И. П. ПРОКОФЬЕВ

Профессор Института Инженеров Транспорта и С.-Х. Академии им. Тимирязева.

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ I

СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

С приложением атласа чертежей

Научно-Технической Секцией Государственного Ученого Совета допущено в качестве пособия для ВУЗ'ов

НОВЫЙ АГРОНОМ

КООПЕРАТИВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СТУДЕНЧЕСТВА
С.-Х. АКАДЕМИИ им. ТИМИРЯЗЕВА
„НОВЫЙ АГРОНОМ"

МОСКВА
1926

Мосгублит 1046. Зак. 1943. Тираж 5.000.

„Интернациональная“ (39-я) тип. „Мосполиграф“, Путинковский пер., 3.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Основанием для настоящего курса послужили мои лекции, читаемые мною в Институте Инженеров Транспорта и на Инженерном Факультете Т. С-Х. А. При изложении курса я предполагал, что читатель хорошо знаком со всеми отделами теоретической механики, графической статикой и с сопротивлением материалов, почему я не считал нужным излагать доказательства основных теорем этих курсов, а пользовался ими как известными читателю.

Я счел целесообразным назвать свой курс «Теория Сооружений», отказавшись от обычно употребляемого названия «Статика сооружений», так как современное состояние этой науки вышло из области статики и пользуется более глубокими методами расчета.

По содержанию курс разбит мною на три части, в I-ю часть входят расчеты плоскостных статически определимых систем. Во II-ю часть должны войти теория сыпучего тела, связанные с ней вопросы устойчивости сооружений, и изучение деформаций плоскостных систем. В III-ю часть войдет расчет статически неопределенных систем.

При изложении настоящей I-й части курса я несколько отступил от, обычно принятого, изложения в разных отделах приемов расчета по законам статики и кинематики и постарался провести их параллельно. Не отрицая, что методы статики дают во многих случаях очень простые и удобные решения, особенно в простейших системах, надо признать, что они не применимы для расчета многих сложных систем. Метод кинематических построений, являясь более общим и дающим возможность расчета всяких систем, иногда несколько сложен в своих построениях. Об'единение обоих методов дает возможность разрешать сравнительно просто самые сложные системы. Считаясь с этим, я старался провести в своем курсе эти методы параллельно, устанавливая между ними связь и взаимные дополнения. Но все-таки изложение обоих методов проведено мною в отдельных параграфах, чтобы облегчить возможность пользоваться курсом читателям, которые не ставят себе задачей углубление в расчет сложных систем. Такие читатели без нарушения целостности чтения могут выделить из своего чтения параграфы 7, 29, 30, 35, 42, 49, 55, 56, 69, 74, в своем содержании затрагивающие изложение кинематических приемов и основывающиеся на них.

Первую часть я разбил на три основных отдела: общую часть, являющуюся вводной, балочные системы и системы с распором. В отделе балочных *систем я сравнительно мало уделил внимания изложению расчетов простых балок со сплошной стенкой, считаясь с тем, что этот вопрос освещается в курсах сопротивления материалов. В отделе балочных ферм я отказался от рассмотрения частных случаев ферм, об'единив их в отделе учета влияния контур ферм на величину усилий. В отделе сложных балочных систем, я несколько подробнее остановился на изложении различных подходов к расчету этих систем, чтобы дать возможность читателю выяснить их применимость в различных случаях. В отделе систем с распором, мною уделено большее внимание расчету арочных систем, как основных, остальные же системы рассмотрены скорее, как примеры с указанием особенностей в приемах их расчета.*

Приступая к настоящему изданию, я надеюсь, что критика моих читателей покажет насколько правильно я подхожу к вопросу и позволит мне внести необходимые исправления.

В заключение считаю приятным долгом принести свою благодарность лицам, содействовавшим мне в настоящем издании: моему сотруднику Борису Михайловичу Иванову, взявшему на себя труд корректуры, Ивану Филиповичу Маслову, принявшему на себя выполнение чертежей и Матвею Ивановичу Козлову, наблюдавшему за техническим выполнением настоящего издания—от издательства «Новый Агроном».

Проф. И. П. ПРОКОФЬЕВ.

Москва, 12 февраля 1926 г.

Общая часть.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. **Предмет теории сооружений.** Название «сооружение» может быть отнесено ко всему, что создается руками человека, но в технике под наименованием сооружения подразумеваются сооружения, размеры и формы которых определяются техническим и экономическим расчетами.

Продолжительность существования всякого сооружения обусловливает, чтобы оно во всех своих частях было устойчиво и прочно при всевозможных случаях действия на него внешних сил. Изучение условий устойчивости и прочности сооружения невозможно без знания условий действия на него внешних сил и распределения в нем внутренних сил и моментов, возникающих в частях сооружения под действием внешних сил или нагрузок, поэтому задача теории сооружений состоит в изучении распределения внутренних усилий в частях сооружения и определение их величины при невыгоднейшем загружении его. Но так как всякое сооружение, будучи прочно в своих частях, должно быть экономично и не должно иметь излишних размеров, то теория сооружений имеет второй своей задачей изучение целесообразных форм и видов сооружений, которые существенно изменяются в зависимости от технических свойств материалов.

Сооружениям из камня, бетона, имеющих слабое сопротивление разрывающим усилиям, свойственны массивные формы сооружений (своды черт. 1, подпорные стенки черт. 2 и т. д.), в которых поперечные размеры значительны по сравнению с длиной сооружения.

Сооружениям из дерева и металла, одинаково хорошо сопротивляющимся растяжению и сжатию, свойственны стержневые формы сооружений, например, балки, колонны (черт. 4), фермы (чер. 3) и т. д.

Все сооружения фактически имеют три измерения, а потому являются пространственными. Однако, громадное большинство из сооружений, по характеру действующих на них нагрузок и виду составляющих частей, может быть расчленено на плоскостные системы, т.-е. такие системы, в которых одно измерение не велико по сравнению с двумя другими и на которые действуют нагрузки, расположенные в плоскости той же системы или ей параллельной.

Так, например, какой либо мост, представляющий из себя пространственную систему (чер. 5), несущий вертикальную нагрузку от собственного веса и веса поезда, а также горизонтальную нагрузку от давления ветра, может быть разложен на следующие плоскостные системы:

1) на ряд поперечных схем (a) по числу поперечных балок AB, воспринимающих нагрузку от одной или нескольких пар колес;

2) на две вертикальных фермы AA' и BB', из которых каждая воспринимает половину нагрузки от веса всего моста и половину нагрузки от веса поезда, которая переносится в плоскость этих ферм опорами балок AB

и 3) на две горизонтальные фермы (черт. 5c) в плоскостях AB и $A'B'$, воспринимающих на себя горизонтальное давление ветра—W на боковые поверхности моста.

В массивных сооружениях (подпорные стенки, своды и т. п.) в плоскостную систему обычно выделяется плоскость поперечного сечения, толщина которого в этом случае принимается равной единице длины (чер. 6), в соответствии с чем действующие на массив нагрузки приводятся к давлению на единицу длины.

Однако, есть сооружения, которые не могут быть разложены на плоскостные системы. К таким сооружениям относятся, например; купольные и призматические покрытия (чер. 7), в которых плоскости ферм AC и BC не совпадают с плоскостью вертикальных сил, а потому не могут работать независимо друг от друга. Такие сооружения рассматриваются как пространственные

Простейшими видами сооружений являются балки, колонны, стены и тому подобные образования. Соединение в одно целое простейших образований создает сложные виды сооружений.

Образование сложных сооружений может быть таково, что образующие его простейшие части работают независимо одна от другой, а потому могут быть расчитаны назависимо друг от друга. Например, в большинстве зданий независимо работают половой настил, половые балки, стены, крыша и т. д., или в мостах (чер. 8) независимо работают балка AB и устои C, D и т. п. Но могут быть такие сложные сооружения, в которых соединение образующих его простейших частей таково, что существование самого сооружения в неизменяемом виде возможно только при совместной работе всех этих частей; такие сооружения носят название сочлененных сооружений или систем. Системы могут быть образованы при помощи шарнирных и жестких соединений.

С теоретической точки зрения сочлененные шарнирные системы представляют собой ряд геометрических тел, связанных между собой по концам шарнирами. Треугольник шарнирный в узлах (чер. 9) является простейшим примером такой сочлененной системы; устранение одного из стержней этого треугольника лишает его возможности существования. Вместе с тем смещение шарниров в треугольнике без изменения длины его сторон невозможно, а потому треугольник, шарнирный в вершинах, является сочлененной неизменяемой системой.

Если принять землю за основание как неизменяемую систему, то простейшее образование неизменяемой сочлененной системы может быть сделано присоединением к земле (E) третьего шарнира (III) помощью двух стержней 1 и 2 (чер. 10). Последующее развитие сочлененной системы может быть сделано путем присоединения к первому треугольнику второго треугольника, т.-е. узла IV помощью двух стержней 3 и 4 и т. п. Форма стержней, образующих систему, безразлична, но условие последовательного образования, т.-е. присоединение каждого последующего шарнира не менее как двумя стержнями в неизменяемой системе является необходимым условием.

Условие образования неизменяемого соединения может быть формулировано так: неизменяемое присоединение всякого плоского диска — к неизменяемой системе может быть сделано не менее как одним шарниром и одним стержнем, шарнирным по концам. Действительно, если диск S будет связан с неизменяемой системой E только шарниром I, (черт. 10а) то, не имея поступательного движения, диск может вращаться вокруг шарнира I, прикрепление же его к неизменяемой системе еще стержнем II—III лишает его возможности вращения и делает его прикрепление неизменяемым. В действительности в образовании E, S и T мы имеем шарнирный треугольник.

В силу изложенных соображений шарнирный четыреугольник a b c d (чер. 11), прикрепленный к земле в двух точках, не может быть принят в основу образования неизменяемой системы, так как часть его bc обладает подвижностью относительно земли E вокруг мгновенного полюса $E2$, являющегося как бы фиктивным шарниром в прикреплении диска 2 к земле. Вопрос об образовании неизменяемых шарнирных систем подробно рассмотрен ниже (см. § 39 и 40).

Простейшим видом сочлененных систем являются фермы, представляющие собой ряд стержней, соединенных по концам шарнирами (чер. 12). Фермы могут представлять собой самостоятельное сооружение, но они могут входить как часть в состав более сложного сооружения. На чер. 12в. показано сооружение, состоящее из каменных опор C и D основной фермы AB и вспомогательных фермочек 1—2, 2—3 и т. д.

Системы, в которых шарнирные соединения отдельных частей заменены жесткими, в технике называются рамными системами (чер. 13а и в). Отличие их от ферм заключается в том, что жесткое соединение по концам стержней допускает только упругую деформацию угла между ними. Этой жестокостью в соединениях обеспечивается неизменяемость системы, вследствие чего становятся возможными четыреугольные и другие формы соединений (чер. 13а).

Введение жесткого соединения вместо шарнирного вносит лишнее условие закрепления, поэтому рамные конструкции статически неопределяемы.

§ 2. **Метод расчета.** Теория сооружений рассматривает сооружения в состоянии упругого равновесия, представляя их как бы временно затвердевшими в своих частях после деформаций, происшедших под действием приложенных к ним сил. Такое предположение дает возможность использовать для расчета законы теоретической механики о равновесии тел. И хотя при деформации условие действия нагрузок на сооружение несколько изменяется, но обычно деформации настолько невелики по сравнению с размерами сооружения, что изменениями в положении нагрузок можно пренебречь.

Например, балка или ферма, заделанные одним концом прогибаются под действием нагрузки, вместе с нагрузкой; происходящее при этом опускание конца редко превосходит 0,002 пролета, а изменение длины—l, вследствие изгиба оси балки, будет еще меньше.

Введение условия упругого равновесия деформированного сооружения достаточно для учета внешних сил, приложенных к нему.

Для определения внутренних сил, теория сооружений пользуется методом сечения и вырезаний, то-есть выделяет из сооружения часть его и, приложив в местах разреза внутренние силы и моменты, заменяющие собой действие отсеченых частей, рассматривает выделенную часть в состоянии упругого равновесия под действием приложенных к ней внутренних и внешних сил.

§ 3. Виды нагрузок. Теория изучает всякое сооружение под действием приложеных к нему внешних сил, которые представляются в виде векторов с определенной точкой приложения, направлением и величиной.

Внешние силы, действующие на всякое сооружение, разделяются на активные и реактивные. Активными силами являются нагрузки действующие на сооружение, как-то ветер, люди, вес сооружения и т. д.; эти силы своим давлением стремятся вызвать смещение сооружения. Реактивными силами называются опорные сопротивления, т.-е. силы, препятствующие смещению сооружения под действием активных сил.

Силы активные, представляющие собой нагрузку, разделяются на постоянные и временные. К силам постоянным относятся такие нагрузки, как вес самого сооружения, вес полового настила и т. п., т.-е. нагрузки, всегда действующие на сооружение. К силам временным относятся все нагрузки, которые могут действовать на сооружение временно, как например: ветер, люди, поезд и т. д.

Нагрузка, неизменяющая своего положения на сооружении, называется нагрузкой неподвижной, наоборот временная нагрузка, могущая занимать на сооружении любое положение, носит название подвижной.

По своему виду нагрузка может быть сплошная и сосредоточенная. Сплошная нагрузка представляет из себя непрерывный ряд действующих сил; она может быть равномерно распределенная (вес настила, снега, толпа людей и т. п.), и неравномерно распределенная (боковое давление воды, пропорциональное глубине погружения).

Сосредоточенная нагрузка обычно представляется отдельными силами, имеющими определенную точку приложения (например, давление колеса, давление колонны и т. п.), хотя в действительности эта нагрузка также распределяется на некоторую поверхность, но поверхность эта мала по сравнению с воспринимающей, а потому нагрузка принимается приложенной в точке.

По характеру действия на сооружение нагрузка может быть непосредственная и узловая. Это разделение нагрузки наиболее понятно из черт. 14, на котором сосредоточенная нагрузка P и сплошная равномерная нагрузка p клгр./пог. метр. по отношению к настилу являются непосредственно действующей нагрузкой. Та же нагрузка по отношению к балке является узловой или передаточной нагрузкой, так как передается на балку в определенных точках (узлах) при посредстве вспомогательных или передаточных балочек.

§ 4. Опоры плоскостных систем. Всякое сооружение представляет собой тело, лишенное возможности движения вследствие упора его в неподвижные точки. Все такие препятствия всегда могут быть заменены опорными закреплениями в виде сил или моментов. С устранением от сооружения препятствий, мешающих его смещению, и с заменой их соответствующими силами или моментами, всякое сооружение может быть рассматриваемо, как тело находящееся в равновесии под действием внешних сил.

Замена опорных закреплений силами возможна только при условии полного определения их, т.-е. знания точки приложения, направления и величины. Величина опорной реакции зависит от величины активных сил, точка приложения и направление зависят от конструктивных условий устройства опор.

Точка приложения опорных реакций плоскостной системы вполне определяется наличием в опоре шарнира (черт. 15) или другой аналогичной конструкции, как, например, соприкасание плоскости с цилиндром (черт. 16). В некоторых сооружениях таких явно выраженных шарниров не бывает, но за то в них бывают такие небольшие по своим размерам опорные площадки, что по сравнению с размерами сооружения эти площадки могут быть приняты за точки приложения опорных реакций; так например, в колоннах, поддерживающих покрытие, центры опорного сечения колонн могут быть приняты за точки приложения опорных давлений.

Направление опорных реакций определяется наличием в опорах плоскости движения, к которой сила реакции всегда нормальна. Плоскость движения может быть осуществлена или устройством катков (черт. 15), или плоскостью скольжения (черт. 16), или устройством качающегося шарнирного по концам стержня (черт. 17).

Соответственно этим основным, конструктивным особенностям опоры могут быть:

1) Подвижно-шарнирные, в которых неизвестна только величина опорного давления; схематически такая опора может быть представлена одним стержнем шарнирным по концам (черт. 18 — I); в этой схеме точка приложения определяется шарниром, а направление реакции — направлением стержня; условно, наличие одного стержня указывает на одно неизвестное.

2) Неподвижно-шарнирные, в которых два неизвестных: величина и направление опорного давления; схематически такая опора может быть представлена двумя стержнями шарнирными на концах и имеющими один шарнир общим (черт. 18 — II); этот общий шарнир определяет собой точку приложения реакции.

3) Подвижно-плоские, в которых два неизвестных: величина и точка приложения опорного давления; схематически такая опора может быть представлена двумя взаимопараллельными, шарнирными по концам стержнями (черт. 18 — III); направление реакции определяется направлением стержней; точка приложения неизвестна.

4) Неподвижно-плоские в которых три неизвестных: величина, направление и точка приложения опорной реакции (черт. 18); схематически такие опоры могут быть представлены тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке (черт. 18 — IV), возможность вращения около точки пересечения двух стержней устраняется наличием третьего стержня в схеме: такая схема характеризует полную неизменяемость.

В зависимости от той или иной комбинации опорных закреплений, сооружения могут быть статически определимы или статически неопределимы относительно опорных сопротивлений.

При плоскостном действии сил статика дает три условия равновесия: $\Sigma X = 0$, $\Sigma У = 0$, $\Sigma M = 0$ — сумма проэкций на оси X — *ов и* $У$ — *ов* равны нулю и сумма моментов относительно любой точки плоскости равна нулю; следовательно, для статической определимости относительно опорных реакций необходимо, чтобы во всех опорных закреплениях сооружения имелось не более трех неизвестных. Это условие статической определимости относительно опорных реакцей может быть удовлетворено только тремя следующими комбинациями опорных закреплений.

При наличии закрепления только в одном конце, как это бывает в балках заделанных одним концом, в подпорных стенках (черт. 19а), консольных кранах (черт. 19в) и т. п., опорное закрепление может быть только неподвижно-плоское с тремя неизвестными относительно опорных давлений, из которых величина и направление определяются условиями:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma У &= V - R\,Cosn\,\alpha = 0 \\ \Sigma X &= H - R\,Sin\,\alpha = 0 \end{aligned}\quad \text{откуда} \quad \begin{aligned} V &= R\,Cosn\,\alpha \\ H &= R\,Sin\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

положение же точки приложения давления относительно центра опоры определяется из условия

$$\Sigma M = Rr - V\eta = 0, \text{ откуда } \eta = \frac{Rr}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

2) При наличии **двух опорных точек** в сооружении (черт. 20), одно из опорных закреплений может быть **шарнирно-неподвижным** (2 неизвестных) другое же должно быть в этом случае **шарнирно-подвижным** (1 неизвестное).

При таком устройстве опор, как бы ни была направлена равнодействующая R активных сил, она всегда может быть разложена графически на два направления опорных реакций, и всегда могут быть определены слагающие опорных давлений из условий:

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma M_b = 0 & A_y . l\, Rr = 0 & A_y = \frac{Rr}{l} = \frac{M_b}{l} \\ \Sigma Y = 0 & A_y + B_y - R\, Sin\, \alpha = 0 & B_y = R\, Sin\, \alpha - A_y \\ \Sigma X = 0 & & B_x = R\, Cos\, \alpha \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

Следует обратить внимание на то, что величина вертикальных слагающих опорных реакцей 2-х опорных балок непосредственно определяется из выражения момента всех внешних сил относительно другой опорной реакции.

3) При **трех опорных точках** в сооружении, все три опорных закрепления могут быть только **шарнирно-подвижными** (3×1 неизвестных). При таком устройстве опор разложение равнодействующей внешних сил на 3 направления может быть сделано **только при условии, что три направления опорных реакций не пересекаются в одной точке** (черт. 21).

В этом случае слагающие опорных реакций определяются из условий:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma X = A_x - C_x - R\, Cos\, \gamma = 0 \\ \Sigma Y = A_y + B_y + C_y - R\, Sin\, \gamma = 0 \\ \Sigma M = A_y l + B_y l_2 - R(l - x)\, Sin\, \gamma = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

но так как $A_y = A_x\, tng\, \alpha$ и $C_y = C_x\, tang\, \beta$, то, по подстановке этих значений в уравнения (3) равновесия получаем три уравнения с тремя неизвестными, решая которые найдем:

$$A_x = R\,\frac{(l_1 - x)\, Sin\, \gamma - l_2\, Cosn\, \gamma\, tng\, \beta}{l_1\, tng\, \alpha - l_2\, tng\, \beta}$$

$$C_x = R\,\frac{(l_1 - x)\, Sin\, \gamma - l_2\, Cosn\, \gamma\, tng\, \alpha}{l_1\, tng\, \alpha - l_2\, tng\, \beta}$$

и т. д.

Балка, лежащая на трех шарнирных опорах с горизонтальными плоскостями скольжения, будет статически неопределима, так как все три направления, как параллельные, пересекаются в бесконечности.

При наличии **четырех и более опорных закреплений сооружение всегда статически неопределимо относительно опорных реакций** и необходимо включение особых условий в конструкцию сооружения, чтобы сделать его статически определимым при наличии такого числа опорных закреплений (см. § 40).

В арочных сооружениях, отличающихся от балочных наличием горизонтальных слагающих в обоих опорах, устройство подвижных опорных закреплений невозможно, так как они не могут воспринять этих слагающих, а потому двухопорные арки (черт. 22), имеющие обе опоры неподвижно-шарнирными, т.-е. с четырьмя неизвестными, всегда статически неопределимы относительно опорных закреплений; приведение их к виду статически определимых может быть сделано включением в конструкцию дополнительных условий, например, шарниров с приведением их, как и многоопорных балок, к сочлененным системам, о чем сказано ниже (см. § 40).

УЧЕТ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ.

§ 5. Понятия о линиях влияния. При действии на сооружение неподвижной (постоянной) нагрузки, определение сечения с наибольшим значением момента или равнодействующей силы не представляет особых затруднений. В большинстве случаев представляется вполне возможным путем построения эпюры показать изменение величин моментов или усилий в различных сечениях и частях сооружения и тем самым установить место наиболее напряженного сечения при данной неподвижной нагрузке.

Задача определения наибольшего усилия или момента значительно усложняется при введении подвижной нагрузки так как в этом случае в одном и том же сечении величина усилия или момента изменяется по мере изменения положения нагрузки на сооружении, так что для определения расчетного (наибольшого) значения усилия или момента необходимо предварительно отыскать невыгоднейшее положение нагрузки, дающее для данного сечения или части сооружения наибольшее значение усилия или момента. Большую помощь в этом расчете оказывают „линии влияния".

Исследуем, как будет изменяться величина опорного давления в балке, лежащей на 2-х опорах (черт. 23), при действии на нее двигающегося груза P. При любом положении груза, определяемом расстоянием x от левой опоры A, величина опорного давления A согласно выраж. (2) определяется уравнением:

$$A = P\,\frac{l-x}{l}$$

Предположим теперь, что величина груза $P=1$, тогда выражение опорной реакции будет иметь вид:

$$A = \frac{l-x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Если принять величину A за ординату, то не трудно видеть, что выведенное выражение опорного давления изменяется в зависимости от положения груза $P=1$ по закону прямой; положение этой прямой легко определяется анализом уравнения (4); при $x=0$, $A=1$ и при $x=l$, $A=0$. Каждая ордината этой прямой, измеренная под грузом, определяет величину опорной реакции (черт. 23). Полученная прямая $a'b$ носит название линии влияния опорной реакции.

Рассмотренный пример есть частный случай; вообще линии влияния могут иметь любую форму, которая получается графическим построением из анализа уравнений равновесия.

Итак: линия влияния есть графическое изображение изменения усилий или момента в определенной части или сечении сооружения при действии на него подвижного груза $=1$. Каждая ордината линии влияния, измеренная под местом положения груза, определяет величину момента или усилия в сечении, для которого построена эта линия влияния.

На черт. 24 построена линия влияния для опорного момента M_a в балке, заделанной двумя концами; величина опорного момента в этой балке определяется уравнением:

$$M_a = y = \frac{x(l-x)^2}{l^2}$$

представляющим собой уравнение кривой, полученное из условия равновесия [1]).

Как характерную особенность вида линий влияния можно отметить, что в статически определимых системах линии влияния определяются прямыми, в статически неопределимых — кривыми.

§ 6. Построение линии влияния моментов и поперечных сил по законам статики. В плоскостных системах сплошного сечения, при рассмотрении равновесия относительно сечения, внешние силы всегда приводятся к равнодействующей—R_x и моменту—M_x, при чем при обычной вертикальной нагрузке, нормальной к оси, эта равнодействующая приводится к поперечной силе—Q_x. В фермах усилия в стержнях также выражаются в функции моментов M и поперечной силы Q, определяемых как для простых балок (см. § 28). Таким образом, линии влияния моментов и поперечных сил являются характерными линиями, что заставляет обратить внимание на приемы построения их. Как моменты, так и поперечные силы всегда выражаются в функции опорных давлений, а потому следует начать изучение построения с линий влияния опорных реакций.

а) Линии влияния опорных давлений. При расположении на простой 2-х опорной балке одного подвижного груза, величины опорных давлений будет определяться уравнениями (выраж. 4):

$$A = \frac{l-x}{l} \quad \text{и} \quad B = \frac{x}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Оба эти уравнения представляют собой прямые линии, легко строющиеся из их анализа:

при $x = O$, $A = I$ и $B = O$, и при $x = l$, $A = O$, $B = I$.

На черт. 25 (*г*) и (*в*) построены эти обе линии влияния.

в) Линия влияния моментов. Общий вид выражения моментов будет изменяться в зависимости от того, расположен ли груз справа или слева от сечения, а так как линия влияния момента есть графическое изображение аналитического уравнения равновесия, то в этом случае она состоит из двух частей:

1) При положении груза слева от сечения, из уравнения равновесия правой части, где имеет место только одна опорная реакция, выражение момента в рассматриваемом сечении (черт. 25) будет:

$$M_x = B(l-a) = \frac{x}{l}(l-a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Это есть прямая линия опорной реакции «B», измененная в масштабе $1 \times (l-a)$; положение ее определяется из анализа уравнения, а именно при $x = O, M_1 = O$ при $x = l$, $M = (l-a)$; на черт. 25 показано положение этой прямой, но применимость ее ограничивается только левой частью т.-е, для движения груза на левом участке длиной «a».

[1]) Вывод этого уравнения, как относящагося к системе статически неопределимой, относится по II части курса.

2) при положении груза справа от сечения выражение момента проще напишется для левой части балки

$$M = A\ a = \frac{l-x}{l}\ a \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (7)$$

которое представляет собой прямую линию опорного давления «A» и легко строится из анализа уравнения: при $x = O$, $M = A$, при $x = l$. $M = O$ положение этой прямой $a'b$ показано на черт. 25; применимость ее ограничивается только правой частью, т.-е. участком длиною (l — a).

Построенная линия влияния имеет некоторые характерные свойства, присущие вообще линиям влияния моментов, а именно.

1) Она очерчена двумя прямыми: «левой прямой», характезирующей изменение линии влияния при положении груза слева и определяемой нулем на левой опоре и отрезком на правой, изменяющимся в зависимости от положения сечения от этой опоры, и «правой прямой», характеризующей изменение линии влияния при положении груза справа и определяемой нулем на правой опоре и некоторым отрезком на левой, зависящим от положения сечения от этой опоры,

2) Обе эти прямые независимо от конструктивных особенностей системы всегда пересекаются на вертикали под точкой моментов; это характерное свойство линии влияния моментов непосредственно вытекает из условия, что при переходе груза через рассматриваемое сечение, ордината линии влияния одинаково должна принадлежать как правой, так и левой прямой, что возможно только для точки их пересечения.

Пользуясь этими свойствами линий влияния моментов, можно упростить построение их, ограничив аналитическое решение отысканием одной из прямых. Действительно, если будет найдено, например, положение «правой прямой», отложением на левой опоре отрезка «a» и проведением линии $a'b$ через нуль на правой опоре, то положение левой прямой определяется непосредственно двумя точками: нулем на левой опоре и точкой «C» пересечения правой прямой с вертикалью.

Эти свойства линии влияния моментов сохраняются также для балок, заделанных одним концом.

На черт. 26 построена линия влияния опорной реакции балки, заделанной одним концом, для которой при любом положении груза$=1$ на балки опорное давление $B=1$.

Линия влияния моментов для сечения на расстоянии «a» от конца консоли определится двумя прямыми, из которых: правая прямая, для которой ординаты, как это следует из уравнения равновесия левой части, равны нулю, т. к. для нее $M_{пр} = O$, т.-е. она сливается с линией абсцисс; левая прямая в этом случае—проще определяетсяиз равновесия левой части $M_л = 1.\ (a-x)$; на черт. 26 построена эта прямая из условия, что при $x = o$ $M_л = a$ и при $x = a$ $M_л = O$. Точка пересечения левой и правой прямых лежит на вертикали под точкой моментов.

Из изложенного построения линий влияния видно, что положение прямых, определяющих линию влияния, делалось путем отложения на опорах ординат, измеряющихся в масштабе длин, а потому ординаты линий влияния моментов измеряются в единицах длины и выражение $M = \Sigma P.y$ измеряется произведением силовых един. на един. длины.

с) линия влияния поперечных сил. Величина и знак поперечной силы в сечениях 2-х опорной балки изменяется в зависимости от положения груза относительно сечения.

1) при положении груза справа от сечения выражение поперечной силы проще определяется из условия равновесия левой части, для которой (черт. 25):

$$Q_{np} = A = 1 \frac{l-x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Это уравнение представляет ту-же прямую, которой очерчивалась линия влияния левой опорной реакции—A, но применение ее ограничивается только правой частью балки от сечения до правой опоры.

2) при положении груза слева от сечения выражение поперечной силы из условия равновесия правой части будет:

$$Q_x = -B = -\frac{x}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

что соответствует прямой, очерчивающей линию влияния правой опорной реакции, но с обратным знаком; пределы распространения ее от левой опоры до сечения, т.-е. только на протяжении левой части балки.

Из изложенного построения видно, что линия влияния поперечных сил очерчивается двумя прямыми „левой" и „правой" взаимно параллельными, из которых каждая определяется нулем на одноименной ей опоре и ординатой, равной единице, на противоположной опоре. У места сечения линия влияния имеет резкий уступ высотою равной единице, т.-е. величине груза, что соответствует изменению величины поперечной силы с переходом из левой части в правую.

Это свойства прямых, очерчивающих линии влияния поперечных одним концом.

На черт. 26 построена линия влияния поперечной силы в сечении балки заделанной концом на расстоянии a от левого конца ее.

При положении груза справа, из условия равновесия левой части, в которой нет никаких грузов, поперечная сила определяется уравнением $Q_{np} = O$, т.-е. правая прямая сливается с осью абсцисс. При положении груза слева от сечения из условия равновесия той же левой части величина поперечной силы определяется уравнением $Q_x = -1$, т.-е. левая линия $a'c'$ параллельна линии абсцисс, т.-е. правой линии cb.

Положение прямых, очерчивающих линии влияния поперечных сил, определяются, как это видно из изложенного, отвлеченным отрезком, равным единице, а потому ординаты линий влияния поперечных сил измеряются в отвлеченных единицах и выражение вида $Q = \Sigma P\ y$ имеет измерение в силов. един.

Изложенные приемы построения типичных линий влияния моментов и поперечных сил в сечениях балок на основании законов равновесия статики вполне достаточны для изучения способов построения линий влияния статически определимых простых систем. Но в частных случаях расчета сложных статически определимых систем и систем статически неопределимых характер линии влияния нагляднее вырисовывается из построения их по законам кинематики.

§ 7. Построение линии влияния по законам кинематики. Всякая система остается неизменяемой и не имеет подвижности между своими частями, пока имеется достаточное число связевых условий, соединяющих между собой ее части. Как было указано выше (см. § 1), неизменяемость системы имеет место, если соединение сделано не менее, как одним шарниром и одним стержнем (черт. 10 a), или что то же тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке (черт. 27), так как каждый шарнир заключает в себе два неизвестных (см. § 4). Если одно из связевых условий будет нарушено, то система превращается в механизм или кинематическую цепь, состоящую из отдельных жестких звеньев (или дисков), связанных между собой шарнирами и имеющими некоторую подвижность, становящейся возможной вследствии нарушения связи.

Например, если устранить стержень T на схеме черт. 10 *a* или стержень 3 на схеме черт. 27, то диск S получает возможность вращения вокруг шарнира; если устранить стержень 2 на схеме черт. 27, то диск S получает возможность относительного смещения около фиктивного шарнира 1,3, как мгновенного полюса вращения.

Всякая балка представляет собой жесткую, неизменяемую систему. Проведением разреза балка разделяется на два жестких диска или звена, равновесие которых не будет нарушено, если в месте разреза приложить два равных взаимнопротивоположных момента M и две равных противоположных равнодействующих, которые при действии на балку сил нормальных к ее оси приводятся к поперечным силам Q (черт. 28) Обоим этим равнодействующим внутренних сил M и Q соответствуют свои виды деформаций: моменту—угловое вращение, силе Q—сдвиг.

С точки зрения неизменяемости системы два звена I и II (черт. 28), полученные разрезом жесткой балки, можно рассматривать, как неизменяемо или жестко связанными между собой, если представить себе, что они соединены между собой тремя стержнями или шарниром и стержнем.

С устранением одного из этих условий неизменяемости оба звена получат возможность того или иного вида подвижности.

Сохраняя, например, в сечении балки шарнирность, мы тем самым предоставляем обоим звеньям балки возможность вращения вокруг этого воображаемого шарнира. Возможность вращения будет устранена и равновесие восстановлено, если в этом же сечении, взамен устраненной связи, будет приложена пара взаимодействия в виде двух равных и взаимнопротивоположных моментов M.

Если будет устранена шарнирность, но связь в сечении балки будет сохранена в виде двух взаимно параллельных стержней (черт. 28), то, как мы знаем (§ 4—черт. 18), звенья получат возможность относительного сдвига в вертикальной плоскости, но не будут иметь возможности относительного вращения.

Возможность сдвига может быть устранена приложением в сечении двух равных и противоположных сил Q.

Таким образом, разрезая жесткую балку и допуская в разрезе тот или иной вид возможной подвижности, можно привести ее в кинематичесую систему, равновесие которой не будет нарушено, если вместо устраненной связи будет приложен соответствующий момент или сила взаимодействия.

а) Эпюра возможных перемещений. По законам кинематики возможное движение каждого отдельного звена в каждое мгновенье может быть рассматриваемо, как вращение его вокруг мгновенного полюса — K (черт. 29) с угловой скоростью$=\omega$. В соответствии с этим величина возможного перемещения mm' любой точки этого звена определится из условия:

$$mm' = r \times \omega,$$

где r — расстояние точки от мгновенного полюса.

Если по малости перемещения принять дугу mm'—равной касательной mn, то величина возможного перемещения точки относительно координат определится выражением:

$$y = mn \ Cosn \ (r\ x) = r \ Cosn \ (r\ x) \times \omega \ \text{ или } \ y = x\,\omega \quad \ldots \quad (10)$$

Последнее представляет собой уравнение прямой, в которой, при $x=o$ $y=o$ следовательно: ординаты возможных перемещений точек, звена определяются прямой линией, пересекающей ось абсцисс на вертикали под мгновенным полюсом. Отсюда следует, что если смещение всякого звена рассматривать относительно неизменного положения земли, которое также может быть охарактеризовано прямой, и которое, как неизменяющее своего положения, может быть принято за ось абсцисс, то проэкциями на эту ось мгновенных полюсов будут определяться точки пересечения прямыми, характеризующими перемещения отдельных звеньев, оси абсцисс.

Рассмотрим кинематическую цепь, состоящую из трех жестких звеньев I, II и III (черт. 30) прикрепленную к земле E шарнирами в точках IE и IIIE; звенья цепи соединены между собой шарнирами в точках I II и II III. Примем линию $e—e$, определяющую собой положение неизменяемой земли, за ось абсцисс, тогда на основании вышеизложенных соображений, на ней должны поместиться проекции шарниров I,E и EIII, как мгновенных полюсов звеньев I и III относительно земли, это будут точки 1,e и 3,e.

Мгновенный полюс возможного вращения звена II относительно земли, как известно из кинематики, должен лежать на прямой проходящей через обсолютный мгновенный полюс и переносный, каковыми по отношению к звену II являются: со стороны звена I полюс EI и соединительный шарнир I II, а со стороны звена III полюс EIII и соединительный шарнир III II, следовательно мгновенный полюс звена II должен лежать на прямых EI—I II и EIII—III II, т.-е. будет лежать в точке EII пересечения этих прямых.

Так как точка EII является мгновенным полюсом вращения звена II относительно земли, то согласно, вышеизложенному, проекция этой точки на ось абсцисс 1,e должна определить собой пересечение ее прямой, изображающей возможные смещения звена II.

Согласно уравнения (10) $y=x\times\omega$, любая прямая может определять возможные перемещения точек звена, при условии что угол наклона ее, измеряемый в некотором масштабе, будет определять собой угловую скорость—ω; на основании этого мы можем задаться любой прямой, проходящей через одну из точек проекций мгновенных полюсов и принять ее за линию возможных перемещений для соответствующего звена. Например, мы можем взять прямую 2—2 проходящую через точку 2e за линию возможных перемещений звена II относительно земли E, на этой прямой должны лежать также проекции точек I II и II III, как принадлежащих этому звену и перемещающихся вместе с ним,—это будут точки 1,2 и 2,3. Но шарниры I II и II III являются вместе с тем точками, связывающими звено II с звеньями I и III, а потому ординаты, определяющие возможное перемещение точек I II и II III, должны быть общими, как для прямой 2—2, так и для прямых 1—1 и 3—3; таким образом положения прямых 1—1 и 3—3, определяющих возможные перемещения звеньев I и III, устанавливаются точками 1,2 и 1,e и 3,2 и 3e. Шарниры I II и II III являются мгновенными полюсами возможных перемещений звена II относительно звеньев I и III; и как видно из построения, под ними пересекаются прямые, определяющие возможные перемещения соответствующих звеньев. То-же имеет место и относительно возможного перемещения звеньев I и III; прямые, определяющие их относительные перемещения, пересекаются в точке 1,3 на вертикали под мгновенным полюсом I III.

Таким образом устанавливается общее свойство, что прямые, определяющие ординаты возможных перемещений для звеньев кинематической цепи, пересекаются между собой на вертикалях под мгновенными полюсами Это свойство значительно облегчает построение эпюры возможных перемещений, которая представляет собой площадь, очерченую линиями возможных перемещений. На черт. 30 площадь эпюры очерчена многоугольником $e1 - 1{,}2 - 2{,}3 - 3e - ee$. Ординаты линии эпюры определяют величину возможных перемещений различных точек системы; величины этих перемещений будут относительными до тех пор, пока для них не будет установлен масштаб или величина угловой скорости.

Знак эпюры, т.-е. снижение $(+)$ или возвышение $(-)$ определяется по виду движения, возможного для данного расположения нагрузки, или по виду деформации возможной при устранении той или иной связи. Например, при расположении нагрузки в шарнире I II (черт. 30) слева от мгновенного полюса II E, этот шарнир должен опуститься, а шарнир II III подняться, следовательно в этом случае левая часть эпюры $(e{,}1 - 1{,}2 - 2{,}e)$ будет характеризовать снижение $(+)$ а средняя часть $(2e, - 2{,}3 - 3e)$ — возвышение $(-)$. При расположении груза в шарнире II III справа от мгновенного полюса II E при том же виде эпюры явления будут обратные, а именно в левой части будет возвышение $(-)$ в средней — снижение $(+)$.

в) Эпюры возможных перемещений, как линии влияния. По отношению к кинематической системе силы внутреннего воздействия, прикладываемые взамен устраненных связевых условий, являются внешними силами, и так как они своим действием обеспечивают системе неизменяемость, то величина этих сил воздействия может быть определена из условия равновесия кинематической системы на основании принципа возможной работы, по которому если механизм находится в равновесии, то сумма работ внешних сил на любых возможных перемещениях равна нулю.

$$\Sigma PCos\ (PY) \times y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Пусть S — сила или момент внутреннего воздействия и δ — соответствующее ей возможное перемещение, тогда общее выражение возможной работы, по выделении в нем члена соответствующего работе силы S будет:

$$- S\delta + \Sigma\, PCos\ (PY) \times y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

В этом выражении направление силы воздействия принимается всегда положительным знак же выражения работы берется в соответствии с направлением возможного перемещения; и так как направление возможного перемещения для силы воздействия всегда противоположно направлению самой силы, то знак члена $S \times \delta$ всегда отрицательный. Если при решении уравнения (12) в конечном результате знак при S окажется отрицательным, то это укажет на то, что направление внутренней силы должно иметь направление обратное принятому, а в соответствии с этим должно быть изменено направление перемещения.

Если предположить, что внешняя сила P параллельна оси y-ов и равна единице, то выражение возможной работы напишется так:

$$- S \times \delta + 1 \,.\, y = 0$$

Отсюда сила воздействия

$$S = 1 \,.\, \frac{y}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Входящее в это выражение значение y представляет собой величину возможного вертикального перемещения кинематической системы, относительная величина которого определяется эпюрой возможных перемещений;

ню в полученном выражении (13) величина y имеет также значение ординаты линии влияния, так как характеризует изменение силы воздействия в зависимости от положения груза $= 1$; из чего следует, что эпюра возможного перемещения, измеряемая в масштабе возможного перемещения неизвестного усилия устраненной связи, представляет собой линию влияния этого усилия.

Рассмотрим применение этих положений для определения линий влияния опорного сопротивления, моментов и поперечных сил в простой двухопорной балке.

с. **Линия влияния опорной реакции.** Если в балке, лежащей на 2-х опорах, устранить как связь опору A, то балка, оставаясь жесткой, получит возможность вращаться вокруг шарнира B (чер. 31). Эпюра возможных перемещений будет характеризоваться прямой $a'b$. Противодействовать этому движению и восстановить равновесие может сила опорного сопротивления — A, направленная вверх.

Выражение возможной работы напишется так:

$$-A \times \delta + 1 \,.\, y = 0 \text{ откуда } A = 1 \,.\, \frac{y}{\delta} \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Если выразить ординаты возможных смещений в функции угловой скорости ω — возможного вращения вокруг шарнира B, то выражение величины опорной реакции получит такой вид:

$$A = \frac{y}{\delta} = \frac{(l-x)\,\omega}{l\,.\,\omega} = \frac{l-x}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

что вполне соответствует выражению ординат линии влияния опорных давлений (см. выр. 4). Ордината δ есть единица масштаба.

д. **Линия влияния моментов.** Проведем в балке разрез и представим себе, что нарушенное жесткое состояние балки возмещено шарниром I II, допускающим вращение звеньев I и II балки, но не допускающим их сдвига (черт. 32). Вследствие включения шарнира I II, балка получит возможность провисания и эпюра возможных перемещений звеньев охарактеризуется двумя прямыми, пересекающимися на вертикали под шарниром в точке 1,2, и с осью абсцисс в точках 1,e и 2e. Восстановление равновесия может быть достигнуто приложением в сечении двух равных, взаимнопротивоположных моментов M.

Так как опорные точки A и B не могут перемещаться, то выражение возможной работы напишется так:

$$-M\alpha + M\ (-\beta) + P\,.\,y = 0$$

величина угла β принята отрицательной, т. к. направление его обратно направлению угла α, откуда

$$M = \frac{1\,.\,y}{\alpha+\beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Величины угловых смещений α и β по их малости могут быть заменены тангенсами, а именно $\alpha + \beta = k : a$ (черт. 32), тогда выражение момента примет вид:

$$M = \frac{y}{\alpha+\beta} = \frac{y}{k}\,.\,a = \frac{l-x}{l}\,a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

в котором отношение $y : k$ заменено согласно черт. 32 отношением $(l-x) : l$. Полученное выражение момента соответствует выражению ординат линий влияния моментов в сечениях балки (см. выраж. 7); и если отрезок k будет равен отрезку a, то ординаты эпюры возможных перемещений будут в точности равняться ординатам линии влияния; в противном случае ординаты эпюры возможных перемещений должны измеряться в масштабе перемещения

$$\delta = (\alpha + \beta) = \frac{k}{a}.$$

е. **Линия влияния поперечной силы.** Проводя разрез балки сечением $s - s$ (черт. 33), представляем себе оба звена I и II как бы соединенными двумя параллельными стержнями, допускающими относительный сдвиг звеньев между собой, при условии возможного вращения их около шарниров EI и EII, но не допускающими поворота их одного относительно другого. Мгновенный полюс I II относительного вращения этих звеньев лежит в бесконечности, а потому прямые $1-1$ и $2-2$, определяющие эпюру возможных смещений, должны быть параллельны между собой. Границы распространения прямых $1-1$ и $2-2$ будут ограничиваться шарнирными стержнями I III—III II, воображаемыми в сечении балки; проекции этих шарниров, именно точки 1,3 и 2,3, по бесконечной малости ширины сечения будут лежать на одной и той же вертикали под сечением Таким образом эпюра возможных перемещений будет состоять из двух треугольников $1e, - 1{,}3 - 3e$ и $3{,}e - 2{,}3 - 2e$.

Так как по черт. 33c, направление возможного перемещения принято снижающимся, то для восстановления равновесия прикладываем в сечении к левой (I) части силу Q, направленную кверху и к правой части силу Q обратного направления.

Выражение возможной работы в этом случае напишется так:

$$-Qc - Qc' - P \cdot y = 0$$

откуда

$$Q = -\frac{1}{c+c'} \cdot y = -\frac{y}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (18).$$

Полученный знак (—) в выражении поперечной силы показывает, что принятое первоначальное направление силы Q не верно и должно быть изменено на обратное.

В соответствии с этим должен быть изменен знак в эпюре возможных перемещений, так как смещение, как это указывалось выше,— должно быть направлено в обратную сторону против направления силы. Таким образом знаки эпюры будут в левой части ($-$) в правой ($+$) (черт. $33d$).

Из черт. 33 непосредственно видно, что выражение поперечной силы может быть представлено в таком виде:

$$Q = \frac{y}{\delta} = \frac{l-x}{l}$$

что вполне соответствует ординатам линии влияния поперечных сил (см. выраж. 8).

§ 8. **Свойства линий влияния.** При помощи линий влияния можно определить величину момента или усилий от любого вида нагрузки.

1. Если на сооружении будет перемещаться не груз $= 1$, а груз величиной $= P$, то значение момента или усилия в рассматриваемом сечении будет равно $P \times y$, т.-е. будет в P раз больше чем от груза $= 1$.

Если на сооружении будет перемещаться не один груз, а система грузов $P_1, P_2, \ldots P_n$ (черт. 34), то в силу независимости действия нагрузок, значение момента или усилия от действия системы сосредоточенных грузов определится суммой произведений давлений отдельных грузов на соответствующие ординаты линии влияния.

$$S = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \ldots + P_n y_n = \Sigma^n_1 Py \quad \ldots \quad (19).$$

II. При действии сплошной нагрузки, составляющей давление p клгр. на погонный метр, определение усилия и момента по линии влияния может быть сделано исходя из рассмотрения бесконечно малых отрезков этой нагрузки $= pdx$; тогда, согласно вышеизложенного, значение моментов и усилий, определяемых по линии влияния, напишутся так (черт. 35):

$$S = \Sigma_a^o pdx \times y_x$$

Если p — величина постоянная, то:

$$S = \Sigma_a^b pdx\ y = p\ \omega_a^b \quad \ldots \quad (20),$$

где ω_a^b — площадь линии влияния $= \Sigma_a^b\ y\ dx$.

Итак: при сплошной равномерно распределенной нагрузке момент или усилие определяются произведением площади линии влияния в пределах загруженного участка на величину нагрузки, приходящейся на единицу длины. Если загружается линия влияния с отрицательным ω_1 и положительным ω_2 участками площади, то определяемые в этом случае значения моментов и усилий выразятся разностью площадей:

$$S = (\omega_1 - \omega_2)\,p \quad \ldots \quad (21).$$

III. При наличии в сооружении узловой или передаточной нагрузки всякая нагрузка сплошная или сосредоточенная разлагается на узловые пункты. Обобщение закона о линиях влияния требует, чтобы последние в характере своего изменения удовлетворяли: с одной стороны, основному свойству линий влияния, по которому (черт. 36) определяемое усилие или момент

$$S = P\,y_x,$$

с другой стороны, чтобы эта величина удовлетворяла условиям передаточного действия нагрузки, по которому:

$$S = P_n y_n + P_{n+1} y_{n+1} = P\,y_x$$

По условию разложения груза P на передаточные балочки:

$$P_n = P\,\frac{d - x}{d} \quad \text{и}\ P_{n-1} = P\,\frac{x}{d},$$

а потому, по подстановке в предыдущее уравнение значений P_n и P_{n+1} и по сокращении на P, получим:

$$(d - x)\,y_n + x\,y_{n+1} = d\,y_x,$$

а это есть уравнение прямой, проходящей через вершины ординат y_n и y_{n+1}.

Отсюда следует, что при узловом (передаточном) действии нагрузки линия влияния изменяется между узлами по прямой.

При положении груза в узле, действие его на систему равноценно непосредственному действию на нее, поэтому, ординаты линии влияния под узлами остаются те же, что при непосредственном действии, изменяются только ординаты между узлами, а потому линия влияния при передаточном действии нагрузки есть многоугольник, вписанный в линию влияния при непосредственном действии нагрузки, с вершинами под узлами.

Пример 1. (Черт. 37) Ломаной $a - a_1 - b$ очерчена линия влияния опорного давления A в 2-х опорной балке при непосредственном действии на нее нагрузки (сравн. черт. 23). С устройством на балке и устоях передаточных балочек 1, 2......5, линия влияния того же опорного давления очертится многоугольником 1—2—3—4—5—6, в котором ординаты под узлами сохранились те же, что при непосредственном действии, но контур изменился на участках 1—2 и 5—6.

IV. Величина усилия или момента по линии влияния определяется вообще произведением $P \times y$, если линия влияния характеризует собой величину усилия, то ординаты ее измеряются отвлеченными числами что непосредственно следует из вывода уравнения самой линии влияния (черт. 25). Если линия влияния характеризует собой величину момента, то ординаты ее измеряются в единицах длины (см.черт. 25 *a* и *d*).

§ 9. Определение невыгоднейшего положения системы грузов. Вполне ясно, что при движении одного сосредоточенного груза наибольшее значение момента или усилия по линии влияния будет иметь место при совпадении груза с наибольшей ординатой y_{max} линии влияния.

$$S_{max} = P \cdot y_{max}.$$

Также очевидно, что для определения по линии влияния наибольшего значения момента или усилия от системы грузов надо стремиться к тому, чтобы наиболее тяжелые грузы располагать над наибольшими ординатами, но где именно будет критическое положение сказать нельзя. Отыскание критического положения значительно облегчается знанием следующего свойства линий влияния, по которому невыгоднейшее положение системы относительно линии влияния возможно только при условии совпадения одного из грузов с какой-либо из ее вершин.

Пусть имеется (черт. 38) многоугольная линия влияния со сторонами, наклоненными к горизонту под углами α_1, α_2......α_n, знак которых определяется положением их относительно горизонтали, и пусть имеется какая-либо система грузов P_1, P_2.....P_n, произвольно расположенная на линии влияния.

Величина усилия или момента S определяется по линии влияния выражением (19) $S = \Sigma_o^n P y$. Но можно рассматривать систему грузов по частям, разбив их на группы в соответствии с расположением их по участкам линии влияния с одним и тем же наклоном ($tng\alpha_k$) и заменяя действие грузов на каждом участке равнодействующей R_1, R_2.....R_n, тогда:

$$S = \Sigma_o^n Py = R_1 y_1 + R_2 y_2 + \ldots R_n y_n \quad \ldots \quad (22),$$

где y — ордината, соответствующая положению каждой равнодействующей.

Если затем предположить, что вся система сдвинулась вправо или влево, то значение момента или усилия получит приращение $\pm dS$; в правой же части равенства (22) изменятся все ординаты на величину $\pm dx \; tng \; \alpha_k$. Таким образом, величина приращения усилия или момента выразится так:

$$dS = (R_1 \, tng \, \alpha_1 \, dx + R_2 \, tng \, \alpha_2 \, dx + \ldots + R_n \, tng \, \alpha_n \, dx) = dx \, \Sigma_1^n R \, tng\alpha.$$

Полученное выражение представляет собой значение первой производной $dS : dx$ от величины S.

По общему свойству функция достигает своего наибольшего значения, когда 1-я производная ее равняется нулю. Следовательно для того, чтобы система грузов вызвала наибольшее значение S, необходимо, чтобы

$$\frac{dS}{dx} = R_1\,tng\,\alpha_1 + R_2\,tng\,\alpha_2 + \ldots + R_n\,tng\,\alpha_n = 0 \quad \ldots \quad (23)$$

Но, так как углы наклонения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ линии влияния остаются без изменения, то, следовательно, обращение в нуль выражения (23) возможно при условии изменения величин некоторых из равнодействующих $R_1, R_2 \ldots R_n$, последнее же возможно только при условии перехода какого-либо груза из одного участка в другой, что сопровождается прохождением его через одну из вершин, что и требовалось доказать.

При отыскании невыгоднейшего положения системы надо обращать внимание на получаемый при пробных установках знак приращения $\pm dS$. Из выражения (23) явствует, что он зависит от знака $\pm dx$ и знака $\Sigma \pm R\,tng\,\alpha$. Если принять, что dx положительно при движении системы вправо, то, очевидно, пока $\Sigma R tng\,\alpha$ будет оставаться положительным, приращение dS будет тоже оставаться положительным, а потому движение системы вправо должно продолжаться до тех пор, пока $\Sigma R tng\,\alpha$ не сделается отрицательной, что будет свидетельствовать об уменьшении величины S, т.-е. о переходе функции через наибольшее значение. Так как при движении влево dx — отрицательно то пока $\Sigma R tng\,\alpha$ будет отрицательно, приращение будет положительно, а потому движение системы влево должно продолжаться до тех пор пока $\Sigma R tng\,\alpha$ не сделается положительной.

Из изложенного следует, что когда критический груз вызывающий наибольшее значение функции, смещается в правый участок, то $\Sigma R tng\,\alpha$ должна быть отрицательна, и когда он смещается в левый участок, то она должна быть положительна. В обоих случаях $\frac{dS}{dx}$ — отрицательно что свидетельствует об убывании функции.

Пример 2. Для линии влияния, имеющей вид четыреугольника $ABCD$, (черт. 39) определить невыгоднейшее загружение системой паровоза (по нормам НКПС 1921 г.), согласно прилагаемой схемы его. Выражение тангенсов углов наклонения линии влияния:

$$tng\,\alpha_1 = H : 15$$
$$tng\,\alpha_3 = -H : \;9$$
$$tng\,\alpha_2 = \frac{h_2 - h_1}{6} = -\frac{H}{6}\left(\frac{12}{15} - \frac{6}{9}\right) = -\frac{H}{45}\,.$$

Предполагаем, что критическим положением будет совпадение колеса № 4 с ординатой h_1 (черт. 39 схема I). При смещении колеса № 4 в левый участок AB. будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \;4\times 22 = 88 \text{ тн.} & R_1 tng\,\alpha_1 &= 88\frac{H}{15} \\ R_2 &= 22+16 = 38 \;\;,, & R_2 tng\,\alpha_2 &= -38\frac{H}{45} \\ R_3 &= \;3\times 16 = 48 \;\;,, & R_3 tng\,\alpha_3 &= -48\frac{H}{9} \end{aligned}\right|\Sigma R tng\,\alpha = \frac{H}{45}\left|\begin{matrix} +264 \\ -\;38 \\ -240 \end{matrix}\right| = -\frac{14}{45}H$$

Так как при смещени влево сумма $R\,tng\,\alpha$ оказалась отрицательной, то следовательно груз № 4 в действительности не является критическим и функция возрастает. Продолжаем смещение системы влево до прохождения под одной из вершин какого-либо груза. Следующее совпадение груза с вершиной будет при прохождении колеса № 7 под вершиной C (черт. 39, схема II). При смещении колеса № 7 в участок BC будем иметь:

$$\begin{array}{lll|c|c|l}
R_1 = \ \ 4\times\ \ 22 = \ 88\ \text{тн.} & R_1 tng\,\alpha_1 = +88\,\dfrac{H}{15} & & & +264 & \\
R_2 = 22+2.16 = 54\ \ „ & R_2 tng\,\alpha_2 = -54\,\dfrac{H}{45} & \Sigma R tng\,\alpha_1 = \dfrac{H}{45} & & -\ \ 54 & = +\dfrac{40}{45}H, \\
R_3 = \ \ 2\ .\ \ \ 16 = 32\ \ „ & R_3 tng\,\alpha_3 = -32\,\dfrac{H}{9} & & & -160 &
\end{array}$$

Так как с переходом колеса № 7 из правого участка в левый сумма $Rtng\,\alpha$ стала положительной, то, следовательно, колесо № 7 является критическим грузом.

Треугольная форма линии влияния. В частном случае, когда линия влияния имеет треугольную форму (черт. 40), выражение (23) принимает вид:

$$dS = (R_1 tng\,\alpha_1 + R_2 tng\,\alpha_2)\,dx.$$

Наибольшее значение функции будет иметь место при условии:

$$R_1 tng\,\alpha_1 + R tng\,\alpha_2 = 0.$$

Подставляя в это выражение значение тангенсов по чертежу 40 получим:

$$R_1\,\frac{h}{a} - R_2\,\frac{h}{l-a} = 0.$$

Откуда:

$$\frac{R_1}{a} = \frac{R_2}{l-a}\ \text{ или }\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{l-a}.$$

На основании свойств пропорций будем иметь $\dfrac{R_1}{R_1+R_2} = \dfrac{a}{l}$, но так как $R_1+R_2 = R$ — равнодействующей грузов, расположенных на всем пролете l, то:

$$R_1 = R\,\frac{a}{l}\ \text{ и аналогично }\ R_2 = R\,\frac{l-a}{l}\ \ldots\ldots\ (24).$$

Отсюда следует, что в *треугольной форме линии влияния невыгоднейшее расположение грузов должно быть таково, чтобы соотношение между весом грузов на участке и весом грузов на всем пролете равнялось отношению длины участка к длине пролета.*

Пример 3. Пусть в треугольной линии влияния (черт. 40) пролет $l = 18$ метр., $a = 12$ метр., требуется найти критическое положение при загружении паровозом, схема которого показана на черт. 39.

Вес грузов на пролете $R = 5\times 22 + 4\times 16 = 174$ тн.

Количество грузов, которое должно быть на левом участке длиною $a = 12$ метр.

$$R_1 = R\,\frac{a}{l} = 174\,\frac{12}{18} = 116\ \text{тн.}$$

Критическим грузом будет колесо № 6, так как пока это колесо будет в правом участке, сумма грузов, находящихся на левом участке:

$\Sigma P = 5 \times 22 < R_1 = 116$ тн.,* когда же колесо № 6 перейдет в левый участок, то сумма грузов на этом участке $\Sigma P = 5 \cdot 22 + 16 = 126 > R_1 = 116$ тн.

Криволинейные линии влияния имеют место в статически неопределимых системах.

Если уравнение кривой известно, то невыгоднейшее положение нагрузки можно определить аналитически, приравняв нулю первую производную от выражения усилия или момента S. В этом случае за переменное расстояние x принимается положение одного из грузов, например, первого; положение остальных грузов определяется из расстояния d_n этих грузов от первого, например, для второго оно будет $x + d_2$, для третьего $x + d_3$ и т. д. Если уравнение кривой линии влияния имеет вид $S = Ax^2 + Bx + C$, то выражение усилия и момента выписывается для всех грузов:

$$S = Ax^2 + Bx + A(x + d_2)^2 + B(x + d_2) + \ldots\ldots + C$$

После чего составляется выражение первой производной этого уравнения, которое приравнивается нулю. Полученное уравнение, выраженное в функции x, служит для определения положения, в котором должен находится первый груз системы, чтобы она вызвала наибольшее значение момента или усилия.

Не обременяя настоящего изложения, сложным анализом этого приема, укажем, что этот прием подробно освещен в применении к неразрезным балкам инж. П. Ф. Ольгиным в его статье, напечатанной в журнале М. П. С. 1909, кн. VII.

В частном случае параболического очертания линии влияния, для отыскания невыгоднейшего положения удобно пользоваться следующим приемом (см. сборн. Трудов НКПС 1923 г. № 2).

Пусть линия влияния очерчена выпуклой параболой ACB (черт. 41) со стрелой под'ема f и пусть требуется определить невыгоднейшее положение системы грузов $P_1\ P_2 \ldots\ldots P_n$, равнодействующая которых $R_n = \Sigma_1^n P$.

Принимая начало координат в точке A, будем иметь уравнение параболы в таком виде:

$$y = \frac{4f}{l^2} x x'.$$

Обозначая переменное положение равнодействующей системы R_n относительно начала координат через x_R и выражая положение любого груза P, через его расстояние d относительно равнодействующей, так что положение его относительно начала координат будет определяться выражением $(x_R + d)$, и относительно точки B соответственно $(x'_R - d)$, мы можем написать выражение усилия или момента от системы по линии влияния в таком виде:

$$S = \frac{4f}{l^2} \Sigma^n{}_1 P (x_R + d)(x_R' - d)$$

как так x_R и x'_R величины постоянные относительно равнодействующей, то

$$S = \frac{4f}{l^2} \left\{ x_R\, x'_R\, \Sigma^n{}_1 P + x_R \Sigma^n{}_1 Pd - x_R\, \Sigma^n{}_1 Pd - \Sigma^n{}_1 Pd^2 \right\} \ldots\ldots (25).$$

Принимая во внимание, что момент системы относительно равнодействующей $\Sigma^n{}_1 Pd = 0$ и обозначая $\Sigma^n{}_1 Pd^2 = I_o$ через момент инерции системы грузов $P_1\ P_2\ldots P_n$ относительно равнодействующей, величина которого не изменяется, будем иметь выражение (25) в таком виде:

$$S = \frac{4f}{l^2}\left[x_R\,(l - x_R)\ R_n - I_0\right] \ldots\ldots\ldots (26)$$

так как $x'_R = l - x_R$.

Наибольшее значение этого выражения будет иметь место при условии, что

$$x_R = l:2 \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

т.-е. при параболическом очертании линий влияния невыгоднейшее положение системы будет иметь место при совпадении равнодействующей системы с вершиной параболы.

Это положение остается справедливым и для линий влияния близких к параболическому очертанию.

В действительности часто приходится иметь дело с линиями влияния и ломанного и криволинейного очертания, как это показано на черт. 42. В этом случае части линии влияния AE и DB представляют собой отрезки паработл длиною l_1 и l_2, а потому невыгоднейшее загружение их будет соответствовать условию, приведенному выше (выр. 26 и 27). Высота стрелы этих отрезков определяется по известному свойству параболы $f_1 = f \times l_1^2 : l^2$.

Что касается участка линии влияния ECD, то в этом случае линию влиянию можно рассматривать, как состоящую из линии влияния треугольной формы ECD длиной (пролетом) l' и из линии влияния параболического отрезка того же пролета. Невыгоднейшее положение будет определяться в этом случае, с достаточной для практических целей точностью, как для треугольной линии влияния.

В тех случаях, когда уравнение кривой линии влияния неизвестно и она резко отличается от параболической, определение невыгоднейшего положения делается путем пробных установок системы на линии влияния. При каждой установке определяются графически ординаты и вычисляется ΣPy; наибольшая из сумм принимается в расчет. Упрощение может быть достигнуто превращением кривой в ломаную, как это имеет место при узловом действии нагрузки, что дает возможность использовать для определения невыгоднейшего положения выражение (23).

§ 10. Вычисление момента и усилий по линиям влияния. При загружении линий влияния системой сосредоточенных грузов процесс графического измерения ординат для получения выражения может быть во многих случаях заменен аналитическим приемом.

При прямолинейных контурах линии влияния, изменение величины ординат y может быть выражено в функции абсцисс и углов наклонения σ, β, γ сторон линии влияния к горизонту (черт. 43). Если принять за начало координат точку A, то все ординаты участка AB могут быть выражены по общей формуле:

$$y = x.\ tng\,\alpha.$$

На участке BC ординаты y могут быть выражены через разницу отрезков $mn - nq$

$$y = x tng\,\alpha - (x - a)\ (tng\,\alpha - tng\,\beta).$$

На участке CD ординаты y могут быть выражены через разницу соответственных отрезков

$$y = x tng\,\alpha - (x - a)\ (tng\,\alpha - tng\,\beta) - (x - b)\ (tng\,\beta + tgng\,\gamma)$$

и т. д.

В соответствии с этим выражение ΣPy согласно расположения грузов по участкам может быть написано так:

$$\Sigma^d_a Py = \Sigma^b_a Px\, tng\,\alpha + \Sigma^c_b P\,[x\, tng\,\alpha - (x-a)\,(tng\,\alpha - tng\,\beta)] + \Sigma^d_c P\,[x tng\,\alpha - - (x-a)\,(tng\,\alpha - tng\,\beta) - (x-b)\,(tng\,\gamma + tng\,\beta)] + \text{и т. д.}$$

или иначе:

$$\Sigma^d_a Py = \Sigma^d_a Px tng\,\alpha - \Sigma^d_b P\,(x-a)\,(tug\,\alpha - tng\,\beta) - \Sigma^d_c P\,(x-b)\,(tng\,\beta + tng\,\gamma) (28).$$

Нетрудно видеть, что при постоянном значении $tng\,\alpha$, $tng\,\beta$ . . . . величины $\Sigma^d_a Pr$ есть ничто иное, как момент всех грузов системы, помещенной на линии влияния, относительно точки A, $\Sigma^d_b P\,(x-a)$ — момент относительно точки B всех грузов справа от нее лежащих, $\Sigma^d_c P\,(x-b)$ — момент относительно точки C всех грузов системы справа от нее лежащих и т. д.; на основании этого выражение (28) может быть написано в общем виде так:

$$\Sigma^d_a Py = M_a tng\,\alpha - M_b\,(tng\,\alpha - tng\,\beta) - M_c\,(tng\,\beta + tng\,\gamma) \quad . \; . \; (29)$$

причем знак тангенсов принимается в соответствии с наклоном линии контура к горизонту.

Дальнейшее преобразование и упрощение выражения (29) зависит от частных видов линий влияния и вытекает из законов их построения.

Например, при треугольной форме линии влияния момента в сечении балки (черт. 44), выражение (29) может быть преобразовано следующим образом;

$$\Sigma Py = M_a tng\,\alpha_1 - M_b\,(tng\,\alpha + tng\,\beta),$$

так как в линии влияния момента

$$tng\,\alpha = \frac{l-a}{l} \text{ и } tng\,\beta = \frac{a}{l}, \text{ то}$$

$$\Sigma Py = \frac{l-a}{l} M_a - M_b\left(\frac{l-a}{l} + \frac{a}{l}\right)$$

откуда

$$\Sigma Py = \frac{l-a}{l} M_a - M_b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30),$$

в котором все величины определяются основными геометрическими размерами.

Вычисление величин M_a, M_b . . . . . значительно упрощается для обычно применяемых нормальных систем нагрузок (поездом, автомобилями и т. под.) путем составления таблиц на подобие таблицы № 1, составленной для схемы II нормального типа поезда 1921 г. (таблицы для расчета по нагрузкам 1921 г. издание Н.К.П.С. 1923 г.).

В этой таблице даны моменты и равнодействующие относительно каждого колеса системы, что дает возможность вычислить момент относительно любой точки абсциссы по формуле:

$$M = M_n + R_n c,$$

в которой M_n и R_n значение момента и равнодействующей относительно n-аго колеса, с—разстояние от N-аго колеса до точки моментов. (См. таблицу № 1).

Пример 4. Пусть требуется определить величину момента по линии влияния, показанной на черт. 45, при загружении ее поездом по схеме II. Длина пролета $l = 20$ метр, длина $a = 15$ метр.

По таблице № 1 находим, что на пролете $l = 20$ мр. может поместиться 11 колес с давлением $R = 218$ тн., но т. к. несомненно схема поезда сдвинется, то берем 10 колес с давлением $R = 196$ тн. Критический груз определяем по формуле (24) $R_2 = 196\,\frac{20-15}{20} = 49$ тн. Так как вес двух колес $= 44$ тн. < 49 тн. а вес 3-х колес $= 66$ тн. > 49 тн., ТАБЛИЦА № 1

моментов и равнодействующих поезда № 1.

Число колес n	Длина загружения l_n — мт.	Равнодействующая $\Sigma^n_1 P$ тон.	Момент M_n тон-м.	Число колес n.	Длина загружения l_n - мт.	Равнодействующая $\Sigma^n_1 P$—мт.	Момент M_n тп. мет,
1	0	22	0	9	14,5	174	1.409,0
2	1,5	44	33,0	10	17,5	196	1.931,0
3	3,0	66	99,0	11	19,0	218	2.225,0
4	4,5	88	198,0	12	20,5	240	2,552,0
5	6,0	110	330,0	13	22,0	262	2.912,0
6	10,0	126	770,0	14	23,5	284	3.305,0
7	11,5	142	959,0	15	27,5	300	4.441,0
8	13,0	158	1.172,0	16	29,0	316	4.891,0

и т. д.

то, следовательно. критическим грузом является 3-е колесо, каковое совмещаем с вершиной линии влияния.

Таким образом, загружаемая длина $= a + 2 \,.\, 1{,}5 = 18$ метр, где может расположиться 10 грузов, занимающих длину 17,5 метр.

Величина момента определится по выражению (30)

$$M = M_a \frac{l - a}{l} - M_b =$$

$$= \frac{5}{20} \left| 1.931 + 196\,(18 - 17{,}5) \right| \quad 99 = 408 \text{ тн. метр.}$$

Пример 5. Требуется определить наибольший момент по линии влияния, показанной на черт. 46 при загружении ее схемой поезда табл. № 1.

В этой линии влияния величины тангенсов углов наклонения прямых, очерчивающих линию влияния будут:

$$tng\,\alpha_1 = \frac{3}{4}, \quad tng\,\alpha_2 = \frac{1}{4}, \quad tng\,\alpha_3 = -\frac{1}{4}\,.$$

Для предварительного определения невыгоднейшего положения поезда будем исходить из треугольной формы линии влияния ACB. При длине $AB = 80$ мтр., согласно таблицы, равнодействующая грузов, помещающихся на пролете $R_n = 673{,}5$ тн.; согласно выражения (24) $R_1 = 637{,}5 \,.\, \frac{20}{80} =$ $= 159{,}4$ тн.; учитывая сдвиг системы и уменьшение вследствие этого числа грузов на пролете, принимаем за критический груз № 8, для которого $R = 158$ тн. Располагая систему, как показано на черт. 46—1, проверяем невыгоднейшее загружение по выражению (23)

$$\Sigma R tng\,\alpha = 110 \,.\, \frac{3}{4} + 64 \,.\, \frac{1}{4} - (621 + 7 \times 0{,}5 - 110 - 64)\,\frac{1}{4} = -14{,}1.$$

Так как $\Sigma tng\,\alpha < 0$, то систему надо двигать влево, до совпадения одного из колес с вершиной; первое совпадение будет иметь место для колеса № 10 в этом случае (черт. 46—II).

$$\Sigma R tng\,\alpha = 110\frac{3}{4} + 86\,.\,\frac{1}{4} - (621 + 7 \times 1 - 110 - 86)\frac{1}{4} = -4 < 0.$$

Продолжая двигать систему влево, будем иметь следующее совпадение груза с вершиной под колесом № 6 (черт. 46—III) в этом случае

$$\Sigma R tng\,\alpha = 126\frac{3}{4} + 70\frac{1}{4} - (621 + 7 \times 1{,}5 - 126 - 70)\frac{1}{4} = +3{,}1 > 0.$$

Следовательно, совпадение груза № 6 с вершиной D определяет невыгоднейшее положение системы.

Для определения наибольшего момента пользуемся выражением (29):

$$S = M_{\_}\,tng\alpha_3 - M_E\,(tng\alpha_3 + tng\alpha_2) - M_D\,(tng\alpha_1 - tng\alpha_2).$$

Согласно таблицы № 1 будем иметь

$$S = 26.219{,}875\,\frac{1}{4} - [1.931{,}0 + 196\,(18 - 17{,}5)]\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) -$$

$$-770\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) = 5.205{,}47 \text{ тн. мтр.}$$

Если бы выражение M_B не совпало бы с одним из данных таблицы № 1, то его значение могло быть вычислено так:

$$M_n + \Sigma_1^n Pc + q.\,0{,}5c^2,$$

где q — нагрузка на пог. метр; например при длине загружения 73,5 выражение момента было бы $= 25.280{,}5 + 621{,}0{,}5 + 7 \times \frac{1}{2}\,0{,}5^2 = 25.591{,}875.$

Если очертание линии влияния криволинейно, то в частном случае, когда очертание ее близко к параболическому, вычисление усилия и момента производится аналитически по выражению 26, которое при невыгоднейшем положении системы, когда $x = 0{,}5l$ может быть написано так:

$$S = f_o\left(R_n - \frac{4}{l^2}\,I_o\right).$$

Для определения величин $R_n = \Sigma^n{}_o P$ и $I_o = \Sigma^n{}_1 Pd^2$ имеются таблицы изданные Н.К.П.С. в 1923 г. Сборник № 2 мостовой подсекции при В.Т.К.

Если кривая, очерчивающая линию влияния, резко отличается от параболического очертания, определение наибольшего усилия делается путем непосредственного измерения ординат под грузами.

Балочные системы.

Расчет балок сплошного сечения.

ДВУХОПОРНЫЕ БАЛКИ.

§ 11. **Поперечные силы при постоянной нагрузке.** Величина поперечной или срезывающей силы Q, вызываемой в сечениях двух опорной балки действием неподвижных сосредоточенных грузов, вообще определяется из условия равновесия левой или правой части балки относительно сечения:

$$Q = A - \Sigma^x_0 P = -[B - \Sigma^x_l P] \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

где x определяет положение сечения относительно левой опоры. На черт. 47 построена эпюра поперечных сил при действии ряда сосредоточенных грузов $P_1 - P_n$. Резкие изменения эпюры имеют место под точками приложения грузов, где она изменяется на величину груза, приложенного к этой точке балки.

При сплошной равномерной нагрузке p клгр./пог. метр. величина поперечной силы в любом сечении балки определяется выражением:

$$Q = A - p\ (x - a) = \frac{p\ (l-a)^2}{2\ l} - p\ (x - a) \quad \ldots \quad (31a)$$

в этом случае эпюра поперечных сил (черт. 48) в пределах загруженного участка изменяется по прямой, наклоненной к оси абсцисс.

Как это непосредственно следует из выражений (31 и 31a) и как это видно из эпюр, наибольшие величины поперечных сил независимо от вида нагрузок имеют место у одной из опор.

С устройством на балке узлового или передаточного действия нагрузки последняя будет передаваться на балку через передаточные балки, давления которых по отношению к основной балке являются сосредоточенными силами.

На черт. 49 пунктиром показана эпюра при непосредственном действии грузов $P_1 - P_n$, и сплошной линией показана эпюра при передаточном действии нагрузки. Построение последней может быть сделано или аналитически или графически.

При аналитическом расчете балка рассматривается под сосредоточенным давлением передаточных балок $p_1,\ p_2 \ldots \ldots p_n$, величины этих давлений определяются расчетом:

$$p_1 = P_1 \frac{d - x_1}{d} \qquad\qquad p_2 = P_1 \frac{x_1}{d} + P_2 \frac{d - x_2}{d} \text{ и т. д.}$$

Графически построение эпюры при передаточном действии нагрузки делается по эпюре непосредственного действия (черт. 49); проведением диагонали $m\ n$, отсекаем на вертикали под грузом P отрезок $k\ s$, представляющий собой давление на левую передаточную балку; действительно, по черт. 49 отрезок $k\ s = P\ \frac{d-x}{d}$, и отрезок $k\ t =$ давлению на правую передаточную балку $= P\frac{x}{d}$; а потому горизонтальная часть уступа между передаточными балками должна проходить через точку k.

На черт. 50 показана эпюра поперечных сил от сплошной нагрузки при узловом действии ее на балку. Эпюра принимает уступчатую форму, в которой уступы, вследствие симметрического разложения нагрузки на узлы, пересекают основную линию $a^1\ b^1$ по средине между узлами.

Из приведенных на черт. 49 и 50 построений видно, что совмещение передаточной балки с опорой понижает величину поперечной силы на величину давления, передаваемого узловой балкой.

§ **12. Поперечные силы при подвижной нагрузке.** При действии на балку подвижной нагрузки величина и знак поперечной силы в различных сечениях будет изменяться в зависимости от расположения нагрузки относительно сечения.

Пределы невыгоднейшего расположения нагрузки устанавливаются формой линии влияния, которая для любого сечения двухопорной балки (см. § 7) имеет вид показанный на черт. 51 и определяемую уравнениями двух прямых

$$\text{правой}\quad Q = \frac{l-x}{l}\ \text{и левой}\ Q = -\frac{x}{l}\quad \ldots\ldots\ (32)$$

Если рассматривать характер изменения эпюры наибольших поперечных сил, вызываемых подвижкой нагрузкой отдельно для загружения правой части и отдельно для левой части, то возрастание ее будет происходить по параболическому закону (черт. 52) при загружении

$$\text{правой части}\quad Q_x = q\ \frac{(l-x)^2}{2l}$$

$$\text{левой части}\ Q_x = -q\ \frac{x^2}{2\,l}$$

При одновременном действии подвижной и неподвижной нагрузки эпюры их, независимые одна от другой, складываются (черт. 52).

Из чертежа сложения этих эпюр видно, что балка разделяется на три района: два крайних, в которых эпюра поперечных сил всегда обозначена или плюс или минус и средний, где эпюра, в зависимости от положения нагрузки, может быть отрицательна и положительна.

При узловом или передаточном действии нагрузки уравнения основных прямых (32), образующих линию влияния поперечной силы, остаются те же, но границы действительности их определяются для правой прямой—правой передаточной балкой, ближайшей к сечению, для левой—левой передаточной балкой. На черт. 53 точки распространения границ правой и левой прямых определены снесением на правую прямую точки c, от правой передаточной балки и точки c на левую прямую от левой передаточной балки. Между передаточными балками, по общему свойству, линия влияния изменяется по прямой.

Если сечение балки совпадает с узловой точкой, т.-е. положением передаточной балки, то эта передаточная балка является ограничивающей как правую, так и левую прямую, а потому точки „c“ будут лежать на одной вертикали и сама линия влияния будет такая же, как при непосредственном действии.

Положение раздельной точки F линии влияния при узловом действии легко определяется из геометрического построения.

Если обозначить расстояние от левой опоры до левой передаточной балки $n \times d$, а до правой балки $(n+1)\,d$, то наибольшие ординаты в обеих частях линии влияния будут:

$$c'd' = \frac{m-n-1}{m} \qquad c\,d = \frac{n}{m}$$

из подобия же треугольников $cd\;F$ и $F\;c'd'$ следует, что

$$\frac{c'd' + cd}{cd} = \frac{d'F + Fd}{Fd} \text{ или } \frac{m-1}{n} = \frac{d}{dF}$$

отсюда положение нулевой точки

$$dF = \frac{n}{m-1}\,d \qquad \text{и } Fd' = \frac{m-n-1}{m-1}\,d \quad \ldots\ldots (38)$$

§ 13. Изгибающие моменты при постоянной нагрузке. При непосредственном действии на балку сосредоточенных грузов P_1 . . . P_n момент в любом сечении балки определится из условия равновесия левой части, или правой части с обратным знаком $M_л = -M_{пр}$

$$M_л = Ax - \Sigma_0^x P\ Cosn\ (\text{Р У})\ (x-p) \ldots\ldots\ldots (34)$$

где p — положение груза P относительно левой опоры (черт. 47)

В этом случае эпюра моментов очерчивается веревочным многоугольником с вершинами под точками приложения грузов, а потому н а и б о л ь ш е е з н а ч е н и е м о м е н т а н а д о и с к а т ь п о д т о ч к а м и п р и л о ж е н и я г р у з о в.

Аналитически это вытекает из выражения момента, по которому

$$\frac{dM}{dx} = Q = A - \Sigma_0^x P = 0,$$

что возможно только при условии совпадения сечения с точкой приложения груза.

При сплошной равномерной нагрузке интенсивностью p клгр. на пог. метр, эпюра моментов в пределах загруженой части изменяется по кривой Общий вид уравнения моментов (черт. 48 для такого вида нагрузки.

$$M = Ax - p\,\frac{(x-a)^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (34a)$$

Место наибольшего момента определяется из условия

$$\frac{d\,M}{dx} \quad Q = A - p\ (x-a) = 0$$

При узловом действии нагрузки, передаточные балки, расположенные в узлах, действуют на основную балку как сосредоточенные грузы независимо от вида и расположения нагрузки.

Так как при заданном положении нагрузки величина момента в сечениях у места расположения передаточных балок не зависит от того, имеется ли здесь балка или нет, и имеет ту же величину, как при непосредственном действии нагрузки, то ордината эпюры моментов у места расположения балок будет такая же, как при непосредственной нагрузке; но узловые назрузки являются по отношению к основной балке сосредоточенными давлениями, а потому по общему свойству веревочных многоугольников эпюра моментов должна изменяться между узлами по прямым. Отсюда следует, что эпюра моментов, при узловом действии нагрузки, должна представлять собой многоугольник, вписаный в эпюру при непосредственном действии с вершинами под узлами, а потому наибольшее значение моментов при узловом действии нагрузки имеет место под узлами.

Из рассмотрения черт. 54, 55 можно видеть, что соответственным расположением передаточных балок можно достигнуть уменьшения изгибающего момента.

§ 14. Изгибающие моменты при подвижной нагрузке. При действии подвижной нагрузки величина изгибающего момента изменяется не только по длине пролета, но и в одном и том же сечении в зависимости от положения нагрузки. Характер изменения величины момента в зависимости от положения нагрузки и наиневыгоднейшее положение ее определяются линией влияния.

Для каждого сечения балки с непосредственной нагрузкой линия влияния имеет вид треугольника (черт. 56), очерченого двумя прямыми правой и левой, определяемыми уравнениями (§ 7)

$$\text{правая } M_{np} = Aa = \frac{l-x}{l}a \qquad \text{левая } M_{л} = B\ (l-a) = \frac{x}{l}(l-a)\ . \quad (35)$$

Наибольшая ордината линии влияния имеет место под сечением и равна

$$y\ max = cd = \frac{a\,(l-a)}{l}\ \text{метр} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (36)$$

Из этого выражения видно, что вершины линий влияния для всех сечений балки расположены по параболической кривой, вершина которой, соответствует высоте ординаты линии влияния для средины балки

$$y_0 = \frac{l^2}{4l} = \frac{l}{4}$$

При узловом или передаточном действии нагрузки, основные уравнения (35) «правой» и «левой» прямых линии влияния остаются те же и обе прямые пересекаются между собой под точкой моментов.

Если сечение лежит между передаточными балками (черт. 57) то основные прямые определяют линию влияния: «правая» от правого узла (n) до нуля (b) правой опоры, «левая» — от левого узла (m) до нуля левой опоры. На протяжении же между балками n и m линия влияния по основному свойству изменяется по прямой $m\,n$. Таким образом при узловом действии нагрузки, если сечение лежит между узлами, линия влияния имеет форму усеченного треугольника с меньшими ординатами и меньшею площадью.

Если сечение будет совпадать с положением передаточной балки, то эта балка будет относится как к правой, так и к левой прямой, т.-е. будет совпадать с точкой пересечения этих прямых, а потому линия влияния в этом случае сохранит свою основную форму треугольника.

Из изложенного следует, что при узловом действии нагрузки большие ординаты и площади линий влияния соответствуют сечения под передаточными балками, а потому при расчетах прочности наибольшее значение моментов, надо искать под узлами.

§ 15. **Определение абсолютного наибольшего момента.** При определении наибольшего момента в данном сечении балки от подвижной нагрузки задача сводится к отысканию невыгоднейшего положения системы грузов относительно этого сечения. Эта задача легко разрешается при помощи линий влияния.

Так как линия влияния момента для всех сечений балки имеет треугольную форму, то невыгоднейшее загружение сечения, расположенного на расстоянии a от левой опоры, определяется из условия (форм. 24).

$$\Sigma^k_o P = R\frac{a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

где R--равнодействующая всей системы, помещающейся на пролете l, $\Sigma_o^k P$—, равнодействующая грузов, которые должны помещаться на левой части балки длиной a, и P_k—критический груз, который должен совмещаться с сечением и обеспечивать выведенное условие.

Если балка имеет узловую нагрузку, то наибольшие значения моментов должны иметь место в сечениях под узлами и несомненно в одном из узлов, ближайших к середине. При непосредственном же действии нагрузки на балку таких характерных точек нет, и задача осложняется вопросом отыскания самого наибольшего момента из возможных в различных сечениях балки, расположенных в любом месте балки и при любом положении нагрузки. В этом случае определение наибольшего расчетного момента связано двумя переменными условиями: переменным положением сечения и переменным положением грузов.

Если бы положение опасного сечения было известно, то для определения наибольшего значения момента в нем нужно было бы только определить тот критический груз P_k, который удовлетворяет условию (37) но, пока неизвестно опасное сечение, этого первого условия недостаточно:

а) Определение положения с наибольшим моментом. Всякий груз P системы может быть критическим грузом и, перемещаясь вместе со всей системой, всякий груз, будучи поставлен над каким-либо сечением, будет давать некоторый изгибающий момент в этом сечении. Величина этого момента может быть выражена следующим уравнением.

Если R—равнодействующая всей системы, c_m—растояние груза P_m от равнодействующей, то величина опорного давления (черт. 58 a).

$$A = \frac{R}{l}\ (l - c_m - x)$$

величина же момента M_m в сечении под критическим грузом

$$M_m = \frac{R}{l}\,(l - c_m - x)\ x - \mathfrak{M}_m \quad \ldots\ldots (38)$$

где $\mathfrak{M}_m$—момент грузов $\Sigma^m{}_o P$, слева от критического груза лежащих, относительно этого груза; величина этого момента постоянна и не зависит от положения системы на пролете.

Величина момента M_m изменяется в зависимости от положения сечения, и для некоторого сечения в расстоянии x_m от левой опоры имеет наибольшее значение. Положение этого опасного сечения определяется из условия, что момент M_m имеет в нем наибольшее значение, а это обусловливает, что производная от выражения момента равна нулю, а именно:

$$\frac{d\,M_m}{dx} = \frac{R}{l}(l - c_m - 2x) = 0,$$

последнее возможно только при условии, что

$$l - c_m - 2x = 0, \text{ откуда } x = \frac{l - c_m}{2} \quad \ldots \ldots \quad (39),$$

т.-е. положение опасного сечения, при совмещении с которым груз P_m вызывает наибольшее значение момента, определяется условием совмещения средины расстояния c_m между критическим грузом и общей равнодействующей со срединой пролета (черт. 58 *b*). Найденное положение опасного сечения является одним из возможных опасных сечений с возможным расчетным моментом для случая критического груза P_m. Таких возможных опасных сечений может быть найдено столько, сколько имеется грузов в системе и все они будут определяться из уравнения момента (38) общий вид которого:

$$M = \frac{R}{l}(l - c - x)\,x - \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (40),$$

в котором в соответствии с положением груза в общей системе изменяются величины: c — расстояние груза от общей равнодействующей и $\mathfrak{M}$ — момент относительно этого груза грузов, слева от него лежащих.

Положение опасного сечения для каждого груза будет определяться из условия (39).

$$x = \frac{l - c}{2}.$$

которое для грузов, расположенных *справа* от равнодействующей принимает вид:

$$x = \frac{l + c}{2}$$

Величина наибольшего момента в опасном сечении будет определяться выражением:

$$M_{max} = \frac{R}{l}\,x^2 - \mathfrak{M} = \frac{R}{l}\,\frac{(l - c)^2}{4} - \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \quad (41),$$

получаемым из общего выражения момента путем подстановки в него значения x из выражения (39).

Из рассмотрения выражения моментов (40) не трудно видеть, что оно представляет собой параболу, отнесенную к осям x и y и имеющую начало в точке A на левой опоре. Параметр этой параболы, остается неизменным для всех грузов системы, а потому все эти параболы, очерчивающие эпюры моментов частного вида, подобны между собой, но имеют различное положение на балке и различную высоту в соответствии с изменением величин c и $\mathfrak{M}$.

На черт. 59 показана схема взаимного расположения этих частных парабол для системы из 4-х грузов. Каждая парабола характеризует собой изменение величины моментов в различных сечениях балки при совпадении с этим сечением определенного груза при движении по балке всей системы. Наличие отрицательных частей параболы возможно при условии, что балка имеет концы, заходящие за опоры, что позволяет предполагать сход части грузов за опоры.

Общая эпюра моментов будет очерчена об'емлющей $a\, b\, c\, d\, e$, состоящей из наиболее возвышенных частей параболы.

Совмещаясь с одним и тем же сечением различные грузы системы будут вызывать в этом сечении различные значения моментов, но один из них будет наибольшим и будет соответствовать тому грузу системы, который является критическим для этого сечения в смысле невыгоднейшего расположения системы (условие 37).

б) Условия возможности абсолютно наибольшего момента. Абсолютно наибольший момент имеет место в одном из опасных сечений, но вместе с тем тот-же груз P_{kp}, которым определяется опасное сечение должен быть критическим грузом в смысле невыгоднейшего расположения системы для линии влияния в том же сечении:

Первое требование должно удовлетворятся условием $x = \frac{l-c}{2}$

Второе требование должно удовлетворять условию $\Sigma_o^k P \lesseqgtr R \frac{a_k}{l}$.

При согласовании второго условия с первым, его можно рассматривать не в смысле определения $\Sigma_o^k P$ количества грузов, которые должны располагаться слева от сечения a_k, а в смысле границ участков, на которых тот или иной груз P системы является критическим в смысле невыгоднейшего расположения системы.

Границы этих участков $a_1, a_2, \ldots a_k \ldots$ зависят от величины ΣP и не трудно показать, что последовательно величины их будут определяться условиями:

$$a_1 = \frac{l}{R} P_1$$

$$a_2 = \frac{l}{R} (P_1 + P_2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{k-1} = \frac{l}{R} (P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-1})$$

$$a_k = \frac{l}{R} (P_1 + P_2 + \ldots + P_{k-1} + P_k)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эти границы будут определять собою пределы участков, на которых тот или иной груз P системы будет изменять знак отношения.

$$\Sigma P \lesseqgtr \frac{R}{l} a$$

Иными словами они будут показывать, что:

на участке от O до a_1 критич. груз будет P_1
„ „ a_1 до a_2 „ „ „ P_2
. . . .
. . . .
. . . .
„ „ a_{k-1} до a_k „ „ „ P_k
. . . .
. . . .

Таким образом, для того, чтобы опасное сечение x_k определяло собой место абсолютно наибольшего момента необходимо и достаточно, чтобы оно лежало на участке, соответствующем его критическому грузу P_k, т.-е. чтобы удовлетворялось условие:

$$\left.\begin{array}{l} a_{k-1} < x_k < a_k \\ \text{или по подстановке соответствующих значений} \\ \frac{l}{R}\,\Sigma_0^{k-1} P < \frac{l-c_k}{2} < \frac{l}{R}\,\Sigma_0^{k} P \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (42)$$

Эта зависимость вполне очевидна и из чертежа 59, из которого видно, что для всех опасных сечений, лежащих слева от места абсолютно наибольшего момента.

$$a_{k-2} < a_{k-1} < x_{k-1}$$

и для всех опасных сечений справа от него лежащих

$$a_{k+2} > a_{k+1} > x_{k+1}$$

Выведенное условие возможности абсолютно наибольшего момента относится безразлично ко всем грузам системы и остается только невыясненным, какими из грузов системы это условие может быть удовлетворено.

в) Грузы могущие быть критическими при определении абсолютно наибольшего момента. Вообще отыскание сечения с обсолютно наибольшим моментом делается рядом приближений, исключающих из рассмотрения рядов грузов [1]). Мы воспользуемся для этого тем свойством балок, что какова бы ни была система грузов, опасное сечение всегда лежит близко к середине пролета, поэтому наиболее вероятным предположением относительно того, какому грузу системы соответствует абсолютно наибольший момент, будет предположение, что этим грузом будет тот груз, который является критическим для сечения по средине балки. За редкими исключениями это предположение всегда оправдывается.

Основываясь на этом, при определении места с абсолютно наибольшим моментом, следует поступить следующим образом.

Определив критический груз P_k, который удовлетворяет условию

$$\Sigma_0^k P = \frac{R}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{R}{2}$$

---

[1]) Проф. Л. Д. Проскуряков „Строительная механика ч. II стр. 43".

надо найти положение опасного сечения x_k по условию (39) и проверить удовлетворяет ли оно требованию (42)

$$\frac{l}{R}\ \Sigma_0^{k-1} P < \frac{l-c_k}{2} < \frac{l}{R}\ \Sigma_0^k P$$

Если окажется, что это условие не удовлетворено, то сравнение величины x_k с границами a_{k-1} и a_k, покажет к рассмотрению какого из соседних грузов следует перейти. Обычно, этой второй попыткой задача решается окончательно.

В заключение необходимо указать, что если при установке системы в невыгоднейшее положение, какие-либо грузы системы сойдут с пролета или на пролет войдут новые грузы, то весь расчет нужно повторить с новой системой грузов.

Также необходимо иметь в виду, что, когда при помещении системы в невыгоднейшее положение один из крайних грузов находится очень близко к концу балки, то величина абсолютно наибольшего момента может возрасти, если из системы устранить этот груз, т.-е. сдвинуть ее так, чтобы груз сошел с пролета. То же может иметь место в том случае, если на балку взойдет груз, бывший до сего вне пролета на очень близком расстоянии.

Пример 6. Требуется определить расчетный момент в балке пролетом $l = 65$ мтр, при движении по ней четырех трамвайных вагонов по схеме черт. 60.

Равнодействующая всей системы $R = 4\,(2.6{,}5 + 2.3{,}25) = 4.19.5 = 78$ тн. расположена по средине между вторым и третьим вагонами на расстоянии $2 \times 13{,}4 = 26{,}8$ мтр. от конца схемы.

Если предположить, что опасное сечение посредине пролета, то сумма грузов, приходящихся слева от сечения, должна быть $R_1 = \frac{1}{2} R = 39$ тн; такая равнодействующая покрывается суммой грузов от I-го до восьмого включительно $\Sigma_1^8 P = 39$ тн. На основании этого принимаем P_8 за возможный критический груз.

Расстояние этого груза от равнодействующей $c = 2{,}7$ метр., а потому положение опасного сечения $x = \frac{1}{2}\,(65 - 2{,}7) = 31{,}15$ мтр.

Район критического груза P_7: $\quad a_7 = \frac{65}{78} \Sigma_1^7 P = \frac{65}{78}\, 32{,}5 = 26{,}6$ мтр.

Район критического груза P_8: $\quad a_8 = \frac{65}{78} \Sigma^8{}_1 P = \frac{65}{78}\ 39 = 32{,}5$ мтр.

следовательно условие (42) возможности абсолютного наибольшего момента $26{,}6 < 31{,}15 < 32{,}6$ удовлетворено.

Величина момента в этом сечении.

$$M = 78\,\frac{65 - 31{,}15 - 2{,}7}{65}\ 31{,}15 - 19{,}5\left[\frac{1}{2}\ 13{,}4 + (13{,}4 - 2{,}7)\right] - 6{,}5 =$$
$$= (1{,}5 + 5 + 1{,}5) - 2.3{,}25\ \left(\frac{1}{2}\ 5 + 1{,}5\right) = 11.242 \text{ тн. мтр.}$$

Пример 7. Требуется определить наибольший расчетный момент в балке пролетом $l = 22$ мтр., вызываемый системой грузов, показанных на черт. 61.

Равнодействующая системы: $R = 3.5 + 2.10 + 20 = 55$ тн.

Положение равнодействующей относительно четвертого груза.

$$r = \frac{5.8+10.6+5.3-20.5-10.7}{55} = -1 \text{ мтр.}$$

При условии совпадения опасного сечения с серединой пролета критическая сумма грузов $R_k = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2}\ 55 = 27{,}5$ тн.

Эта сумма удовлетворяется 5-м грузом, относительно которого

$\Sigma_1^5 P = 45$ тн. $> 27{,}5$ тн.

Расстояние этого груза от равнодействующей $c = -4$ мтр.

Положение опасного сечения $x = \frac{1}{2}\ (22+4) = 13$ мтр.

Район критического груза P_4: $\quad a_4 = \frac{22}{55} \cdot 25 = 10$ мтр.

Район критического груза P_5: $\quad a_5 = \frac{22}{55} \cdot 45 = 18$ мтр.

Следовательно условие (42) возможности абсолютно наибольшего момента $10 < 13 < 18$ удовлетворено.

Величина момента в этом сечении (по выраж. 41).

$$M = \frac{55}{22} \cdot \frac{(22+4)^2}{4} - 5.13 - 10.11 - 5.8 - 5.5 = 182{,}5 \text{ тн. мтр.}$$

В виду того, что небольшой первый груз подошел к левой опоре, делаем поверку в предположении, что этот груз сдвинут с пролета.

В этом случае равнодействующая системы $R = 50$ тн.Положение равнодействующей относительно чертвертого груза

$$r = \frac{1}{50}\ (10.6 + 5.3 - 20.5 - 10.7) = -1{,}9 \text{ мтр.}$$

Критическая сумма относительно средины пролета $= \frac{1}{2} R = 25$ тн покрывается суммой $\Sigma_0^5 P = 40$ тн > 25 тн.

Положе-ние 5-го груза относительно равнодействующей $c = -3{,}1$ мтр.

Положение опасного сечения $x = \frac{1}{2}\ (22 + 3{,}1) = 12{,}55$ мтр

Район критического груза P_4: $\quad a_4 = \frac{22}{50}\ (10 + 2.5) = 8\ 8$ мтр.

Район критического груза P_5: $\quad a_5 = \frac{22}{50}\ (20 + 20) = 17{,}6$ мтр.

Следовательно условие абсолютно наибольшего момента

$8{,}8 < 12{,}55 < 17{,}6$ удовлетворено.

Величина момента в опасном сечении

$$M = \frac{50}{22}\left(\frac{22+3{,}1}{2}\right)^2 - 10.11 - 5.8 - 5.5 = 182{,}8 \text{ тн. метр.}$$

что больше момента вычисленного для первого случая загружения.

ДВУХОПОРНЫЕ КОНСОЛЬНЫЕ БАЛКИ.

§ 16. **Общие понятия.** Консольными балками называются балки, лежащие на *2-х опорах и имеющие концы, продолжающиеся за опоры* (черт. 62). Эти балки имеют две опоры, а потому статическая определимость их относительно опорных закреплений аналогична балкам свободно лежащим на 2-х опорах. Из простого рассмотрения деформации балки под действием нагрузки не трудно видеть (черт. 62), что нагрузка, *расположенная в междуопорной части, будет изгибать только ее, не деформируя* консольных частей, которые, оставаясь прямыми, только поднимутся и займут положение по направлению касательных к деформированной оси междуопорной части на опорах; следовательно в этом случае в них не возникает напряжений.

При загружении консолей (черт. 62) произойдет изгиб оси загруженной консоли и всей междуопорной части, следовательно загружение консолей вызывает напряжения в междуопорной части.

Влияние загружения консолей на междуопорную часть балки аналогично действию моментов на опорах M_A и M_B, величина которых равна произведению равнодействующей нагрузки консоли на расстояние ее до опоры ($M = Rr$) (черт. 62).

Нагрузка на консоли, направленная сверху вниз, будет вызывать изгиб междуопорной части кверху, что аналогично действию отрицательных опорных моментов ($-M_A$) и ($-M_B$).

Зная величину опорных моментов, вызываемых загружением консолей, можно междуопорную часть балки рассматривать, как свободно лежащую на 2-х опорах и находящуюся под действием междуопорного загружения и опорных моментов.

Деформация и работа консолей аналогична таковым же в балках заделанных одним концом.

§ 17. **Опорное давление и его линия влияния.** На основании изложенного в предыдущем параграфе величина опорного давления консольной балки, независимо от вида нагрузки, будет определяться выражением (черт. 62 *a*).

$$A = R_A + A_0 + \frac{M_A - M_B}{l} \quad \dots\dots\dots\dots (42)$$

в котором A — давление левой опоры, R_A — равнодействующая нагрузки на примыкающуюся к ней левую консоль, A_0—опорное давление 2-х опорной балки от загружения междуопорной части; $\frac{1}{l}$ ($M_A - M_B$) — опорное давление от действия опорных моментов, направление которых принято отрицательным.

Та же величина опорного давления может быть получена по общему правилу из выражения момента всех внешних сил относительно опоры B.

$$A = \frac{1}{l} R_A (l + r) + \frac{1}{l} \Sigma P (l - a) - \frac{1}{l} R_B r_b = R_A + \frac{M_a}{l} + A_0 - \frac{M_B}{l}$$

Величина опорного давления правой опоры определяется симметричным выражением $B = R_B + B_0 + \frac{l}{l} (M_B - M_A)$

Линия влияния. При положении груза $= 1$ в пределах междуопорной части на расстоянии—x от левой опоры (A) величина опорного давления левой опоры определится уравнением:

$$A = A_{o} = \frac{1\,(l-x)}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

следовательно линия влияния в пределах междуопорной части очерчивается прямой, имеющей, как и в балке, лежащей свободно на 2-х опорах, под опорой A ординату $= 1$, а под опорой B ординату $= O$.

При переходе груза $= 1$ на левую консоль, величина опорного давления будет определяться выражением (черт. 63):

$$A = \frac{l+x}{l} = \frac{l-(l+x)}{l}$$

Это выражение есть уравнение той же прямой, какая была получена для междуопорной части с подстановкой вместо текущей координаты $+x$ величины $(-x)$ согласно направлению влево от начала координат.

При переходе груза $= 1$ на правую консоль величина, опорного давления (A) будет определяться выражением:

$$A = -\frac{x'}{l} = \frac{l-(l+x')}{l}$$

Не трудно видеть, что при условии сохранения начала координат на левой опоре, полученное выражение представляет собой уравнение той же прямой линии, которую мы имели при движении груза $= 1$ на междуопорной части и которая пересекла ось абсцисс в точке под правой опорой (B).

Итак линия влияния опорного давления консольной балки определяется той же прямой, как и опорное давление в 2-х опорной балке, продолжаемой за опорные точки до концов консолей (черт. 63). Она имеет положительную часть на протяжении консоли, примыкающей к опоре, и в междуопорной части и отрицательную часть на протяжении консоли, примыкающей к другой опоре.

Ординаты линии влияния отрицательной части увеличиваются по мере удлинения консоли, и могут быть случаи, когда при большой длине консоли и тяжелой временной нагрузке, отрицательное значение опорной реакции превысит величину опорнаго давления от постоянной нагрузки, что может вызывать поднятие опор балки Это обстоятельство должно быть учитываемо в конструкции опорных закреплений.

Линия влияния правой опоры B будет симметрична линии влияния опорного давления левой опоры (черт. 63).

§ 18. Поперечные силы в сечениях консолей. Поперечные силы в сечениях консолей балок возникают только под действием нагрузки, расположенной на отсекаемом конце, что непосредственно вытекает из условия равновесия отсекаемой части.

Общий вид выражения поперечной силы в сечении консоли, находящейся под действием сосредоточенных сил $P_1 P_2 \ldots\ldots P_n$ и сплошной равномерной нагрузки p клгр. на пог. метр., такой:

$$Q = \Sigma_{o}^{n}\, P + px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

где x—расстояние от конца консоли.

На черт. 64 построена эпюра поперечной силы в консольной балке при загружении консоли сосредоточенными грузами P_1 и P_2. В этом случае опорные реакции:

$$A = P_1 + P_2 + \frac{1}{l}\,(P_1\,p_1 + P_2\,p_2) \text{ и } B = -\frac{1}{l}\,(P_1\,p_1 + P_2\,p_2)$$

Наибольшее значение поперечной силы имеет место в сечении консоли в непосредственной близости от опоры, где $Q = -\,(P_1 + P_2)$

На чертеже 65 построена эпюра поперечных сил при действии на левую консоль равномерно распределенной нагрузки. При таком загружении опорные реакции:

$$A = p\lambda + \frac{1}{2l}p\,\lambda^2 \quad \text{и} \quad B = -\frac{1}{2l}\,p\lambda^2$$

Наибольшее значение поперечной силы $Q = -\,p\,\lambda$.

При действии на консоли подвижной нагрузки, расчет ведется при помощи линии влияния.

Очертание линий влияния в сечениях консоли при непосредственном действии нагрузки определяется уравнением равновесия, которое при любом положении груза $= 1$ между концом консоли и сечением остается одним и тем же, а именно $Q = -1$, т.-е. на всем протяжении от конца консоли до сечения линия влияния очерчивается прямой, параллельной оси абсцисс (черт. 66), у места сечения она обрывается и с переходом груза $= 1$ за сечение она сливается с осью абсцисс, т. к. в этом случае $Q = O$.

При передаточном действии нагрузки, основная форма линии влияния остается та-же, но если сечение лежит между передаточными балками, то линия влияния не обрывается под сечением, а изменяется по прямой между узлами ближайшими к месту сечения (черт. 67).

§ 19. **Моменты в сечениях консолей**. Момент в любом сечении консоли зависит только от нагрузки, расположенной на отсекаемом конце консоли.

Общий вид выражения момента в сечении консоли при действии на нее сосредоточенных грузов P и равномернораспределенной нагрузки p клгр/мтр таков:

$$M_x = -\,\Sigma_o^x\,P\,(x-a) - \frac{1}{2}px^2 \quad \dots\dots\dots \quad (45)$$

в котором x—расстояние сечения и a—расстояние грузов от конца консоли.

На черт. 68 построена эпюра моментов при действии на консоль сосредоточенных грузов P_1 и P_2. Построение сделано при помощи веревочного многоугольника со сторонами 1, 2 и 3. Положение замыкающей — s определяется точками a и b, засекаемыми на вертикалях под опорами крайними сторонами веревочного многоугольника.

При передаточном действии нагрузки эпюра моментов изменится в том отношении, что она представится многоугольником, вписанным в многоугольник эпюры при непосредственном действии нагрузки.

Форма линии влияния в сечении консоли, между концом ее и сечением, определяется уравнением:

$$M = -\,1\,(a-x) \quad \dots\dots\dots \quad (46)$$

в котором x—переменное положение груза $= 1$ относительно конца консоли и a—положение сечения относительно конца консоли (черт. 69).

Это уравнение определяет собой прямую, пересекающую ось абсцисс на вертикали под сечением и имеющую на конце консоли при $x = a$ ординату $M = -a$.

При передаточном действии нагрузки основная прямая, очерчивающая линию влияния, остается та же (черт. 70), но если сечение будет лежать между узловыми балочками, то нулевая точка под сечением становится фиктивной и линия влияния будет изменяться по прямой между узловыми балочками, ближайшими к месту сечения.

§ 20. Поперечные силы в междуопорной части. При действии на консольную балку постоянной нагрузки величина поперечной силы в сечениях междуопорной части, рассматриваемой как 2-х опорная балка под действием расположенной в пределах ее нагрузки и под действием опорных моментов M_A и M_B, вызываемых загружением консолей, определяется выражением:

$$Q = A - \Sigma_o^x P = Q^o + \frac{1}{l} (M_A - M_B) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (47)$$

в этом выражении: Q_0—поперечная сила, как в простой 2-х опорной балке, моменты M_A и M_B приняты отрицательно направленными.

Следовательно эпюра поперечных сил междуопорной части балки будет слагаться из эпюры поперечных сил (Q_0) от загружения междуопорной части, как простой балки и из эпюры поперечных сил, вызываемых действием опорных моментов; эта последняя имеет постоянную величину по длине балки, а потому все ординаты эпюры будут изменяться на одну и ту же высоту, и очертание суммарной эпюры Q междуопорной части будет параллельно эпюре Q_0.

Например, при загружении междуопорной части и правой консоли равномерно распределенной нагрузкой—p клгр. на погон. метр (черт. 71), что вызывает на опоре B момент $M = -\frac{1}{4} \cdot \frac{p l^2}{8}$ клгр. метр, эпюра Q консольной балки будет очерчена прямыми $a'b'$ и cd. Очертание эпюры определяется из условия, что на левой опоре поперечная сила (по выраж. 47), определится величиной

$$Q = A = \frac{1}{2} pl - \frac{pl}{32} = \frac{15}{32}\, p\, l = \text{отрезку } \; aa,$$

на правой опоре, слева от нее, величина поперечной силы

$$Q = -\left[\frac{1}{2} p\, l + \frac{pl}{32}\right] = -\frac{17}{32}\; p\, l = \text{отрезку } \; bb,$$

Так как нагрузка междуопорной части равномерно распределенная, то эпюра очерчивается прямой a_1b_1, которая параллельна прямой $a'b'$, определяющей собой очертание эпюры Q в простой 2-х опорной балке при той же нагрузке. В пределах консоли эпюры Q очерчивается прямой cd (сличи черт. 65)

Опорная реакция:

$$B = \frac{1}{2} p\, l + \frac{p\, l}{4} + \frac{p\, l}{32} = \frac{25}{32} p\, l$$

Если консольные части равны и одинаково загружены, то загружение их не оказывает влияния на величину поперечной силы междуопорной части, так как $M_A - M_B = O$.

При действии передаточной нагрузки эпюра поперечных сил консольных балок видоизменяется из эпюры непосредственного действия по общим законам (см § 11 и § 18). Тип построения такой эпюры показан на черт. 72.

Наи ольшие значения поперечных сил имеют место в сечениях в непосредственной близости от опорных точек.

Линия влияния для поперечных сил в междуопорной части балки по общему свойству (см. § 12 черт. 51), очерчивается двумя прямыми.

При положении груза = 1 справа от сечения, величина поперечной силы в сечении определяется уравнением (32)

$$Q = A = \frac{1\ (l-x)}{l}$$

т.-е. уравнением опорного давления A, представляющего собой прямую $c'b$ (черт. 73).

При положении груза = 1 слева от сечения величина поперечной силы определяется уравнением: (32)

$$Q = A - 1 = -B = -\frac{x}{l}$$

т.-е. уравнением опорного давления B, но со знаком (—), которое изображается прямой $c''a$.

Таким образом линии влияния поперечных сил для сечений междуопорной части консольных балок определяются двумя прямыми опорных давлений, „правой“ и „левой“, пределы распространения которых ограничиваются положением сечения и концами консолей.

Как видно из черт. 73 линия влияния поперечной силы имеет две отрицательных и две положительных части, которые загружаются попарно одновременно для получения наибольших значений $\pm Q$ в рассматриваемом сечении.

При действии передаточной нагрузки основные уравнения, определяющие вличину Q, остаются те-же, но если сечение попадет между передаточными балками, то в этом месте форма линии влияния изменяется по общему свойству линий влияния, т.-е. по прямой между передаточными балками (черт. 81 *bis*).

§ 21. Моменты и их линии влияния в междуопорной части балки. Момент в любом сечении междуопорной части балки на расстоянии x от левой опоры (A) при действии постоянной нагрузки, согласно соображений изложенных в § 16 напишется так:

$$M_x = M_o + \frac{x}{l}\ (M_A - M_B) - M_A$$

или

$$M_x = M_o - M_A\ \frac{(l-x)}{l} - M_B\ \frac{x}{l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (48)$$

где M_0 — момент в том же сечении, как балки без консолей, лежащей на 2-х, опорах, при действии той же нагрузки, $(M_A - M_B)\ \frac{x}{l}$ — момент от опорного давления вызываемого действием отрицательных опорных моментов M_A и M_B, являющихся результатом загружения консолей.

Из этого выражения (48) момента видно, что загружение консольных частей вызывает понижение момента в междуопорной части по сравнению с простыми балками, лежащими на 2-х опорах.

На чертеже 74 помощью веревочного многоугольника 1—8 построена эпюра моментов в консольной балке под действием грузов P_1 . . . . P_7

Положение замыкающей стороны ab эпюры определено пересечением крайних сторон 1 и 8 с вертикалями опорных точек. Части эпюры, лежащие ниже замыкающей, положительны,—лежащие выше нее, отрицательны.

Из выраж. 48 и черт. 74 видно, что эпюра моментов междуопорной части слагается из 2-х эпюр: эпюры моментов M_0 простой 2-х опорной балки, очерченной веревочным многоугольником 3—4 . . . . . 7 с замыкающей стороной $a'b'$ и эпюры очерченой трапецией $a'b'ab$ от действия отрицательных опорных моментов M_A и M_B, определяемых отрезками aa' и bb'. Эти последние определяют собой положение замыкающей ab в консольной балке.

В отличие от 2-х опорных простых балок, эпюра моментов консольной балки, при загружении консолей всегда имеет отрицательную часть эпюры, поэтому наибольшее значение расчетного момента проверяется в двух сечениях: положительное в средней части балки и отрицательное на опорах. Опасное сечение с наибольшим моментом определяется из условия

$$\frac{dM}{dx} = Q = O$$

При передаточном действии нигрузки (черт. 75) эпюра моментов по общему закону, принимает форму многоугольника, вписанного в основную эпюру моментов при непосредственном действии нагрузки, с вершинами на вертикалях под передаточными балками.

В этом случае наибольшее значение положительного момента будет в сечении под одной из средних передаточных балок, т.-к. во вписанном многоугольнике ординаты между передаточными балками уменьшаются. Наибольшее значение отрицательного момента остается на опорах, так как в отрицательной части эпюры вписанный многоугольник увеличивает ординаты эпюры (черт. 75).

Линия влияния момента в любом сечении междуопорной части, расположенном на расстоянии — a от левой опоры (A) будет характеризоваться двумя прямыми: „левой“ и „правой“ (черт. 76).

Уравнение *правой* прямой для случая перемещения груза = 1 в правой от сечения части балки будет:

$$M_{np} = A.a = \frac{l-x}{l} \cdot a$$

т.-е. представляет из себя уравнение линии влияния левой опорной реакции (A) измененное в отношении $1 \times a$

Уравнение же *левой* прямой для случая перемещения груза = 1 в левой от сечения части балки будет:

$$M_x = -[-B(l-a)] = \frac{x}{l}(l-a),$$

т.-е. представляет из себя уравнение линии влияния правой опорной реакции (B), измененное в отношении $1 \times (l-a)$

Обе эти прямые, определяемые теми же уравнениями, как и в простоа балке, лежащей на 2-х опорах (см. выраж. 35), пересекаются между собой нй вертикали под точкой моментов.

Из изложенного видно, что способ построения линии влияния момента в междуопорной части такой же, как и в 2-х опорной балке, и сама линия влияния очерчивается двумя прямыми правой и левой (черт. 76), имеющими распространение от сечения до конца консолей.

Из черт. (76) линии влияния момента видно, что она состоит из положительной части в междуопорной части балки и отрицательных частей над консолями. Из чего следует, что расчетное наибольшее значение момента для сечений междуопорной части должно определяться в предположении загружения междуопорной части и отдельно консолей.

При передаточном действии нагрузки основные прямые, очерчивающие линию влияния, не изменяют своего положения и линия влияния в основе остается та-же, но если сечение взято между узловыми балками, то, как и в балках лежащих на 2-х опорах, правая линия ограничивается правой узловой балкой, левая—левой, а между этими балками линия влияния изменяется по прямой (черт. 81 *bis*).

При непосредственном действии нагрузки возникает вопрос об отыскании сечения с абсолютно наибольшим моментом. Так как всякое загружение консолей понижает величину момента междуопорной части, то очевидно вопрос должен сводиться к загружению только междуопорной части, как балки на 2-х опорах, а потому все положения изложенные в § 15 остаются применимыми для расчета междуопорной части консольных балок.

§ 22. Сложные консольные балки и условия их статической определимости. Под названием сложных консольных балок (балки Гербера) подразумевается система (черт. 77 а), состоящая из простых консольных балок AB, $A'B'$ . . ,концы консолей которых соединены между собой и с береговыми опорами при помощи промежуточных балочек CD, $C'D'$ . . . В общем виде они представляют собой многоопорную балку, в которую при помощи соединительных шарниров включены промежуточные балочки.

Если бы в сложных консольных балках не было промежуточных шарниров, то они, как балки, имеющие более трех опор, были-бы статически неопределимы относительно опорных реакций (см. § 4). Для приведения их к статически определимому виду необходимо введение в систему особых конструктивных условий, которые дали бы возможность составить новые уравнения равновесия для определения лишних неизвестных опорных закреплений. Таковыми конструктивными условиями являются промежуточные шарниры, относительно которых момент всех внешних сил, слева или справа от него лежащих, должен быть равен нулю. Это условие равносильно тому, чтобы равнодействующая внешних сил, слева или справа от шарнира лежащих, проходила через шарнир. Если это условие не будет соблюдено, то равнодействующая этих сил, проходящая вне шарнира, будет стремиться вызвать вращение одной части балки, относительно другой вокруг промежуточного шарнира т.-е. балка не будет находиться в равновесии. Таким образом число промежуточных шарниров строго связано с числом неизвестных в опорных закреплениях.

Если вся система сложной консольной балки имеет n опор, из которых $(n-1)$ опора могут быть сделаны шарнирно-подвижными, а одна опора для сохранения устойчивости должна быть шарнирно неподвижной, то число неизвестных условий в опорных закреплениях будет $(n-1)\times \times 1 + 1 \times 2 = (n+1)$.

Три из числа этих неизвестных могут быть определены из условия равновесия статики, а потому число недостающих уравнений для определения опорных закреплений будет:

$$K = n + 1 - 3 = n - 2$$

Так как каждый неподвижный шарнир дает одно дополнительное уравнение равновесия ($M_s = O$), то, с едовательно, в сложных консольных балках, число промежуточных шарниров (K) должно равняться числу опор без двух ($n - 2$).

Это условие необходимо и достаточно, если, как было указано, все опоры кроме одной подвижные, но, если в числе опор будет несколько неподвижных опор, то, тем самым, число неизвестных опорных закреплений будет увеличено. Включение нового неизвестного условия в опорные закрепления потребует включения новых условий в систему, которые позволили бы сохранить ее статическую определимость относительно опорных реакций. Это может быть достигнуто введением в конструкцию шарн ров, обладающих подвижностью в определенном направлении; при такой конструкции равнодействующая, проходящая через промежуточный шарнир, должна иметь направление нормальное плоскости движения шарнира, что создаст второе условие для составления уравнения равновесия. Схематическое устройство такого шарнира показано на черт. 77*a* в точке C'.

Следовательно число подвижных и неподвижных промежуточных шарниров в составе сложной консольной балки, обусловливается числом лишних неизвестных опорных закреплений. Общее число шарниров в сложных консольных балках должно удовлетворять условию $K = n - 2$.

Не останавливаясь более подробно на этом вопросе, который затрагивает собой вопрос об образовании статически определимых неизменяемых систем и к которому мы вернемся ниже (см. § 44), укажем, что расположение промежуточных шарниров в сложной консольной балке должно быть таково, чтобы не нарушались основные условия образования неизменяемых систем (см. § 1), а именно, чтобы присоединение каждого плоского диска было сделано не менее, как одним неподвижным шарниром, и одним стержнем, (представляющим собой подвижной шарнир) или тремя стережнями, не пересекающимися в одной точке.

Включение промежуточных шарниров в многоопорную балку разбивает ее на ряд консольных балок, которые должны быть двухопорными, что заставляет располагать шарниры через пролет (см. черт. 77). Число промежуточных шарниров должно быть не более 2-х в пролете, так как если бы в каком либо пролете оказалось более двух шарниров, то они будучи расположены на одной прямой, представили бы собой цепь легко изменяющуюся под действием любой нагрузки. Число подвижных шарниров определяется числом неподвижных опор; включение их целесообразно в шарнирах ближайших к месту положения неподвижной опоры.

Междуконсольные балочки CD, $C'D'$ . . . . (черт. 77*a*) шарнирные по концам, по существу, являются балочками свободно лежащими на 2-х опорах, независимо от того будут ли они опираться на консоли (балка CD) или будут подвешены к ним (балка $C'D'$). Эти балочки работают и деформируются только под действием нагрузки, приходящейся непосредственно на них и, так как они представляют собой балочки, лежащие на 2-х опорах, то расчет их проводится также как этих последних. Своим опорным давлением на конец консоли они вызывают деформацию прилегающей консоли и, в соответствии с этим, ближайших междуопорных частей (черт. 77*b*).

При загружении только основных консольных балок междуконсольные балочки, хотя и получают смещение своих концов (черт. 77с), но вследствие шарнирности на концах сохраняют свою первоначальную форму и никаких деформаций, а следовлтельно и напряжений не испытывают.

§ 23. Расчет сложных консольных балок при постоянной нагрузке. По своему образованию сложные консольные балки представляют собой комбинацию из простых консольных балок и опирающихся на них 2-х опорных междуконсольных балок. Следовательно в процессе расчета их необходим последовательный переход от междуконсольных балок к консольным, так как первые передают нагрузку на последние. Что касается уравнений, определяющих величину опорных давлений, моментов и поперечных сил, то при расчете междуконсольных балок должны применяться приемы расчета 2-х опорных балок (см. § 11 и 13); при расчете консольных частей должны применяться формулы § 18 и § 19 с учетом нагрузки как непосредственно действующей на консоли, так и передаваемой на них промежуточными балочками, и наконец, при расчете междуопорной части должны применяться приемы изложеные в § 20 и § 21.

Пример 8. В качестве примера, рассмотрим случай расчета и построения эпюр моментов и поперечных сил для сложной балки (черт. 78) с загружением междуконсольной балочки сплошной равномерной нагрузкой p *клгр./м" р.* и консоли BC той же нагрузкой.

Опорные давления, передаваемые междуконсольной балочкой CD на концы консоли, $C = D = \frac{1}{2}\ pl_1$

Отрицательные опорные моменты в консольных балках.

в левой AB: $\qquad M_a = O \qquad M_B = -\left(\frac{1}{2}\, pl_1\lambda + p\frac{\lambda^2}{2}\right)$

в правой A_1B_1: $\qquad M^1{}_a = -\frac{1}{2}\, pl_1\lambda \qquad M^1{}_B = O$

Опорные сопротивления в этих же балках (по выраж. 42) в левой балке:

$$A = -\frac{1}{l}\left[\frac{1}{2}pl_1\lambda + p\frac{\lambda^2}{2}\right]; \quad B = \frac{1}{l}\left[p\lambda\left(l+\frac{\lambda}{2}\right) + \frac{1}{2}\, pl_1\,(l+\lambda)\right]$$

в правой балке $A_1 = \frac{1}{2}pl_1\frac{l+\lambda}{l}; \qquad B_1 = -\frac{1}{2}pl_1\frac{\lambda}{l}$

В пределах междуконсольнной балочки момент и поперечная сила будут определяться по формулам для простой 2-х опорной балки:

$$M = \frac{1}{2}\, px\,(l_1 - x) \qquad Q = \frac{1}{2}\, pl_1 - px$$

Эпюра моментов будет иметь параболическое очертание с наибольшей ординатой $\frac{1}{8}\, pl_1{}^2$, а эпюра поперечных сил будет очерчена наклонной прямой с наибольшими ординатами у опор (сравн. чер. 48).

В пределах консолей величина момента, определяемая по выражению 45, будет:

в консоли BC: $\qquad M_x = -\left[\frac{1}{2}\, pl_1x + \frac{1}{2}\, px^2\right]$

в консоли DA_1: $$M_x = -\frac{1}{2}pl_1x$$

в первом случае суммарная эпюра криволинейна, во втором случае она прямолинейна.

Поперечная сила, определяемая по выражению 44, будет.

в консоли BC: $$Q = +\frac{1}{2}pl_1 + px$$

в консоли DA_1: $$Q = -\frac{1}{2}pl_1$$

В консоли BC суммарная эпюра очерчена наклонной прямой, наклоненной к оси абсцисс, в консоли же DA_1, эпюра очерчена по прямой параллельной оси обсцисс.

В междуопорной части моменты могут быть определены или по выражению 48 или непосредственно по опорным реакциям.

в балке AB: $$M_x = Ax = -\frac{1}{2}\frac{p}{l}[l_1\lambda + \lambda^2]x$$

в балке A_1B_1: $$M_x = B_1x = -\frac{1}{2}\frac{p}{l}l_1\lambda x$$

обе эпюры очерчены по прямым, сходящим на нуль к опорам A и B_1.

Поперечные силы в междуопорной части могут быть определены по выражению 47 или непосредственно по опорным реакциям.

в балке AB: $$Q_x = A = -\frac{p}{2l}[l_1\lambda + \lambda^2]$$

в балке A_1B_1: $$Q_x = -B_1 = +\frac{p}{2l}l_1\lambda$$

в обоих балках эпюры имеют постоянную величину.

Наконец, в пределах консоли B_1C_1 и междуконсольной балки моменты и поперечные силы равны нулю, так как ни та ни другая не несут нагрузки.

Величина момента в сечениях междуопорных частей вообще определяется выражением (48):

$$M_x = M_o - \frac{M_A}{l}(l-x) - \frac{M_B}{l}x$$

В соответствии с чем эпюра моментов слагается из эпюры моментов (M_A) простой 2-х опорной балки и эпюры моментов от влияния опорных моментов M_A и M_B, имеющей вид трапеции с ординатами на опорах, равными величине опорных моментов.

Это сложение эпюр остается справедливым для всякой 2-х опорной балки, влияние на которую со стороны смежных пролетов учитывается в виде влияния опорных моментов. Оно справедливо и для пролетов, в которые вводятся шарниры, но введение шарниров обусловливает, чтобы замыкающая пересекала веревочный многоугольник на вертикалях под шарнирами, так как моменты в этих местах равны нулю, а следовательно и ординаты эпюры должны быть равны нулю. Таким образом введение в многоопорную балку шарниров позволяет определить положение замыкающих, что дает возможность построить эпюру моментов и тем самым провести расчет балки.

Пример 8а. Рассмотрим сложную балку (черт. 79), находящуюся под действием системы грузов $P_1, P_2 \ldots P_{10}$ и проведем расчет ее графически.

Для построения эпюры моментов строим силовой многоугольник для нагрузки P_1 P_1, и, задавшись полюсами O_1, O_2, O_3 и O_4 с одним и тем же полюсным расстоянием H (черт. 79*c*), строим для каждого пролета многоопорной балки веревочные многоугольники (черт. 79*b*), придерживаясь в построении последовательного порядка. Снося затем на стороны этих многоугольников шарниры F_1, F_2 и F_3, определяем положение нулевых точек эпюры, через которые должны проходить стороны замыкающей. Таким образом в пролете BC замыкающая займет положение b_1c_1, проходящее через нулевые точки f_1' и f_2', и отсечет под опорами B и C отрезки bb_1 и cc_1, определяющие собой опорные моменты M_B и M_C. В пролете DE замыкающая займет положение $d'e$, проходящее через нулевые точки f'_3 и e, и отсечет под опорой D отрезок dd, определяющий собой опорный момент M_D. Что касается замыкающих в пролетах AB и CD, то положение их определяется ординатами опорных моментов.

Величины опорных давлений определятся, если в каждом силовом многоугольнике провести соответствующую ему замыкающую; отрезки на силовом многоугольнике, отсекаемые этими замыкающими, определят величины опорных давлений, при чем сопротивления промежуточных опор будут слагаться из двух опорных сопротивлений смежных пролетов, так $B = B_1 + B_2$, $C = C_1 + C_2$ и т. д.

Поперечные силы в каждом сечении определятся на силовом многоугольнике отрезком между сторонами силового многоугольника, соответствующим сторонам веревочного многоугольника, пересекаемым вертикалью проходящей через рассматриваемое сечение. Так например: в сечении $t - t$, пересекающем стороны 8 и s_3, поперечная сила определяется отрезком $T - T$ и будет положительна, т. к. лежит выше замыкающей.

Условия построения эпюр не изменяются, если вместо сосредоточенных грузов будем иметь равномерно распределенную нагрузку.

Из порядка построения эпюр моментов (черт. 78 и 79) можно видеть, что моменты в междуконсольных балках всегда положительны, как в 2-х опорных простых балках; в консольных частях моменты всегда отрицательны и имеют наибольшую величину у опор; что касается междуопорных частей, то они могут быть положительными и отрицательными в соответствии с величиной нагрузки.

§ 24. Линии влияния сложных консольных балок. Линии влияния сложных консольных балок отличаются от таковых же для простых консольных балок учетом влияния междуконсольных балочек при движении по ним груза. Так как по отношению к консольным балкам междуконсольные балочки носят характер передаточных, то по общему закону, линии влияния в пределах этих балок, как между узлами, должны очерчиваться прямыми, проходящими через вершины ординат, соответствующих концам передаточных балок, или что то-же концам консолей.

Если для простой консольной балки AB (черт. 81—I) линия влияния опорного давления A определялась прямой $d'a_1'$ b_1c_1', то с присоединением междуконсольных балочек CD. C_1D_1 линия влияния дополняется прямыми cd' и $c_1'd_1$. Передвижение же груза в пределах остальных балок системы никакого влияния на консольную балку AB оказывать не будет, а потому линия влияния опорного давления A на остальном протяжении системы имеет ординаты равные нулю.

Аналогично линии влияния моментов (черт. 81—II) и поперечных сил (черт. 81 III) в любых сечениях консольной балки сохраняют свою форму и метод построения, как в простых консольных балках, на протяжении же междуконсольных балочек CD и C_1D_1 линии влияния дополняются прямыми cd' и $c_1'd_1$, проходящими через вершину ординат линий влияния на концах консолей и нуль под шарниром у другого конца балочки. Это распространение линий влияния на длину дополнительных балочек имеет место и в линиях влияния для сечения в консолях (черт. 81—IV и V).

При передаточном действии нагрузки построение основных прямых линий влияния сложных консольных балок остается то-же, что при непосредственном действии нагрузки, но, в соответствии с общим законом, по которому линии влияния между передаточными балками очерчивается по прямым, форма линий влияния может изменяться в тех местах, где основные прямые резко изменяют свое направление, что обычно бывает у концов линии влияния (C, D_1) под шарнирами $(D, C_1 \ldots)$, а также под сечением, если все эти места лежат между передаточными балками.

На черт. 81*bis* показано построение линий влияния опорного давления (A_1), момента в сечении междуопорной части (M_x) и поперечной силы в том же сечении (Q_x).

Так как линии влияния сложных консольных балок отличаются от таковых же простых консольных балок только распространением их на длину междуконсольных балочек, то все указания §§ 20 – 21 остаются справедливыми и для сложных консольных балок.

Из сопоставления линий влияния простых (черт. 73, 76) и сложных (черт. 81 и 81*bis*) консольных балок видно, что линии влияния первых резко ограничиваются большими ординатами по концам консолей, тогда как во-вторых это смягчается постепенным понижением на нуль по длине междуконсольной балочки. Это резкое окончание линии влияния в простых консольных балках указывает на то, что всякий вступающий на консоль груз вызывает в балке резкое изменение усилия или момента (характер удара), что не имеет места в сложных консольных балках, в чем заключается их преимущество перед первыми.

Расчет балочных ферм.

ПРОСТЫЕ ФЕРМЫ.

§ 25. Общие понятия. Фермы представляют собой сочлененные системы, состоящие из стержней образующих в своих пересечениях узлы с шарнирным соединением стержней. Теоретически под названием ферма подразумевается плоская геометрическая система, состоящая из невесомых стержней определяемых прямыми линиями, связанными между собой шарнирами неимеющими трения, и находящаяся под действием нагрузки, приложенной в шарнирах, т.-е. в узлах (черт. 82).

Отдельные стержни, образующие ферму, могут быть прямые: al, bl и т. д. и кривые ab, bc . . . . ; с точки зрения теории, стержни определяются направлением „основного“ продольного усилия, которое в фермах с математическими шарнирами, т.-е. лишенными трения, направлено по прямым от узла к узлу. Если предположить, что в сечении какого либо прямого стержня действует усилие S, направленное не по прямой между шарнирами, то, очевидно, под действием этого усилия стержень должен стремиться повернуться вокруг шарниров, пока не наступает равновесие, возможное только при условии прохождения силы — S по прямой через центры шарниров.

Наличие в ферме кривых стержней не изменяет этого условия, но по отношению к оси кривого стержня осевое усилие S фермы будет внецентренным, а потому кривой стержень будет испытывать дополнительное напряжение от внецентренного действия $= S \times f$.

Устройство шарниров лишенных трения в действительности невозможно. В фермах узловые соединения осуществляются при помощи заклепочных соединений (черт. 83) и болтов (черт. 84).

В заклепочных узловых соединениях по существу никакого шарнира нет и отмечается только теоретическая точка C — центра шарнира в месте пересечения осей продольных усилий в стержнях.

При устройстве „болтовых узлов“ (черт. 84), в которых все стержни имеют возможность вращаться вокруг болта C, величина напряжения от усилий в стержнях обычно так велика, что трение, возникающее между проушинами и болтом, не допускает свободного вращения.

Опытные наблюдения и расчеты показали, что, при большой длине стержней и относительно малой жесткости их, влияние жесткости клепаных узлов не так велико и, во всяком случае, вызываемые этим „дополнительные“ напряжения могут быть учитываемы независимо от основных усилий.

Условие расположения внешней нагрузки в узлах фермы является необходимым, так как всякий груз, приложенный вне узлов по длине стержня (черт. 85), будет разлагаться на узлы и вызовет изгиб стержня, вследствие чего стержень будет испытывать дополнительное напряжение от изгиба, независимое от основного продольного усилия — S. При расположении нагрузки только в узлах, стержни будут находиться только под действием основных продольных усилий.

Для устранения всех перечисленных дополнительных влияний, вызываемых условиями конструкций, теория рассматривает фермы в идеализованном виде т.-е. с идеальными прямыми стержнями, с идеальными шарнирами и с нагрузкой только в узлах.

§ 26. Условия статической определимости и неизменяемости ферм. Фермы должны удовлетворять условию неизменяемости, т.-е. не должны иметь относительного перемещения составляющих их стержней; всякое изменение формы фермы возможно только в пределах соответствующих деформаций стержней.

Простейшим примером геометрически неизменяемой фермы служит треугольник (черт. 86), в котором изменение формы возможно только при условии изменения длины сторон.

Примером же геометрически изменяемой системы служит четыреугольник (черт. 89а), могущий изменять свою форму, без изменения длины стержней.

Фермы изменяемые в сооружениях непригодны, как лишающие их устойчивости, почему в последующем мы будем иметь дело только с фермами неизменяемыми.

Если ферма по своему образованию неизменяема, то, как одно целое, она не отличается от простой балки сплошного сечения, а потому условия статической определимости ее относительно опорных реакций остаются те же, что в балках сплошного сечения.

Что касается условий статической определимости относительно внутренних стержней, то, так как вся ферма рассматривается в состоянии упругого равновесия под действием внешних сил, то и отдельные части ее, например, отдельные узлы, должны находиться в состоянии упругого равновесия, т.-е. все внешние силы и внутренние усилия, приложенные к этому узлу, должны удовлетворять условиям равновесия (черт. 87).

Так как в каждом узле все силы проходят через одну точку, то условия их равновесия сводятся к двум уравнениям $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$; следовательно, если обозначить число узлов в ферме k, то для определения неизвестных усилий, можно написать $2k$ уравнений, которыми будут определяться не только m неизвестных усилий по числу стержней в ферме, но и 3 неизвестных условия опорных закреплений, всего $(m+3)$ неизвестных. Действительно, если все узлы в том числе и опорные, находятся в равновесии с внешними силами, то и сама ферма, как об'единяющая эти узлы, находится в равновесии под действием внешних сил, а потому 3 уравнения равновесия, определяющие неизвестные величины опорных давлений, являются следствием из $2k$ уравнений равновесия узлов.

Отсюда вытекает, что ферма будет статически определима относительно внутренних усилий, если число стержней ея m равно удвоенному числу узлов $2k$ минус три

$$m = 2k - 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49).$$

Этому условию удовлетворяет шарнирный треугольник (черт. 86а), в котором $m = 3 = 2 \times 3 - 3$, и вообще всякий многоугольник, который образуется из основного треугольника путем добавления в него одного узла с помощью 2 стержней, так как в этом случае левая и правая часть равенства увеличивается на одно и тоже число $m + 2 = 2(k+1) - 3$, при чем порядок и способ добавления безразличен, недопустимо только, чтобы добавляемые стержни и узел лежали на одной прямой.

Ферма, полученная путем последовательного построения многоугольника из основного треугольника с переходом от узла к новому узлу (черт. 88*a*), будет состоять из ряда простых треугольников; такие фермы носят название простых ферм в отличие от сложных ферм, в которых имеется пересечение стержней между собой (черт. 88*b*), включение или наложение одной системы на другую и т. п.

Выведенная зависимость $m = 2k - 3$ между числом шарниров k и числом стержней m устанавливает число возможных уравнений равновесия необходимых для определения связевых усилий между шарнирами; если эта зависимость удовлетворена, то каждому виду нагрузки на ферму соответствуют определенные усилия.

Если число стержней $m < 2k - 3$, то это соотношение показывает, что число стержней, служащих связью между шарнирами меньше, чем это нужно для обеспечения неподвижности шарниров k, следовательно ферма изменяема.

Примером такой изменяемой системы служит четыреугольник (черт. 89*a*) в котором $m = 4 < 2 . 4 - 3 = 5$.

Приведение его к неизменяемому виду может быть сделано включением пятого стержня (диагонали) (черт. 89*b*).

Введение второй диагонали (черт. 89c) будет служить только для лишнего закрепления уже и без того неизменяемой системы. Так как число шарниров k при этом не изменяется, вводится только лишний стержень, то число уравнений, необходимых для определения усилий в ферме, не изменяется, а потому число их будет недостаточно для определения усилий во всех стержнях с добавленным, а потому фермы, в которых $m > 2k - 3$ неизменяемы, но статически неопределимы.

Теория сооружений рассматривает только фермы неизменяемые, в которых $m \lesseqgtr 2k - 3$, разделяя изучение их на статически определимые и статически неопределимые.

Условие $m = 2k - 3$, устанавливающее статическую определимость или неопределимость необходимо, но недостаточно для суждения о неизменяемости. Понять это нетрудно из рассмотрения фермы, показанной на черт. 90, в которой число стержней $m = 9$, число шарниров $k = 6$, а потому условие (49), по которому $9 = 2 \cdot 6 - 3$ соблюдено; однако вполне очевидно, что левая часть фермы, представляющая собой шарнирный четыреугольник, изменяема; в правой же части отмечается излишнее число связующих стержней.

Таким образом зависимость $m = 2k - 3$ недостаточно определяет неизменяемость фермы; необходимо еще, чтобы эти стержни имели соответствующее расположение между узлами. Иногда это бывает ясно видно из чертежа фермы, но очень часто приходится анализировать это особыми приемами, о чем смотри § 41—43.

§ 27. Терминология и классификация ферм Фермы могут иметь самые разнообразные очертания в зависимости от назначения их или характера сооружения, в состав которого они входят. Однако, есть ряд терминов, установившихся в технике и определяющих как наименование отдельных частей ферм, так и их самих, что дает возможность установить основную классификацию балочных ферм.

Все стержни, образующие фермы, разделяются на поясные и решетку.

Поясными стержнями называются стержни по внешнему контуру фермы, они различаются на верхний пояс, очерчивающий верхнюю часть контура фермы, и нижний пояс, очерчивающий нижнюю часть контура фермы.

Решеткой называются внутренние стержни, служащие для соединения верхнего и нижнего поясов фермы; в решетке различаются вертикальные стержни или стойки и раскосы или диагонали.

По характеру очертания контура фермы различаются на:

1. Фермы с параллельными поясами (черт. 91), в которых оба пояса образованы двумя взаимно параллельными прямыми.

2. Фермы с криволинейными поясами (черт. 92), в которых центры узлов по контуру расположены по какой-либо закономерно изменяющейся кривой, например, по круговой (черт. 92-а), по параболе (черт. 92-в) и т. п.; в соответствии с чем фермы носят названия круговых, параболических, линзообразных (черт. 92-в) и т. п.

3. Фермы с ломаными поясами (черт. 93), в которых один или два пояса очерчены ломаной линией; контур этой линии определяется теоретическими, конструктивными или этическими соображениями; в соответствии с контуром они носят название: полигональных (черт. 93-а), треугольных или стропильных (черт. 93-в), по характеру применения для крыш и т. п.

По виду решетки фермы разделяются на:

1) Раскосные (черт. 92-а), в которых решетка состоит из стоек или вертикалей и раскосов между ними.

2) Решетчатые (черт. 91), в которых решетка состоит только из наклонных стержней.

3) Кроме этих двух основных видов решетки применяется менее распространенный вид полураскосной решетки (черт. 94), которая отличается от раскосной тем, что в панели вместо одного длинного раскоса делается два полураскоса.

Эти три вида решеток известны под названием простых в отличие от ферм со сложной решеткой, которые образуются:

1. Наложением 2-х и более простых одноименных решеток одна на другую, в соответствии с чем фермы получают названия двухрешетчатых (черт. 95-в), двухраскосных (черт. 95-а), многорешетчатых (черт. 95-с) и т. п., смотря по тому, сколько одиночных решеток совмещено в одной ферме. Число простых систем, входящих в состав сложной решетки, легко определяется из проведения вертикального разреза поперек фермы; число пересеченных этим разрезом диагоналей или раскосов определяет число систем. Например, ферма, показанная на черт. 95-а, как видно по разрезу $s—s$ имеет две системы, т.-к. разрез пересекает два раскоса или стойки.

2. Включением по конструктивным соображениям в простую решетку дополнительных стержней с соответствующим добавлением узлов; сюда относится, например: показанная на черт. 93-а раскосная ферма с дополнительными шпренгелями, показанная на черт. 96 решетчатая ферма с дополнительными треугольниками и т. п.

Приведенной характеристикой не исчерпываются возможные формы ферм, но устанавливается техническая терминология балочных ферм.

В заключение необходимо указать, что в последующем мы будем называть:

l—расстояние между опорными точками фермы—пролетом фермы.

d—горизонтальное расстояние между нагружаемыми узлами фермы—панелью фермы.

H—высота фермы по средине пролета; в балочных мостовых фермах высота обычно делается в пределах от $^1/_6$ до $^1/_{10}$ пролета, в балочных стропильных фермах от $^1/_2$ до $^1/_5$ в зависимости от конструкции кровли и т. п.

§ 28. Определение усилий в фермах по законам статики. Балочные фермы, образуя в целом неизменяемую систему, в смысле устройства опорных закреплений ничем не отличаются от балок со сплошным сечением, а потому методы расчета слагающих опорных давлений в балочных фермах те же, что и в балках со сплошными стенками.

Внутренними силами в фермах являются усилия в стержнях фермы. Для определения их необходимо выделить сечением часть фермы и рассмотреть ее в состоянии упругого равновесия под действием внешних нагрузок и усилий стержней.

Выделение части фермы сечением может быть сделано: или 1) рассечением ее на две части (левую и правую, черт. 97, лин. 1—1) или 2) вырезанием одного узла (черт. 97, линия 2 - 2); последнее, если это представляется целесообразным, может быть распространено на несколько узлов (черт. 104). Каждый из этих способов имеет свои достоинства, что становится понятно из последующего изложения.

Для составления уравнений равновесия отсеченных частей фермы необходимо знать направление усилий в стержнях, но так как таковое пока неизвестно, то условно принимают все усилия положительными, т.-е. растягивающими и направленными от узлов (черт. 97). Если при последующем решении уравнений равновесия усилие окажется отрицательным, то это будет обозначать, что принятое направление усилия надо изменить, т. е. направить его к узлу.

Уравнения равновесия могут быть написаны для любой из отсекаемых частей фермы, но выбирается та часть, где меньше сил. Вообще решение ряда уравнений с неизвестными составляет копотливую работу. Целесообразным представляется иметь такую систему уравнений, в которую входило бы наименьшее число неизвестных. Существуют приемы, которые дают возможность, изменяя сечение и выбирая зависимость, определяющую равновесие тела, составить одно уравнение с одним неизвестным усилием.

I. Метод рассечения или сечений. А. Способ моментов (способ Риттера). В основу этого способа кладется условие равновесия, что момент всех сил, находящихся в равновесии, относительно любой точки плоскости равен нулю.

В фермах статически определимых, с простой решеткой, за редким исключением, всегда можно провести разрез так, чтобы им перерезалось не более трех стержней, не имеющих общей точки пересечения (черт. 98). Такой разрез вводит три неизвестных усилия стержней в уравнения равновесия; но если за точку моментов взять точку пересечения 2-х из перерезанных стержней, то в уравнение равновесия $\Sigma M = O$ усилия их войдут с коэффициентами $= O$, а потому в результате получится одно уравнение с одним неизвестным, что дает возможность сразу определить усилие третьего стержня. Для пояснения рассмотрим определение усилий в поясных стержнях O_3, U_2 и в стержне решетки D_1 фермы, показанной на черт. 98.

Для определения усилия в стержне O_3 можно провести один из двух разрезов 1—1 или 2—2, перерезающих по три стержня, а именно: при 1-м разрезе перерезаются кроме стержня O_3 стержни D_3 и U_2, имеющие общую точку схода—узел № 4, и при 2-м разрезе—стержни D_4 и U_3, имеющие общую точку схода также узел № 4; последнее показывает, что для определения усилия стержня O_3 может быть проведен безразлично как разрез 1—1, так и разрез 2—2. Уравнение равновесия $\Sigma M = O$ относительно точки схода двух других стержней будет:

$$\Sigma M_4 = + Aa_4 - \Sigma_0^4 Pp_4 + O_3 r_4 = O$$

откуда

$$O_3 = -\frac{1}{r_4}(Aa_4 - \Sigma_0^4 Pp_4) = -\frac{M_4}{r_4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (50).$$

В этом уравнении: r_3—плечо стержня O_3 относительно точки моментов, определяемое геометрически измерением или вычислением; M_4—момент всех левых внешних сил относительно узла № 4. Так как при действии сил сверху вниз момент между-опорной части балки, лежащей на 2-х опорах, всегда положителен, то, следовательно, усилия стержней верхнего пояса в балочных фермах всегда отрицательны.

Для определения усилия стержня U_2 можно провести разрез 1—1, дающий, кроме разреза стержня U_2, разрез стержней D_3 и O_3, имеющих общей точкой схода узел № 3, которую надо принять за точку моментов. Тогда по условию равновесия для левой части будем иметь:

$$\Sigma M_3 = Aa_3 - \Sigma_0{}^3 Pp_3 - U_2 r_2 = O$$

откуда

$$U_2 = +\frac{1}{r_2}(Aa_3 - \Sigma_0{}^3 Pp_3) = +\frac{M_3}{r_3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (51).$$

В этом уравнении принцип обозначений остается такой же, как в уравнении 50; очевидно, что при действии внешних сил сверху вниз, усилия стержней нижнего пояса 2-х опорной фермы всегда положительны.

Для определения усилия стержня D_1 можно провести (черт. 98) только один разрез 3—3 через три стержня D_1, U_1, O_2, из которых поясные стержни U_1 и O_2 имеют общую точку схода—K, лежащую вне контура фермы на продолжении линий осей этих стержней. По общему правилу эту точку схода надо принять за точку моментов для определения усилия стержня D_1, плечо которого относительно этой точки$=r$ [1]).

Тогда для левой части

$$\Sigma M_k = -Aa + \Sigma Pp_k + D_1 r_d = O$$

откуда

$$D_1 = +\frac{1}{r}\ (Aa - \Sigma Pp_k) = \frac{M_k}{r} \dots\dots \quad (52).$$

При выводе формул (50 и 51), выражающих усилия в поясных стержнях ферм, мы подчеркнули, что если точка моментов, относительно которой составляется уравнение равновесия, лежит в пределах опор фермы, усилия поясных стержней при любом положении нагрузки всегда в верхнем поясе—отрицательны, в нижнем—положительны. Такое постоянство знака не имеет места в стержнях решетки, поскольку точка моментов, служащая для составления уравнения, определяющего усилия, лежит вне пролета.

Действительно, если нагрузка будет расположена справа от раскоса D_1 (черт. 98), то в левой отсеченной части будет только одна опорная реакция A, а потому уравнение, определяющее усилие, будет:

$$+D_1 r - Aa = O$$

откуда

$$D_1 = +A\frac{a}{r}$$

Если предположить, что нагрузка расположена слева от раскоса, тогда в правой отсеченной части фермы будет только опорная реакция $-B$. Составляем уравнение равновесия для правой части:

$$-D_1 r - B\,(l + a) = O$$

откуда

$$D_1 = -B\,\frac{(l-a)}{r}$$

---

[1]) Может оказаться, что точка пересечения поясных стержней лежит вне пределов чертежа, тогда положение этой точки и соответствующие плечи a и r легко определяются из геометрических соотношений (черт. 98-*bis*).

Пусть точка k будет точкой моментов для раскоса D, плечо которого относительно этой части r. Проведем через точку t линию $tq \parallel mp$ и опустим перпендикуляр tv на направление раскоса, так что $tv \parallel r$. Тогда из подобия треугольников будем иметь

$$kn : tn = nm : nq$$

далее

$$r = tv\,.\,\frac{kn}{tn} = tv\,.\,\frac{nm}{nq}$$

$$a = kn\,Cos n\,\alpha - a_n = \frac{nm}{nq}\,tn\,.\,Cos n\,\alpha - a_n = \frac{nm}{nq}\,ts - a_n$$

все размеры, входящие в правые стороны равенств, легко определяются из геометрических размеров фермы.

Величина усилия, несомненно будет в обоих случаях различная, но существенно то, что знак усилия в обоих случаях различен и зависит от расположения нагрузки справа или слева от рассекаемого стержня решетки.

Итак: при применении способа моментов, величина и знак усилия определяются выражением

$$\text{Усилие} = \pm \frac{M}{r} = \frac{\text{момент внешн. сил}}{\text{плечо стержня}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (53).$$

В. Способ проекций. Применение метода моментов становится невозможным, когда два из трех рассеченных стержней параллельны между собой, т. е. пересекаются в бесконечности, как это имеет место, например, в фермах с параллельными поясами (черт. 99). В этих случаях удобно применение условия равновесия относительно оси, нормальной к стержням, параллельным между собой; так как усилия этих стержней войдут в уравнение равновесия с коэффициентами равными нулю, то уравнение будет содержать одно неизвестное.

Для случая фермы с параллельными поясами (черт. 99) за ось проекций надо принять вертикальную ось и тогда усилие стойки V_1 определится из условия равновесия левой части по разрезу 1—1.

$$+A - \Sigma_0^1 P - V_1 = O$$

откуда

$$V_1 = A - \Sigma_0^1 P = Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (54).$$

В этом выражении направление внешних сил принято вертикальным; если бы они были наклонны к горизонту, то в уравнение вошли бы их проекции на вертикальную ось. Q—величина перерезывающей силы, как в простой балке.

Усилие раскоса D_3, наклоненного под углом φ к горизонту, определится из условия равновесия по разрезу 2—2.

$$A - \Sigma_0^2 P + D \, Sin \, \varphi = O$$

откуда

$$D = -\frac{1}{Sin \, \varphi}(A - \Sigma_0^2 P) = -\frac{Q}{Sin \, \varphi} \quad \ldots \ldots \ldots (55).$$

Из выражений (54) и (55) видно, что усилия в частях решетки изменяются в функции поперечной силы Q простой двухопорной балки.

В этих формулах яснее выражена, указанная выше, зависимость знака решетки от расположения нагрузки, так как известно, что в 2-х опорных балках поперечная сила Q меняет свой знак в зависимости от положения нагрузки относительно сечения.

Преимущества расчета усилий методом сечений уменьшаются, если нельзя провести разреза через три стержня, не пересекающиеся в одной точке.

II. Метод вырезания узлов. При выделении из фермы узла, вопрос об определении усилия сводится к рассмотрению равновесия внешних сил и усилий пересекающихся в этом узле. Этот способ наиболее удобоприменим, когда при вырезании узла в нем будет сходиться не более двух неизвестных усилий, имеющих одинаковое направление. В этом случае каждое усилие непосредственно определяется из уравнения проекций сил на ось нормальную к направлению другого усилия.

Так например, при определении усилия в стойке V_3 (черт. 100), целесообразно вырезать нижний узел 3, в котором имеет место неизвестное усилие стойки V_3 и два усилия поясов U_3 и U_4; последние два имеют одно и то же направление, что дает возможность составить уравнение относительно оси нормальной направлению поясных стержней:

$$+V_3 - P = O$$

откуда

$$V_3 = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

При определении усилия в стойке V_2 (черт. 100), более простым для составления уравнения является верхний узел 2[1], но и в нем сходятся три неизвестных усилия O_2, O_3 и V_2, имеющие три разных направления, что не позволяет составить уравнение с одним неизвестным. В таких случаях за ось проекций может быть принята:
или ось самой стойки, что позволяет составить уравнение

$$-V_2 - O_2 \, Sin\, \beta_2 + O_3 \, Sin\, \beta_3 - P = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57\text{-a})$$

или ось, нормальная к направлению одного из поясов

$$-V_2 \, Cos\, \beta_3 - O_2 \, Sin\, (\beta_2 - \beta_3) - P\, Cos\, \beta_3 = O \quad . \; . \; . \quad (57\text{-в}).$$

В обоих случаях усилие стойки выражено в функции усилий поясов, которые, в свою очередь, могут быть определены так:

$$O_2 = -\frac{M_2}{h_2 \, Cosn\, \beta_2} \quad \text{и} \quad O_3 = -\frac{M_2}{h_2 \, Cosn\, \beta_3}$$

Подставляя эти значения усилий поясов в уравнения, определяющие усилие в стойке и делая преобразование величины $Sin\,(\beta_2 - \beta_3)$, получим для обоих случаев выражение усилия в стойке:

$$V_2 = -P + \frac{M_2}{h_2}(tng\, \beta_2 - tng\, \beta_3), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (58)$$

выраженное в функции одного момента.

Таким образом, сущность метода вырезания узла сводится к тому, что бы для составления уравнения равновесия был бы выбран узел, в котором имелось бы наименьшее количество неизвестных усилий, по возможности не более двух, что позволяет составить уравнение равновесия с одним неизвестным осносительно оси перпендикулярной направлению другого усилия.

Пример 9. Раскосная ферма с параллельными поясами нагружена двумя равными грузами P, симметрично расположенными (черт. 101).

Усилия в поясных стержнях ферм вообще определяются выражением (53).

$$U = -O = \frac{M}{r}$$

Так как в ферме с параллельными поясами плечи поясных усилий r, как равные высоте h фермы, постоянны, то, следовательно, характер изменения усилий в поясных стержнях этих ферм будет зависить только от характера изменения эпюры моментов для заданной нагрузки:

a) в концевых частях фермы, между грузом и опорной реакцией, они будут определяться в зависимости от положения стержня выражением:

$$U_{n+1} = -O_n = \frac{1}{h} And = \frac{1}{h} Pnd$$

где n—переменное число панелей.

b) в средней части момент имеет постоянную величину, а потому поясные усилия будут одинаковыми и определяются выражением:

$$U = -O = \frac{1}{h} P \, . \, kd$$

Усилия в стержнях решетки в фермах с параллельными поясами вообще определяются выражением (55):

$$D_n = \pm Q_n : Sin\,\varphi$$

которое для стоек принимает вид (54):

$$V = \mp Q$$

Так как угол φ наклона раскосов к горизонту во всей ферме одинаков, то, следовательно, усилия в стержнях решетки рассматриваемой фермы пропорциональны эпюре поперечных сил от заданной нагрузки.

На черт. 101-с построена эпюра поперечных сил для заданной нагрузки, по которой можно видеть, что в боковых частях фермы усилия решетки одинаковы и соответственно равны $A : Sin\,\varphi$; в средней части усилия решетки тоже одинаковы и равны нулю; последнее возможно только при равной и симметричной нагрузке.

Пример 10. Раскосная параболическая ферма с нижним криволинейным поясом (черт. 102), загруженная сплошной равномерно распределенной нагрузкой p клг. на погон. метр.

Очертание нижнего пояса сделано по параболе, уравнение которой

$$h = \frac{4\,H}{l^2} x\,(l-x) = \frac{4\,H}{m} n(m-n)$$

в этом выражении: H—высота фермы по средине, $l = md$—пролет фермы, $x = nd$ — расстояние узла от левой опоры.

Для определения усилий в стержнях поясов пользуемся выражением (53)

$$U = -O = M : r$$

в котором r = плечу поясного усилия относительно соответствующей моментной точки. Для верхнего (горизонтального) пояса плечи соответственно равны высотам стоек и определяются длиной ординат h параболы; для нижнего (криволинейного) пояса плечи определяются выражением $h \, . \, Cosn\,\beta$, где β—угол наклона стержня пояса к горизонту.

При действии на 2-х опорную ферму сплошной равномерной нагрузки величина момента относительно любого узла определяется выражением:

$$M_n = \frac{px(l-x)}{2} = \frac{pd^2}{2} n(m-n)$$

Подставляя выражения плеч и момента в выражение усилий (53) получим последние выраженными так:

Для верхнего пояса

$$O = -\frac{M}{r} = -\frac{p \cdot d^2 n\,(m-n) \cdot m^2}{2 \cdot 4 \cdot H \cdot m\,(m-n)} = -\frac{p \cdot m^2 d^2}{8H} = -\frac{pl^2}{8H}$$

и для нижнего пояса

$$U = +\frac{M}{r} = \frac{M}{h\,Cosn\,\beta} \quad \text{или} \quad U\,cosn\,\beta = +\frac{pl^2}{8H}$$

Из чего следует, что при загружении параболлической фермы сплошной равномерной нагрузкой, проекции усилий поясных стержней имеют постоянную величину

$$= \pm \frac{pl^2}{8H}$$

Для составления выражения усилия в раскосах можно было бы воспользоваться выражением (52), но для случая параболической фермы, в которой проекции усилий в поясных стержнях постоянны по своей величине, усилия раскосов проще определяются из условия равновесия по вертикальному сечению $s-s$ (черт. 102) относительно горизонтальной оси. Это условие равновесия напишется так:

$$D_{n-1}\,Cosn\,\varphi_{n-1} - O_{n-1} + U_{n-1}\,Cosn\,\beta = O$$

так как

$$O_{n-1} = U_{n-1}\,Csn\,\beta = \frac{pl^2}{8H}, \text{ то, следовательно, } D_{n-1} = O\,;$$

из чего видно, что в параболических фермах с раскосной решеткой, нагруженных сплошной равномерной нагрузкой, усилия в раскосах равны нулю.

Теперь уже не трудно определить усилия в стойках из условия вырезания узлов прямого пояса и условия равновесия их относительно вертикальной оси, по которому

$$-V - pd - D_1\,Sin\,\varphi = O$$

так как

$$D_1 = O\,, \quad \text{то} \quad V = -pd$$

т.-е. все стойки сжаты одинаковым усилием, равным нагрузке на одну панель.

Пример 12. Ферма стропильного типа (черт. 103), нагруженная по верхнему поясу сплошной равномерной нагрузкой p клг. на пог. метр проекции.

Обозначая x—расстояние до любого верхнего загружаемого узла можем написать выражения поясных усилий в таком виде:
для нижнего пояса

$$U_3 = \frac{M_3}{r_3} = \frac{1}{h_3}\,p\,\frac{x_3\,(l-x_3)}{2}$$

для верхнего пояса

$$O_3 = -\frac{M_4}{h_4\,Cosn\,\beta_3} = -\frac{1}{h_4\,Cosn\,\beta_3}\left[\frac{px_3\,(l-x_3)}{2} + \left(\frac{pl}{2} - px_3 - \frac{1}{2}pd\right)c\right]$$

в котором β_3 угол наклона верхнего пояса к горизонтальному, c — расстояние от ближайшего левого загружаемого узла до точки моментов.

Величины плеч могут быть выражены через высоту H — посредине фермы, а именно:

$$h_3 = H \frac{x_3}{\frac{1}{2}md};$$

тогда выражения усилий в стержнях нижнего пояса приведутся к такому общему виду:

$$U_{n-1} = \frac{px_n(l-x_n) \cdot md}{2 \cdot 2 \cdot x_n H} = \frac{pl}{4H}(l-x_n)$$

Из этого выражения видно, что, несмотря на возрастание момента к середине пролета, величина поясных усилий возрастает с уменьшением x, т.-е. к опорам.

Величина усилий в стержнях решетки определяется по выражению (52) $D = \pm M_n : r$. В рассматриваемой ферме моментной точкой для составления выражения усилия будет точка опорного узла фермы, а потому в общем виде выражение усилий в раскосах напишется так:

$$D = \pm \frac{pd}{r}\left[d + 2d + \ldots\ldots\right]$$

в которое войдут моменты относительно опоры всех грузов, приложенных в узлах между опорой и сечением.

Не трудно видеть что если будут загружены только узлы, лежащие между сечением и другой опорой, то усилия в решетке будут равны нулю.

Пример 12. Фермы сетчатого покрытия с приложенными к ней двумя горизонтальными силами P (черт. 104).

Заданная ферма по своему образованию отличается от рассматривавшихся до сих пор простых ферм. Она статически определима, так как в ней число стержней $9 = 2 \cdot 6 - 3$, и неизменяема по образованию (см. § 39). В процессе расчета она интересна в том отношении, что через нее нельзя провести сечения только через три стержня, не пересекающиеся в одной точке, и в ней нет двойных узлов. Однако, расчет ее может быть сравнительно просто сделан путем проведения замкнутого сечения, как это показано, например, на черт. 104 направлением сечения s—s—s.

При таком проведении сечения пересекаются один раз стержни O_1, O_3 и O_5 и два раза стержни D_1 и D_2. Дважды перерезанные стержни D_1 и D_2 образуют в сечении по две взаимнопротивоположные силы, которые дают суммарный момент относительно любой точки $= O$; следовательно для составления уравнения равновесия остаются три направления O_1, O_3 и O_5, а это уже позволяет составить уравнение равновесия с одним неизвестным. Действительно, выражение момента всех сил, приложенных к вырезанной части, относительно точки F_3, пересечения направлений O_1 и O_5, позволяет определить усилие O_3 из уравнения:

$$O_3 f - B\frac{l}{2} - 2P(p + f) = O$$

Аналогично может быть определено усилие O_1 из выражения момента относительно точки F пересечения направлений O_3 и O_5 и т. д.

Усилия остальных стержней могут быть определены или уже при помощи простых сечений через три неизвестных стержня, или вырезанием узлов, или также проведением замкнутого сечения.

§ 29. Определение усилий по законам кинематики. Фермы представляют собой ряд шарнирных точек, приведенных системой стержней в неизменяемое состояние. Если в фермах нет лишних стержней, то достаточно устранить из ее состава один стержень, как общая неизменяемость ее будет нарушена, и она превратиться в механизм, имеющий относительную подвижность в своих частях, которую можно рассматривать как вращение, происходящее вокруг некоторого мгновенного полюса в любой момент времени.

Выделенный из фермы стережень мы можем заменить двумя взаимопротивоположными силами, приложенными в узлах и направленными по прямой между узлами; тогда ферма, превращенная в механизм, будет находиться в равновесии под действием внешних сил и внутреннего усилия, приложенного к ней взамен устраненного стержня; величина этого усилия может быть определена на основании теоремы о возможных перемещениях, по которой сумма элементарных работ сил, действующих на подвижную систему, находящуюся в равновесии, или на часть ее, при всяком возможном перемещении системы, равна нулю.

Пусть имеется ферма, находящаяся под действием ряда сил P_1 P_2...... (черт. 105), требуется определить усилия в стержнях $9-8$ и $9-3$.

Выделяем стержень $9-8$ и заменяем его двумя силами (черт. 105*b*); вследствие такой замены левая часть фермы $0-3-9$ со всеми приложенными к ней силами получает возможность движения относительно правой части $3-6-8$, вращаясь вокруг узлового шарнира 3. Дадим расстоянию $9-8$ приращение Δs, тогда, если предположить правую часть $3-8-6$ фермы неподвижной, вся левая часть $0-3-9$, под влиянием этой возможной деформации Δs, получит возможность повернуться на некоторый угол $\Delta\theta$, определяющийся, из условия, что $\Delta s = \Delta\theta\, h$; в соответствии с этим возможным перемещением, все силы, приложенные к левой части, сместятся со своими точками приложения и совершат работу. По условию равновесия работа всех сил на соответствующих им перемещениях должна быть равна нулю, а потому:

$$-U_3 h\,\Delta\theta + A\,.\,\frac{l}{2}\Delta\theta - \Sigma P\,.\,p\,\Delta\theta = 0,$$

откуда:

$$U_3 = \frac{1}{h}\left(A\,.\,\frac{l}{2} - \Sigma Pp\right) = +\frac{M_3}{h}\quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (59),$$

выражение усилия известное уже нам (сравни 53).

При составлении выражения работы знаки определяются по направлению движения: если движение точки приложения сил совпадает с направлением силы, то знак плюс и если оно не совпадает, то знак минус.

Для определения усилия в стержне $9-3$, устраняем его и прикладываем вместо него две взаимнопротивоположные силы D_2 (черт. 105*c*); в этом случае, оставшаяся неизменяемой левая часть $0-2-9$, получает возможность движения относительно правой части $3-6-8$, вращаясь вокруг мгновенного полюса k.

Возможная деформация выделенного стержня $\varDelta s$, допускает возможность поворота левой части относительно правой на угол $\varDelta\theta$, определяемый *из условия* $\varDelta s_2 = r_2 \varDelta\theta$, *а потому по условию равновесия левой части* будем иметь:

$$-Dr\varDelta\theta + A\,.\,a\varDelta\theta + \Sigma P\,.\,q\varDelta\theta = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (60),$$

откуда:

$$D = \frac{1}{r}\,(Aa - \Sigma Pq) = \frac{M_1}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60a).$$

Рассмотрим еще случай, когда полюс мгновенного вращения лежит в *бесконечности, как это имеет место при определении усилия в раскосе* D_2 фермы, показанной на черт. 106. Под влиянием удлинения раскоса вся правая часть фермы 3 — 5 — 6 — 8, оставшаяся неизменяемой, получает возможность перемещения относительно левой части параллельно самой себе путем движения около шарниров 2 и 9.

Если деформация раскоса $\varDelta s$, то проекция смещения узла 7 на ось нормальную оси пояса (черт. 106*b*) будет:

$$\varDelta y = \frac{\varDelta s}{Sin\,\alpha};$$

это смещение будет иметь место для всех узлов правой части, которая переместиться параллельно самой себе, а потому выражение работы будет:

$$-D_2\varDelta s + \Sigma P\,\frac{\varDelta s}{Sin\alpha} = Q,$$

отсюда:

$$D_2 = \frac{\Sigma P}{Sin\,\alpha} = \frac{Q}{Sin\,\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (61).$$

Изложенный способ не представляет затруднений при рассмотрении простых ферм, но применение его становится затруднительным в сложных случаях, вследствие трудности определения действительных перемещений узлов. В этих случаях задача облегчается построением диаграммы мгновенных скоростей.

§ 30. Определение усилий при помощи диаграммы скоростей. Всякая точка плоской фигуры, имеющей вращение вокруг мгновенного полюса описывает в любой, бесконечно малый момент времени, некоторую траекторию, которая может быть принята за дугу ds, описанную из мгновенного полюса радиусом ρ — равным расстоянию точки m до полюса F (черт. 107). Величина дуги ds бесконечно мала и направление ее мало отклоняется от направления касательный, а потому длина ее с достаточной степенью точности может быть принята равной отрезку касательной mk к этой дуге в точке m.

Если в точке m приложена какая-либо сила P, то работа, совершаемая этой силой в момент возможного движения будет:

$$dT = P\,Cos\,\alpha.\; mk,$$

где α — угол наклона силы P к направлению касательной.

Отложим по направлению радиуса вращения ρ отрезок mm' равный *по величине смещению* mk и опустим из точки m' перпендикуляр $m'n$ на направление силы P, тогда момент силы P относительно точки m' будет иметь величину:

$$M_{ph} = P \cdot n\,m' = Pmk \times \cos n\,\alpha = dT \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

равную выражению работы силы на перемещении.

Точку m' в технике принято называть «изображающей точкой» по отношению к точке m.

Таким образом, если мы будем знать положение изображающих точек для всей фигуры, то выражение возможных работ может быть заменено выражением моментов тех же сил относительно изображающих точек. Преимущества этого способа выясняются последующим изложением.

Как показано выше, положение изображающих точек определяется отложением длины траектории движения самой точки на направлении радиуса вращения. Длина дуги траектории любой точки фигуры может быть выражена через расстояние — ρ точки до мгновенного полюса и через угол поворота $d\theta$ общий для всей фигуры.

$$ds_a = \rho_a\, d\theta \qquad ds_b = \rho_b\, d\theta \text{ и т. д.},$$

отсюда следует, что длины траекторий относится между собой, как расстояния точек от полюса:

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{ds_b}{\rho_b} = \ldots\ldots \text{ и т. д. } \ldots\ldots \quad (63).$$

Это соотношение позволяет, зная положение мгновенного полюса и положение одной изображающей точки, найти положение изображающих точек для всей фигуры.

Пусть имеется фигура, определяемая точками a, b и c (черт. 108) и пусть известно положение изображающей точки a' и мгновенного полюса F, тогда положение изображающей точки b', найдется проведением линии $a'\,b' \parallel ab$ до пересечения с направлением $\rho_b = b\,F$, так как в этом построении:

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{aa'}{aF} = \frac{bb'}{bF} = \frac{ds_b}{\rho_b} \quad \ldots\ldots \quad (64).$$

Далее из того же свойства вытекает, что положение изображающей точки c' может быть определено проведением линии $a'c' \parallel ac$ и $b'c' = bc$, которые пересекутся между собой в точке c', эта последняя на основании выведенного соотношения будет лежать на направлении радиуса ρc. Из чего следует, что зная положения двух каких-либо изображающих точек фигуры можно определить положение других изображающих точек этой фигуры, не определяя положение мгновенного полюса.

Как сказано выше, отрезок между основной точкой (m) (черт. 107) и ее изображающей точкой (m'), откладываемый по направлению радиуса мгновенного полюса, представляет собой величину возможного перемещения основной точки по направлению перпендикулярному радиусу; так как эти перемещения пропорциональны расстояниям основных точек фигуры от мгновенного полюса, то эти отрезки представляют собой возможные относительные скорости этих точек, а потому фигуру, образуемую этими отрезками (или изображающим точками) мы будем называть диаграммой возможных скоростей или диаграммой возможных перемещений.

Зная диаграмму возможных перемещений, можно определить перемещение всякой точки; величина искомого перемещения по любому направлению определится как проекция отрезка возможной скорости на направление перпендикулярное искомому перемещению, так как вся диаграмма скоростей строится в предположении поворота ее на 90° (черт. 107).

Зная возможные перемещения точек фигуры или фермы, можно, пользуясь теоремой о возможной работе системы, находящейся в равновесии, составить уравнения для определения усилий в стержнях ферм.

Применим этот способ для определения усилий в стержне 9 — 8 фермы, показанной на черт. 105.

Выделим из фермы стержень *9 — 8* и приложим вместо него искомое усилие (черт. 109), будем считать всю правую часть 3 — 6 — 8 неподвижной, тогда левая часть 0 — 3 — 9 будет иметь относительное движение вокруг шарнира 3, как мгновенного полюса. Предположим, что отрезком 22′ дана величина скорости точки 2′, которая должна лежать на прямой *2 — 3*, как на направлении радиуса; *положение точки 9′ определится проведением* линии 2′ — 9′ ∥ 2 — 9 (выр. 64), положение точки 10′ определится проведением прямых 2′ — 10′ ∥ 2 — 10 и 9′ 10′ ∥ 9 — 10 и т. д.; это построение дает нам диаграмму скоростей фигуры 0 — 3 — 9 левой части. Уравнение моментов всех сил, приложенных к этой части, относительно *изображающих точек, на основании выраж. 62 напишется так:*

$$A.00'\,Cosn\,\alpha - P\;.\;11'\,Cosn\,\alpha - P_2\;.\;22'\,Cosn\,\alpha - U_9\;.\;99'\;.\;Sin\,\beta = 0,$$

откуда:

$$U_9 = \frac{(A\;.\;00' - \Sigma P\;.\;pp')\,Cosn\,\alpha}{99'\;Sin\,\beta}\quad\dots\dots\dots\quad(65).$$

Нетрудно показать из соотношения отрезков, что усилие U_9 точно соответствует полученному по выраж. 59; а именно из геометрических соотношений по черт. 109:

$$\frac{99'\,Sin\,\beta}{h_3} = \frac{99'}{93} = \frac{00'}{03} = \frac{00'\,Cos\,\alpha}{\frac{1}{2}\,l},$$

отсюда:

$$\frac{00'\,Cosn\,\alpha}{99'\,Sin\,\beta} = \frac{\frac{1}{2}\,l}{h_3}$$

$$\frac{99'\,Sin\,\beta}{h_3} = \frac{99'}{93} = \frac{22'}{23} = \frac{22'\;Cosn\,\alpha}{23\;Cosn\,\alpha},$$

отсюда:

$$\frac{22'\;Cosn\,\alpha}{99'\;Sin\,\alpha} = \frac{23\;Cosn\,\alpha}{h_3} = \frac{P}{h_3}\ \text{и. т. д.}$$

а потому:

$$U_3 = \frac{A\;.\;00'\;.\;Cosn\,\alpha}{99'\,Sin\,\beta} - \frac{\Sigma P\;.\,pp'\;.\,Cosn\,\alpha}{99'\,Sin\,\beta} = \frac{A\,\dfrac{1}{2}\,L - \Sigma\,Pp}{h_3} = \frac{M_3}{h_3}.$$

Покажем применение этого способа для случая, когда полюс лежит в безконечности, как это, например, имеет место для раскоса D (9 — 3) фермы показаной на черт. 110. Выделив этот раскос, превращаем ферму в подвижную систему.

Если принять правую часть ее за неподвижную, то левая часть $0-2-9$ будет иметь относительное движение вокруг мгновенного центра, лежащего в безконечности. Предполагая, что дана изображающая точка $2'$, лежащая на прямой $3-2$, получим, изображающую точку $9'$ на направлении $8-9$ проведением прямой $2'-9' \parallel 2-9$; изображающую точку $10'$ проведением прямых $2'-10' \parallel 2-10$ и $9'-10' \parallel 9-10$ и т. д.

Уравнение моментов всех сил, приложенных к левой части, определяющее искомое усилие напишется так:

$$+D\,99'\,Sin\,\varphi + A\,00' - \Sigma P\,(pp'), = 0$$

отсюда:

$$D = \frac{-[A\;00' - \Sigma P\,(pp')]}{99'\,Sin\,\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (66),$$

так как $00' = pp' = 99'$, то полученное выражение соответствует выражению (55).

В уравнениях (65 и 66) знаки моментов определяются в соответствии с направлением вращения силы относительно изображающей точки, считая положительное направление по движению стрелки часов.

По смыслу изображения длина отрезков вида mm', определяющих положение изображающих точек, должна иметь бесконечно малую длину равную траектории мгновенного движения, но выведеное выше соотношение (64):

$$\frac{ds_a}{\rho_a} = \frac{ds_b}{\rho_b} = \frac{ds_c}{\rho_c} \text{ и т. д.}$$

позволяет изменять масштаб откладываемых отрезков без нарушения их соотношения, и следовательно без нарушения конечного выражения усилий, в которое величина масштаба входит множителем в числитель и в знаменатель. Это свойство дает большое преимущество заключающееся в том, что при построении диаграммы скоростей можно задаться любым положением исходной изображающей точки, считая, что принятый отрезок вида $m-m'$ представляет собой в некотором масштабе длину траектории возможного смещения точки m.

Таким образом, задаваясь произвольной исходной скоростью в масштабе удобном для расчета, мы можем начертить диаграмму скоростей и составить выражение моментов, определяющее искомое усилие.

Существенное преимущество этого способа заключается в том, что его применение не связано условием рассечения через три стержня, вырезания узла с двумя неизвестными стержнями и т. п.; он одинаково применим для ферм всяких видов, и единственным недостатком его является необходимость построения диаграммы скоростей для каждого усилия; поэтому при расчетах им пользуются для начального определения усилий в фермах, непозволяющих применить сразу расчетов по законам статики, но как только по определении этих первых усилий становится возможным применение простых законов статики, преимущество дается этим последним.

Пусть требуется, например, определить усилия в ферме, показанной на черт. 111. По схеме этой фермы в ней нельзя ни провести разреза через три стержня не пересекающиеся в одной точке, ни вырезать узла с двумя неизвестными усилиями, а потому применяем способ изображающих точек.

Выделяем стержень $4-5$, прикладываем вместо него внутренние усилия и приняв неизменным положение треугольника $0-1-6$, задаемся скоростью $2-2'$ точки 2; положение точки $5'$ определяем — проведением прямой $2'-5' \parallel 2-5$, положение точки $3'$, проведением прямой $2'-3' \parallel 2-3$ и положение точки $4'$, проведением прямой $3'-4' \parallel 3-4$; таким построением получаем фигуру $2'-3'-4'-5'$ и относительно ее вершин составляем уравнение моментов::

$$P'_1\, 22' \, Cosn\, \alpha + P_2\, 33' \, Cosn\, \alpha + X_{4-5}\, z - X_{4-5}\, z' - B\, 55' = 0,$$

отсюда:

$$X_{4-5} = \frac{B\,.\,55' - P_1\, 22' \, Cosn\, \alpha - P_2\, 33' \, Cosn\, \alpha}{z - z'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

В общем виде это выражение искомого усилия может быть представлено так:

$$X_{4-5} = \frac{\Sigma P\,.\,p}{z - z'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68),$$

где ΣPp — момент внешних сил относительно изображающих точек, а $(z - z')$ — разница плеч искомого усилия относительно изображающих точек.

После того, как в рассматриваемой ферме определено усилие стержня X_{4-5}, становится возможным расчет этой фермы путем законов статики.

Отметим одно свойство полученного выражения (68), представляющего собой общий вид уравнения искомого усилия в способе изображающих точек.

Если в этом выражении $z = z'$, то оно принимает вид $X = \Sigma Pp : O = \infty$, показывающий, что равновесие возможно только при безконечно большом значении усилия, это равнозначно тому, что ферма изменяема (о чем см. § 42).

В примерах рассмотренных на черт. 109 и 110, значение плеча $z' = 0$, как принадлежащее неподвижным точкам 8 и 3.

Пример 13. Ферма сетчатого покрытия с вертикальной нагрузкой в верхних узлах (черт. 112).

Выделим из состава фермы стержень O_1 и приложим вместо стержня внутренние силы, тогда вся ферма, как шарнирная система с нарушенной неизменяемостью получит возможность движения.

Неизменяемыми остаются треугольники $0-3-4$ и $1-2-5$ (см. черт. 112). Задаваясь скоростью узла 2, откладываем таковую в виде отрезка $2-2'$ по направлению стержня $2-3$. Далее строим диаграмму скоростей; путем проведения параллельной $2'-5' \parallel 2-5$ определяем точку $5'$, которая должна лежать на направлении $4-5$, далее проводим $5'-1' \parallel 5-1$ и $2'-1' \parallel 2-1$ и определяем точку $1'$, чем заканчивается построение диаграммы скоростей.

Величина усилия стержня O_1 определится из выражения возможной работы, которое напишется так:

$$-O_1, \bar{z} - B\,.\,\overline{55'}\, Cosn\,(55', x) - P_2\,.\,\overline{22'} - P_1\,.\,\overline{11'}\, Cosn\,(11' x) = O.$$

В выражении работы не входят силы P_3 и P_4, так как они приложены к узлам 3 и 6, входящим в состав неизменяемого треугольника.

§ 31. Графические приемы определений усилий. Графические приемы определений усилий основаны на известных положениях графостатики, что всякая сила может быть разложена на 2 любых направления, пересекающихся с ней в одной точке, и на 3 любых направления, не пересекающихся между собой в одной точке.

Построения эти возможны на основании методов сечения фермы и вырезания узлов.

1) Рассекая простую ферму так, чтобы были пересечены три стержня, мы можем рассматривать равновесие левой или правой части фермы под действием равнодействующей R — внешних сил, приложенных к этой части, и 3-х внутренних усилий пересеченных стержней. Так как каждая часть находится в равновесии, то, следовательно, равнодействующая R и 3 усилия стержней должны образовывать замкнутый многоугольник.

По способу Кульмана величина равнодействующей определяется из силового многоугольника (черт. 113 с). $R = A - P_1 - P_2$, положение ее определяется точкой k, — пересечения крайних по отношению к разрезу, сторон веревочного многоугольника (черт. 113 в).

Разложение равнодействующей R на три направления производится известным способом при помощи добавочной прямой $T - 9$ (черт. 113 а); а именно, проводя параллельно прямые $tm \parallel T - 9$, $ql \parallel T - 3$ и nm $9 - 10$, $nl \parallel 2 - 9$; условием замыкания четыреугольника m, n, l, q определяются знаки усилий в стержнях O_2, D_3 и U_3 фермы, которые в стержнях O_2 и D_3 отрицательны, а в U_3 — положителен.

Наиболее удобоприменимо это построение, когда с одной стороны от сечения нет нагрузки; в этом случае равнодействующей является опорная реакция, точка приложения которой известна.

Неудобство этого способа заключается в том, что часто пересечение сторон веревочного многоугольника оказывается вне пределов чертежа.

Для устранения этого недостатка Циммерман предложил пользоваться вместо общей равнодействующей R, параллельными ей слагающими, приложенными в узлах фермы ближайших к сечению.

Надо, однако, сказать, что оба эти приема графического построения в современной технике почти не употребляются и имеют скорее историческое значение, поэтому мы не будем подробно на них останавливаться [1]).

2) При вырезании узла мы будем иметь дело с группой сил, пересекающихся в этом узле и находящихся в равновесии, а потому эти силы должны образовать замкнутый многоугольник.

Если в вырезанном узле известны все силы внешние и внутренние, кроме двух, то величина этих последних может быть определена из построения силового многоугольника путем разложения равнодействующей R известных внутренних и внешних сил на два искомые направления X_1 и X_2 (черт. 114).

Путем последовательного разложения узлов для каждого из них может быть получен свой многоугольник.

Кремона предложил особый прием построения всех этих многоугольников на одной общей фигуре, в которой каждая внешняя сила и внутреннее усилие входят только один раз. Эта фигура известна под названием плана или диаграммы Кремона [2]).

Способ Кремона, как дающий полную картину распределения усилий во всех стержнях фермы и самоповеряющийся, заслуживает особого внимания при определении усилий от заданной постоянной нагрузки.

---

[1]) Изложение этих способов имеется в курсах проф. Л. Д. Проскурякова Строителная механика, ч. II, проф. С. П. Тимошенко Курс статики Сооружений ч. I, и др.

[2]) В литературе имеется указание, что этот прием впервые был указан Маковелем, а Кремона только подробно разработал его.

§ 33. Построение диаграммы Кремона. Предположим, что требуется построить диаграмму усилий по способу Кремона для фермы, показанной на черт. 115 с заданной на ней нагрузкой.

Прежде всего ферма должна быть освобождена от опорных закреплений и последние должны быть заменены реактивными силами, величина которых определяется одним из известных способов аналитически или графически. В рассматриваемом нами примере предположено, что реактивные силы известны.

Для удобства построения, что вполне выяснится по ходу последующего изложения, вводим районное обозначение фермы с расположенной на ней нагрузкой; для чего достаточно поставить по одной букве или цифре между каждыми двумя смежными силами, приложенными к контуру фермы, а также внутри замкнутых фигур, очерченных стержнями фермы (черт. 115); первыми из них обозначатся внешние районы, вторыми—внутренние районы. При таком обозначении каждый стержень фермы и каждая сила, приложенная к ферме, имеют обозначения 2-мя буквами или цифрами в соответствии с ограничиваемыми ими районами, например, по черт. 115, будем иметь стержни *ah*, *bh*, *ne* и т. п. силы *ag*, *gf*...

Так как при вырезании каждого узла разложение равнодействующей возможно только на два направления, то разложение надо начинать с узлов, в которые входят только 2 стержня.

В рассматриваемом примере разложение можно начать с узлов № 1 или № 4.

В узле № 1 имеется известная сила P_1 и 2 направления 1,2 и 1,7 неизвестных усилий в стержнях; усилия этих стержней определяются построением силового треугольника *bah* (ч. 115 в), при чем это построение проводится так, чтобы сохранилось направление внешней силы P, и примыкание внутренних усилий к ней происходило в определенном порядке, т.-е., чтобы примыкание усилия стержня 1,2 к силе P произошло бы в точке b, примыкание усилия стержня 1,7 к усилию в стержне 1,2 в точке h, а примыкание усилия стержня 1,7 к силе P_1 в ее конечной точке a; такой порядок примыкания соответствует на чертеже фермы расположению букв b, a и h между этими стержнями. Знак усилий устанавливается порядком последовательного замыкания, которое начинается и определяется направлением внешней силы P_1 далее по направлению *ah* и *hb*; перенесение полученного направления усилий на чертеж фермы покажет какого рода знак соответствует этим усилиям; в рассматриваемом случае оба искомые усилия *ah* и *hb* направлены к узлу № 1, т.-е. производят сжатие, а следовательно, усилия в этих стержнях сжимающие.

Когда определено усилие стержня 1,7, можно перейти к разложению узла № 7, в котором останутся неизвестными только 2 усилия стержней 7—6 и 7—2. Сохраняя положение усилия *ha* на диаграмме, примыкаем к нему внешней силой P_7 в точке a, что соответствует установленному выше порядку последовательного примыкания; равнодействующую усилия *ha* и силы P_2, определяемую диагональю *hg*, разлагаем на 2 направления 7—6 и 2—7 неизвестных усилий; проводя из точки g прямую параллельную стержню 7—6 и из точки h—прямую параллельную стержню 7—2, которые замкнутся в точке i. Знаки устанавливаются порядком последовательного замыкания полученного силового четыреугольника *hagi*, исходя из известного направления усилия *ha*, далее силы P_7 и, наконец, определяемых усилий gi и ih, которые в порядке замыкания оба будут иметь направление к узлу 7, а потому будут вызывать сжатие.

Зная усилия стержней 1,2 и 2,7, можно перейти к разложению узла № 2, в котором остаются неизвестными усилия стержней 2—6 и 2—3. Сохраняя положение усилий bh и hi на построенном силовом многоугольнике, присоединяем к нему силу P_2 в точке b, что соответствует установленному порядку построения, и разлагаем равнодействующую этих сил (ci) на 2 направления стержней 2—6 и 2—3, проводя первое через точку i, а второе через точку c, которые в пересечении дадут точку k и замкнут новый многоугольник $bhikgb$, направление усилий в котором определяется в порядке последовательного замыкания.

Проводя далее аналогичные построения, получим при разложении узла № 6 силовой многоугольник $kigfmk$, при разложении узла № 3 силовой многоугольник $ckmndc$, при разложении узла № 5 силовой многоугольник $nmfen$.

Построением этого последнего многоугольника заканчивается определение усилий всех стержней фермы; между тем остается нерассмотренным еще узел № 4, который своей внешней силой P_4 должен уравновесить усилия стержней фермы 4,5 и 5,3 или соответственно на диаграмме усилия $n—e$ и $n—d$; это замыкание силового многоугольника dne возможно только при том условии, что замыкающая $e—d$ равна и параллельна силе P_4; если этого нет, то замыкание невозможно, что указывает или на отсутствие равновесия внешних сил, или на неправильность построения.

Этим устанавливается самоповерка в построении диаграммы Кремона.

Рассматривая чертеж фермы и диаграммы усилий, можно отметить следующие характерные особенности их.

1) Все внешние силы, приложенные к ферме, на диаграмме образуют замкнутый многоугольник, что соответствует условию равновесия фермы под действием внешних сил, при чем порядок положения их в силовом многоугольнике строго следует последовательному положению их по контуру фермы.

2) Все внутренние усилия, сходящиеся в одном узле, образуют замкнутый многоугольник, в котором эти силы располагаются в порядке непрерывного замыкания его в соответствии с порядком расположения их вокруг узла; направление усилия изменяется на диаграмме при переходе разложения от узла к узлу. Перенос этих направлений на чертеж фермы дает определение знака усилий; если стрелка направлена к узлу, то усилие будет сжимающее, если она направлена от узла, то усилие—растягивающее.

3) Каждому узлу фермы на диаграмме соответствует силовой многоугольник и, наоборот, каждому району фермы, не исключая внешних районов между нагрузками, на диаграмме соответствует узел стержневых усилий, охватывающих этот район. Эта взаимность чертежа фермы и диаграммы позволяет с большим удобством использовать районное обозначение.

Вводя обозначение сил и стержней фермы по номенклатуре районов двумя буквами или цифрами, по прилегающим к ним районам, мы будем иметь на диаграмме векторы, также обозначенные теми же двумя буквами или цифрами, расположенными по концам усилия в узлах диаграммы. Например, стержень фермы между узлами 1 и 2 будет именоваться $b—h$ и усилие на диаграмме, соответствующее этому стержню, будет определяться отрезком $b—h$. Такое районное обозначение стержней облегчает построение диаграммы, так как устанавливает из каких узлов или точек диаграммы должно исходить усилие стержня, лежащего между соответственными районами.

Например, если требуется силу P, определяемую отрезком $a—b$ (черт. 115 в) разложить на 2 направления стержней $b—h$ и $a—h$, то из точки „b“ надо провести линию параллельную стержню 1—2 или $b—h$, так как между силой P и стержнем 1—2 лежит район „b“; также из точки „a“ диаграммы надо провести линию, параллельную стержню 1—7 или $a—h$; пересечение этих двух линий определит точку „h“ диаграммы, соответствующую району „h“ фермы, лежащему между стержнями 1—2 и 1—7 или $b—h$ и $a—h$.

При построении диаграммы усилий по способу Кремона необходимо обращать особое внимание на порядок отложения внешних сил в многоугольнике и порядок построения усилий при разложении по узлам, и в том и в другом случае это построение должно вестись последовательно в одном и том же направлении по контуру фермы и вокруг узла; рекомендуется делать это по ходу часовой стрелки, так как в этом случае сохраняются знаки принятых в технике координатных осей и знаки усилий будут соответствовать их направлениям.

Построение диаграммы усилий контролируется замыканием диаграммы. Ошибка в построении диаграммы не должна превосходить 1% от величины усилия.

Пример 14. На черт. 116 сделано построение диаграммы Кремона для фермы консольного типа, в которой конец B закреплен шарнирной тягой, воспринимающей только растягивающее усилие.

Определение величины опорных давлений сделано графически путем отдельного разложения равнодействующей R наклонных сил на направление H_b и AO и разложение силы Q на направление H_b и AO'.

На силовом многоугольнике величины слагающих опорных давлений определяются проведением в части силового многоугольника $de \dots i$ линии $i—u \parallel AO$, чем определяется давление $H_a = bu$ и давление $H_b = du$ от наклонных сил и проведением в части $ia = Q$ линии $ay \parallel AO_1$, чем определяется величина давления. $H'_a = H'_b = iy = uc$. Суммируя эти отрезки, получаем полное значение опорных давлений:

$$A_v = ab;\ H_a = (bu + uc) = bc;\ H_b = du + uc = dc.$$

Построение диаграммы в этом случае легко проводится по общим правилам, начиная его с двойного узла D, т.-е. с силового треугольника kih и заканчивая смыканием с силовым многоугольником в точке c.

Усилие в стержне mk, как это видно из равновесия нижнего узла, равно нулю, а потому на диаграмме усилий это усилие определяется точкой mk.

Пример 15. Полураскосная ферма с нагрузкой по верхнему поясу (черт. 117).

Опорные реакции легко определяются аналитически $A = B = 3$.

Построение начинается с верхнего узла I и ведется в последовательном порядке: в опорном узле A, далее в узле II, в узле XIII, в срединном узле 4235 и т. д. до средней стойки, где в узлах IV и XI продолжение построения становится невозможным, вследствие того, что в обоих узлах остаются неизвестными усилия по трем направлениям.

Пробуем дополнить построение, начав разложение с другого двойного узла VII у другой опоры и последовательно проводим построение разложением в узлах B, VI, IX и т. д., кончая средним узлом на стойке V—X, чем определяются усилия в стержнях 9—11 и 9—10, вследствие чего в узлах IV и VI остаются неизвестными только одно усилие в стойке IV—XI, которое определяется проведением на диаграмме замыкающей 8—9.

§ 33. Особые случаи построения диаграммы Кремона. I. Могут быть случаи, когда построение диаграммы усилий становится невозможным или вследствие отсутствия узлов с двумя стержнями (черт. 111 и 112), или вследствие невозможности ведения последовательного разложения при подходе к узлам, в которых остается по три неизвестных усилия стержней (черт. 118 узел 3 и 14). В таких случаях построение диаграммы усилий становится возможным при условии замены некоторых стержней в узлах их усилиями, величина которых определяется особо аналитическим или графическим путем. Так, например, в ферме, показанной на черт. 112, построение диаграммы становится возможным если будут известны усилия стержней $A-1$, $4-B$; в ферме, показанной на черт. 118, построение становится возможным если будет известно усилие стержня 14—11.

Определение величины усилия стержней может быть сделано приемом наиболее удобным в данном случае.

Например, в ферме, показанной на черт. 118, определение усилия стержня 14—11, удобнее всего сделать методом моментов; проводя разрез $s-s$ и взяв момент относительно центра узла № 5, получим усилие

$$lf = +\frac{1}{3{,}7}(4 \times 10 - 1 \times 2{,}8 - 1 \times 5{,}6 - 1 \times 7{,}8 - \frac{1}{2}\,10) = +\,5{,}08 \text{ клгр.}$$

Полученное усилие может быть рассматриваемо, как две внешние силы, приложенные к узлам № 11 и № 14, и должно быть включено в силовой многоугольник в порядке обхода по контуру фермы; после отложения силы $B\,(al)$, должна быть отложена по направлению оси стержня 11 — 14 сила lf влево и затем вправо та же сила fl по тому же направлению в масштабе силового многоугольника. После чего построение диаграммы становится возможным и ведется в обычном порядке, начиная, например, с узла № 1 и переходя последовательно к узлам 2,15 и 14, в котором неизвестными будут усилия двух стержней ik и kf, затем к узлу 3, 13 и т. д.

Следует отметить, что для аналитического определения усилия удобнее выбирать стержень, входящий в состав контура фермы, так как это облегчает введение его в состав силового многоугольника диаграммы, построение которого проводится в порядке расположения сил по контуру.

II. Могут быть случаи, когда построение плана Кремона обычным путем невозможно вследствие того, что внешние силы приложены не к внешним узлам фермы, а к внутренним (черт. 119), что не позволяет провести построение силового многоугольника, в порядке отложения сил по контуру. В этом случае построение диаграммы производится путем следующего искусственного приема.

Внешняя сила, приложенная к внутреннему узлу, переносится по своему направлению на контур фермы, это направление силы принимается как бы за стержень фермы, а точка пересечения его с контуром—как бы за узел и тогда сила является как бы приложенной на контуре, а усилие добавочного стержня равно величине силы. После чего диаграмма может быть построена по общему правилу.

На черт. 119 сделано построение диаграммы Кремона для фермы, в которой внешние силы приложены в средних узлах 2, 11, 12, 6, 8 и 10, из которых 11 и 12 являются внутренними.

Так как нагрузка симметрична, то опорные реакции $A = B = 3$.

Принимаем внешние силы в узлах 2 и 6 приложенными по контуру; силы же, приложенные в узлах 11 и 12, переносим по их направлению на нижний пояс в фиктивные узлы 11′ и 12′, и таким образом, вводим фиктивные стержни pq и st и удваиваем стержни 10—9 и 9—8.

При сделанном предположении, построение силового многоугольника диаграммы не встречает затруднений. Построение начинается с узла № 1 и последовательно переходит к узлам 2, 3, 10. В узле № 11′ получается разложение перенесенной силы gh по направлению hp, pq и qg, так что в диаграмме вместо одного усилия стержня 9, 10 получается два отрезка $ph = qg$, т.-е. имеет место повторение одного и того же усилия.

Отрезок qp представляет усилие фиктивного стержня или величину *силы, приложенной в узле 11.*

То же самое произойдет при разложении узла 12′, в котором будет иметь место повторение усилия 9, 8 в двух отрезках tf и sg; отрезком же st определяется внешняя сила узла 12.

Рассматриваемая ферма имеет сложную решетку и непрерывное построение диаграммы останавливается в узлах 4 и 9. Дальнейшее построение становится возможным после определения аналитическим путем усилия одного из стержней, что проще всего сделать для стержня 4—5 путем разреза и взятия момента относительно узла 8; это позволит включить усилие этого стержня, определяемого отрезком xc, в силовой многоугольник диаграммы, по правилу, изложенному в первом отделе этого параграфа.

Однако, в этом случае возможно окончание диаграммы путем симметричного построения от другого конца фермы B, которое при подходе к узлам 9 и 4 даст в качестве известных усилий стержней 9, 12 и 4, 12, что позволит замкнуть диаграмму.

§ 34. Построение линий влияния методом рассечения. Учет усилий в стержнях ферм от подвижной нагрузки проще всего делать при посредстве линий влияния.

В основу построения линий влияния для усилий в стержнях ферм ложатся аналитические выражения усилий в этих стержнях, вывод которых на основании законов статики был сделан в § 28, следовательно, построение линий влияния может быть сделано исходя или из рассечения или из вырезания узла фермы.

В фермах характерно различаются линии влияния поясных стержней и линии влияния решетки.

I) Линия влияния поясных стержней. Для вывода уравнения линий влияния поясных стержней обычно пользуются методом рассечения, составляя два уравнения для положения груза=1 справа от разреза и для положения груза = 1 слева от разреза.

При положении груза=1 справа от разреза общий вид выражения усилия, получаемого из условия равновесия левой части, будет

$$\text{Усилие} = \pm \frac{A \times a}{\text{плечо усилия}} \quad \dots \dots \dots (69)$$

при положении груза=1 слева от разреза общий вид выражения усилия, получаемого из условия равновесия правой части будет.

$$\text{Усилие} = \pm \frac{B\,(l - a)}{\text{плечо усилия}} \quad \dots \dots \dots (69_a)$$

в этих выражениях a—расстояние точки моментов от левой опоры A.

Знаки в обоих выражениях соответственно одинаковые.

Из сопоставления полученных уравнений для линий влияния усилий в стержнях фермы с уравнениями, определяющими линию влияния моментов в простой балке (14), можно видеть, что они отличаются от них множителем $\frac{1}{\text{плечо усилия}}$.

Следовательно, все свойства, установленные для линий влияния моментов, сохранятся также для линий влияния усилий в поясах ферм и самый прием построения их останется тот же, но изменится масштаб ординат в отношении 1 : (плечо усилия).

Например, построение линии влияния поясного стержня O_3 фермы, показанной на черт. 120, можно сделать по условию равновесия относительно разреза s—s; при положении груза$=1$ справа от разреза, уравнение равновесия левой части, определяющее уравнение „правой" прямой очерчивающей линию влияния, будет

$$O_3 h_g + A.a_g = O \text{ откуда } O_3 = -A\frac{a_g}{h_g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (70)$$

Следовательно, положение „правой" прямой определится отложением ординат $-\frac{a_g}{h_g}$ на левой опоре и нулем на правой опоре; положение „левой" прямой, по свойству линий влияния для моментов, определится нулем на левой опоре и точкой C_g— пересечения правой линии с вертикалью под точкой моментов.

Линия влияния поясного стержня U_2 определится из условия равновесия относительно того же разреза $s-s$, при положении груза$=1$ справа от сечения, уравнение „правой" прямой, очерчивающей линию влияния, определится из условия равновесия левой части:

$$-U_2 h_3 + Aa_3 = O \text{ откуда } U_2 = +A\frac{a_3}{h_3} \quad . \; . \; . \; . \; (70_a)$$

На черт. 120 показано построение этой прямой путем отложения на левой опоре ординаты ее $= a_3 : h_3$, положение левой прямой определяется точками a и c_3; но так как линии влияния изменяются по прямым только между узлами, то в рассматриваемом случае „правая" прямая может быть принята только от правой опоры до точки c_8, соответствующей положению узла 8. ближайшему справа от разреза и „левая" прямая — от левой опоры до ближайшего к месту разреза левого узла 9, т.-е. до точки c_9; между же узлами 8 и 9 линия влияния должна изменяться по прямой.

По этим примерам построения линий влияния для поясных стержней можно отметить следующие свойства, присущие этим линиям влияния:

1) так как усилия поясных стержней определяются из уравнения моментов относительно узлов фермы, всегда лежащих между опорными точками, то знак усилия и линии влияния на всем протяжении 2-х опорных ферм один и тот же;

2) если точка моментов совпадает с загружаемыми узлами, то линия влияния поясных стержней имеет треугольную форму (черт. 120—O_3), если этого совпадения нет, то она имеет вид усеченного треугольника (черт. 120—U_2).

II) Линия влияния стержней решетки. В фермах с криволинейным или полигональным очертанием поясов, в которых возможно получение точки пересечения рассекаемых стержней поясов, уравнение линии влияния для усилий стержней решетки составляется при помощи моментной точки, за которую принимается точка схода рассеченных стержней поясов. Если рассекаемые стержни поясов параллельны между собой, то точка схода поясных стержней лежит в бесконечности, а потому для вывода уравнения линии влияния используется метод проекций.

Для фермы с полигональным очертанием верхнего пояса (черт. 120) усилие стержня решетки D_2 определяется проведением сечения $s—s$ и принятием за точку моментов точку k схода стержней 2—3 и 9—8.

При положении груза=1 справа от сечения, уравнение „правой" линии определяется из равновесия левой части фермы:

$$-Aa_k - D_2 r = O \text{ откуда } D_2 = -A\frac{a_k}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (71)$$

При положении груза = 1 слева от сечения, уравнение «левой» линии определится из условия равновесия правой части фермы

$$-B\ (l+a) + D_2\ \ r = O \text{ откуда } D_2 = +B\frac{(l+a)}{} .$$

Знаки в обоих уравнениях правой и левой линии различные.

Положение «правой» линии ab определяется ординатой $= -\frac{a_k}{r}$ на левой опоре и нулем на правой опоре; положение «левой» прямой, по общему закону определяется нулем на левой опоре и точкой k пересечения «правой» прямой с вертикалью под точкой моментов (прямая $k'\,a\,b'$).

Распространяя „правую" прямую до правого по отношению к сечению загружаемого узла 8 и „левую" прямую до левого узла 9, и проведя прямую $c_9\ c_9$ получим линию влияния усилия раскосного стержня в виде 2-х треугольников $a\,c_9\,f$ и $f\,c_8\,b$ с разными знаками.

Из рассмотренного построения линии влияния решетки можно видеть, что положение „левой" и „правой" прямых, очерчивающих линию влияния, а также знак линии влияния существенно зависят от положения моментной точки. Положение же моментной точки зависит от формы контура фермы; она может лежать как вне опорного пространства вплоть до пересечения в безконечности, так и в пределах междуопорной части; в последнем случае, по общим свойствам моментных линий линия влияния должна стать однозначной. Таким образом, форма и знаки линии влияния усилий в стержнях решетки должны существенно изменяться в зависимости от очертания фермы (о чем см. ниже § 38) *).

---

*) Примечание: Часто случается, что точка пересечения поясов лежит вне пределов чертежа и недоступна для измерения расстояний „a" и „r". В этом случае графическое измерение может быть заменено аналитическим расчетом.

Из геометрического построения (черт. 122) непосредственно вытекает:

$$(a + nd)\, tng\,\beta = h_n, \quad \text{отсюда} \quad a = \frac{h_n}{tng.\,\beta} - n\,d$$

$$r_n = (a + nd)\, Sin\ \varphi, \quad \text{отсюда} \quad r_n = \frac{h_n\, Sin\ \varphi}{tng.\ \beta}$$

В частном случае, когда при определении усилия в стержне решетки, рассекаются два взаимнопараллельные пояса (черт. 121), для составления уравнения линии влияния может быть использовано условие равенства нулю проэкций сил относительно оси нормальной поясам.

При положении груза $= 1$ справа от сечения $1 - 1$ уравнение „правой" прямой линии влияния для усилия раскоса D_3 будет:

$$+ A - D_3 \, Sin\,\varphi = O, \text{ отсюда } D_3 = A \frac{1}{Sin\,\varphi}, \quad \ldots \ldots \quad (72)$$

где φ — угол наклона раскоса к горизонту.

Положение этой прямой определяется ординатой $= 1 : Sin\,\varphi$ на левой опоре и нулем на правой опоре (прямая $a^1\, b$).

При положении груза $= 1$ слева от сечения $1 - 1$ уравнение „левой" прямой линии влияния для усилия раскоса будет:

$$+ B - D_3 \, Sin\,\varphi = O, \text{ отсюда } D_3 = - B \frac{1}{Sin\,\varphi} \quad \ldots \ldots \quad (72a)$$

эта прямая определяется ординатой $= -1 : Sin\,\varphi$ на правой опоре и нулем под левой (прямая $a\ b'_1$).

Сносят положение узлов фермы: левого 2 и правого 3 соответственно на „левую" и „правую" прямые линии влияния и проведя прямую $c_2\ c_3$ получим линию влияния раскоса, состоящую из 2-х треугольников $a\ c_2\ f$ и $f\ c_3\ b$ с разными знаками, очерченных двумя параллельными линиями.

На том же черт. 121 построена линия влияния для стойки V_2 фермы, очерченная прямыми $a\ c_2$ и $c_3\ b$. Построение сделано из условия разреза ее сечением $3 - 3$ и по ур-нию равновесия относительно вертикальной оси.

При положении груза справа от сечения, из условия равновесия левой части:

$$V_2 + A = O, \text{ откуда } V_2 = - A \quad \ldots \ldots \quad (73)$$

При положении груза слева от сечения, из условия равновесия правой части:

$$- V_2 + B = O, \text{ откуда } V_2 = + B \quad \ldots \ldots \quad (73a)$$

Из изложенного не трудно видеть, что в фермах с параллельными поясами, в которых усилия решетки выражаются в функциях поперечных сил, построение линии влияния аналогично построению линии влияния поперечных сил.

При том и другом способе построения линия влияния усилий в стержнях решетки получилась двухзначной, что указывает на изменение знака усилия при переходе подвижной нагрузки из одной части фермы в другую. Положение точки F раздела линии влияния легко определяется из геометрических соотношений.

III Влияние загружения верхних или нижних узлов фермы на величину усилия в решетке. Контур линий влияния усилий в решетках ферм зависит от расположения загружаемых узлов относительно разреза проводимого для составления уравнения равновесия.

В фермах раскосных с вертикальными стойками, в которых верхние и нижние узлы располагаются на одной вертикали, сечения, проводимые для расчета усилий в раскосах, проходят между одноименными узлами верхнего и нижнего пояса, а потому контур линии влияния остается одинаковым, как при расположении нагрузки в верхних так и в нижних узлах. Иначе обстоит дело с усилиями для стоек. Сечения, проводимые для расчета усилий в стойках, пересекают верхний и нижний пояс между узлами, не лежащими на одних и тех же вертикалях, вследствие чего расположение нагрузки по верхним или нижним узлам будет изменять контур линии влияния, а следовательно, и величину усилия в стойке.

На черт. 121 показано очертание линии влияния $a\,c_2\,c_3\,b$ для стойки V_2 при передаче нагрузки на узлы нижнего пояса.

При передаче нагрузки на узлы верхнего пояса линия влияния для той же стойки очертится контуром $a\ c_1\ c_2 b$.

Аналогичное явление изменения контура линии влияния, а следовательно, усилия в решетке в зависимости от расположения нагрузки по верхнему и нижнему поясу будет иметь место в решетчатых фермах, в которых сечения, проводимые для определения усилий в решетке, пересекают пояса между узлами, не лежащими на одних и тех же вертикалях.

На черт. 123 построены линии влияния в раскосе решетчатой фермы при расположении нагрузки по низу, чему соответствует контур $a—8—7—b$ и при нагрузке по верху, чему соответствует контур $a—2'—3'—b$.

Пример 17. Ферма с параллельными поясами.

В фермах с параллельными поясами высота постоянна и вследствие параллельности поясов плечи поясных усилий обоих поясов одинаковы и равны высоте фермы h.

Если длина пролета $l = md$, где d — длина панели и если расстояние любого узла фермы от левой опоры $a = nd$, где n — переменное число по числу панелей до узла, то ординаты на левой опоре (см. выраж. 70), определяющие линии влияния поясов будут выражаться так: $\frac{a}{h} = \frac{nd}{h}$, что позволяет, изменяя число n, построить линию влияния для любого стержня пояса (черт. 124).

Наибольшая ордината каждой линии влияния определяется из геометрического построения и равна:

$$y = \frac{nd}{h}\ \frac{m—n}{m} = \frac{d}{h\,m}\ n\ (m—n).$$

Нетрудно видеть, что в этом выражении при переменном n ординаты y представляют собой ординаты параболы отнесенной к началу координат в опорной точке a, следовательно: вершины всех линий влияния поясных стержней лежат на параболе с наибольшей ординатой по средине, равной

$$= \frac{dm}{4\ h} = \frac{l}{4\ h},$$

и площади линий влияния отдельных стержней возрастают к середине.

В этих же фермах, при одинаковой длине панели, углы наклона раскосов к горизонту будут одинаковы, а потому линии влияния раскосов, строящиеся по выражен. (72) будут определяться одной и той же ординатой на опорах равной $\pm 1 : Sin\,\varphi$ (черт. 124 с) — наибольшая ордината в правой части линии влияния

$$y_n = \mp\ \frac{1}{Sin\,\varphi}\ \frac{m—n}{m}$$

и наибольшая ордината в левой части

$$y_{n-1} = +\frac{1}{Sin\,\varphi}\ \frac{n—1}{m.}$$

Длина левой и правой части линии влияния определяется из геометрических соотношений. Обозначая через x положение нулевой точки в панели, будем иметь:

$$x = \frac{y_{n-1}}{y_n + y_{n-1}} d = \frac{n-1}{m-1} d$$

$$d - x = d - \frac{n-1}{m-1} d = \frac{m-n}{m-1} d.$$

Соответственно этому площади обоих частей линии влияния будут:

$$\text{правой } \omega_{пр} = \frac{(m-n)}{2 \; Sin\,\varphi .\; m}\left[m - n + \frac{m-n}{m-1}\right] d = \frac{1}{2} \; \frac{(m-n)^2}{Sin\,\varphi (m-1)} \; d.$$

$$\text{левой } \omega_{лв} = \frac{1.\;(n-1)}{2 \; Sin\varphi .\; m}\left[n - 1 + \frac{n-1}{m-1}\right] d = \frac{1}{2 \; Sin\,\varphi} \; \frac{(n-1)^2}{(m-1)} \; d.$$

Разность этих площадей

$$\omega_{пр} - \omega_{лв} = \frac{d}{2 \; Sin\,\varphi \; (m-1)} \left[(m-n)^2 - (n-1)^2 \right] = \left[\frac{m+1}{2} - n \right] \frac{d.}{Sin\,\varphi}$$

Из чего видно, что по мере приближения к середине превалирующее значение правой части падает, вследствие чего усилия в решетке от постоянной нагрузки, определяемые разностью площадей $(\omega_{пр} - \omega_{лв})$ приближаются к нулю; усилия же, возникающие в ней от загружения подвижной нагрузкой правой и левой частей линии влияния, стремятся к уравнению между собой и становятся большими, чем усилия от постоянной нагрузки. Вследствие чего решетка фермы в средних панелях начинает испытывать знакопеременное усилие.

Пример 18. Ферма с одним параболическим поясом.

Плечи усилия горизонтального пояса (черт. 125) определяются высотами h фермы в соответствующих узлах; плечи криволинейного пояса определяются выражением $h_n \; Cosn \; \beta_{(n-1)}$ где $\beta_{(n-1)}$ — угол наклона соответствующего стержня пояса к горизонту.

Высоты параболической фермы в разных узлах определяются уравнением параболы:

$$h = \frac{4 \; н}{m^2} \; n \; (m-n),$$

отнесенным к началу координат в опорной точке A; в этом уравнении nd — расстояние узлов от той же опоры и $l = md$ — длина пролета. При этих обозначениях ординаты под левой опорой, определяющие построение линий влияния выразятся так:

$$\text{для прямого пояса } \frac{a}{h} = \frac{nd.\; m^2}{4 \; н \; n \; (m-n)} = \frac{m^2 d}{4 \; н \; (m-n)}$$

$$\text{для кривого пояса } \frac{a}{h \; Cosn \; \beta} = \frac{m^2 d}{4 \; н \; (m-n) \; Cosn\,\beta},$$

которые отличаются между собой только множителем $Cosn\;\beta$ в знаменателе второго выражения.

Наибольшие ординаты этих линий влияния определяются из геометрического построения и равны:

$$y_{max} = \frac{m^2 d}{4 \; н \; (m-n)} \; \frac{m-n}{m} = \frac{md}{4 \; н}$$

т.-е представляют собой величину постоянную, независящую от положения узла. Следовательно, вершины всех линий влияния поясов лежат на горизонтальной прямой (черт. 125 в), и площади линий влияния одинаковы.

Последнее подверждает, полученный уже вывод (прим. 10), что при загружении параболической фермы постоянной нагрузкой проэкции усилий в ее поясах будут одинаковыми на всем протяжении.

Определение усилия и построение линии влияния стержней решетки той же фермы можно сделать общим приемом (выраж. 71) из уравнения моментов относительно точки k перечения поясных стержней O_n и U_{n-1} как это сделано на черт. 125 с, на котором построена линия влияния раскоса $D_3\ Cosn\ \varphi_3$. Но для удобства анализа и упрощения воспользуемся в этом случае для построения линии влияния решетки этой фермы выражением усилия, выведенным в примере 19, по которому усилие раскоса будет:

$$D\ Cosn\ \varphi = O_n\ Cosn\ \beta_n - U_{n-1},$$

т.-е. определяется суммой проэкций усилий обоих поясов, а потому линия влияния усилия раскоса может быть построена как сумма двух треугольников (черт. 125 *d*) ac_2b и ac_3b, представляющих собой линии влияния горизонтальных проэкций усилий поясов; сумма этих треугольников, представляемая заштрихованными треугольниками ac_2f и fc_3b, определяет собой линию влияния раскоса и в точности соответствует линии влияния, построенной на черт. 125 *c*, отнесенной к оси абсцисс.

Из геометрического построения нетрудно видеть, что левая и правая часть этой линии влияния, образованные вычитанием из равных треугольников $ac_{n-1}b$ и $ac_n\ b$ одного и того же треугольника afb, равны между собой.

Следовательно, при загружении параболической раскосной фермы сплошной нагрузкой, усилия в раскосах $= (\omega_{пр} - \omega_{лв})\ p = O$; при загружении же подвижной нагрузкой усилия во всех раскосах будут знакопеременными.

Площадь каждой отдельной части линии влияния легко определится следующим путем. Треугольники (черт. 125 *d*) ac_2f и ac_2b имеют основания лежащие на одной прямой и общую вершину, следовательно, их площади относятся как основания $\triangle\ ac_2f : \triangle\ ac_2b = c_2f : c_2b = ua : ub$; так как $uc_2 \parallel c_3a$, то треугольники ac_2f и auf равны между собой, и так как площадь треугольника ac_2b как площадь линии влияния поясного стержня

$$\triangle\ \ ac_2b = \frac{l}{2}\ \frac{l}{4\,\mathrm{H}},$$

то, следовательно, площадь треугольника auf, представляющая собой левую часть линии влияния раскоса:

$$\triangle auf = \omega_{лв} = \triangle\ \ ac_2b\ \frac{u\,a}{u\,b} = \frac{l^2}{8\ \mathrm{H}}\ \frac{d}{l+d} = \frac{l^2}{8\ \mathrm{H}.\ (m+1)}$$

из чего следует, что в параболической ферме с раскосной решеткой площади отдельных частей линий влияния п р о э к ц и й у с и л и й в раскосах ($max\ D\ Cosn\ \varphi$) одинаковы во всех раскосах фермы.

Площади же линии влияния самих усилий раскоса определятся из того же выражения и равны:

$$max\ \omega = \frac{1}{8}\ \frac{l^2}{\mathrm{H}}\ \frac{d}{(l+d)\ Cosn\ \varphi} = \frac{l^2}{8\ \mathrm{H}\ (l+d)}.\ S,$$

где S—длина раскоса.

Из чего следует, что площади линий влияния наибольших усилий раскосов параболической фермы пропорциональны длинам раскосов.

Пример 19. Раскосная треугольная ферма с горизонтальным нижним поясом.

Плечи усилий нижнего пояса определяются высотами фермы в узлах, которые, согласно обозначений черт. 126, могут быть в общем виде выражены так:

$$h_n = \mathrm{H}\,\frac{2\,nd}{md} = \frac{2\mathrm{H}.\,n}{m}.$$

Плечи усилий верхнего пояса будут определяться выражениями $h_n \, Cosn\,\beta$, где β угол наклона верхнего пояса, постоянный для верхних панелей.

Таким образом ординаты под левыми опорами, определающие построение линий влияния, выразятся в общем виде так:

$$\frac{nd}{h} = \frac{n.\,d.\,m}{2\ \mathrm{H}.\,n} = \frac{m\,d}{2\,\mathrm{H}},$$

т.-е. опорная ордината будет одинаковая для всех линий влияния, что свидетельствует о том, что вершины линий влияния поясных стержней лежат

на одной прямой, определяемой ординатой $= \dfrac{m\,d}{2\ \mathrm{H}} = \dfrac{l}{2\ \mathrm{H}}$.

Наибольшие ординаты линий влияния будут определяться выражением:

$$y_{max} = \frac{m\,d}{2\ \mathrm{H}}.\ \frac{m-n}{m} = \frac{m-n}{2\,\mathrm{H}}\,d,$$

т.-е. будут убывать к середине фермы, а потому площади линий влияния будут наибольшими у опор.

Что касается линий влияния стержней решетки этих ферм, то вследствие того, что точка моментов, определяемая точкой схода поясов совпадает с одной из опорных точек, то линия влияния сохраняет только одну часть, другая же часть ее сливается с осью абсцисс.

Действительно, для решетки левой половины фермы, моментная точка совпадает с левой опорой. При положении груза = 1 в правой части, выражение (71) усилия раскоса:

$$D_n = \pm\,\frac{A.\,a}{r} = O.$$

а потому правая прямая линии влияния сливается с осью абсцисс. Левая прямая той же линии влияния определяется уравнением:

$$D_n = -\ \frac{B.\,l}{r} = -\frac{m\,d}{nd\,Sin\,\varphi} = -\frac{m}{n\,Sin\,\varphi}\ .$$

Построение линии влияния показано на черт. 126 с.

Следовательно, усилия в стержнях решетки такой фермы всегда однозначны.

Наибольшие ординаты в этих линиях влияния определяются из геометрического построения и равны:

$$y_{max} = \frac{md}{n.\ Sin\,\varphi}\ \frac{(n-1)\,d}{m.\,d} = \frac{n-1}{n.\,Sin\,\varphi}\,.$$

Соответственно с этим площади линии влияния:

$$\omega = \frac{1}{2}\ \frac{(n-1)d}{n\ Sin\,\varphi}\ n\,d = \frac{1}{2}\ \frac{(n-1\ d}{Sin\,\varphi}$$

§ 34. Построение линий влияния методом вырезания узлов. Когда по условию образования фермы более простым представляется определение усилий в отдельных стержнях фермы путем вырезания узлов, построение линий влияния для этих стержней проводится путем исследования уравнений равновесия вырезанного узла.

Уравнение равновесия составляется в двух предположениях: 1) для положения груза $=1$ в самом узле, этим определяется ордината линии влияния под этим узлом и 2) для положения груза $=1$ в остальных узлах и, так как при перемене положения груза в этих узлах уравнение равновесия вырезанного узла остается без изменения, то этим определяются ординаты линии влияния под всеми остальными узлами.

Для усвоения этого способа рассмотрим ферму, показанную на черт. 127.

В этой ферме имеются два характерных типа стоек: все нечетные стойки служат для укрепления шарниров в местах изломов верхнего пояса, а потому являются необходимыми в составе всей системы фермы; все четные стойки служат только для поддержания нижнего узла, играют роль подвески этого узла и могут быть исключены из системы, если будет устранен шарнир в нижнем узле. Это свойство стоек, конечно, характеризуется формой линий влияния.

Ни через одну внутреннюю стойку этой фермы нельзя провести сечения пересекающего три стержня, а потому для составления уравнения усилий пользуемся методом вырезания узлов.

Для определения усилия в стойке V_2, вырезаем нижний узел 2 и составляем уравнение равновесия всех сил, приложенных к этому узлу, проектируя их на ось стойки.

1) при положении груза $P=1$ в узле 2, оно напишется так:

$$V_2 - P = O,$$

откуда $$V_2 = P = 1\ . \qquad (74)$$

из чего следует, что ордината линии влияния под этим узлом равна единице (черт. 127 а).

2) при положении груза $=1$ в других узлах загружаемого пояса из того же уравнения равновесия (74) следует, что $V_2 = O$, а потому ординаты линии влияния стойки V_2 под всеми остальными узлами равны нулю.

Таким образом, линии влияния таких стоек будут иметь вид треугольника с ординатой $=1$ под вырезанным узлом и сходящего на нуль к соседним узлам, из чего следует, что стойка работает только на местную нагрузку в узле.

Усилие стойки V_1 и ей аналогичных проще определяется из вырезания верхних узлов. Так как подвижная нагрузка по условию перемещается в нижних узлах, то, следовательно, где бы она ни располагалась, уравнение равновесия для узла 1 останется одно и тоже. а именно:

$$-V_1 - O_1 \; Sin \; \beta_2 + O_2 \; Sin \; \beta_2 = O \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

Подставляя в это выражение значения усилий:

$$O_1 = -\frac{M_1}{h \; Cosn \; \beta_1}$$

и:

$$O_2 = -\frac{M_1}{h_1 \; Cosn \; \beta_2}$$

получим:

$$V_1 = + \frac{M_1}{h_1} (tng \; \beta_1 - tng \, \beta_2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75 \text{ a})$$

Следовательно, линия влияния стойки пропорциональна линии влияния моментов относительно узла № 1, а потому представится в виде треугольника, для построения которого под левой опорой надо отложить ординату:

$$\frac{a_1}{h_1} (tng \; \beta_1 - tng \; \beta_2).$$

Построенная на основании этих соображений линия влияния (черт. 129 в) показывает, что стойка работает при загружении всей фермы.

Усилие опорной стойки V_0 этой фермы также легко определяется из вырезания опорного узла, в котором приложено опорное давление A. При положении груза $= 1$ в узле № O уравнение равновесия относительно оси стойки дает:

$$+ V_0 + A - P = O.$$

откуда:

$$V_0 = A - P.$$

но так как при положении груза над опорной реакцией сама опорная реакция по величине равна и противоположна грузу, т.-е. $A = P$, то, следовательно, $U_0 = O$, а потому при этом положении груза ордината линии влияния под узлом № 0 равна нулю. При перемещении груза $= 1$ во все другие узлы того же пояса, из условия равновесия вырезанного узла № 0, вытекает, что усилие стойки:

$$V_0 = -A = -\frac{l-x}{l}$$

т.-е. оно равно опорному давлению, а потому будет определяться ординатами линии влияния опорного давления. Таким образом для построения линии влияния стойки надо построить прямую $b\,a'$ (черт. 127 с), определяющую линию влияния опорного давления A, и вычесть из нее влияние местной нагрузки в узле № 0, линия влияния будет очерчиваться треугольником $a\,1'b$.

Пример 20. Треугольная ферма с ездою на верху. (черт. 128).

В этой ферме усилия во всех стержнях за исключением средней стойки легко определяются методом сечения.

Для построения линии влияния усилия средней стойки составляем уравнение, определяющее усилие ее, исходя из вырезания верхнего узла.

При положении груза $= 1$ в этом узле, уравнение проекции относительно оси стойки напишется в таком виде:

$$-V_3 - O_3 \; Sin \; \beta_3 - O_4 \; Sin \; \beta_3 - 1 = O, \quad \ldots\ldots \quad (76)$$

которое по подстановке в него равных между собой усилий O_3 и O_4, выраженных в функции момента относительно узла 3, напишется так:

$$V_3 = 2 \; \frac{M_3}{h_3} tng \; \beta_3 - 1 \quad \ldots\ldots \quad (76\,а)$$

При переходе груза $= 1$ в другие узлы верхнего пояса из условия равновесия того же верхнего узла будет вытекать, что усилие стойки изменится только тем, что в него не будет входить член, характеризующий присутствие груза $= 1$, а потому оно напишется так:

$$V_3 = 2 \; \frac{M_3}{h_3} \; tng \; \beta_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76\,в)$$

Следовательно, для построения линии влияния стойки (черт. 128) надо построить удвоенную линию влияния поясного усилия O_3, измененную в масштабе $1 \times tng \; \beta_3$, и. из полученной при этом построении положительной ординаты $c_3c_3{}^1$ под узлом 3, вычесть согласно выражения (76а) ординату $= 1$, учитывающую влияние местного нагружения. Между узлами линия влияния изменяется по прямым.

Пример 21. Полураскосная ферма с параллельными поясами (черт. 129).

Эта ферма отличается от простых раскосных ферм тем, что в ней нельзя провести разрезов только через три стержня.

Усилия поясных стержней определяются по разрезу, пересекающему два раза одну и ту же стойку (на черт. 129 разрез 1—1), что позволяет написать уравнение равновесия с одним неизвестным относительно узла, противолежащего рассекаемому стержню пояса. Выражение усилия поясных стержней будет иметь вид обычный для двухопорных ферм (выраж. 69):

$$U_n = -O_n = \frac{M_n}{h_n}$$

Следовательно, линии влияния их будут строиться обычным приемом (черт. 129 а).

Определение усилий в полураскосах непосредственно невозможно. Предварительно вырезаем срединный узел, где полураскосы одной панели сходятся со стойками и устанавливаем их зависимость между собой из условия равновесия относительно горизонтальной оси, перпендикулярной стойке, откуда получаем, что:

$$D_n' \; Cosn \; \alpha'_n + D_n \, Cosn \; \alpha_n = O,$$

отсюда:

$$D_n \; Cos \; \alpha_n = -D'_n \; Cosn \; \alpha'_n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (77)$$

где α — углы наклона полураскосов к горизонту.

Если углы наклона полураскосов к горизонту равны между собой $\alpha_n = \alpha'_n$, то в соответствии с этим усилия полураскосов будут равны между собой, т.-е. $D_n = D'_n$, но противоположны по знаку.

Далее по разрезу поперек фермы (2—2), из условия проэкций относительно вертикальной оси, будем иметь для определения усилий уравнение:

$$-D_n \; Sin \, \alpha_n + D'_n \, Sin \, \alpha'_n + Q = O \quad \ldots\ldots \quad (78$$

Это уравнение совместно с уравнением (77) позволяет составить уравнение, определяющее усилие в одном из полураскосов.

При равенстве углов $\alpha_n = \alpha'_n$, уравнение, определяющее усилия в полураскосах, будет:

$$D_n = -D'_n = \frac{1}{2} \frac{Q}{Sin\,\alpha}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

показывающее, что усилия в полураскосах равны половине усилия простой раскосной фермы с параллельными поясами (выраж. 72), а потому линия *влияния для них строится (черт. 129 в) обычным приемом с отложением* под опорами ординат равных $\pm\ 1 : 2\ Sin\,\alpha$.

Усилия в обоих половинах стоек не равны между собой, как это можно видеть из условия вырезания срединного узла и уравнения проэкций, сходящихся в ней усилий, на вертикальную ось, а именно:

$$+V^1_n - V_n - 2\ D_{n+1}\ Sin\,\alpha = O,$$

по которому они отличаются друг от друга на величину $2\ D_{n+1}\ Sin\,\alpha$.

Для этих ферм усилия в полустойках проще всего определяются из условия вырезания узлов.

Вырезая узел нижнего пояса, на который не передается нагрузка, и проектируя сходящиеся в нем усилия на вертикальную ось стойки, будем иметь:

$$+V_n + D_n\,Sin\,\alpha = O,$$

откуда:

$$V_n = -\frac{Q}{2} \quad (80)$$

из чего следует, что линия влияния нижней части полустойки будет представляться линией влияния полураскоса, измененной помножением на $Sin\,\alpha$ (т.-е. линией влияния поперечной силы уменьшенной вдвое).

Вырезая узел другого пояса у той же стойки и учитывая, что на него передается нагрузка, из условия проэкции на вертикальную ось будем иметь уравнение:

$$-V_n' + D'_n\ Sin\,\alpha_n^1 - 1 = O,$$

откуда.

$$V'_n = +\frac{Q}{2} - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (81)$$

Нетрудно видеть, что, если нагрузка в виде груза = 1 не будет находиться в вырезанном узле, то уравнение равновесия изменится и приведется к виду уравнения (80). Отсюда заключаем, что линия влияния стойки будет представлять собою видоизмененную линию влияния полураскоса помножением на $Sin\,\alpha$ (черт. 129 с), при чем из полученной при этом построении ординаты под вырезанным узлом (в рассматрив. случае узел 3), должна быть вычтена ордината = 1, чем учитывается влияние загружения узла и смежных панелей. На черт. 129 с построена линия влияния для верхней полустойки V'_3, очерчиваемая многоугольником $ac_2c_3c_4b$.

Что касается усилия средней стойки V_4, то оно проще всего определяется путем вырезания ненагруженного узла, в рассматриваемом случае узла нижнего пояса. Из условия равновесия усилий, сходящихся в этом узле, проектируя на ось стойки будем иметь:

$$V_4 + D_5\,Sin\,\alpha_5 + D_6\ Sin\,\alpha_6 = O, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (82)$$

хотя углы наклона полураскосов равны между собой $\alpha_5 = \alpha_6$, но усилия полураскосов D_5 и D_6 вообще не равны между собой.

Из уравнения (82) видно, что линия влияния средней стойки образуется путем сложения линий влияния полураскосов D_5 и D_6 с изменением их в масштабе $1 \times Sin\,\alpha$. Оба эти полураскоса симметричны, линии влияния их подобны, но противоположны по знаку, что можно видеть по черт. 129 е, на котором линия влияния полураскоса $D_5\ Sin\,\alpha$ очерчена многоугольником ac_3c_4b, и линия влияния полураскоса $D_6\ Sin\,\alpha$ очерчена многоугольником ac_4c_5b и только под узлом 4 обе линии влияния имеют одну и ту же ординату oc_4 одного и того же знака. Таким образом, при сложении этих двух линий влияния на протяжении ac_3 и bc_5 они в сумме дадут ординаты равные нулю и только под узлом 4 они суммируясь дадут ординату:

$$OC_4 = 2\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

§ 35. Применение законов кинематики к построению линий влияния в фермах. Изложенный в § 29 прием определения усилий в стержнях ферм по законам кинематики, в связи с изложенным в § 7 представлением линий влияния, как эпюр возможных смещений, позволяет распространить этот прием построения их также для усилий в стержнях ферм и сделать некоторые обобщения, характерные для линий влияния.

Выделяя из состава фермы какой-либо стержень, мы превращаем ее в механизм, способный иметь движение вокруг мгновенных полюсов. Вводя же на место устраненного стержня заменяющее его внутреннее усилие, мы будем иметь механизм, находящийся в равновесии под действием приложенных к нему внешних сил и заменяющего усилия; для такого механизма становится возможным движение в пределах возможной деформации устраненного стержня. Происходящее при этом возможное перемещение звеньев механизма вызовет перемещение связанной с ними грузовой линии, т.-е. линии, по которой двигается по ферме груз. Ординаты перемещенной грузовой линии определяют собой величины возможных перемещений точек приложения грузов, т.-е. определяют собой эпюру перемещения грузовой линии, возможную при устранении данного стержня. Эта эпюра согласно данных, изложенных в § 7, представляет собой контур линии влияния для усилия в устраненной связи, т.-е. в стержне, и ординаты ее, измеренные в масштабе соответствующем возможной деформации этого стержня, определят собой ординаты линии влияния.

В простых фермах построение эпюры возможного перемещения грузовой линии легко может быть сделано при помощи мгновенных полюсов относительного вращения.

Поясные стержни. При устранении из состава фермы поясного стержня (черт. 130) она превращается в механизм, состоящий из двух неизменяемых звеньев I и II, связанных между собой шарниром I, II и с землей шарнирами E I и E II, которые все являются мгновенными полюсами относительного вращения этих звеньев; из них полюс E I совпадает с левой неподвижной опорой, а полюс E II, лежит на вертикали правой подвижной опоры.

Если узловая точка грузовой линии фермы совпадает с шарниром I, II, соединяющим оба звена, как это, например, имеет место при устранении стержня U_2 (черт. 130 а), то грузовая линия, связанная с обоими звеньями, при вращении их получит излом около этого шарнира и эпюра возможного перемещения ее в этом случае очертится двумя прямыми, наклоненными к горизонту.

Как было показано в § 7, эпюра возможного перемещения может быть очерчена любыми прямыми, но эти прямые 1, e — 1,2 и 1,2—2, e, должны быть связаны условием пересечения ими оси абсцисс, на следах мгновенных полюсов 1, e и 2, e и должны пересекаться между собой на вертикали под полюсом I, II. Углы φ_1 и φ_2 наклона этих прямых к горизонту будут представлять собой угловые перемещения звеньев I и II.

Переход от построенной таким путем эпюры возможного перемещения к линии влияния может быть сделан определением ее масштаба из условия выражения возможной работы фермы как механизма с усилием U_2 вместо стержня; по этому уравнению будем иметь:

$$P.\ y - U_2 (\delta_1 + \delta_2) = 0,$$

откуда:

$$U_2 = \frac{P.\ y}{\delta_1 + \delta_2} = \frac{P\,y}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots (83)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ — суммарная возможная деформация устраненного стержня. В это уравнение не введены опорные реакции, так как перемещение по их направлениям равны нулю.

Знак члена $P \times y$ положительный, так как направление силы P совпадает с направлением возможной деформации, а знак члена $U_2\ \delta$ отрицателен, так как при принятом направлении усилия работающим на растяжение узлы 1 и 3 будут стремиться раздвинуться, т.-е. движение их будет обратное направлению усилия. Величина δ — суммарного возможного перемещения по направлению усилия может быть определена через угол φ—относительного смещения звеньев I и II, вокруг шарнира I, II, и так как вращение звеньев I и II вокруг шарниров E I и E II направлено в разные стороны, то суммарное угловое вращение равно сумме угловых смещений $\varphi_1 + \varphi_2$ — прямых, очерчивающих эпюру, относительно горизонта, а потому:

$$\delta = h^1\,\varphi = h^1\ (\varphi_1 + \varphi_2)$$

по малости углов φ_1 и φ_2 они могут быть заменены их тангенсами:

$$\delta = h^1\ (tng\,\varphi_1 + tng\,\varphi_2) \quad \ldots\ldots\ldots (84)$$

Полученное выражение показывает, что величина δ, определяющая в выражении (83) единицу масштаба ординат линии влияния, графически определяется отрезком, отсекаемым правой и левой прямыми линии влияния на вертикали, отстоящей от мгновенного полюса (I,II) относительного перемещения звеньев (I и II) на расстоянии плеча (h) усилия относительно того же полюса (черт. 130/а).

Выражая величины $tng\varphi_1$ и $tng\varphi_2$ и ординаты y эпюры возможного перемещения в функции отрезка k на вертикали под левой опорой и подставив их в выражение (83), получим

$$U_2 = \frac{(l-x)\ \dfrac{k}{l}}{h'\ \dfrac{k}{a_2}} = \frac{l-x}{l} \cdot \frac{a_2}{h'}\,,$$

что соответствует ранее выведенному уравнению правой прямой линии влияния поясного стержня (выражение 71).

Знак линии влияния будет (+), так как выражение (83), при принятом растягивающем действии усилия U_2, имеет знак плюс.

Если бы оказалось, что узловые точки грузовой линии не совпадают с шарниром I,II, связывающим звенья I и II, как это, например, будет иметь место при устранении стержня O_2 той же фермы (черт. 130/в), то при возможном движении звеньев I и II фермы, звено III грузовой линии повернулось бы вокруг шарниров I,III и II,III, как мгновенных полюсов; вследствие этого контур возможного перемещения грузовой линии будет очерчен тремя прямыми с изломами под мгновенными полюсами I,III и II,III.

Контур эпюры возможного перемещения грузовой линии может быть получен путем проведения через следы 1,*e* и 2,*e* двух прямых 1,*e* — 1,2 и 1,2 — 2,*e*, пересекающихся между собой на вертикали под мгновенным полюсом I,II; направление прямой 1,3 — 2,3, характеризующей возможное перемещение звена III, определится снесением на основные прямые положения мгновенных полюсов I,III и II,III.

Определение величины масштаба для перехода от ординат y эпюры возможного перемещения к ординатам линии влияния получим из уравнения возможной работы, по которому будем иметь:

$$-P \cdot y - O_2 \cdot \delta = 0,$$

откуда

$$O_2 = -\frac{P \cdot y}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (85).$$

В этом выражении члены $P \cdot y$ и $O_2 \delta$ взяты со знаком минус (—), потому что при принятом условном растягивающем усилии в стержне O_2 узлы 2 и 4 фермы должны стремиться раздвинутся, чему должно соответствовать поднятие фермы, т.-е. перемещение узлов, противоположное направлению силы P.

Полученный знак минус в выражении усилия (85) показывает, что усилие должно быть принято сжимающим (—).

Выражая величину δ в функции угловых смещений φ_1 и φ_2, будем иметь:

$$\delta = h(\varphi_1 + \varphi_2) = h(tng\varphi_1 + tng\varphi_2) \quad \ldots \ldots \quad (84\ bis),$$

что подтверждает указанное выше положение о графическом определении величины масштаба $\delta = 1$, как отрезка между „правой и левой“ прямыми линии влияния на расстоянии равном плечу усилия от вертикали, проходящей через мгновенный полюс относительного вращения звеньев фермы.

Из выражений (84) и (84 *bis*), определяющих длину единицы масштаба и их геометрического построения, непосредственно видно, что отрезки k (черт. 130), отсекаемые на опорной вертикали „правой“ и „левой“ прямыми, должны удовлетворять отношению $k = a : h$, т.-е. в масштабе линии влияния должны быть равны частному от деления расстояния a до проэкции мгновенного полюса, на плечо h усилия относительно того же полюса.

Стержни решетки. При устранении из состава фермы одного из стержней решетки, например, раскоса D_2 (черт. 131), ферма превращается в механизм, состоящий из двух неизменяемых звеньев I,II и двух стержней III и IV с соответствующими полюсами относительного движения их между собой. В соответствии с предположенным растяжением по направлению диагонали D_2 левый узел I,III грузовой линии поднимается выше горизонтального положения ее, а правый узел II,III опустится и эпюра возможных перемещений очертится ломаной линией, имеющей два знака $+$ и $-$.

Контур эпюры возможного перемещения может быть построен по общим правилам путем проведения двух прямых $e,1-1,2$ и $1,2-e,2$, пересекающих ось абсцисс на следах под мгновенными полюсами EI и EII и пересекающихся между собой на вертикали под мгновенным полюсом I,II; контур эпюры на протяжении между грузовыми узлами I,III и II,III определится снесением этих шарниров на основные прямые эпюры, чем определятся точки 1,3 и 2,3, между которыми должна проходить прямая.

Для перехода к масштабу ординат линии влияния будем иметь по выражению возможной работы при положении груза $P=1$ в правой части

$$+Py - D\delta = 0$$

откуда

$$D = +\frac{y}{\delta}$$

при положении груза $P=1$ в левой части . . . . . . (87)

$$-Py - D\delta = 0$$

откуда

$$D = -\frac{y}{\delta}$$

где δ — суммарное перемещение узловых шарниров I,III и II,IV по направлению усилия D.

Этими выражениями определяются знаки в обоих частях линии влияния.

Что касается ее масштаба, то таковой определяем из условия относительного смещения звеньев I и II вокруг полюса I,II; и так как по эпюре угловое перемещение обоих звеньев направлено в одну сторону, то величина относительного углового перемещения их φ равна разности угловых перемещений φ_1 и φ_2 обоих звеньев, а потому

$$\delta = r \,.\, \varphi = r(\varphi_1 - \varphi_2) = r(tng\varphi_1 - tng\varphi_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (88)$$

Графически величина $\delta = 1$ масштаба и в этом случае определяется отрезком на вертикали между правой и левой прямыми линии влияния на расстоянии r, равном плечу усилия, от вертикали мгновенного полюса относительного вращения звеньев I и II (черт. 131).

Аналитическое преобразование выражения (87) в функции k отрезка ординаты под левой опорой приводит его к виду

$$D_2 = \frac{(l-x)\,\dfrac{k}{l}}{r\,\dfrac{k}{a}} = +\frac{l-x}{l}\,\frac{a}{r}$$

представляющим собой уравнение правой прямой линии влияния.

В фермах с параллельными поясами (черт. 132) мгновенный полюс относительного перемещения звеньев I и II фермы будет лежать в бесконечности, а потому основные прямые $e,1-1,3$ и $e,2-2,3$, очерчивающие эпюру возможных перемещений будут параллельны между собой, так как точка пересечения их лежит в бесконечности.

На основании уравнения возможной работы будем иметь при положении груза на правом звене:

$$-Py - D_4\delta = 0$$

откуда

$$D_4 = -\frac{y}{\delta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89).$$

В отличие от предыдущего случая величина масштаба δ линии влияния не может быть определена в функции угловых перемещений, так как плечо раскоса $r = \infty$.

В этом случае полное относительное перемещение обоих звеньев по вертикальному направлению определяется отрезком k, величина же δ возможной деформации раскоса, допускающая указанное вертикальное перемещение есть ничто иное, как проэкция этого вертикального перемещения на направление раскоса

$$\delta = k\ Sin\alpha,$$

как это нетрудно видеть из геометрического построения перемещения, сделанного на чертеже 132/а.

Выразив ординату y эпюры перемещений в функции отрезка k и подставив ее в выражение (88), будем иметь

$$D_4 = -\frac{k(l-x)}{l} \cdot \frac{1}{k\ Sin\alpha} = -\frac{(l-x)}{l\ .\ Sin\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (90).$$

Полученное выражение представляет собой ничто иное, как уравнение „правой“ прямой в линии влияния раскоса (см. выраж. 72).

Таким образом, отрезок k, заключенный между прямыми образующими эпюру возможных перемещений, является единицей масштаба линии влияния вертикальных перемещений. Единицей же масштаба линии влияния раскоса является проэкция отрезка k на направление раскоса (выраж. 90).

На черт. 132 сделано построение линии влияния раскоса при условии *расположения грузовой линии поверху и понизу. Сделанное на том же* чертеже искаженное схематическое построение возможного перемещения звеньев фермы картинно показывает, как изменяется эпюра возможного перемещения грузовой линии в зависимости от расположения ее поверху *и понизу.*

Определение нулевой точки раздела. В приведенных построениях линий влияния решетки характерной точкой является точка e,3 раздела положительной и отрицательной части линии влияния. По общему свойству эпюр возможных перемещений эта нулевая точка должна быть следом мгновенного полюса вращения звена III относительно земли и может быть найдена как таковая.

Для случая расположения грузовой линии показанного на черт. 132, *положение мгновенного полюса EIII легко определяется проведением* прямых EI — I III и EII — II III, на пересечении которых по общему свойству должен лежать мгновенный полюс вращения звена III относительно земли E.

Но если направление грузовой линии совпадает с линией EI — EII, проходящей через опорные шарниры, как это, например, имеет место на черт. 131, то непосредственное отыскание полюса EIII невозможно, а потому определение его приходится делать через мгновенный полюс EIV, возможного перемещения звена IV относительно земли E и через мгновенный полюс IV,III относительного перемещения звеньев III и IV; прямая, проходящая через эти два полюса, своим пересечением с прямой E I III и E II III определит полюс E III.

Определение нулевой точки раздела может служить контролирующим, а иногда и вспомогательным средством при построении линий влияния.

Пример 22. На черт. 133 сделано построение линии влияния стержня решетки V_2 фермы с вогнутым верхним поясом.

Исключением стержня V_2 ферма обращается в механизм с двумя звеньями I и II и двумя стержнями III и IV. Мгновенный полюс относительного вращения звеньев I и II лежит в пределах опорных точек.

Эпюра возможного перемещения грузовой линии очерчивается двумя основными прямыми e 1 — 1 2 и 1 2 — e 2, пересекающимися в точке 1 2; в пределах звена—стержня III эпюра очерчивается прямой 1 3 — 2 3, определяемой снесением соответственных полюсов шарниров на основные прямые.

Контрольная нулевая точка e 3 прямой 1 3 — 2 3 найдена, как след мгновенного полюса E III, определенного при помощи мгновенного полюса E IV вращения стержня IV относительно земли и мгновенного полюса IV III относительного вращения стержней III и IV. Пересечением прямой IV,III — E IV с прямой EI,III—III EII определяется точка E III.

Масштаб линии влияния определяется из уравнения возможного смещения

$$+Py - V_2\delta = 0,$$

откуда

$$V_2 = +\frac{y}{\delta}$$

Единица масштаба δ определяется в функции угла φ относительного вращения звеньев I и II, и так как вращение звеньев происходит в разных направлениях, то

$$\delta = u(\varphi_1 + \varphi_2) = u(tng\varphi_1 + tng\varphi_2).$$

Графически масштаб определяется отрезком между основными прямыми линии влияния на вертикали под стойкой.

§ 36. Влияние очертания фермы на величину усилий в поясах ферм.

Усилия в поясных стержнях ферм аналитически определяются выражением, общий вид которого (выр. 53)

$$U = -O = M : h,$$

где M — изгибающий момент внешней нагрузки относительно соответствующего узла, независящий от контура фермы, h — плечо поясного стержня относительно точки моментов, зависящее от контура фермы.

Для выяснения влияния очертания фермы на величину поясных усилий сопоставим между собой фермы с различным очертанием, но одного пролета и с одинаковой нагрузкой; последнюю примем равномерно распределенной интенсивностью p клгр/пог. метр.

Изгибающий момент от этого вида нагрузки будет определяться выражением:

$$M = \frac{1}{2}px(l - x).$$

Заменяя в этом выражении величины x и l соответствующими им величинами, выраженными в функции длины d панели: $x = nd$ и $l = md$ будем иметь:

$$M = \frac{1}{2} pd^2 n (m - n).$$

Для удобства сравнения примем нижний пояс горизонтальным (черт. 134); верхнему же поясу будем давать различные контуры, пределы изменения которых ограничим пока горизонтальным очертанием bd — ферма с параллельными поясами и треугольным очертанием ab — стропильная ферма, причем высоту фермы Н посредине и систему решетки сохраним одинаковыми для всех ферм.

Из условия равновесия по разрезу $s - s$ следует, что усилие нижнего пояса U_2 — равно проэкции усилия верхнего пояса O_3,

$$U_2 = - O_3 \, Cosn \, \beta,$$

что позволяет обобщить выводы для обоих поясов, в смысле же простоты удобнее сопоставлять изменение усилий в нижнем поясе.

Ферма с параллельными поясами (черт. 124). Высота фермы постоянна, а потому в отдельных стержнях пояса усилия будут изменяться пропорционально изменению момента.

$$U_n = \frac{1}{2} \frac{pd^2}{\text{H}} n (m - n).$$

Линии влияния все будут иметь вид треугольников с основанием $l = md$ и наибольшей ординатой $y = \dfrac{n(m-n)}{H \cdot m} d$; нетрудно видеть, что эти ординаты являются ординатами параболы пропорциональной ординатам параболы эпюры моментов, убывающими от середины пролета к опорам.

Об'ем V усилий, которым мы назовем сумму усилий всех стержней нижнего пояса, помножая их на длину соответствующих стержней, выразится для фермы с параллельными поясами так:

Если m — число панелей и ферма симметрична, то

$$V = 2 \times \Sigma_1^{\frac{1}{2}m} \frac{pd^2}{2H} n (m - n) \cdot d = \frac{pd^3}{H} \left\{ \Sigma_1^{\frac{1}{2}m} nm - \Sigma_1^{\frac{1}{2}m} n^2 \right\}$$

где n — переменное число панелей до точки моментов, изменяющееся от 1 до $\frac{1}{2} m$.

В соответствии с этим значения сумм будут:

$$\Sigma_1^{\frac{1}{2}m} nm = m \left(1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{1}{2} m\right) = m \frac{m}{4} \left(\frac{m}{2} + 1\right)$$

$$\Sigma_1^{\frac{1}{2}m} n^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \frac{m^2}{4}\right) = \frac{1}{6} \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} + 1\right)(m+1),$$

подставляя эти значения в выражение об'ема усилий получим:

$$V = \frac{pd^3}{8H} \left\{ \frac{2}{3} m^3 + m^2 - \frac{2}{3} m \right\} = \frac{pd^3}{8H} m \left\{ \frac{2}{3} m^2 + m - \frac{2}{3} \right\}.$$

Треугольная ферма. Высота фермы переменна и изменяется по прямой (черт. 126), любая ордината h_n которой

$$h_n = H\,\frac{2nd}{md} = H\,\frac{2n}{m}$$

где nd—расстояние до точки моментов.

Общий вид выражения усилий в стержнях нижняго пояса напишется так:

$$U_n = \frac{1}{2}\,\frac{pd^2}{H}\,\frac{m}{2n}\,n\,(m-n) = \frac{pd^2}{4H}\,m\,(m-n).$$

Так как основание всех линий влияния одно и то же и равно $l = md$, то наибольшие ординаты их будут определяться выражением $y = \frac{m-n}{2H}\,d$, представляющим собой отдельные ординаты прямой линии, положение которой определяется при $n = 0$ ординатой $y_a = \frac{md}{2H}$ под левой опорой и при $n = m$ нулем на другой опоре; из чего следует, что высоты наибольших ординат возрастают от средины к опорам, в соответствие с чем усилия возрастают от средины фермы к опорам.

Об'ем усилий для стержней нижнего пояса выразится так:

$$V = 2\,\frac{pd^2}{4H}\,m\,\Sigma_1^{\frac{1}{2}m}\,(m-n)\,d = \frac{pd^3}{2H}\,m\,\Sigma_1^{\frac{1}{2}m}\,(m-n).$$

При переменном n, изменяющемся в пределах от 1 до $\frac{m}{2}$, величина суммы будет:

$$\Sigma_1^{\frac{1}{2}m}\,(m-n) = \frac{1}{2}\,m\cdot m-(1+2\;.\;.+\frac{1}{2}m) = \frac{1}{2}\,m^2 - \frac{m}{4}\left(\frac{m}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\,m(3m-2).$$

Подставляя это значение суммы в выражение об'ема усилий получим:

$$V_2 = \frac{pd^3}{2H}\cdot m\cdot\frac{3}{8}\,m\,(m-2) = \frac{pd^3}{8H}\,m^2\left(\frac{3}{2}\,m-1\right).$$

Из рассмотрения этих 2-х ферм видно, что в ферме с параллельными поясами усилия возрастают к середине, в ферме с треугольным очертанием они возрастают к опорам, из чего можно заключить, что между этими 2-мя крайними очертаниями есть среднее очертание, в котором усилия постоянны по длине фермы; действительно, этому условию удовлетворяет очертание параболической фермы.

Параболическая ферма (черт. 125). При условии постоянства усилия в поясах фермы, выражение усилия от равномерной нагрузки

$$U = -0\,Cosn\,\beta = \frac{M}{h} = \frac{p\,n\,(m-n)\,d^2}{2h}$$

должно равняться постоянной величине, что возможно только при условии, что высота фермы h будет изменяться в том же соотношении, как и величина момента $M = \frac{p}{2}\,n\,(m-n)\,d^2$, т.-е. по параболе. Ординаты параболы высотою H, отнесенной к началу координат на опорах, определяются уравнением:

$$h_n = \frac{4H}{m^2} n (m - n);$$

в этом случае выражение усилия во всех частях поясов, или вернее, проекции их на горизонтальную ось будут иметь одинаковую величину

$$U = -0 \, Cosn \, \beta = \frac{pd^2}{8H} m^2.$$

Так как основание линий влияния для всех стержней одно и тоже $l = md$, то условие равенства усилий возможно только при одинаковой длине наибольших ординат, которая во всех линиях влияния $= \frac{dm}{4H}$.

Об'емная величина усилий нижнего пояса этой фермы определяется выражением

$$V_3 = \frac{pd^2}{8H} m^2 \times md = \frac{pd^3}{8H} m^3.$$

Сопоставление этих трех ферм показывает, что в наиболее неблагоприятных условиях работает ферма треугольного типа, в которой усилия поясов сильно развиты и превышают усилия параболической фермы на величину:

$$dV = V_2 - V_3 = \frac{pd^3}{8H} m^2 \left(\frac{3}{2} m - 1 - m \right) = \frac{pd^2}{8H} m^2 \left(\frac{1}{2} m - 1 \right)$$

т.-е. приблизительно большую на 40%, поэтому применение ферм треугольного очертания следует считать вынужденным условиями сооружения, например в кровлях и т. п.

Фермы с параллельными поясами имеют об'емное количество усилий меньшее, чем фермы параболические.

$$dV = V_3 - V_1 = \frac{Pd^3}{8H} \left\{ m^3 - \frac{2}{3} m^3 - m^2 + \frac{2}{3} m \right\} =$$

$$= \frac{pd^3}{8H} m \left(\frac{1}{3} m^2 - m + \frac{2}{3} \right)$$

т.-е. меньше, приблизительно, на величину 20—25%, но за то параболические фермы имеют большие конструктивные достоинства в смысле лучшего использования материала и незначительности усилий в решетке (см. § 38).

На основании изложенного можно сказать, что *все очертания ферм, заключающиеся между очертанием фермы с параллельными поясами и параболической фермой, рациональны, фермы же с очертанием ниже параболического нерациональны и допустимы в исключительных условиях, обусловливаемых характером сооружения.*

Что касается ферм с очертаниями выше ферм с параллельными поясами, т.-е. с вогнутыми поясами (черт. 133), то такая форма может быть рациональна только в тех случаях, где момент возрастает к опорам (фермы неразрезные, консольные и т. д.).

37. Зависимость знака усилия решетки от направления раскосов. Из обычного определения усилий решетки непосредственно следует, что при одной и той же нагрузке, но при изменении направления раскоса по разным диагоналям в одной и той же панели, знак и в усилиях решетки изменяется.

Действительно, если в панели какой-либо фермы (черт. 135) направление раскоса D было от узла 4 к узлу 6 и усилие в этом раскосе определялось уравнением:

$$D = -B\frac{b}{r},$$

то с изменением направления раскоса по диагонали 3—5 усилие раскоса D будет определяться уравнением:

$$D^1 = +B\frac{b}{r^1}.$$

Это свойство изменения знака в решетке в зависимости от изменения ее направления остается справедливым для всякого рода решеток.

В фермах со стойками, в которых расположение нагрузки в верхних или в нижних узлах не влияет на величину усилия в раскосах, проекции на горизонтальную ось усилий раскосов, направленных по разным диагоналям, при одной и той же вертикальной нагрузке равны между собой, но противоположны по знаку.

Действительно, если направление внешних сил вертикально, то (черт. 136) из условия равновесия относительно горизонтальной оси по сечению $s-s$, усилие раскоса может быть выражено так:

$$D_n \, Cosn\,\varphi + U_n \, Cosn\,\alpha - O_n \, Cosn\,\beta = O.$$

Подставляя в это уравнение величины усилий U_n и O_n, выраженные в функции моментов, и делая приведение, будем иметь:

$$D_n \, Cosn\,\varphi = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1} Cosn\,\beta} \cdot Cons\,\beta - \frac{M_n}{h_n Cosn\,\alpha} \cdot Cosn\,\alpha =$$

$$= \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

в котором h_n и h_{n+1} — высоты фермы в соответствующих узлах.

Если представить себе, что в той же панели при этой же нагрузке, раскос будет направлен по другой диагонали (черт. 136), то из того же условия равновесия по тому же сечению $s-s$ будем иметь выражение усилия раскоса D'_n в таком виде:

$$D'_n \, Cosn\,\varphi' + U_n \, Cosn\,\alpha - O_n \, Cosn\,\beta = 0.$$

По подстановке в него выражений усилий O_n и U_n в функции моментов, будем иметь:

$$D'_n \, Cosn\,\varphi' = \frac{M_n}{h_n Cons\,\beta} \cdot Cosn\,\beta - \frac{M_{n+1}}{h_{n+1} Cosn\,\alpha} \cdot Cosn\,\alpha =$$

$$= \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92).$$

Из сопоставления полученных выражений (91) и (92) непосредственно следует, что

$$D_n \, Cos n \varphi = - D'_n \, Cos n \varphi_1 = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (93)$$

т.-е. что проекции усилий раскосов равны между собой, но противоположны по знаку.

Выведенная зависимость знака усилия раскоса еще не устанавливает какому направлению раскоса соответствует сжимающее усилие и какому— растягивающее, так как в этом выражении величина усилия раскосов зависит, с одной стороны—от величины моментов, с другой—от высоты стоек т.-е. контура фермы.

§ 38. Влияние контура фермы на величину и знак усилия решетки. Для выяснения зависимости величины и знака усилия в раскосах от контура фермы рассмотрим последовательно изменение усилия в раскосе одной и той же панели, ряда ферм одинакового пролета, при одной и той же нагрузке, при условии, что в панели сохраняется высота одной стойки, например, h_n, так что длина и положение раскоса D_{n+1}, проходящего в этой панели, остается неизменными (черт. 137), но в соответствии с изменением контура изменяется высота другой стойки h_{n+1}.

Будем рассматривать изменение величины и знака усилия раскоса в предположении изменения наклона верхнего пояса из горизонтального положения 0—1 фермы с параллельными поясами в положение 0—3, соответствующее фермам стропильного типа.

Для производства исследования воспользуемся выражением (93) усилия раскоса:

$$D \, Cos n \varphi = \pm \left(\frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n} \right)$$

и выражением его по площади линии влияния:

$$D = \pm (\omega_1 - \omega_2) \, p$$

в котором $+\omega_1$ и $-\omega_2$ соответственно площади положительной и отрицательной части линии влияния; p—нагрузка на погон. метр. фермы.

В фермах с параллельными поясами, в которых высота постоянна $h_n = h_{n-1} = h$ выражение усилия раскоса напишется в таком виде:

$$D \, Cos n \varphi = \frac{1}{h} (M_{n+1} - M_n).$$

Из этого выражения непосредственно следует, что до тех пор, пока $M_{n+1} > M_n$ усилие раскоса, при принятом его направлении, нисходящем к месту наибольшего момента, будет положительным, при обратном направлении раскоса, усилие будет отрицательно, так как, согласно выражения (93) $D_n \, Cos n \varphi = - D'_n \, Cos n \varphi'$.

Итак в фермах с параллельными поясами усилие раскосов, восходящих к месту наибольшего момента, отрицательно, усилие же раскосов нисходящих, положительно.

С изменением угла наклона β верхнего пояса из горизонтального положения 0—1 по направлению к положению 0—3, точка k - пересечения поясных стержней приближается из бесконечности к опорной точке A.

Совпадение точки k с точкой A имеет место в нашем предельном случае направления пояса $0-3$, что соответствует **ф е р м а м с т р о п и л ь н о г о т и п а.**

В рассматриваемой ферме стропильного типа отношение высот стоек фермы пропорционально их расстоянию от опоры:

$$h_n : h_{n+1} = x : (x + d).$$

Вводя это соотношение в выражение (93) усилия раскоса и принимая нагружение фермы сплошной, равномерно распределенной нагрузкой p—клгр/пог. метр, получим усилия раскоса в таком виде:

$$D \,.\, Cosn\, \varphi = \frac{p}{2h_n}\left[\frac{(x+d)\,(l-x-d)}{x+d}\, x - x\,(l-x)\right] = -\frac{pd}{2h_n}\, x$$

из которого видно, что в отличие от ферм с параллельными поясами, в которых усилия раскосов увеличиваются к опорам (см. прим. 17), в фермах стропильного типа усилия раскосов увеличиваются с увеличением расстояния x, т.-е. к средине ферм.

Вместе с тем, несмотря на то, что место наибольшего момента не изменилось, наклон раскоса не изменился, усилие раскоса стало отрицательным, что является результатом изменения формы очертания фермы. Итак, **в ф е р м а х с т р о п и л ь н о й ф о р м ы у с и л и е р а с к о с о в, н и с х о д я щ и х к м е с т у н а и б о л ь ш е г о м о м е н т а, о т р и ц а т е л ь н о, в о с х о д я щ и х у ж е—п о л о ж и т е л ь н о.**

Из изложенного вытекает, что одно только изменение очертания верхнего пояса, с переходом очертания от фермы с параллельными поясами к ферме стропильного типа, без изменения нагрузки и наклона раскоса, вызвало изменение знака раскоса, и положительная часть ω_2 площади линии влияния раскоса, бывшая в ферме с параллельными поясами больше отрицательной ($\omega_2 > \omega_1$), в стропильной ферме стала равна нулю ($\omega_2 = 0$). Отсюда можно заключить, что между этими двумя предельными очертаниями есть такое очертание фермы, когда площади обоих частей линии влияния равны между собой т.-е. $\omega_2 = \omega_1$, чему соответствует усилие раскоса $D = (\omega_2 - \omega_1)\, p = 0$.

Соответственно этому усилие раскоса, определяемое по выражению (93):

$$D\, Cosn\, \varphi = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} - \frac{M_n}{h_n}$$

должно быть равно нулю, что возможно только при условии, что высоты стоек h_{n+1} и h_n изменяются пропорционально моментам M_{n+1} и M_n. Этому условию удовлетворяет **к о н т у р п а р а б о л и ч е с к о й ф е р м ы** (см. пример 18), в которой проекции усилий поясных стержней, при сплошном равномерном загружении фермы, равны между собой.

Линия влияния усилия раскосов параболической фермы (черт. 125) состоит из 2-х треугольников, площади которых ω_2 и ω_1 равны между собой, что непосредственно вытекает из условия что $D = (\omega_2 - \omega_1)\, p = 0$.

Но каждая из этих площадей в отдельности не равна нулю и, при загружении их сплошной подвижной нагрузкой q *клг.* на пог. метр, в раскосах будут иметь место знакопеременные усилия. Величины этих усилий, как это показано в примере 18, будут одинаковы для всех раскосов фермы и равны:

$$\omega_1\, q = \omega_2\, q = \frac{q\, l^2}{8H}\, \frac{d}{l+d}\ .$$

Таким образом контур параболической фермы является границей: во всех фермах, контур которых выше параболического, положительная часть линии влияния нисходящих раскосов больше отрицательной, и эта разница возрастает с приближением к фермам с параллельными поясами; во всех фермах, контур которых ниже параболического, отрицательная часть линии влияния превышает положительную, это превышение увеличивается с приближением к контуру стропильных ферм, когда линия влияния раскосов становится однозначной (для нисходящих раскосов отрицательна).

При дальнейшем увеличении угла наклона верхнего пояса, т.-е. круче стропильных ферм, точка k схода поясов попадает в междуопорную часть фермы (черт. 137—направление пояса 0—4); в соответствие с чем усилие раскоса должно быть однозначным при любом расположении нагрузки на пролете подобно тому, как это имеет место для усилий в поясах.

Линия влияния для этого случая строится обычным приемом (черт. 138). Усилие раскоса как при положении груза = 1 в правой части:

$$D = -A\frac{a}{r}$$

так и при положении его в левой части.

$$D = -B\frac{(l-a)}{r}$$

остается отрицательным.

Положение „правой" и „левой" прямых линии влияния определяются однозначными отрезками — $(a:r)$ и — $(l-a):r$ на соответствующих опорах, точка пересечения их лежит под точкой схода поясов; обе прямые распространены до узлов рассеченной панели, в пределах которой линия влияния изменяется по прямой. Полученная линия влияния свидетельствует о том, что усилие раскоса остается отрицательным и продолжает возрастать.

При изменении угла наклона верхнего пояса не в левую сторону, как это рассматривалось до сих пор, а в правую от горизонтального положения, точка схода поясов резко изменит свое положение относительно фермы, *перейдя на правую сторону. Происходящий при этом процесс изменения* знака и величины усилия раскоса будет аналогичен рассмотренному выше. С приближением точки k пересечения поясов из бесконечности к правой опоре будет возрастать положительная часть линии влияния раскоса, при проходе ее через правую опорную точку B, отрицательная часть линии влияния будет равна нулю и останется только положительная, которая будет возрастать по мере увеличения наклона пояса и движения точки k в междуопорной части (черт. 133).

Резюмируя изложенное, можно сделать следующие выводы:

1) при любом контуре ферм, изменяя направление раскоса, можно получить усилие раскоса с преобладающим знаком (+);

2) в фермах с вогнутым контуром ниже треугольного очертания (стропильного) усилие решетки однозначно и величина его больше чем при контурах, лежащих выше стропильного;

3) в фермах параболических и близких к ним с раскосной решеткой во всех панелях усилие раскосов от действия подвижной нагрузки знакопеременно и, так как усилие от постоянной нагрузки равно нулю и не может поглотить собой усилие противоположного знака от временной нагрузки, то знакопеременность расчетного усилия в этих фермах имеет место во всех панелях;

4) в фермах с параллельными поясами и близких к ним усилие в раскосах знакопеременно от действия подвижной нагрузки, но, так как для этих ферм одна часть линии влияния превалирует над другой, особенно в панелях близких к опорам, то в этих панелях однозначное усилие от постоянной нагрузки может поглотить усилие от временной нагрузки противоположного знака, что в действительности имеет место в панелях, близких к опорам.

Установленная выше возможность изменения усилия раскоса и получения в нем превалирующего усилия определенного знака путем изменения контура ферм, позволяет высказать мысль о возможности построения такого контура ферм, в котором усилие раскоса всегда было бы однозначно не зависимо от положения нагрузки. Это возможно при условии, что усилие от постоянной нагрузки поглотит собой усилие от временной нагрузки противоположного знака. Фермы, удовлетворяющие этому условию, носят название ферм Шведлера, по имени автора впервые их начертившего.

При действии на ферму постоянной p и подвижной нагрузки q, усилие в раскосах по общему виду линии влияния будет выражаться в таком виде:

$$D = +(\omega_1 - \omega_2)\,p + q\omega_1$$

$$D = +(\omega_1 - \omega_2)\,p - q\omega_2.$$

Ферма Шведлера должна удовлетворять условию, чтобы минимальное суммарное усилие не было меньше нуля, а это обусловливает, чтобы:

$$(\omega_1 - \omega_2)\,p - q\omega_2 = 0$$

или

$$\omega_1 p \geq \omega_2\,(p + q).$$

Выразив в этом уравнении площади ω_1 и ω_2 в функции искомых длин стоек получим уравнение, определяющее длину стоек в функции нагрузок.

Решение этой задачи приведено в ряде курсов[1]), мы приводить его здесь не будем, так как в настоящее время, в связи с развитием жестких форм сжимаемых стержней, вопрос о придании раскосам растягивающего усилия потерял остроту. Нас интересует только характер изменения контура фермы, как резюмирующий положения высказанные в настоящем параграфе.

На черт. 139 показан теоретический контур фермы Шведлера. Контур ее верхнего пояса лежит выше параболического очертания; наибольшая высота не совпадает с серединой, а лежит несколько сбоку, после чего очертание спадает к середине, что и надо было ожидать, так как этим точка схода поясов перебрасывается в правую сторону и положительная часть линии влияния получает превалирующее развитие.

Ради эстетических требований контур этих ферм в средней части спрямляется.

Насколько изменение контура может повлиять на величину усилий, можно видеть по следующему примеру.

Пример 23. На черт. 140 показана часть схемы покрытия, общий вид которого показан на черт. 153. При действии ветра с правой стороны эта часть покрытия находится под действием силы W, направленной по линии шарниров I и II.

---

[1]) Патон. Мосты т. I § 67 изд. 1910 г. Проскуряков „Строит. механика“ ч. II и др.

Первоначально схема этой фермы была запроектирована, как показано сплошными линиями; усилия в ее частях были определены при помощи плана Кремона (черт. 140-a), из которого выяснилось, что величина усилий в некоторых стержнях настолько велика, что затруднительно оправдать их конструкцией.

С целью уменьшения этих усилий было сделано изменение контура фермы, как показано на том же чертеже пунктирными линиями. Построенная для этого контура диаграмма усилий (черт. 140-b) наглядно показала значительное снижение усилий во всех стержнях фермы, достигающее в поясных стержнях 40%, а в стержнях решетки 100%.

Такое снижение усилий об'ясняется исключительно изменением очертания внутреннего пояса из вогнутого в прямой, приближающий очертание к треугольному, но несколько выше его.

ОБРАЗОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ.

§ 39. Условия внутреннего образования систем. Фермы являются простейшими сочлененными системами, состоящими из прямых стержней, связанных по концам шарнирами. В общем виде, в порядке своего внутреннего образования, сочлененные системы могут быть образованы не только из математически прямых стержней, но и вообще из плоских «дисков», которые сами по себе могут быть прямыми и кривыми брусьями, балками, фермами и т. д. Эти диски в общей системе могут быть соединены с другими дисками или в двух точках (шарнирах), как это имеет место в простых фермах, или в нескольких точках, в последнем случае, в отношении этих промежуточных точек, диски являются неразрезными или жесткими.

На черт. 141 показана шпренгельная система, состоящая из фермы AB и 5 стержней AE, EC, EF, FD и FB. По отношению ко всей системе ферма AB является неразрезной или жесткой с промежуточными шарнирно-узловыми соединениями C и D; шарниры $A\,B$, E и D служат для образования шарнирного соединения стержней и диска—фермы.

На черт. 142 показана аналогичная шпренгельная система, в которой ферма AB заменена балкой AB с промежуточными шарнирно-узловыми соединениями C и D.

Таким образом, в образовании сочлененных систем следует различать два вида шарниров: полные шарниры, которые подобно шарнирам в фермах определяют положение дисков и неполные шарниры, которые служат для присоединения к определенному неизменяемому диску новых стержней или дисков и обусловливают работу их исключительно на продольное усилие.

С теоретической точки зрения разница между этими двумя видами шарниров та, что, при условии упругого равновесия, в неполных шарнирах имеет место момент в неразрезном диске, проходящем через этот узел, вследствие жесткости этого диска, что не имеет места в действительно полных шарнирах.

В отношении статической определимости сочлененные системы в своем образовании связаны тем же условием, как и ферма, а именно: число — S дисков и стержней в системе должно быть равно удвоенному числу полных шарниров — K без трех (§ 26):

$$S = 2K - 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (94)$$

Так, например, в системе, показанной на черт. 143, число стержней и дисков $S = 5$ числу полных шарниров, обозначенных римскими цифрами, $K = 4$, а потому $S = 2.4 - 3 = 5$, т.-е. система статически определима.

Системы, показанные на черт. 141 и 142, включающие в себе 1 диск и 5 стержней при четырех шарнирах A, E, F и B, статически неопределимы, так как:

$$S = 6 > 2.4 - 3 = 5$$

т.-е. содержат в себе лишние стержни.

Система, показанная на черт. 144, включает в себе 5 полных шарниров и 6 дисков и стержней, а потому:

$$S = 6 < 2.5 - 3 = 7,$$

следовательно, система не имеет достаточного числа связей, а потому *изменяема*.

Теория сооружений рассматривает системы только неизменяемые, т.-е. удовлетворяющие условия $S \geqq 2K - 3$, которые могут быть статически определимы и статически неопределимы.

Однако условие (94), характеризующее зависимость между числом дисков и полных шарниров, не определяет собой неизменяемости системы, так как можно так скомбинировать расположение дисков, стержней и шарниров, что условие (94) будет соблюдено, но система будет изменяема (черт. 90). Условие неизменяемости системы выясняется в процессе ее образования.

Простейшее образование неизменяемой системы имеет место если два диска 1 и 2 (черт. 145а) соединены между собой шарниром II и стержнем — 3, что равноценно условию присоединения к жесткой системе — *одного шарнира (III) двумя стержнями 2 и 3*.

Неизменяемость в соединении двух дисков, без нарушения статической определимости, может быть получена также соединением их тремя стержнями (черт. 145-в и с), не пересекающимися в одной точке.

Последующее развитие более сложных систем делается путем присоединения к основной неизменяемой системе, новых дисков, узлов или систем одним из способов указанных на чертеже 145. Все рассмотренные нами раньше фермы представляют собой примеры образования простых, неизменяемых систем.

На черт. 143 показана система, в которой к ферме I—II помощью фермы 2 и стержней 4 и 5 присоединен диск 3. На черт. 142 показана неизменяемая система, состоящая из балки AB, к которой двумя стержнями присоединены узлы E и F и добавлен еще стержень 6 и т. д.

Преобразованные системы. В порядке образования сложных статически определимых систем возможна замена одних стержней другими, без увеличения числа шарниров. При такой замене условие зависимости (94) между числом шарниров K и числом дисков и стержней — S не нарушается.

Однако, эта замена одних стержней другими не может быть произвольна, так как этим легко может быть нарушена неизменяемость системы.

На черт. 146-а показана неизменяемая система, образованная семью полными шарнирами и 11-ью дисками; на черт. 146-в показано последовательное образование ее. Два диска A и B неизменно соединены между собой шарниром I и стержнем ab, к дискам A и B последовательно присоединены шарнир III стержнем 2 и 11, далее шарнир IV стержнями 3 и 10 и т д., так что образуется неизменяемая система I, II, IV, a, b V, VI, VII, в которой удовлетворена зависимость (94):

$$S = 2.7 - 3 = 11$$

В этой системе без нарушения ее неизменяемости стержень ab может быть заменен стержнем IV—V, так как в этом случае (Черт. 146 а) левая I, II, IV, I и правая I, V, VII I части, представляющие собой каждая неизменяемую систему, соединены между собой неизменяемо шарниром I и стержнем IV —V. Аналогичная замена может быть сделана например стержнями IV—VII, C—VI и др.

Но если стержень ab будет заменен, например, стержнем V—f (черт. 146-в), то хотя зависимость $S = 2K - 3$ будет соблюдена, но система потеряет неизменяемость, так как левая и правая части ее будут иметь возможность вращения вокруг шарнира.

В рассмотренном примере положение заменяющих стержней более или менее очевидно из порядка образования неизменяемой системы, но часто случается, что в сложных системах не ясно выражается положение заменяющего стержня. В таких случаях положение заменяющего стержня может быть выяснено путем последовательного разложения системы с приведением ее к исходной неизменяемой системе. Этот прием основан на общем законе построения неизменяемых систем, — путем присоединения к неизменяемой исходной системе нового шарнира двумя стержнями или дисками. Следовательно, если в заданной сложной системе устранить «заменяемый» стержень и потом последовательно отделять шарниры с двумя стержнями, то мы постепенно придем к упрощенной системе, изменяемость которой будет вполне очевидна; эта изменяемость в системе должна быть устранена новым «заменяющим» стержнем.

На черт. 147 показана система, состоящая из 8 шарниров и 13 стержней, а потому удовлетворяющая условию (94) $S = 2 \cdot 8 - 3 = 13$. Требуется найти положение стержня, заменяющего стержень 5 между шарнирами VI и VIII.

Устраняем заменяемый стержень 5 (VI—VIII) и затем последовательно отделяем от системы шарнир VIII со стержнями 4 и II, шарнир VII со стержнями 3 и 13, шарнир VI со стержнями 12 и 6; после этого выделения остается система с шарнирами I, II, III, IV и V (черт. 155-в), в которой шарнир V прикреплен к неизменяемой системе I — II — IV — III только одним стержнем 10; следовательно для обеспечения неизменяемости системы искомый заменяющий стержень должен иметь одно из трех положений: III — V или II — V, или IV — V.

На черт. 148-а показана простая система, которая путем замены стержня III — VII стержнем III — VI и стержня VII — IV стержнем I — IV может быть приведена к системе, показанной на черт. 148-в.

Из изложенного ясно, что, каков бы ни был путь образования или преобразования системы, условие $S=2K-3$ **необходимо для всякой статически определимой неизменяемой системы, но оно недостаточно для характеристики неизменяемости, которая должна быть проверена особо**, о чем см. ниже §§ 41—43.

§ 40. Условия закрепления системы к земле. *В предыдущем параграфе* мы рассмотрели образование свободных систем, находящихся в равновесии под действием активных и реактивных сил, к ним приложенных. Но всякие системы, представляющие собой теоретическую схему сооружения, должны быть неизменно закреплены к земле.

Если принять землю (E) за неограниченный плоский диск, то присоединение к ней всякой неизменяемой системы должно быть сделано не менее как тремя стержнями *или связями по одному из способов, показанных* на черт. 145.

В системах свободных, не прикрепленных к земле, мы имели зависимость между числом шарниров S и числом K стержней или дисков, выраженную условием (94) $S = 2K - 3$.

С прикреплением системы к земле в нее вводятся три новых условия закрепления или три стержня без добавления шарниров, а потому **полное число стержней или дисков** — S' *в закрепленной к земле* **статически-определимой и неизменяемой системе** будет *определяться условием:*

$$S' = S + 3 = 2K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95).$$

где K—число полных шарниров в системе [1]),

Выведенное условие $S' = 2K$, определяющее неизменяемость свободной системы, должно удовлетворять также условию неизменяемого прикрепления к земле и тех систем, которые по внутреннему своему образованию изменяемы, т.-е. в которых имеет место $S < 2K - 3$. Условие неизменяемости прикрепления таких систем требует, чтобы число опорных закреплений в *них было увеличено на число связей, недостающих для внутренней* неизменяемости системы.

На черт. 149 показана система a, b, e, f, a, изменяемая по внутреннему своему образованию, так как число стержней в ней $S = 10 < 2 . 7 - 3 = 11$.

Неизменяемое прикрепление ее к земле может быть достигнуто включением в число опорных закреплений недостающей ей связи; в данном случае прикрепление системы должно быть сделано не тремя связями, а четырьмя, *как показано на черт. 149*.

Добавляемое таким путем условие закрепления является по отношению к недостающему для внутренней неизменяемости стержню заменяющим стержнем, а потому включение его в систему должно быть сделано так, чтобы обеспечивалась неизменяемость всей системы. Например, включением в число опорных закреплений системы, показанной на черт. 149 стержня mc вместо стержня md не сделает систему неизменяемой, так как часть ее mfe *будет соединена с остальной частью только двумя стержнями,* что недостаточно.

Определение заменяющего опорного стержня, приводящего изменяемую систему к неизменяемой путем лишних закреплений к земле, может быть сделано одним из приемов анализа образования неизменяемых соединений и преобразований, изложенных в предыдущем параграфе.

Пример 24. Показанная на черт. 150 система, состоящая из двух дисков-ферм 1 и 17, соединенных между собой шарниром и стержнем 16, *образуют неизменяемую систему, к которой в порядке последовательного* образования присоединены узлы II, III . . . . . VIII, так что вся система не-

[1]) В сущности говоря, если принять землю за диск, определяемый двумя шарнирами, то ее можно будет рассматривать как одно целое с системой и условие (94) будет *иметь распространение и на этот случай*; действительно, $S' + 1 = S + 3 + 1 = 2(K+2) - 3 = 2K'_1 - 3$. где в K_1 входят полные шарниры, принадлежащие к земле.

изменяема и, как таковая, присоединена к земле тремя связями 18, 19 и 20, чем удовлетворяется условие $S' = 20 = 2 \,.\, 10$.

С устранением в этой системе стержней 2 и 16 она превращается в изменяемую по своему внутреннему образованию и может быть приведена к неизменяемому состоянию укреплением ее к земле двумя добавочными связями.

При устранении только одного стержня 16 *система получает три* шарнира на одной прямой (I, X и XI), для устранения вертикальной подвижности шарнира X надо использовать укрепление его к шарниру V и сделать последний неподвижным, что достигается, с одной стороны, наличием стержня I и введением нового стержня, укрепляющего узел VIII к земле (стержень VIII-e на черт. 150). Вместо этого стержня VIII-e мог бы быть поставлен любой стержень, связывающий один из шарниров V, VI, VII,X с точкой e.

При устранении второго стержня 2, нарушается неизменяемость в образовании системы, которая имелась в присоединении шарнира II к шарниру I и диску 1; эта неизменяемость может быть восстановлена, если шарнир II будет прикреплен неизменяемо к диску 1 и к земле E в точке d, как показано на черт. 150-в, представляющем собою статически определимую неизменяемую цепную систему с фермами жесткости.

Промежуточные шарниры. Мы показали, что введение в изменяемую по своему внутреннему образованию систему дополнительных опорных закреплений делает ее неизменяемой при сохранении статической определимости. Покажем теперь, что системы статически неопределимые относительно опорных закреплений могут быть приведены к виду статически определимых, путем исключения в самой системе соответствующего числа связевых условий. Самая постановка такой обратной задачи понятна, но она должна быть проведена так, чтобы было ясно, сколько и каких связевых условий надо и можно исключить, чтобы не нарушалась неизменяемость системы.

Напомним, что если система представляет собой балку сплошного сечения, то введение в каком-либо сечении шарнира дает уменьшение на одно связевое условие (см. § 7). То же будет иметь место и в фермах, если, например, в ней устранить один из поясных стержней. Включением таких шарниров как балка, так и ферма расчленяются на два диска.

С теоретической точки зрения включение каждого такого полного шарнира дает условие, что в системе, находящейся в равновесии под действием внешних сил, как активных, так и реактивных, момент внешних сил, слева или справа от дополнительного шарнира лежащих, равен нулю, что равносильно тому, что равнодействующая этих сил проходит через шарнир. Если это условие не будет удовлетворено, то будет иметь место вращение одного диска относительно другого.

Число шарниров T, которое надо включить в систему, статически неопределимую относительно опорных закреплений, чтобы привести ее к виду статически определимой, зависит от числа и характера опорных закреплений и может быть рассчитано по формуле (95). Однако, удобнее бывает делать это, исходя из числа опор подвижных и неподвижных.

Если система имеет n опор, из которых m—неподвижных опор, т.-е. каждая с 2 условиями закреплений и $(n—m)$ подвижных опор, т.-е. каждая с одним условием закрепления, то число добавочных шарниров T, необходимых для включения в систему по числу лишних неизвестных, будет

$$T = 2m + (n - m) - 3 = m + n - 3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (96),$$

где 3—неизвестных определяются из уравнений статики для плоских систем.

Для того, чтобы балочная система была неподвижна в горизонтальном направлении, достаточно иметь одну неподвижную опору ($m = 1$), тогда число добавочных шарниров будет

$$T'_1 = 1 + n - 3 = n - 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97).$$

В арочных конструкциях наличие распора заставляет делать не менее 2-х неподвижных в горизонтальном направлении опор ($m = 2$), тогда число добавочных шарниров

$$T_2 = 2 + n - 3 = n - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98).$$

Включение добавочных шарниров в систему должно делаться с таким расчетом, чтобы не нарушались условия неизменяемости. Пусть, например, имеется балка, лежащая на 6 опорах, которую требуется привести к виду статически определимой системы (черт. 151). Согласно числу опор число добавочных шарниров в балке должно быть $T_1 = 6 - 2 = 4$, которые можно расположить по одной из следующих схем.

По I-й схеме диск А прикреплен неизменяемо к земле тремя стержнями (B, 3 и 4), далее диск D неизменно прикреплен к земле двумя стержнями 5 и 6 и диском C к системе BA; наконец, диск E неизменно прикреплен шарниром g_4 и стержнем 7.

Во 2-й схеме диск A прикреплен неизменяемо к земле стержнями 1, 2 и 3, все последующие диски прикреплены шарниром к предыдущей системе и стержнем к земле.

Могут быть и другие способы включения шарниров.

На черт. 156 показана арочная система из трех пролетов на четырех опорах, из которых две a и b неподвижных, а две I и II подвижных. Система статически неопределима, так как число дисков и опорных связей 7 более удвоенного числа полных шарниров, которых — два: I и II. Число дополнительных шарниров необходимых для приведения системы в статически определимую (см. выраж. 98) равно $T_2 = 4 - 1 = 3$, которые могут быть размещены по одному в каждом пролете. При таком размещении шарниров, средний пролет превращается в трехшарнирную (a, IV, b) консольную арку, которая сама по себе неизменяема, с двумя подвесными фермочками I, III и V, II.

На черт. 157 показана двухпролетная арочная система с двумя крайними неподвижными опорами и одной средней подвижной. Приведение ее к статически определимой системе может быть сделано двумя шарнирами IV и V. При симметричном расположении этих шарниров относительно средней опоры, эта система становится изменяемой, как это будет показано ниже.

Введение в многоопорную, статически определимую систему новых связевых условий в опорные закрепления (например, превращение подвижных опор в неподвижные) требует для сохранения статической определимости системы выключения связевых условий в пределах внутреннего образования системы. Однако, включение новых шарниров сверх уже размещенных в системе из расчета по формулам (97) и (98), часто становится невозможным, из-за нарушения условия неизменяемости системы. В этих случаях приходится переходить к исключению связевых условий в системе путем введения подвижности в шарниры, уже поставленные в систему.

Такое превращение неподвижных ранее шарниров в подвижные вводит новое условие равновесия, чтобы равнодействующая внешних сил, слева или справа от шарнира лежащих, проходящая через шарнир, была нормальна к плоскости движения.

Например, при устройстве в балочной системе, показанной на черт. 151, трех подвижных и трех неподвижных опор, потребуется из'ять из системы $T = 3 + 6 - 3 = 6$ связевых условий, что может быть получено оставлением двух шарниров II и IV неподвижными и превращением двух шарниров III и VI в подвижные. С точки зрения образования системы, это есть включение 6 шарниров, из которых два (IV и VII) расположены не на линии остальных шарниров. Преобразованная система состоит из 16 дисков и стержней при 8 шарнирах, что свидетельствует о том, что она статически определима.

Аналогично, при устройстве в трехпролетной арочной системе (черт. 152) четырех неподвижных опор, потребуется включить в систему $T = 2 . 4 - 3 = 5$ добавочных шарниров, которые могут быть расположены или по схеме b или по схеме c черт. 152. По схеме «b» мы будем иметь среднюю трехшарнирную (a, IV, b) арку с консолями, на которые опираются трехшарнирные же арки I, II, III и V, VI и VII, следовательно система неизменяема. По второй схеме „c" крайние арки I а II и VI в VII будут трехшарнирными с консолями, на которые будет опираться трехшарнирная арочка III, IV, V; следовательно, система будет неизменяема.

Пример 25. На черт. 153 показано покрытие мастерской, в котором все четыре опорные точки сделаны шарнирно неподвижными. При наличии в опорных закреплениях 8 неизвестных, для статической определимости требуется включить $T = 8 - 3 = 5$ дополнительных шарниров, это требование может быть удовлетворено помещением 3 неподвижных шарниров a, b, V и одного подвижного VI — VII (черт. 153). Система будет состоять из 5 дисков, 8 опорных стержней и 1 стержня в подвижном шарнире VI — VII, при семи полных шарнирах, т.-е. она будет статически определима, так как удовлетворяет условию $5 + 8 + 1 = 2 . 7$. Сохранение в ней неизменяемости должно быть проверено особо.

§ 41. Определение неизменяемости геометрическим путем. Изложенный в двух предыдущих параграфах метод образования и преобразования неизменяемых систем при некотором навыке может служить для быстрого установления неизменяемости системы.

Для оценки неизменяемости сложных систем путем геометрического построения целесообразно исходить из простейшей, заведомо неизменяемой, системы и затем, идя путем последовательного развития ее, привести ее к желаемому виду. Естественно в порядке преобразования не должно иметь место:

1. Положение трех шарниров на одной прямой.

2. Пересечение трех прикрепляющих стержней в одной точке.

Пример 26. На черт. 154 показана схема портального крана, неизменяемость системы которого требуется установить.

В этой системе диски I — IV и IV — III соединены между собой шарниром IV и с землей фиктивными шарнирам EA и EB, лежащими в пересечении между собой стержней c и a, d и b, таким образом, эта система, состоящая из двух дисков в своем соединении с землей (E), представляет собой как бы трехшарнирную арку, следовательно она неизменяема.

Если рассмотреть ту же систему, как свободную, устранив закрепление ее к земле, то по внутреннему образованию в соединении дисков A и B она становится изменяемой.

Пример 27. На черт. 155 показана схема консольно-арочного подвесного моста, неизменяемость системы которого надо установить.

Если шарнирная опора III будет неподвижна, то вся система может быть представлена в виде 4-х дисков, из которых A и D представляют собой двухопорные балочные фермы, закрепленные тремя стержнями, а диски B и C — трехшарнирную арку, следовательно в таком виде система неизменяема; присоединяя к ней последовательно двумя стержнями шарниры V, VI . . . . XII мы не нарушим условия неизменяемости. Условие неизменяемости не нарушится, если в неподвижном опорном закреплении дисков C и D связь III — m устранить и заменить закрепление добавлением стержня XIII — n, так как этот последний является заменяющим стержнем.

Пример 28. Классический пример изменяемой системы представляют собой, показанные на черт. 157, две неразрезные трехшарнирные арки с симметричным расположением шарниров; в ней фиктивный шарнир, образуемый пересечением двух прямых, проходящих через шарниры I, IV и III, V, лежит на одной прямой с шарнирами DE и II, что свидетельствует о неустойчивом равновесии. Действительно, сила P, помещающаяся на диске B, должна быть в этом случае разложена на три направления, пересекающиеся в одной точке, что по законам графостатики невозможно.

§ 42. Определение неизменяемости по законам кинематики. Так как схему всякого сооружения, если она не имеет достаточного числа связей, можно рассматривать как подвижной механизм, то вопрос о неизменяемости системы сооружения может быть решаем на основании закона кинематики о возможных движениях плоских фигур[1]), по которому относительное смещение трех дисков возможно только в том случае, если три соответствующие мгновенных полюса лежат на одной прямой.

В силу этого относительное смещение двух дисков A и B (черт. 158) возможно вокруг мгновенного полюса AB, положение которого определяется пересечением двух прямых $BI - AI$ и $BII - AII$. Действительно шарниры BI, AI, IIA и IIB являются полюсами, допускающими смещение стержней I и II относительно дисков B и A, а потому возможное смещение диска A относительно B должно происходить вокруг полюса AB, лежащего на прямой, проходящей через полюса BI и AI и на прямой, проходящей через полюса BII и AII, что возможно только относительно точки пересечения этих двух прямых.

Показанный на черт. 159 девятиугольник представляет собой подвижную систему, так как в нем относительное движение диска I относительно диска II возможно около мгновенного полюса I, II, - движение диска III относительно диска II возможно около мгновенного полюса II, III и, наконец, относительное движение диска I относительно диска III возможно вокруг полюса I, III; все эти три полюса лежат на одной прямой

На основании этих положений можно сказать, что система, показанная на черт. 154, неизменяема, так как относительное смещение дисков E, A и B возможно только вокруг мгновенных полюсов AE, BE и AB (VI), не лежащих на одной прямой, а потому это движение невозможно, следовательно, система неизменяема.

Наоборот, в системе показанной на черт. 157-а, относительное смещение дисков E, B и стержня D возможно относительно мгновенных полюсов ED, DB и BE, лежащих на одной прямой, а потому система подвижная, т.-е. изменяемая.

Из приведенного примера видно, что изменением положения шарниров AB и BC, т.-е. ассиметричным расположением их, можно сделать си-

---

[1]) Доказательства имеются во всех курсах „Кинематики"; рекомендуем курс проф. Е. Николаи, изд. 1922 г., гл. VI.

стему неизменяемой; того же, т.-е. приведения ее в неизменяемое состояние, можно достигнуть изменением направления опорного давления.

Вообще, проводя указанный анализ, можно установить при каком направлении опорного стержня система может стать подвижной.

Например, зададимся вопросом при всяком ли направлении опорного закрепления C, система, показанная на черт. 160, неизменяема. Положение опорного стержня C обусловливает возможность подвижности диска B относительно земли E, но диск B связан с землею через диск A и диски F, D, K. Чтобы имела место относительная подвижность дисков B, A и E необходимо, чтобы полюса их лежали на прямой $AE - AB$, чтобы имела место подвижность дисков B, D и E, необходимо, чтобы полюса их лежали на прямой $DE - BD$ (DE — есть мгновенный полюс смещения D относительно E).

Пересечением указанных двух прямых определяется полюс BE возможного движения B относительно земли E, следовательно, для того, чтобы имела место искомая подвижность, направление опорного стержня — C должно совпадать с прямой, определяемой полюсами BE и BC. При всех других направлениях стержня C система будет неизменяема.

В сложных системах отыскание мгновенных полюсов вращения и сопоставление их взаимного движения, составляет сложную задачу; более простым является определение изменяемости путем построения диаграммы мгновенных скоростей на основании положений, изложенных в § 30.

При определении неизменяемости относительно опорных закреплений, можно, отделив одну из связей системы, построить для оставшейся системы диаграмму скоростей и найти положение, в которое должен сместиться при этом соответствующий узел системы; если это смещение по условиям закрепления возможно, то, следовательно, система изменяема и наоборот.

Пример 28. Установим неизменяемость закрепления системы, показанной на черт. 161. Устраняем опорный стержень в точке A и строим, становящуюся возможной при этом условии, диаграмму скоростей, исходя из неподвижной точки B и задаваясь скоростью $2 - 2'$ точки 2, находим положение точки $3'$, которая определится пересечением прямой $2' - 3'$, параллельной линии $2 - 3$ с направлением опорного стержня C, который допускает только горизонтальную подвижность; положение точки $4'$ определится пересечением прямых $3' - 4' \parallel 3 - 4$ и $2' - 4' \parallel 2 - 4$; далее, положение точки $1'$ определится пересечением прямой $1' - 4' \parallel 1 - 4$ с направлением опорного стержня $1 - B$, допускающим только вращение вокруг неподвижного шарнира: наконец, положение точки $5'$ определится пересечением прямых $4' - 5' \parallel 4 \quad 5$ и $1' - 5' \parallel 1 - 5$.

Так как опорный стержень A допускает только горизонтальное движение, то полученное, наклонное к вертикали направление скорости $5 - 5'$, невозможно по условию закрепления, а потому система неизменяема.

Пример 29. Проверим неизменяемость системы покрытия, показанного на черт. 162 и состоящего из 2-х симметричных частей, соединенных между собой шарниром.

Система имеет 7 шарниров и 14 дисков, следовательно:

$$S' = 14 = 2 \; . \; 7.$$

Для установления неизменяемости, устраняем правую часть и определяем направление возможного при этом смещения точки узла III; исходя из неподвижного положения шарнира I, задаемся скоростью шарнира II в точке II′, отсюда проведением II′—3′ ∥ II—3, определяем положение точки 3′, которая должна лежать на направлении I—3; положение точки IV′ определится пересечением прямой 3′—IV′ ∥ 3—IV с направлением опорного стержня B—IV, далее, положение точки 5′—пересечением прямых IV′—5′ ∥ IV 5 и II′—5′ ∥ II—5 и, наконец, возможное положение точки III′—пересечением прямых 5′—III′ ∥ 5—III и II′—III′ ∥ II—III. Аналогичным построением может быть получено возможное направление смещения III—III′ для той же точки III, при условном устранении левой части. Так как полученные два направления пересекаются между собой в точке III, то следовательно раздельного смещения быть не может, а потому система неизменяема.

При определении внутренней неизменяемости системы, устраняется один из ее стержней и определяется возможное при этом условии положение шарниров, ограничивающих этот стержень, если прямая, проходящая через эти две новых точки не будет параллельна прямой первоначального положения, то система неизменяема.

Например, для установления изменяемости системы, показанной на черт. 163, устраняем стержень III—IV и определяем возможное направление смещений точек III и IV, для чего, приняв среднюю часть VI, VII . . . . . X за неизменяемую и задавшись скоростью в узле I, принимаем точку I′ за исходную и определяем обычным приемом, положение точек II′, III′, V′ и VI′, так как прямая III′—IV′ не паралелльна III—IV, то следовательно, система неизменяема.

Иными словами, если, при построении диаграммы скоростей, не получится фигура подобная фигуре исходной системы, то система неизменяема.

Если получится фигура, подобная первоначальной, то по данным § 30 усилие в устраненном стержне, определяемое выражением (68):

$$X = \Sigma Pp : (z' - z),$$

будет: или бесконечно велико, так как в этом случае $(z' - z) = 0$, что указывает на невозможность установить равновесие в системе, следовательно она изменяема, или она приводится к неопределенному виду если

$$\Sigma Pp = 0 \text{ и } z' - z = 0,$$

а потому
$$X = \frac{0}{0},$$

Это указывает на подвижность системы.

§ 43. Аналитический прием определения неизменяемости. Во всякой системе величина внутренних усилий и усилий в опорных закреплениях определяется из уравнений равновесия, число которых в статически определимой, неизменяемой системе должно соответствовать числу неизвестных внутренних и опорных усилий $S = 2k$. Все эти уравнения, определяющие зависимость между внутренними усилиями, опорными сопротивлениями и внешней нагрузкой, могут быть представлены в форме канонических уравнений по числу неизвестных — S:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1s}x_s = \Sigma P\, Cosn\,(Px) \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2s}x_s = \Sigma P\, Cosn\,(Py) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots\cdots + a_{ss}x_s = M,
\end{array}$$

в которых коэффициенты $a_{11}, a_{12} \ldots \ldots a_{ss}$ представляют численные значения, зависящие исключительно от размеров системы, расположения шарниров и т. д. и могут быть равны нулю, если соответствующее ему неизвестное усилие не входит в уравнение равновесия. Члены правой стороны заключают в себе выражения внешних сил, входящих в условие равновесия, т.-е. или выражение проекции на какую-либо ось или выражение момента относительно какой-либо точки и т. д.

В общем виде определение неизвестных может быть сделано при помощи детерминантов дробями следующего вида:

$$x = \frac{D_k}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (98,)$$

в которых D — детерминант из коэффициентов при неизвестных, не зависящих от внешней нагрузки, а потому одинаковый для всех неизвестных и D_k тот же детерминант, но с заменой столбца из коэффициентов при определяемом неизвестном столбцом из известных членов. В частных случаях оба детерминанта могут обращаться в нули.

Если детерминант $D = 0$, то, следовательно, величины всех неизвестных усилий $x = \infty$, что указывает на невозможность уравновесить систему, а потому *система, в которой детерминант из коэффициентов при неизвестных $D = 0$, изменяема.*

Если кроме детерминанта D обращается в нуль и детерминант числителя $D_k = 0$, то значение неизвестного усилия принимает неопределенный вид $x = \frac{0}{0}$, что показало бы, что некоторые из условий равновесия являются следствием других, а потому *если оба детерминанта D и Dk равны нулю, то равновесие всех частей фермы невозможно.*

Применим это положение для определения неизменяемости системы, показанной на черт. 157 и состоящей из 2-х симметричных арок. Условия опорных закреплений в этой системе определяются: в точке A слагающими X_a и Y_a, в точке B слагающей Y_b и в точке C слагающими X_c и Y_c.

Канонические уравнения для определения этих неизвестных напишутся в таком виде:

$$\Sigma X = 0 \qquad 1\,.\,X_a + 0\,.\,Y_a + 0\,.\,Y_b - 1\,.\,X_c + 0\,.\,Y_c = 0$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad 0\,.\,X_a + 1\,.\,Y_a + 1\,.\,Y_b + 0\,.\,X_c + 1\,.\,Y_c = \Sigma^l_0 P$$

$$\Sigma Mc = 0 \qquad 0\,.\,X_a + 2l\,.\,Y_a + l\,.\,Y_b + 0\,.\,X_c + 0\,.\,Y_c = \Sigma^{2l}_0 P(2l - a).$$

$$\Sigma M_{\rm I} = 0 \quad -f\,.\,X_a + \frac{l}{2}\,.\,Y_a + 0\,.\,Y_b + 0\,.\,X_c + 0\,.\,Y_c = \Sigma_0^{\frac{1}{2}l} P\left(\frac{1}{2} - a\right)$$

$$\Sigma M_{\rm II} = 0 - f\,.\,X_a + \frac{3}{2}l\,.\,Y_a + \frac{l}{2}Y_b + 0\,.\,X_c + 0\,.\,Y_c = \Sigma_0^{\frac{3}{2}l} P\left(\frac{3}{2}l - a\right)$$

Детерминант D из коэффициентов при неизвестных:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2l & l & 0 & 0 \\ -f & \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 \\ -f & \frac{3}{2}l & \frac{l}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -f \left\{ \begin{vmatrix} 2l & . & l \\ \frac{3}{2}l & . & \frac{l}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2l & . & l \\ \frac{1}{2} & . & 0 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= -f \, . \, l^2 \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

как и надо было ожидать, так как в данном случае мы имеем систему изменяемую.

Нетрудно видеть, что в изложенном виде аналитический способ требует составления $2k$ уравнений и больших вычислений, поэтому в таком виде он мало применим.

Более удобным представляется использование уравнения:

$$X = \frac{D_k}{D}$$

в том его свойстве, что если детерминант знаменателя D не равен 0, то величина X будет изменяться в зависимости от внешней нагрузки и будет иметь определенные значения при любой заданной нагрузке. Если нагрузка будет равна нулю, то усилия во всех стержнях будут:

$$X = \frac{0}{D} = 0.$$

Это свойство позволяет сделать заключение, что *если при отсутствии нагрузки на системе усилия во всех стержнях и дисках, ее образующих, равны нулю, то она неизменяема.* Если же в каких-либо стержнях системы усилия не будут явно равны нулю, то система изменяема.

Пусть требуется, например, установить неизменяемость системы, показанной на черт. 164.

Вырезав в ней узел 6, можно показать, что усилие в стержне 7—6 равно нулю, далее, вырезав узел 7, можно показать, что усилия в стержнях 2—7 и 7—4 равны нулю и т. д.

Пример 30. Пусть требуется установить неизменяемость системы, показанной на черт. 165.

Проводя разрез $a-a$ из уравнения проекции на вертикальную ось получим, что усилие диагонали $D_{56}=0$, так как остальные пересеченные стержни проектируются в нуль; из разреза по $b-b$ можем написать уравнение равновесия проекций на вертикальную ось, по которому $x_{71} + x_{15} + x_{63} + x_{3,7} = 0$; это уравнение удовлетворяется рядом любых значений усилий, что делает расчет неопределенным, а потому система изменяема.

Пример 31. Установить неизменяемость системы, показанной на черт. 166.

Проведя разрез $s-s$ *из выражения момента* относительно узла 4 устанавливаем, что усилие стержня $1-2$ равно нулю; по симметричному сечению аналогично устанавливаем, что усилие стержня $4-3$ равно нулю; далее нетрудно показать, что усилия стержней $2-8$, $8-3$ и $2-3$ равны *нулю. Проведя вертикальное сечение* $t-t$ *из* уравнения проекций относительно вертикальной оси, устанавливаем, что вертикальная слагающая опорного давления $V_a=0$. Затем из выражения момента относительно опоры 5, по которому $-Hz+V_a l=0$ получаем, что $H=0$. Далее уже не трудно показать, что усилия во всех стержнях равны нулю, следовательно, система неизменяема.

При расположении шарниров 0 и 5 на одном уровне та же система становится изменяемой.

ФЕРМЫ СО СЛОЖНЫМИ СТЕРЖНЯМИ И СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ.

§ 44. Понятие о работе ферм со сложной решеткой. Заменяя в простой ферме с прямолинейными стержнями сплошного сечения один или несколько из ее стержней самостоятельными статически определимыми неизменяемыми фермочками (черт. 167), мы получим ферму нового вида, которая будет статически определима, но в отличие от фермы с простыми стержнями будет иметь сложные стержни, почему такие фермы называются *сложными. Контур фермы, образованный осями сложных стержней*, в последующем будем называть основной фермой. Если нагрузка передается только в узлы основной фермы (черт. 167), то введение в состав основной фермы вместо простых стержней—сложных, не изменит условия равновесия основной фермы, внутренние усилия стержней которой должны быть равны, взаимнопротивоположны и направлены по прямым, соединяющим центры узловых шарниров, а сами сложные стержни будут находиться под действием двух взаимнопротивоположных осевых сил S (черт. 167-а), величина которых определяется из условия равновесия основной фермы.

Включение в состав фермы сложных стержней оправдывается в тех случаях, когда необходимо принять нагрузку на основную ферму не в ее узлы, а между узлами на протяжении стержня.

Простые стержни, находящиеся под действием внеузловой нагрузки (черт. 168), могут быть рассматриваемы как простые двух-опорные балки (черт. 168-а), передающие нагрузку в виде опорных реакций A и B в узлы основной фермы и изгибаемые этой нагрузкой. Полное напряжение этих *стержней, находящихся одновременно под действием усилия* S *основной* фермы и изгибающего момента от действия на них внеузловой нагрузки, определится выражением:

$$n=\frac{S}{\omega}+\frac{M}{W}$$

В целях избегнуть изгиба простых стержней, последние заменяются сложными стержнями, т. е. фермочками, в которых изгибающие действие внеузловой нагрузки преобразовывается в продольные усилия. Таким образом, элементы фермочки, образующей сложный стержень, испытывают суммарное усилие, слагающееся из усилия от действия на него продольной силы S основной фермы плюс усилие T от действия местной нагрузки на этот стержень.

Процесс образования сложных стержней может быть весьма разнообразным.

На черт. 169 *а* показаны фермы со сложными стержнями, представленными в виде явно выделенных фермочек.

В большинстве случаев сложные стержни образуются фермочками, в которых один из поясов сливается с направлением осевого усилия основной фермы. На черт. 169 *а* жирными линиями показан контур основной фермы и тонкими—контур сложных стержней. При таком расположении фермочки сложного стержня, все усилие S от действия основной фермы воспринимается поясом, сливающимся с направлением осевого усилия, все же остальные элементы сложного стержня воспринимают только усилия от местной нагрузки, что ясно вытекает из рассмотрения условий равновесия этого стержня в различных сечениях его.

Нередко фермочки сложных стержней располагаются так, что они сливаются со стержнями основной фермы не только одним своим поясом, но и рядом других своих элементов. На черт. 170 показана основная раскосная ферма 0,1,2 . . . 6, в которую влиты сложные стержни 1 m 2, 2 n 3 в виде шпренгельных фермочек с подвешенными к ним узлами u, v и т. д. На черт. 171/в показана решетчатая ферма с дополнительными треугольниками, которые могут быть рассматриваемы, как сложный стержень показанный на чертеже пунктиром.

Рассмотрение фермы со сложной решеткой, как результата образования ее из простой фермы путем введения дополнительных фермочек —сложных стержней, часто упрощает анализ этих ферм. Действительно, рассматривая такие фермы, как комбинацию простой фермы со сложными стержнями, можно по геометрическому построению выделить в ней:

1) стержни, входящие только в состав основной фермы, а потому испытывающие напряжение только от усилий S—основной системы; на черт. 170 это будут стержни 0—1, 1—1′, 1′—m, 1′—2′, 2—2′ и т. д.

2) стержни, входящие в состав основной системы и в контур сложного стержня, а потому испытывающие суммарное напряжение от усилий S—основной системы и усилий T от местной нагрузки на этот стержень; на черт. 170 это будут стержни: 1—2 2—m, 3—n и т. д.

3) стержни, входящие только в состав сложного стержня, а потому испытывающие напряжение только от усилий T, т. е. от местной нагрузки на этот стержень; на черт. 170 это будут стержни: m—1, n—2 и т. д.

§ 45. Построение плана Кремона в фермах со сложными стержнями. Введение в состав простой фермы сложных стержней вызывает или отсутствие узлов с двумя стержнями, или такую густоту стержней в узлах, что непосредственное построение диаграммы усилий по способу Кремона становится невозможным. Процессы подхода, обеспечивающие возможность построения диаграммы, могут быть различные.

Один из таких подсобных приемов был указан при построении диаграммы усилий для фермы, показанной на черт. 118 (§ 33), которая в сущности представляет собой сложную ферму, состоящую из основной 1, 3, 5, 7, 9, 11, 14, 1 со включением в нее сложных стержней 1—2—3—15, 3—4—5—13 и т. д. Построение диаграммы усилий для этой фермы становится возможным после сравнительно простого определения аналитическим путем усилия в стержне. 14—11.

Если для облегчения построения диаграммы усилий нельзя использовать простого аналитического подсчета, то в фермах со сложными стержнями построение диаграммы часто, сравнительно просто, может быть сделано путем построения сначала отдельно диаграммы усилия для основной фермы от действия полной нагрузки с последующим включением в нее диаграммы усилий в фермочках сложных стержней. Построением диаграммы основной фермы определяются положения узловых точек диаграммы, которые не зависят от формы стержней, а зависят только от осевых направлений, что дает возможность перейти к построению на этих точках диаграммы усилий в сложных стержнях, по отношению к которым усилия основной фермы могут быть рассматриваемы, как внешние силы.

Пример 32. Для пояснения сделаем построение диаграммы усилий для фермы, показанной на черт. 171; эта сложная ферма может быть рассматриваема как состоящая из основной фермы, показанной на черт. 171/а и фермочек сложных стержней (черт. 171/с). Построением диаграммы I этого чертежа определяются осевые усилия в основной ферме независимо от формы стержней и с отнесением всей нагрузки, в том числе и лежащей на сложных стержнях, к узлам основной фермы; построением этой диаграммы определяются основные узловые точки ее, именно точки 10, 15 или 14, 20 и друг.

Переходя теперь к построению диаграммы усилий для сложного стержня 10—11, 13, мы можем отметить, что в узле *A* (черт. 171/а) имеются известные нам усилия 1—10 и внешние силы 1—2 и 2—3; положение и величина этих сил на диаграмме усилий известны, остается только определить величину усилий в стержнях 3—11 и 10—11, которые определятся проведением через узловые точки 3 и 10 основной диаграммы, прямых параллельных 3—11 и 10—11 до пересечения в точке 11, что сделано на диаграмме II (черт. 171). Зная положение узловой точки 11, не трудно докончить диаграмму усилий для всего сложного стержня, применяя в этом случае прием, изложенный в § 33, для случая, когда внешняя сила (3—4) приложена во внутреннем узле. Контролирующим построением может служить построение отдельной диаграммы III усилий в элементах фермочки от местной нагрузки. Сопоставление диаграмм I и II наглядно показывает, что при данной конструкции сложного стержня, включение осевого усилия основной фермы изменяет только усилие поясных стержней 10 — 11 и 10—13, которые суммируются из сжимающего усилия основной фермы 10—11, 13) и растягивающего усилия стержня фермочки (10—11, 13).

Аналогичным путем может быть проведено построение диаграммы в узле *C* фермы. В этом узле известны величины и направления сил 16—14, 14—10, 10—13, 3—4 и 4—5, неизвестны усилия 5—16 и 15—16, которые определятся проведением параллельных линий через соответствующие узловые точки 5 и 15 диаграммы усилий. Дальнейшее построение диаграммы не представляет затруднений.

Пример 33. На черт. 171/в показана сложная ферма, в которой основная ферма и нагрузка та же, что и в предыдущем примере, но фермочки сложных стержней верхнего пояса расположены так, что ее элементы сливаются не только с поясными стержнями основной фермы, но и со стержнями решетки. Диаграмма усилий основной фермы останется та же, что и в предыдущем примере (на черт. 171 диаграм. I), что позволяет перейти прямо к включению диаграммы усилий сложных стержней; это сделано на диаграмме IV черт. 171. Разложение сил в опорном узле фермы не представляет затруднения; силовой многоугольник на диаграмме IV очертится узловыми точками 1—3, 11—1. Последующее построение может быть проведено для узла D фермы; известными силами будут — усилие 10—1, как стержня основной фермы, и усилие I—II как суммарное усилие на диаграмме IV; неизвестными останутся усилия 11—12 и 10—12, которые могут быть определены проведением параллельных прямых через узловые точки 11 и 10 диаграммы IV. Дальнейшее построение диаграммы вполне понятно.

Сопоставление диаграмм I усилий основной фермы и полной диаграммы IV показывает, что в этом случае мы имеем изменение усилий в стержнях 11—3, 13—4, 11—1 и 13—14.

Если в составе рассмотренных ферм были бы другие сложные стержни, то усилия в их частях могли бы быть включены таким же способом в диаграмму усилий основной фермы.

Преимущество такого приема построения заключается в том, что как это видно по диаграмме IV, получается сразу суммарное усилие; но если фермочки стержней резко выделяются из состава основной фермы, как это имеет место на черт 171/а, и в составе фермы много сложных стержней, то диаграмма получается запутанной, с большим числом лишних пересечений, так что в таких случаях рациональнее расчленять диаграммы, проводя построение отдельно для основной фермы, отдельно для стержней фермочек и затем суммируя их арифметически.

§ 46. **Аналитический расчет и линии влияния ферм со сложными стержнями.** Затруднения, встречающиеся при аналитическом расчете ферм со сложными стержнями, заключаются в том, что в них часто нельзя провести сечений, дающих возможность составить уравнение с одним неизвестным. Однако, эти затруднения разрешаются если проводить анализ таких ферм как сложение основной системы с добавочными фермочками.

Построение линии влияния в них значительно упрощается на основании знания некоторых основных геометрических свойств в процессе начертания линий влияния. Так что в конечном результате аналитический расчет этих ферм, делаемый по линиям влияния, не представляет трудности.

Применение различных приемов аналитического рассчета с построением линий влияния лучше всего проследить на ряде примеров.

Пример 34. Фермы с дополнительными шпренгелями. В ферме, показанной на черт. 172, основная система состоит из раскосной системы, большие панели которой уменьшены вдвое, введением дополнительных стоек 1—1′, 3—3′ и т. д., поддерживаемых сложными стержнями верхнего пояса, имеющими вид шпренгельных фермочек 2′—3′—4′, 4′—5′—6′ и т. д.

Дополнительными стержнями по отношению к основной системе являются подвески 1—1′, 3—3′ и не сливающиеся с основной фермой части шпренгельных ферм 3′—4′, 5′—6′, работающие на местную нагрузку, что легко учитывается вырезанием узла, к которому они примыкают.

Из вырезания узлов № 1′, № 3′ . . . и условия равновесия их относительно вертикальной оси следует, что усилие всех стоек-подвесок 1—1′, 3—3′ . . . . равно величине груза, приложенного в узле.

$$V_1 = P;\ V_3 = P$$

Линия влияния для этих подвесок имеет форму треугольника с подошвой $= 2d$ и высотой по средине $= 1$ (черт. 172 $V_{55'}$).

Таким образом на каждую шпренгельную фермочку будет действовать полностью груз P, приложенный к нижнему узлу основной фермы (черт. 172/а) и передающийся через нее на верхние узлы основной фермы.

Усилие в $3'$—$4'$ может быть определено из условия равновесия вырезанного узла № $3'$ из ур-ния проекций относительно оси, нормальной к оси раскоса $D_{2,4}$.

$$S_{3'4}\ Sin\ (180—\alpha—\beta)—P\ Cosn\ \alpha=0$$

откуда
$$S_{3'4}=P\frac{Cosn\ \alpha}{Sin\ (\alpha+\beta)}$$

Из чертежа фермы непосредственно видно, что $d=\overrightarrow{2'3'}\times Cosn\ \alpha$ и $r_1=2'3'\ Sin\ (\alpha+\beta)$, а потому выражение усилия $S_{3'4}$ может быть преобразовано к такому виду:

$$S_{3\,4}=P\,.\,\frac{d}{r}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

Это выражение могло быть получено, как усилие поясного стержня шпренгельной фермы из уравнения момента сил относительно точки $2'$

Линия влияния этого стержня будет иметь форму треугольника с вершиной под узлом $3'$ и наибольшей ординатой $= d:r$ (черт. 172/а).

Если бы потребовалось определить дополнительное усилие, вызываемое действием шпренгеля в стержне $O_{2',4'}$ верхнего пояса, то аналогично предыдущему случаю можно было бы определить его из условия равновесия частей шпренгельной фермочки относительно узла $3'$ (черт. 172/а).

$$O_{2'4'}=-P\frac{d}{2\,h\,Cosn\,\gamma}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

Поясные стержни. Усилия в стержнях $U_{23}=U_{3,4}$ нижнего пояса определяются по разрезу $t-t$ из уравнения моментов относительно узла $2'$ верхнего пояса, как в простой ферме и равно $= M_2:h_2$.

Линия влияния усилия в этих стержнях строится обычным способом, т.-е. путем отложения на вертикали под левой опорой A ординаты $2d:h_2$ (черт. 172) и будет иметь такую же форму, как в простой ферме; это и надо было ожидать, так как в состав нижнего пояса не вливаются дополнительные стержни.

Усилие в стержне $O_{2'4'}$ верхнего пояса определяется из того же разреза $t-t$, но из уравнения моментов относительно узла 4 нижнего пояса.

$$O_{2'4'}=-\frac{M_4}{h_4\,Cosn\,\gamma}$$

Линия влияния этого усилия строится обычным способом, т.-е. путем отложения на вертикали под опорой A ординаты $=\frac{-4\,d}{h_4\,Cosn\,\gamma}$ (черт. 172).

Если бы мы рассматривали этот стержень, как стержень только основной фермы, то по общему закону построения линии влияния она имела бы форму треугольника с вершиной g под точкой моментов. При условии же введения дополнительного узла 3 и шпренгельной передачи „правая" часть линии влияния должна быть распространена до последнего узла справа от разреза, каковым является узел 3, а потому на контуре линии влияния „правая" прямая bg должна быть продолжена до точки e под узлом 3 и линия влияния примет форму четыреугольника $a—c—e—b$. Добавочный треугольник $c—e—g$ в построенной линии влияния этого стержня по сравнению с линией влияния простой фермы, есть ни что иное, как результат суммирования основного усилия с усилием от местной нагрузки добавочного шпренгеля, что явствует из того, что ордината $ke = \frac{d}{2h\, Cos n \gamma}$ добавочного треугольника (см. подобие треугольников amg и ekg) точно равна ординате линии влияния стержня шпренгельной фермы (100).

Раскосы. Включением шпренгельных фермочек, раскосы основной фермы разделяются на две части – верхние $D_{2'3}$, $D_{45'}$ . . . и нижние $D_{3'4}$, $D_{5'',6}$.

Усилие нижней части раскоса $D_{3'4}$, как не включающее в себя контура шпренгельных фермочек должно равняться усилию простой фермы, которое определяется по разрезу $s-s$ из уравнения моментов относительно точки K схода поясных стержней (см. § 35) и так как включение шпренгеля не оказывает влияния на усилие этой части раскоса, то крайними узлами по отношению к разрезу $s—s$ будут узлы 2 и 4, а потому линия влияния будет иметь форму четыреугольника $a—c—m—b$ (черт. 172).

Так как мы получили эту форму линии влияния путем исключения влияния шпренгельной фермы, тогда как в действительности разрезом $s—s$ мы пересекли стержень $S_{3'}$, усилие которого должно войти в уравнение равновесия, докажем аналитическим путем правильность полученной линии влияния.

Из условия равновесия левой части по разрезу $s—s$ составляется уравнение

$$D_{34} \cdot r - Aa - S_{3'4'} \cdot R_1 = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (101)$$

но так как стержень $S_{3'4'}$ работает только на местную нагрузку, когда груз находится в узле 3, то пока груз расположен справа от сечения, выражение усилия раскоса будет:

$$D_{34}\, r - Aa = O \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (101\ bis)$$

а потому линия влияния, определяемая отрезком ординаты $a:r$ под левой опорой, сохранит свое очертание по прямой bn.

Когда груз будет помещаться в левой части, то линия влияния будет очерчиваться прямой ac, которая для левой части должна быть распространена до точки g под левым узлом 3; но, когда груз поместится в узле 3, то будет работать стержень $S3'4'$, усилие которого будет понижать усилие раскоса, что видно из равновесия правой части фермы:

$$- D_{34'} - B(l + a) + S_{3'4'} R_{,} = O$$

откуда:

$$D_{34'} = - \frac{1}{r} \left[B\ (l + a) - S_{3'4'}\, R_{,} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 102$$

Влияние усилия $S_{3'4'}$, как раз соответствует треугольнику cgm линии влияния. Действительно, из подобия треугольников $ka_{,}a$ и kmn следует, что ордината $mn = u:r$, а из подобия треугольников ceg и cmn — ордината $eg = u:2\ r$. Усилие $S_{3'4'}$ при положении груза в узле 3, определяется величиной $= 1\ \frac{d}{r_{,}}$ (см. выраж. 99), а влияние его на усилие раскоса $D_{34'}$ определяется величиной $S_{3'4}\ \frac{R_{,}}{r} = \frac{d}{r_{,}}\ \frac{R_{,}}{r}$ Отношение $R_{,}:r$ может быть выражено из подобия треугольников $K4'T$ и $2'4'3'$ и треугольников $K\,2\,2'$ и $K\ 4'4$ так.

$$\frac{R_{,}}{r_1} = \frac{K\,4'}{2',4'} = \frac{K,4}{2,4} = \frac{u}{2\,d}$$

Подставляя это отношение в выражение усилия, получим ординату линии влияния:

$$S_{3'4'}.\frac{R_1}{r} = \frac{d}{r_{,}}\ \frac{R}{r} = \frac{u}{2r} = eg$$

Таким образом после вычитания из линии влияния $agmb$ ординаты $eg = u : 2\,r$ она примет форму $acmb$, т.е. форму линии влияния простой фермы, как это было показано выше.

Усилие верхней части раскоса $D_{2'3'}$ определяется по разрезу $t—t$ из уравнения моментов относительно точки K схода поясных стержней. Пока груз находится в правой части усилие раскоса определяется уравнением:

$$D_{2'3'}\ r - A.\ a = O,$$

а потому линия влияния очерчивается прямой $b\ k$ (черт. 172), которая остается справедливой для случаев расположения груза во всех узлах справа от сечения, т.-е. до узла, 3, а контур линии влияния будет ограничен четыреугольником $aceb$.

Если бы мы рассматривали только основную систему фермы-то контур линии влияния был бы очерчен четыреугольником $acmb$. Добавочный треугольник cem есть ничто иное, как добавочное усилие от вливания в раскос стержня $2'3'$ шпренгельной фермочки, что определяется включением в правую часть узла 3.

Стойки. Усилие стойки $V_{44'}$ легко определяется из условия равновесия нижнего узла 4.

Пока груз находится вне узла 4 усилие стойки:

$$V_{44'} + D_{34'}\ Sin\,\alpha = O$$

откуда:

$$V_{4,4'} = -\cdot D_{34'}\ Sin\,\alpha \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (103)$$

следовательно усилие стойки изменяется пропорционально усилию раскоса и линия влияния этого усилия будет иметь вид линии влияния усилия раскоса. Величина $Sin\,\alpha$ по чертежу фермы определяется отношением $r : u$, а потому линия влияния стойки будет иметь на вертикали под левой опорой ординату $\frac{a}{r}\ \frac{r}{u} = \frac{a}{a+4\ d}$ (черт. 172), и самый контур ее будет очерчиваться четыреугольником $acgb$.

Но когда груз поместится в узле 4, уравнение равновесия этого узла напишется так:

$$V_{44'} + D_{34'}\,Sin\,\alpha - \mathrm{P} = O$$

откуда:

$$V_{44'} = -D_{34'}\ Sin\,\alpha + \mathrm{P} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (103\ bis)$$

т.-е. линия влияния в этом случае, местного расположения груза, должна изменить свою форму; ее ордината mg под узлом 4 должна быть уменьшена на величину $gi = 1$, a затем контур линии влияния должен быть исправлен прямыми ei и in между смежными узлами.

Можно показать, что в получаемой при таком построении линии влияния точка i как раз лежит на прямой ac и ею определяется. Действительно из подобия треугольников kaa_1 и kig следует, что ордината:

$$ig = \frac{a}{a+4d} \cdot \frac{a+4d}{a} = 1$$

этим свойством облегчается построение линии влияния, которое может быть сделано непосредственно по двум прямым «левой» и „правой", образующим линию влияния.

Построенная линия влияния стойки интересна в смысле изменения ее формы в зависимости от распределения нагрузки между верхними и нижними узлами.

Как известно, положение основных линий «правой» и «левой» не изменяется от того, где расположена нагрузка, изменяются только пределы их распространения. Если рассматривать стойку $V_{44'}$ как стойку простой фермы, то, при загружении нижних узлов, линия влияния очерчивалась бы многоугольником $ainb$, при загружении верхних узлов многоугольником $acgb$. Таким образом, с одной стороны, условие передачи нагрузки на нижние узлы требует, чтобы при положении груза в узлах 2, 4 и 6 ординаты линии влияния имели вершину в точках c, i и n очертания линии влияния для нижних узлов; с другой стороны шпренгельные фермочки, воспринимая нагрузку с подвесок 3—3′ и 5—5′, передают их на верхние узлы, следовательно при положении грузов в узлах 3, 5 вершины ординаты должны лежать в точках e и 5, очертания линии влияния для нагрузки в верхних узлах. Эти точки, как раз очерчивают линию влияния стойки.

На черт. 172 построена линия влияния для средней стойки $V_{66'}$.

Усилие этой стойки определяется из вырезания верхнего узла; уравнение равновесия в этом узле будет;

$$-V_{66'} + O_{4'6'}\,Sin\,\gamma + O_{6'8'}\,Sin\,\gamma - S_{5'6'}\,Sin\,\beta - S_{6'7'}\,Sin\,\beta = O$$

откуда усилие стойки:

$$V_{66'} = +2\,\frac{M_6}{h_6}\,tng\,\gamma - (S_{5'6'} + S_{6'7'})\,Sin\,\beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; (104)$$

Переходя к построению линии влияния отмечаем, что при положении груза $= 1$ во всех узлах, кроме 5 и 7, усилие в стойке будет пропорционально усилию поясных стержней и равно:

$$V_{66'} = +2\,\frac{M_6}{h_6}\,tng\,\gamma, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (104\ bis)$$

т. к. во всех этих случаях стержни $S_{5'6'}$ и $S_{6'7'}$ как стержни шпренгельных фермочек не работают. а потому линия влияния должна определяться треугольником a 4 b, построение которого понятно без об'яснения.

Если бы нагрузка передавалась в верхние узлы. то при положении нагрузки в верхнем узле 6′ усилие стойки $V_{66'}$ определялось бы уравнением:

$$V_{66'} = +2\,\frac{M_6}{h_6}\,tng\,\gamma - 1$$

и ордината линии влияния под этим узлом должна была бы определиться вычитанием из ординаты *от* линии влияния ординаты $mn = 1$, а потому контур линии влияния очертился бы многоугольником *a*, 4, 6′, 8, *b*.

В действительности же мы не имеем нагрузки в верхних узлах; нагрузка в них попадает только через шпренгельные фермочки, когда груз $= 1$ попадает в узел *S*, отчего работает стержень $S_{5'6'}$; в этом случае усилие стойки:

$$V_{66'} = 2\,\frac{M_6}{h_6}\ tng\,\gamma - S_{5'7'}\ Sin\,\beta$$

и в узел 7, когда работает стержень $S_{6''7}$; в этом случае:

$$V_{66'} = 2\ \frac{M_6}{h_6}\ tng\,\gamma - S_{6'7'}\ Sin\ \beta$$

В этих случаях ординаты линии влияния должны быть отнесены к контуру верхнего очертания, т. к. в точки его передается нагрузка и сама линия влияния очертится многоугольником *a*—4—5—6—7—8—*b*.

Пример 35. Ферма с дополнительными треугольниками. На черт. 173 показана ферма, которую можно рассматривать состоящей из основной простой решетчатой фермы с дополнительными фермочками сложных стержней верхнего пояса, показанных на чертеже пунктиром.

Усилия в стержнях верхнего пояса этой фермы слагаются из усилия пояса, как основного стержня пояса и дополнительного усилия дополнительной фермочки, работающей от местной нагрузки, Например, для элемента $O_{13,4}$, усилие определится по разрезу 1—1, из выражения момента относительно узла 3 и линия влияния имеет вид треугольника *a* 3 *b*. По существу она слагается из линии влияния *a* 2 4 *b* простой фермы и добавочного треугольника 2, 3, 4, представляющего собой усилие в элементе 13—4 дополнительной фермочки.

Усилие верхней части раскоса $D_{4,14}$ определяется по тому же разрезу 1—1 из уравнения проекций на вертикальную ось. Линия влияния очерчивается двумя параллельными прямыми и имеет контур *a*—3—4—*b*. По существу она слагается из линии влияния *a* 2 4 *b* раскоса, как стержня основной фермы и треугольника 2, 3, 4, определяющего усилие того же раскоса, как стержня 14—4 дополнительной фермочки.

Усилие нижней части того же раскоса $D_{3,14}$, не включающей в себя дополнительной фермочки, должно быть такое же, как в простой ферме. Оно определяется по разрезу 2 — 2 из уравнения проекции относительно вертикальной оси:

$$D_{3,14}\ Sin\,\alpha - S_{13,14}\ Sin\,\alpha + A = O$$

откуда:

$$D_{3,14} = -A.\frac{1}{Sin\,\alpha} + S_{13,14}$$

Пока груз $= 1$ находится вне пределов узла 13, стержень $S_{13,14}$ не работает и усилие раскоса $D_{3,14}$ определяется в функции опорной реакции *A* и линия влияния очерчивается контуром *a*—2—4—*b*. При положении груза $= 1$ в узле 13 линия влияния раскоса должна была бы быть продолжена до точки 3 на вертикали под узлом 13. Но усилие стержня $S_{13,14}$, работающего при этом положении груза, уменьшает усилие раскоса $D_{3,14}$ и своей линией влияния 2—3—4 восстанавливает основную форму линии влияния по контуру *a*—2—4—*b*.

Пример 36. Ферма Финка. Показанная на черт. 174 ферма может быть рассматриваема как состоящая из основной фермы 0 4 8 4′0 со сложными стержнями 0 2′ 4 и 4 6′ 8, которые в свою очередь имеют дополнительные шпренгеля 0 1′ 2, 2 3′ 4 и т. д. Так как стержни верхнего пояса этой фермы будут входить во все эти три фермы, то их линии влияния будут слагаться из трех частей:

Усилие в стержне $O_{3\,4}$ верхнего пояса определяется по сечению 1—1. При расположении груза = 1 в правой части фермы, усилие будет определяться уравнением $O_{3,4} = -A\,\frac{4\,d}{h}$ и линия влияния его будет очерчиваться «правой» прямой с ординатой $= -4\,d:h$ под левой опорой. Если бы не было дополнительной фермочки 0 2′ 4, то полная линия влияния имела бы форму треугольника $a—4—b$.

Наличие фермочки 0 2′ 4 с опорами в узлах 0 и 4 заставляет элемент $O_{3\cdot 4}$ работать дополнительно на местную нагрузку, когда груз = 1 располагается в узле 2. Соответствующее дополнительное усилие в стержне $O_{3,4}$ будет $= -\frac{1}{2}\,\frac{2\,d}{h} = -\frac{d}{h}$ и так как линия влияния его будет иметь форму треугольника с вершиной под узлом 2, то к основной линии влияния $a—4—b$ добавится треугольник $a—2—4$ с наибольшей ординатой $d:h$:

Наконец, наличие шпренгеля 2—3′—4 с опорами в точках 2 и 4 заставит стержень $O_{3,4}$ работать от местной нагрузки в узле 3. При положении груза = 1 в этом узле, усилие в стержне $O_{3,4}$ будет $= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{\frac{1}{2}h} = -\frac{d}{h}$ и линия влияния его будет иметь форму треугольника, а потому к ранее полученной основной линии влияния стержня $O_{3,4}$ нужно прибавить треугольник 2—3—4 с наибольшей ординатой под узлом $d:h$.

Таким образом полная линия влияния стержня $O_{3,4}$ очертится контуром $a—3—4—b$. Из соотношения ординат нетрудно видеть, что линия $a—2—3$ будет прямая.

Эта же форма линии влияния $O_{3,4}$ могла бы быть получена из анализа суммарного выражения уравнения этого усилия по сечению 1—1, из которого следует, что:

$$O_{3,4} = -\frac{1}{h}\,(B.\ 4\ d + U_{3'4}\,.h\ Sin\ \varphi)$$

входящее в это уравнение усилие стержня $U_{3,4}$ работает только при загружении фермочки 0 2′ 4 и определяется из выражения момента относительно узла 3, а именно:

$$U_{3'4} = B'\,\frac{d}{0{,}5\ h\ Sin\ \varphi}$$

где B' опорная реакция фермочки 0 2′ 4 в узле 4.

Подставляя это значение $U_{3'4}$ в выражение усилия $O_{3,4}$ получим:

$$O_{3,4} = -\frac{1}{h}\,(B.\ 4\ d + B'.\ 2\ d) = -\frac{d}{h}\,(4.\ B + 2\ B')$$

При положении груза $= 1$ в узле 2 величины опорных давлений будут $B = \frac{1}{4}$ и $B' = \frac{1}{2}$, а потому полная ордината линии влияния $O_{3,4}$ будет $= -\frac{d}{h}(1 + 1) = -\frac{2d}{h}$.

При положении груза 1 в узле 3 величины опорных давлений будут $B = \frac{3}{8}$ и $B' = \frac{3}{4}$, а потому полная ордината линии влияния $O_{3,4}$ будет $= -\frac{d}{h}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{3d}{h}$, что соответствует полученному ранее контуру.

На этом же чертеже 174 построена, аналогичным путем, линия влияния для стержня $O_{1,3}$, имеющего очертание a—1—4—b.

Усилие стойки $V_{22'}$ определится из вырезания узла 2 и уравнения проекций на вертикальную ось (черт. 174).

При положении груза $= 1$ в узле 2 усилие стойки $V_{22'} = -1$.

При положении груза $= 1$ в узлах 1 или 3 усилие в стойке $V_{22'} = -D_{1,2'} \operatorname{Sin} \alpha = -D_{2,3'} \operatorname{Sin} \alpha$. Но так как при положении груза $= 1$ в узле 1 усилие раскоса $D_{3,1} = 1 : 2 \operatorname{Sin} \alpha$ и. при положении груза $= 1$ в узле 3, усилие раскоса $D_{2,3} = 1 : 2 \operatorname{Sin} \alpha$, то соответственно, при этих положениях груза, усилие в стойке $V_{22'} = -\frac{1}{2}$. Таким образом, линия влияния стойки будет иметь форму треугольника с ординатой $= -1$ под узлом 2 и нулями под узлами 0 и 4.

§ 47. Аналитический расчет ферм со сложной решеткой. В настоящем параграфе мы поставим себе задачей показать приемы расчетов балочных *статически определимых ферм, в которых решетка образована из* двух или нескольких пересекающихся между собой систем (черт. 176 и 177). Число систем решеток, входящих в состав таких ферм, определяется из вертикального разреза поперек фермы, по числу пересекаемых разрезом стержней решетки. Так например, ферма, показанная на черт. 176, имеет две системы раскосов, как это видно по разрезу s—s [1]).

Как системы статически определимые такие фермы в конечном результате могут быть рассчитаны по законам статики, но обычно расчет их осложняется невозможностью проведения таких сечений, которые давали

---

[1]) В прежних мостах очень часто применялись фермы с сложной решеткой, но в большинстве случаев они были статически неопределимыми по своему образованию. Расчет таких ферм велся приблизительным способом путем разложения их на простые *статистически определимые фермы с простыми решетками, по числу входящих в них* систем решеток, как это показано, например на черт. 175.

При таком разложении на простые системы, предполагалось, что каждая система работает только на нагрузку, действующую на ее узлы. Каждой такой простой ферме принадлежит отдельная система решетки, усилия которой определяются из расчета только этой фермы. Элементы же поясов, как принадлежащие все простым фермам, расчитываются на суммарное усилие, составляющееся из усилий определяемых для отдельных ферм.

Прием точного расчета таких систем, как статически неопределимых, рассматривается нами во второй части курса.

бы возможность составить одно уравнение с одним неизвестным, как это имеет место при расчете балочных ферм с простой решеткой. Особенно осложняется расчет в фермах со сложной решеткой при криволинейных поясах, в которых переменный наклон поясов и раскосов затрудняет установление геометрических упрощений.

Расчет таких ферм значительно упрощается применением графических приемов, как это показано в следующих параграфах (§§ 48 и 49).

Что касается ферм с параллельными поясами, то простота контура, при одинаковом наклоне раскосов, позволяет упростить расчет, использовав для этого геометрические соотношения и анализ работы отдельных систем решетки.

Для пояснения рассмотрим ферму с двойной раскосной системой и параллельными поясами (черт. 176).

В этой системе решетка, проходящая через нечетные узлы, работает только от загружения этих узлов, что непосредственно видно из вырезания узлов 1 и 11. Пока в этих узлах не будет нагрузки, вся решетка этой системы не будет испытывать напряжений. При расположении же груза P, например, в узле 3, часть решетки этой системы между узлами 1—1′ и 3—3′ работать не будет, также не будет работать часть решетки этой системы между узлами 11—11′—9—9′—7—7′—6, что непосредственно следует из вырезания узла 11 и далее.

Что касается решетки, расположенной между узлами 3—3′—5—5′—6, то она будет испытывать следующие по величине усилия:

$$\begin{aligned} &\text{усилия в стойках} \quad V_3 = V_5 = +P \\ &\text{усилия в раскосах} \quad \left.\begin{aligned} D_{3'5} &= -P:Sin\,\alpha \\ D_{5'6} &= -P:Sin\,\alpha_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105) \end{aligned}$$

Из изложенного заключаем, что решетка этой системы будет работать только при загружении нечетных узлов, лежащих слева от сечения проводимого через решетку. Линии влияния для элементов этой решетки будут иметь вид треугольников, расположенных соответственно нечетным узлам ферм, через которые проходит решетка (черт. 176).

Зная же величину усилий в частях этой решетки и форму линии влияния для нее, нетрудно определить величину усилий и построить линии влияния для других элементов.

Например, усилие в раскосе $D_{4'6}$ будет определяться выражением:

$$D_{4'6} = \frac{1}{Sin\,\alpha}\ (Q_0 + D_{3'5}\ Sin\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105bis)$$

При положении груза $P=1$ справа от сечения $s—s$, когда усилие $D_{3'5} = O$, усилие в этом раскосе определится выражением $D_{4'6} = A : Sin\,\alpha$ и линия влияния будет очерчена по прямой $b—5$ (черт. 176).

При положении груза $= 1$ слева от сечения, в четных узлах, когда усилие $D_{3'5} = 0$, усилие раскоса $D_{4'6}$ будет определяться выражением; $D_{4'6} = -B\,Sin\,\varphi$, т.-е., ординаты линии влияния под узлами 2, 4 будут те же, что и в простой раскосной ферме с решеткой, проходящей через четные узлы $0'—2—4—6—b$. Но при положении груза $= 1$ слева от сечения в нечетных узлах, чему соответствует усилие раскоса $D_{3'5} = 1 : Sin\,\alpha$ усилие раскоса $D_{4'6}$ будет определяться выражением $D_{4'6} = (-B+1) : Sin\,\alpha$. Это показывает, что над этими узлами ординаты линии влияния будут определяться разностью ординат линии влияния этого раскоса, как простой фермы и ординат — 1, что дает очертание линии влияния по ломаной, как показано на черт. 176.

Усилие в элементах пояса, например $O_{3'4'}$, определяется выражением:

$$O_{3'4'} = -\frac{1}{h}\,(M_4^\circ + D_{3'5}\,d\ Sin\,\alpha)\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (106).$$

При положении груза = 1 справа от сечения в узлах 4 — 12, усилие этого элемента будет определяться выражением:

$$O_{3'4'} = -A\,\frac{4d}{h}$$

соответственно чему линия влияния будет очерчена прямой b — 4, как в простой раскосной ферме. Ординаты этой линии влияния сохраняются также под четными узлами левой части, так как при положении груза = 1 в этих узлах усилие $D_{3'5}$ равно нулю.

При положении же грузов = 1 в нечетных узлах левой части, когда усилие $D_{3'5} = 1 : Sin\,\alpha$, усилие элемента $O_{3'4'}$ будет определяться выражением $O_{3'4} = -(B\,.\,6d - 1\,.\,d) : h$, из которого видно, что из ординат линии влияния $0 - 4 - b$ надо вычесть ординаты величиной $= d : h$; это вычитание показано на черт. 176, вследствие этого линия влияния принимает ломаное очертание: $0 - 1 - 2 - 3 - 4 - b$.

Путем аналогичного анализа, могут быть построены линии влияния остальных стержней этой фермы.

Пример 37. Двухрешетчатая ферма с параллельными поясами. Показанная на черт. 177 двухрешетчатая ферма с параллельными поясами статически определима и неизменяема, как это легко устанавливается геометрическим построением ее, исходя от средней стойки. Аналитический расчет ее возможен благодаря тому, что пояса параллельны и потому, что при одинаковом наклоне раскосов, усилия в них и зависимость их между собой легко определяются из вырезания узлов.

Вырезая сечением $s - s$ средний узел у опорной стойки, из условия равновесия этого узла, проектируя относительно вертикальной и горизонтальной осей, будем иметь два уравнения:

$$-V_0 - D_1\,Sin\,\alpha + D^l_1\,Sin\,\alpha + V_0' = 0.$$

$$D_1\,Cosn\,\alpha + D^l_1\,Cosn\,\alpha = 0,$$

откуда:

$$D_1 = -D_1'.$$

Так как:

$$V_0 = -A \text{ и } V'_0 = 0,$$

то решая первое уравнение относительно усилия раскоса D_1', будем иметь:

$$D_1 = -D_1' = +\frac{A}{2\,.\,Sin\,\alpha}$$

Далее нетрудно видеть из условия вырезания поясных узлов, что усилия всех раскосов, лежащих слева от места приложения груза P равны между собой и равны усилию раскосов D_1 и D_1', но знак усилия в каждом из них меняется в зависимости от направления раскосов, так что для каждого зигзага решетки будем иметь усилия:

$$D_1 = -D'_{1,2'} = +D_{2',3} = -D'_{3,4'} = +D_{4'5} \ldots = \frac{1}{2}\frac{A}{Sin\,\alpha} \quad \ldots \quad (107)$$

$$-D'_1 = +D'_{1',2} = -D'_{2,3'} = +D_{3'4} = \ldots\ldots = \frac{1}{2}\frac{A}{Sin\,\alpha}$$

В узле, где приложен груз P, это постоянство величины усилия нарушается в том зигзаге, которому принадлежит груз. Из условия равновесия узла, в котором приложен груз, вытекает что:

$$-D'_{3,4'}\,Sin\,\alpha - D_{4,5}\,Sin\,\alpha - 1 = 0,$$

подставляя в это уравнение вместо усилия $D'_{3'4}$ его значение из выражения (107), получим:

$$D_{45} = -\frac{1}{Sin\,\alpha} + \frac{A}{2\,.\,Sin\,\alpha} = -\frac{B+1}{2\,.\,Sin\,\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (108),$$

в котором вместо опорного давления A подставлено равное ему значение $(1-B)$.

Полученные аналитические выражения усилий в раскосах левой половины и симметричные им выражения усилий в раскосах правой половины позволяют определить усилия в остальных стержнях фермы и построить линии влияния как для решетки, так и для поясов.

Возьмем, например, раскос $D_{4,5}$. Пока груз $P=1$ находится в правой части от сечения $t-t$, проводимого через раскос, усилие в нем определяется выражением (107), по которому:

$$D_{4'5} = +\frac{A}{2\,.\,Sin\,\alpha}.$$

Это есть прямая линия с ординатой равной $+1:2\,Sin\,\alpha$ под левой опорой и равной нулю под правой опорой; на черт. 177 эта прямая обо. значена буквами $a_1\,b$. Ординатами этой прямой очерчивается линия влияния раскоса на протяжении от правой опоры до узла 5.

При переходе груза $=1$ в левую часть и при положении его в узлах, принадлежащих зигзагу, к которому не принадлежит раскос $D_{4'5}$, усилие его будет определяться тем же выражением (107), как при положении груза в правой части, следовательно, при положении груза $=1$ в этих узлах, линия влияния будет очерчиваться ординатами «правой» прямой, с вершинами в точках 1 и 3.

При положении груза $=1$ в узлах левой части, принадлежащих зигзагу, в который входит рассматриваемый раскос, усилие в нем будет определяться выражением (108).

$$D_{4'5} = -\frac{B+1}{2\,Sin\,\alpha},$$

которое представляет собой прямую с ординатами $-1:2\,Sin\,\alpha$ на левой опоре при $x=0$ и $-(1+1):2\,Sin\,\alpha = -1:Sin\,\alpha$ на правой опоре при $x=l$.

Этой прямой $a_2\,b_2$ (черт. 177) определяются ординаты линии влияния при положении груза $=1$ под узлами, соответствующими зигзагу, к которому принадлежит раскос—в нашем случае под узлами 2 и 4.

Между узлами линия влияния изменяется по прямым, а потому контур линии влияния раскоса $D_{4'5}$ будет зигзагообразный $a - 1 - 2 - 3 - - 4 - 5 - b$.

Перейдем к определению усилия в средней стойке $V_{5'5}$ и произведем таковое при посредстве вырезания нижнего узла, условие равновесия которого относительно вертикальной оси дает уравнение:

$$V_{5'5} + D_{4'5} Sin\, \alpha + D'_{5,6'}\, Sin\, \alpha = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (109).$$

При положении груза $= 1$ во всех узлах, не принадлежащих к зигзагу, в состав которого входят раскосы $D_{4'5}$ и $D_{5,6'}$, а именно в узлах $1'$, $3'$, $5'$, $7'$ и $9'$ усилия этих раскосов будет определяться выражением (107) и соответственно равны:

$$D_{4'5} = \frac{A}{2\, Sin\, \alpha}$$

и

$$D'_{5\,6'} = + \frac{B}{2\,.\, Sin\, \alpha} = + \frac{1 - A}{2.\, Sin\alpha}$$

Подставляя эти значения усилий в уравнение равновесия вырезанного узла, получим его в таком виде:

$$V_{5\,6'} = - \frac{1}{2}\left[\frac{A\, Sin\, \alpha}{Sin\, \alpha} + \frac{B\, Sin\, \alpha}{Sin\, \alpha}\right] = - \frac{1}{2}\left[A + (1 - A)\right] = - \frac{1}{2}.$$

Из чего следует, что при положении груза $= 1$ в указанных узлах, ординаты линии влияния все равны $- 1 : 2$.

При положении груза $= 1$ в узлах $2'$, $4'$, $6'$ и $8'$, принадлежащих к зигзагу, в состав которого входят раскосы $D_{4'5}$ и $D'_{5,6'}$, усилие в одном из них, именно лежащем в этой половине фермы, где помещается груз, будет определяться выражением (108), а потому уравнение (109) равновесия перепишется так:

$$V_{5\,5'} = \frac{B + 1}{2\,.\, Sin\, \alpha}\, Sin\, \alpha - \frac{B}{2\, Sin\, \alpha} Sin\, \alpha = + \frac{1}{2}.$$

Следовательно, ординаты линии под этими узлами будут все равны $+ 1 : 2$.

Таким образом линия влияния средней стойки представится симметричной зигзагообразной линией, показанной на черт. 177.

Усилия в поясных стержнях определяются по косому сечению t — . Так, например, для определения усилия в стержне пояса $O_{4'5'}$. будем иметь уравнение:

$$O_{4',5'} h + Aa + D_{4',5}\, d\, Sin a = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (110).$$

При положении груза справа от сечения, усилие раскоса как было показано выше, определяется выражением (107), а потому уравнение усилия пояса перепишется в таком виде:

$$O_{4'5} = - \frac{1}{h}\left[Aa + \frac{A}{2\, Sin\, \alpha} \,.\, d\, Sin\, \alpha\right] = - \frac{A}{h}\left(a + \frac{d}{2}\right).$$

Это будет уравнение прямой, имеющей под левой опорой ординату.

$$= - \frac{1}{h}\left(a + \frac{d}{2}\right).$$

Ординатами этой прямой очерчивается линия влияния на протяжении от правой опоры до узла 5′,

При переходе груза в левую часть, выражение усилия в стержне $O_{4',5'}$, определимое из условия равновесия правой части, напишется в таком виде:

$$-O_{4',5'}h - B(l-a) - D_{4'5}\, d\, Sin\,\alpha = 0.$$

При положении груза $=1$ в узлах $2'$ и $4'$, принадлежащих к зигзагу, в состав которого входит раскос $D_{4'5}$, усилие в нем будет определяться выражением (108), а потому подставляя это значение усилия в уравнение (110) получим его в таком виде:

$$O_{4',5'} = -\frac{B}{h}\left(l-a-\frac{d}{2}\right)+\frac{d}{2h}.$$

Этим уравнением определяется прямая $a_3\, b_3$ (черт. 177) с ординатами:

$$a_1\, a_3 = \frac{d}{2h}$$

под левой опорой, и ординатой:

$$bb_3 = -\frac{l-a}{h}+\frac{d}{h}$$

под правой опорой. На этой прямой должны лежать вершины ординат линии влияния, при положении груза $=1$ в узле $2'$ и $4'$.

При положении груза $=1$ в узлах $1'$ и $3'$, не принадлежащих к зигзагу, в котором лежит раскос $D_{4,5}$, усилие в последнем будет определяться выражением (107):

$$+\frac{A}{2\,Sin\,\alpha} = \frac{1-B}{2\,.\,Sin\,\alpha},$$

а потому уравненне (110) может быть преобразовано в такое:

$$O_{4'5'} = -\frac{B}{h}\left(l-a-\frac{d}{2}\right)-\frac{d}{2h},$$

Этим уравнением определяется прямая $a_2\, b_2$ с ординатами:

$$a\, a_2 = -(d:2h)$$

под левой опорой и

$$b\, b_2 = -(l-a):h$$

под правой опорой. Этой прямой определяются ординаты линии влияния при положении груза $=1$ в узлах $1'$ в $3'$.

Таким образом, линия влияния верхнего пояса очертится ломаной $a-1-2-3-5-b$, показанной на черт. 177.

Аналогичным путем определяются усилия и строятся линии влияния для стержней нижнего пояса.

На черт. 177 построена также линия влияния для стержня нижнего пояса U_{34}.

Уравнение равновесия левой части относительно разреза $t-t$, определяющее усилие этого стержня, будет:

$$-U_{3,4}\, h + Aa - D_{3'4}\, d\, Sin\,\alpha = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (111)$$

Пока груз находится в правой части, усилие:

$$D_{3'4} = + \frac{A}{2\,Sin\,\alpha},$$

а потому уравнение, определяющее усилие стержня U_{34}, будет:

$$U_{34} = \frac{1}{h} A \left(a - \frac{d}{2}\right).$$

Этим уравнением определяется правая прямая линии влияния, имеющая ординату под левой опорой.

$$aa_1 = \frac{1}{h}\left(a - \frac{d}{2}\right).$$

Из условия равновесия правой части при положении груза $= 1$ в левой части, уравнение равновесия будет:

$$+ U_{3,4}\,h - B\,(l - a) + D_{3',4}\,d\ Sin\,\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (112).$$

При положении груза $= 1$ в узлах 1 и 3, когда усилие раскоса определяется выражением (108) и равно

$$-(1 + B) : 2\,Sin\,\alpha,$$

это уравнение (112) преобразуется к виду:

$$U_{3,4} = + \frac{B}{h}\left(l - a + \frac{d}{2}\right) + \frac{d}{2h}.$$

и при положении груза $= 1$ в узле 2, когда усилие раскоса определяется выражением (107) и равно:

$$A : 2\,Sin\,\alpha = (1 - B) : 2\,Sin\,\alpha,$$

оно преобразуется к виду:

$$U_{3,4} = + \frac{B}{4}\left(l - a + \frac{d}{2}\right) - \frac{d}{2h}.$$

Этими двумя уравнениями, определяются две параллельные прямые $a_2 b_2$ и $a_3 b_3$-, служащие для определения ординат левой части линии влияния.

§ 48. Графический расчет при помощи диаграмм Кремона. В фермах со сложной решеткой и с криволинейными поясами аналитические выражения усилий принимают сложную форму, вследствие чего вычисление по ним ординат линий и построение их становится затруднительным, так как в изменении ординат не имеется достаточно простой закономерности, которая позволила бы установить контур линии влияния. Вопрос о построении линии влияния в таких фермах сводится к определению ординат их под целым рядом узлов. Эта работа по определению ординат под разными узлами значительно упрощается применением для этого диаграмм Кремона, которые, будучи сделаны в большом масштабе, обеспечивают достаточную точность расчета. Этот прием обоснован на следующих соображениях:

Уравнения, служащие для построения линий влияния в стержнях ферм, всегда определяются в функции одной из опорных реакций, путем помножения ее на некоторый коэффициент k, зависящий от положения стержня в ферме и формы самой фермы. Действительно, при положении груза $= 1$ справа от сечения, усилие в любом стержне фермы с простой решеткой может быть представлено в таком виде:

$$S = \pm A \,.\, k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (113).$$

Например, в ферме с параллельными поясами, уравнение, определяющее усилие поясных стержней, имеет вид (выраж. 53):

$$U = -0 = \frac{A,\, a}{h},$$

уравнение, определяющее усилие в решетке, имеет вид (выраж. 55).

$$D = \pm A : Sin\,\varphi \text{ и т. д.}$$

Если мы приложим к ферме вместо опорной реакции силу $= 1$, предположив другой конец закрепленным [1]), и построим для нее план Кремона, то мы получим в этом плане усилия стержней, вызываемые действием силы $= 1$ и определяемые выражениями вида $S = 1 \times k$.

Так как мы имеем здесь дело с усилиями, вызываемыми действием груза $= 1$, приложенного на опоре, то при переходе к линиям влияния двухопорной фермы, мы должны будем отметить, что с изменением положения груза $= 1$ на пролете, величина опорного давления изменится в отношении $(l - x) : l$, где x — расстояние груза от опоры A, вследствие чего в том же отношении будут изменяться усилия стержней, а следовательно и ординаты их линий влияния.

Если мы на основании изложенного, построив план Кремона для действия силы $A = 1$ (черт. 178) и, измерив по нему усилие S какого-либо стержня (например, поясного стержня $a - g$ или раскоса $k - m$), отложим эту длину в виде ординаты под опорой A и проведем через вершину этой ординаты и через нуль на правой опоре прямую, то ординаты этой прямой, удовлетворяющие условию $S \,.\, \frac{l - x}{l}$, будут представлять собой ничто иное, как ординаты линии влияния усилия этого стержня, а сама прямая будет ничто иное, как прямая, которую мы называем «правой прямой» в линии влияния.

Положение «левой» прямой линии влияния может быть определено или по общему свойству линий влияния, например, по условию пересечения ее с «правой» прямой под моментной точкой, или она может быть также построена из условия определения ординат под правой опорой B, путем построения плана Кремона для $B = 1$, также как это показано для $A = 1$. Следует однако указать, что при симметричных фермах план Кремона постpоеный для $A = 1$ может быть использован для определения ординат под опорой B, для чего на плане нужно пользоваться усилиями симметрично расположенных стержней, например: для стержня $a - g$ симметричным ему в ферме $a - n$, для стержня $k - m$ стержнем $i - h$ и т. д.

---

[1]) При построении плана Кремона для такого вида загружения обычно закрепляют противоположный конец фермы, что может быть сделано или путем введения пары $(H \,.\, h = 1 \,.\, l)$ как показано пунктиром на черт. 178, или путем приложения в последнем узле фермы (черт. 178) груза $Q = 1 \,.\, \frac{l}{d}$, по величине достаточного для получения опорного давления $A = 1$ и т. п. Такое закрепление не отзывается на учете величины усилий в стержнях лежащих слева от прилагаемых сил и нужно только для того, чтобы иметь замкнутый план Кремона.

На черт. 178 показано применение этого приема для построения линий влияния в ферме с простой решеткой, в которой линии влияния как в правой так и в левой части от сечения изменяются по прямым.

В фермах со сложной решеткой (см. § 47) и со сложными стержнями (§ 46) эта непрерывная прямолинейная зависимость в линиях влияния нарушается, а при криволинейных поясах в некоторых частях она совсем не имеет места, что несколько осложняет использование описанного приема, заставляя определять ординаты усилий помещая груз $= 1$ в ряде узлов. Но и здесь возможны некоторые упрощения по следующим соображениям.

Предполагая груз $P = 1$ слева от сечения, мы можем усилие любого стержня представить в таком общем виде:

$$S = Ak - Pk' = \frac{l - x}{l} k - 1 \, . \, k' \quad \ldots \ldots \ldots (114).$$

По этому выражению усилие каждого стержня слагается из члена, характеризующего влияния опорного сопротивления и представляющего собой ничто иное, как ту же «правую» прямую, о которой было сказано выше, и из второго члена представляющего влияние самого груза $= 1$.

Учет влияния первого члена, как было показано выше, может быть сделан путем построения *диаграммы Кремона для* $A = 1$ (черт. 179, диагр. № 0), предполагая ферму закрепленной правым концом, и проведением прямой, имеющей под левой опорой ординату равную усилию этого стержня на этой диаграмме.

Например, на черт. 179 для усилия в стержне $(b - h)$ ординату $- b_0 h_0$ *(на чертеже она отложена в масштабе вдвое меньшем против диаграммы)* для усилия стержня $(o - m)$ ординату $- o_0 m_0$ (по масштабу диаграммы) и т. д.

Учет влияния второго члена $- P \, . \, k'$ из выражения (114) определяется аналогичным построением диаграммы усилий для положения груза $P = 1$ *в каждом узле фермы, предполагая* ее закрепленной *другим* концом. На черт. 179 такие диаграммы I, II, III и IV, построены для положения груза $= 1$ в узлах 1, 2, 3 и 4.

Вполне ясно, что в этих диаграммах усилия в стержнях, лежащих между опорой A и грузом $= 1$, равны нулю, вследствие чего диаграммы постепенно уменьшаются, что делает построение их более простыми, чем если бы ферма рассматривалась как 2-х опорная и диаграммы строились бы для всей фермы. Дальнейшее упрощение в этом приеме заключается в том, что для симметричных ферм, сохраняющих при проведении разреза неизменяемость в правой части от сечения, построение диаграммы может производиться только до среднего узла, так как в этом случае при положении груза $= 1$ в правой части от разреза, уравнение усилия будет иметь вид:

$$S = Ak = \frac{l - x}{l} k.$$

т.-е. будет опеределяться «правой» прямой, положение которой определяется диаграммой № 0, построенной для $A = 1$

Переходя к построению линий влияния при помощи построенных диаграмм для $A = 1$ и положения груза $= 1$ в разных узлах (I, II, III и IV), мы должны, руководясь выражением (114).

$$S = \frac{l - x}{l} k - 1 \, . \, k',$$

вычитать из ординат «правой» прямой, положение которой определяется ординатой под левой опорой равной усилию рассматриваемого стержня по диаграмме № 0, вычитать под каждым узлом фермы ординаты, по величине равные усилиям того же стержня на соответствующей диаграмме. Разностью этих ординат будет определяться ордината линии влияния под узлом, где помещен груз $P=1$.

На черт. 179 для усилия стержня $b-h$, имеющего ординату под опорой A равную отрезку $-b_0h_0$ вычитаются под первым узлом ордината $+b_1h_1$, определяемая по диаграмме I, под вторым узлом ордината $+b_2h_2$, определяемая по диаграмме II, в остальных узлах вычитания нет, так как по диаграммам III и IV действие груза $P=1$ дает усилие $bh=0$. Таким образом, контур линии влияния очерчивается многоугольником $a-2-3-b$.

Аналогичным путем строится линия влияния стержня om, в котором она в конечном виде очерчивается многоугольником $a-2-4-5-b$, и других стержней.

Линия влияния стержня op (черт. 179), как средней стойки симметрично работающей для правой и левой части, будет иметь симметричную форму.

В нижеследующем примере рассмотрено построение изложенным способом линий влияния для двухрешетчатой фермы с криволинейным поясом.

Пример 34. Двухрешетчатая ферма с криволинейным поясом. Показанная на черт. 180 двухрешетчатая ферма с криволинейным верхним поясом статически определима и неизменяема, как легко видеть по ее геометрическому образованию.

Основываясь на принципах, изложенных в § 48, строим диаграммы усилий (черт. 180) № 0 для случая действия силы $A=1$, приложенной в узле A и направленной кверху и диаграммы № I, II и III для действия силы $P=1$, приложенной последовательно в узлах 1, 2 и 3, предполагая самую ферму, как бы закрепленной на правом конце. Построения диаграммы для положения груза $P=1$ в узлах правой половины не требуется, так как сама ферма симметрична и сохраняет неизменяемость правой части при разрезах, проводимых в левой части.

Для построения линии влияния усилия в раскосе $D_{3,4}'$, которому на диаграммах соответствуют отрезки om, откладываем под опорой A ординату aa' равную отрезку $(-om)$ из диаграммы № 0) проводим прямую $a'b$, которая своими ординатами определяет изменение этого отрезка (om) в отношении $(l-x):l$. Ординаты этой прямой будут определять полное усилие раскоса пока груз $P=1$ будет находиться справа от сечения (см. выраж. 113). При положении же груза $P=1$ слева от сечения в выражение усилия раскоса (114) должно войти не только влияние опорного давления, но и влияние самого груза. На основании этого из ординат прямой $a'b$ под узлом № 1 вычитаем ординату c_1c_1', равную отрезку om по диаграмме I, под узлом № 2 ордината прямо $a'b$ остается без изменения, так как по диаграмме II отрезок $om=0$, под третьим узлом из ординаты прямой $a'b$ вычитаем ординату c_3c_3, равную отрезку $+om$ по диаграмме III, во всех остальных узлах, лежащих правее сечения, ординаты прямой остаются без изменения, а потому линия влияния очертится ломаной $a-c_1-c_2-c_3-c_4-b$.

На том же чертеже 180 таким же путем построена линия влияния для стержня U_3, нижнего пояса. Исходным построением служит прямая $a'b$, которая своими ординатами определяет усилия в поясе при положении груза в разных узлах; положение этой прямой определяется ординатой под левой опорой $aa'=$ отрезку oc по диаграмме № 0. Из ординат этой прямой под соответствующими узлами вычитаются ординаты u_1, u_2 и u_3, соответствующие усилию этого стержня (oc) в диаграммах I, II и III. Вершинами ординат a, 1, 2, 3, 4 и b, полученных от этого сложения, определяется контур линии влияния.

На том же чертеже 180 построена линия влияния для средней стойки V_{11} (по диаграммам стержня pq). Для построения линии влияния, под опорой A отложена ордината $aa_1 = -\frac{1}{2}$, т.-е. величина отрезка pq по диаграмме № 0 с последующим вычитанием из нее под узлами 1, 2 и 3 ординат, равных отрезкам pq на диаграммах I, II и III. При положении груза $P=1$ в третьем узле ордината $qp = O$, а потому опорная ордината остается без изменения. При положении груза $P=1$ в четвертом узле усилие стойки $= +1$, а потому ордината под этим узлом $= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$. Вследствие симметричности работы этой стойки, как для расположения груза $P=1$ слева, так и справа от нее, линия влияния, построенная для левой половины, должна быть симметрично распространена для правой половины.

§ 49. Построение линий влияния при помощи диаграммы скоростей. Изложенный в предыдущем параграфе простой графический прием определения ординат линий влияния при помощи планов Кремона применим только в тех фермах, которые по своему образованию допускают построение самого плана Кремона. Более общим способом для построения сложных линий влияния является прием построения их как эпюр возможных перемещений при помощи мгновенных полюсов или диаграмм скоростей.

Основные принципы построения линий влияний при помощи мгновенных полюсов изложены в § 35. Но этот прием очень удобный в тех случаях, когда с устранением стержня, как связи, ферма превращается в механизм с небольшим числом дисков или звеньев; но он очень усложняется, когда ферма превращается в механизм с целым рядом звеньев, (как это имеет место в примере 39). В таких случаях построение линии влияния значительно упрощается через построение диаграммы скоростей.

В § 30 нами были изложены принципы построения диаграммы скоростей, определяющих перемещения узлов ферм, становящиеся возможными вследствие устранения из системы стержня или связи. Зная полное возможное перемещение загружаемых узлов по направлению действия нагрузки, можно построить эпюру возможных перемещений узлов по этому же направлению. Последняя же, как известно из § 7, может быть принята за линию влияния для устраненной связи, при условии изменения ее в масштабе, соответствующем возможной деформации этого стержня.

Разберем первоначально применение этого приема для построения линии влияния в простой ферме, например, решетчатой фермы, показанной на черт 181.

Для определения усилия в стржне U_{34} этой фермы предполагаем этот стержень устраненным из состава фермы, чем она превращается в подвижную систему. Заменив стержень U_{34} соответствующим ему усилием и закрепив мысленно всю правую неизменяемую часть 4, 12, 8 фермы, мы тем самым допускаем, что левая часть ее 3, 12, 0, 3 вместе с опорной реакцией A и усилием U_{34} получает возможность перемещения относительно правой части вокруг узла 12. Возможное относительное смещение узла 3 может быть охарактеризовано соответствующей ему скоростью, которой мы задаемся в виде отрезка $3 - 3'$ по направлению раскоса $D_{3\ 12}$, Приняв точку $3'$ за исходную, мы можем на основании данных § 30 построить диаграмму относительных скоростей для всех узлов фермы. Точка $13'$ получится проведением $3'-13' \parallel 3-13$ до пересечения с направлением $12-13$; точка $2'$ получится в пересечении прямых $3'-2' \parallel 3-2$ и $13'-2' \parallel 13-2$, точка $14'$ получится в пересечении прямых $2'-14' \parallel 2-14$ и $13'-14 \parallel 13-14$ и т. д. до получения точки O'.

Нас интересуют вертикальные перемещения грузовых узлов, т.-е. узлов, где приложена вертикальная нагрузка, в рассматриваемом случае узлов 0, 1, 2, 3, 4 .... 8. На полученной диаграмме эти перемещения будут определяться горизонтальными проекциями полных перемещений, т. е. горизонтальными проекциями линии $0-0'$, $1-1'$, $2-2'$...., потому что, как известно, направление относительных скоростей или перемещений откладывается перпендикулярно к направлению возможного движения.

Измерив эти отрезки и отложив их в виде ординат $0'_1-0'$, $1'_1-1'$, $2'_1-2'$, $3'_1-3'$ по одну сторону от оси абсцисс ab (черт. 181-в), т.-к. все перемещения по нашей диаграмме направлены в одну сторону (в левую) от действительного положения узлов, и соединив их вершины прямыми, мы получим эпюру возможного перемещения этих узлов, относительно неподвижной правой части, положение которой определяется прямой $4-8$, или осью абсцисс ab.

Обращая внимание на то, что опорный узел на нашей диаграмме также получил перемещение, определяемое отрезком $0'_1 0_1$, тогда как в действительности он не имеет этого смещения, что явилось результатом нашего предположения о неподвижности правой части, мы должны будем для получения действительных перемещений повернуть всю ферму так, чтобы это перемещение было устранено, что на эпюре вертикальных перемещений охарактеризуется проведением прямой $8-0'$. Тогда величины действительных возможных вертикальных перемещений всех узлов определятся разностью ординат этой прямой и ординат, полученных по диаграмме скоростей. В результате вычитания этих ординат мы получим действительную эпюру возможных вертикальных перемещений, которая на черт. 181-в представлена заштрихованным треугольником.

Для перехода от эпюры возможных перемещений к линии влияния надо определить знак и масштаб, соответствующий возможной деформации усилия.

Составляя аналитическое выражение усилия U_{31} по диаграмме скоростей, мы можем написать таковое, исходя из выражения возможной работы:

$$+U_{31} \cdot \delta - Ay_o + 1 \cdot y_p = O$$

В этом выражении знаки поставлены в соответствии со знаками моментов сил A, U и $P=1$ относительно изображающих точек.

Так как вообще $A = 1\,\frac{l-x}{l}$, то наше уравнение приводится к такому виду:

$$U_{3,1} = \frac{1}{\delta}\left[y_o \frac{l-x}{l} - y_p\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115).$$

Из этого уравнения также видно, что ординаты эпюры действительных перемещений определяются разностью ординат прямой $8-0'$ и ординат относительных перемещений каждого узла, что нами уже было получено[1]).

Масштабом для перехода от эпюры возможных смещений к линии влияния будет служить множитель $1:\delta$, в котором δ — сумма перемещений узлов, к которым относится устраненный стержень. U_{34}, равная возможной деформации этого стержня и определяемая на диаграмме вертикальным отрезком $3'_1 - 3$, как проекцией возможного перемещения узла 3. Действительно, согласно выражения (59), величина перемещения узла 3 по направлению стержня U_{34} может быть выражена через угол $\Delta\Theta$ поворота левой части вокруг шарнира—полюса 12, а именно $\delta = h \cdot \Delta\Theta$; аналогично возможные перемещения по направлению сил A и P могут быть выражены так: $y_a = \frac{l}{2}\Delta\Theta$ и $y_p = p \cdot \Delta\Theta$. Подставляя эти значения возможных перемещений в выражение (115) получим его в таком виде:

$$U_{34} = \frac{1}{2}\,\frac{l}{h}\,\frac{l-x}{l} - \frac{p}{h}$$

которое представляет собой уравнение «левой» прямой линии влияния пояса и является результатом масштабного преобразования отрезков δ, y_a и y_p. Итак, приняв отрезок, определяющий собой возможную деформацию стержня за единицу масштаба ординат эпюры возможных перемещений, мы будем иметь ординаты линии влияния.

Знак линии влияния определяется по уравнению (115) возможной работы. Знак первого члена этого уравнения соответствует по эпюре прямой (bo'), положение которой определяется ординатой под левой опорой. На черт. 181 согласно выражения 115 ординаты этой прямой положительны.

Следует отметить, что в рассмотренном случае при построении диаграммы скоростей все перемещения направлены в одну сторону от действительного положения узлов, но могут быть случаи, когда они будут направлены в разные стороны от действительного положения узлов (как это имеет место, например, в примере 40). Это перемещение узлов в разные стороны учитывается при построении эпюры возможных перемещений тем, что ординаты ее откладываются в разные стороны от оси абсцисс.

На черт. 182 построена диаграмма скоростей для случая, когда устранен стержень раскоса D_{312}, вследствие чего вся левая часть вместе с реактивной силой A получает возможность вертикального перемещения параллельно самой себе вокруг шарниров 12 и 4 правой части, принятой неподвижной. За исходную точку принята точка $3'$, полученная отложением отрезка (скорости) $3 - 3'$ по направлению стержня $3 - 4$, являющегося радиусом по отношению к узлу 3.

Так как перемещение левой части происходит параллельно самой себе, то величины вертикальных относительных перемещений должны быть равны между собой $00' = 11' = 22' = 33'$. Действительные вертикальные перемеще-

---

[1]) Построение эпюры возможных перемещений в рассмотренном случае могло быть упрощено в силу того соображения, что левое звено $0 - 3 - 12$ само по себе неизменяемо, так что можно было бы, не определяя перемещений всех узлов, определить непосредственно перемещение узла 0 проведением прямой $3' - 0' \parallel 3 - 0$ до пересечения с направлением $12 - 0$. Ординатой $0_1 0'$, как проекцией возможного перемещения, определяется прямая $0' - 4$, характеризующая возможное перемещение диска $0 - 3 - 12$ относительно диска $12 - 4 - 8$, а, следовательно, узлов 1, 2 и 3 (черт. 181-в). Дальнейшее построение эпюры возможных перемещений понятно из вышеизложенного.

ния определяются введением корректива на уничтожение полученного перемещения опорной точки 0, и в конечном результате эпюра возможных перемещений нижних узлов очертится двумя треугольниками $0'—3'—c$, $c—4—8$.

Величина усилия $D_{3\,12}$ по выражению возможной работы определится так

$$-D_{3\,12}\,.\,\delta - A\,.\,y_o + y_p = 0$$

откуда

$$D_{312} = \frac{1}{\delta}\left(-y_o\frac{l-x}{l} + y_p\right) \quad \ldots\ldots\ldots (116).$$

Согласно этого уравнения масштаб линии влияния устанавливается величиной возможной деформации δ по направлению самого раскоса, которая в рассматриваемом случае определяется как проекция исходного отрезка $3—3'$ на направление, перпендикулярное направлению раскоса и будет равен $\delta = 1 \times Sin\,\varphi$, где φ—угол наклона раскоса к горизонту.

Согласно того же уравнения (116), в котором первый член отрицателен, ордината, соответствующая перемещению y_o, должна быть отрицательна, а потому ординаты прямой $b—o'$ на эпюре перемещений должны быть отрицательными. Ординаты же перемещения узлов 1, 2 и 3, как большие ординаты $y_o\,\frac{l-x}{l}$, должны быть положительными. Таким образом в линии влияния треугольник $0'—3'—c$ будет положительным, а треугольник $c—4—8$—отрицательным (черт. 182).

В рассмотренных случаях исходный отрезок для построения диаграммы скоростей *был принят нами равным длине панели d—фермы, что необязательно*, но удобно, так как это иногда упрощает построение диаграммы, как это имело место, например, при построении линии влияния раскоса и вообще облегчает определение масштаба для перехода от эпюры возможных смещений к линии влияния.

Способ ложного построения. Диаграммы скоростей могут быть построены, если известны две исходные точки. Обычно при построении диаграммы задаются произвольной возможной скоростью одного узла, скорость другой точки или узла определяется из условия возможной подвижности фермы, как механизма: например, из условия шарнирности закрепления, подвижности опор и т. п.

Но могут быть случаи в сложных системах, когда, при наличии принятой или полученной точки диаграммы, следующая точка ее не будет выявляться непосредственно (такой случай разобран на черт. 183 и в примере 40). В таких случаях дальнейшее развитие построения диаграммы может быть сделано путем последовательного приближения на основании известного положения проективной геометрии, гласящего, что если какой либо многоугольник так изменяет свое положение, сохраняя параллельность сторон, что все его углы кроме одного, перемещаются по прямым, то и этот последний перемещается по прямой.

Поясним этот прием на примере (черт. 183), рассмотрев для этого ферму, которая приведена в подвижное состояние путем устранения стержня D_{24}. Начало построения диаграммы скоростей сделано, исходя из того, что левое звено I может иметь вращение вокруг шарнира 0. Задавшись возможной скоростью узла *2* в виде отрезка $2—2'$, *находим по общему* правилу скорость узла 1, проводя для этого прямую $2'—1' \parallel 2—1$ до пересечения с направлением $1—0$. Далее для определения скоростей узлов

3 и 4 мы можем провести прямые $2'-3_1 \parallel 2-3$ и $1'-4_1 \parallel 1-4$, но этого недостаточно для определения относительной скорости одного из этих узлов.

Выход из положения может быть сделан, если мы зададимся двумя ложными перемещениями, например, узла 3, т. е ложными положениями точек 3_1 и 3_2. Задавшись этими ложными точками 3_1 и 3_2 мы можем продолжить построение диаграмм, находя последовательно обычным построением точки 4_1, 6_1 и 4_2, 6_2. Таким образом мы доведем построение диаграмм до конца и в результате получим две ложных диаграммы скоростей, подобных между собой и обладающих тем свойством, что все узловые точки их перемещаются по прямым 4_1-4_2, 3_1-3_2, 6_1-6_2 и т. д.

Имея эти диаграммы, мы можем сопоставить их с условиями возможного движения какого-либо из узлов фермы, как механизма, например, с условием подвижности опорнсго узла и т. п. Таким образом, мы будем иметь два условия, определяющие возможное перемещение узла: одно из условий самой фермы, как механизма, а другое по условию движения узлов диаграммы по прямым. По этим двум условиям, представляемым двумя прямыми, определяем истинное положение возможного перемещения этого узла, которое определяется точкой пересечения этих двух прямых. Зная же истинное смещение этого узла, можно построить истинную диаграмму скоростей для всех узлов.

На черт. 183 истинное положение диаграммы определяется из условия подвижности опорного узла B' и прямой 6_1-6_2, которые в своем пересечении определяют истинное положение точки $6'$ и тем самым дают возможность построить истинное положение диаграммы скоростей $6'-4'-3'$.

В заключение следует отметить, что так как приемы построения эпюры возможных перемещений, как при помощи мгновенных полюсов, так и при помощи диаграммы скоростей, обоснованы на одном и том же принципе возможного движения жесткой фигуры, то они могут взаимно дополнять друг друга и служить для взаимного контроля. Очень часто можно, не определяя всех мгновеных полюсов, знать положение полюсов некоторых из дисков или стержней. Положением этих полюсов будет корректироваться положение отдельных точек на диаграмме скоростей.

Так, например, если на черт. 183 будет известно положение мгновенного полюса EII, который легко определяется через полюса EI и I II, то положение каждой из изображающих точек $3'$ и $4'$ диаграммы скоростей может быть получено в пересечении прямых $2'-3' \parallel 2-3$ с $3-$EII и $1'-4' \parallel 1-4$ с $4-$E II.

Неудобством изложенного приема является необходимость построения диаграммы скоростей для каждого исследуемого стержня. Избежать этого неудобства можно тем, что, сделав построение диаграмм скоростей и по ним линий влияния для одного или нескольких стержней, строить по ним линии влияния остальных стержней, как суммарных.

Пример 39. Двухраскосная ферма с криволинейным поясом (черт. 184). Под литерой (а) этого чертежа сделано построение диаграммы скоростей и соответствующей ей линии влияния стойки $V_{4\,17}$.

С выделением этой стойки из состава фермы неизменяемой остается правая часть, очерченная узлами 5, 18, 17 .... 10,5. Вся левая часть представляет систему подвижных стержней.

Задаваясь отрезком $4-4'$, как скоростью возможного перемещения узла 4 и откладывая его по направлению стержня $5-4$, строим последовательно диагремму скоростей для всех узлов левой стороны.

Для получения эпюры возможных перемещений откладываем от оси абсцисс величины вертикальных перемещений нижних грузовых узлов фермы, определяемых на диаграмме скорстей горизонтальными отрезками, 00′, 11′, 22′ и т. д. Полученную таким построением зигзагообразную эпюру относительных перемещений, корректируем на величину перемещения опорного узла 0 – 0′, приводя это смещение к нулю. Полученная в результате этого построения зигзагообразная линия 0′—1′—2′—3′—4′—5′- представляет собой эпюру действительных вертикальных перемещений грузовых узлов.

Масштаб и знак определяются из уравнения возможной работы для левой части фермы, по которому

$$-V_{4\,17}\cdot\delta - A\,y_o + 1\cdot y_n = O$$

откуда

$$V_{4\,17} = \frac{1}{\delta}\left[-\frac{l-x}{l}\,y_o + y_n\right]$$

Следовательно, под правой частью фермы, для которой $y_n = o$, знак линии влияния отрицательный.

Масштаб определяется непосредственно начальным отрезком 4 — 4′ диаграммы скоростей, как представляющий величину перемещения узла, происходящего под влиянием деформации стойки.

На том же черт. 184 под лит. В проведено построение линии влияния для усилия в стержне $U_{4\,5}$ нижнего пояса.

С устранением этого стержня из состава фермы становится возможным движение левой части относительно узлов 17 и 18, остающейся неизменяемой, правой части фермы.

Для построения диаграммы скоростей задаемся возможным смещением узла 4, которое принимаем равным отрезку 4 – 4′, откладываемому по длине стержня 17 — 4. Дальнейшее построение диаграммы скоростей проводим обычным способом. Горизонтальными отрезками 0 — 0′, 1 — 1′, 2—2′ определяются относительные вертикальные перемещения узлов 0, 1, 2; относительные вертикальные перемещения узлов 3, 4 и остальных равны нулю.

Исправляя полученную эпюру 0′—1′—2′—3′ относительного перемещения на величину поворота всей фермы вокруг шарнира опоры B с приведением вертикального перемещения на опоре A к нулю, получим эпюру действительных возможных перемещений, очерченную точками a, — 1′— 2′— 3′— b — a.

Масштаб для перевода эпюры возможных перемещений в линию влияния стержня $U_{4\,5}$ служит начальный отрезок 4 — 4′, определящий собой величину возможной деформации стержня $U_{4\,5}$.

Знак линии влияния определяется уравнением возможной работы, которое при положении груза = 1 в правой части, напишется так:

$$+U_{4\,5}\,\delta - A_o\,y_o = O$$

откуда

$$U_{4\,5} = A\cdot\frac{y_o}{\delta}$$

следовательно усилие положительно.

На том же черт. 184 под лит. *c* сделано построение линии влияния для усилия раскоса $D_{18\;5}$ той же фермы.

При устранении этого раскоса из состава фермы, неизменяемой остается часть фермы 4, 17, 11, 10, 4; вся же левая часть получает возможность вертикального перемещения.

Задаваясь возможным перемещением для узла 3 в виде отрезка 3—3′, строим последовательно, обычным путем, диаграмму скоростей для всех узлов левой части. Горизонтальными отрезками 0—0′; 1—1′, 2—2′, 3—3′ определяются ординаты относительных вертикальных перемещений узлов 0, 1, 2 и 3, которые откладываем в виде ординат и получаем эпюру 0′—1′—2′—3′—4′ относительных перемещений.

Исправляя ее путем поворота вокруг шарнира опоры B на величину вертикального перемещения 0—0′ опорного левого узла, приводим ее к действительной эпюре возможных перемещений всех нижних грузовых узлов фермы. Эта эпюра очерчивается ломаной линией 0′—1′—2′—3′—4—b′, отнесенной к линии ab.

Масштабом для перевода этой эпюры в линию влияния будет служить условие перемещения узла 18, являющееся результатом возможной деформации раскоса; единица масштаба $\delta = 1$ определяется отрезком 18—18_2 направления перпендикуляра, опущенного из изображающей точки 18′ на направление раскоса.

Знак линии влияния определяется уравнением возможной работы, которое при положении груза $= 1$ в правой части напишется так:

$$D_{18\,5}\cdot\delta - A\,y_0 = O$$

откуда

$$D_{18\,5} = A\,\frac{y_0}{\delta}$$

а потому в правой части линия влияния положительна.

Когда, в подобных фермах со сложной решеткой, сделано построение линий влияния характерных стержней, построение линий влияния других стержней может быть сделано исходя из рассмотрения их, как суммарных линий влияния, уравнения которых определяются на основании законов статики.

Например, при наличии линии влияния раскоса $D_{5\,18}$, усилие, уже рассмотренного выше, поясного стержня $U_{4\,5}$, может быть определено из условия равновесия по разрезу s—s (черт. 185) и напишется так

$$-U_{4\;5}\,h_4 + Aa_4 - D_{5\;18}\cdot r = O$$

откуда

$$U_{4\;5} = A\,\frac{a_4}{h_4} - D_{5\,18}\,\frac{r}{h_4} = U^0{}_{4\,5} - D_{5\,18}\,\frac{r}{h_4}$$

В этом уравнении a_4, h_4 и r—соответственные плечи опорной реакции и усилий $U_{4\;5}$ и $D_{5\;18}$ относительно моментной точки (17).

По этому уравнению видно, что усилие $U_{4\;5}$ сложной фермы слагается из усилия $U^0{}_{4\;5}$ простой фермы и из усилия раскоса $D_{5\;18}$, измененного в отношении $r:h_4$. Соответственно этому линия влияния $U_{1\;5}$, как стержня сложной фермы, будет слагаться из линии влияния усилия $U^0{}_{4\;5}$, представляющей собой треугольник 0—4—b с наибольшей ординатой

$$\frac{a_4}{h_4}\;\frac{(l-a_4)}{l}$$

под моментной точкой 17 и, из линии влияния раскоса $D_{5\;18}$, показанной на черт. 184-с, ординаты которой, измененные в отношении

$r:h_4$, должны быть или вычтены, или прибавлены, смотря по знаку, к линии влияния $U^0_{4\ 5}$. Конечный контур суммарной линии влияния очертится многоугольником $0 - 1' - 2' - 3' - b$, вполне подобным многоугольнику линии влияния для того же стержня $U_{4\ 5}$, показанной на черт. 184-в.

Пример 40. Многорешетчатая ферма. Ферма этого типа показана на черт. 186. Благодаря наличию среднего стержня 5—26 ферма эта неизменяема, что непосредственно видно по диаграмме скоростей, построенной для устраненного стержня раскоса D (24—2) и очерченной четыреугольником $0' - 10' - 13' - 23'$, который по расположению стержней не подобен ферме (см. § 43). Ферма эта статически определима, так как в ней соблюдено условие зависимости числа стержней и узлов ($51 = 2 . 27 - 3$).

Определение усилий в стержнях этой фермы и построение для них линий влияния непосредственно по законам статики было бы очень сложно, тогда как при помощи диаграммы скоростей задача о построении линий влияния решается довольно просто.

Рассмотрим, например, построение линии влияния для стержня раскоса D (24—2).

Устранив этот стержень и приложив вместо него две равные и противоположные силы, мы делаем систему подвижной, в которой узел 2 может получить некоторое вертикальное перемещение. Приняв треугольник $4 - 26 - 6$, остающийся неизменяемым при устранении стержня $24 - 2$ за неподвижный, строим диаграмму скоростей для всей системы, задавшись отрезком $2 - 2'$, как возможным перемещением узла 2 в вертикальном направлении.

Имея точку $2'$, находим изображающие точки $19'$, $20'$ и $21'$ для соответствующих узлов, так как эти точки должны лежать на прямых 6—19, 5—20 и 4—21, могущих вращаться вокруг узлов неподвижного треугольника. Дальнейшее построение диаграммы становится невозможным за недостатком данных, а потому воспользуемся методом ложного построения (см. стр. 132).

Задаемся произвольным положением изображающей точки 18_1, которая должна лежать на прямой $\parallel$ (19—18). Исходя из нее, находим положение изображающих точек $17'$, $16'$, $15'$ и $7_1'$, которые должны лежать на прямых 4—17, 5—16, 6—15, 6—7, как имеющих вращение вокруг узлов неподвижного треугольника. Далее, проводя линию

$$
\begin{array}{lllll}
15' - 14_1 \parallel 15 - 14 & \text{и} & 7_1' - 14_1 \parallel 7 - 14 & \text{находим точку} & 14_1 \\
17' - 8' \parallel 17 - 8 & \text{и} & 7_1' - 8' \parallel 7 - 8 & \text{»} \quad \text{»} & 8' \\
16' - 9' \parallel 16 - 9 & \text{и} & 8' - 9' \parallel 8 - 9 & \text{»} \quad \text{»} & 9' \\
14' - 12' \parallel 14 - 12 & \text{и} & 8' - 12_1 \parallel 8 - 12 & \text{»} \quad \text{»} & 12_1 \\
9' - 11' \parallel 9 - 11 & \text{и} & 15' - 11' \parallel 15 - 11 & \text{»} \quad \text{»} & 11'
\end{array}
$$

По условию движения системы точка 12_1 должна лежать на вертикали точки $11'$, что в построенной диаграмме неудовлетворено и она дает первое ложное положение.

Второе ложное положение диаграммы скоростей находим, исходя из второго ложного положения изображающей точки 18_2, которое сохраняет положение точек $17'$, $16'$ и $15'$, но дает новое положение точки 7_2, а в соответствии с этим дает новые положения точек 14_2 и 12_2 при старом положении точек $8'$, $9'$ и $11'$.

Из этих двух ложных положений диаграммы скоростей видно, что изображающая точка $12'$ должна перемещаться по прямой $8' - 14$, тогда как точка $11'$ остается неподвижной, а потому по условию системы истинное положение точки $12'$ будет иметь место в пересечении прямой $8' - 14$

с вертикалью точки $11'$, где она сольется с точкой $14'$, а потому, делая обратное построение, получим истинное положение диаграммы, которое будет соответствовать совпадению точки $7'$ с узлом 7 и точки $18'$ с точкой $17'$.

Зная положение изображающей точки $18'$, можно найти положение точки $3'$, которая должна лежать на пересечении прямых $2'-3' \parallel 2-3$ и $18-8' \parallel 18-3$.

Далее проводя	$3'-22' \parallel 3-22$	и $21'-22' \parallel 21-22$	находим	точку	$22'$
» »	$20'-1' \parallel 20-1$	и $2'-1' \parallel 2-1$	»	»	$1'$
»	$1'-25' \parallel 1-25$	и $21'-25' \parallel 21-25$	»	»	$25'$
»	$25'-24' \parallel 25-24$	и $22'-24' \parallel 22-24$	»	»	$24'$
»	$24'-23' \parallel 24-23$	и $22'-23' \parallel 22-23$	»	»	$23'$
»	$25'-0' \parallel 25-0$	и $1'-0' \parallel 1-0$	»	»	$0'$

чем заканчивается построение диаграммы скоростей.

Зная возможное перемещение узловых точек нижнего пояса, строим эпюру возможных смещений этого пояса, которая характерна тем, что все узлы, лежащие слева от треугольника $4-26-6$ имеют изображающие точки справа от себя, а все узлы, лежащие справа от того же треугольника, имеют изображающие точки слева от себя, а потому на эпюре возможных смещений ординаты, определяющие возможные смещения этих узлов, должны откладываться по разные стороны от оси абсцисс, что дает контур эпюры по многоугольнику $0'-3'-4-7-8'-10'$.

Так как опорные точки 0 и 10 не могут иметь вертикальных перемещений, то исправляем эту эпюру путем вращения вокруг неподвижного треугольника, чему соответствует проведение прямой $0'-10'$. Действительная эпюра возможных перемещений показана заштрихованным многоугольником $0'-3'-4'-7'-8'-10'$ и состоит из четырех частей.

Масштаб, нужный для перехода от эпюры перемещений к линии влияния и знак ее определяем из условия возможной работы относительно изображающих точек, которые для положения груза $= P$ в узле 3 напишется так (см. выраж. 66)

$$D_{2\ 21}\,(22')\ Sin\,\varphi + A\,.\,(0\,0') - P\,.\,(3\,3') - B\,.\,(10\,10') = 0$$

но так как отрезки $2-2'$, $0-0'$, и $10-10'$ все равны длине панели d, а величины опорных реакций A и B могут быть выражены в функции P, то уравнение усилия может быть переписано так

$$D_{2\ 21} = \frac{P}{Sin\,\varphi}\left[+1+\frac{x}{l}-\frac{l-x}{l}\right] = \frac{P}{Sin\,\varphi}\cdot\frac{2x}{l}$$

из чего следует, что при переходе к линии влияния ординаты эпюры возможных перемещений должны быть изменены в отношении $1 : Sin\,\varphi$ и что знак ординаты под узлом 3 положителен; этим определяются знаки в остальных частях линии влияния.

На том же чертеже 186 под литерой „в" построена эпюра возможных перемещений для верхних узлов (нагрузка по верху). Перенесение нагрузки не изменяет диаграммы скоростей, но эпюра возможных смещений, соответственно изменению грузовых узлов, будет другая.

Масштаб и знак линии влияния определится из уравнения работы, которое при положении груза P в узле 22 напишется так:

$$D_{2\ 21}\,d\,Sin\,\varphi + Ad - P\,.\,1{,}5\,d - B\,.\,d = O$$

В этом уравнении плечо силы P относительно изображающей точки $22'$ равно $1{,}5\ d$.

Выражая опорные реакции A и B в функции груза P и делая приведение, получим:

$$D_{2\ 24} = \frac{P}{Sin\,\varphi}\left(1{,}5 + \frac{x}{l} - \frac{l-x}{l}\right) = \frac{P}{Sin\,\varphi}\left(0{,}5 + \frac{2x}{l}\right)$$

Следовательно переходной масштаб этой линии влияния как и первой $= 1 : Sin\,\varphi$; ордината же линии влияния под узлом положительна, чем определяются знаки остальных частей.

КОНСОЛЬНЫЕ ФЕРМЫ.

§ 50. Характеристика консольных ферм. Статически определимые консольные фермы, подобно консольным балкам, представляют собой двухопорные фермы с одним или двумя свешивающимися концами. В них совмещаются свойства эпюр моментов и поперечных сил консольных балок и свойства линий влияния простых ферм.

В соответствие с характером изменения эпюры моментов, имеющей наибольшие отрицательные моменты на опорах, рациональный контур консольных ферм должен иметь увеличение высоты ферм к опорам. На черт. 187 показана двухконсольная ферма с характерным очертанием на эпюре моментов. Чаще же по эстетическим и конструктивным соображениям контур смягчается одним общим очертанием (черт. 189 и 190).

В процессе расчета консольных ферм надо различать междуопорную часть, усилия в элементах которой зависят от загружения как междуопорной части, так и консолей, и консоли, усилия в элементах которых зависят только от загружения их концов и поддерживаемых ими подвесных частей.

Усилия во всех элементах консолей, за редким исключением, характеризуются тем, что знак их, как зависящий только от одностороннего загружения, постоянен.

Междуопорная часть консольной фермы работает в более сложных условиях; в отличие от простых балочных ферм усилия в одном и том же поясе их могут быть различны, в зависимости от загружения междуопорной части или консоли. Рациональное соотношение между длиной междуопорной части, длиной консоли и длиной подвесной части, является сложной функцией, зависящей от величины постоянной и временной нагрузки и контура фермы; поэтому, не останавливаясь на этом вопросе[1]), укажем, что наиболее часто встречается отношение длины консоли l к длине L междуопорной части в двухконсольных фермах $\frac{l}{L}$ = от $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{3}$; в одноконсольных это отношение больше и доходит до $1:1$, но такое увеличение консоли связано с развитием отрицательного давления на противоположной опоре, которую поэтому приходится укреплять против под'ема.

[1]) Наиболее полное освещение этого вопроса имеется в работе Beyer'a „Eigengewicht günstige Grundmasse des Auslegertrager" 1908 г.

§ 51. Линии влияния в междуопорной части. Усилия в стержнях консольных ферм определяются теми же приемами, как и в двухопорных фермах, и если решетка ферм простая, то аналитически эти усилия легко выражаются в функции моментов и поперечных сил.

В междуопорной части, в которой моменты и поперечные силы изменяются в функции опорного давления, вопрос построения линии влияния сводится к вопросу знания линии влияния опорного давления, которая для консольных ферм строится также, как и для консольных балок (см. черт. 189). Сопоставляя аналитические выражения усилия, намечая по ним положения „правой“ и „левой“ очерчивающих прямых, снося на них ограничивающие узловые точки и продолжая их до конца консолей, мы получим контур линии влияния для рассматриваемого стержня междуопорной части; при наличии подвесных балочек линия влияния у концов консоли смягчается по прямым, идущим между шарнирами подвесной части.

На черт. 189 приведены примеры построения линий влияния некоторых стержней междуопорной части.

Линия влияния усилия стержня верхнего пояса O_4 определяется уравнением:

$$O_4 = -\frac{M_4}{h_4} = -A\frac{a_4}{h'_4} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (117)$$

Для построения ее откладываем на вертикали опоры A ординату $= -a_4 : h'_4$, чем определяется положение „правой“ прямой, своими ординатами пропорциональной линии влияния опорного давления A. С переходом груза $= 1$ на правую консоль „правая“ прямая, как и линия влияния опорной реакции, будет иметь непосредственное продолжение до вертикали, проходящей через конец консоли. „Левая“ прямая $a-4$ той же линии влияния, по общему свойству их, будет проходить через точку пересечения „правой“ прямой с вертикалью под точкой моментов и через нуль под левой опорой. Как прямая пропорциональная опорному давлению B, она будет продолжаться под левой консолью до конца консоли. Наконец, в пределах подвесных частей линии влияния будут изменяться по прямым, $0-c$ и $10-d$, проходящим через верх ординаты линии влияния под концом консоли и через нуль на вертикали под концом подвесной части.

Аналогичным путем строятся линии влияния для нижнего пояса (на черт. $189-U_4$).

В особых условиях по сравнению с отдельными стержнями поясов находятся стержни пояса, примыкающие к опорной стойке (на черт. 189 стержень O_8). Этот стержень хотя и находится в пределах междуопорной части, но работает только от загружения смежной ему консоли. Его линия влияния определяется уравнением:

$$-O_8 p + 1 \cdot x = O$$

откуда

$$O_8 = x : p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (118)$$

получаемым из условия равновесия правой части, при положении груза $= 1$ на расстоянии x от опоры B. Линия будет иметь очертание по треугольнику $(b-10-d)$ с наибольшей ординатой под концом консоли при $x = 2d$; далее под подвесной частью, по свойству линий влияния, она будет изменяться по прямой, сходя на нуль у противоположного конца подвесной части.

Линия влияния раскоса D_3 определяется уравнением:

$$D'_3 = -\frac{M_l}{r} = -A\frac{a_r}{r} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (119).$$

Для построения ее откладываем на вертикали под опорой A ординату $= -\frac{a_r}{r}$, через вершину которой и нуль под правой опорой будет проходить „правая“ прямая, своими ординатами пропорциональная ординатам линии влияния опорного давления. Эта прямая непосредственно проходит под правой консолью до ее конца. „Левая“ прямая $a-f$ определяется, как всегда, нулевой точкой под левой опорой и точкой f пересечения „правой“ прямой с вертикалью под точкой моментов. Эта прямая продолжается под левую консоль до ее конца. Снося на правую прямую узел 4 и на левую прямую узел 3, получим контур линии влияния раскоса, очерченный прямыми $c-0-3-4-10-d$.

§ 52 **Линии влияния в консольных частях.** Построение линий влияния для усилий в стержнях консоли сводится к определению положения прямой, определяющей форму линии влияния со стороны конца консоли; прямая, определяющая форму линии влияния со стороны междуопорной части сливается с осью абсцисс, так как загружение междуопорной части на работу консоли не влияет.

Уравнение прямой, образующей линию влияния со стороны конца консоли, составляется из аналитического выражения усилия при положении груза $= 1$ на отсеченном конце. Положение этой прямой определяется ординатой на конце консоли и нулем на оси абсцисс под моментной точкой, так как ось абсцисс является другой прямой, образующей линию влияния.

Снесением на эти прямые загружаемых узлов, ближайших к сечению, очерчивается контур линии влияния.

В пределах подвесной части, поддерживаемой консолью, линия влияния изменяется по прямой, как между шарнирами.

На черт. 190 сделано построение линий влияния для стержней O_2 и U_{12} поясов консоли.

Усилие O_2 определяется проведением сечения $1-1$ из уравнения момента относительно нижнего узла 1. При положении груза $= 1$ на конце консоли, величина усилия $O_2 = +\frac{1 \cdot d}{h'_1}$, чем определяется ордината под концом консоли и положение „левой“ прямой; „правая“ прямая сливается с осью абсцисс и пересекается с „левой“ под узлом 1.

Аналогичным будет построение линии влияния усилия U_{12} для которого ордината линии влияния под концом консоли $= -\frac{3\,d}{h'_{11}}$.

На этом же чертеже 190 сделано построение линий влияния для стержней решетки консоли D_3, D_2 и V_{13}.

Для всех этих стержней уравнение момента, составляемое относительно точки k пересечения поясных стержней, имеет общий вид:

$$Dr \mp 1 \cdot x = 0$$

откуда

$$D = \pm \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120).$$

Для случая положения груза $= 1$ на конце консоли, это уравнение будет иметь вид:

$$D = \pm 1 \cdot \frac{b}{r}$$

и определяет ординату линии влияния под концом консоли.

В зависимости от положения моментной точки k будут изменяться очертания линий влияния решетки, которые всегда четыреугольны, но при положении нулевой точки (D_3) в пределах консоли, линия влияния будет двухзначна ($\pm$); при выходе точки моментов за пределы консоли (D_2, V_{13}) линия влияния становится однозначной и по мере удаления моментной точки k в бесконечность, прямая, очерчивающая линию влияния на протяжении отсекаемого конца консоли, все более и более приближается к горизонтальному направлению.

При параллельных поясах в консоли (черт. 191) линия влияния решетки определяется прямой параллельной оси абсцисс по уравнению

$$D \, Sin \, \varphi + 1 = 0$$

откуда

$$D = -\frac{1}{Sin \, \varphi},$$

которое представляет собой прямую с постоянной ординатой на протяжении всей консоли от конца до сечения.

Пример 41. Одноконсольная ферма на трех опорах (черт. 192). Эта ферма, несмотря на свои три опоры, из которых одна неподвижна, статически определима, так как в ней третья подвижная опора C заменяет собой связевое условие раскоса устраненного в панели BC (см. § 40). Ферма эта неизменяема, как это легко видеть из ее геометрического образования. Порядок построения ее можно рассматривать так: часть ее AB между опорами неизменяема, как простая раскосная ферма; узел 5-й имеет неизменяемое положение, как прикрепленный двумя стержнями — стержнем 4—5 к ферме AB и стержнем C к земле; далее узел 5′ прикреплен двумя стержнями 4′—5 и 5′—5 к неизменяемым точкам и т. д.

Линия влияния опорного давления C определится из условия равновесия консольной части по сечению, проводимому через панель BC; проектируя все силы по разрезу 1—1 на вертикальную ось, при положении груза $= 1$ на консоли, будем иметь:

$$+C - 1 = 0 \quad \text{откуда} \quad C = 1.$$

Этим определяется контур линии влияния опорного стержня (черт. 192-а), который имеет постоянную ординату пока груз перемещается по консоли. Эта линия влияния имеет такой же вид, как линия влияния решетки консоли с параллельными поясами (сравн. черт. 191).

Величины опорных давлений A и B, как можно видеть по разрезу 1—1, будут зависить от усилия O верхнего пояса в панели BC, а потому предварительно определяем линию влияния этого стержня.

Усилие стержня O верхнего пояса, равное усилию нижнего стержня ($-U$) той же панели, определяется из уравнения момента сил, приложенных на консоли, относительно узла 5 и равно:

$$-Oh + 1x = 0$$

откуда:

$$O = -U = +\frac{x}{h}.$$

Линия влияния этого усилия имеет вид треугольника с наибольшей ординатой на конце консоли, равной длине консоли $3d$ деленной на плечо h (черт. 192-в), как вообще в поясных стержнях консолей.

Опорная реакция A определится теперь из уравнения моментов относительно точки B всех внешних сил, приложенных к ферме AB, и усилия O.

$$A = \frac{1}{l}(M_B - Oh).$$

Пока груз $= 1$ находится в пределах междуопорной части усилие O равно нулю, а потому опорная реакция $A = \frac{M_B}{l} = \frac{l-x}{l}$, т.-е. равна опорной реакции простой двухопорной балки и линия влияния ее определяется треугольником с ординатой $= 1$ под опорой A и нулем под опорой B (черт. 192-c). При положении груза $= 1$ на консоли, внешних сил на ферме не будет и на нее будет действовать только усилие O, а потому опорное давление будет определяться уравнением $A = -O\frac{h}{l} = -\frac{x}{l}$, которое представляет собой прямую линию cg_1, параллельную прямой $a'b$ — линии влияния опорной реакции простой балки, но с началом координат под опорой C.

Опорная реакция B определяется на основании тех же соображений, как и опорная реакция A. Линия влияния ее построена на черт. 192-d. В этой линии влияния будет иметь место переход от вершины b к нулю в точке c, как во всякой линии влияния между узлами.

Зная линии влияния опорных реакций не трудно определить усилие любого стержня и построить его линию влияния.

Так, например, усилие раскоса D_3 определится из условия равновесия относительно точки T—схода направлений поясов

$$-Dr - Aa = 0$$

откуда

$$D = -A\frac{a}{r}$$

построение линии влияния этого усилия понятно из черт. 192-е.

§ 53. **Консольно-подвесные фермы.** Одноконсольная ферма этого типа показана на черт. 188. Она отличается от обычных консольных ферм тем, что консольная часть ее соединена с основной частью фермы при помощи третьего пояса, переходящего в виде цепи через опорную стойку. Наличие этого пояса, к которому подвешена консоль, послужило поводом к наименованию таких ферм консольно подвесными.

Так как величина опорных реакций не зависит от характера внутреннего образования ферм, то в этих фермах опорные реакции работают так же, как и в простых консольных фермах и линии влияния их имеют такую же форму, как в простых консольных фермах (черт. 189).

Системы этого типа сохраняют статическую определимость только при условии, что консольные части $B - G_1$ и $C - G_2$ фермы своим верхним поясом не соединены с основными частями ферм, и имеют только шарнирное соединение с ними на опорах B и C. Неизменяемость системы очевидна из геометрического построения.

Указанное соединение консольных частей с основными частями ферм при помощи цепкого пояса и шарнира на опоре, позволяет определить усилие в цепи из выражения момента относительно опорного шарнира по разрезу $s-s$, проводимого через панель, ближайшую к этой опоре (черт. 193).

При положении груза P на консоли в расстоянии x от промежуточной опоры, усилие в звене N_0 цепи будет (черт. 193):

$$-N_0 h_0 Cosn\beta + Px = 0$$

откуда

$$N_0 = +P\frac{x}{h_0\, Cosn\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (121).$$

При положении же груза P на основной ферме, усилие в том же звене N_0 цепи по условию равновесия консольной части, равно нулю. Из этого следует, что в фермах этого типа загружение основной фермы не вызывает усилий в цепном поясе, который испытывает усилия от загружения только консоли и подвесной части. Усилия в отдельных звеньях его изменяются в зависимости от угла наклона β звена к горизонту; горизонтальная же слагающая H этих усилий одинакова для всех звеньев и определяется уравнением:

$$H = N_0 Cosn\beta = P\cdot\frac{x}{h_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (122).$$

Линия влияния этой слагающей усилий в цепи будет иметь форму треугольника $b-12-20$ (черт. 193-а), распространенного над консолью и подвесной частью, с наибольшей ординатой под концом консоли равной $l_1 : h_0$.

Усилия во всех звеньях цепи определяются из условия, что проэкции их на горизонтальную ось равны между собой:

$$N_1\, Cos\beta_1 = N_2\, Cosn\beta_2 = \ldots = H \quad \ldots\ldots \quad (123).$$

Из вырезания же узлов цепи и условия проектирования их на вертикальную ось определяются усилия в подвесках ферм; например в подвесках основной фермы:

$$-T_n - N_{n-1}\, Sin\beta_{n-1} + N_n\, Sin\beta_n = 0$$

выражая N в функции H—горизонтальной слагающей, получим:

$$T = H\,(tng\beta_n - tng\beta_{n-1}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124).$$

Таким образом линия влияния для H в измененном масштабе является линией влияния для всех стержней цепи и подвесок.

Усилия внутренних стержней основной фермы будут определяться из условия рассечения их и, если этим разрезом не будет рассекаться цепной пояс, то усилия в них будут выражены в функции опорного сопротивления и нагрузки, а потому линии влияния их будут строиться так же, как и в простой консольной ферме. Если же проводимым разрезом будет пересечена цепь, то ее усилие должно будет войти в уравнение равновесия, определяющее усилие; это включение повлечет за собой изменение очертания линии влияния в пределах консоли и подвесной части.

Например, усилие стержня O_4 внутреннего пояса, определяется по вертикальному сечению через 4-ую панель; из уравнения момента относительно узла 4:

$$O_4\, Cosn\gamma = -A\frac{a_4}{h_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125).$$

Это уравнение остается без изменений при расположении груза справа от сечения, как в пределах междуопорной части, так и на консоли. Линия влияния этого усилия построится обычным приемом, как для простой консольной фермы и состоит из 2-х треугольников $a-4-b$ и $b-12-20$ (черт. 193-а).

Усилие смежного стержня O_5 того же пояса определяется из уравнения момента относительно того же узла 4 по вертикальному разрезу через 5-ую панель, пересекающему цепной пояс, которое в общем виде напишется так:

$$+O_5 h_4 Cosn\gamma + Aa_4 + Hh_4 = 0$$

откуда

$$O_5 Cosn\gamma = -A\frac{a_4}{h_4} - H \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (126).$$

Пока груз будет расположен справа от сечения в пределах междуопорной части, усилие в цепи $H = O$, а потому усилие стержня $O_5 Cosn\gamma =$

$= -A\frac{a_4}{h_4}$, то-есть определяется тем же уравнением (125), как усилие

стержня O_4, таким образом, линии влияния этих стержней в пределах междуопорной части будут вполне одинаковы. С переходом груза на консоль цепь начинает работать и усилие стержня будет определяться уравнением:

$$O_5 Cosn\gamma = -A\frac{a_4}{h_4} - H = \frac{x}{l}\frac{a_4}{h_4} - \frac{x}{h_0} = x\left(\frac{a_4}{l \cdot h_4} - \frac{1}{h_0}\right) \quad . \; . \; (127)$$

которое представляет разность ординат двух прямых, из которых первая есть ничто иное, как линия влияния усилия этого стержня, как простой консольной фермы, а вторая—линия влияния усилия в цепи (выражен. 122).

Из уравнения (127) видно, что усилие $O_5 Cosn\gamma$ будет равно нулю, если выражение, стоящее в скобках, будет равно нулю:

$$\frac{a_4}{h_4 l} - \frac{1}{h_0} = 0$$

или

$$\frac{a_4}{l} = \frac{h_4}{h_0},$$

что удовлетворяется условием расположения вершины h_4 на прямой $A-E$, проходящей через опорную точку A и вершину E ординаты h_0. Это условие является общим, и если цепной пояс будет очерчен по прямой, удовлетворяющей этому условию (черт. 188), то все стержни верхнего пояса этой части фермы не будут работать при загружении консолей.

Усилие раскоса D_6 определится из выражения момента относительно точки k_6:

$$-D_6 r_k + Aa_k + N_6 y_k Cosn\beta = 0$$

откуда

$$D_6 = \frac{1}{r_k}(Aa_k + Hy_k) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (128).$$

из которого следует, что пока груз $= 1$ находится справа от сечения в пределах междуопорной части, усилие раскоса определяется уравнением $D_6 = Aa_k : r$, и линия влияния строится так же, как в простой ферме;

с переходом груза = 1 на консоль, цепь начинает работать и усилие раскоса будет определяться уравнением:

$$D_6 = \frac{1}{r_k}(Aa_k + Hy_k) = \frac{x}{r_k}\left(-\frac{a_k}{l} + \frac{y_k}{h_0}\right)$$

которое представляет собой сумму двух прямых, из которых первая представляет собой „правую“ прямую линии влияния раскоса как простой фермы, а вторая—линию влияния H, измененную в масштабе $\frac{y_k}{r_k}$ (черт. 193).

Усилие раскоса будет равно нулю при любом положении груза на консоли. если выражение, стоящее в скобках, будет равно нулю, т.-е. если имеет место отношение $a_k : l = y_k : h_0$: последнее же возможно, если цепной пояс будет направлен по прямой, проходящей через вершину E, и опорную точку A. Следовательно при очертании цепного пояса по прямой, проходящей через точку опоры A и вершину E опорной стойки h_0 ни верхний пояс, ни решетка основной части AB фермы, при загружении консоли, работать не будут.

Усилия в поясных стержнях консоли будут определяться выражением общего вида, получаемым из уравнения моментов относительно соответствующего узла фермы.

Например, для любого стержня нижнего пояса, при положении груза P между сечением и концом консоли, это уравнение напишется так:

$$U_n = U_{n+1} = \frac{1}{h_n}\left[-P\,(x-b_n) + Hy_n\right] = -\frac{x-b_n}{h_n} + \frac{x \cdot y_n}{h_0\,h_n} \quad . (129)$$

в котором h_n — плечо усилия относительно точки моментов, b_n — расстояние точки моментов от опорного узла, y_n — расстояние по вертикали от точки моментов до цепного пояса, x — положение груза относительно опорного узла.

При расположении груза между сечением и опорным узлом в уравнении усилия отпадет член, характеризующий положение груза P, но член, характеризующий усилие в цепи $\frac{x\,y_n}{h_0\,h_n}$ останется.

Из этого следует, что в ф е р м а х э т о г о т и п а к о н с о л ь н ы е с т е р ж н и р а б о т а ю т п р и з а г р у ж е н и и в с е й к о н с о л и, чем они отличаются от консолей простых ферм, которые работают только при загружении отсекаемой части консоли.

Пользуясь выражением (129) нетрудно построить линию влияния поясных стержней, которая будет слагаться из ординат линии влияния H, измененных в отношении $y_n : h_n$ и вычитаемых из них ординат треугольника, определяющего влияние груза $-P \cdot \frac{x-b_n}{h_n}$, при расположении его на отсекаемой части консоли и на подвесной части, как это имеет место в простых консольных фермах.

На черт. 193-d построена линия влияния для усилия в стержне U_9, для которого $(x-b) = 3d$. Линия влияния этого стержня слагается из 2-х треугольников: $b - 12' - 20$ с наибольшей ординатой $\frac{l_1 \cdot y_9}{h_0\,h_9}$ и b—12—20 с наибольшей ординатой $\frac{3d}{h_9}$; в конечном результате, сложение этих двух треугольников дает очертание по многоугольнику b—9—12—20, состоящему из отрицательной и положительной частей.

На том же чертеже *построена линия влияния усилия* $O_{11}\,Cos\,n\,\varepsilon$, для которого $(x-b)=2d$. Линия влияния этого стержня также слагается из 2-х треугольников и в конечном результате дает контур линии влияния, очерченный по многоугольнику (черт. 193-е).

Усилие в решетке консольной части определяется аналогичным исследованием. *Например, для раскоса* D_{11} *усилие определится из уравнения* моментов относительно точки m схода верхнего и нижнего поясов фермы; при расположении груза $P=1$ на отсеченном конце консоли это уравнение напишется так:

$$D_{11}\,r_m + P\,(x+b_m) - H\,y_m = 0$$

откуда

$$D_{11} = -\frac{x+b_m}{r_m} + \frac{x}{h_0}\frac{y_m}{r_m} \qquad \text{(130)}.$$

Линия влияния этого стержня образуется из сложения ординат четыреугольника 10—11—12—20, представляющего собой линию влияния этого стержня, как стержня, принадлежащего простой консоли, с наибольшей ординатой под концом консоли $z=(l_1+b_m):r_m$ и усеченного прямой 10—11 по условию панельной передачи, и ординат линии влияния H, измененной в отношении $y_m:r_m$ и имеющей вид треугольника $b-12_1-20$ с наибольшей ординатой под концом консоли

$$z = \frac{y_m}{r_m}\cdot\frac{l_1}{h_0};$$

Аналогичными построениями определяются линии влияния остальных стержней консоли.

Резюмируя результат построения линий влияния можно сказать, что *третий цепной пояс этих ферм разгружает консольные части их и ту* часть междуопорной части ферм, на которой проходит цепной пояс и совершенно не влияет на ту часть фермы, где этот пояс сливается с основной фермой, при чем это влияние тем больше, чем больше вогнутость цепного пояса отклоняется от прямой $A-E$ (см. анализ уравн. 127—129), *(черт. 188).*

ФЕРМЫ НА МНОГИХ ОПОРАХ.

§ 54. Аналитическое определение опорных реакций. Многоопорные статически определимые фермы являются результатом преобразования простых ферм путем замены в последних одного из внутренних стержней *соответствующим опорным закреплением.* Число опор в них увеличивается соответственно числу указанных преобразований (черт. 194, черт. 198). Хотя по общему числу своих связевых условий как внутренних, так и внешних, они остаются статически определимыми, но наличие в них более чем трех опорных связевых условий усложняет их расчет и усложняет его, *прежде всего,* в процессе определения опорных сопротивлений.

В таких фермах уравнения, необходимые для определения опорных сопротивлений, могут быть получены из рассмотрения всей системы, как двухопорной системы с устраненными лишними опорными закреплениями, но под действием усилий стержней, идущих к этим опорным точкам.

Так, например, показанная на черт. 194-*a* двухпролетная ферма, для определения в ней опорных сопротивлений, может быть рассмотрена как двухопорная AB (черт. 194 *b*) с устраненной в ней промежуточной опорой C, но под действием стержневых усилий S_1 и S_2.

Образующиеся, при таком рассмотрении системы, действительные или фиктивные шарниры позволяют составить недостающее число уравнений, для определения опорных сопротивлений и стержневых усилий S_1 и S_2 отсеченной опоры. Усилия же в последней определяются из условия равновесия опорных узлов под действующими на них усилиями S_1 и S_2.

Для системы, показанной на черт. 194, эти уравнения, необходимые для определения опорных сопротивлений, в общем виде напишутся так:

1) из условия равновесия системы, как двухопорной фермы под действием любой нагрузки, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &A\ (l_1+l_2)-S_1 v-S_2 u=M^0{}_B \\ &A\ l_1-S_1 r=M^0{}_s \\ &S_1\ Sin\,\alpha-S_2\ Sin\ \beta=\Sigma\, P\, Cosn\ (PX) \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (131)$$

в этих уравнениях: $M^0{}_B$, $M^0{}_s$ и $\Sigma\, P\, Cosn\ (PX)$ соответственно моменты относительно шарниров B и S и проекция на ось X-*ов* действительной нагрузки:

2) из условия равновесия выделенного опорного узла будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &C\ Cosn\ (CX)+S_1\ Sin\,\alpha-S_2\ Sin\ \beta=O \\ &C\ Sin\ (CX)+S_1\, Cosn\,\alpha+S_2\, Cosn\,\beta=O \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (132)$$

Первая группа уравнений (131) позволяет определить опорное сопротивление A и усилия S_1 и S_2.

Вторая группа уравнений (132) позволяет определить слагающие опорного сопротивления C по усилиям S_1 и S_2. Третье опорное сопротивление B определится из условия:

$$A+B+C=\Sigma\, P\, Cosn\ (P.Y)\ \ldots\ldots\ (133)$$

Переходя к вопросу о построении линии влияния мы должны будем отметить, что уравнения, определяющие их, будут изменяться в зависимости от положения груза $=1$ справа или слева от шарнира S.

При положении груза $=1$ справа от шарнира S, уравнения (131), служащие для определения опорного сопротивления A, напишутся так:

$$\begin{aligned} &A\, l-S_1 v-S_2\ u=P\ (l-x) \\ &A\ l_1-S_1\ r=O \\ &S_1\ Sin\,\alpha-S_2\ Sin\,\beta=O \end{aligned}$$

Решая их относительно A, получим:

$$S_1=A\ \frac{l_1}{r} \qquad\qquad S_2=S_1\ \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}=A\ \frac{l_1}{r}\ \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\ \ldots\ (134)$$

а потому:

$$A\left(\ l-\frac{l_1}{r}\ v-\frac{l_1}{r}\ u\ \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\right)=P\ \ (l-x)$$

Для рассматриваемого частного случая: $r = h.\ Sin\,\alpha$, $v = l_2\ Cosn\,\alpha$ и $u = l_2\ Cosn\,\beta$, а потому опорное сопротивление A может быть выражено так:

$$A = \frac{P\ (l-x)}{l - l_1\frac{l_2}{h}(Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)} = -\frac{P\ (l-x)}{m-l} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (135)$$

где $m = l_1\ l_2\ (Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta) : h.$

При положении груза $= 1$ слева от шарнира, те же уравнения напишутся так:

$$A\,l - S_1\,v - S_2\ u = P\,(l-x)$$
$$A\,l_1 - S_1\,r = P\ (l_1 - x)$$
$$S_1\ Sin\,\alpha - S_2\ Sin\,\beta = O.$$

Решая их относительно A, получим:

$$S_1 = A\ \frac{l_1}{r} - P\,\frac{l_1 - x}{r} \qquad , \ S_2 = \left(A\,\frac{l_1}{r} - P\,\frac{l_1 - x}{r}\right)\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta} \quad . \ . \ (136)$$

а потому:

$$A\left(l - \frac{l_1}{r}\,v - \frac{l_1}{r}\,u\ \frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\right) = P\left[(l-x) - \frac{l_1 - x}{r}\,v - \frac{l_1 - x}{r}\,u\frac{Sin\,\alpha}{Sin\,\beta}\right]$$

Принимая во внимание, что: $r = h\ Sin\,\alpha, u = l_2\ Cosn\ \beta$ и $v = l_2\,Cosn\,\alpha$, получим:

$$A = \frac{P\left[(l-x) - (l_1 - x)\ \frac{l_2}{h}(Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)\right]}{l - \frac{l_1 l_2}{h}(Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)} =$$

$$= P\,\frac{(l-x) - (l_1 - x)\dfrac{m}{l_1}}{l - m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (137)$$

в котором $m = l_1\,l_2\ (Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)$.

Полученные нами уравнения (135) и (137), определяющие линию влияния опорного сопротивления A, выражены значительно сложнее, чем таковое же в простой двухопорной ферме, где они равны $(l-x):l$; эти уравнения позволяют построить линию влияния, которая очерчивается прямыми, имеющими следующие ординаты под характерными точками:

под узлом	A	при $x = O$	$A = 1$
под шарниром	S	при $x = l_1$	$A = -1\dfrac{l - l_1}{m - l} = -\dfrac{l_2}{m - l}$
под узлом	B	при $x = l$	$A = O$

Она имеет форму показанную на черт. 194 и состоит из положительной и отрицательной частей, что заставляет предусматривать в таких фермах специальную конструкцию опор в предупреждение против поднятия их.

Зная линию влияния опорной реакции A нетрудно построить линию влияния усилия S_1, которое, при положении груза $= 1$ справа от шарнира, определяется уравнением (134) $S_1 = A\,\frac{l_1}{r}$, представляющим собой линию влияния опорного сопротивления A, измененную в отношении $l_1 : r$ (черт. 194). При положении груза $= 1$ слева от шарнира усилие S_1 определяется уравнением (136) $S_1 = \left[A - P\ (l_1 - x)\right]\frac{l_1}{r}$, которое представляет собой линию влияния опорного сопротивления для левой части системы, из которой вычтены ординаты прямой ac_1, удовлетворяющей уравнению $P\,l_1 - x$).

Таким образом линия влияния усилия S_1 будет иметь форму треугольника ac_1b с ординатой под шарниром s равной $-\frac{l_1\,l_2}{(m-l)\ r}$

Из уравнений (134 и 136), определяющих зависимость между усилиями S_1 и S_2 следует, что линия влияния усилия S_2 будет одинакова по виду с линией влияния S_1, для чего ординаты последней должны быть изменены в отношении $Sin\,\alpha : Sin\,\beta$.

Зная линии влияния усилий S_1 и S_2 можно построить линию влияния опорного давления C, которое определяется уравнением (132):

$$C = -(S_1\ Cosn\,\alpha + S_2\ Cosn\,\beta)$$

т.-е. слагается из измененных, в определенных отношениях, линий влияния усилий S_1 и S_2, а потому будет иметь вид треугольника с вершиной под опорой C. Наибольшая ордината ее:

$$C = -(S_1\,Cosn\,\alpha + S_2\ Cosn\,\beta) = -A\ \frac{l_1}{r}\ Sin\,\alpha\ (Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)$$

Подставляя значение A при $x = l_1$, $A = -\frac{l_2}{m-l}$ и принимая во внимание, что $l_1\ (Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta)\ Sin\,\alpha : r = m : l_2$, получим:

$$C = \frac{l_2}{m-l}\ \frac{m}{l_2} = \frac{m}{m-l}$$

из чего следует, что эта ордината $>$ единицы, чем она отличается от реакций простых балок.

Из изложенного видно, что исходные уравнения, служащие для аналитического определения опорных сопротивлений, и построение по ним линий влияния, отличаются некоторой сложностью, которая возрастает с увеличением числа опорных точек, т.-е. с переходом к 3-х, 4-х пролетным системам. Упрощение в процессе построения линий влияния достигается применением графических приемов построения при помощи мгновенных полюсов или диаграммы скоростей, изложенных в § 35 и § 49.

§ 55. Определение опорных реакций при помощи законов кинематики. На черт. 196 показано построение линий влияния опорного сопротивления крайней опоры (A) двухпролетной фермы при помощи мгновенных полюсов.

Для построения линии влияния этого опорного сопротивления, устраняем эту опору и рассматриваем систему, как механизм, состоящий из двух жестких дисков I, II и двух стержней III и IV.

Мгновенный полюс диска II определяется точкой E II пересечения двух направлений шарнирно-подвижных закреплений этого диска. Полюс диска I определяется точкой E I пересечения прямой E II—II, I и направления стержня III, как шарнирно подвижного.

Этими двумя полюсами E I и E II определяются проекции нулевых точек на оси абсцисс, через которые должны пройти прямые a'—1, 2 и 1, 2—e, 2, очерчивающие эпюру возможных смещений. Эти прямые пересекутся между собой, как известно, в точке 1, 2 на вертикали под точкой шарнира I II. Для определения переходного масштаба от эпюры возможных смещений к линии влияния, воспользуемся уравнением возможной работы, предполагая, что груз $= 1$ находится на звене I. Если этот груз расположен на расстоянии x от полюса I E, то при условии поворота звена I на угол $\Delta\ \Theta$, выражение возможной работы напишется так:

$$A L \Delta\Theta - P x \Delta\Theta = O$$

откуда:

$$A = P\frac{x}{L}$$

где $L\Delta\Theta$ возможное смещение по направлению силы A.

Ордината $a\,a'$, отстоящая на расстоянии $x = L$ от полюса E I, служит единицей масштаба.

Как и надо было ожидать, мы получили линию влияния тождественную по форме линии, построенной аналитически (черт. 194).

Обратим внимание на следующую особенность заключающуюся в том, что положение нулевой точки линии влияния (1, e), являющейся проекцией мгновенного полюса E I, не зависит от того, какая из опор сделана неподвижной несмотря на то, что положение самих мгновенных полюсов зависит от распределения подвижных и неподвижных опор.

Действительно, согласно аналитического выражения опорного сопротивления (137), положение нулевой точки определяется из условия, что числитель этого выражения равен нулю:

$$(l - x) - (l_1 - x)\ \frac{l_2}{h}\ (Ctng\,\alpha + Ctng\,\beta) = O \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

которое не зависит от того, где расположена неподвижная опора, но зависит от длины пролетов и контура шарнирного четыреугольника, расположенного в образовании промежуточной опоры.

Так как в действительности, положение мгновенного полюса зависит от характера опорных закреплений, т.-е. от того, в какой опоре будет устроена неподвижность, то неизменяемость нулевой точки, как проекции мгновенного полюса, свидетельствует о том, что мгновенный полюс перемещается по вертикали.

Эта особенность, облегчающая построение линий влияния, является результатом условия возможного смещения четыреугольника, заключающегося в том, что если три звена этого четыреугольника связаны условием определенной подвижности относительно земли, заставляющей мгновенные полюса этих звеньев перемещаться по определенным прямым перпендикулярным к плоскостям подвижности, то полюс четвертого звена будет перемещаться по прямой, пересекающейся с первыми в одной точке [1]).

Следствием из этого положения является то, что если ферма имеет горизонтальные подвижные опоры, то все мгновенные полюса перемещаются по вертикалям и их проэкции на ось абсцисс остаются постоянными.

Это свойство значительно упрощает вопрос о построении линий влияния в многопролетных фермах, так как устраняется необходимость в определении истинного положения полюса, что в этих фермах иногда связано со сложным построением.

В нижеследующем примере разобраны случаи построения линий влияния опорных реакций в трехпролетной ферме.

Пример 41. Определение опорных реакций в трехпролетной ферме. Показанная на черт. 197 трехпролетная ферма по условиям своего образования статически определима и неизменяема; неподвижная опора в ней предположена в точке C.

Построение линий влияния опорных реакций D и B не представляет особых затруднений

Устраняя опору D, мы получаем подвижную систему, состоящую из 3 звеньев (I, II и III) и 4 стержней (IV, V, VI и VII). По условию опорных устройств полюс звена I лежит на пересечении прямых A и IV; соответственно полюс звена II лежит на пересечении прямых E I—I II и V. Так как опора B подвижная, то полюс звена III может лежать только на прямой B и истинное положение его определяется пересечением прямой E II—II III с направлением B. Таким образом мы нашли полюса всех звеньев, проекции которых на ось абсцисс, определяют нулевые точки линии влияния. Далее задаваясь какой либо прямой (например e 2 – 2 3) нетрудно построить всю эпюру возможных смещений, являющейся результатом устранения опоры D. Положение прямой 1—1 определяется точками e, 1 и 1, 2 и прямой 3—3 точками e, 3 и 2, 3. Так как нагрузка предположена по нижним узлам, то на эпюру снесены точки 4, 5, 6 и 7; конечный вид эпюры показан заштрихованным многоугольником.

---

1) Изложенное условие вытекает непосредственно из следующих положений кинематики.

Предположим, что мы имеем систему состоящую из 2-х жестких дисков—треугольников EI — E2— E3 и E1′ — E2′ — E3′ черт. (195), соединенных между собой тремя стержнями I, II и III, пересекающимися в точке О. Эта система по условию своего образования, как известно, изменяема. Отсюда следует, что мгновеные полюса I II, II III, I III стержней I, II и III должны также лежать на прямой, без чего невозможно условие подвижности системы.

Отсюда следует, что, если две вершины какого-либо треугольника перемещаются по двум прямым, пересекающимся в точке—О, при чем соответственные стороны треугольника пересекаются в неподвижных точках, лежащих на прямой, то третья вершина этого треугольника должна перемещаться по прямой, проходящей через точку О—пересечения прямых, по которым перемещаются две другие вершины треугольника.

Перейдем к случаю, когда мы имеем четыре диска. или стержня I, II, III, и IV (черт. 195 bis), связанных между собой шарнирами и условием, что три из них II, III и IV имеют подвижность по плоскостям В и С. В этой системе мгновенные полюса E2 и E3, соответственных стержней, могут перемещаться только по прямым, нормальным к плоскостям В и С. По условию образования шарнирного четыреугольника полюса EI и E2, E2 и E4, E1 и E3 перспективны и при условии перемещения полюсов E2 и E3 по прямым, будут образовывать пучки в точках 1, 2—3. 1—2, 3, которые неизменны и лежат на одной прямой. Таким образом мы имеем в этом случае треугольник E1 — E2— и E3, который своими двумя вершинами E2 и E3 перемещается по прямым, а соответственные стороны его, при любом положении его, пересекаются в точках 1, 2 — 1, 3 — 2, 3, лежащих на прямой, следовательно третья вершина E1 этого треугольника должна перемещаться по прямой, проходящей через точку пересечения прямых, по которым перемещаются полюса E2 и E3, что и требовалось доказать.

Для перехода от эпюры к линии влияния, надо составить выражение возможной работы, которое для данного случая проще составить, пользуясь графическим построением т.-е. построением диаграммы скоростей (см. § 30).

Построение последней может быть ограничено несколькими точками, необходимыми только для составления уравнения работы, например точками 2,6 и D, из которых в первой приложен груз $P=1$, а в последней сама реакция.

При наличии полюсных точек самое построение эпюры также сокращается и может быть сделано при помощи радиусов, по направлению корых должны быть отложены возможные скорости.

Задаваясь возможной скоростью, например, точки VII III, т.-е. отрезком VII III—3′ 7′, откладываем его по направлению радиуса VII III—III E, в соответствие с этим на направлении радиуса II III—III E засечется точка 2′ 3′, определяющая скорость узла II III. По точке 2′ 3′ можно определить точку 2′ 6′ на радиусе II VI E II, соответствующем движению звена II. *Зная же точки 2′6′ и 3′ 7′ можно определить положение точки* D, проведя прямые 2′ 6′—D' ∥ II VI—D и 3′ 7′—D' ∥ III, VII—D.

Горизонтальными проекциями отрезков DD' равным d и 2′ 6′—II VI, равным p, определяются возможные вертикальные смещения по направлению сил D и P, приложенных в этих точках.

Составляя, на основании этого, выражение возможной работы получим:

$$-Dd+Pp=0$$

откуда:

$$D=P.\frac{p}{d}$$

Знаки в выражении работы различные, так как, при направлении смещения в одну сторону, работа сил D и P, направленных в разные стороны, будет противоположна по знакам.

Этому условию должна удовлетворять ордината эпюры; как линии влияния, под узлом II VI.

Для определения опорной реакции B, устраняем ее и превращаем систему в подвижной механизм того же вида, как это было указано для *опоры D с сохранением закрепления в точке D.* В этом механизме полюса звеньев I и II остаются те же, как и в случае устранения опоры D, так как эти полюса не зависят от характера закрепления опор A и C. Что касается полюса звена III, то для определения его пользуемся переходом через полюс II VII (черт. 197), определяя при помощи его полюс E VII на прямой $D\ E$, а затем, проводя прямые E II—II III и E VII—VII III, определяем полюс (E III).

По положению полюсов определяем нулевые точки эпюры, а затем, задаваясь хотя бы прямой 2—2, определяем положение прямых 1—1 и 3—3, и снеся на них узловые точки получаем контур эпюры, показанной заштрихованным многоугольником.

Для перехода от эпюры к линии влияния составляем уравнение возможной работы звена III в предложении, что для него возможно вращение вокруг полюса E *III и что груз находится на этом звене в расстоянии* x от вертикали этого полюса, а именно:

$$-B.\ b\ \Delta\Theta+Px\ \Delta\Theta=0$$

откуда:

$$B=P\ \frac{x}{b},$$

в котором $\Delta\Theta$ — угол возможного поворота звена III. Из полученного выражения следует, что при $x = b$ ордината линии влияния $= 1$.

Отметим, что в линиях влияния опорных давлений D и B нулевая точка e, 2 одна и та же, что имеет существенное значение для построения линий влияния внутренних стержней среднего пролета, как это показано в следующем параграфе.

Перейдем к построению линий влияния опорных реакций A и C.

Устраняя опору A (черт. 198), мы получим подвижной механизм, состоящий из трех звеньев I, II, III и четырех стержней $1—C$, $C—2$, $3—D$ $D—4$. В этом механизме, вследствие недостаточной зависимости между полюсами, мы не можем сделать непосредственного определения истинного положения полюсов и можем провести его только при помощи метода ложного построения (см. § 49).

В рассматриваемом случае вместо определения полюсов, сделано построение диаграммы скоростей, и так как для исходного построения диаграммы надо иметь две скорости (см § 49), а таковых при данном положении нет, то построение проведено помощью ложных построений.

Задаваясь, например, точкой $2'$, как скоростью $2—2'$ для точки 2 мы не будем иметь нужного направления радиуса ни для звена I, ни для звена II, а потому задаемся ложной точкой 7_1. Имея точки $2'$ и 7_1, мы можем определить точку 6_1, проводя прямые $2_1 — 6_1 \parallel 2 — 6$ и $7_1 — 6_1 \parallel 7 - 6$, точку 3_1, проведя $2_1 — 3_1 \parallel 2 — 3$ и $6_1 — 3_1 \parallel 6 — 3$, — точку 5_1, проведя $6_1 — 5_1 \parallel$ $6—5$ до пересечения с направлением $5—5_1$, — точку 4_1, проведя $6_1—4_1 \parallel$ $6 — 4$ и $4_1 — 5_1 \parallel 4 — 5$ и, наконец, точку D_1, проведя $3_1 — D_1 \parallel 3 — D$ и $4_1 — D_1 \parallel 4 — D$. Точка D будет точкой, определяющей возможное смещение узла D; последнее возможно только в горизонтальном направлении, т. к. опора D подвижная, а потому возможная скорость на диаграмме должна быть направлена по вертикали точки D, следовательно, полученная точка D_1 является ложной точкой и сама диаграмма является ложной. Для определения второго ложного положения точки D_2 начнем построение снова, задавшись новым ложным положением точкой 7_2.

Задавшись на прямой $2'$ 7_1 новой точкой 7_2, определяем, путем последовательного построения диаграммы скоростей, новые положения изображающих точек 6_2, 3_2, 5_2, 4_2 и, наконец, новую точку D_2.

Точка D_2 не лежит на вертикали точки D, а потому, так же как и точка D_1 является ложной, но вместе с последней, определяет направление прямой, на которой должна лежать и истинная точка D' (см. § 49 черт. 183); эта точка получится на пересечении этой прямой с вертикалью точки D.

Зная истинное положение точки D', мы можем обратным построением определить истинное положение точки $3'$, проведя прямые $D' - 3' \parallel D — 3$ и $2'—3' \parallel 2 - 3$, — точку $6'$, проведя $3'$ $6' \parallel 3—6$ до пересечения с прямой $2—6_1—6_2$, — точку $7'$, проведя прямую $6'—7' \parallel 6—7$ до пересечения прямой $2—7_1—7_2$, и далее точку 1 проведя $7'—1' \parallel 7—1$ до пересечения с направлением $C—1$ и, наконец, точку $0'$ проведя $7'—0' \parallel 7—0$ и $1'—0'$ $\parallel 1—0$.

Грузовыми точками в этой эпюре являются узлы 0, 1, 2, 3, 4 и 5; смещения их в вертикальном направлении определяются горизонтальными проекциями, соответствующих им отрезков скоростей. Для получения эпюры возможных смещений откладываем эти отрезки по вертикалям под узлами, сохраняя знаки смещений, смотря по тому слева или справа от узла лежит его изображающая точка. Таким образом, для нашего случая эпюра возможных смещений построится в форме многоугольника $0'—1'—2'—3'—4'—5'$. (На чертеже 198 построение многоугольника сделано в полуторном масштабе).

Построение такой сложной диаграммы скоростей может быть проверено определением полюсов; например, полюс E I звена I должен лежать на пересечении прямых 0—0′, 1—1′, 7—7′ и проекция его должна совпадать с нулевой точкой эпюры.

Для определения переходного масштаба от эпюры к линии влияния составляем выражение возможной работы, предполагая груз $P=1$, помещающимся на 1-м звене на расстоянии x от вертикали полюса E I, оно напишется так:

$$A.\ a.\ \Delta\Theta - Px\,\Delta\Theta = 0$$

откуда:

$$A = P\,\frac{x}{a},$$

в этом уравнении $\Delta\Theta$ угол возможного поворота 1-го звена вокруг полюса E I.

Из полученного выражения опорного давления следует, что при $x=a$ ордината линии влияния $A=1$.

Для построения линии влияния опорного давления C (неподвижной опоры) устраняем в нем связь, препятствующую вертикальному смещению (черт. 199), но сохраняем связевое условие, препятствующее горизонтальному смещению; таким образом опорный узел получает как-бы возможность вертикального скольжения, это обусловливает, что полюса E IV и E V должны лежать на горизонтали C. Обращаем внимание на то, что все остальные опоры подвижные, а потому (согласно примеч. на стр. 151) полюса всех звеньев могут перемещаться только по вертикалям, что упрощает построение.

Вследствие недостаточности условий будем производить определение полюсов, идя методом ложного построения. Задаемся ложным положением полюса (E III) на вертикали B и при помощи постоянного полюса VI III определяем на вертикали D полюс (E VI), а далее, проводя прямые E III—III II и E VI—VI II, определяем ложное положение полюса (E II) и этим устанавливаем положение вертикали, по которой может перемещаться этот полюс. Проводя прямую E II—II I до пересечения с вертикалью A, определяем ложное положение полюса (E I). Проводя прямые E I—I V и E II—II V, находим ложное положение полюса (E V) и устанавливаем вертикаль, по которой он может перемещаться. Но так как по условию неподвижности в горизонтальном направлении узла C полюс (E V) должен лежать на горизонтали этой точки, то, следовательно, пересечением вертикали (E V) и горизонтали C определяется истинное положение полюса E V. Зная истинное положение полюса E V, проведением прямой I V—E V, определяем истинное положение полюса E I на вертикали A и, проведением прямой E V—V II, определяем истинное положение полюса E II на вертикали этих полюсов.

Для определения масштаба линии влияния, в рассматриваемом случае, проще всего воспользоваться выражением работы, определив возможные перемещения при помощи диаграммы скоростей, как это было сделано при определении опорного давления D. Задавшись скоростью точки I, IV в виде отрезка I IV—1′ 4′ строим известным нам приемом, точки 1′ 2′, 5′ 2′ и c', определяющие величины смещений соответственных узлов. Горизонтальные проекции отрезков $c—c'$ и I V—1′5′ определяют собой величины возможных смещений этих узлов, что дает возможность составить выражение возможной работы для случая, когда груз $P=1$ находится в узле II, V. а именно:

$$+C\ d-Pp=O$$

откуда:

$$C=P\frac{p}{d}$$

Из чего следует, что ордината линии влияния под узлом II V должна быть равна отношению $p:d$.

Из построенных линий влияния опорных сопротивлений видно, что они имеют в среднем пролете две характерные точки «левую» и «правую», которые являются проекциями мгновенных полюсов звеньев, которым принадлежат стержни I II—II V и III II—II VI. Левая из них является нулевой точкой правых опорных реакций и правая нулевой точкой левых опорных реакций. Они зависят от величины пролетов и контура опорных четыреугольников, а потому постоянны и не зависят от сечений проводимых в пролете, что дает возможность пользоваться ими при определении усилий в стержнях ферм (§ 56). В симметричных фермах эти точки симметричны.

Линия влияния всех опорных давлений состоят из положительной и отрицательной частей, что заставляет думать о необходимости закрепления опор против под ема.

Характерным в этих фермах является то, что опорные реакции работают в случаях, когда нагрузка непосредственно расположена над другой опорой; следствием такой работы является то, что промежуточные опоры испытывают давление больше, чем весит груз, стоящий непосредственно над ними.

§ 56. Линии влияния внутренних стержней. Определение усилий во внутренних стержнях многопролетных ферм производится теми же приемами, как и в простых фермах, при чем самое усилие выражается в функциональной зависимости от опорных сопротивлений и нагрузки, так что, зная величину опорных сопротивлений или форму их линий влияния можно на основании функциональной зависимости построить линии влияния внутренних стержней. Построение их значительно упрощается вследствие некоторых характерных особенностей этих ферм, что проще всего выяснить в разборе следующих примеров.

На черт. 196 показано построение линий влияния для двухпролетной фермы.

Усилие любого стержня этой фермы определяется из условия равновесия относительно сечения, проводимого через стержень; и пока груз $=1$ будет находиться справа от сечения, усилие в любом стержне левого пролета будет определяться, как некоторая функция от опорного сопротивления A:

$$S=f\ (A)$$

Следовательно, пока груз $=1$ будет находиться справа от сечения, линии влияния в с е х с т е р ж н е й будут пропорциональны линии влияния опорного сопротивления A, построение которой сделано на черт. 196а. В этой линии влияния имеется нулевая точка e 1, определяемая, как проекция мгновенного полюса звена со стержнем I III—I II (или 5—s). Как это видно из выражения (135) положение этой точки зависит исключительно от величины пролетов и контура 5—C—6—s средней опоры, а потому п о л о ж е н и е е е с о х р а н я е т с я в л и н и я х в л и я н и я в с е х с т е р ж н е й, независимо от проведения сечения. Зная положение этой точки и зная выражение усилия, нетрудно построить линию влияния.

Например, усилие в стержне U_3 определяется уравнением $U_3 = A\,\dfrac{a_2}{h}$ а потому прямая, очерчивающая линию влияния при движении груза справа от сечения, будет определяться нулевой точкой 1 *е*, в которой опорное сопротивление $A = O$ и ординатой $aa_1 = a_2 : h$ под левой опорой, где $A = 1$ (черт. 196 а). При положении груза $= 1$ слева от сечения на расстоянии x от левой опоры, усилие U_3 определяется уравнением $U_3 = A\,\dfrac{a_2}{h} - 1\,\dfrac{a_2 - x}{h}$, в котором второй член представляет собой отрезки ординат прямой *а*—2, подлежащих вычету из ординат линии влияния опорного сопротивления. В конечном виде линия влияния очерчивается многоугольником *а*—2—1,2 —*b*.

Усилие в стержне раскоса D_3 той же части фермы определяется уравнением $D_3 = + A : Sin\,\varphi$. Линия влияния этого усилия, при положении груза=1 справа от сечения, будет пропорциональна, линии влияния опорной реакции A, а потому будет очерчиваться прямой, проходящей через нулевую точку 1 *е* и имеющей под левой опорой ординату $aa_1 = 1 : Sin\,\varphi$. Так как при положении груза $= 1$ слева от сечения, усилие того же раскоса будет определяться уравнением $D = (A - 1) : Sin\,\varphi$, то из этого следует, что линия влияния под левой частью будет очерчиваться прямой *а*—2, параллельной линии a_1—1, *е*. Таким образом, окончательный контур линии влияния будет иметь форму многоугольника *а*—2—3—1,2 *s*—*b*.

Рассмотренные типичные случаи построения линий влияния для этой фермы показывают, что линии влияния в ней строятся так же, как в простых фермах, но с пролетом L, определяемым расстоянием нулевой точки опорного сопротивления от левой опоры, и сами стержни работают как стержни консольных ферм, у которых длина консоли $(l - L)$ равна расстоянию нулевой точки до средней опоры.

Для некоторых стержней той же части фермы, которые лежат между нулевой точкой и средней опорой (стержни O_5, D_5 и друг.), нулевая точка становится фиктивной нулевой точкой и служит для определения направления «правой» прямой, очерчивающей линию влияния при положении груза $= 1$ справа от сечения (черт. 196), в остальном же построение линий влияния этих стержней ничем не отличается от вышеизложенного.

Определение усилий в стержнях правого пролета системы и построение для них линий влияния будет производиться тем же путем, как и для левого пролета, но исходя из опорного сопротивления B. Этому пролету будет соответствовать своя нулевая точка, определяемая, как проекция мгновенного полюса звена со стержнем I, II—II, V (или *s* - 6).

Отмеченные в двухпролетных фермах постоянные нулевые точки для всех линий влияния имеют место во всех фермах этого типа. В средних пролетах многопролетных систем таких точек имеется по две в каждом пролете. Каждая из них определяется (черт. 201) как проекция мгновенных полюсов звеньев со стержнями I, II—II, VI и III, VII—III, IV, относящимися к промежуточному пролету и входящих в состав четырехугольников у промежуточных опор.

Одна из них *е* 2, лежащая со стороны неподвижной опоры (на черт. 201 левая), определяется непосредственно по условию опорных закреплений, как проекция мгновенного полюса звена I, II—II, VI в четырехугольнике, который одним шарниром связан неподвижно с землей, а в другом—имеет поступательное движение.

Положение этой точки не зависит от изменения связевых условий как других опор, так и внутренних стержней со стороны их (на черт. 201 с правой стороны), а потому остается нулевой точкой, как в линиях влияния этих опорных реакций, так и в линиях влияния стержней самой фермы.

Другая нулевая точка e 3 того же пролета (на черт. 200 правая) является проекцией мгновенного полюса звена III VII—III IV, относящегося к промежуточному пролету в шарнирном четыреугольнике другой промежуточной опоры.

По условию подвижности опорных закреплений с этой стороны системы, мгновенный полюс этого звена должен менять свое положение в зависимости от нарушения связевого устройства в промежуточном пролете, но так как при движениях этого четыреугольника мгновенные полюса остальных трех звеньев имеют возможность перемещаться только по вертикальным прямым, что соответствует условиям их опорного устройства, то полюс этого четвертого звена может перемещаться только по вертикальной прямой (см. примеч. на стр. 151). При этом условии возможного смещения полюса только по вертикали, проекция его на ось абсцисс линии влияния остается неизменяемой и как таковая войдет в линии влияния всех стержней.

Это свойство облегчает определение нулевой точки как проекции одного из возможных положений полюса.

На черт. 201 определение возможного положения полюса E III сделано, исходя из произвольного положения полюса E IV при помощи полюсов IV VII, E VII и III IV.

Это упрощение в определении нулевой точки не будет иметь места, если направления плоскостей движения в опорах не будут горизонтальны, вследствие чего линии возможных смещений полюсов не будут вертикальны и проекция их на ось абсцисс не будет постоянной, что заставит определить истинное положение полюса и его проекции для каждого случая сечения, как это сделано на черт. 200. Но и в этом случае исходя из 2-х ложных построений E I' и E II' при помощи полюсов I V, E 5 и I II, определяются соответствующие возможные положения полюсов E II' и E II'', а следовательно, положение *прямой, по которой должен перемещаться полюс* E II в зависимости от изменения положения вводимого для расчета шарнира [1]). Истинное же положение полюса E II будет определяться пересечением этой прямой с линией II III—E III, меняющей свое направление в зависимости от положения шарнира.

Определив одним из указанных приемов положение мгновенных полюсов E II и E III звеньев среднего пролета, нетрудно построить линии влияния, исходя из рассмотрения их, как эпюр возможных смещений.

Например, предполагая груз = 1 расположенным на звене III (черт. 20) и определяя усилие в стержне O_k, мы, на основании условий о возможных перемещениях, можем написать, что (срав. выр. 85):

$$-O_k \cdot \delta - Py = 0,$$

в котором δ — возможная деформация стержня O_k равная $h\,(tng\,\Theta_1 + tng\,\Theta_2)$; но так как $tng\,\Theta_1 = y_k : a$ и $tng\,\Theta_2 = y_k : b$ и так как y — величина возможного смещения груза $P =$ равна $x tng\,\Theta_2$ то выражение усилия может быть написано так:

$$O_k = -P\,\frac{x : b}{h\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = -P\,\frac{a}{h\,(a+b)}\,x.$$

---

[1]) Определение положения прямой E I'—E II' облегчается тем, что она должна пересекаться в одной точке с прямыми, по которым перемещаются полюса E I, E V (см. примечание на стр. 151).

Из чего следует, что прямая, очерчивающая линию влияния под звеном III, будет определяться при $x = O$ нулем под точкой EIII и при $x = a + b$ ординатой $= -a : h$ под точкой $e\,2$. Зная положение этой прямой нетрудно построить всю линию влияния, которая будет иметь форму многоугольника $a - 3 - 4 - k - 9 - 10 - b$.

Линия влияния раскоса D_k также может быть определена из выражения возможной работы:

$$-D_k\delta + Py = 0,$$

в котором δ — возможная деформация раскоса, вызывающая относительный вертикальный сдвиг звеньев II и III, равный $k = \delta : Sin\,\varphi$ (сравн. выраж. 89).

Выражая величину y возможного смещения груза P в функции полного смещения k, получим усилие раскоса в таком виде:

$$D = P\,\frac{k\,.\,x}{(a+b)\,k\,.\,Sin\,\varphi} = \frac{1}{Sin\,\varphi}\,\cdot\,\frac{x}{a+b}.$$

Полученное выражение, определяющее эпюру возможного смещения звена III, представляет собой прямую линию, которая определяется нулем под точкой EIII при $x = O$ и ординатой $1 : Sin\,\varphi$ под точкой EII при $x = a + b$. Так как при параллельных поясах оба звена II и III могут перемещаться, только сохраняя параллельность между собой, то очертание эпюры, а следовательно, и линии влияния под звеном II, будет итти по прямой e, $2 - (k - 1)$ параллельной прямой $a_1 - e\,3$. Зная положение этих двух прямых нетрудно построить по общему правилу всю эпюру возможных смещений или линию влияния, масштаб которой и знак определяются ординатой $e\,2 - a_1 = 1 : Sin\,\varphi$.

Рассмотренные случаи построения типичных линий влияния для стержней среднего пролета трехпролетной фермы позволяют сделать вывод, что вся средняя часть работает как ферма с пролетом L, равным горизонтальному расстоянию $(a + b)$ между мгновенными полюсами. Соответственно контур линий влияния определяется «правой» и «левой» прямыми, ординаты которых под точками полюсов определяются такими же выражениями, как ординаты тех же прямых в простой двухопорной ферме. Исходя из этого свойства можно непосредственно строить линии влияния всех стержней.

В зависимости от положения стержня относительно точек полюсов могут иметь место случаи, когда нулевые точки линий влияния становятся фиктивными нулевыми точками, но этим не нарушается их свойство служить основой для построения линии влияния.

Например, усилие стержня O_1, определяющееся по выражению момента относительно узла 4, при положении груза $= 1$ на вертикали точки EII напишется так:

$$-O_1 h' - D\,(L + c + a_1) - B\,(L + c + a_1 + l_2) + Pa_1 = 0.$$

Но так как, согласно вышеизложенного, при положении груза P над нулевой точкой $e2$ усилия в опорных реакциях равны нулю, то, следовательно, усилие этого стержня для этого положения груза $= 1$ будет:

$$O_1 = 1\,\cdot\,\frac{a_1}{h}\,,$$

чем определяется ордината «правой» прямой под этой точкой; другой точкой, определяющей положение этой прямой, является нулевая точка $e\,3$. Положение «левой» прямой определяется нулевой точкой $e\,2$ и точкой 4 пересечения «правой» прямой с вертикалью, проходящей через точку моментов. Зная положение этих прямых, строим линию влияния всю, по общим свойствам изменения их и получаем ее очерченной по многоугольнику $e,1-3-4-9-10-e,4$. В этой линии влияния нулевая точка становится фиктивной нулевой точкой.

Аналогичное построение может быть сделано для определения линии влияния раскоса D_2, усилие которого определяется из выражения момента относительно точки m—схода рассекаемых поясов, на вертикали которой, следовательно, пересекаются «правая» и «левая» прямые линии влияния. При положении груза $=1$ на вертикали точки EII выражение усилия раскоса и, следовательно, ординаты «правой» прямой будет:

$$-D_2 r - 1 \cdot a_2 = 0$$

откуда

$$D_2 = -\frac{a_2}{r},$$

так как при этом положении груза опорные реакции D и B равны нулю. Этой ординатой под точкой $e2$ и нулевой точкой $e3$ определяется направление «правой» прямой, «левая» прямая определяется точками m—пересечения «правой» прямой с вертикалью под моментной точкой и нулевой точкой. Зная положение этих двух прямых, нетрудно построить контур всей линии влияния, которая будет иметь очертание по многоугольнику $e,1-3-4-(k-1)-9-10-e,4$ (черт. 201).

Резюмируя изложенное можно сказать, что **если известно положение вертикалей полюсов EII и EIII в трехпролетной ферме, то построение линии влияния всех стержней среднего пролета может быть сделано помощью уравнений статики, как в простых двухопорных фермах с пролетом равным расстоянию между указанными вертикалями.**

Построение линий влияния усилий стержней в крайних пролетах трехпролетной фермы строится на основании тех же соображений, как в двухпролетной ферме; исходя из выражения крайних опорных реакций и при помощи нулевых точек, определяемых, как проекция мгновенного полюса, при построении линий влияния опорного сопротивления. Построение типичных линий влияния для этих пролетов показано на черт. 198.

Системы с распором.

АРКИ СО СПЛОШНОЙ СТЕНКОЙ.

§ 57. Общие понятия. Арки отличаются от балок тем, что в них даже при наличии только вертикальной нагрузки всегда имеется горизонтальная слагающая опорных закреплений, именуемая распором. В арках распор всегда стремится раздвинуть точки закрепления, а потому опорное сопротивление, препятствующее этому раздвиганию, направлено во внутрь арки — это направление распорного сопротивления принимается положительным. В арочных конструкциях имеется несколько характерных наименований отдельных частей их, а именно: опорные плоскости их называются пятами, на черт. 202-а плоскости A и B; точка C, наиболее удаленная от линии, соединяющей пятовые точки арок,—называется ключем арки, расстояние ее по вертикали от линии, соединяющей опорные точки, называется подьемом арки; очертание тела арки, проходящее выше оси арки, называется внешним ребром, очертание ее ниже оси лежащее—внутренним ребром арки.

Вследствие наличия распора двухопорные арки не могут иметь подвижных опорных закреплений, поэтому в них устраиваются: или опоры с полной заделкой в пятах — арки с заделанными пятами (черт. 202-а), или опоры их могут быть шарнирно-неподвижными (черт. 202-в) — арки двухшарнирные; как тот, так и другой вид закрепления делает арки статически неопределимыми относительно опорных сопротивлений.

Двухшарнирные арки, имеющие в опорных закреплениях 4 неизвестных условия, могут быть приведены к виду статически определимых, путем включения в арку третьего шарнира—S (черт. 202-с), чем обеспечивается составление четвертого недостающего уравнения равновесия для определения неизвестных опорных закреплений; эти арки носят название трехшарнирных арок.

Ось арки очерчивается по какой-либо кривой, но она может быть очерчена по ломаной линии иногда с резкими изменениями контура (черт. 203), в последнем случае название арки заменяется названием рамы.

Неизменяемость арочных систем обеспечивается, как уже сказано выше, неподвижностью опорных точек их, следовательно, арки для сохранения своей неизменяемости должны опираться на неизменяемую систему, которая воспринимает на себя как вертикальные давления опор, так и распор. Однако, иногда возможность раздвигания пят арок устраняется постановкой специального стержня, соединяющего между собой пятовые точки оси арки (черт. 204), такие арки называются **арками с затяжкой**. Затяжка воспринимает на себя растягивающее действие распора, так что в общей системе арки с затяжкой остаются только вертикальные слагающие A и B опорных закреплений, вследствие чего **арка с затяжкой** по характеру опорных закреплений **приводится к виду балки**.

§ 58. Определение опорных закреплений. К статически определимым относительно опорных закреплений системам принадлежат только трехшарнирные арки, поэтому в настоящем отделе мы будем говорить только об арках этого вида.

Аналитический расчет. Действительные направления опорных сопротивлений в пятах арок неизвестны, но они могут быть определены через свои слагающие V_a и V_b по вертикальному направлению и через Z_a и Z_b по линии, соединяющей опорные шарниры.

В общем случае арки, пяты которой расположены на разных высотах, величины слагающих опорных давлений определяются из следующих уравнений равновесия (черт. 205).

Вертикальные слагающие — из уравнений моментов относительно опорных точек, а именно:

$$\left.\begin{aligned} V_a &= \frac{1}{l}\left[\Sigma_0^l P\,Cosn\,(P\,У)\,(l-a) - \Sigma_0^l P\,Sin\,(P\,.\,У)\,(y_a - y_b)\right] \\ V_b &= \frac{1}{l}\left[\Sigma_0^l P\,Cosn\,(P\,.\,У)\,a - \Sigma_0^l P\,Sin\,(P\,.\,У)\,y_a\right] \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (139)$$

Слагающие по линии пятовых шарниров из уравнения проекций на горизонтальную ось:

$$Z_a\,Cosn\,\alpha - Z_b\,Cosn\,\alpha + \Sigma_0^l P\,.\,Sin\,(P\,.\,У) = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (140)$$

и уравнения моментов относительно среднего шарнира S сил, слева или справа от него лежащих:

$$Z_a = \frac{1}{h}M_s = \frac{1}{h}\left[V_a l_1 - \Sigma P\,Cosn\,(P\,У)\,(l_1 - a) - \Sigma P\,Sin\,(P\,У)\,(f + l_1\,tng\,\alpha - y_a)\right] \quad 141$$

Величины опорных давлений могут быть выражены также через горизонтальные слагающие опорных давлений:

$$H_a = Z_a\,Cosn\,\alpha$$

и

$$H_b = Z_b\,Cosn\,\alpha.$$

В этом случае уравнения равновесия для определения слагающих напишутся так:

$$\left.\begin{aligned} V'_a &= V_a + H_a\,tng\,\alpha \\ V'_b &= V_b - H_b\,tng\,\alpha \\ H_a &- H_b + \Sigma_0^l P\,Sin\,(P\,У) = 0 \\ H_a &= Z_a\,Cosn\,\alpha = \frac{M_s}{h}\,Cosn\,\alpha = \frac{M_s}{f} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (142)$$

При действии на арку только вертикальной нагрузки, вертикальные слагающие V_a и V_b опорных реакций арки будут точно равны опорным реакциям A_0 и B_0 простой балки:

$$V_a = A_0 \text{ и } V_b = B_0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (143)$$

Слагающие же по линии опорных шарниров Z_a и Z_b будут равны между собой и будут определяться из выражения момента относительно среднего шарнира, как момента простой балки для того же сечения:

$$Z_a = Z_b = \frac{H}{Cos n\ \alpha} = \frac{M_s}{h} \quad \dots\dots\dots\dots (144)$$

Графическое построение. Графическое определение опорных сопротивлений может быть сделано путем последовательного разложения равнодействующих R_1 и R_2 сил, приложенных к левой и правой частям арки (черт. 206). Действительно, равнодействующая R_1 сил, приложенных к левой части, должна разлагаться на направления опорных сопротивлений A_1 и B_1; направление B_1, по общему свойству сочлененных шарнирных систем, должно иметь направление по прямой, проходящей через шарниры S и B; направление же опорного сопротивления A_1 определится с одной стороны опорным шарниром A, с другой стороны точкой F_1 пересечения направления $S - B$ с равнодействующей R_1 (черт. 206b). На основании аналогичных соображений может быть сделано разложение равнодействующей R_2 на направления A_2 и B_2.

Определение полных давлений A и B получается путем геометрического сложения давлений A_1 и A_2, а также B_1 и B_2, что показано на том же чертеже 206b).

Из черт. 206 нетрудно видеть, что какова бы ни была величина и направление равнодействующей R_1 сил, приложенных к левой части, направление опорного давления B_1, всегда будет направлено по линии $S - B$ и будут меняться только направления давлений A_1, и их величины; тоже самое будет иметь место и в отношении сил, приложенных к правой части, для которых направление A_2 будет оставаться неизменяемым. Эти обе линии SF_1 и SF_2, определяющие направление опорных сопротивлений для всякого вида нагрузки, называется линиями опорных сопротивлений.

Линии влияния опорных давлений. Так как выражения (143) величины вертикальных слагающих опорных сопротивлений трехшарнирной арки при действии вертикальной нагрузки ничем не отличаются от таковых же в простой 2-х опорной балке, то при действии на арку груза $= 1$ уравнения, представляющие вертикальные слагающие опорных реакций, будут:

$$V_a = 1 \cdot \frac{l - x}{l} \text{ и } V_b = 1 \cdot \frac{x}{l}.$$

Линии влияния для этих слагающих будут такие же, как и в простой двухопорной балке (черт. 207).

Слагающая опорного сопротивления Z_a по направлению прямой, соединяющей опорные шарниры, определяется выражением (144); при положении груза $= 1$ в правой части арки от промежуточного шарнира S это выражение напишется в таком виде:

$$Z_a = \frac{M^o_s}{h} = \frac{l_1}{h} \frac{l - x}{l} \quad \dots\dots\dots (145)$$

Это есть выражение момента относительно шарнира S, составляемое как для соответствующего сечения простой балки, а потому линия влияния распора будет пропорциональна линии влияния момента простой балки для соответствующего сечения и отличается от нее введением множителя $1 : h$.

Откладывая на вертикали под опорой A отрезок $l_1 : h$ мы определим положение „правой" прямой bs, образующей линию влияния (черт. 207); положение „левой" прямой определится, как известно, направлением as.

Если в расчет введено выражение опорных слагающих H, направленных по горизонтали, то, принимая во внимание, что слагающая по этому направлению вообще определяется выражением:

$$H = Z\,Cosn\,\alpha = \frac{M_s}{h}\,Cosn\,\alpha = \frac{l_1}{f} \cdot \frac{l-x}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (146)$$

мы видим, что линия влияния ее будет пропорциональна линии влияния момента в сечении простой балки под шарниром S и отличается от нее (черт. 207) введением множетеля $1 : f$.

§ **59. Внутренние силы и моменты.** Для определения в арочных конструкциях внутренних сил, проводим сечение нормальное оси арки (черт. 208), положение которого определяется координатами x_k и y_k центра тяжести сечения относительно оси абсцисс, проводимой через один из опорных шарниров, и углом φ_k наклонения касательной, проводимой в сечении, по отношению к горизонтальной оси.

Отделяемая этим сечением часть арки будет находиться в равновесии под действием внешних сил, приложенных к ней и равнодействующей R внутренних сил, приложенной к плоскости сечения; с отнесением же последней в центр тяжести сечения, внутренние силы будут определяться моментом M_x и равнодействующей R или ее слагающими: нормальной к сечению — $N = R\,Cosn\,(RN)$ и касательной к сечению (срезывающей) $Q = R\,Cosn\,(RQ)$.

Аналитически расчетная величина внутренних сил и момента в сечениях арки при неизменяемом положении нагрузки, определяется следующими условиями равновесия.

Из уравнения момента всех сил относительно центра тяжести сечения следует, что момент M_x внутренних сил, направление которого принято положительным соответственно уменьшению кривизны арки, определяется выражением (черт. 208):

$$M_x = (V_a + H\,tng\,\alpha)\,x_k - Hy_k - \Sigma_o^x P\,Cosn\,(PY)\,(x_k - a) -$$
$$- \Sigma_o^x P\,Sin\,(PY)\,(y_k - y_a), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (147)$$

где a и y_a — координаты точек приложения силы P относительно левой опоры.

Не трудно видеть, что при действии только вертикальной нагрузки выражение $V_a\,x_k - \Sigma_o^x P\,(x - a)$ соответствует моменту $M^o{}_x$ в простой двухопорной балке для того же положения сечения, а потому выражение момента в сечении арки может быть переписано так

$$M_x = M^o{}_x - H\,(y_k - x_k\,tng\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (148\ bis)$$

Следовательно, выражение момента в сечении арки при действии вертикальной нагрузки отличается от выражения момента балки влиянием момента распора.

Из условия проэкций на ось нормальную к сечению вытекает, что величина нормальной силы N_x, направление которой принято сжимающим, определяется уравнением

$$N_x = [V_a + H\,tng\,\alpha]\,Sin\varphi + H\,Cos n\varphi - \Sigma^x{}_o P\,Cosn\,(PY)\,Sin\varphi +$$
$$+ \Sigma_x^o P\,Sin\,(PY)\,Cosn\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (149)$$

При действии только вертикальной нагрузки, (черт. 207) сумма членов $[V_a - \Sigma_o^x P] Sin\varphi$ будет представлять собой ничто иное, как величину поперечной силы Q^o_x в двухопорной балке, измененной помножением на $Sin\varphi$, а потому выражение нормальной силы в сечении арки может быть переписано так:

$$N_x = Q^o_x Sin\varphi + H_a (Cosn\varphi + tng\alpha . Sin\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

Величина срезывающей силы Q_x в сечении арки определяется из условия проэкции всех сил левой части на плоскость сечения:

$$Q_x = (V_a + H\, tng\,\alpha)\; Cosn\varphi - H\, Sin\varphi - \Sigma^x_o P\, Cosn\,(PY)\, Cosn\varphi -$$
$$- \Sigma^x_o P\, Sin\,(PY)\, Sin\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

При действии на арку только вертикальной нагрузки, это выражение поперечной силы преобразуется в такое:

$$Q_x = Q^o_a Cosn\varphi - H\,(Sin\varphi - tng\,\alpha . Cosn\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

Если пяты арки расположены на одном уровне, т.-е. $\alpha = O$, то все выражения внутренних сил и момента упрощаются и приводятся к следующему виду:

$$\left.\begin{array}{l} M_x = M^o_x - Hy_k \\ N_x = Q^o_x Sin\varphi + H\, Cosn\varphi \\ Q_x = Q^o_x Cosn\varphi - H\, Sin\varphi \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (153)$$

Графически величина внутренних усилий и моментов определяется из построения многоугольника давлений.

Если для заданной постоянной нагрузки $P_1, P_2, P_3 \ldots P_n$, действующей на арку, построить веревочный многоугольник, связав его условием прохождения через три шарнира (черт. 209), то этот веревочный многоугольник определит своими крайними сторонами направление опорных реакций A и B, а каждой из последующих сторон направление равнодействующей R_x всех сил слева от нее лежаших, в том числе и опорного сопротивления. Величина этих равнодействующих R_x определяется длиной соответствующего луча в силовом многоугольнике (черт. 209 в). Точки m пересечения сторон веревочного многоугольника с направлениями сечений арки определяют точки приложения этих давлений в сечениях арки. Этими точками определяется многоугольник давления, который вообще является вписанным в веревочный многоугольник (на черт. 209 этот многоугольник показан пунктиром).

При сплошном действии нагрузки, давление в арке изменяется непрерывно и многоугольник давления превращается в кривую давлений. В этом случае направление и величина давления в сечении арки определяются направлением касательной, проведенной в сечении арки к кривой давления, и величиной луча в силовом многоугольнике, проводимого параллельно этой касательной.

Разлагая равнодействующую R_x на направление нормали N к сечению и на направление касательной к сечению, мы получим величины нормальной силы N_x и поперечной силы Q_x в сечении арки.

Величина момента в сечении арки определится произведением равнодействующей R_x на соответствующее плечо r (черт. 210):

$$M = R_x r = N_x . \eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (154)$$

где η — расстояние точки приложения давления в сечении от центра сечения.

§ **60. Линия влияния момента.** Величина момента в сечении арки в общем виде определяется выражением (148):

$$M_x = M^o{}_x - H\,(y'_k - a_k\,tng\,\alpha) = M^o{}_x - \frac{M^o{}_s}{f}\,y_k \quad \ldots\ldots\ (155)$$

в котором оба члена $M^0{}_x$ и $M^o{}_s$ представляют собой моменты в соответствующих сечениях простой балки, а отрезок

$$y_k = y'_k - a_k tng\,\alpha$$

определяется вертикальным расстоянием от центра K оси арки в сечении до линии центров пятовых шарниров.

Переходя к построению линии влияния момента и рассматривая загружение арки грузом = 1 справа от сечения, будем иметь для построения линии влияния уравнение:

$$M_x = V^o{}_a \,.\, a_k - Hy_k = \frac{l-x}{l}\,a - \frac{l-x}{l}\,l_1\,\frac{y_k}{f} \quad \ldots\ldots\ (156)$$

Первый член этого уравнения определяет собой линию вяияния момента в простой двухопорной балке для того же сечения, которая имеет форму треугольника с наибольшей ординатой под сечением. Второй член представляет собой ординату линии влияния распора, видоизмененную в отношении $y_k : 1$, или линию влияния момента простой балки в сечении под шарниром S, измененную в отношении $\frac{y_k}{f} l_1$, следовательно, она имеет форму треугольника с вершиной под шарниром S.

(На черт. 211/а) показано построение линий влияния для обоих членов уравнения (156). Заштрихованная площадь, представляющая собой разность ординат двух линий влияния, является суммарной линией влияния момента в сечении арки.

Знак линии влияния легко определяется, исходя из знака линии влияния момента простой 2-х опорной балки, для которой момент от грузов, действующих сверху вниз, положителен на всей ее длине, а потому в линии влияния момента для арки положительной будет та часть линии влияния, где преобладают ординаты линии влияния момента $M^o{}_x$ простой балки.

На черт. 211 показана линия влияния момента для того же сечения балки, перестроенная относительно оси абсцисс так, что линия as_1, слита с осью абсцисс; при этом перестроении ордината суммарной линии влияния под левой опорой, равная отрезку a_k, остается без изменения.

Процесс построения суммарной линии влияния может быть упрощен путем использования характерной точки f (черт. 211), в которой пересекаются между собой „правая“ прямая ba' одной слагаемой линии влияния с „левой“ прямой ab' другой слагаемой линии влияния. Эта точка пересечения связывает между собой обе слагаемые линии влияния и если положение ее будет известно, то построение суммарной линии влияния может быть сделано непосредственно без предварительного вычерчивания обоих слагаемых линий влияния.

В виду особой важности этого приема непосредственного построения суммарных линий влияния проанализируем его особо.

§ 61. Определение нулевой точки пересечения в суммарных линиях влияния. Из чертежа 211 нетрудно видеть, что в точке пересечения f ордината „правой“ прямой ba' первой суммируемой линии влияния равна ординате „левой“ прямой ab^{I} второй суммируемой линии влияния.

Первая из суммируемых линий влияния является линией влияния или момента, или поперечной силы простой балки, а потому всегда выражается в некоторой функции опорного давления $V^o{}_a$ простой балки. Вторая из суммируемых линий влияния является функцией линии влияния распора H.

При применении к линии влияния момента в арке, эта функциальная зависимость определяется выражением (156).

$$M_k = V^o{}_a a_k - Hy_k$$

Так как в точке пересечения ординаты $V^o{}_a a_k$ и Hy_k, суммируемых линий влияния равны между собой, то это равносильно условию, что

$$V^o{}_a a_k - Hy_k = 0 \text{ или } \frac{V^o{}_a}{H} = \frac{y_k}{a_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (157)$$

Если предположим, что точка пересечения f, удовлетворяющая этому условию, лежит на некотором расстоянии „u“ от левой опоры, то ордината линии влияния опорного давления, $V^o{}_a$, соответствующая этому положению, определится отношением $\frac{l-u}{l}$ и ордината „левой“ прямой линии влияния распора H определится отношением $\frac{l_2}{f} \cdot \frac{u}{l}$. Подставляя эти значения в выражение (157), получим следующую зависимость:

$$\frac{V^o{}_a}{H} = \frac{(l-u)f}{l_2} \cdot \frac{1}{u} = \frac{y_k}{a_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (158)$$

которая позволяет определить положение нулевой точки пересечения по отношению $V^o{}_a : H$.

Определение растояния „u“ или положения точки f очень просто делается на основании геометрических соотношений в арке.

Например, в применении к случаю построения линии влияния момента, мы будем иметь:

$$\frac{f(l-u)}{l_2} = u \cdot \frac{y_k}{a_k}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой вертикальные отрезки $z_1 = \frac{f}{l_2}(l-u)$ между линией AB пятовых центров арки и прямой BS, проходящей между шарнирами B и S арки. Правая часть того же уравнения представляет собой вертикальные отрезки $z_2 = u\frac{y_k}{a_k}$ между линией AB пятовых центров арки и прямой AK, проходящей через пятовой шарнир A и точку моментов K. Условие равенства z_1 и z_2 будет иметь место в пересечении этих прямых BS и AK в точке F, которая будет расположена на расстоянии u от левой опоры. Следовательно, в линии влияния момента в сечении арки нулевая точка f — пересечения определится, как проэкция точки F пересечения прямой BS направления опорных сопротивлений и прямой AK, проходящей через точку моментов.

Зная положение точки f, как проэкции точки F, легко построить всю суммарную линию влияния момента арки, отнеся ее построение к „левой" прямой as' слагаемой линии влияния Hy_k, как к оси абсцисс.

При этом точка f будет лежать на оси абсцисс и будет служить вместе с тем для определения положения „правой" прямой первой слагаемой линии влияния $M^o_x = V^o_a\ ak$.

Другой характерной точкой для определения положения той же прямой останется ее ордината под левой опорой A, так как эта ордината, зависящая от положения сечения K, не зависит от влияния распора H, а потому остается без изменения.

Точками a' и f определяется положение „правой" прямой линии влияния M^o_x, являющейся одной из прямых, очерчивающих суммарную линию влияния. Для дальнейшего построения на нее должны быть снесены характерные точки k' и t, определяющие изломы суммарной линии влияния, под центром сечения и под промежуточным шарниром. Прямой ak' определится положение „левой" прямой линии влияния M^o_x. Точкой t определится—граница распространения „правой" прямой $k'\ f$, так как правее шарнира S суммарная линия влияния должна изменяться по прямой между шарнирами S и B, сходя на нуль к точке b проэкции шарнира B.

На черт. 212 показано аналогичное построение линии влияния момента в сечении K для случая, когда точка F пересечения направления AK и BS лежит правее промежуточного шарнира S. В этом случае положению точки f не соответствует нулевая ордината суммарной линии влияния. Однако, условие геометрического соотношения (см. выражение 157) не нарушается, а потому все построение остается в силе и точка f определится, как проэкция точки F, независимо от того, какое конечное очертание будет иметь суммарная линия влияния.

Изложенный прием построения суммарной линии влияния при помощи точки пересечения f прямых, слагаемых линий влияния, может быть использован не только для построения линии влияния моментов, но и для построения линии влияния нормальных и поперечных сил, опорных сопротивлений и т. д.; необходимо только, чтобы было удовлетворено условие (158):

$$\frac{V^o_a}{H} = \frac{f}{l_2} \cdot \frac{l-u}{u} = \text{условию по уравн. лин. влиян.} \quad \ldots \quad (159)$$

Левая сторона этого равенства $\frac{V^o_a}{H} = \frac{f}{l_2} \cdot \frac{l-u}{u}$ представляет собой отношение слагающих левого опорного сопротивления и сама по себе не зависит от положения сечения, но должна удовлетворять соотношению, вытекающему из уравнения, определяющего линию влияния; это соотношение входит в правую сторону равенства (159).

Правая сторона представляет собой прямую, проходящую через пятовой шарнир B и промежуточный шарнир S; левая сторона—прямую, удовлетворяющую указанному (159) условию и проходящую через правый пятовой шарнир A. В пересечении эти прямые дают точку F, проекцией которой, определяется точка f пересечения в суммарной линии влияния.

С точки зрения механики отношением $V^o_a : H$, т.-е. отношением вертикальной и горизонтальной слагающих, определяется направление опорного сопротивления A. При положении груза справа от сечения, опорное сопротивление A является единственной силой слева от сечения, а потому, если оно проходит через точку моментов, то естественно момент в сечении будет равен нулю, поэтому направлением AK и прямой BS в их пересечении определится точка F, при совладении с которой груз P, разлагаясь, по направлению опорных сопротивлений A и B, будет вызывать в сечении момент$=O$, а потому в линии влияния этому положению должна соответствовать ордината равная нулю, что вполне соответствует выведенному выше аналитическому доказательству положения нулевой точки f пересечения в суммарной линии влияния.

Если точка F пересечения линии BS и AK попадет в правую часть арки (черт. 212), то разложение груза P, совпадающего с этой точкой уже не будет направлено по BS и AK, как груза лежащего справа от шарнира S, а потому в линии влияния этому положению груза не может соответствовать нулевая ордината, и тогда точка f, проэкция точки F, явится фиктивной нулевой точкой.

Аналогичные об'яснения могут быть даны при определении нулевых точек в суммарных линиях влияния поперечной силы Q_x и продольной силы N_x в арке, определяемых из направления опорного сопротивления A по отношению V^o_a и H, о чем смотри ниже.

§ 62. Линии влияния поперечной силы. Поперечная сила в сечениях трехшарнирной арки определяется выражением (152):

$$Q_x = Q^o_x \ Cosn\,\varphi - H\,(Sin\,\varphi - tng\,\alpha \ . \ Cosn\varphi)$$

Первый член правой части этого выражения $Q^o_x \ Cosn\varphi$ представляет собой поперечную силу 2-х опорной балки, измененную в отношении 1. $Cosn\varphi$, второй член—распор арки, измененный в отношении 1. ($Sin\varphi$.—$tang\alpha$. $Cosn\varphi$) Следовательно, линия влияния поперечной силы арки образуется путем сложения двух линий влияния: линии влияния поперечной силы Q^o_x двух'опорной балки и линии влияния распора H арки, измененных в тех же отношениях.

На черт. 213 произведено построение обеих слагаемых линий влияния: измененная линия Q^o_x очерчивается двумя взаимно-параллельными прямыми ak_2 и bk_1, и измененная линия влияния распора H очерчена треугольником $a\ s_1\ b$. Заштрихованная площадь, представляющая собой результат суммирования ординат двух линий влияния, определяет суммарную линию влияния поперечной силы Q_x в сечении арки.

Знак линии влияния определяется по знаку линии влияния поперечной силы Q^o_x балки; знак этой последней сохраняется в той части суммарной линии влияния, где ординаты Q^o_x преобладают над ординатами линии влияния H.

Упрощение в построении может быть достигнуто путем использования геометрического отношения (выраж. 159) для определения положения точки f пересечения „правой" прямой линии влияния Q°_a и „левой" прямой линии влияния H.

При положении груза $= 1$ вправо от сечения, уравнение линии влияния принимает вид:

$$Q_x = V_a{}^\circ \ Cosn\,\varphi - H\,(Sin\,\varphi - tng\alpha \cdot Cosn\,\varphi) \ . \ . \ . \ . \ . \ (160)$$

Ординаты суммируемых линий влияния $V_a{}^\circ$ и H в месте пересечения должны удовлетворить условию (157).

$$V_a{}^\circ \ Cosn\,\varphi - H\,(Sin\,\varphi - tnga \cdot Cosn\,\varphi) = 0$$

или, по разделении на $Cos n \varphi$, согласно условия (159):

$$\frac{V^\circ_a}{H} = \frac{f(l-u)}{l_2} = u\,(tng\,\varphi - tng\alpha).$$

Что удовлетворяется условием пересечения прямой BS и прямой $A—F$, проводимой под углом φ к горизонту параллельно касательной к оси арки в сечении k. Прямая $B\ \ S$ своими ординатами между ней и линией центров $A—B$ пятовых шарниров удовлетворяет левой части равенства. Прямая $A—F$ своими ординатами между ней и линией центров пятовых шарниров, наклоненной к горизонту под углом α, удовлетворяет правой части равенства.

Точкой f, — проекцией на оси абсцисс ab точки F, и точкой a' вершиной ординаты $= +1$. $Cos n\ \varphi$ под левой опорой (черт. 213) определяется положение „правой" прямой $a'f$ в суммарной линии влияния. Положение „левой" прямой той же линии влияния определится проведением прямой ak'_2, параллельной „правой" прямой $a_1 f$, как это следует из свойств линии влияния Q_a° простой балки. Границы распространения этих двух прямых определяются снесением на них точек k_1 и k_2. как проекций точки k.

Снесением точки t проекции шарнира S на правую прямую $a_1 f$ определится очертание суммарной линии влияния на участке SB, по длине которого линия влияния должна изменяться по прямой между точками t и b.

Из изложенного видно, что форма и распространение знаков линии влияния зависят от положения F и ее проекции f; положение последней всегда может быть найдено изложенным приемом.

На черт. 215 показано построение линии влияния поперечной силы Q_x в раме для случая, когда направление прямой AF, проходящей через средний шарнир S, и точка FS сливаются, следовательно сливаются также проекции их $f.s$ и t на оси абсцисс, а потому прямая $t—b$ в суммарной линии влияния сливается с осью абсцисс, так что линия влияния на этом протяжении имеет ординаты равные нулю. Суммарная линия влияния принимает форму линии влияния простой 2-х опорной балки пролетом $as = l_1$.

На черт. 214 показано построение линии влияния поперечной силы Q в арке для случая узловой нагрузки. Эта линия влияния по общему свойству построения линий влияния образуется из линии влияния $ak_2 k_1 tb$ поперечной силы Q_x для непосредственного действия нагрузки, снесением на нее узловых точек, изменяющих контур линии влияния там, где точки переломов в основной линии не совпадают с узловыми точками.

В рассматриваемом нами случае (черт. 214) линия влияния поперечной силы Q_x для непосредственного действия нагрузки очерчивается ломаной $ak_2\ k_1\ tb$. Построение ее сделано по уравнению (160) по ординате $=1.Cos n \varphi$ под левой опорой и по нулевой точке f, положение которой определено как проекции точки F пересечения прямых BS и AF. Точка f лежит справа от шарнира S и как нулевая точка, является фиктивной.

Снося на эту линию влияния для непосредственного действия нагрузки узловые точки, получим исправленный контур ее для узловой нагрузки по многоугольнику 0—1—2—3—4—5—8—9.

§ 63. Линия влияния продольной силы. Продольная сила в сечении арки определяется уравнением (150).

$$N_x = Q_x^\circ\, Sin\,\varphi + H\,(Cos n\,\varphi + tng\alpha . Sin\,\varphi) \dots\dots$$

Первый член этого уравнения представляет собой измененную в отношении $1 \cdot Sin\,\varphi$ поперечную силу Q_x° в сечении простой двухопорной балки; линия влияния этой силы, как известно, очерчивается двумя параллельными прямыми. Следовательно, в порядке образования линии влияния N_x, этот член уравнения дает (черт. 216) две параллельные прямых a_1b и ak_2 с ординатами $+ Sin\,\varphi$ под левой опорой и $- Sin\,\varphi$ под правой опорой.

Второй член уравнения $H\,(Cosn\,\varphi + tng\,\alpha.\;Sin\,\varphi)$ учитывает собой влияние распора H, а потому включение его в линию влияния N_x охарактеризуется построением треугольника $as\,b$ с вершиной под промежуточным шарниром и ординатой под правой опорой, равной $\frac{l_2}{f}\,Cosn\,\varphi$.

Таким образом суммарная линия влияния продольной силы, определяемая суммой ординат этих линий влияния, очертится ломаной $a—k_2—k_1—b—s—a$ и будет иметь на всем протяжении знак (—) в соответствии с сжимающим действием силы N_x.

На черт. 216/в та-же линия влияния N_x перестроена с отнесением суммарных ординат к оси абсцисс.

Упрощение в процессе построения суммарной линии влияния может быть достигнуто определением положения точки f пересечения „правой" прямой a_1b линии влияния $Q_x{}^\circ$ и левой прямой as линии влияния H. Положение этой точки f, должно удовлетворять условиям (157) и (159).

$$V_a{}^\circ\,Sin\,\varphi + H\,(Cosn\,\varphi + tng\alpha\,Sin\,\varphi) = 0$$

отсюда:

$$\frac{V_a{}^\circ}{H} = \frac{f}{l_2}\,\frac{(l-u)}{u} = -\,[Ctng\,\varphi + tng\alpha]$$

или

$$\frac{V_a{}^0}{H} = \frac{f}{l_2}\;(l—u) = —u\,[tng\,(90—\varphi) + tng\,\alpha]$$

Это уравнение удовлетворяется ординатой под точкой F пересечения прямой BS и прямой AF, проведенной под углом $(90—\varphi)$ к горизонту через шарнир A, т.-е. параллельно перпендикуляру к касательной в сечении K арки.

Положением точки f, как проекции точки F определяется искомая точка пересечения указанных прямых $a_1\,b$ и as.

Перестраивая всю линию влияния N так, чтобы прямая fas линии влияния H сливалась бы с направлением оси абсцисс, мы должны будем снести точку f на ось абсцисс. Положением этой точки f на оси абсцисс и вершиной a_1 ординаты $= 1\,.\,Sin\,\varphi$ под левой опорой, определяется направление $fa_1\,k$ «правой» прямой измененной линии влияния; «левая» прямая той же линии влияния $Q^0{}_x$, как известно, должна проходить через нуль на левой опоре и должна быть параллельна „правой" прямой—в перестроенной суммарной линии влияния N это будет прямая ak_2.

Снесением на правую прямую точки t, как проекции шарнира и проведением прямой tb, характеризующей изменение линии влияния N_x на участке между шарнирами S и B, определится форма всей перестроенной суммарной линии влияния N.

На черт. 217 сделано построение линии влияния продольной силы N участка DS арочной конструкции, характеризующейся тем, что направление BS перпендикулярно DS.

Так как для этого случая прямая $AF \parallel BS$, то точка их пересечения лежит в безконечности. Ее проекция на оси абсцисс линии влияния точка f также лежит в безконечности, а потому прямая fa_1k в суммарной линии влияния должна быть параллельна оси абсцисс, а прямая ak_2 ей параллельная должна сливаться с осью абсцисс. Таким образом, после снесения на прямую $a_1 k_1$ проекции шарнира S и проведения прямой t-b, полная линия влияния N очертится многоугольником a-k_2-k_1-t-b, часть которого на протяжении участка ak_2 будет иметь ординаты равные нулю.

Из рассмотренного примера следует, что если угол у вершины рамы будет менее 90^0, то в сечениях рамы могут появиться растягивающие продольные силы, что непосредственно следует из условия изменения формы линии влияния продольной силы N, которая в этом случае для части, слева от сечения лежащей, будет иметь знак $(+)$. Это явление будет иметь место в стрельчатых арках.

§ 64. Определение наибольших напряжений в арке. Ядровые моменты. Наибольшие напряжения в сечениях арки вообще определяются по формуле

$$n = \frac{N}{\omega} \mp \frac{M}{J} e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (161).$$

где ω—площадь, J—момент инерции сечения, e—расстояние до крайней точки сечения.

Наибольшее значение напряжения будет соответствовать невыгоднейшему загружению для нормального усилия N и изгибающего момента M_x. Из сопоставления линий влияния для M_x (§ 61) и N_x (§ 63) видно, что пределы невыгоднейшего загружения их различны, вследствие чего определение наибольшего напряжения приходится делать в трех предположениях, а именно: определив наибольшее положительное и отрицательное значение M, вычислить соответствующие этим загружениям значения N, а затем, определив наибольшее значение N, вычислить соответствующее ему значение M. Избегнуть тройного загружения 2-х линий влияния можно, пользуясь расчетом при помощи ядровых моментов.

Двучленная форма нормального напряжения может быть приведена к одночленной, если за точку моментов взять не точку оси свода, а крайние точки K_1 и K_2 ядра сечения (черт. 218).

Пусть расстояния крайних точек ядра сечения от оси арки будут c_1 и c_2 и пусть точка приложения нормальной силы N от оси арки $=\eta$, тогда $M = N \cdot \eta$, а выражение нормального напряжения может быть написано так:

$$n_1 = \frac{N}{\omega} + \frac{M}{J} e_1 = \frac{N}{J} (\rho^2 + \eta e_1)$$

$$n_2 = \frac{N}{\omega} - \frac{M}{J} e_2 = \frac{N}{J} (\rho^2 - \eta e_2)$$

в котором ρ^2—квадрат радиуса инерции сечения $= \frac{J}{\omega}$; величина его по теории ядра сечения может быть выражена так: $\rho^2 = c_2 e_1$ и $\rho^2 = c_1 e_2$.

Подставляя эти значения радиуса инерции в выражения напряжений, получим:

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \frac{N}{J} (c_2 e_1 + \eta e_1) = \frac{N}{J} (c_2 + \eta) e_1 = \frac{M''}{J} e_1 \\ n_2 &= \frac{N}{J} (c_1 e_2 - \eta e_2) = \frac{N}{J} (c_1 - \eta) e_2 = \frac{M'}{J} e_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (162)$$

В этих выражениях $M' = N(c_1 - \eta)$ и $M'' = N(c_2 + \eta)$ представляют собой величины моментов в сечениях арок относительно крайних ядровых точек.

Для того, чтобы найти по этим формулам наибольшее напряжение при невыгоднейшем загружении, остается построить линии влияния моментов для крайних верхней и нижней точек ядра сечения.

В § 60 был изложен способ определения моментов внешних сил относительно точки оси арки и построения его линии влияния; способ этот остается в силе и для случаев построения линий влияния моментов относительно ядровых точек сечения, соответственно изменяются только координаты точек y_k и a_k.

Выражение момента, например, относительно верхней точки ядра сечения (черт. 219) будет:

$$M' = V^0_a \cdot a_1 - Hy_1 .$$

Нулевая точка f суммарной линии влияния определится положением точки F пересечения линий BS и AK_1, проходящей через соответствующую точку K_1 ядра сечения. Линия влияния строится известным нам приемом отложения отрезка $aa_1 = a_1$, как ординаты под опорой A и проведением прямой $a_1 b_1$ через нулевую точку e_1; на эту прямую сносятся точки k_1 и l_1, которыми определяются прямые $a\,k_1$ и $l'\,b$.

Построение линии влияния момента для нижней точки K_2 ядра сечения аналогично (черт. 219-в) и делается по уравнению:

$$M'' = V^0_a \cdot a_2 - Hy_2 .$$

Имея линии влияния для моментов ядровых точек сечения, нетрудно определить невыгоднейшее загружение для напряжения в крайних волокнах сечения, из которых одно будет соответствовать наибольшему отрицательному, другое—наибольшему положительному.

§ 65. Сечение с наибольшей площадью линии влияния момента. При действии на трехшарнирную арку сплошной временной нагрузки q клг. на пог. метр, наибольшее значение изгибающего момента определяется произведением

$$M = +\omega_1 q \quad \text{и} \quad -M = -\omega_2 q$$

в которых ω_1 и ω_2 площади положительной и отрицательной частей линии влияния.

При непосредственном действии нагрузки на арку, как это часто бывает при покрытии ее забуткой и засыпкой, сечение, которому соответствует линия влияния с наибольшими значениями ее площадей ω_1 и ω_2 не выявляется непосредственно и зависит от очертания оси арки. Определение положения этого сечения может быть сделано на основании следующих соображений.

Площадь ω_1 положительной части линии влияния момента (черт. 220) может быть выражена так:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} x_k (u - x_k)$$

где x_k—расстояние сечения от левой опоры, а u—расстояние нулевой точки f от той же опоры.

Положение нулевой точки f для линии влияния момента определяется (см. выраж. 158) отношением:

$$\frac{f}{l_2} \frac{l - u}{u} = \frac{y_k}{x_k}$$

решая его относительно u, будем иметь

$$u = \frac{x_k . f . l}{y_k l_2 + x_k f}$$

Подставляя это значение в выражение площади ω_1, получим

$$\omega_1 = \frac{1}{2} x_k^2 \left[\frac{f l - y_k l_2 - x_k f}{y_k l_2 + x_k f} \right] \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (163)$$

из которого видно, что наибольшее значение ω_1 зависит от формы оси арки, определяемой координатой y_k.

Положение сечения, которому будет соответствовать наибольшее значение площади ω_1, определится из условия, что производная от выражения 163) должна равняться нулю.

Для частного случая симметричной параболической арки ($l_2 = 0{,}5 l$), для которой ось определяется уравнением

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x (l - x),$$

выражение (163) напишется так:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} x^2 \frac{f l - \frac{4f}{l^2} x \ (l - x) \frac{1}{2} l -}{\frac{4f}{l^2} x \ (l - x) \frac{1}{2} l + x f}$$

или после преобразования:

$$\omega_1 = \frac{1}{2} x \frac{l^2 - 3xl + 2x^2}{3l - 2x}$$

Производная от этого выражения:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{2} \frac{(3l - 2x) \ (l^2 - 6xl + 6x^2) - \frac{1}{2} (l^2 x - 3x^2 l + 2x^3) (-2).}{(3l - 2x)^2}$$

Приравнивая правую часть этого выражения нулю и делая приведение, получим для определения x уравнение:

$$x^3 - 3 l x^2 + \frac{9}{4} l^2 x - \frac{3}{8} l^3 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = 0{,}234 \, l, \ x_2 = 0{,}826 \, l \ \text{ и } \ x_3 = 1{,}94 \, l.$$

Таким образом, абсцисса искомого сечения удовлетворяется условием:

$$x_1 = 0{,}234 \, l.$$

Наибольшее значение отрицательной площади — ω_2 линии влияния момента определяется выражением (черт. 220):

$$\omega_2 = \frac{1}{2} l_2 \frac{y_k}{f} [l - u - (l - l_1)] = \frac{1}{2} l_2 \frac{y_k}{f} (l_1 - u).$$

и соответствует сечению с той же абсциссой $x = 0{,}234\,l$, что нетрудно определить, подставив вместо u его значение и приравняв нулю производную от выражения площади.

Из полученных результатов видно, что сечение с наибольшими значениями площадей линии влияния лежит вблизи четверти пролета $(0{,}234\,l)$; на практике обычно определяют наибольшее значение момента в сечении $x = 0{,}25\,l$.

§ 66. Рациональная ось и форма трехшарнирной арки. Рациональной осью арки будет та ось, при которой при заданных размерах арки напряжение в ее сечениях будут наименьшими. Из выражения же напряжения:

$$n = \frac{N}{\omega} + \frac{M}{J}e,$$

видно, что оно будет наименьшим, если $M = 0$. Последнее возможно только в том случае, если кривая давления совпадает с центром сечения, а потому рациональной осью арки будет та ось, которая совпадает с кривой давлений.

В § 59 было указано, что кривая давлений есть кривая, вписанная в веревочную кривую, построенную для заданной нагрузки. Кривая давлений и веревочная кривая особенно в пологих арках мало отличаются одна от другой, а потому, при определении рациональной оси арки, вполне возможно поставить условием, чтобы при заданной нагрузке ось арки совпадала с веревочной кривой.

Вид веревочной кривой зависит от величины и расположения нагрузки. Положение ее в трехшарнирной арке вполне определяется тремя точками шарниров, но изменение ее между шарнирами зависит от характера размещения нагрузки по арке. При действии на арку подвижной нагрузки веревочная кривая, проходя все время через три шарнира, будет непрерывно изменять свое положение относительно оси между шарнирами, в зависимости от положения нагрузки.

Есть ряд исследований, дающих решение о форме веревочной кривой для того или иного вида загружения постоянной нагрузкой.

Например, для случая сплошной, равномерно распределенной по горизонтальной линии нагрузки интенсивностью p клгр. на пог. метр веревочная кривая очертится по параболе, что получается непосредственно из интеграции уравнения общего вида для веревочной кривой:

$$Hy'' = -z = -p,$$

где H — полюсное расстояние, z — ордината нагрузки, в нашем случае $= p$ (черт. 221).

Интегрируя это выражение для случая $z = p$ получим:

$$Hy = -\frac{1}{2}px^2 + Cx + C_1.$$

Входящие в это уравнение величины C и C_1 определяются по условию расположения пятовых шарниров, а именно из условия, что при $x = 0$, $y = 0$, а потому $C_1 = 0$ и при $x = l$, $y = 0$, а потому $C = \frac{1}{2}pl$, так что уравнение веревочной кривой приводится к виду:

$$Hy = +\frac{1}{2}px(l - x).$$

Этому уравнению должно удовлетворять положение промежуточного шарнира, для которого $x = l_1$ и $y = f$, что дает возможность определить полюсное расстояние:

$$H = \frac{p}{2f} l_1 (l - l_1) = \frac{p}{2f} l_1 l_2.$$

Подставляя это значение в уравнение веревочной кривой, получим:

$$y = \frac{f}{l_1 l_2} x (l - x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (164,)$$

а это есть уравнение параболы (черт. 221).

При сплошном над'арочным строении, нагрузка по длине пролета будет изменяться, в соответствии с очертанием арки, как показано на черт. 222, от h_0 до $(h_0 + f)$, а потому для определения ее необходимо предварительно знать ось арки.

Исследования показывают, что при такой нагрузке, веревочная кривая проходит выше параболического и кругового очертания оси арки и приближается к форме цепной линии.

Legay, определяя форму этой кривой, вывел ее в гиперболической функции такого вида:

$$y = h_0 \, Cos\,h \frac{x}{\sqrt{H/\gamma}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (165)$$

и назвал катеноидом. В этом уравнении γ — вес 1 куб. метра, заполнения над'арочного строения, H — распор арки, определяемый из условия расположения пятовых и промежуточного шарнира. Если координаты промежуточнаго шарнира $x = l_1$ и $y = f$, то величина распора H определится из условия:

$$\sqrt{\frac{H}{\gamma}} = \frac{l_1}{Arc\ Cos\,h\ f/h_0}.$$

Предварительное определение оси арки для нагрузки этого вида может быть сделано также по следующим соображениям.

Если принять предварительно ось арки, направленной по параболе (черт. 222), то для всякой точки этой оси будем иметь:

$$tng\,\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{V_x}{H},$$

в котором V_x и H слагающие давления R в сечении арки с координатами x и y. V_x — вертикальное давление, равное весу нагрузки на протяжении x. H — распор или полюсное расстояние — величина постоянная, при действии неподвижной вертикальной нагрузки.

По интегрированию получим:

$$y = \frac{1}{H} \int_0^x V_x \, dx + C.$$

Так как при:

$$x = 0 \;\; y = 0, \text{ то } C = 0,$$

а потому:

$$y = \frac{1}{H} \int_0^x V_x \, dx.$$

Величина веса V_x может быть выражена через площадь в функции x так:

$$V_x = \gamma \left(h_0 x + \frac{1}{3} xy\right).$$

Так как ось свода принята у нас приближено направленной по параболе, уравнение которой отнесенное к вершине будет $x^2 = 2py$ или по условию расположения пятовых шарниров:

$$x^2 = \frac{l^2}{4f} \cdot y,$$

то выражение веса перепишется так:

$$V = \gamma \left(h_0 x + \frac{4f}{3l^2} x^3\right).$$

Подставляя его в уравнение искомой кривой и произведя интегрирование получим:

$$y = \frac{1}{H} \int_0^x \gamma \left(h_0 x + \frac{4f}{3l^2} x^3\right) dx = \frac{\gamma}{H} \left(\frac{h_0 x^2}{2} + \frac{f}{3l^2} x^4\right)$$

Величина H определится из условия, что для

$$x = 0{,}5l \qquad y = f,$$

а потому:

$$H = \frac{\gamma}{f} \left(\frac{h_0 l^2}{8} + \frac{fl^2}{48}\right) = \frac{\gamma l^2}{8f} \left(h_0 + \frac{f}{6}\right).$$

Подставляя значение H в уравнение кривой, после приведения, получим:

$$y = \frac{8fx^2 (3h_0 l^2 + 2fx^2)}{l^4 (6h_0 + f)} \quad \ldots \ldots \ldots (166).$$

Определяемая по этому уравнению кривая оси свода достаточно близко подходит к катеноиду *Legay* особенно в пологих арках, как это видно из сопоставления цифровых данных следующей таблицы (на стр. 177).

Приведенные выше теоретические кривые имеют в своей основе то или иное закономерное изменение нагрузки, что в действительности не имеет места, а потому они дают только первое приближение для оси свода. Построив такую ось свода надо вычислить для нее действительную нагрузку и для этой последней построить веревочную кривую, проходящую через три точки шарниров, которая даст искомое очертание оси арки.

Если окажется, что полученная кривая сильно расходится с первоначально принятой осью, то, приняв полученную веревочную кривую за ось свода надо вновь пересчитать по ней величины нагрузок и построить для них новую веревочную кривую, которая дает достаточно точное решение для оси трехшарнирной арки.

Более сложной является задача о выборе оси арки, на которую действует подвижная нагрузка, вызывающая своим передвижением по арке значительное изменение в форме кривой давления. При загружении арки подвижной нагрузкой, можно только требовать, чтобы кривые давления своим отклонением от выбранной оси арки не вызывали в сечениях арки напряжений, превосходящих допускаемое для данного материала (напр.,

Сравнительная таблица осей арок, построенных по уравнениям 165 и 166.

$L = 48$ метр. $f = 6$ метр. $h_0 = 2$ метр.				$L = 48$ метр. $f = 12$ метр. $h_0 = 2$ метр.			
Абсц. x	Парабола $y = \frac{4f}{l^2}x^2$	Катеноид (165)	Исправленная парабола (166)	Абсц. x	Парабола $y = \frac{4f}{l^2}x^2$	Катеноид (165)	Исправленная парабола (166)
2	0,0416	0,0296	0,028	2	0,083	0,0484	0,042
4	0,1660	0,1195	0,1126	4	0,333	0,1958	0,177
6	0,375	0,2722	0,2580	6	0,750	0,4496	0,398
8	0,666	0,4920	0,468	8	1,333	0,8217	0,740
10	1,041	0,7859	0,7545	10	2,082	1,3304	1,220
12	1,500	1,1623	1,125	12	3,000	2,000	1,875
14	2,416	1,6326	1,592	14	4,832	2,863	2,737
16	2,666	2,2104	2,172	16	5,332	3,961	3,852
18	3,375	2,913	2,883	18	6,750	5,348	5,272
20	4,16	3,761	3,742	20	8,320	7,090	7,061
22	5,041	4,780	4,773	22	10,08	9,272	9,277
24	6,000	6,000	6,000	24	12,00	12,000	12,00

для каменных сводов кривая давлений должна проходить в пределах ядра сечений).

В таких случаях выбор оси арки делается на основании следующих соображений. Приняв очертание арки по веревочной кривой, построенной для одной постоянной нагрузки, строят для нее кривую давлений при полном загружении всего свода временной нагрузкой и при загружении ею одной половины свода.

Загружение одной половины свода подвижной нагрузкой дает большое отклонение кривой давления, примерно, на $^1/_4$ пролета, поднимая ее над осью в загруженной половине и опуская ее под ось в ненагруженной половине, как это схематически показано кривой $2 — 2$ на черт. 223.

Если построенные указанным путем кривые давлений: $1 — 1$ для полного загружения и $2 — 2$ для одностороннего загружения имеют равные отклонения в обеих частях арки от ее оси, то выбор оси нужно признать правильным; если же эти отклонения сильно разнятся одно от другого, то ось арки нужно исправить, дав ей направление, примерно, по средине между наиболее уклоняющимися кривыми давлений.

АРОЧНЫЕ СКВОЗНЫЕ ФЕРМЫ.

§ **67. Сквозные трехшарнирные арки.** Арочные сквозные фермы, сохраняя по своему образованию свойства балочных ферм, отличаются от них наличием р а с п о р а.

В силу необходимости образования под'сма в арочных фермах, очертание нижнего пояса в них всегда делается по кривой или по ломаной, под'ем которых делается по местным условиям и изменяется в широких пределах от $^1/_4$ до $^1/_{15}$ пролета. Верхнему поясу арки даются различные очертания, связываемые с условиями назначения сооружения и эстетики. Типичными формами арочнах ферм являются следующие формы:

1) А р к и с п р я м ы м в е р х н и м п о я с о м, такие арки (черт. 224/*a*) устраиваются исключительно при расположении временной нагрузки по верху. Высота этих арок резко изменяется от середины к опорам, что отзывается неблагоприятно на распределение усилий в поясах арки (см. § 70).

2) А р к и с п а р а л л е л ь н ы м и п о я с а м и, в которых оба пояса очерчены по концентрическим кривым (черт. 224/*b*), эти арки могут иметь нагрузку, расположенную или по верху, или по низу и воспринимаемую арками при помощи стоек при нагрузке по верху и при помощи подвесок при нагрузке по низу; по эстетическим соображениям они чаще делаются с нагрузкой поверху.

3) К р и в о л и н е й н ы е с п е р е м е н н о й в ы с о т о й, в которых верхний пояс очерчен по кривым разных центров с нижним поясом. Верхний пояс может иметь меньшую кривизну (черт. 224/*c*) вследствие чего фермы получают высоту, увеличивающуюся к опорам и имеют притупленные концы; такие фермы часто употребляются для мостов с ездой по низу. Иногда верхний пояс очерчивается по кривой с большей кривизной, чем нижний пояс (черт. 224/*d*), вследствие чего высота арки получается убывающей к шарнирам и она принимает серповидную форму; последняя форма более свойственна двухшарнирным аркам.

4) С т р о п и л ь н ы е а р к и, служащие для устройства перекрытий, в зависимости от чего верхнему поясу их дается очертание, связываемое с очертанием сооружения, в состав которого они входят.

От арочных ферм с ломаным очертанием верхнего пояса близок переход к рамным фермам, которые отличаются от арок большим под'емом (черт. 225).

Решетка арочных ферм делается, как и в балочных фермах, раскосная и решетчатая; она делается обычно простая, так как, при обычно небольшой высоте ферм в $^1/_{.0}$ и $^1/_{40}$ пролета, панели арки имеют небольшую длину.

Шарниры в арочных фермах могут располагаться как по оси одного из поясов, так и по оси ферм, т.-е. по средине высоты между поясами. В зависимости от расположения шарниров несколько видоизменяется работа самой арки.

Положением шарниров, как известно, определяется положение веревочного многоугольника для заданной нагрузки или кривой давления в арке (§ 59-б). При расположении шарниров на оси одного из поясов кривая давлений тем самым приближается к оси этого пояса, вследствие чего он начинает работать сильнее (см. § 70) и может даже воспринять на себя все давление, превратившись как бы в арку сплошного сечения. Вывод кривой давления из оси этого пояса и вовлечение в работу другого пояса может быть сделан смещением шарниров, т. е. расположением их или на осях различных поясов, или по оси самой арки.

§ 68. Расчет усилий по законам статики. Так как замена сплошного сечения арки сквозной неизменяемой фермой не изменяет работы арки в целом ее виде, то приемы определения величин опорных сопротивлений и построения линий влияния для них остаются в трехшарнирных сквозных арочных фермах те же, что и в арках со сплошной стенкой (см. § 58).

После того, как будут определены величины вертикальных и горизонтальных слагающих опорных сопротивлений, расчет внутренних усилий арочных ферм становится возможен как аналитически по законам статики или кинематики, так и графически при помощи плана Кремона.

Не останавливаясь на изложении приемов построения плана Кремона применительно к арочным фермам, каковые остаются такими же, как и в балочных фермах, перейдем к изложению аналитических приемов определения усилий с построением по ним линий влияния для учета подвижной нагрузки.

Способ моментных точек. Для определения усилий в частях фермы мы можем прежде всего использовать способ моментных точек (см. § 28).

Как известно, при этом способе для определения усилия проводится разрез через рассматриваемый стержень так, чтобы все остальные стержни, рассекаемые этим разрезом, пересекались в одной точке, которая принимается за точку моментов; относительно этой точки составляется уравнение равновесия, из которого определяется усилие.

Для любого из поясных стержней, например, верхнего пояса, это уравнение равновесия напишется в таком виде (черт. 226).

$$O_k h + M^0{}_k - H y_k = O$$

где $M^0{}_k$ момент вертикальных сил относительно точки моментов, h—плечо усилия стержня относительно той же точки; y_k—плечо распора H относительно той же точки; последнее, при расположении пятовых шарниров на разных уровнях определяется вертикальным расстоянием от точки моментов до линии пятовых шарниров.

Решая составленное уравнение равновесия относительно искомого усилия, получим

$$O_k = -\left[\frac{M^0{}_k}{h} - H\frac{y_k}{h}\right] = -O^0{}_k + H\frac{y_k}{h} \quad . \; . \; . \; . \; (167).$$

которое слагается из усилия $O^0{}_k$ того же стержня, как простой 2-опорной фермы и усилия в нем от влияния распора арки.

В соответствии с этим линия влияния усилия поясных стержней (черт. 226а) будет определяться разностью ординат линии влияния ($a\,k_1\,b$) поясного усилия простой 2-хопорной фермы и линии влияния ($a\,s\,b$) распора, измененной в масштабе $y_k : h$.

При положении груза = 1 справа от сечения, уравнение, определяющее линию влияния, напишется в таком виде:

$$O_k = -\frac{1}{h}\left(V_a{}^0 \, . \, a_k - H\,y_k\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (168).$$

В целях упрощения построения суммарной линии влияния может быть использовано условие пересечения «правой» прямой, слагающей линии влияния $V_a{}^0$, и «левой» прямой, слагающей линии влияния H, по которому (см. выраж. 159 в § 61):

$$V_a{}^\circ a_k - H\,y_k = 0,$$

или:

$$\frac{V_a^0}{H} = \frac{f\,(l-u)}{l_2\,u} = \frac{y_k}{a_k},$$

где u — расстояние нулевой точки линии влияния от левого шарнира.

Положение точки f пересечения указанных прямых определяется, как проекция точки F пересечения прямой BS (черт. 226), удовлетворяющей условию: $\frac{f\,(l-u)}{l_2}$ и прямой AK, удовлетворяющей условию $\frac{y_k}{a_k} \cdot u$.

Так как в суммарной линии влияния ордината $\frac{a_k}{h}$ под левой опорой, принадлежащая «правой» прямой линии влияния V_a^0 остается без изменения, то вершиной a_1 этой ординаты и точкой f определяется положение «правой» прямой $a_1\,f$ суммарной линии влияния усилия.

Точкой k_1, проекцией моментной точки K на «правую» прямую $a_1\,f$ и нулевой точкой a под левой опорой определится положение «левой» прямой ak_1 той же линии влияния. На участке между шарнирами B и S суммарная линия влияния усилия будет очерчиваться прямой $t\,b$, проходящей через точку t проекции шарнира S на правую прямую и через нулевую точку b под правым шарниром.

На том же черт. 226c таким же приемом построена линия влияния стержня U_k нижнего пояса. Линии влияния поясных стержней арки очерчиваются многоугольником и могут иметь один или два знака в зависимости от положения нулевой точки f. Знак устанавливается уравнением (168) самого усилия; в той части, где ординаты усилия простой фермы более ординат усилия от влияния распора, сохраняется знак усилия простой фермы.

Изложенный прием расчета усилия и построения линии влияния остается одинаково применимым для всяких стержней арочной фермы, если только возможно составление уравнения равновесия моментов.

Например, расчет усилия в раскосе D_n арочной фермы с затяжкой, показанной на черт. 227, может быть сделан составляя уравнение моментсв относительно моментной точки K, определяемой пересечением поясных стержней. В общем виде уравнение равновесия напишется так:

$$-D\,r + M_k - H\,y_k = 0,$$

а потому усилие раскоса:

$$D = \frac{1}{r}\,(M_k^0 - H\,y_k) = D^0 - H\,\frac{y_k}{r} \quad . \; . \; . \; - \; . \; . \quad (169).$$

Как и надо было ожидать, оно слагается из усилия D_n^0, как раскоса простой 2-х опорной фермы, и усилия, вызываемого в нем влиянием распора.

Переходя к вопросу о построении линии влияния мы должны отметить, что суммарная линия влияния раскоса D_n арки, при положении груза $= 1$ справа от сечения, определится выражением:

$$D_n = \frac{1}{r}\,[V_a \,.\, a_k - H\,y_k].$$

Ординаты ее будут равны разности ординат линии влияния $a - (n-1) - n - b$ раскоса простой 2-х опорной фермы и ординат линии влияния $a - s - b$ распора H, измененных в отношении $y_k : r$ (черт. 227).

Пользуясь для построения суммарной линии влияния нулевой точкой f, удовлетворяющей условию:

$$(V_a \cdot a_k - H\, y_k) = 0,$$

определяем ее как проекцию точки F пересечения прямых BS и AK.

Положение «правой» прямой суммарной линии влияния, определяется нулевой точкой f и вершиной ординаты $a_k : r$, которая откладывается под левой опорой. «Левая» прямая определяется нулевой точкой под левой опорой и точкой k_1 пересечения «правой» прямой с вертикалью под точкой моментов. Между узлами линия влияния изменяется по прямой $n-(n-1)$ и, наконец, в пределах части арки между шарнирами B и S она будет изменяться по прямой $t-b$.

В соответствии со знаком уравнения (169), в котором первый член положителен, суммарная линия влияния на участке cf будет иметь знак плюс ($+$), на остальных участках он будет изменяться в зависимости от положения их относительно оси абсцисс.

Из изложенного построения следует, что контур линий влияния решетки арки зависит от взаимного расположения точки моментов K и промежуточного шарнира S, в зависимости от чего меняется положение нулевой точки линии влияния в соответствии с этим меняется контур линий влияния, при чем некоторые из их участков будут менять свой знак и даже обращаться в нуль, как это показано ниже на частных примерах (черт. 232).

Способ проекции. Может иметь место случай, когда, при параллельных поясах в арочной ферме, точка моментов будет лежать в бесконечности (черт. 228). Так как применение уравнения моментов в этом случае становится невозможным, то мы можем воспользоваться для определения усилия в раскосе уравнением проекций на ось нормальную к направлению поясов.

Приняв угол наклона поясов к горизонту $= \beta$ и угол наклона раскоса к поясу $= \varphi$, мы можем написать условие равновесия для вертикальной нагрузки в таком виде:

$$- D_n \operatorname{Sin} \varphi + Q_0 \operatorname{Cosn} \beta + H \operatorname{tng} \alpha \operatorname{Cosn} \beta - H \operatorname{Sin} \beta = 0.$$

Отсюда усилие раскоса:

$$D = \frac{\operatorname{Cosn} \beta}{\operatorname{Sin} \varphi} [Q_0 - H(\operatorname{tng} \beta - \operatorname{tng} \alpha)] = \operatorname{Cosn} \beta \left[D^0 - \frac{H}{\operatorname{Sin} \varphi} (\operatorname{tng} \beta - \operatorname{tng} \alpha)\right]. \quad (170).$$

Из этого уравнения видно, что усилия раскоса в арке, определяются суммой усилий D_n, как раскоса простой двухопорной фермы, и усилия в нем от влияния распора H, измененных на $\operatorname{Cosn} \beta$ — угла наклона панели фермы относительно горизонта.

Переходя к вопросу о построении линии влияния для этого раскоса, мы получим уравнение, определяющее ее для случая, когда груз $= 1$ находится справа от сечения, в таком виде:

$$D = \frac{\operatorname{Cosn} \beta}{\operatorname{Sin} \varphi} [V_a^0 - H(\operatorname{tng} \beta - \operatorname{tng} \alpha)],$$

из которого видно, что ординаты суммарной линии влияния определяются разностью ординат линии влияния V_a^0 и линии влияния распора:

$$H(\operatorname{tng} \beta - \operatorname{tng} \varphi),$$

измененных в отношении:

$$\operatorname{Cosn} \beta : \operatorname{Sin} \varphi.$$

Для согласования в построении ,суммарной линии влияния раскоса арки, можно воспользоваться условием (159 § 61), которое для этого случая напишется так:

$$V_a^\circ - H\,(tng\,\beta - tng\,\alpha) = 0,$$

или:

$$\frac{V_a^\circ}{H} = \frac{f}{l_2}\ .\ \frac{l-u}{u} = tng\,\beta - tng\,\alpha.$$

Согласно этого условия точка пересечения указанных прямых определяется как проекция точки F пересечения прямых BS и прямой AF, проводимой параллельно наклону пояса под углом β к горизонту.

Положением точки f, как проекции точки F и вершиной ординаты под левой опорой равной $\frac{Cosn\,\beta}{Sin\,\varphi}$, определяется положение «правой» прямой $a_1\,f$ в суммарной линии влияния. «Левая» прямая линии влияния будет параллельна «правой» прямой $a_1\,f$ и должна проходить через нулевую точку a под левой опорой. В пределах панели, где проходит сечение, между узлами $(n-1)$ и (n), линия влияния будет изменяться по прямой $(c_{n-1}) - c_n$. Под правой частью арки, между шарнирами S и B линия влияния будет изменяться по прямой $t - b$.

§ 69. Расчет усилий по законам кинематики. В арочных фермах, имеющих простую решетку, простое и наглядное решение в построении линий влияния получается при помощи мгновенных полюсов вращения.

Сама трехшарнирная арка своими шарнирами определяет положение мгновенных полюсов относительного возможного смещения своих частей.

Выделяя из состава арки один из ее стержней, мы превратим ее в подвижной механизм, полюса вращения частей которого легко определяются из условия возможного движения всей системы, как механизма (см. § 35).

Если же известно положение мгновенных полюсов, то линия влияния легко может быть построена, как эпюра возможного перемещения (см. § 7).

Для пояснения рассмотрим следующие примеры.

Устраняя один из стержней одного из поясов арки (черт. 229), мы превратим арку в механизм, состоящий из трех звеньев I, F и II, соединенных между собой шарнирами-полюсами K и S и с землей шарнирами-полюсами AE и BE.

Мгновенный полюс возможного смещения звена F относительно земли E будет лежать, как известно, на пересечении прямых, проходящих через полюса $AE - K$ и $BE - S$, т.-е. в FE.

Приняв землю за неподвижное звено, как ось абсцисс для построения эпюры возможных смещений, сносим на нее проекции мгновенных полюсов AE, BE и FE, т.-е. точки a, b и f, через которые должны проходить прямые, характеризующие эпюру возможных смещений. Для построения эпюры возможных смещений, проводим через точку f произвольную прямую $a_1 f$, которая должна характеризовать изменение эпюры для звена F; снося на нее проекции шарниров K и S получаем точки k и t, чрез которые должны проходить прямые, определяющие эпюру смещения для звеньев I и II; точками a и k, а также точками t и b вполне определяется положеие этих двух прямых. Полная эпюра очерчится могоугольником $a\,k\,t\,b$.

Для перехода от эпюры возможных перемещений к линии влияния надо определить масштаб и знак; и то и другое легко определяется из уравнения возможной работы, которое, для случая положения груза $P=$ на звене F в расстоянии x от вертикали точки FE, напишется так:

$$-U(\delta_1+\delta_2)+P\,.\,y=0$$

в этом выражении второй член $P\,.\,y$ взят со знаком $(+)$, так как при принятом направлении усилия пояса U звено F, вращаясь вокруг полюса FE, будет стремиться левой стороной опуститься, что совпадает с направлением силы P.

Выражая перемещения $\delta=(\delta_1+\delta_2)$ и y в функции углов φ_1 и φ_2 возможного поворота звеньев I и F получим (сравни выраж. 83 и 84).

$$U=P\,\frac{x\,tng\,\varphi_2}{h\,(tng\,\varphi_1+tng\,\varphi_2)}\,.$$

Прямая, определяемая этим уравнением, проходит через точку f. Масштаб ее ординат, как линии влияния, определяется, как известно, отрезком между прямыми ak и kf (черт. 229) на вертикали, проводимой на расстоянии h от точки k.

Знак линии влияния определится знаком уравнения усилия, который должен быть отнесен к ординате под грузом P.

В рассматриваемом случае знак ординаты y положителен, а потому в левой части линии влияния знак ординат, лежащих выше прямой ab, положителен.

На черт. 230 показано построение линии влияния раскоса, для случая, когда пояса фермы параллельны между собой.

Устраняя стержень раскоса и заменяя его усилием, мы превращаем систему в подвижной механизм. В этом случае мгновенный полюс возможного смещения звена I относительно звена F лежит в бесконечности, так как стержни III и IV параллельны между собой. В силу этого искомый мгновенный полюс возможного смещения звена F относительно земли E будет лежать на линии $AE-EF$, проходящей через полюс AE параллельно стержням III и IV; он также должен лежать на линии BS, проходящей через полюса II E и F II, а потому он будет лежать в точке FE, образуемой пересечением этих прямых.

Снося проекции полюсов AE, BE, FE на ось абсцисс, определяем точки a b и f, через которые должны проходить соответственные прямые, очерчивающие эпюру возможных смещений. Задаваясь произвольной прямой $a_1\,f$, характеризующей эпюру возможных смещений звена F, сносим на нее проекцию шарнира-полюса S в точку t, через которую должна проходить прямая $t\,b$, характеризующая возможные смещения звена II. Так как мгновенный полюс возможного смещения звеньев I и F лежит в бесконечности, то прямая $a\,2$, определяющая эпюру возможных смещений для звена I, должна быть параллельна прямой $a_1\,f$. Таким образом, эпюра возможных смещений очертится многоугольником $a\,2\,3\,t\,b$.

Для перехода от эпюры к линии влияния определяем масштаб линии влияния и знаки ее частей, для чего составляем выражение возможной работы для левого звена, предполагая груз $P=1$ на звене I. Так как, при принятом направлении усилия раскоса D, звено I стремится опуститься вниз, то уравнение работы напишется так:

$$-D\,.\,\delta+Py=0.$$

Вследствие параллельности стержней III и IV звено I должно перемещаться параллельно звену F. Величина возможного вертикального смещения y может быть определена по выражению возможной деформации δ раскоса (черт. 230 a) и, в зависимости от углов наклона: φ—раскоса к поясу и β—пояса к горизонту, выразится так:

$$y = 22_1 Cosn\,\beta = \frac{\delta}{Sin\,\varphi}\,Cosn\,\beta.$$

Подставляя это значение в выражение работы, получим его в таком виде:

$$D = +\,P\,\frac{Cosn\,\beta}{Sin\,\varphi},$$

что показывает, что все ординаты линии a — 2 смещения I звена относительно линии $a_1 f$ постоянны и равны $\frac{Cosn\,\beta}{Sin\,\varphi}$, чем определяется взаимное расположение этих прямых и масштаб линии влияния.

Знак линии влияния под звеном I, согласно уравнения усилия, должен быть положительный.

Изложенный прием построения линий влияния в арках при помощи мгновенных полюсов вполне выясняет роль нулевых точек f пересечения в суммарных линиях влияния.

§ 70. Влияние контура арочных ферм на величину и знак усилий. В предыдущих параграфах мы уже обратили внимание на то, что контур линий влияния и их знак меняется в зависимости от взаимного расположения моментных точек и промежуточного шарнира, так что при одном и том же пролете и под'еме арочных ферм, усилия и линии влияния соответственных стержней в них могут резко отличаться по величине и знаку. Для характеристики этой зависимости сопоставим усилия и их линии влияния для следующих типичных контуров: арки с параболическим нижним поясом и арки с прямым нижним поясом, принимая шарниры лежащими на оси этих поясов.

Арка с параболическим поясом. На черт. 231 показана такая арка, нижний пояс которой очерчен по параболе с уравнением:

$$y = \frac{4f}{l^2}\,x\,(l - x).$$

Линии влияния для всех поясных стержней этой фермы, построятся по уравнению, общий вид которого:

$$\text{усилие пояса} = \pm\,\frac{1}{h}\,[V_a{}^0 a_k - H\,y_k],$$

в котором h — плечо усилия относительно моментной точки K, a_k и y_k— плечи слагающих опорной реакции относительно той же точки.

На черт. 231 по этому уравнению и при помощи нулевых точек f построены линии влияния усилий стержней O_3 и U_2 $Cosn\,\alpha$.

Тот же вид уравнения использован для построения линии влияния решетки.

Например, линия влияния раскоса D_4, определяется уравнением:

$$D_4 = \frac{1}{r}\,[V_a{}^0\,a_k - H\,h_o]$$

и строится при помощи нулевой точки f.

Линия влияния стойки определяется уравнением:

$$V_3 = -\frac{1}{r \cdot Sin\,\varphi}\left[V_a{}^0 a_k - Hh_0\right] = -D : Sin\,\varphi$$

и отличается от линии влияния раскоса масштабом $1 : Sin\,\varphi$, знаком и различными узловыми точками, ограничивающими «правую» и «левую» прямые; φ—угол наклона раскоса к горизонту.

По линиям влияния видно, что усилия всех стержней двухзначны. И так как по условию очертания поясов этой фермы точка F пересечения прямых BS и AK в линиях влияния поясных стержней всегда будет лежать между шарнирами A и S, то эти линии влияния будут состоять из двух треугольных частей. Линии же влияния стержней решетки в зависимости от положения точки моментов K будут состоять из 2-х или 3-х частей.

Для определения соотношения между величинами отрицательных и положительных усилий, возможных в каждом из стержней, предположим, что эта ферма находится под действием **сплошной равномерной нагрузки** (p клгр./метр.).

При загружении всей фермы этой нагрузкой, слагающие опорной реакции A будут:

$$\text{вертикальная } V_a{}^0 = 0{,}5\,pl,$$

$$\text{горизонтальная } H = \frac{M_s}{f} = \frac{pl^2}{8f}.$$

Переходя к определению усилий в стержнях самой фермы, мы можем показать, что при сплошном загружении всей фермы равномерной нагрузкой, верхние пояса и раскосы не работают.

Действительно усилие в любом стержне верхнего пояса определяется уравнением:

$$O_k = -\frac{1}{h_k}\left[\frac{1}{2}\,pl\,x_k - \frac{1}{2}\,px_k{}^2 - \frac{pl^2}{8f}\cdot y_k\right],$$

но так как по очертанию нижнего пояса:

$$y_k = \frac{4f}{l^2}x_k\,(l - x_k),$$

то после подстановки получим:

$$O_k = -\frac{1}{h_k}\left[\frac{1}{2}\,p\,x_k\,(l - x_k) - \frac{1}{8}\,\frac{pl^2}{f}\cdot\frac{4f}{l^2}\,x_k\,(l - x_k)\right] = 0.$$

Точно также из условия равновесия вырезаного любого узла верхнего пояса относительно оси перпендикулярной стойке, следует, что:

$$-D_n\,Sin\,\varphi - O_k\,Sin\,\beta_k + O_{k-1}\,Sin\,\beta_{k-1} = 0,$$

где β—углы наклона поясных стержней к горизонту.

Так как усилия O_k и O_{k-1} равны нулю, то усилие раскоса $D_n = 0$.

Обращение в нуль усилий в верхнем поясе об'ясняется тем, что кривая давлений от сплошной равномерной нагрузки имеет очертание по параболе и при расположении шарниров арки на оси пояса арки, очерченного по параболе, она сливается с ним, почему моменты внешних сил относительно узлов этого пояса равны нулю. Это положение остается в силе, при очертании по параболе как нижнего пояса, так и — верхнего пояса, но оно нарушается, как только шарниры будут сняты с оси пояса, очерченного по параболе.

Отсюда следует, что при параболическом очертании одного из поясов арки и расположении на его оси шарниров, другой пояс арки и раскосы не работают, при действии на арку сплошной равномерной нагрузки.

Так как усилия от сплошной равномерной нагрзки определяются произведением погонной нагрузки на площадь линии влияния, то, следовательно, в арках с одним параболическим поясом площади отрицательной и положительной частей линии влияния другого пояса и раскоса равны между собой, что непосредственно вытекает из условия, что полные усилия этих элементов при сплошном загружении равны нулю.

$$O_k = (\omega_1 - \omega_2)\,p = 0$$

и

$$D_k = p\,(\omega_1 - \omega_2) = 0.$$

Эта зависимость указывает, также на то, что наибольшее отрицательное и положительное усилия в стержнях этого пояса равны между собой, так как линии влияния их состоят из 2-х треугольников с равными площадями.

Стойки ферм с параболическим поясом, при действии на нее сплошной равномерной нагрузки, испытывают усилие, только в том случае если нагрузка передается на непараболический пояс, что непосредственно вытекает из вырезания узла непараболического пояса и составления уравнения равновесия относительно оси стойки, которое при загружении его дает:

$$V = pd.$$

т.-е. усилие равное величине нагрузки на один узел.

Что касается усилий в стержнях самого параболического пояса арки, находящейся под действием сплошной нагрузки по всей длине, то как из вырезания узлов этого пояса и составления уравнения равновесия относительно горизонтальной оси, так и из аналитического выражения усилия:

$$U Cos\,\alpha = \frac{1}{h}\left[M_k^0 - H\,(y_k + h)\right] = -H,$$

непосредствено следует, что проекции усилий этого пояса на горизонтальную ось, при действии на арку сплошной равномерной нагрузки, равны между собой и равны распору, а также, то, что усилия этого пояса не зависят от очертания другого пояса, а только от пролета и под'ема арки.

Арка с прямым нижним поясом. Такая арка показана на черт. 232. Особенностью ее очертания является то, что для всех стержней этой арки, за исключением стержней нижнего пояса, моментные точки лежат на направлении нижнего пояса, проходящего через опорный и промежуточный шарниры; вследствие этого для всех стержней точка пересечения прямой $B\ S$ с направлением прямой AK, проходящей через моментную точку, всегда будут пересекаться на промежуточном шарнире. Таким образом, положение нулевой точки в линиях влияния будет совпадать с проекцией промежуточного шарнира на оси абсцисс линии влияния, что влечет за собой обращение в нуль всех ординат линии влияния на протяжении правой части арки.

На черт. 232 построены типовые линии влияния для стержней O_2 верхнего пояса и раскоса D_3.

Линия влияния стержня O_3 определяется уравнением:

$$O_2 Cos\,\beta = -\frac{1}{h_2}[V_a{}^0 \cdot a_2 - H\,y_2]$$

и может быть построена при помощи нулевой точки f для данного случая, сливающейся с проекцией шарнира S, вследствие чего линия влияния оказывается распространенной только до промежуточного шарнира и принимает форму **линии влияния усилия поясного стержня** 2-х опорной балки пролетом l_1. Она имеет треугольную форму и **однозначна**.

Линия влияния раскоса D_3 определяется из уравнения моментов относительно точки K (черт. 232):

$$D_3 = \frac{-1}{a_k + a_2}[V_a{}^0 a_k - H\,y_k]$$

и так же, как линия влияния усилия O_2, она, вследствие слияния проекций промежуточного шарнира S и нулевой точки f, получает распространение только до промежуточного шарнира и принимает форму **линии влияния усилия раскоса 2-х опорной фермы пролетом** l_1.

Что касается элементов нижнего пояса, то линия влияния его определяется уравнением вида:

$$U_3\,Cos\,\alpha = -\frac{1}{h_2}[V_a{}^0 a_2 - H\,(y_2 + h_2)]$$

общим для всех стержней.

Линия влияния, соответствующая этому уравнению (черт. 232) будет состоять из 2-х треугольников с разными знаками. Соотношение между ее положительной и отрицательной частями будет зависеть от высоты h самих ферм. В частном случае, когда $(y_2 + h_2)$ будет равно ординате y_0 параболы, проходящей через шарниры арки, площади отрицательной и положительной части будут равны между собой, так как в этом случае полное усилие от действия сплошной равномерной нагрузки равно нулю. Для всех контуров, для которых $y_2 + h_2 < y_0$ в линии влияния будет преобладать положительная площадь и для всех контуров, для которых $y_2 + h_2 > y_0$ в линии влияния будет преобладать отрицательная площадь.

Сопоставляя рассмотренные два частных случая, характерные по своему очертанию, можно сделать следующие выводы относительно изменяемости усилий в поясных стержнях в зависимости от изменения контура фермы.

Усилия в стержнях каждого пояса зависят от расположения их моментных точек, т.-е. узлов другого пояса относительно кривой давления. **При совпадении узлов одного пояса с кривой давления элементы другого пояса не работают.** При параболическом очертании одного из поясов это соответствует равенству положительной и отрицательной частей линий влияния другого пояса. При расположении узловых точек одного пояса ниже параболического очертания, в стержнях другого пояса начинается преобладание усилия того знака, который соответствует ему, как стержню простой фермы, т.-е. сжатия для верхнего пояса и растяжения для нижнего пояса. При расположении узловых точек выше параболического очертания получается преобладающее развитие усилий другого знака, т.-е. положительного в верхнем поясе и отрицательного в нижнем.

Таким образом оба пояса арки будут равномерно работать только в том случае, если они расположены симметрично относительно кривой давления, которая по своему контуру близка к параболическому очертанию (см. § 66).

Вследствие этих же причин в арках с прямым верхним поясом (черт. 231) верхний пояс работает сравнительно слабо, преимущественно от подвижной нагрузки и наоборот сильно работает пояс нижний, близкий к параболическому контуру. Чем дальше отходят пояса от параболического контура, тем больше усилия в другом поясе, по причине этого в системах рамного типа (черт. 224) оба пояса сильно напряжены особенно в узловых частях рамы.

КОНСОЛЬНЫЕ ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ.

§ 71. Слагающие опорных реакций. Если обыкновенную трехшарнирную арку продолжить в виде консолей за опорные шарниры, то такая арка, подобно рассмотренным раньше консольным балкам и фермам, получает название консольной арки (черт. 233).

В отношении совместной работы междуопорных частей AB и консолей BC и AD эти арки сохраняют все свойства и особенности, которыми обладают консольные балки; в них нагрузка междуопорной части не вызывает моментов и усилий в консолях, а нагрузка консолей вызывает моменты и усилия в междуопорной части. Вместе с тем в этой системе, включающей в себе арку, сохраняет основное свойство арочных систем— наличие распора, который, как это показано ниже, имеет место при загружении как междуопорной части, так и консолей.

Вертикальные слагающие опорных сопротивлений в консольных арках определяются, так же как в аналогичных балочных системах (§ 17) из выражения момента относительно другой опоры, а потому уравнения, определяющие линии влияния этих слагающих, напишутся так:

$$V_a^0 = (l - x) : l \qquad\qquad V^0_b = x : l$$

и сохраняют свою форму, для положения груза = 1 как на междуопорной части, так и на консолях.

На черт. 233 построена линия влияния опорного сопротивления V_a^0, которая очерчивается прямой $a'b$ с ординатой = 1 под этой опорой, прямая $a'b$, как в консольных балках (§ 17), продолжена до конца консолей.

Если концы консолей перекрыты подвесными балочками или фермами, то на протяжении их линия влияния должна быть очерчена прямыми, сходящими на нуль к противоположному концу этих балочек.

Горизонтальная слагающая опорных сопротивлений (распор) определяется, как для всякой арки из уравнения моментов относительно промежуточного шарнира S:

$$H = M^0_s : f$$

и так как он является функцией момента M^0_s в сечении промежуточной части, соответствующем положению шарнира, то он будет иметь место при загружении как междуопорной части, так и консолей.

Линия влияния его будет такая же, как линия влияния момента в консольной балке в сечении, соответствующем положению промежуточного шарнира (черт. 233). Она будет состоять в междуопорной части из треугольника $a\ t\ b$ с наибольшей ординатой $\frac{l_2}{f} \cdot \frac{l_1}{l}$ под шарниром S и в пределах консолей также из треугольников, стороны которых являются продолжением сторон треугольника междуопорной части, вершины же лежат под концами консолей.

По этой линии влияния видно, что загружение консолей убавляет величину распора средней части арки. Так что, изменяя длину консолей, можно уравновешивать распор арки от действия на нее постоянной нагрузки.

Если предположить, что междуопорная часть находится под действием сплошной равномерной нагрузки p клг. на пог. метр, а консольные части и подвесные балочки под действием такой же нагрузки p_1 клг. на пог. метр, то выражение распора, при таком загружении системы, напишется так:

$$H = \frac{1}{f} \left[V_a{}^\circ . l_1 - p_1 \frac{1}{2} c\ (l' + l_1) - p_1\ l' \left(\frac{l'}{2} + l_1 \right) - p \frac{l^2_1}{2} \right]$$

Подставляя в него выражение вертикальной слагающей опорного сопротивления $V^\circ{}_a = \frac{1}{2}\ p\ (l_1 + l_2) + p_1 \left(l' + \frac{1}{2}\ c \right)$ и, делая приведение, получим.

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2f} \left[p\, l_1\ l_2 - p_1\ l^1\ (c + l^1) \right]$$

Часть этого выражения, помещающаяся в скобках, определяет при каком соотношении длин c, l^1 и $(l_1 + l_2)$ возможно обращение распора в нуль. Этим свойством с успехом пользуются в сооружениях для уменьшения опрокидывающего момента в опорах арочных систем, вызываемого действием распора.

§ 72. **Моменты и поперечные силы**. Зная величину вертикальных слагающих опорных сопротивлений и величину распора, а также форму линий влияния их, можно перейти к определению моментов и усилий в сечениях консольных арок.

В пределах междуопорной части консольных арок, величины момента и усилий определяются выражениями того же вида, как и в простых арках (см. выраж. 153):

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M^\circ{}_x - H y_k \\ N_x &= Q^\circ{}_x\ Sin\varphi + H\,Cos\varphi \\ Q_x &= Q^\circ{}_x\ Cos\varphi - H\ Sin\varphi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (171),$$

в которых y_k—ордината оси арки; φ—угол наклона касательной в точке сечения к горизонту.

Необходимо иметь в виду, что входящие в эти выражения величины $M^\circ{}_x$, $Q^\circ{}_x$ и H вычисляются как для консольных балок.

В соответствии с этим линии влияния этих моментов и усилий будут слагаться из 2-х линий и будут распространяться не только на междуопорную часть, но и на консоли. Построение их может быть сделано теми же приемами, как и в простых арках, т.-е. при помощи ординат под опорами и нулевых точек (см. § 61), но с распространением „правой“ и „левой“ прямых в пределы консолей.

На черт. 234 проведено построение линий влияния момента и поперечной силы в сечении междуопорной части.

Линия влияния момента M_x слагается из 2-х линий влияния (черт. 234-а) M^0_x и H, очерченных прямыми, которые суммируясь должны дать те же прямые, а потому в конечном виде суммарная линия влияния (черт. 234-в) будет очерчена прямыми $c—a—k$ и $t—b—d$. Положение этих прямых, проходящих через нулевые точки под опорами, определяется точками k и t прямой $a_1—k—t$, положение которой в свою очередь определяется, как во всякой арочной системе вершиной ординаты$=a_x$ под опорой и нулевой точкой f проекцией точки F, пересечения прямых BS и AK. (черт. 234-с).

Для построения линии влияния поперечной силы Q_x под левой опорой отложена ордината$=Cos n\varphi$ (см. ур. 171), через вершину которой и нулевую точку f_2 проведена прямая $a_1\, f_2$, определяющая точку t на вертикали под шарниром S, что дает возможность провести прямую tbd, очерчивающую линию влияния под правой частью арки и правой консолью. Прямая cak_2, очерчивающая линию влияния под левой частью, должна проходить через точку „a“ параллельно прямой a_1k_1f, как во всякой линии влияния поперечной силы.

В пределах консольных частей этих арочных систем моменты и усилия определяются так же, как в простых балках, так как условие равновесия может быть отнесено к отсекаемой части консоли, куда распор как сила не входит, а потому внутренние моменты и усилия будут зависеть только от нагрузки, помещающейся на отсеченном конце консоли и подвесной балочке (см. § 18 и 19).

§ 73 Усилия в консольно арочных фермах. Если консольно-арочная система представляет собой ферму, то условия расчета и построения линий влияния для усилий в стержнях будут аналогичны простым аркам, но с учетом влияния консолей, как это было показано для арок со сплошной стенкой.

На черт. 235 и 236 показаны консольно-арочные система с двумя консолями и подвесными балочными фермочками.

Величины вертикальных слагающих опорных сопротивлений и распора определяются также, как в консольно-арочной системе со сплошным сечением.

Усилие любого поясного стержня, например, стержня верхнего пояса O_k определяется уравнением такого вида:

$$O_k = -\frac{1}{h}\ (M^\circ_k - Hy_k) = -O^\circ_k + H\frac{y_k}{h}$$

в котором h—плечо усилия относительно точки моментов.

Следовательно, *усилие консольно-арочной фермы представляет собой разницу усилия того же стержня, как простой консольной фермы и усилия в нем от действия распора.*

Уравнение линии влияния этого стержня, при расположении груза$=1$ справа от сечения, напишется так:

$$O_k = -\frac{1}{h}\ [\,V_a^\circ \cdot a_k - Hy_k\,] \cdot \dots\dots\dots\dots (172)$$

и будет слагаться из ординат линии влияния ce_1kg_1d (черт. 235) простой консольной фермы и линии влияния распора ce_2sg_2d, измененной в отношении $y_k : h$.

Для построения суммарной линии влияния откладываем под левой опорой ординату $a_k : h$ и через ее вершину и нулевую точку f, проекцию точки F пересечения прямых BS и AK, проводим прямую $a_1 f$, на которой лежат точки k и t проекций точки моментов K и промежуточного шарнира S. Этими точками k и t и нулевыми точками a и b под опорами определяются направления прямых e_1ak и tbg_2, очерчивающих контур линии влияния под обеими частями арки и под консолями.

Усилие стержня решетки V_3 (черт. 236-а) определяется из выражения проекции на ось, нормальную поясам арки, такого вида:

$$V_3 = -\frac{1}{Cos\varphi}\,[Q^\circ\ Cos\alpha - H\ Sin\alpha] = -\frac{Cos\alpha}{Cos\varphi}\,(Q^\circ - H\,tng\,\alpha) \quad \ldots (173)$$

гяе φ—угол наклона V_3 и нормали пояса.

Оно представляется суммарным и слагается из усилия того же стержня как простой консольной фермы, и усилия, вызываемого действием распора.

Линия влияния суммарного усилия будет слагаться из двух линий влияния указанных усилий. Для построения ее откладываем под левой опорой ординату $= - Cos\,\alpha : Cos\,\varphi$ и через вершину этой ординаты и нулевую точку l—проекцию точки F пересечения прямых BS и AF, параллельной направлению поясов в рассеченной панели, проводим „правую“ прямую a_1—4—l; „левая“ прямая a—3, как во всякой линии влияния пропорциональной поперечной силе, будет параллельна „правой“ прямой. В пределах междуопорной части линия влияния очертится многоугольником a—3—4—t—b. В пределах консольных частей линия влияния очертится продолжением прямых 3—a и t—b до конца консолей, таким образом вся линия влияния очертится многоугольником e—g_1—3—4—t—g_2—c.

Консольные части этой системы будут работать, как консоли простой фермы только от действия нагрузки, расположенной со стороны конца консоли и подвесной фермочки; влияние арочной части не будет сказываться на них.

Например, усилие раскоса D (черт. 236-в) определяется из уравнения моментов относительно точки m.

$$D = \frac{P\,.\,x}{r}$$

Линия влияния этого усилия определяется построением прямой u—g—m, удовлетворяющей уравнению усилия, и проведением прямых ge и u—a, удовлетворяющих условию узловой нагрузки.

§ 74 Консольно-арочная система с междуконсольными арочками. На черт. 238 показана система из ряда трехшарнирных консольных арок, в которых перекрытие между консолями вместо балочек сделано также трехшарнирными арочками.

Введение в систему междуконсольных арочек вместо балочек характеризуется тем, что на концы консолей передается не только вертикальное давление арочки, как балки того же пролета, но и распор ее, что конечно отзывается на величине и характере изменения опорных сопротивлений и внутренних усилий в основной системе.

Пока нагрузка находится в пределах основной части системы, т.-е. трехшарнирной арки AB и ее консолей, величина вертикальной слагающей V°_a опорного сопротивления и распор H будут определяться обычными условиями равновесия и соответственно линии влияния их будут иметь форму, удовлетворяющую уравнениям:

$$V_a^\circ = (l - x) : l \qquad \text{и} \qquad H = M^0_s : f = \frac{l - x}{l}\cdot\frac{l_1}{f}$$

Но как только нагрузка расположится в пределах междуконсольных арочек, уравнения, определяющие те-же слагающие опорных сопротивлений, изменятся и напишутся в таком виде (черт. 238-в):

$$V^0_a = \frac{1}{l}\ (-\ V_c . l' + H_c d) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (174)$$

$$H = \frac{1}{f}\ V^0_a . \frac{l}{l_1} = \frac{l_1}{f}(-V_c . l' + H_c d) \cdot \cdot \cdot (175),$$

в которых V_c и H_c являются вертикальной и горизонтальной слагающими от действия нагрузки на междуконсольную арочку, приложенными в ее пятовом шарнире.

Выяснение влияния загружения междуконсольных арочек на основную систему, проще всего может быть сделано при посредстве линий влияния, построение которых для рассматриваемой системы значительно упрощается путем использования мгновенных полюсов.

Рассматривая построение линии влияния вертикальной слагающей V^0_a опорного сопротивления в пяте A, мы можем прежде всего отметить, что пока груз $= 1$ будет находиться в пределах основной трехшарнирной арки ASB и ее консолей, величина этой слагающей V_a будет определяться известным уравнением $V_a = \frac{l-x}{l}$ и линия влияния будет очерчена прямой a_1—b, имеющей ординату $aa_1 = 1$ и проходящей через нуль под опорой B.

Далее, в пределах междуконсольных арочек линия влияния будет изменяться по некоторым прямым, для которых пока неизвестны их нулевые точки; так как нулевые точки являются проекциями мгновенных полюсов, то определим положение последних для звеньев промежуточных арочек.

Допустив в пятовом шарнире A вертикальную подвижность (условие горизонтальной неподвижности в нем остается в силе), мы можем рассматривать основную арку ASB, как подвижную систему с неизменяемой точкой E II у опоры B. Кроме того, неизменяемыми точками системы будут пятовые шарниры E VII и E IV междуконсольных арочек. Мгновенные полюса возможного смещения звеньев VI и VII промежуточных арочек будут лежать: для звена VI на пересечении прямых E II—I VI и E VII—VII VI, т.-е. в точке VI E, для звена III на пересечении прямых E II—II III и E IV—IV III, т.-е. в точке E III. Проекциями этих полюсов на оси абсцисс определятся нулевые точки e 6 и e 3, через которые должны проходить прямые 6—6 и 3—3, определяющие эпюру возможных смещений этих звеньев, и так как эти звенья связаны с основными арками шарнирами I VI и II III, то другие точки 1, 6 и 2, 3, определяющие положение прямых 6—6 и 3—3 на эпюре возможных смещений, будут лежать под этими шарнирами на пересечении их вертикалей основной прямой a_1—b. Зная положение на эпюре смещений прямых 6—6 и 3-3 нетрудно закончить полное ее построение, проведением прямых e, 7—6, 7 и 3, 4—4, e, положение которых определяется соответствующими шарнирами.

Переход от эпюры возможных смещений к линии влияния не представляет затруднений, так как основная прямая a_1 b построена из условия, что ее ордината aa_1 под левой опорой $= 1$.

Полученная линия влияния вертикальной слагающей опорного сопротивления V_a имеет в пределах междуконсольной части очертание по ломаной, что является результатом влияния распора междуконсольных арок и что не имело бы места, если бы эти арочки были заменены балочками.

(в последнем случае линия влияния очерчивалась бы по прямым *е* 7—1, 6 и 2, 3—*е*, 4).

Для построения линии влияния распора H, предполагаем устраненным в шарнире A закрепление против горизонтальной подвижности. При этом условии система становится обладающей подвижностью в горизонтальном направлении и имеет неподвижными в вертикальном направлении четыре точки полюса E I, E II, E VII и E IV. Мгновенные полюса звеньев III и (VI) определяются из условия пересечения прямых E VII—VII VI с прямой E I—I VI и прямой E II—II III с прямой E IV—IV III. Проекциями всех этих полюсов на оси абсцисс определяются нулевые точки линии влияния как эпюры возможных смещений.

Линия влияния распора в пределах междуопорной части не зависит от влияния промежуточных арочек, а потому может быть построена как для всякой арки и будет иметь очертание по треугольнику *a*—1, 2—*b* с наибольшей ординатой $\frac{l_1\, l_2}{l\, f}$ под шарниром S. В пределах консоли эти прямые будут продолжаться до конца консолей, где засекут ординаты с вершинами 1, 6 и 2, 3. Последними определяется направление прямых 6—6 и 3—3, проходящих через вершины и нулевые точки *е* 6 и *е* 3. Наконец, линия влияния замыкается прямыми 6, 7—7 *е* и 4, 3—4 *е*.

В построенной линии влияния характерными нулевыми точками являются точки *е* 6 и *е* 3, проекции мгновенных полюсов E VI и E III.

Из условия определения положения этих полюсов видно, что положение их зависит от взаимного расположения шарниров между консольных арочек и положения их относительно пятовых шарниров основной арки ASB, но не зависит от связевых условий ее самой, а потому какие бы связевые условия внутри арки ASB не были нарушены, положения полюсов E VI и E III, а следовательно, их проекций *е* 6 и *е* 3 остаются не измененными. Это свойство облегчает построение линий влияния для внутренних моментов и усилий, как заранее определяющее положение нулевых точек *е* 6 и *е* 3 в них.

Так, например, для построения линии влияния момента в сечении K арки, мы можем, при положении груза = 1 в пределах этой основной арки, рассматривать ее как простую арку и построить линию влияния обычным приемом, отложив под левой опорой ординату a, равную расстоянию сечения K от левой опоры, и проведя прямую $a_1\, f$ через нулевую точку f (черт. 233). Имея контур *aktb* линии влияния M_k в пределах междуопорной части, продолжаем прямые *a k* и *t b* до конца консолей, где засекаются ординаты с вершинами 1, 6 и 2, 3. Этими последними и нулевыми точками *е*, 6 и *е* 3 определяются направления прямых 6—6 и 3—3, очерчивающих линию влияния под звеньями VI и III. Проведением прямых 6,7—*е* 7 и 3, 4—4, *е* завершается построение линии влияния.

Аналогичным путем построится линия влияния поперечной силы в том же сечении. Для чего под левой опорой, руководясь уравнением (171), откладываем ординату = $Cosn\,\alpha$ угла наклона касательной в сечении к горизонту и проводим прямую $a_1 f_2$ через нулевую точку f_2. Этой прямой и прямой $ak_2 \parallel a_1\, f_2$ определяются основные прямые очертания линии влияния. Продолжив прямые $a\,k_2$ и $t\ b$ до конца консолей, засекаем ординаты вершинами 1, 6 и 2, 3, через которые проходят прямые 6—6 и 3—3, очерчивающие линию влияния под звеньями VI и III. Построение линии влияния завершается проведением прямых *е*,7—7,6 и 4,*е*—3,4.

Влияние междуконсольной арочки на моменты в консольной части основных арок будет изменяться в зависимости от положения сечения.

Действительно (черт. 237) момент в сечении консоли, при положении груза на междуопорной арочке, определяется уравнением:

$$M_k = -V_c a + H_c y.$$

Этот момент будет равен нулю, когда направление реакции арки будет удовлетворять условию — $V_c a + H_c y = O$ или $\frac{V_c}{H_c} = \frac{y}{a}$, что будет иметь место при совпадении полной реакции с направлением прямой $K—1—F$. Этим уравнением определяется нулевая точка f линии влияния, как проекция точки F пересечения прямой KF и $2—S$ Зная нулевую точку f и величину отрезка a, можно построить линию влияния, которая для данного случая будет иметь очертание по многоугольнику $k—1—t—2$.

Нетрудно видеть, что точка F пересечения прямых KF и $B\ S$ будет изменять свое положение в зависимости от положения точки K; и если последняя будет лежать на уровне пятовых шарниров, то точка F совпадает с шарниром 2 и линия влияния будет иметь такую же форму, как если бы арочка была заменена балочкой.

На величину поперечной силы Q в сечении консоли междуконсольная арочка оказывает такое же влияние, как если бы на месте нее была балочка (черт. 237), потому что распор арки не входит в уравнение поперечной силы,

Но за то в сечения консоли будет иметь место нормальная (N) сила (черт. 237), являющаяся результатом действия распора арочки.

ВИСЯЧИЕ СИСТЕМЫ.

§ 75. Чисто цепные системы. Цепь, состоящая из прямых стержней, соединенных шарнирами, в которых приложены усилия подвесок $V_1, V_2, \ldots \ldots, V_n$ принимает форму веревочного многоугольника, построенного для этих усилий, как грузов (черт. 239). Если величина усилий дана, то для построения искомого веревочного многоугольника надо знать три точки. Такими точками в цепи обычно задаются две точки C и D укрепления цепи и одна точка вблизи вершины цепи, например, в узле S_{k+1}.

При неподвижной сплошной равномерной нагрузке p клг. на пог. метр. усилие, передаваемое на каждый узел цепи, будет равно:

$$V_k = \frac{1}{2}\,(d_k + d_{k+1}) + g + g_1 \quad \ldots \ldots \ldots (176),$$

где g вес самой подвески и g^1 вес половин стержней самой цепи N_k и N_{k+1}.

Построив для этих сил силовой многоугольник (черт. 239b) и к нему веревочный многоугольник, проходящий через три шарнира C, D и S, мы тем самым определяем форму цепи, какую она должна иметь для заданной нагрузки, и усилий $N_1\ N_2 \ldots \ldots N_n$ в звеньях цепи, которые измеряются длинами лучей силового многоугольника.

Разложением усилия N_1 крайнего звена цепи на вертикальное направление и направление закрепительной тяги S_1 (черт. 239b) определяются опорное давление C и усилие в тяге S_1. То же может быть сделано и для другого конца цепи.

Аналитически горизонтальная слагающая опорных сопротивлений определяется, как и в арочных конструкциях, из выражения момента относительно промежуточного шарнира S всех сил слева или справа от него лежащих:

$$H = -M_s^0 : f \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (177).$$

Отрицательный знак в выражении распора для висячих конструкций показывает, что в них он направлен наружу системы, т.-е. в сторону противоположную направлению распора арочных систем.

Зная величину распора H, который является полюсным растоянием, можно определить усилия в любом звене цепи, из условия, что:

$$N_k = \frac{1}{Cosn\,\beta_k} H \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (178),$$

где β_k—угол наклона звена цепи к горизонту.

Усилия в наклонных тягах соответственно определятся выражениями:

$$S_1 = \frac{H}{Cosn\,\varphi_1} \text{ и } S_2 = \frac{H}{Cosn\,\varphi_2} \quad \ldots\ldots\ldots (179),$$

в которых φ_1 и φ_2 углы наклона тяг к горизонту.

Если цепь арки непосредственно закреплена в своих опорных шарнирах C и D, то вертикальные слагающие опорных сопротивлений могут быть определены из выражения момента относительно шарнира другой опоры, или как вертикальные слагающие усилия N крайнего звена цепи.

$$V_c = M_D : l = N_1 Sin\,\beta_1 \quad \text{ и } \quad V_D = M_c : l = N_{n+1} Sin\,\beta_{n+1} \quad \ldots (180).$$

Но если закрепление сделано при помощи наклонных тяг S_1 и S_2, как показано на черт. 239, то вертикальные слагающие опорных сопротивлений увеличатся от восприятия ими вертикальных слагающих, вызываемых действием усилий закрепительных тяг, и будут равны:

$$\left.\begin{aligned} V_c &= N_1 Sin\,\beta_1 + S_1 Sin\,\varphi_1 \\ V_D &= N_{n+1} Sin\,\beta_{n+1} + S_2 Sin\,\varphi_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (181).$$

Подставляя в эти уравнения значения N и S, выраженные в функциях распора (178, 179) получим:

$$\left.\begin{aligned} V_c &= H(tng\,\beta_1 + tng\,\varphi_1) \\ V_D &= H(tng\,\beta_{n+1} + tng\,\varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (182).$$

Как было показано выше, форма цепи определяется формой веревочного многоугольника построенного для грузов, передаваемых в узлы цепи. Форма цепи не будет изменяться, если заданная нагрузка будет заменена другой ей пропорциональной, в которой нагрузка на узлы цепи сохранит соотношение:

$$V_1 : V_2 : \ldots\ldots : V_n = V'_1 : V'_2 \ldots\ldots : V'_n.$$

При такой замене нагрузок изменится только масштаб силового многоугольника (черт. 239*b*), но не изменится направление его лучей, а следовательно форма цепи сохранится прежней.

Не трудно однако видеть, что если нагрузка, действующая на систему, изменит свое отношение или если на системе появится новая односторонняя нагрузка, то форма цепи резко изменится в соответствии с новой формой веревочного многоугольника.

Это изменение формы цепи будет следовать за продвижением нагрузки и может вызвать недопустимые деформации системы.

Последнее обстоятельство заставляет отказаться от применения чисто цепной системы в сооружениях, несущих подвижную нагрузку, и перейти к системам с жесткими цепями или к системам с цепями, в которых жесткость обеспечивается введением балок или ферм жесткости и т. под.

§ 76. Висячие системы с жесткими цепями. На черт. 240 показана система, в которой цепи заменены двумя жесткими фермами, имеющими пятовые шарниры C и D и связанными между собой промежуточным шарниром S. К этим фермам при помощи подвесок подвешена проезжая часть.

С точки зрения расчета эта система, является ничем иным, как перевернутой трехшарнирной аркой, а потому расчет усилия в ней может быть произведен так же, как и в арочных фермах в §§ 68, 69. Необходимо только иметь в виду, что, представляя собой перевернутую арку, эта висячая система будет иметь распор направленным в обратную сторону чем в арке.

На черт. 241 показана висячая система, в которой жесткость цепи обеспечена приведением ее в треугольную систему, путем соединения решеткой цепи с горизонтальным поясом, расположенным в плоскости проезжей части, вследствие чего вся система имеет вид перевернутой трехшарнирной арки с четырьмя опорными точками.

Для того, чтобы вся эта система была статически определима относительно опорных закреплений необходимо, чтобы все опоры были подвижными (четыре неизвестных условия закрепления) и чтобы в системе имелся бы промежуточный шарнир; условие равновесия относительно последнего дает четвертое уравнение для определения четвертого связевого условия в опорных закреплениях.

Наличие двух верхних опорных шарниров C и D (черт. 241) и наличие промежуточного шарнира S приводят систему к виду перевернутой трехшарнирной арки, но наличие четырех опорных точек в этой системе делает несколько своеобразным определение опорных сопротивлений в ней.

По условиям конструкции опорные сопротивления в шарнирах C_1 и D_1 будут всегда направлены по линиям звеньев $C-C'$ и $D-D'$. Условия равновесия системы не изменятся, если шарниры C и D будут перемещены по направлению линий $C-C'$ и $D-D'$, так как слагающие опорных сопротивлений являются функцией усилия тяги и ее наклона (см. выраж. 180); это позволяет нам принять за исходные точки, точки C и D пересечения этих линий с направлением вертикальных опорных сопротивлений A и B.

Уравнение моментов всех внешних сил относительно точки D дает нам следующее уравнение:

$$V'_a + V''_a = \frac{1}{l} M_D = V_a^0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (183),$$

из которого непосредственно следует, что сумма вертикальных опорных сопротивлений в опорных точках A и C равна опорному сопротивлению простой двухопорной балки.

Из уравнения моментов относительно промежуточного шарнира мы будем иметь, что:

$$H = ZCosn\alpha = -\frac{M_s^0}{h}$$

или

$$H = -\frac{M_s^0}{f} \dots \dots \dots \dots \dots (184),$$

что дает возможность перейти к линии влияния распора, которая будет иметь форму трехугольника asb (черт. 241) с наибольшей ординатой

$$l_1\ l_2 : l.\ f.$$

Зная величину распора H, как горизонтальной слагающей опорных сопротивлений в шарнирах C и D, можно выразить величину вертикальной слагающей V_a'' того же сопротивления в функции распора, а именно:

$$V_a'' = H\,tng\,\varphi_1 \qquad \text{и} \quad V_b'' = H\,tng\,\varphi_2 \dots \dots \dots (185).$$

Из чего следует, что линия влияния опорного сопротивления V_a'' будет подобна линии влияния распора H, т.-е. будет иметь форму треугольника с наибольшей ординатой под промежуточным шарниром (черт. 241), но с ординатами измененными в отношении $1 \times tng\,\varphi$.

Подставляя это значение величины V_a'' в выражение (183) и решая его относительно опорного сопротивления V_a, получим:

$$V'_a = V_a^0 - H\,tng\,\varphi_1 \dots \dots \dots \dots (187).$$

Это выражение показывает, что опорное сопротивление V_a слагается из опорного давления простой двухопорной балки V_a^0 и влияния распора $H\,tng\,\varphi_1$. Следовательно, линия влияния этого сопротивления будет слагаться из линии влияния опорного сопротивления V_a^0, имеющего, как известно, форму треугольника (на черт. 241 треугольника asb) с ординатой $= 1$ под опорой и линии влияния распора (H), измененной в отношении $1 \times tng\,\varphi_1$.

Для построения суммарной линии влияния V_a, мы можем воспользоваться нулевой точкой f пересечения двух суммируемых линий влияния. Эта точка f определится как проекция точки F пересечения прямой DS и CC_2 из условия, что в этом случае:

$$V_a'' - H\,tng\,\varphi = 0.$$

или

$$V_a'' : H = tng\,\varphi.$$

что удовлетворяется наклоном линии CC_2.

Зная точку f и зная ординату линии влияния V_a под левой опорой, которая остается неизменяемой и равна $aa_1 = 1$, нетрудно построить всю суммарную линию влияния, которая очертится многоугольником $a\ a_1\ s\ b$.

Линия влияния опорного сопротивления V_a получилась двухзначной, что указывает на необходимость укрепления опорных конструкций ее против под'ема их отрицательным опорным давлением.

Что касается усилий внутренних стержней системы, как фермы, то величина их будет определяться как в простой трехшарнирной арке, так как вертикальные опорные сопротивления V_a и V_a, суммируясь, будут давать сопротивление V_a^0 простой балки.

Например, для стержня U_3 мы будем иметь усилие определяемое уравнением:

$$U_3 = \frac{1}{h}\,[M_3{}^0 - H\,y_3].$$

С переходом на линию влияния и при положении груза = 1 справа от сечения, это уравнение напишется так:

$$U_3 = \frac{1}{h}\,[(V'_a + V''_a)\,a_3 - H\,y_3] = \frac{1}{h}\,[V_a{}^0\,a_3 - H\,y_3]$$

и сама линия влияния построится, как суммарная из линии влияння:

$$U_3{}^\circ = \frac{V_a{}^\circ\,a_3}{h}$$

простой фермы и из линии влияния распора, измененной в отношении $y_3 : h$.

Построение ее может быть произведено при помощи нулевой точки f пересечения суммирующихся линий влияния, которая определяется как проекция точки F пересечения прямых DS и C 3, удовлетворяющих соотношению (см. 159).

Аналогичным путем могут быть определены усилия всех стержней за исключением опорной стойки V_9, для которой сложение вертикальных опорных сопротивлений V_b' и V_b'' не может иметь места. Эта стойка, как это следует из вырезания верхнего узла, работает только в таких системах, в которых направление последнего элемента верхнего пояса не совпадает с направлением опорного стержня DD_1. Если эти направления не совпадают, то усилие стойки будет определяться уравнением (черт. 241):

$$V_9 = H\,(tng\,\varphi_2 - tng\,\beta),$$

углы φ_2 и β показаны на чертеже.

КОМБИНИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ.

§ 77. Общие понятия. Под названием комбинированных систем мы подразумеваем соединение в одно целое в смысле взаимной работы двух систем, из которых каждая, с точки зрения расчета, при некоторых условиях загружения, могла бы существовать отдельно, но вследствие недостаточной жесткости, они соединяются для взаимной работы по воспринятию более сложных и тяжелых комбинаций загружения. Такие системы чаще всего встречаются в соединении цепи с балкой или балочной фермой, маложесткой арки с балкой или фермой, цепи с аркой и т. под. Применение их часто можно встретить при усилении старых балочных конструкций для воспринятия новых тяжелых нагрузок, при перекрытии больших пролетов, особенно в висячих мостах, и т. д.

Такое соединение арочных систем с балочными, иногда бывает целесообразно в смысле уничтожения действия распора на устои, так как распор в этом случае воспринимается балочной конструкцией, как затяжкой (черт. 243).

Простые системы при соединении их в одно целое образуют системы статически неопределимые, так что приведение их к виду статически определимых заставляет видоизменять конструкцию опорных закреплений и вводить промежуточные шарниры (см. § 40).

Расчет статически определимых комбинированных систем производится на основании тех же принципов и положений, как системы с распором.

Те некоторые особенности, которые встречаются при расчете этих систем в зависимости от характера их образования лучше всего отмечаются на характерных примерах, помещенных в следующих параграфах.

§ 78. Цепь с балкой. Такая система показана на черт. 242. Балка введена для придания жесткости цепи и для устранения волнообразных колебаний проезжей части, которые имели бы место в чисто цепном мосту (см. § 75). В простейшем случае балка делается на 2-х опорах, из которых одна подвижная, другая неподвижная. Вся система имеет четыре опорных точки; условие статической определимости ее требует введения в балку промежуточного шарнира.

За расчетный пролет системы принимается расстояние между опорными шарнирами A и B балки. К вертикалям, проходящим через эти шарниры, относятся опорные сопротивления цепи в точках C и D, через которые проводится замыкающая цепных усилий (сравн. § 77).

Вертикальная слагающая опорных сопротивлений определяется из выражений моментов относительно опорных шарниров:

$$V_a' + V_a'' = \frac{1}{l} M_b = V_a^0$$

и

$$V_b' + V_b'' = \frac{1}{l} M_a = V_b^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186).$$

Но, так как по условиям разложения опорные сопротивления цепи всегда направлены по линиям CC' и DD', то вертикальные слагающие V''_a и V''_b определяются из выражений:

$$V_a'' = H\, tng\, \varphi_1 \text{ и } V_b'' = H\, tng\, \varphi_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187).$$

Величина распора H в цепи определяется из условия равновесия по сечению, проводимому через промежуточный шарнир балки:

$$-H(f+h) + Hh + M_s^0 = 0,$$

откуда:

$$H = +\frac{1}{f} M_s^0,$$

где M_s^0 — момент в сечении средняго шарнира, как в простой балке.

Выведенные выражения опорных сопротивлений позволяют построить линии влияния для них.

Линия влияния распора H, как пропорциональная линии влияния момента простой балки, будет иметь форму треугольника с наибольшей ординатой $\frac{l_1 l_2}{f l}$ (черт. 242).

Линия влияния вертикальной слагающей опорного сопротивления V_a будет иметь форму того же треугольника, как и распор H, но ордината должна быть изменена в отношении $1 \times tng\, \varphi$.

Линия влияния опорного сопротивления балки V_a', будет слагаться из линии влияния опорного сопротивления простой балки V_a^0 и линии влияния

$V''_a = H\,tng\,\varphi_1$. Она будет состоять из двух частей положительной и отрицательной с точкой раздела f, определяемой, как проекция точки F пересечения прямых DS и CC'. (черт. 242), (сравн. § 76, черт. 241).

В виду возможности отрицательного опорного давления при движении подвижной нагрузки, в опорных устройствах балки должны быть предвидены устройства, препятствующие возможности их под'ема.

Зная величину распора, нетрудно определить величину усилия во всех звеньях цепи, которые вообще будут определяться выражением вида:

$$N_n = H : Cos n\,\beta_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (188).$$

Момент в любом сечении балки на расстоянии a_k от опоры определяется из условия равновесия относительно сечения, проводимого через балку и цепь (черт. 242):

$$M_k = M_k{}^0 - H\,(y_k + h') + H\,h' = M_k{}^0 - H\,y_k \quad \ldots\ldots \quad (189).$$

Линия влияния этого момента легко построится по ординате под левой опорой и по нулевой точке f, определяемой, как проекция точки F_m пересечения прямых DS' и Cm.

Если очертание цепи сделано по параболе, определяемой уравнением:

$$y_k = \frac{4\,f}{l_1\,l_2}\,x\,(l - x),$$

то при действии на систему сплошной равномерной нагрузки, моменты в сечениях балки равны нулю, что непосредственно следует из подстановки значений $M_k{}^0$, H и y_k в выражение (189), что соответствует свойству конструкции с распором (сравн. § 70a).

Поперечная сила в сечении балки определяется выражением:

$$Q_k = Q_k{}^0 - N_k\,Sin\,\beta_k = Q_k{}^0 - H\,tng\,\beta_k \quad \ldots\ldots \quad (190),$$

в котором второй член определяет собой проекцию на вертикальную ось усилия цепи в соответствующей панели.

Линия влияния поперечной силы (черт. 242) построится по ординате $= 1$, откладываемой под левой опорой и по нулевой точке f_q, определяемой как проекция точки F_q пересечения прямых DS' и CF_q, из которых последняя параллельна наклону звена цепи в рассматриваемой панели.

Усилия в закрепительных тягах S_1 и S_2 и величины опорных давлений C_1 и D_1 на колонны определятся по выражениям (179) и (182), указанным в § 71.

В рассмотренной системе балка сплошного сечения может быть заменена фермой на двух опорах. Разница в расчете будет та, что вместо моментов и поперечных сил будут рассматриваться усилия в стержнях фермы, которые будут слагаться из усилий простой фермы и усилий от влияния распора. Разбор подобного рода конструкции проведен в примере §§ 80 и 81.

§ 79. **Шарнирная арка с балкой в виде затяжки.** Такого вида системы показаны на черт. 243 и 244. Они представляют собой арку, состоящую из отдельных звеньев, связанных между собой шарнирами; вся арка опирается на два пятовых шарнира A и B, между которыми проходит ферма жесткости, состоящая из двух частей, соединенных между собой промежуточным шарниром S. Эта ферма подвешена к шарнирам арки помощью подвесок $T_1, T_2 \ldots\ldots T_n$. Вся система опирается, как балка, на две опоры, из которых одна подвижная, другая неподвижная. Опорные реакции определяются как для простой балочной фермы.

Наличие промежуточного шарнира S позволяет определить величину горизонтальной слагающей усилия арки (т.-е. распор H).

Проводя разрез через панель, которой соответствует положению шарнира S и составляя уравнение равновесия, получим величину горизонтальной слагающей усилия в таком виде:

$$H = M_s^0 : f \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (191),$$

она пропорциональна моменту M_s°, определяемому как в простой балке для того же сечения.

Линия влияния этого усилия будет иметь форму треугольника под шарниром S с наибольшей ординатой:

$$\frac{l_1 l_2}{l \cdot f}$$

Полученное выражение показывает, что величина горизонтальной слагающей усилий в частях арки зависит от положения промежуточного шарнира и будет различна в зависимости от того, расположен ли он по оси верхнего или нижнего пояса фермы жесткости.

При расположении шарнира S в такой же системе на уровне нижнего пояса (черт. 244), горизонтальная слагающая усилия определится выражением:

$$H = M_s^0 : (f + h) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (192).$$

Зная величину горизонтальной слагающей усилий в частях арки, нетрудно определить величину усилий N в ее частях, а также усилия в подвесках. Из вырезания любого из шарниров арки и рассмотрения равновесия его непосредственно следует, что усилия в каждой панели арки обратно пропорциональны косинусам углов их наклонения к горизонту, а потому, если мы возьмем за основу отрезок, равный величине H горизонтальной слагающей и проведем к ней наклонные прямые, то отрезки этих прямых определят собой величины усилий в стержнях арки (черт. 243b).

$$N_1 \, Cosn \, \alpha_1 = N_2 \, Cosn \, \alpha_2 = \ldots \ldots = H \quad \ldots \ldots \quad (193).$$

Отсекаемые же ими вертикальные отрезки на перпендикуляре, восстановленном в другом конце усилия H, определяют собой величину усилий в подвесках арки.

$$T_n = N_n \, Sin \, \alpha_n - N_{n-1} \, Sin \, \alpha_{n-1} = H \, (tng \, \alpha_n - tng \, \alpha_{n-1}) \quad \ldots \quad (194).$$

Усилия в стержнях фермы жесткости определяются из условия равновесия по соответствующим разрезам.

Усилия в любом стержне пояса фермы определятся одним из следующих уравнений равновесия (черт. 243):

$$\text{для нижн.} \; - U_m h + M_m^0 - H y_m = 0,$$

$$\text{для верх.} \; O_k h + M_k^0 - H (y_k + h) = 0.$$

Вертикальная слагающая усилия в стержне арки, отнесенная к вертикали, проходящей через точку моментов, дает момент, равный нулю.

Таким образом, усилия в стержнях поясов фермы, определяемые уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{h}(M^0{}_m - H \, y_m) = U^0{}_m - H\frac{y_m}{h} \\ O_k &= -\frac{1}{h}[M^0{}_k - H \, (y_k + h)] = -O_k^0 + H\,\frac{y_k + h}{h} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (195),$$

слагаются из усилия того же стержня, как в простой 2-х-опорной ферме и усилия от влияния горизонтальной проекции усилия в звеньях Н арки, измененного в отношении $y : h$.

Переходя к построению суммарной линии влияния отметим, что она будет слагаться из разности или суммы ординат линии влияния усилия простой фермы и видоизмененной линии влияния распора.

Построение суммарной линии влияния проще всего может быть сделано при помощи нулевых точек пересечения прямых, очерчивающих слагаемые линии влияния. Из предыдущего известно (см. § 61), что положение этих точек определяется условием (159) равенства ординат слагающих линий влияния. В рассматриваемом случае эти условия напишутся в таком виде:

для стержня U_m:

$$\left.\begin{aligned} &M_m{}^0 - H\,y_m = V_a{}^0 \cdot a_m - H\,y_m = 0, \\ &\text{откуда:} \\ &\frac{V_a{}^0}{H} = \frac{y_m}{a_m} \\ &\text{для стержня } O_k: \\ &M_k{}^0 - H\,(y_k + h) = V_a{}^0\,a_k - H\,(y_k + h) = 0, \\ &\text{откуда:} \\ &\frac{V_a{}^0}{H} = \frac{y_k + h}{a_k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (196).$$

Так как в рассматриваемой нами конструкции величина H определяется плечом f до положения шарнира S в пределах верхнего пояса, то прямая своими ординатами, удовлетворяющая девым сторонам равенств (условия 159).

$$\frac{V_a{}^0}{H} = \frac{f}{l_2}\;(l - u_m) = u_m \cdot \frac{y_m}{a_m}$$

и

$$\frac{f}{l_2}\;(l - u_k) = u_k\,\frac{y_k + h}{a_k},$$

должна быть проведена через точку B_2, лежащую на вертикали опоры B на высоте шарнира S и через точку S' арки.

Прямые, удовлетворяющие правым частям тех же равенств, пройдут через вершины ординат y_m и $y_k + h$, отсчитываемых также от уровня шарнира S. Из них ордината y_m имеется на чертеже, а ординату $y_k + h$ потребуется отложить до точки k'.

Прямыми Am' и Ak', проходящими через вершины этих ординат засекутся на прямой BS' точки F_m и F_k, ординаты которых удовлетворяют условиям (196). Проекциями этих точек F_m и F_k определяются на осях абсцисс соответствующих линий влияния нулевые точки f_m и f_k.

В остальном построение обеих линий влияния не встречает затруднений и производится обычным способом, исходя из ординат под левой опорой, равных в линии влияния U_m—отрезку $a_m : h$, и в линии влияния O_k—отрезку—$(a_k : h.)$

Если промежуточный шарнир S будет расположен на линии опорных шарниров (черт. 244), чему соответствует значение H по уравнению 192, то прямая $B\,S^1$, удовлетворяющая своими ординатами условию (159 и 196) $\frac{f + h}{l_2}\;(l - u)$, пройдет непосредственно через шарнир B и точку S^1, лежащую на оси арки и отстоящую на высоту $(f+h)$ от нижнего пояса.

На черт. 244 показано построение линии влияния для стержня U_m нижнего пояса фермы жесткости этой системы.

Перейдем теперь к определению усилий в стержнях решетки ферм жесткости.

Когда пояса фермы параллельны, то определение усилий делается из условия равновесия по разрезу относительно оси, нормальной к поясам фермы. Для случая, показанного на черт. 244, это будет вертикальная ось, относительно которой будем иметь:

$$V_m + Q_m{}^0 - H\ tng\ \beta_m = O$$

где $H\ tng\ \beta_m$ определяет собой величину проекции на вертикальную ось усилия N_m в рассеченной панели арки.

Таким образом суммарное усилие в стойке фермы жесткости равное:

$$V_m = -(Q_m{}^0 - H\,tng\ \beta_m) = -V_m{}^0 + H\,tng\ \beta_m \quad \ldots\ldots \quad (197)$$

будет слагаться из усилия той же стойки $V^\circ{}_m$, как стойки простой фермы и усилия в ней от влияния горизонтальной слагающей H арки.

Уравнение линии влияния этой стойки при положении груза $= 1$ справа от сечения будет:

$$V_m = -V_a{}^0 + H\ tng\ \beta_m$$

Как суммарная линия влияния она построится, исходя из ординаты $a\ a_1 = 1$ линии влияния $V^0{}_a$ под левой опорой и при помощи нулевой точки f, положение которой определится, как проекции точки F', пересечения прямых $B\,S_1$ и $A\,F_{,}$, удовлетворяющих своими ординатами в точке F условию (159).

$$-V_a{}^0 + H\ tng\ \beta_m = O$$

или:

$$\frac{V_a{}^0}{H} = \frac{f}{l_2}\ \frac{(l-u)}{u} = tng\ \beta_m$$

Прямая $A\,F_1$ должна проходить под углом наклона к горизонту $\beta_m =$ углу наклона элемента арки в этой панели (черт. 244).

Построение линии влияния V_m сделано в предположении нагрузки по верхнему поясу фермы.

Если пояса фермы жесткости не параллельны между собой (черт. 25), то усилия в частях решетки определяются из выражения момента относительно точки пересечения стержней поясов.

Для случая, показанного на черт. 245 усилие раскоса D определится из выражения:

$$+D\,r - M_k - H\,y_n + V_n\,b = O.$$

Подставляя в это выражение значение $V_n = H\ tng\ \beta$ получим:

$$D = \frac{1}{r}\left[\ M_k + H\ (y_n - b\ \ tng\ \beta)\ \right]$$

Уравнение линии влияния этого раскоса, при положении груза справа от сечения, напишется так

$$D = \frac{1}{r}\left[\ V_a{}^0\ a_k + H\ (y_n - b\ \ tng\ \beta)\ \right] \quad \ldots\ldots \quad (198).$$

Нулевая точка f пересечения прямых, образующих линию влияния, как известно должна удовлетворять условию (159):

$$-\frac{V^0_a}{H}=\frac{f}{l_2}\,\frac{l-u}{u}=\frac{y_n-b\,tng\,\beta}{a_k}$$

Это соотношение, как нетрудно видеть из чертежа, будет удовлетворено пересечением прямой $B\,S'$ и прямой $A\,F'$, проходящей через точку K', ордината которой $=y_n-b\ \ tng\,\beta$.

Зная точку f^1, как проекцию точки F' и, исходя из неизменяющейся ординаты $a_k:r$ под левой опорой, легко построить всю суммарную линию влияния известным нам способом.

Если в этих системах арочная часть очерчена по параболе, то при действии на них сплошной нагрузки (согласно свойств арочных ферм см. § 70-а), будет работать только сама арочная часть и тот из поясов фермы жесткости, по оси которого расположены промежуточный и опорные шарниры; этот пояс будет представлять собой затяжку по отношению к арочной части; другой пояс фермы жесткости работать не будет. При раскосной системе решетки в фермах жесткости, стойки ее будут работать, как подвески на местную нагрузку, при условии расположения ее по низу.

В системах, в которых пяты арочной части и промежуточный шарнир S (черт. 244) не расположены на одной прямой, в работу войдут оба пояса фермы жесткости и вся ее решетка.

§ **80. Арка с фермой жесткости поверху.** Такая конструкция состоит из шарнирной арки и жесткой балки или фермы, расположенной над аркой и соединенной с ней стойками (черт. 246). Эта конструкция имеет четыре опорных точки, из которых две принадлежащие арке и одна принадлежащая ферме жесткости—шарнирно-неподвижные. Условие статической определимости требует введения в ферму жесткости промежуточного шарнира S, располагаемого на оси одного из поясов этой фермы.

По своей работе эта система близка к системе, рассмотренной в примере § 75, но только цепь заменена аркой.

Расчетный пролет этой системы принимается равным расстоянию l между опорными точками фермы жесткости. К этому пролету относятся опорные закрепления арки, которые переносятся в точки A_1 и B_1, лежащие на протяжении звеньев $A\ 1$ и $B\ 6$.

Опорные закрепления в этой системе определятся из тех же условий, как это было указано в системе цепного моста, усиленного балкой (§ 75).

Из выражения момента относительно шарнира B_2 будем иметь:

$$V'_a+V''_a=\frac{1}{l}\ M_B=V^0_a$$

Так как опорное сопротивление арки в шарнире A_1, всегда имеет направление по звену $A\,A_1$, то вертикальная слагающая этого сопротивления.

$$V^1_a=H\ \ tng\ \ \Theta_1$$

а потому:

$$V''_a=V^0_a-V'_a=V^0_a-H\,tng\ \ \Theta_1.$$

Величина горизонтальной слагающей H определится из выражения момента по сечению через шарнир S фермы:

$$-H\ (f+h)+H\,h+M^0_s=O$$

$$H=\frac{M^0_s}{f}$$

Линия влияния распора, как вообще в арочных системах будет иметь форму треугольника с наибольшей ординатой под шарниром S равной:

$$\frac{l_1 l_2}{l f}$$

Линия влияния опорного сопротивления V_a'' будет слагаться из линии влияния опорной реакции V^0_a простой балки и линии влияния распора, измененной в отношении $1 \times tng\ \Theta_1$ (черт. 246).

Построение этой линии влияния показано на черт. 246, где она построена при помощи нулевой точки f, определяемой, как проекция точки F пересечения прямых $B_1\ S_1$ и прямой $A_1\ F$, своим пересечением в точке F, удовлетворяющих условию (159):

$$V_a^0 : H = tng\ \Theta.$$

После того, как известны опорные сопротивления системы, определение усилий во внутренних стержнях не представит затруднений.

Усилие N_k в любом звене арки будет определяться выражением $N_k\, Cos\ \beta_k = H$, в котором β_k угол наклона этого звена к горизонту.

Усилия в стержнях фермы жесткости будут определяться из условия равновесия по сечению, проводимому через этот стержень.

Так, например, усилие поясного стержня U_k определится из выражения момента всех сил относительио узла K, которое напишется так:

$$-U_k\ h + M^0_k - H\, y_k = O$$

В этом выражении M^0_k — момент как в простой балке всех сил нагрузки слева от сечения лежащей, а $H\ y_k$ — момент пары, образующейся, при действии горизонтальной слагающей опорного давления и действия горизонтальной слагающей в сечении арки.

Решая это уравнение относительно усилия U_k получим:

$$U_k = \frac{1}{h}\left(M^0_k - H\, y_k \right) = U^0_k - H\,\frac{y_k}{h}$$

Лания влияния этсго усилия построится известным уже приемом, как суммарная линия влияния, определяемая, при действии груза справа от сечения, уравнением:

$$U_k = \frac{1}{h}\left(V^0_a\, a_k - H\, y_k\right).$$

Нулевая точка в ней определяется, как проекция точки F пересечения прямой $B_1\ S_1$ и прямой $A_1\ K$, проходящей через точку на оси арки, удовлетворяющей условию (159) $\dfrac{V_a^0}{H} = \dfrac{y_k}{a_k}$ (черт. 246).

Усилие раскоса D в той же ферме жесткости определится из уравнения проекций на вертикальную ось, а именно:

$$-D\ Sin\,\varphi + V^0_a - \Sigma^k_0\, P - V_k = O.$$

но так как $V^0_a - \Sigma^k_0\, P = Q^0$ поперечной силе простой балки и V_k — вертикальная слагающая в сечении арки $= H\ tng\ \beta_k$, то усилие раскоса может быть выражено так:

$$D = \frac{1}{Sin\,\varphi}\ (Q^0 - H\, tng\ \beta) = D^0 - H\,\frac{tng\,\beta}{Sin\,\varphi}$$

Линия влияния этого усилия при положении груза $= 1$ справа от сечения определится уравнением:

$$D = \frac{1}{Sin\,\varphi}\,(V^0{}_a - H\,tng\,\beta)$$

Она построится известным приемом при помощи нулевой точки f, определяемой как проекция точки F пересечения прямой $B_1\ S_1$ и прямой $A_1\ F_d$, проводимой через точку A_1, под углом β к горизонту, т.-е. параллельно рассеченному звену арки (согласно условию 159).

Аналогичным способом могут быть определены усилия и построены линии влияния для любых стержней фермы жесткости.

§ 81 Многопролетная цепь с фермой жесткости. Такая система показана на черт. 248. Она состоит из цепи, жесткость которой усилена решетчатой фермой, лежащей на четырех опорах. Условия статической определимости самой фермы жесткости, как неразрезной, требуют введения в нее двух шарниров S_1 и S_2, постановкой которых она превращается в консольную ферму с двумя подвешенными фермочками AS_1 и DS_2. Приняв за исходное положение консольную ферму нетрудно проследить образование всей системы, как статически определимой и неизменяемой. Условие же замыкания цепи заставит ввести в ферму жесткости еще один шарнир S.

Из условия равновесия цепи непосредственно следует, что горизонтальные слагающие ее усилий во всех пролетах равны между собой, т.-е.

$$H_1 = H = H_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (199)$$

Из условия равновесия относительно промежуточных шарниров S_1 и S_2, относительно которых момент сил, слева или справа лежащих, равен нулю, непосредственно следует, что усилия в цепи должны иметь направление по линиям замыкающих $A_1S_1{}^1$ и $D_1S^1{}_2$. Этими прямыми на вертикалях опорных закреплений засекаются отрезки: на вертикали B отрезок $b = \frac{f_1}{\lambda_1}\ L_1$ и на вертикали C отрезок $\frac{f_2}{\lambda_2}\ L_2$, которыми определится положение замыкающей $B_2\ C_2$ в среднем пролете, что дает возможность определить величину распора из условия равновесия относительно среднего шарнира по уравнению:

$$M_s = M^0{}_s - H\,.\,f = 0 \quad \text{откуда} \quad H = \frac{M^0{}_s}{f}$$

Аналитически это может быть доказано решением следующей системы уравнений равновесия, составленных для случая положения груза P в среднем пролете на расстоянии x от опоры B.

$$\left.\begin{array}{lll}
1)\ \text{относит. шарнир.} & S_1: & A\ \lambda_1 + Hf_1 = 0 \\
2)\qquad ,, \qquad ,, & S: & A\ (L_1 + l_1) + Bl_1 + Hh_0 = 0 \\
3)\qquad ,, \qquad ,, & S_2: & D\lambda_2 + Hf_2 = 0 \\
4)\ \text{относит. опоры} & C: & A\ (L_1 + l) + Bl - P\,(l - x) - D.L_2 = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (200).$$

Из первого и третьего непосредственно определяются величины опорных реакций A и D в функции горизонтальной слагающей усилия цепи:

$$A = -H\,\frac{f_1}{\lambda_1} \qquad\qquad D = -H\,\frac{f_2}{\lambda_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (201).$$

Подставляя значения этих реакций в четвертое уравнение, определим величину опорной реакции B.

$$B = \frac{P(l-x)}{l} - H\frac{f_2}{\lambda_2}\,\frac{L_2}{l} + H\frac{f_1}{\lambda_1}\,\frac{(L_1+l)}{l}$$

но так как $\frac{f_1}{\lambda_1}\,L_1 = b$, $\frac{f_2}{\lambda_2}\,.\,L_2 = c$ и $\frac{l-x}{l} = B_0$, то

$$B = B_0 + H\left[\frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{1}{l}\,(b-c)\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (202),$$

в котором $H\frac{f_1}{\lambda_1}$ — вертикальная слагающая от давления левой цепи, $H\frac{b-c}{l}$ — реактивное сопротивление от несимметричного расположения цепи.

Подставляя величины A и B во второе уравнение (из выраж. 200), можно определить величину горизонтальной слагающей:

$$-H\frac{f_1}{\lambda_1}\,(L_1+l_1) + B_0\,l_1 + H\,l_1\left[\frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{1}{l}\,(b-c)\right] + Hh_0 = O$$

подставляя $\frac{f_1}{\lambda_1}\,L_1 = b$ и делая приведения, получим:

$$-Hb + B_0 l_1 + H\frac{l_1}{l}\,(b-c) + Hh_0 = -H\left(\frac{bl_2}{l} + \frac{cl_1}{l} - h_0\right) + B_0 l_1 = O\,. \quad (203).$$

В этом выражении B_0—реакция опоры как простой фермы, а выражение в скобках представляет собой разницу ординаты шарнира S относительно замыкающей $B_2\,C_2$ и высоты фермы h_0, равную стрелке f цепи относительно замыкающей, а потому:

$$-H\,.\,f + B_0 l_1 = O \quad \text{откуда} \quad H = \frac{M^0_s}{f}$$

т.-е. распор цепи определяется из выражения момента относительно среднего шарнира, как момента простой балки в том же сечении, деленнаго на длину стрелки цепи относительно замыкающей $B_2\,C_2$, проводимой через вершины отрезков на опорных вертикалях, засекаемых замыкающими A_1S_1 и D_1S_2 крайних пролетов.

При положении груза на консолях, составленные выше уравнения равновесия не изменятся; будет изменяться только величина опорного сопротивления B_0, как во всякой консольной ферме.

Сделанные выводы позволяют построить линию влияния распора, которая в среднем пролете будет иметь форму треугольника с наибольшей ординатой $= \frac{l_1\,l_2}{l\,f}$ (черт. 248), а в крайних пролетах будет очерчиваться продолжением тех же прямых до шарниров, как в консольных арках; в пределах же подвесных частей по прямым между шарнирами.

Зная линию влияния H можно построить линию влияния опорного сопротивления B (см. выраж. 202), которая будет слагаться из опорного сопротивления B_0; как простой консольной балки на черт. 248 $a - t_1 - - c - t_2 - d$ и линии влияния H, измененной в отношении

$$H\left[\frac{f_1}{\lambda_1} + \frac{1}{l}(b-c)\right] = H\,(tng\,\Theta + tng\,\alpha)$$

показанной на черт. многоугольником $a - s_1 - s - s_2 - a$.

Угол Θ,—угол наклона замыкающей $A_1\,S^1{}_1$ к горизонту и угол α—угол наклона замыкающей $B_2\,C_2$ к горизонту.

Суммарная линия влияния опорного давления B может быть построена при помощи нулевой точки, определяемой пересечением прямых $C_2\,S^1$ и $A_1\,B_2$, удовлетворяющих условию (159) $B_0 : H = -(tng\,\Theta + tng\,\alpha)$.

Усилие любого из поясных стержней средней части системы определяется из условия равновесия относительно сечения, проводимого через стержень.

Так, например, для стержня пояса U_k из условия равновесия будем иметь:

$$U_k = \frac{1}{h}\,(M^0{}_k - H\,y_k),$$

в котором $M^0{}_k = B^0\,a_k$ = моменту реакции простой балки, а y_k плечо пары, горизонтальных усилий цепи относительно замыкающей $B_2\,C_2$.

Построение суммарной линии влияния усилия может быть сделано при помощи нулевой точки f, определяемой как проекция точки F пересечения прямых $C_2\,S^1$ и $B_2\,K$, удовлетворяющих условию (159)

$$B^0 : H = y_k : a_k\,.$$

Усилие в стержнях решетки определяется из уравнения проекций на вертикальную ось всех сил, слева лежащих.

Например, для раскоса D_k (черт. 248)

$$A + B - V_k + D_k\ Sin\,\varphi = O$$

Подставляя сюда значения A и B, выраженные в функции H и $V_k = H\ t_{ng}\,\beta$, как проекцию вертикальной слагающей усилия в звене цепи, получим:

$$D_k\,Sin\,\varphi = -\left[-H\frac{f_1}{\lambda_1} + B_0 + H\frac{f_1}{\lambda_1} + H\frac{b-c}{l} - H\,tng\,\beta\right] = -$$

$$= -\left[B_0 - H\,(tng\,\beta - tng\,\alpha)\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (204).$$

Линия влияния для этого стержня может быть построена при помощи нулевой точки f_1, положение которой определится пересечением прямой $C_2\,S^1$ и прямой $B_2\,F$, параллельной пересекаемому звену. Ордината линии влияния под опорой B равна отрезку $-(1 : Sin\,\varphi)$.

В отличие от консольных частей простых ферм, консоли ферм жесткости в этой системе будут работать под влиянием натяжения цепей и при расположении нагрузки в среднем пролете.

Например усилие в поясном стержне правой консольной части, при расположении груза в среднем пролете, определится из следующего выражения равновесия относительно узла m.

$$-O_m\,.\,h - H\ (f_m + h) + D\,.\,a_m + Hh = O,$$

но так как $D = Htng\ \Theta_2$, а $a_m\ tng\ \Theta_2 = f_m - y_m$, то по подстановке этих значений в выражение усилия и после приведения, получим:

$$O_m = -H\frac{y_m}{h}$$

т.-е. усилие пояса пропорционально усилию в цепи.

При расположении груза между сечением и концом консоли, усилие того же стержня будет определяться уравнением:

$$-O_m + Px - H.y_m = 0 \text{ откуда } O_m = P\frac{x}{h} - H\frac{y_m}{h} \quad \ldots\ldots\ldots (206)$$

т.-е. оно слагается из усилия простой консольной фермы и усилия вызываемого натяжением цепи. На черт. 247 линия влияния этого стержня очерчивается многоугольником $a - s_1 - t - m - s_2 - b$.

Усилия в стержнях решетки консольных частей определятся из уравнения проекций на вертикальную ось:

$$D\ Sin\,\varphi - \mathrm{H}\ tng\ \Theta_2 + \mathrm{H}\ tng\,\gamma - P = O$$

откуда

$$D = \frac{1}{Sin\,\varphi}\Big[P - H\,(tng\,\gamma - tng\,\Theta_2)\Big] \quad \ldots\ldots\ldots (207)$$

Оно слагается из усилия того-же раскоса, как простой консольной фермы с параллельными поясами и из усилия от влияния натяжения цепи. Последнее будет иметь место также при расположении нагрузки вне консоли.

Усилия в стержнях подвесной части будут слагаться из усилий тех же стержней, как простой фермы и из усилий, вызываемых натяжением цепи. Последнее будет иметь место также при расположении нагрузки вне этой фермочки, в чем нетрудно убедиться из условия равновесия.

Например, для усилия в стержне нижнего пояса U_n левой фермы уравнения равновесия относительно узла n будут;

1) при положении груза на фермочки

$$-U_n h + \frac{P(\lambda_1 - x)}{\lambda_1}a_n - Hy_n = O \text{ откуда } U_n = \frac{1}{h}\Big[M^o{}_n - \mathrm{H}y_n\Big] \quad \ldots\ldots (208)$$

2) при положении груза вне фермочки. $U_n = -\frac{1}{h}\mathrm{H}y_n$.

§ 84. Цепь с аркой. Такая система, об'единяющая в себе арку и цепь, показана на черт. 248. В процессе образования этой системы за исходную неизменяемую систему статически определимую, можно принять трехшарнирную арку $B\ S\ C$ с двумя неподвижными опорами, к этой системе и к земле присоединены шарниры опор A и D каждый двумя стержнями, а затем таким же процессом присоединена вся цепь, условие замыкания которой требует введения замыкающего стержня вместо связи в опоре B, которая вследствие этого превращается в подвижную. Отсюда заключаем, что система статически определима и неизменяема. По условиям опорных закреплений эта система работает как балка.

Начнем исследование работы системы в предложении положения нагрузки P в среднем пролете на расстоянии x от опоры B.

Условие равновесия системы позволяет составить следующие уравнения равновесия:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) в сечении через шарн. } B:\ A\ \lambda_1 + Hh_b = O\\ \text{2) в сечении через шарн. } S:\ A\ (\lambda_1 + l_1) + Bl_1 + Hh_0 = O\\ \text{3) в сечении через шарн. } C:\ D\ \lambda_2 + Hh_c = O\\ \text{4) момент относит. опоры } C:\ A\ (\lambda_1 + l) + Bl - P(l-x) - D\lambda_2 = O\end{array}\right\} \quad (209).$$

Во всех этих уравнениях H равно горизонтальной слагающей усилия в цепи, которое для всех звеньев цепи и в шарнирах арки одно и то-же, что непосредственно следует из условия проектирования любого сечения на горизонтальную ось.

Из первого и второго уравнения непосредственно следует, что при загружении среднего пролета опорные реакции.

$$A = -H\frac{h_b}{\lambda_1} \text{ и } D = -H\frac{h_c}{\lambda_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (210).$$

Подставляя эти значении A и D в четвертое уравнение, определяем величину опорной реакции B

$$B = \frac{1}{l}P\left(l-x\right) + \mathrm{H}\frac{h_b}{l\lambda_1}\left(\lambda_1 + l\right) - \mathrm{H}\frac{h_c}{l\lambda_2}\lambda_2 =$$

$$= B_o + \mathrm{H}\left[\frac{1}{l}\left(h_b - h_c\right) + \frac{h_b}{\lambda_1}\right] \quad \ldots\ldots \quad (211).$$

Из второго уравнения определяем величину горизонтальной слагающей усилий:

$$-\mathrm{H}\frac{h_b}{\lambda_1}\left(\lambda_1 + l_1\right) + \left\{ B_0 + \mathrm{H}\left[\frac{h_b - h_c}{l} + \frac{h_b}{\lambda_1}\right] l_1 + \mathrm{H}h_0 = O\right.$$

после приведения получаем:

$$\mathrm{H}\left(h_b\frac{l_2}{l} + h_c\frac{l_1}{l} - h_0\right) = B_0 l_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (212),$$

но так как $\frac{1}{l}\left(h_b\, l_2 + h_c\, l_1\right)$ по чертежу $= f_2 + f_1 + h_0$ и так как при положении груза P справа от шарнира S, произведение $B_0\ l_1 = M^0{}_s$, то следовательно,

$$\mathrm{H} = \frac{M^0{}_s}{f_1 + f_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (213),$$

т. е. **горизонтальная слагающая определяется величиной момента относительно среднего шарнира и зависит от под'ема арки и стрелы цепи.**

При положении груза $= P$ в одном из боковых пролетов, например, в правом на расстоянии x от опоры C, уравнения равновесия напишутся так:

$$\left.\begin{array}{l}\text{1) } A\ l_1 + \mathrm{H}h_b = O\\ \text{2) } A\ (\lambda_1 + l) + Bl_1 + \mathrm{H}h_0 = O\\ \text{3) } D\ \lambda_2 + \mathrm{H}h_c - Px = O\\ \text{4) } A\ (\lambda_1 + l) + Bl - D\lambda_2 + Px = O\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (214).$$

Подставляя в четвертое уравнение значение D из третьего уравнения, получим:

$$A\ (\lambda_1 + l) + Bl - Hh_c = O \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (215).$$

Так как ни в это новое уравнение, ни в оставшееся 1-е и 2-е уравнениячлены с выражением нагрузки не входят, то заключаем, что опоры A, B и горизонтальная слагающая усилий цепи и арки при загружении бокового пролета λ_2 не работают.

Следовательно боковые пролеты этой системы работают, как простые двухопорные балки.

На основании вышеизложенного не трудно построить линии влияния как горизонтальной слагающей H, так и опорных сопротивлений.

Линия влияния H, определяемая уравнением (213)

$$H = \frac{M^0_s}{f_1 + f_2}$$

будет иметь форму треугольника, распространяющегося только на среднюю часть системы, и имеющего наибольшую ординату $= \frac{l_1 l_2}{l(f_1 + f_2)}$ (черт.247).

Линия влияния опорного сопротивления B, при загружении среднего пролета, определяется уравнением (211) и будет работать от загружения прилегающего бокового пролета, как балка на 2-х опорах, отсюда:

$$B = B'_0 + B_0 + H\left[\frac{h_b - h_c}{l} + \frac{h_b}{\lambda_1}\right] = B'_0 + B_0 + H\left[\ tng\alpha + tng\ \Theta\ \right]$$

где α угол наклона замыкающей среднего пролета (в нашем случае $= 0$) и $tng\ \Theta = h_b : \lambda_1$.

Таким образом, линия этого опорного сопротивления слагается из линии влияния опорной реакции простой балки B_0, очерченной треугольником (черт. 248) $b\,b'c$, и линии влияния H измененной в отношении

$$1 : (tng\ \alpha + tng\ \Theta)$$

Линия влияния опорного сопротивления A слагается из опрного сопротивления простой балки от загружения бокового пролета и линии влияния распора, при загружении среднего пролета, учитываемого уравнением (210):

$$A = A_0 - H\frac{h_b}{\lambda_1}$$

Она будет состоять из 2-х трехугольников (черт. 248), одного положительного $a - a_1 - b$, другого отрицательного $(b - s - c)$. а потому нуждается в закреплении против под'ема.

Средний пролет системы, как было показано выше, будет работать только от загружения его самого и потому внутреннее усилие и моменты в его сечениях будут слагаться из таковых же определяемых, как для простых консольных балок и моментов или усилий, вызываемых горизонтальными слагающими усилий цепи и арки.

Момент в каком-либо сечении K будет определяться выражением.

$$M_k = A\,(\lambda_1 + a_k) + Ba_k + Hh_k = M^0_k - H\,(y'_k + y''_k) \quad \ldots\ldots \quad (216)$$

Уравнение линии влияния момента в том же сечении, при расположении груза$=1$ справа от него, напишется так:

$$M_k = V^0_b a_k - H\,(y'_k + y''_k)$$

Построение ее может быть проведено при помощи нулевой точки, которая согласно условия (159) для данной системы определится пересечением прямых (черт. 248) T_2S_2' и T_1K' своим наклоном, удовлетво ряющим отношению (159).

$$\frac{V^0_a}{H} = \frac{(f_1+f_2)}{l_2} \; \frac{(l-u)}{u} = \frac{y'_k + y''_k}{a_k}$$

Не трудно показать, что если очертание цепи и арки будет сделано по параболам, определяемым уравнениями:

$$y'_1 = \frac{4f_1}{l_1 l_2} x(l-x) \qquad \text{и } y''_2 = \frac{4f_2}{l_1\, l_2} x\ (l-x)$$

то, при действии равномерно распределенной нагрузки, изгибающего момента в сечении арки не будет.

Действительно, изгибающие моменты в сечениях боковых пролетов при загружении их самих определяются также, как в сечениях простых балок; при загружении же среднего пролета в них будет развиваться момент пропорциональный горизонтальной слагающей H. В общем виде выражение момента в любом сечении этих пролетов напишется так:

$$M_n = A_0\ a_k - H\frac{h_b}{\lambda_1} a_k + Hh_n = M^0{}_n - H\ (y'_n + y''_n)$$

На черт. 248 показан характер очертания линий влияния моментов в сечении этого пролета.

Если цепи в боковых пролетах очерчены по параболическим кривым подобным уравнениям парабол очертания арки и цепи в среднем пролете, что будет иметь место при сохранении отношений:

$$\frac{f_1}{f'_1} = \frac{l^2}{\lambda_1{}^2} \text{ и } \frac{f_2}{f_2'} = \frac{l^2}{\lambda_2{}^2}$$

то, при загружении равномерной нагрузкой обоих пролетов, изгибающих моментов в сечении арки не будет, что непосредственно следует из выражения момента.

$$M_n = \frac{p}{2} x\ (l-x) - \frac{pl^2}{8\,(f_1+f_2)}\left[\frac{4\,f_1'}{\lambda_1{}^2} x\,(l-x) + \frac{4f_2'}{\lambda_2{}^2} x\,(l-x)\right] = O$$

Преимущество рассмотренной системы по сравнению с системой, состоящей из цепи и балки, заключается в возможности снизить значения внутренних сил, путем придания арке под'ема, и тем достигнуть возможности перекрытия больших пролетов.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Общая часть.

Введение.

Расчет балочных ферм.

Простые фермы.

Образование сложных систем.

Фермы со сложными стержнями и сложной решеткой.

Консольные фермы.

Фермы на многих опорах.

Системы с распором.

Арки со сплошной стенкой.

Стр.

Арочные сквозные системы.

Консольные трехшарнирные арки.

Висячие системы.

Комбинированные системы.

Замеченые опечатки.

стрн.	стрк.		Напечатано:	читать:
3	16	снизу	черт 1, черт 2	черт 2 черт 1
8	12	сверху	$A_y \cdot l\ Rr = 0$	$A_y l - Rr = 0$
11	5	„	$M = A$	$M = a$
12	22	„	линии влияния поперечных одним концом.	линий влияния поперечных сил сохраняются также для балок заделаных одним концом.
14	28	„	на ось абсцисе 1,е	на ось абсцисе 2 е
18	16	снизу	$P_{n-1} =$	$P_{n+1} =$
19	7	сверху	и $5-6$	и $4-5$
22	3	снизу	$+ x_R\ \Sigma^n_1\ Pd - x_R\ \Sigma^n_1\ Pd$	$+ x_R\ \Sigma_1^n\ Pd - x'_R\ \Sigma_1^n\ Pd$
25	тбл. 1	грф. 7	$\Sigma^n_1\ P$ — мт.	$\Sigma^n_1\ P$—тн.
„	„	грф. 8	тп — мет	тон — мет.
	в атласе		черт. 47 черт. 48	четр 48 черт 47
47	7	снизу	балки $A\,B$	балки $A_1\ B_1$
60	1	снизу	полюса k	полюса F
61	19	сверху	$= Q$	$= O$
66	12	„	$R = A - P_1 - P_2$	$R = A - P_1$
73	25	„	$c_9\ c_9$	$c_9\ c_8$
97	16	снизу	$A\ B,\ E$ *и* D	$A\ B\ C$ *и* D
101	8	сверху	и XI	и IX
103	16	„	I а II и VI в VII	I а III и V в VII
114	15	снизу	по прямой bn	по прямой bm
114 115	всюду		в место $D_3{}'_4$	надо D_{34}'
117	2	сверху	от линии влияния mn=	06 линии влияния 66′ =
173	14	„	$-\frac{4f}{l^2}x(l-x)\frac{1}{2}l-$	$-\frac{4f}{l^2}x(l-x)\cdot\frac{1}{2}l-x_k f$
200	18	сверху	$y_k = \frac{4f}{l_1 l_2}x\ (l-x)$	$y = \frac{f}{l_1 l_2}x\ (l-x)$
203	11	снизу	черт 25	черт. 245
210	9	сверху	второго уравнения	третьяго уравнения
	по атласу		черт 247 черт 248	черт 248 черт 247
212	8	„	то-же	также