

オレいづれおれい
AV $\exists$ U Ω

り、自然言語の文の意味を論理学の手法によって分析する学問分野である。自然言語の文と論理式との対応、論理式間の演繹関係の計算、そして自然言語を扱うための論理体系の拡張などを行う。

高校数学では「論理と証明」という過程で、「または」「かつ」「すべての」「存在する」といった基本的な論理概念を学んでいるはずである。しかし、「論理と証明」の学習目的は、数学的証明を書くうえでの作法を身につける、というものであり、証明そのものの本質に迫るという態度は醸し出されていない。したがって、高校の段階では、証明という過程そのものを取り出して考えたり、疑ってみたりする機会はありません。

しかし、少し大局的な見地から（あるいは西欧においては往々にして宗教的な見地から）人類の歴史というものを顧みるとき、果たして我々はこれまでに何を知り得たのか、知の進歩といえるものは何か、という問いに対して、我々はいまもとも控え目には「数学的に証明できたこと」と答えざるを得ないとする。それではなぜ「数学的な証明」というものが他の知の形式（たとえば自然科学における発見）よりも優位性を持って受け止められているのか、あるいはより批判的には「数学的な証明」というものがどのような根拠において「正しい」と保証されるのだろうか、という疑問が生じるのは自然な流れであろう。

本書では、哲学系・数学系・情報系・言語系のいずれかに偏らず、その共通部分たる数理論理学の初歩的部分を読者がしっかりと身につけることを目指すものである。哲学系の学生でも、記号論理学が工学的な応用を持つことを知っておくことは有用であるし、工学系の学生でも、論理回路の持つ哲学的な含みを知ることで、またこの分野の見方が変わってくるであろう。また数学系の学生においては、数学の根本が哲学と工学の両方向に根を張っていることを認識しておくことは大切であるように思われる。さらに言語系の学生にとっては、これらの隣接分野全体を俯瞰することができれば、言語の意味の深淵などとうてい捉えようもない。

本書が、数理論理学の学際的な普及と、関連諸科学の有機的な連動・発展の一助となれば幸いである。

目次

はじめに

第1部	一階論理の統語論と意味論	1
第1章	予備知識	2
1.1	ギリシャ文字	2
1.2	集合	3
1.3	部分集合	7
1.4	集合の演算	7
1.5	冪集合	8
1.6	組	8
1.7	直積	9
1.8	関係	10
1.9	写像	11
第2章	論理学とは何か	13
2.1	数学における証明	13
2.2	証明の妥当性とは何か	14
2.3	論理学の目的と方法	14
2.4	命題と真偽	15
2.5	推論と妥当性	18
2.6	統語論と意味論	19
第3章	一階命題論理：統語論と意味論	21
3.1	統語論	21
3.2	意味論	26

一階命題論理の記号
 = 一階命題論理の記号
 (一階命題論理の記号)
 23

3.1 統語論

これらの論理式を表すための記号として、一階命題論理では以下のようなものを用意する。

定義 3.2 (一階命題論理の記号 I)

原子命題 : $1 + 2 = 3$, 3 は偶数である, 鳥は哺乳類である, ...
 零項真理関数 : true, false
 一項真理関数 : $\neg$
 二項真理関数 : $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

解説 3.3 「 n 項関数」とは、 n 個の値を取る関数であることを意味している。零項真理関数 (zero-place truth-function) は論理式の 0 個組 () を、一項真理関数 (one-place truth-function) は論理式の一つ組を、二項真理関数 (two-place truth-function) は論理式の一つ組を取る*3。

解説 3.4 原子命題 (atomic proposition) とは、「それ以上分割できない論理式」である*4。しかし、原子命題の「内部」に踏み込まないのであれば、原子命題の具体的な文面は実のところどうでも良く、これらを単純な記号で置き換えてしまう方が、取り扱いのうえで便利である。したがって今後の議論では、原子命題として具体的な文の代わりに命題記号 (propositional letter) を用いる以下のような体系について議論する。実際の証明や推論について考える際には、命題記号を具体的な原子命題に置き換えて考えればよい。

定義 3.5 (一階命題論理の記号 II)

命題記号 : $P, Q, R, S, \dots$
 零項真理関数 : true, false
 一項真理関数 : $\neg$
 二項真理関数 : $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

*3 一項真理関数は “unary/monadic truth-function”, 二項真理関数は “binary/dyadic truth-function” と呼ばれる。

*4 これはそれほど明白なガイドラインとはいえない。事実、第 5 章で述べる一階述語論理では、一階命題論理では原子命題とみなしている論理式を述語と名前に分解するのであるから、「それ以上分解できない」というのは、結局「一階命題論理の複合論理式とみなすことができない」という、一階命題論理内の事情である。