рассматриваются так же, как гибкая пластинка, заложённая в землю, и следовательно, для расчета глубины заделки h их применимы все выводы § 20. Однако, опыты и наблюдения показывают, что устойчивость отдельных столбов выше, чем длинных стенок. Объясняется это следующими соображениями:

Длинная стенка (например, шпунтовая) под действием боковых сил стремится выпереть вперед лежащую землю по всей своей длине одновременно. При таком выпирании длинной призмы, сопротивление, оказываемое ею от трения по боковым ее граням, невелико по сравнению

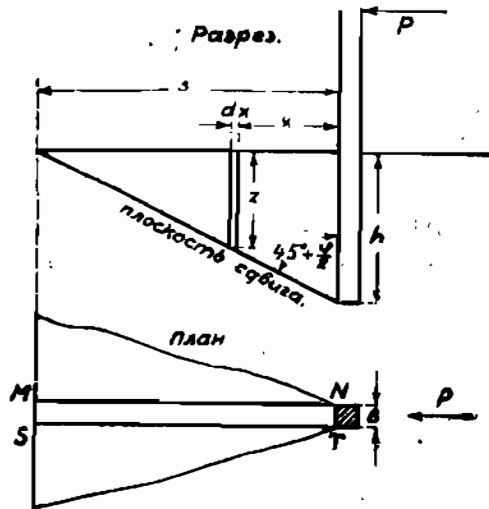
с сопротивлением оказываемым ею по плоскости сдвига. В условии же устойчивости отдельных столбов, имеющих небольшую ширину, сопротивление от трения по боковым граням MN и ST призмы (черт. 68) составляет значительную часть от общего сопротивления.

Учет этого дополнительного сопротивления, особенно для не горизонтальных очертаний поверхности земли, представляет некоторую сложность, но приблизительный учет может быть, сравнительно просто, сделан для горизонтальной поверхности земли.

Сопротивление по боковым граням призмы, выпираемой столбом, может быть учтено, как трение вызываемое по ним давлением земли.

Если предположить, что на каждой площадке размерами $z \times dx$ боковых граней MN имеет место давление земли, определяемое выражением:

$$dR = \frac{1}{2} \delta \cdot k^2 z^2 \cdot dx,$$



Черт. 68.

то давление по всей грани выразится суммой этих давлений и равно

$$R = \int_0^a \frac{1}{2} \delta \cdot k^2 z^2 dx \dots \dots \dots (83)$$

В соответствии с этим величина трения по этой грани определится выражением:

$$T = R' \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi \int_0^a \frac{1}{2} \delta \cdot k^2 z^2 dx \dots \dots \dots (84)$$

в котором φ — угол внутреннего трения сыпучего тела.

В этом выражении величины δ и k^2 постоянные; величина z может быть выражена через величины: h — глубину заложения и s — длину призмы сползания, а именно по *черт. 68*:

$$z = h \frac{x}{s}.$$

Таким образом, выражение (84) после интегрирования приведет к виду:

$$T = \frac{1}{6} \delta k^2 h^2 s \operatorname{tg} \varphi \dots \dots \dots (85)$$

Для случая горизонтальной поверхности земли и вертикальной плоскости заделки с отсутствием трения по ней ($\varphi_0 = 0$) величина

$$s = h \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Что касается значения величины k^2 , то так как сдвиг граней происходит в пределах неограниченной массы земли, находящейся в покое, то рекомендуют принимать натуральное давление земли по выражению 7, т.е. принимая $k = 1$.

При таких условиях выражение (85) примет вид:

$$T = \frac{1}{6} \delta h^3 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots (86)$$

Так как сопротивление призмы выпирания, при горизонтальной поверхности земли, вертикальной плоскости стенки и $\varphi_0 = 0$ определяется выражением (31):

$$Q = \frac{1}{2} \delta h^2 b \cdot \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

где b — ширина столба, то общее повышение сопротивления всей призмы выпирания с учетом трения по боковым граням определится отношением:

$$\mu = \frac{Q + 2T}{Q} = 1 + \frac{2 \frac{1}{6} \delta h^3 \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}{\frac{1}{2} \delta h^2 b \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)},$$

$$\mu = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{b} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} \quad (87)$$

В этом выражении множитель

$$\frac{2}{3} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)} = w$$

является величиной постоянной, зависящей от свойств грунта.

В нижеследующей таблице приведены значения величин w для разных значений угла φ внутреннего трения и показано соответственное изменение отношения

$$\mu = 1 + w \frac{h}{b} \quad (88)$$

При $\varphi =$	$w =$	$\mu =$
25°	0,198	1 + 0,198
30°	0,222	1 + 0,222
35°	0,243	1 + 0,243
40°	0,261	1 + 0,261
45°	0,276	1 + 0,276

Если принять, что пропорционально этому отношению (88) будут изменяться напряжения ¹⁾ по высоте плоскости заделки, то введенное в § 20 выражение (69) разности эпюр напряжений:

$$(q - p) = mh$$

должно измениться и примет вид:

$$h(q \cdot \mu - p) = \left[q \left(1 + w \frac{h}{b} \right) - p \right] h = \left(m + qw \frac{h}{b} \right) h \quad (89)$$

В соответствии с этим должны быть внесены изменения в уравнения (71 и 72) равновесия и вытекающее из них выражение (74) напряжения, которое примет вид:

$$\sigma = \frac{(bmh^2 + qwh^3 - 2P)^2}{b[bmh^3 + qwh^3 - 6P(H+h)]} - \left(m + qw \frac{h}{b} \right) h \quad (90)$$

Это выражение дает возможность определить глубину заделки, исходя из допускаемого напряжения на конце заделки $\sigma \leq mh$.

¹⁾ В действительности прямолинейности, как это имеет место от пассивного сопротивления земли, в распространении напряжения от трения в боковых гранях не будет, оно нарастает по кривой.

Пример 7. Применим полученные выводы к условиям примера, приведенного в § 20, что позволит провести сравнение.

По данным этого примера: $P = 0,2 \text{ т}$, $H = 2,0 \text{ м}$, $b = 0,3 \text{ м}$, $m = 4,8 \text{ т/м}^2$, $\varphi = 30^\circ$, $\delta = 1,8 \text{ т}$.

Так как по заданному условию грунта $\varphi = 30^\circ$, то соответственно $w = 0,222$, а потому $wq = w \delta \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{30^\circ}{2}\right) = 1,8 \cdot 3 \cdot 0,222 = 1,2$.

Подставляя эти значения в выражение (90), получим:

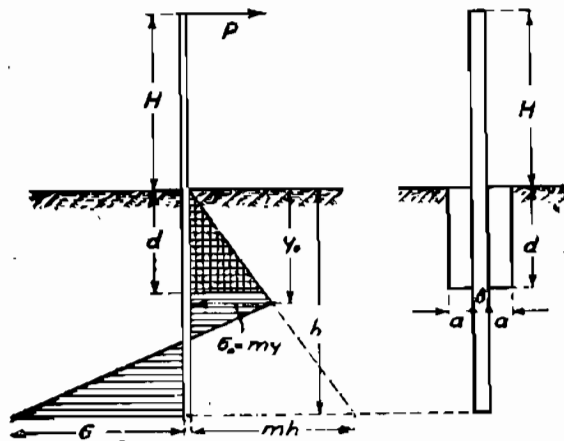
$$\sigma = \frac{(0,3 \cdot 4,8 h^2 + 1,2 h^3 - 2 \cdot 0,2)^2}{0,3[0,3 \cdot 4,8 h^3 + 1,2 h^4 - 6 \cdot 0,2(2 + h)]} - \left(4,8 + 1,2 \frac{h}{0,3}\right) h.$$

Задаваясь значением $h = 1,55 \text{ м}$ и делая приведение, получим:

$$\sigma = \frac{7,5}{0,3 \cdot 8,01} - (4,8 + 6,2) \cdot 1,55 = 23,4 - 16,5 = 6,94 \text{ т/м}^2,$$

что меньше допускаемого для этой глубины $h = 1,55 \text{ м}$, а именно: $\sigma = mh = 4,8 \cdot 1,55 = 7,44 \text{ т/м}^2$.

В действительности столбы находятся в более благоприятных условиях, так как при сдвиге им кроме указанных сопротивлений приходится



Черт. 69.

преодолевать трение развивающееся по боковым граням его от давления на них земли и сцепление между частицами земли.

Опыты и наблюдения показывают, что при действии на столбы горизонтальных давлений, сдвиг столба прежде всего характеризуется смещением частиц земли у поверхности земли, тогда как нижний конец заделки остается неподвижным.

В целях повышения сопротивления столбов у поверхности земли устраивают специальные уширения их, как показано на *черт. 69*.

Эпюра распределения напряжения по высоте заделки сохраняет очертание, принятое в § 20, но сопротивление поверхностей части как бы уплотняется.

Уширение делается на определенную глубину d и обычно оно не доводится до излома верхнего треугольника эпюры. Это давление имеет определенную величину:

$$R_d = \frac{1}{2} md^2 \cdot 2a,$$

не зависящую от остальной части эпюры и как прямопротивоположное горизонтальной действующей силе P вычитается непосредственно из нее и вызываемого последней момента.

Уравнения равновесия для этого случая напишутся так (сравни. выр. 71 и 72):

$$\frac{1}{2} mh^2 - \frac{1}{2} (mh + \sigma) (h - y_0) + \frac{1}{2} md^2 2a - \frac{P}{b} = 0.$$

$$\frac{1}{6} mh^3 - \frac{1}{6} (mh + \sigma) (h - y_0)^2 + \frac{1}{2} md^2 2a (h - \frac{2}{3} d) - \frac{P}{b} (H + h) = 0.$$

Решая эти уравнения относительно σ , получим:

$$\sigma = \frac{\left(mh^2 - 2 \frac{P}{b} + 2 md^2 a \right)^2}{mh^3 - 6 \frac{P}{b} (H + h) + 6 md^2 \left(h - \frac{2}{3} d \right)} - mh \dots \quad (91)$$

это напряжение должно быть меньше допускаемого $\sigma = mh$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ СТЕНКИ.

§ 23. Графический расчет. Если сыпучее тело заключено между двумя параллельными стенками, то условие передачи давления на стенки будет в значительной степени зависеть от отношения расстояния a между стенками к их высоте.

Если расстояние a между стенками таково, что плоскость сползания ложится в пределах этого расстояния, то расчет давления на стенки будет такой же, как при отдельно стоящих стенках; если же это не имеет места, то условия сползания сыпучего тела, а в соответствии с этим и расчет давления будут иные.

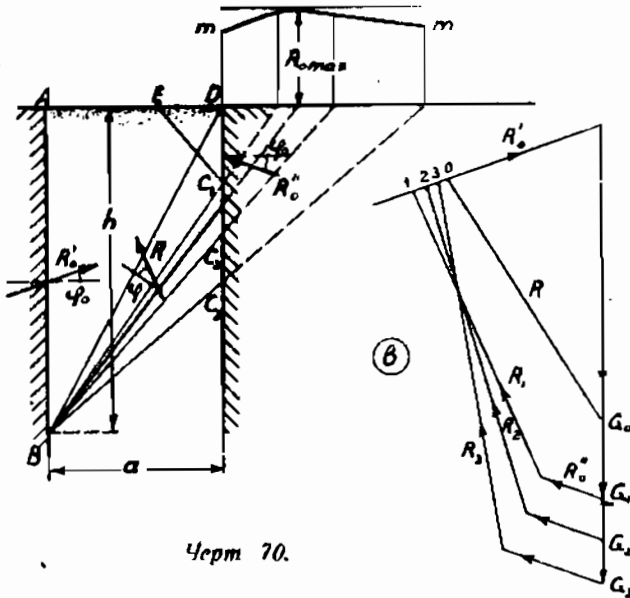
Подходя к решению этого вопроса с точки зрения гипотез Кулона, мы должны будем представить себе, что, при условии сползания сыпучего тела по какой-нибудь плоскости BC (черт. 70), образующаяся при этом призма сползания $ABCD$ будет находиться под действием следующих сил: собственного веса G , реактивного давления стенки слева R'_0 , реактивного давления R''_0 стенки справа и реактивного давления R по плоскости сползания. По условию предельного равновесия направления давлений R'_0 и R''_0 на стенки должны быть направлены к ним под углами $(90^\circ - \varphi_0)$; направление их не зависит от направления плоскости сползания BC и только направление силы R , образующее угол $(90^\circ - \varphi)$ с направлением плоскости сползания, будет изменять свое направление в соответствии с изменением направления плоскости сползания.

Давление R''_0 на правую стенку может быть рассматриваемо как результат отделения из всей призмы сползания $ABCD$ части ее DCE , стремящейся сползти по плоскости CE . Пока плоскость сползания CE

этой части призмы будет ложиться в пределах расстояния a между стенками, определение величины давления R''_0 может быть сделано одним из изложенных ранее способов (напр., Понселе и др.).

Таким образом, зная вес G призмы $ABCD$ и зная величину и направление давления R''_0 на правую стенку можно, при заданном направлении плоскости сползания BC , определить давление R'_0 на левую стенку путем построения силового многоугольника с разложением равнодействующей сил G и R''_0 на два направления R'_0 и R (см. черт. 70). Однако, такое построение не решает вопроса, так как надо найти плоскость сползания BC , которой будет соответствовать наибольшее давление R'_0 .

Решение этой задачи может быть сделано только приближенно, именно: задавшись рядом возможных плоскостей сползания и сделав для них построение силовых многоугольников, определить по ним давление R'_0 , соответствующее каждой плоскости сползания, и по характеру изменения их установить возможное наибольшее давление. Последнее может быть сделано путем построения кривой $m-m$ (черт. 70а), ординаты которой пропорциональны давлениям R'_0 и отложены от точек соответствующих положениям плоскостей;



Черт. 70.

касательная к этой кривой, параллельная оси абсцисс, определит наибольшую ординату и соответствующую ей плоскость сползания.

Нетрудно видеть, что изложенный прием определения давления на стенку приближенный; он может быть применяем при небольшой высоте стенок, пока плоскость сползания CE ложится в пределах расстояния a между стенками; в нем не учитывается влияние трения сыпучего тела по стенкам, которое нарастает по мере увеличения высоты стенок и своим противодействием уменьшает влияние собственного веса сыпучего тела.

§ 24. Расчет давления при большой высоте стенок. Для выяснения вопроса распространения давления сыпучего тела при большой высоте взаимно параллельных стенок (черт. 71) выделим в толще сыпучего тела объем высотой dy и рассмотрим условия его равновесия.

Предположим, что выделенный объем имеет длину $= 1$. Силы действующие на него будут состоять из:

1) Давления по верхней плоскости ab равного $n \times a \times 1$, где n — напряжение в этой плоскости.

2) Давления по нижней плоскости cd равного $(n + dn) a \times 1$.

3) Давлений, приложенных под углом $(90^\circ - \varphi_0)$ на боковых поверхностях и определяемых слагающими: n_s и $t_s = n_s \operatorname{tg} \varphi_0$, где φ_0 — угол трения сыпучего тела по стенкам.

4) Собственный вес выделенного объема $= \delta \times a \times 1 \times dy$, где δ — вес единицы объема сыпучего тела.

Составляя для этих сил условие равновесия относительно вертикальной оси получим:

$$-na + (n + dn) a - \delta a dy + 2n_s \operatorname{tg} \varphi_0 dy = 0 \dots (92)$$

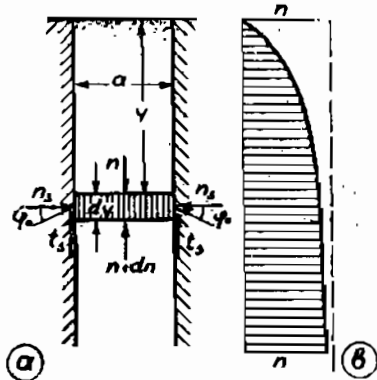
Решая это уравнение относительно dy получим:

$$dy = \frac{dn}{\delta \frac{2n_s \operatorname{tg} \varphi_0}{a}}$$

Для решения этого уравнения нужно величину n_s выразить в функции давления n на горизонтальную плоскость, так как эта зависимость неизвестна, то выразим ее в общем виде так:

$$n_s = k \cdot n.$$

Тогда выражения dy приведет к такому:



Черт. 71.

$$dy = \frac{dn}{\delta \frac{2 \operatorname{tg} \varphi_0 k n}{a}} \dots (93)$$

Интегрируя его, получим:

$$-\frac{2k}{a} \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot y = \ln \left(1 - \frac{2k}{a\delta} n \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 \right),$$

или иначе:

$$1 - \frac{2k}{\delta a} n \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 = e^{-\frac{2k}{a} \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot y},$$

отсюда величина напряжения

$$n = \frac{\delta}{A} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{2y}{A}}} \right) \dots (94),$$

где $A = \frac{2k \operatorname{tg} \varphi_0}{a}$ величина постоянная, независящая от глубины y положения рассматриваемого объема.

Давая y ряд значений, мы будем получать величины напряжений в различных плоскостях по высоте стенок. Легко видеть, что с увели-

чением y второй член в скобках быстро стремится к нулю, а величина напряжения n стремится к пределу

$$n = \frac{\delta}{A} = \frac{a\delta}{2ktg \varphi_0}.$$

Характер изменения напряжений n по мере увеличения высоты определяется кривой, которая возрастая сначала быстро, потом принимает направление почти параллельное своей оси абсцисс (черт. 71 б).

В соответствии с выражением (93) величина нормального давления n на стенки определится выражением:

$$n_s = kn = \frac{a\delta}{2tg \varphi_0} \left(1 - \frac{1}{e^{Ay}}\right) \dots \dots \dots (95),$$

которое с увеличением y в пределе стремится к постоянному значению и нарастает по кривой, пропорциональной кривой изменения, напряжения n .

Входящие в выражение напряжений n и n_s значения коэффициентов k и $tg \varphi_0$ могут быть выбраны на основании опытов.

Опыты Janssen'a, Jamieson'a, Bowey и др. ¹⁾ с моделями силосов показали, что отношение напряжений n_s : n определяются величинами:

по опытам Jamieson'a $k = \frac{n_s}{n} = 0,6$

» » Jansen'a $k = \frac{n_s}{n} = 0,71.$

По опытам тех же авторов значения $tg \varphi_0$ определялись величинами:

по Jamieson'y $tg \varphi_0 = 0,417$ до $0,441$

по Janssen'y $tg \varphi_0 =$ от $0,283$ до $0,331,$

что указывает на то, что угол φ_0 трения сыпучего тела по стенкам изменялся в пределах от 17° до 25° , т.-е. составлял приблизительно от $0,5$ до $0,7$ угла естественного откоса тех же сыпучих тел.

Таким образом, величина давления сыпучего тела на ограждающие его параллельные стенки может быть определена как равнодействующая напряжений n_s , т.-е. площадью эпюры напряжений.

$$R_0 = \int_0^h \frac{a\delta}{2tg \varphi_0} \left(1 - \frac{1}{e^{Ay}}\right) dy \dots \dots \dots (96)$$

Точка приложения этого давления определяется центром тяжести этой эпюры.

Изложенный вывод давления сыпучего тела на сближенные стенки имеет широкое применение в расчете силосов; в этом случае учитывается трение по всему периметру.

¹⁾ E. Lü t. «Druckverhältnisse in Silozellen», 1910.

Так, например, если мы будем иметь силос четырехугольного очертания со сторонами a и b (черт. 72), то условие равновесия выделенного объема толщиной dy напишется так (сравни формулу 92):

$$-n\omega + (n + dn)\omega - \delta \cdot \omega \cdot dy + n_s \operatorname{tg} \varphi_0 \times U \times dy = 0 \dots (97),$$

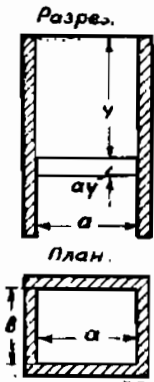
где ω — площадь поперечного сечения $= a \times b$ и U — периметр сечения $= 2(a + b)$.

Из этого выражения (97) получим:

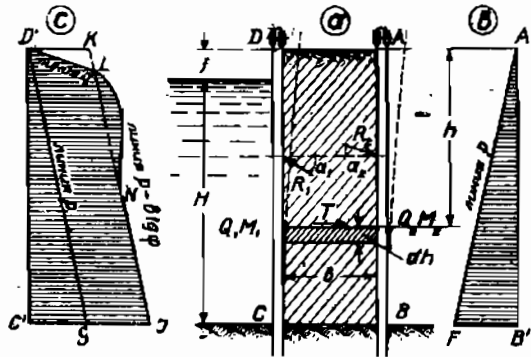
$$dy = \frac{dn}{\delta - n_s \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \frac{U}{\omega}}$$

Полагая $n_s = kn$ и проинтегрировав, получим, как и выше,

$$n = \frac{\delta}{A'} \left(1 - \frac{1}{e^{A'y}} \right) \dots \dots \dots (98)$$



Черт. 72.



Черт. 73.

где $A' = \frac{U}{\omega} k \operatorname{tg} \varphi_0$ эпюра напряжений будет иметь такой же вид, как на черт. 71.

§ 25. Перемычки. Перемычки, образуемые двумя шпунтовыми стенками с заполнением их землей, представляют собой частный случай двух параллельных стенок (черт. 73).

Рассмотрим сначала случай, когда шпунтовые стенки, образующие перемычки, не связаны между собой.

В такой перемычке, пока она не находится под действием каких-либо горизонтальных давлений, ее собственная земляная засыпка будет вызывать своим давлением изгиб шпунтовых стенок наружу, т.е. каждая из стенок будет находиться под действием активного давления R_0 земли, величина которого, в зависимости от соотношения ширины a и высоты h перемычки, будет определяться или по формуле (22):

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta k^2 h^2 \sin \psi,$$

или по формуле (96):

$$R_0 = \int_0^h \frac{b \delta}{2 \operatorname{tg} \varphi_0} \left(1 - \frac{1}{e^{k y}}\right) dy.$$

С того момента, когда перемычка подвергнется действию горизонтальной нагрузки, например, давлению воды, стенка *DC* перемычки, воспринимающая это давление, получит изгиб в обратную сторону (*черт. 73*) и будет уже испытывать пассивное сопротивление земли.

Величина этого пассивного сопротивления Q_0 земли будет зависеть от сопротивления задней стенки $= R_0$ и сопротивления земляной засыпки сдвигу, вызываемому в ней нажимом передней стенки.

Если рассматривать отдельные слои засыпки толщиной dh , то под действием нажима передней стенки каждый из них стремится сдвинуться в сторону задней стенки, и прямоугольное очертание его стремится перейти в параллелограм, искажение которого убывает по мере углубления слоев. Такое искажение слоев свидетельствует о том, что все они находятся под действием внутреннего трения T , развивающегося в земляной засыпке и зависящего от веса земли, лежащей выше слоя.

Так как по условию устойчивости сдвиг засыпки не должен иметь место, то, следовательно, силы трения не должны превосходить величины, возможной для земли, образующей засыпку, что связывается условием:

$$T \leq \delta h b \operatorname{tg} \varphi. \quad (99)$$

где φ угол внутреннего трения в засыпке.

Таким образом, если рассматривать какой-либо слой перемычки на глубине h , то, по условию устойчивости, пассивное давление, оказываемое засыпкой на переднюю стенку, должно удовлетворять условию:

$$R_1 \cos \alpha_1 \leq \delta h b \operatorname{tg} \varphi + R_2 \cos \alpha_2. \quad (100)$$

где α_1 и α_2 углы наклона пассивного и активного давления земли относительно перпендикуляра к стенкам. Величины углов α_1 и α_2 неизвестны, но они не должны превосходить угла внутреннего трения земли¹⁾.

Выведенная зависимость (100) позволяет построить эпюры напряжений.

Если принять, что давление земли на заднюю стенку определяется по форм. (22), то эпюра напряжения будет иметь вид треугольника $A'B'F$ (*черт. 73*) с наибольшей ординатой:

$$q = \delta(H + f) k^2 \sin \psi.$$

Что касается эпюры пассивного давления земли на переднюю стенку, то согласно форм. (100) она будет слагаться из двух эпюр: эпюры тре-

¹⁾ Отметим, что при наклонном положении давлений R_1 и R_2 , слагающие $R_1 \sin \alpha_1$ и $R_2 \sin \alpha_2$ сопротивлений стенок, которые противоположны направлениям пассивного и активного давлений, вызовут изменение веса $\delta b h$ земли на величину $R_1 \sin \alpha_1 - R_2 \sin \alpha_2$, но так как $R_1 > R_2$ и α_2 равно или больше α_1 , то изменение веса земли будет направлено в сторону нарастания его, а потому, в запас прочности его влиянием на величину трения можно пренебречь.

угольника $D'CG$, равного треугольнику $A'B'F$ активного давления, и четырехугольника $D'KJG$, определяющего собой сопротивление земли сдвигу; ординаты этого четырехугольника

$$GJ = \delta \cdot b \operatorname{tg} \varphi.$$

Здесь надо отметить, что в верхних слоях засыпки пассивное сопротивление ее будет развиваться по обычному закону развития пассивного давления в сыпучих телах. В соответствии с чем эпюра пассивного сопротивления начнет нарастать от точки D' по прямой удовлетворяющей условию $q = \delta k^2 h \sin \psi_1$ (ср. форм. 30).

Нарастание по этой прямой будет происходить до пересечения с прямой KJ в точке L ; далее нарастание эпюры, очевидно, пойдет по некоторой кривой асимптотически приближающейся к прямой KJ ; такое нарастание эпюры обуславливается тем, что давление на некоторой глубине H , слагающееся по эпюре, согласно форм. (100) из площади треугольника $D'CG$ и площади прямоугольника $D'KJG$ должно быть удовлетворено площадью очертания эпюры по линии $D'LNJ$; последнее же возможно только в том случае, если площадь $D'KL$ исключенного треугольника будет возмещена некоторой площадью LN .

Обычно площадь треугольника $D'KL$ невелика и ею можно пренебречь, проводя расчет пассивного давления по эпюре $D'KJC$.

Сделанное построение эпюр напряжений позволяет перейти к расчету прочности шпунтовых стенок перемычек, рассматривая каждую из них как самостоятельную шпунтовую стенку (см. § 21), находящуюся под давлениями, характеризуемыми отдельными эпюрами.

Иногда, в целях повышения общей устойчивости, шпунтовые стенки, образующие перемычки, связываются между собой тягами и распорками, что вызывает совместный изгиб обеих стенок.

При такой конструкции эпюры активных давлений (на черт. 73 $A'B'F$ и $D'CG$) взаимно уравновешиваются и прочность перемычки рассчитывается из учета сопротивления засыпки сдвигу и совместного сопротивления шпунтовых стенок.

Если обозначить сопротивление шпунтовых стенок изгибу через M_1 и M_2 и срезыванию через Q_1 и Q_2 , то для некоторой глубины h такой перемычки условия прочности его против давления воды напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \frac{1}{2} (h-f)^2 &\leq \delta b h \operatorname{tg} \varphi + Q_1 + Q_2 \\ \delta_1 \frac{1}{6} (h-f)^3 &\leq \delta b \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \varphi + M_1 + M_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (101)$$

где δ_1 — вес куб. метра воды.

Если пренебречь сопротивлением шпунтовых стенок срезыванию Q_1 и Q_2 и принять $f = 0$, то первое уравнение приведет к виду:

$$\delta_1 \frac{1}{2} h^2 \leq \delta b h \operatorname{tg} \varphi.$$

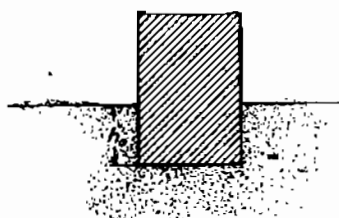
Эта зависимость может служить для приближенного определения ширины в перемычке

$$b \cong \frac{h_0 \delta}{2 \delta \operatorname{tg} \varphi} \dots \dots \dots (102)$$

В высоких перемычках, в которых давление воды не может быть воспринято сопротивлением шпунтовых стенок изгибу, конструкция перемычки усиливается жесткими крестами и подкосами со стороны противоположной давлению воды. В таких перемычках земляная засыпка не вводится в расчет устойчивости перемычки и служит только преградой против водопроницаемости.

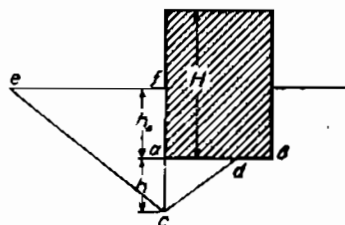
ГЛУБИНА ЗАЛОЖЕНИЯ ОСНОВАНИЙ.

§ 26. Заложение фундамента при равномерном распределении давления по основанию. Давление, передаваемое сооружением на основание, заставляет частицы, лежащие под ним, смещаться, а эти последние своим напором стремятся выпереть в сторону и кверху частицы, лежащие с боков от них (черт. 74). Чтобы это выпирание и следующая за ним осадка сооружения не имели места, необходимо, чтобы стремление частиц



Черт. 74.

сползти под давлением сооружения уравновешивалось сопротивлением грунта выпиранию; последнее становится возможным, если фунда-



Черт. 75.

мент погружен на некоторую глубину h_0 в грунт.

Если давление, передаваемое сооружением, распределяется равномерно по всей площади основания, то перемещение частиц грунта происходит равномерно по всему основанию; при этом условии возможно приближенное решение вопроса о глубине заложения основания в грунт.

Предположим, что ab плоскость основания сооружения (черт. 75), глубину заложения h_0 которого требуется определить, и пусть H представляет высоту воображаемого столба земли, весом равного весу сооружения. Если предположить, что под давлением сооружения частицы земли стремятся сползти по некоторой плоскости dc , то это сползание будет стремиться вызвать выпирание земли с боков по плоскости ce .

Исходя из условий предельного равновесия, можно сказать, что каждая частица земли, расположенная по плоскости ac на глубине h от уровня ab будет испытывать, с одной стороны, напряжение p от активного давления нагруженного сыпучего массива

$$p = \delta (h + H) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

с другой стороны, она будет испытывать напряжение q от пассивного сопротивления того же сыпучего массива

$$q = \delta (h + h_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Для того, чтобы частица находилась в равновесии, должно иметь место условие

$$q \cong p.$$

$$(h + h_0) \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cong (h + H) \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (103)$$

Так как по тригонометрии

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)},$$

то выведенное условие равновесия может быть переписано так:

$$\frac{h + h_0}{h + H} \cong \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = k^2 \quad (104)$$

где $k = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$.

В таком виде решение этой задачи было предложено Паукером и одновременно Ренкиным.

Решая уравнение (104) относительно h_0 , получим его в таком виде:

$$h_0 \cong Hk^2 - h(1 - k^2) \quad (105)$$

Из него непосредственно видно, что наибольшее значение h_0 будет иметь место, если $h = 0$, в соответствии с этим Паукер предложил определять глубину заложения h_0 , исходя из условия:

$$h_0 = Hk^2 = H \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (106)$$

Условие равновесия сыпучего массива под давлением основания можно рассматривать также, исходя из условия равенства активного давления R_0 , вызываемого сползанием призмы acd , и пассивного сопротивления Q_0 по плоскости ac , рассматривая сыпучий массив нагруженным по плоскости $M-N$ давлением веса H сооружения и давлением h_0 слоя земли (черт. 76).

Так как при таком рассмотрении:

$$R_0 = \frac{1}{2} \delta (h^2 + 2hH) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$Q_0 = \frac{1}{2} \delta (h^2 + 2hh_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

то условие равновесия напишется так:

$$(h^2 + 2hh_0) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \cong (h^2 + 2hH) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Делая приведение и решая его относительно h_0 , получим:

$$h_0 \geq Hk^2 - \frac{1}{2} h (1 - k^2) \dots \dots \dots (107)$$

В таком виде решение этой задачи было получено проф. Белзецким ¹⁾, который, при выводе формулы, исходил из наибольшего напряженного состояния по плоскостям сдвигов.

Проф. Белзецкий обуславливает применение этой формулы введением величины h , определяя ее в зависимости от ширины « b » основания сооружения по формуле:

$$b = h \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

т.-е. он принимает высоту h призмы сползания, исходя из полной ширины « b » основания.

Если в формуле (105) Паукера принять h высоту призмы сползания распространяющейся от середины основания в обе стороны, то формулы (105) и (107) становятся идентичными.

Проф. Янковский ²⁾ при решении задачи о глубине заложения основания исходил из условия, что давление R_0 от призмы сползания нагруженной давлением H сооружения должно уравновешиваться пассивным сопротивлением Q_0 сыпучего массива по плоскости ac глубиной $(h + h_0)$ (черт. 77). В этом предположении условие равновесия напишется в таком виде:

$$\frac{1}{2} \delta (h + h_0)^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \delta (h^2 + 2hH) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Делая приведение и решая это уравнение относительно h_0 , получим:

$$h^2_0 + 2hh_0 \geq 2hHk^2 - h^2(1 - k^2) \dots \dots \dots (108)$$

Согласно выводов Янковского величина h в этой формуле должна быть принята в зависимости от ширины основания по выражению

$$h = \frac{b \cos 2\varphi}{4 \cos \left(\frac{45 + \varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{45 - \varphi}{2} \right) \cos \varphi},$$

где φ — угол естественного откоса.

Формулу Янковского надо дополнить следующими соображениями.

Если рассматривать возможность выдавливания грунта, то в момент начала выпирания, последнее будет происходить не полной треугольной

¹⁾ Проф. С. Белзецкий. Статика сыпучего тела, 1914 г., стр. 95.

²⁾ Журн. Мин. Пут. Сообщ. 1889 г. и Курдюмов. — О сопротивлении естественных оснований 1889 г. Формула Янковского по его выводу представлена в таком виде:

$$H = \frac{1}{k^2} \frac{(h + h_0)^2}{2h} - \frac{h}{2},$$

что соответствует формуле (108).

призмой cfe , а по плоскостям ce и ak ; часть akf в момент начала выпирания начнет сползать под действием собственного веса в сторону сооружения. Вследствие этого пассивное сопротивление по плоскости ac понизится.

При этом предположении, величина пассивного давления сыпучей массы может быть определена из того соображения, что призма выпирания $asek$ будет находиться под действием собственного веса и давления на нее R от верхней призмы сползания akf . Путем графического разложения (черт. 77 б) весов G_1 , призмы akf и веса G призмы cef нетрудно показать, что, при сделанном предположении, величина пассивного сопротивления Q_0 призмы cef уменьшается на величину активного давления R'_0 призмы akf ; так как при этом условии все силы действующие на призмы akf и $asek$ образуют замкнутые многоугольники.

Подтверждением этим соображениям служат опыты, которые показывают, что выпирание грунта на поверхности начинается не около сооружения, а несколько отступя от него.

Исходя из этих соображений надо условие возможного равновесия между призмой сползания под основанием и призмой выпирания написать так:

$$Q^0 - R'_0 > R_0,$$

или, выражая величины давлений в функции высот, получим:

$$\frac{1}{2} \delta (h + h_0)^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{2} \delta h_0^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \delta (h^2 + 2hH) \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

После сокращения и приведения, получим:

$$(h + h_0)^2 - h_0^2 k^2 \geq (h^2 + 2hH) k^2,$$

или

$$h_0^2 (1 - k^2) + 2hh_0 = 2hHk^2 - h^2 (1 - k^2) \dots (109)$$

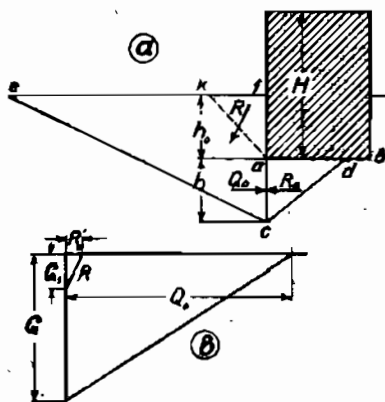
По этому выражению глубина заложения получается несколько большей, чем по формуле Янковского (108).

Можно было бы указать еще ряд решений, предложенных разными авторами¹⁾, но все они не отличаются большей точностью, чем вышеизложенные.

Из сопоставления формул (105—109) можно видеть, что наибольшую глубину заложения дает формула (105) Паукера, по которой соотно-

¹⁾ Миняев. «Новая теория давления земли». 1915 г., стр. 85.

Пузыревский. «Расчет устойчивости фундаментов». 1923 г., стр. 38.



Черт. 77.

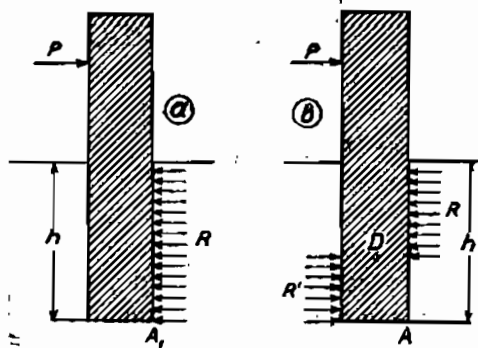
шение между глубиной заложения h_0 и величиной нагрузки определяется величиной:

$$\frac{h}{H} = k^2 = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right),$$

при $\varphi = 30^\circ$ это отношение $h : H = \frac{1}{9}$.

Обычно на практике это условие легко удовлетворяется и глубина действительного заложения основания берется в 2—3 раза более расчетной.

§ 27. Заложение фундамента при действии на сооружение горизонтальных сил. Под действием горизонтальных сил сооружение стремится сдвинуться по плоскости основания и повернуться вокруг некоторой точки, расположенной в пределах высоты фундамента сооружения.



Черт. 78.

Сдвигу сооружения препятствуют силы трения, развиваемые по основанию фундамента, и сопротивление земли, развиваемое по передней грани фундамента, которые обычно достаточно велики, чтобы воспрепятствовать этому движению.

Что касается поворота сооружения, то этому противодействуют сопротивление земли, распространяющееся по основанию

фундамента в виде неравномерного сжатия его, а также сопротивление земли, развиваемое по передней и задней граням фундамента.

При решении этой задачи, прежде всего, возникает вопрос, вокруг какой точки происходит вращение сооружения под действием горизонтальных сил. Некоторые авторы исходят из предположения, что сооружение, будучи лишено возможности скользить по основанию вследствие развивающихся по нему больших сил трения, стремится повернуться вокруг нижнего ребра A_1 передней грани (черт. 78), как это обычно предполагается при рассмотрении общей устойчивости сооружения. Нетрудно, однако, показать, что такое предположение, являющееся невыгоднейшим в смысле устойчивости, не является невыгоднейшим в смысле определения глубины заложения основания.

Действительно, если исходить из предположения, что вращение сооружения будет происходить вокруг нижнего ребра A_1 передней грани, то боковое сопротивление грунта будет распространено по всей высоте передней грани фундамента и равнодействующая R этого сопротивления будет равна горизонтальному давлению P (черт. 78 а).

Если же предположить, что вращение сооружения будет происходить вокруг некоторой точки D , лежащей выше основания (черт. 78 б), то

этому вращению будут противодействовать боковые сопротивления грунта, распространяющиеся по передней и задней граням фундамента. При этом сопротивление R грунта по передней грани должно уравновешивать не только внешние горизонтальные силы, но и сопротивление грунта распространенное по задней грани, так что в этом случае $R = P + R'$, что, очевидно, является более невыгодным, чем первое предположение.

В соответствии с изложенными соображениями мы будем в последующем исходить из соображения, что вращение фундамента происходит вокруг некоторой точки D , являющейся мгновенным полюсом возможного перемещения сооружения.

Второй вопрос, который возникает при разборе этой задачи — это вопрос об очертаниях эпюр сопротивлений и зависимости их между собой.

Очертание эпюры сопротивления по основанию фундамента является результатом неравномерного сжатия его, а потому это очертание следует принять по трапеции с характерными для нее ординатами n_1 и n_2 на крайних точках основания (*черт. 80*).

Что касается вопроса об очертании эпюр сопротивлений по высоте боковых граней, то его следует рассматривать, исходя из условий возможного развития сопротивления грунта в отдельных точках.

Мы будем исходить из условия, что фундамент представляет собой целое жесткое тело, жесткость которого бесконечно велика по сравнению с окружающим его грунтом. Из этого предположения вытекает, что, если фундамент и все сооружение, вследствие упругих свойств грунта, получит некоторое бесконечно малое вращение вокруг точки D , то боковые грани его наклонятся на тот же угол α , на который наклонится основание фундамента и, следовательно, упругие деформации грунта по ширине основания и по высоте боковых граней будут зависеть от этого угла и положения рассматриваемых точек относительно точки D мгновенного полюса. Это предположение позволяет вывести следующую зависимость между давлениями в отдельных точках по основанию и боковым граням фундамента.

Если обозначить коэффициент упругости грунта в плоскости основания через C , то величины давлений в отдельных точках его могут быть представлены в таком виде (*черт. 79*)

$$n_1 = C \Delta y_1 \quad n_2 = C \Delta y_2,$$

где Δy — величина возможно упругой просадки грунта.

Отсюда можно вывести, что основание наклоняется на величину угла α , тангенс которого

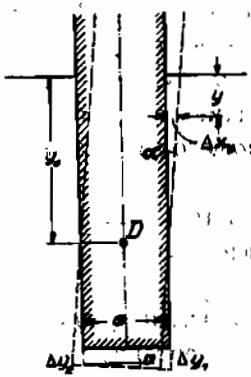
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_2}{a} = \frac{n_1 - n_2}{Ca} \dots \dots \dots (110)$$

где a — ширина основания фундамента.

Так как этот угол наклона сохраняется и для вертикальных граней фундамента, то упругая просадка в отдельных точках каждой грани, располо-

женных на расстоянии y от поверхности грунта и на расстоянии $(y_0 - y)$ от точки D возможного вращения фундамента, будет определяться величиной

$$\Delta x_y = (y_0 - y) \operatorname{tg} \alpha.$$



Черт. 79.

Если предположить, что коэффициент упругости грунта на высоте этой точки — C' , то величина давления грунта на этой высоте может быть выражена так:

$$n_y = C' \Delta x_y = C' (y_0 - y) \operatorname{tg} \alpha. \quad (111)$$

Величина коэффициента упругости C' по высоте граней фундамента неодинакова; с некоторым вероятием мы можем предположить, что нарастание упругости грунта пропорционально глубине. Если также предположить, что на уровне основания боковая упругость — C почвы будет равна некоторой части C , т. е.

$$C' = \beta C,$$

то эти два предположения позволят представить величину давления в любой точке по высоте граней в таком виде:

$$n_y = \beta C \frac{y}{h} (y_0 - y) \operatorname{tg} \alpha. \quad (112)$$

Подставляя вместо $\operatorname{tg} \alpha$ его значение по форм. 110, получим:

$$n_y = \beta \frac{y}{h} (y_0 - y) \frac{n_1 - n_2}{a}. \quad (113)$$

Легко видеть, что в полученном выражении сопротивления грунта в точке на глубине y от поверхности грунта переменным является ордината y и само выражение сопротивления представляет собой ординату параболы, для которой

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 & \quad n_y = 0 \\ \text{при } y = y_0 & \quad n_y = 0 \end{aligned}$$

и наибольшее значение давления имеют место

$$\left. \begin{aligned} \text{при } y = \frac{1}{2} y_0 & \quad n = \beta \frac{n_1 - n_2}{ah} \frac{y_0^2}{4} \\ \text{при } y = h & \quad n_n = -\beta \frac{n_1 - n_2}{a} (h - y_0) \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Таким образом, при сделанных допущениях, мы пришли к выводу, что эпюра сопротивлений будет распространяться по боковым граням фундамента по параболе, в которой положение нулевой точки D и ординаты изменяются в зависимости от глубины h — заложения фундамента.

Имея очертания эпюр сопротивлений грунта, можно перейти к составлению уравнений равновесия, которые на основании законов статики напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} P - \int_0^h n_y dy &= 0 \\ P(H+h) + M_0 - \int_0^h n_y(h-y) dy &= 0 \\ V - \frac{1}{2r}(n_1 - n_2)a &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (115)$$

Подставив вместо n_y его значение по формуле (113) и проинтегрировав, получим:

$$\left. \begin{aligned} 6P - \beta \frac{n_1 - n_2}{a} h(3y_0 - 2h) &= 0 \\ 12P(H+h) + 12M_0 - \beta \frac{n_1 - n_2}{a} h^2(2y_0 - h) - (n_1 - n_2)a^2 &= 0 \\ 2V - (n_1 - n_2)a &= 0 \end{aligned} \right\} (116)$$

Если выразить величину y_0 в некоторой доле от глубины y заложения

$$y = \alpha h \dots \dots \dots (117)$$

то первые два уравнения после подстановки и приведения, представляются в таком виде:

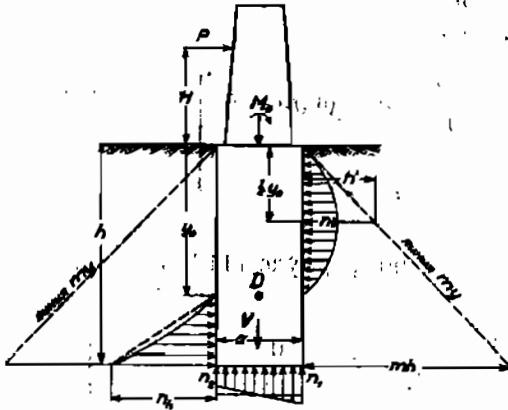
$$\left. \begin{aligned} 6P - \beta \frac{n_1 - n_2}{a} h^2(3\alpha - 2) &= 0 \\ 12P(H+h) + 12M_0 - \beta \frac{n_1 - n_2}{a} h^3(2\alpha - 1) - (n_1 - n_2)a^2 &= 0 \end{aligned} \right\} (118)$$

В выведенные выражения равновесия входит величина β отношения боковой и вертикальной упругости грунта. Современная техника не имеет данных о величине этого соотношения, что не позволяет дать окончательного решения пока не будет установлена эта зависимость, но, по идее, она близка к единице. Отметим, что если коэффициент $\beta < 1$, то, как можно видеть из последующего решения уравнений (122), это ведет к уменьшению искомой глубины заложения фундамента и увеличению разности $(n_1 - n_2)$.

Продолжая исследование теоретического обоснования задачи, мы должны будем перейти к изучению данных, обуславливающих глубину заложения и связанных с предельными сопротивлениями возможными для данного грунта. Как и при изучении условий заделки гибких стенок (см. § 20) мы должны будем исходить из условия, что величины давлений по боковым граням не должны выходить за пределы величины:

$$n'_y = \tau y = \delta \left[\operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) \right] \dots \dots \dots (119)$$

При принятом развитии боковых эпюр по параболе (черт. 80) выдвинутое условие (119) устойчивости будет соблюдено только в том случае, если эта прямая, ординаты которой $n'y = my$ будет касательной к параболе в ее начале на поверхности грунта; как известно, ордината этой прямой на уровне вершины параболы будет вдвое больше ординаты самой параболы. Таким образом по условию предельного равновесия, мы можем написать:



Черт. 80.

$$2n = n'$$

$$2\beta \frac{n_1 - n_2}{ah} \frac{y_0^2}{4} = m \frac{y_0}{2},$$

откуда получим:

$$n_1 - n_2 = \frac{m}{\beta} \cdot \frac{ah}{y_0} = \frac{m}{\beta} \frac{a}{\alpha} \dots \dots \dots (120)$$

Присоединив это условие к уравнениям (118), можно перейти к определению искомой глубины заложения, для чего надо из уравнений (118) исключить коэффициент α .

Из первого уравнения (118) следует, что

$$= \frac{2P}{h^2} \frac{a}{\beta(n_1 - n_2)} + \frac{2}{3} \dots \dots \dots (121)$$

Подставляя это значение α во второе уравнение и делая приведение, получим:

$$12Ph + 12M_0 + 8Ph - \frac{1}{3} \beta \frac{n_1 - n_2}{a} h^3 - (n_1 - n_2)a^2 = 0 \dots \dots (122)$$

Уравнения (120 и 122) не дают прямого решения для определения необходимой глубины заложения h фундамента. В виду сложности уравнений и высокой степени неизвестного h проще определять величину его путем приближения, задаваясь отношением $\alpha = y_0 : h$, которое в большинстве случаев изменяется в малых пределах, примерно от 0,66 до 0,75¹⁾.

¹⁾ Меньший предел отношения $y_0 : h$ имеет место для случая, когда горизонтальная сила, действующая на сооружение $P = 0$ и остается только момент M_0 внецентренности в уровне верха фундамента.

Для этого случая первое уравнение из группы (118) принимает вид:

$$-\beta \frac{(n_1 - n_2)}{a} h^2 (3\alpha - 2) = 0.$$

Но так как $(n_1 - n_2)$ не равно нулю, то следовательно $(3\alpha - 2) = 0$, а потому

$$\alpha = \frac{2}{3} \text{ или } y_0 : h = 0,66,$$

что является меньшим возможным пределом для этого отношения.

Задавшись этим отношением α , определяем из уравнения (120) величину $(n_1 - n_2)$, и подставив ее в уравнение (122) определяем h . Правильность принятого отношения α проверяется подстановкой величин $(n_1 - n_2)$ и h в уравнение (121).

Процесс расчета приведен в нижеследующем примере 8.

После того как определена глубина h , проверяются величины наибольших давлений на боковых гранях по формулам (114), величина которых должна быть меньше m . Если это условие не удовлетворено, то надо или увеличить глубину заложения h или уширить основание a фундамента. Последний фактор повышает разницу величины $(n_1 - n_2)$ и, следовательно, увеличивает степень работы момента по основанию за счет момента боковых эпюр.

Величины напряжений в плоскости основания определяются из сопоставления уравнения (120) и третьего уравнения в группе (116) по ним

$$n_1 - n_2 = \frac{m \cdot a}{\beta a} \qquad n_1 + n_2 = \frac{2V}{a}$$

отсюда

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2V}{a} + \frac{m \cdot a}{\beta a} \right] \\ n_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{2V}{a} - \frac{m \cdot a}{\beta a} \right] \end{aligned} \qquad (123)$$

Наибольшее из них n_1 должно быть меньше допускаемого напряжения для данного грунта. Если этого нет, то надо увеличивать ширину a основания, вызывая понижение первого члена в скобках.

В сделанном выводе мы не учитывали сил трения, имеющих место в плоскости основания и по боковым граням фундамента. Эти силы повышают устойчивость и, следовательно, идут в запас прочности.

То обстоятельство, что они не введены в расчет позволяет принимать для напряжений от сопротивления грунта по задней и передней грани предельные напряжения, не вводя обычного коэффициента безопасности.

Если сооружение будет находиться не под действием сосредоточенной горизонтальной силы P , как это принималось выше, а под действием давления земли, как это, например, имеет место в устоях, то в этом случае величина горизонтального давления определяется из тех же соображений, какие были изложены при разборе расчета шпунтовых стенок (см. § 21).

Пример 8. Требуется определить глубину заложения подпорной стенки, показанной на *черт. 81*, несущую вертикальную нагрузку $V_1 = 3,2 \text{ т}$ и горизонтальную нагрузку $P = 2 \text{ т}$.

Вес бетонной кладки $\delta_1 = 2 \text{ т}$ в куб. м. Вес земли $\delta = 1,8 \text{ т}$ в куб. м. Угол внутреннего трения грунта $\varphi = 30^\circ$.



Черт. 81.

Согласно заданных размеров стенки, вес отдельных частей ее будет:

$$V_2 = 0,6 \times 3 \times 2 = 3,6 \text{ т.}$$

$$V_3 = 0,6 = 1/2 \times 2 = 1,8 \text{ т.}$$

$$V_4 = 1,5 \times h \times 2 = 3h \text{ т.}$$

Полная вертикальная слагающая в плоскости основания

$$V = 3,2 + 3,6 + 1,8 + 3h = (8,6 + 3h) \text{ т.}$$

Согласно тех же размеров момент M_0 внецентренности в плоскости верха фундамента будет:

$$\begin{aligned} M_0 &= V_1(0,6 - 0,4) + V_2(0,6 - 0,30) + V_3(0,6 - 0,6 - \frac{1}{3} \cdot 0,6) = \\ &= 3,2 \cdot 0,2 + 3,6 \cdot 0,3 - 1,8 \cdot 0,2 = 1,36 \text{ т.м.} \end{aligned}$$

Уравнение прямой ограничивающей предельные боковые давления

$$m y = 1,8 \left[\operatorname{tg}^2(45^\circ + \frac{\varphi}{2}) (-\operatorname{tg}^2(45^\circ - \frac{\varphi}{2})) \right] y = 4,8 y \frac{m}{\text{м}^2}.$$

Задаемся отношением $\alpha = \frac{y_0}{h} = 0,72$ и $\beta = 1$ (условно)

По уравнению (120):

$$n_1 - n_2 = \frac{4,8 \cdot 1,5}{\beta \cdot 0,72} = 6,66 \cdot 1,5 = 10 \frac{m}{\text{м}^2}.$$

Из уравнения (122):

$$12 \cdot 2 \cdot 3 - 12 \cdot 1,36 + 8 \cdot 2h - \frac{1}{3} 6,66 h^2 - 10 \cdot 1,5^2 = 0,$$

отсюда

$$-2,22h^2 + 16h + 35,18 = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при $h = 3,45 \text{ м.}$

При этом значении h коэффициент α по уравнению (121)

$$\alpha = \frac{2 \cdot 2}{3,45^2} \cdot \frac{1}{6,66} + \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 3}{20} = 0,715 \approx 0,72,$$

что близко к принятому в расчете.

Следовательно $y_0 = 0,72 h = 0,72 \cdot 3,48 = 2,48$.

Проверяем наибольшие давления по боковым граням (форм. 114)

$$n_h = \beta \frac{n_1 - n_2}{a} (h - y_0) = \frac{10}{1,5} (3,45 - 2,48) = 6,6 < 4,8 \cdot 3,45 = 16,5 \frac{m}{\text{м}^2}.$$

Напряжения в плоскости основания определяются по уравнениям (123), так как

$$V = (8,6 + 3 \cdot 3,45) = 19, \text{ т, то}$$

$$n_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{2 \cdot 19}{1,5} + 10 \right] = 17,6 \frac{m}{\text{м}^2} = 1,76 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

$$n_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{2 \cdot 19}{1,5} - 10 \right] = 7,6 \frac{m}{\text{м}^2} = 0,76 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

что обычно допустимо.

О Г Л А В Л Е Н И Е.

Предисловие	Стр. 3
-----------------------	-----------

Работа упругих сил и определение перемещений в системах

Работа внешних и внутренних сил.

§ 1. Введение	7
§ 2. Зависимость между внешней и внутренней работами	7
§ 3. Обобщенное выражение работы внешних сил	10
§ 4. Выражение работы внутренних сил	13
1) Действие нагрузки	14
2) Влияние температуры	21
§ 5. Воображаемая и действительная работа	24
1) Воображаемая работа	24
2) Действительная работа	26
Примеры 1 — 5.	29
§ 6. Характерные свойства потенциальной энергии	35
§ 7. Зависимость между внешними силами и потенциальной энергией	39
§ 8. Зависимость между перемещениями и потенциальной энергией	40
§ 9. Теорема о взаимности работ	42
§ 10. Теорема о взаимности перемещений	44

Аналитический расчет перемещений.

§ 11. Общий вид перемещения	46
Примеры 6—10.	49
§ 12. Определение перемещений как производной потенциальной энергии	58
Примеры 11—12.	60
§ 13. Вычисление перемещений, вызываемых изгибающим моментом, при помощи вюр-моментов	63
Примеры 13—14.	69
§ 14. Упрощения, вносимые условиями симметричности	75
Примеры 15—16.	77
§ 15. Формула для определения угловых деформаций в фермах	80
§ 16. Линии влияния перемещений	83
Примеры 17—18.	84

Графическое построение перемещений.

§ 17. Общие соображения	87
§ 18. Построение диаграмм перемещений для шарнирной цепи	87
§ 19. Построение эпюр перемещений	91
§ 20. Определение перемещений при помощи упругих грузов	93
1) Влияние деформации углов	93
2) Влияние продольных деформаций	97
3) Совместное влияние угловых и продольных деформаций	99
§ 21. Применение веревочного многоугольника для построения эпюр перемещений	102
§ 22. Эпюры перемещений в системах со сплошным сечением	105
1) Влияние моментов	105
2) Влияние момента и продольных сил	106
3) Влияние поперечных сил	107
Примеры 19 — 20.	108
§ 23. Построение эпюр перемещений в простых фермах	116
Выражение фиктивных грузов для различных видов решетки ферм	121
Примеры 21 — 22.	124
§ 24. Построение эпюр перемещений в системах с распором	135
Пример 23.	137
§ 25. Построение линий влияния перемещений	140
§ 26. Построение диаграмм перемещений для ферм по способу Виллио	143
1) Построение диаграмм в простых фермах	144
2) Построение диаграмм в сложных фермах	147

Сыпучие тела в приложении к расчету сооружений**Сыпучие тела.**

§ 1. Сыпучие тела и их свойства	153
§ 2. Напряженное состояние в сыпучем теле	158
§ 3. Теория Ранкина	162
Пример 1.	163
Частные случаи	164
§ 4. Метод Кудона	165
§ 5. Построение Ребхана	169
§ 6. Построение Понселе	171
§ 7. Частные случаи	175
§ 8. Направление давления	176
§ 9. Точка приложения давления	179
§ 10. Отпор сыпучего тела	182
§ 11. Поверхность сыпучего тела ломаная	186
§ 12. Учет давления нагрузки расположенной на сыпучем теле	188
1) Давление от веса самого сыпучего тела	190
2) Давление сыпучего тела со сосредоточенной нагрузкой на нем	191
3) Давление сыпучего тела со сплошной нагрузкой на нем	193
§ 13. Точка приложения и направление давления при действии временной нагрузки на сыпучее тело	195
1) Действие одного сыпучего тела	197
2) Действие сыпучего тела со сплошной нагрузкой	198
3) Действие сыпучего тела со сосредоточенной нагрузкой	200
Направление давлений	202
Пример 2. Горизонтальная поверхность со сосредоточенным грузом	202
Пример 3. Ломаная поверхность с загрузением	204

Приложение теории сыпучего тела в расчетах сооружений.

Стр.

Массивные стенки.

§ 14. Расчет каменных и бетонных стенок	207
Условия устойчивости	207
Условия прочности	209
Кривая давлений	210
§ 15. Рациональные формы стенок	211
§ 16. Стенка с ломаным очертанием	215
§ 17. Влияние напластывания земли за стенкой	221
§ 18. Влияние воды	223
§ 19. Пример 4	225

Гибкие стенки.

§ 20. Обоснование расчета	232
Пример 5	237
§ 21. Расчет шпунтовых стенок	238
Условие устойчивости	238
Условие прочности	241
Пример 6	241
§ 22. Расчет отдельных столбов	243
Пример 7	246

Параллельные стенки.

§ 23. Графический расчет	247
§ 24. Расчет давления при большой высоте стенок	248
§ 25. Перемычки	251

Глубина заложения оснований.

§ 26. Заложение фундамента при равномерном распределении давления по основанию	254
§ 27. Заложение фундамента при действии на сооружение горизонтальных сил	258
Пример 8	263

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СТУДЕНТОВ СЕЛЬСКО-ХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ имени ТИМИРЯЗЕВА

„НОВЫЙ АГРОНОМ“

Правление, центральн. склад, книжный
и писчебум. магазины: Москва, Б. М. Дми-
тровка, д. № 3, тел. 5-57-29 и 4-03-18.
Представительство на Украине—г. Харь-
ков, Горькинский, 2, „Книгоспидна“.

Текущие счета:
в Госбанк, Моск. К-ра № 1506.
• Горбанк, Центр. Отд. № 177.
• Промбанк, Моск. Отд. № 1184.

В КНИЖНОМ МАГАЗИНЕ имеется большой выбор сельскохозяйственной литературы всех издательств СССР.

КРОМЕ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
::: В МАГАЗИНЕ И СКЛАДЕ :::

„НОВЫЙ АГРОНОМ“ имеется исчерпывающий выбор книг по всем отраслям знаний всех издательств Союза ССР, литература детская, учебники для школ всех ступеней и проч. литература.

УСЛОВИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАКАЗОВ:

1. Для с/х. учебных заведений, с-х. опытных станций и полей, земотделов, агроучастков и других культурно-просветительных учреждений книги высылаются наложенным платежом по получении задатка в размере 25% стоимости заказа — со скидкой 5%.

2. Для издательств и книготорговых предприятий — скидка, установленная Комитетом по Делах Печати Наркомтора от 26 января 1928 г.

3. Для отдельных граждан книги высылаются с нал. платежом при получении задатка в размере половины стоимости заказа.

ОТДЕЛ АГРООБОРУДОВАНИЯ

ПРЕДЛАГАЕТ ВНИМАНИЮ ЗЕМРАБОТНИКОВ В БОЛЬШОМ ВЫБОРЕ

НАГЛЯДНЫЕ ПОСОБИЯ

ПО ВСЕМ ОТРАСЛЯМ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

ПРОЕКЦИОННЫЕ ФОНАРИ С КОРРЕГИРОВАННОЙ ОПТИКОЙ, С КАРБИДНЫМИ ЛАМПАМИ, АГРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ И АППАРАТУРУ.

ВСЕ ЗАКАЗЫ ВЫПОЛНЯЮТСЯ БЫСТРО И АККУРАТНО.

Заказы и деньги направлять по адресу: Москва Б. М. Дмитровка, 3.
Издательству „НОВЫЙ АГРОНОМ“.

ТРЕБУЙТЕ КИТАЛОГИ.

ПРИ ИЗДАТЕЛЬСТВЕ ИМЕЕТСЯ

Писчебумажное и канцелярское Отделение.

БОЛЬШОЙ ВЫБОР

ВСЕВОЗМОЖНЫХ КАНЦЕЛЯРСКИХ И ЧЕРТЕЖНЫХ ТОВАРОВ.

ПОСТАВКА ДЛЯ УЧРЕЖДЕНИЙ И КОНТОР.

ПРОДАЖА ОПТОМ И В РОЗНИЦУ.

Заказы иногородним покупателям высылаются наложенным платежом при получении задатка в размере 25% стоимости всего заказа.

ПРИ ОПТОВЫХ ЗАКАЗАХ—ОБЫЧНАЯ СКИДКА.

Имеются в продаже собственные издания:

- Проф. Богданов, Е. А. „Основы менделизма“. 162 стр., 13 рис. Ц. 1 руб.
Бородин, П. И. „Русский шпагат“. 47 стр., 30 рис. Ц. 75 к.
Инж.-агр. Быков, А. Ф. „Гидрометеорология“. 131 стр., 20 график. Ц. 1 р. 50 к.
Его же. „Применение габионов Пальвиса в мелиоративном строительстве“. 44 стр., 15 черт. Ц. 65 к.
Проф. Бюшгенс, С. С. „Конспект по элементам теории векторов“. 51 стр., 28 черт. Ц. 1 руб.
Проф. Вильямс, В. Р. „Общее земледелие с основами почвоведения“. 494+XII стр., 128 рис. Ц. 4 руб.
Гонтарева, И. И. „Счетоводный анализ крестьянского хозяйства“ с вступ. статьей проф. Чаянова, А. В. (Труды Научно-Исследоват. Инстит. С.-Х. Экономии). 72+XXXII стр. Ц. 90 к.
Горяинов, А. А. „Амбарные вредители и борьба с ними“. 120 стр., 48 рис. Ц. 1 р. 50 к.
Проф. Горячкин В. П. „Земледельческая механика“. Ч. I, 200 стр., 263 черт. на отд. листах. Ц. 1 р. 50 к.
Проф. Гурин, Г. И. „Зоогигиена“ (Уход за сел.-хоз. животными). 195 стр., 50 рис. Ц. 2 р.
Проф. Демьянов, Н. Я. „Органическая химия“. Вып. I (Общая часть, углеводороды, галоидные и производ.). 2 издание. 152 стр., 93 рис. Ц. 75 к.
Его же. „Агрономическая химия“ (Азотистые гетероциклы и алколонды). 48 стр. Ц. 65 к.
Проф. Демьянов, Н. Я. и Путохин, Н. И. „Руководство к практическим занятиям по биохимии“. Углеводы, жиры, белки и другие биологически важные соединения. 192 стр., 25 рис. Ц. 2 р.
Домонтович, М. К. „Определение концентрации водородных ионов“ (Колориметрическое и электрометрическое определение реакции). 2 дополн. и перераб. изд., 75 стр. Ц. 85 к.
Проф. Иванов, М. Ф. „Смушково-молочное овцеводство“. 2-е изд., 126 стр., 13 рис. Ц. 50 коп.
Д-р Кривомоский, Рихард. „Развитие основных принципов науки о сельском хозяйстве в Западной Европе“. Перев. с немец. Л. К. Солдатов, с предисловием Научно-Исследовательского Института и с дополнительной статьей проф. А. В. Чаянова — „Основные линии развития русской сельскохозяйственной мысли за два века“. 239 стр. Ц. 2 р. 50 к.
Леньков, П. В. „Семена кормовых трав“. Определитель. 144 стр., с прил. 26 табл. цветн. рис. Ц. 1 р. 90 к.
Проф. Ларс Фредериксен. „Расчет зимнего корма для молочного скота“. Перевод с датского 2-го изд. 1926 г. И. Данкевич. С дополнениями А. П. Юрмалата. Под редакц. и с предисл. проф. Е. Ф. Лискуна. 206 стр. Ц. 1 р. 50 к.
Проф. Лискун, Е. Ф. „Кормление с.-х. животных“. 2-е дополненное и переработанное издание, 260 стр., 20 рис. Ц. 2 р. 25 к.
Его же. „Русские отродья крупно-рогатого скота“. 212 стр., 65 рис. Ц. 2 р. 10 к.
Лебедев, Д. С. „Производство голландского сыра“. 2-е переработанное и дополн. издание, 136 стр., 54 рис. Ц. 1 р. 40 к.
Агроном Малькович, Т. А. „Кормление молочного скота в подгородных хозяйствах“, с предисл. проф. Богданова, Е. А. 144 стр., 8 диагр. Ц. 1 р. 50 к.
Проф. Милович, А. Я. „Лаборатория гидравлических установок“ при ТСХА. (Описание). Журн. форм. 24 стр., 21 рис. На меловой бумаге цена 2 р., на алекс. бумаге цена 1 р. 20 к.
Проф. Мирошкин, Я. А. „О законе убывающей доходности“. Сборник статей англ., америк. и немецк. авторов. 305 стр., 23 диагр. Цена 3 р. 20 к.
Проф. Орлов, П. М. „Землеустройство“ (Теория и практика). 112 стр. Ц. 1 р. 20 к.
Инж.-агр. Палкуев, Я. А. — „Гидравлика“, курс лекций проф. А. Я. Миловича, читанный студентам инж. фак. ТСХА. 33 стр., 15 черт. Ц. 80 к.
Проф. Подарев, В. В. „Расчеты гидротехнических сооружений“. 159 стр. 112 черт. Ц. 2 р.
Его же. „Гидротехнические сооружения“ — Плотины — I. Вып. IV, с 97 черт. в тексте. Ц. 80 к.
Его же. „Гидротехнические сооружения“ — Плотины — I. Вып. V, с 150 черт. Ц. 1 р. 60 к.
Его же. „Гидротехнические сооружения“ — Кавалы — II, с 165 черт. в тексте. Ц. 1 р. 20 к.

- Проф. Придорогин, М. И. „Экстерьер“ — Оценка с.-х. животных по наружному осмотру. 6-е посмертное издание под редакцией и с предисл. проф. Е. Ф. Лискуна. 207 стр. с 174 рис. в тексте и 7-ю таблицами. Ц. 1 р. 75 к.
- Проф. Прокофьев, И. П. „Теория сооружений“. Часть 1. 216 стр. текста и атлас чертежей (89 таблиц, 248 черт.). Ц. 4 р. 50 к., в переплете 5 р.
- Проф. Рыков, В. И. „Опыт изучения травопольных севооборотов“. Стр. 120. Ц. 1 р. 50 к.
- Проф. Стольгане, А. А. „Агрохимический анализ“. 2-е переработанное и дополненное издание. 213 стр., 26 рис. Ц. 2 р. 25 к.
- Проф. Студенский, Г. А. „Проблемы экономики и географии сельского хозяйства“. 301 стр., 52 картогр. и 23 диагр. Ц. 2 р. 50 к.
- Т. Дж. Тальберт. „Американские правила агропропаганды“. Пер. с англ., под редакц. проф. Фабриканта, А. О. 37 стр. Ц. 25 к.
- Проф. Чайнов, А. В. и Кратиннов, В. Р. „Методы таксационных исчислений в сельском хозяйстве“. (Труды Научно-Исслед. Инст. С.-Х. Экономии). 136 стр. Ц. 1 р. 20 к.
- Проф. Чайнов, А. В. и Тумановский, С. Н. „Экономические основы полевой культуры корнеплодов и трав“. (Труды Научно-Исслед. Инст. С.-Х. Экономии). 118 стр., 7 рис.-черт. Ц. 1 р. 15 к.
- Проф. Челинцев, А. Н. „Русское сельское хозяйство перед революцией“. 240 стр. 148 диагр. Цена 2 р. 25 к.
- Сельскосоюз-Госсельсклад. „Справочник по сел.-хоз. тракторному инвентарю“. Составил К. П. Шиловский, под редакцией проф. П. М. Белянчикова. Вып. I—181 стр., 147 рис. Ц. 1 р. 75 к.; вып. II—214 стр., 123 рис. Ц. 2 р. 25 к. и вып. III—248 стр., 175 рис. Ц. 2 р. 25 к.

КНИГИ, ПРИНЯТЫЕ НА СКЛАД:

- Проф. Калантар, А. А. „Закономерность окраски животных и термическая теория пигментации“. Ц. 40 к.
- Чернышев, В. Л. „Счетоводство, отчетность и делопроизводство совхозов, племхозов и колхозов“. Ц. 1 р. 40 к. |
- Бородин, П. И. „Как работать пеньковым сповязальным шпагатом“. Ц. 30 к.
- Бюллетень Научно-Исследовательского Института Сельско-Хозяйственной Экономии № 1—2. Ц. 1 р. 50 к.
- Шпринк, В. Э. „Библиографический указатель по вопросам хозяйственной конъюнктуры“, под редакцией и с предисловием проф. Кондратьева, Н. Д. (Труды Научно-Исслед. Института С.-Х. Экономии. 30 стр. Ц. 40 к.

ПЕЧАТАЮТСЯ:

- Проф. Вихляев, П. А. „Очерки теоретической статистики“. 3-е дополненное и переработанное издание.
- Проф. Гордеев, Г. С. „Обезземеливание американского фермера“.
- Диков, А. И. „Организация труда в крестьянском хозяйстве“.
- Кадзевич, Г. В. „Рыбные промыслы СССР“.
- Красинский, А. П. „Вопросы полеводства на опытном поле С.-Х. Академии им. Тимирязева“. Под редакц. и с предисл. проф. А. Г. Дояренко.
- Проф. Шитт, П. Г. „Экономические основы и перспективы развития плодводства СССР“.
- Шиловский, К. П. „Справочник по с.-х. тракторному инвентарю“. Под редакцией проф. П. М. Белянчикова. Выпуск IV.

ГОТОВЯТСЯ К ПЕЧАТИ:

- Проф. Дмитриев, А. М. „Луговое хозяйство“. Часть общая.
- Проф. Макаров, Н. П. „Себестоимость сельскохозяйственных продуктов“.
- Сборник, посвященный памяти проф. Н. Н. Худякова.
- Проф. Чайнов, А. В. „Бюджетные исследования“ (История и методы).
- Проф. Челинцев, А. Н. „Сельское хозяйство СССР после революции“.

УРАВНЕНИЯ ОПЕЧАТКИ.

Следует читать:

17	12	$\int_0^b b_1 \omega d\sigma$	$\int_0^b \omega d\sigma$
27	10	$\frac{\partial V_1}{\partial \delta_m} d\delta_m$	$\frac{\partial V}{\partial \delta_m} d\delta_m$
39	15	$\left(S_1 - \frac{\partial V_1}{\partial \delta_2} \right)$	$\left(S - \frac{\partial V}{\partial \delta_2} \right)$
40	17	выражения перегибания	выражения потенциальной энергии
41	3	$2P\delta$	$2P\delta$
50	4	$S_1 Q_1 \pm S_2 Q_2 +$	$S_1 \bar{Q}_1 + S_2 \bar{Q}_2 +$
56	5	$8 \cdot 1 \cdot 0,7$	$8 \cdot 1 \cdot 0,7$
60	1	$\Delta \theta$	$\Delta \theta_b$
104	12	$\frac{J_0}{J_1}$	$\frac{J_0}{J}$
111	18	$+ n_{k+1} t g \alpha_{k+1}$	$+ n_{k+1} t g \alpha_{k+1}$
127	10	$\frac{3P}{8 \cdot 60 \cdot \sin \alpha}$	$\frac{3P}{8 \cdot 30 \cdot \sin \alpha}$
131	6	$+ \Delta V_m t g \alpha_m - \Delta V_m \frac{h_m}{d_m}$	$+ \Delta V_m t g \gamma_m$
132	10	$+ \Delta s_a$	$+ \Delta s_b$
165	2	$\frac{1}{2} \Delta H^2 t g \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$	$\frac{1}{2} \delta H^2 t g^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right)$
183	9	$\frac{1}{2} \delta \Delta^2 \cos \varphi$	$\frac{1}{2} \delta H^2 \cos \varphi$
184	19	$= 90^\circ - \varepsilon - \varphi_0$	$= 90^\circ - \varepsilon + \varphi_0$
185	4	$FU = FS$	$FU = FC$
186	13	$= BD \times BE$	$= BD_2 \times BE$
187	24	$= 90^\circ - \varepsilon - \varphi$	$\pm 90^\circ - \varepsilon - \varphi_0$
188	16	B_1, B_2, \dots, B_9	B_1, B_2, \dots, B_9
189	14	N_1, N_2, \dots, N_9	N_1, N_2, \dots, N_9
190	13	$g = v \cdot \delta =$	$g = v \cdot \delta =$
212	14	$l_2 h \frac{1}{2} b_1$	$l_2 h \frac{1}{2} l_2 b_1$
216	10	$= B_1 D_1 \times B_1 E_1$	$= \sqrt{B_1 D_1 \times B_1 E_1}$
217	22	$= \frac{be}{e c_1}$	$= \frac{be}{bc_1}$
240	15	из первого уравнения (77)	из уравнения (76)
260	11	упругости	сопротивляемости
79	на черт. 47(а)	вправо от центра опоры должно пересечь горизонтальную линию и дать положительную часть опоры на протяжении от $\frac{1}{4} b$ до $\frac{1}{2} b$.	

-282155-

RLST



00000 0346116



ЦЕНА ЭКЗ. 4 Р.
ПЕРЕПЛЕТ 35 К.