

2. 論理

1. 命題

論理学の世界では、主張している内容が正しいか、正しくないかが客観的に判定できるような文章や式を「命題」と呼ぶ。式とは、等式や不等式のことである。

次は、いずれも命題である。

- ・ 4 は 3 より大きい
- ・ $10 + 20 = 50$
- ・ $20 < 30$

命題が正しいとき、「命題は真（しん）である」または「命題は成立する」という。命題が正しくないとき、「命題は偽（ぎ）である」または「命題は成立しない」という。真を **True**、偽を **False** ともいう。

与えられた命題は、真または偽のいずれかであり、真かつ偽であるような命題は存在しない。命題は、真でなければ偽であり、偽でなければ真である。

命題は、真偽の対象になるような明確な文章や式でなければならない。「4 は 3 より大きい」は命題であるが、「数学は英語より大きい」という意味不明な文章は命題ではない。「またあした、バイバイ」は明確な文章だが、真偽の対象になり得ないので命題ではない。

2. 真理値（論理値）

命題を $A, B, C, \dots$ などの文字で表す。命題が真であることを 1、偽であることを 0 で表す。真偽を表す 1 と 0 のことを、「真理値^{しんりち}」または「論理値^{ろんりち}」と呼ぶ。

また、命題が真であることを **T**、偽であることを **F** で表すこともあるが、その場合は、**T** と **F** が真理値になる。

命題 A が真であるとき、「 A の真理値は 1」または簡単に「 A は 1」などという。同様に、命題 A が偽であるとき、「 A の真理値は 0」または「 A は 0」などという。いかなる命題についても、その真理値は 1 または 0 のいずれかである。

3. 論理演算

1 つまたは複数の命題から、新たに 1 つの命題を作ることがある。作られた 1 つの命題を「合成命題」または「複合命題」と呼び、合成命題を作るための演算を「論理演算」という。

例えば、「 $10 > 20$ 」と「2 は偶数である」という 2 つの命題から、「 $10 > 20$, かつ, 2 は偶数である」という合成命題を作ることができる。ここでは、「かつ」が論理演算になる。

一般に、論理演算は「論理記号」を用いて表現される。論理記号を使って表現した合成命題を「論理式」とも呼ぶ。

最も基本的な論理演算は、論理和、論理積、論理否定の3つである。

論理演算	論理式	論理式の読み方
論理和 (OR 演算)	$A + B$, $A \text{ OR } B$, $A \vee B$	A または B
論理積 (AND 演算)	$A \cdot B$, $A \text{ AND } B$, $A \wedge B$	A かつ B
論理否定 (NOT 演算)	$\bar{A}$, NOT A	A でない

論理の世界では、通常、論理和・論理積を表す論理記号として「 $\vee$ 」や「 $\wedge$ 」を使用し、論理和は「 $A \vee B$ 」、論理積は「 $A \wedge B$ 」と書く。ただし、コンピュータの世界では「 $A + B$ 」「 $A \cdot B$ 」と書くことが多いので、以下ではこれらの記号で説明する。

また、「 $A + B$ 」を「 $A \text{ OR } B$ 」と書く場合もある。以下では、OR, AND, NOT による表現も書くことにする。

4. 基本的な論理演算の定義

以下、 A , B を命題とする。基本的な論理演算は、以下の4つである。

● 論理和 (OR 演算)

「 A または B 」という命題を、「 A と B の論理和」または「 A と B の OR 演算」と呼び、「 $A + B$ 」または「 $A \text{ OR } B$ 」で表す。論理和 $A + B$ は、 A と B の少なくとも一方が成立することを主張する命題であり、この真偽は次のように定義される。

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

($A + B$ の真偽の定義)

A が真または B が真のときは真、それ以外の場合は偽

A と B の真偽の組合せは4通りあり、それぞれの場合において $A + B$ の真理値を求めていくと、上の表が得られる。これを、 $A + B$ の真理値表という。

● 論理積 (AND 演算)

「 A かつ B 」という命題を、「 A と B の論理積」または「 A と B の AND 演算」といい、「 $A \cdot B$ 」または「 $A \text{ AND } B$ 」で表す。論理積 $A \cdot B$ は、 A と B の両方が成立することを主張する命題であり、この真偽は次のように定義される。

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

($A \cdot B$ の真偽の定義)

A が真かつ B が真のときは真、それ以外の場合は偽

● 論理否定（NOT 演算）

「 A でない」という命題を、「 A の論理否定」、「 A の否定」、「 A の NOT 演算」などと呼び、「 $\bar{A}$ 」または「NOT A 」で表す。論理否定 $\bar{A}$ は、 A でないことを主張する命題であり、この真偽は次のように定義される。

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

（ $\bar{A}$ の真偽の定義）

A が真ならば偽， A が偽ならば真

● 排他的論理和（XOR 演算，EOR 演算）

「 A と B の一方のみが成立する」という命題を、 A と B の排他的（はいたてき）論理和と呼び、「 $A \oplus B$ 」または「 $A \text{ XOR } B$ 」で表す。 $A \oplus B$ は、「 A であり B でない」または「 B であり A でない」を主張する命題であり、その真偽は次のように定義される。

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

（ $A \oplus B$ の真偽の定義）

A, B の一方のみが真のときは真，それ以外の場合は偽

排他的論理和は，XOR 演算，EOR 演算などともいう。

5. 合成命題の真理値表の求め方

合成命題の真理値表を求めるときは、それを構成する各命題の真理値を順番に求めていけばよい。例えば、合成命題 $(\bar{A} + B) \cdot B$ の真理値表を求める場合、次のように、 $\bar{A}$ ， $\bar{A} + B$ ， $(\bar{A} + B) \cdot B$ の真理値を順番に求めていけばよい。

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} + B$	$(\bar{A} + B) \cdot B$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

6. 命題の相等

2つの命題 A, B について、 A と B の真理値が常に等しいとき、 A と B は等しい、または、 A と B は同値であるといい、 $A = B$ と書く。

従って、2つの命題（論理式）が等しいかどうかを調べるには、そらの真理値表を求めてみればよい。例えば、次の真理値表により、 $\bar{\bar{A}} = A$ であることがわかる。

A	$\bar{A}$	$\overline{\bar{A}}$
1	0	1
0	1	0

7. 論理演算と集合演算との関係

全体集合 U の部分集合 A, B から

A と B の和集合 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \}$

A と B の積集合 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \}$

A の補集合 $\bar{A} = \{ x \mid x \text{ は } A \text{ の要素でない} \}$

をつくることができた。

これらの集合は、論理演算から作られている。例えば、2つの命題「 $x \in A$ 」と「 $x \in B$ 」から、論理和「 $x \in A$ または $x \in B$ 」をつくり、この論理和が真であるような“もの x ”の全体の集まりが $A \cup B$ になる。

このように、集合演算の $\cup$ (和集合), $\cap$ (積集合), $\bar{}$ (補集合) と、論理演算の $+$ (または), $\cdot$ (かつ), $\bar{}$ (でない) は完全に対応し、論理演算を考えることと、集合演算を考えることは同じである。従って、

論理和 = 和集合, 論理積 = 積集合, 論理否定 = 補集合

と考えればよい。

例えば、集合 A が与えられたとき、もの x について、 $x \in A$ のときは 1, $x \notin A$ のときは 0, と表現してみよう。

このとき、2つの集合 A, B に対して、 x が A に含まれる場合、 B に含まれる場合などを考えていけば、それぞれの場合において $A \cup B$ の 1 と 0 の状態は次のようになるだろう。

A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

これはまさに、命題 A, B の論理和の真理値表である。

さらに、集合演算 $(A \cup B) \cap B$ を考えれば、1 と 0 の状態は次のようになる。

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
0	0	0	0

ベン図で考えればすぐにわかるが、集合 $(A \cup B) \cap B$ と集合 B は等しい。従って、この2つの集合の 1 と 0 の状態は、上記のように当然一致する。(逆に、1 と 0 の状態が等しい2つの集合は一致する。)

一方、上記の表は、命題の論理式 $(A + B) \cdot B$ の真理値表に一致する。従って、

$$\text{集合 } A, B \text{ に関する等式 } (A \cup B) \cap B = B$$

の成立は、

$$\text{命題 } A, B \text{ に関する等式 } (A + B) \cdot B = B$$

の成立を意味することになる。

以上のように、論理演算は集合演算で考えることができる。また、逆に、集合演算は論理演算で考えることができる。

8. 論理演算の法則

次は、命題の論理演算に関する基本法則である。集合演算の場合と全く同じである。

- (1) べき等法則 $A + A = A, A \cdot A = A$
- (2) 交換法則 $A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$
- (3) 吸収法則 $A + (A \cdot B) = A, A \cdot (A + B) = A$
- (4) 結合法則 $A + (B + C) = (A + B) + C, A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- (5) 分配法則 $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C),$
 $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- (6) 復元法則 $\overline{\overline{A}} = A$
- (7) ド・モルガンの法則 $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

これらの成立は真理値表でも確認できるし、前述のように、 A, B を集合と考えてベン図でも確認できる。

例えば、(7) のド・モルガンの法則の成立は、以下の真理値表で確認できる。

- $\overline{A + B}$ と $\overline{A} \cdot \overline{B}$ の真理値は一致する
 ○ $\overline{A \cdot B}$ と $\overline{A} + \overline{B}$ の真理値は一致する

A	B	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

なお、結合法則より、 $A + (B + C)$ と $(A + B) + C$ は同じであるから、カッコをはずして $A + B + C$ と書いてもよい。同様に、 $A \cdot B \cdot C$ と書いてもよい。

しかし、「+ (または)」と「 $\cdot$ (かつ)」が混在している場合は、カッコを省略することはできない。例えば、 $A + (B \cdot C)$ と $(A + B) \cdot C$ とは一般に異なるので、

$$A + B \cdot C$$

と書いてはいけない。

9. 3つ以上の命題の論理和・論理積

命題 A, B, C に対して、論理式 $A + B + C$ と $A \cdot B \cdot C$ の真偽はどのようなになるだろうか。真理値表を求めると、次のようになる。

A	B	C	$A + B$	$A + B + C$	$A \cdot B$	$A \cdot B \cdot C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

よって、真偽は次のようになる（ベン図からでもわかる）。

- $A + B + C$ の真偽 … A, B, C のいずれかが真のときは真、それ以外の場合は偽
- $A \cdot B \cdot C$ の真偽 … A, B, C のすべてが真のときは真、それ以外の場合は偽

これらは、 n 個の命題でも成立する。

一般に、 n 個の集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ に対して、和集合 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 、積集合 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ を考えることができたが、 n 個の命題 $A_1, A_2, \dots, A_n$ に対しても、論理式

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n \quad (A_1, A_2, \dots, A_n \text{ の論理和という})$$

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \quad (A_1, A_2, \dots, A_n \text{ の論理積という})$$

を考えることができる。これらの真偽は次のようになる。

- $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ の真偽
 … $A_1, A_2, \dots, A_n$ のいずれかが真ときは真、それ以外の場合は偽
- $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ の真偽
 … $A_1, A_2, \dots, A_n$ のすべてが真のときは真、それ以外の場合は偽

10. ド・モルガンの法則

ド・モルガンの法則

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

は、次のことを意味している。

A と B の論理和の否定 = A の否定と B の否定の論理積

A と B の論理積の否定 = A の否定と B の否定の論理和

簡単に書けば、

論理和の否定 = 否定の論理積, 論理積の否定 = 否定の論理和

である。

さらに、「または」と「かつ」で表現すれば

$$\overline{A \text{ または } B} = \bar{A} \text{ かつ } \bar{B}, \quad \overline{A \text{ かつ } B} = \bar{A} \text{ または } \bar{B}$$

となる。(否定をとれば、「または」は「かつ」に、「かつ」は「または」に変わること注意到しよう。)

このようなことは、 n 個の命題についても成立する。例えば、3 つの命題 A, B, C に対して、ド・モルガンの法則を繰り返し使うと、次のようになる。

$$\overline{A + B + C} = \overline{(A + B) + C} = \overline{A + B} \cdot \bar{C} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$\overline{A \cdot B \cdot C} = \overline{(A \cdot B) \cdot C} = \overline{A \cdot B} + \bar{C} = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C} = \bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

一般に、 n 個の命題 $A_1, A_2, \dots, A_n$ についても、以下が成立する。

● 論理和の否定 = 否定の論理積

$$\overline{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 \text{ または } A_2 \text{ または } \dots \text{ または } A_n} = \bar{A}_1 \text{ かつ } \bar{A}_2 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } \bar{A}_n$$

● 論理積の否定 = 否定の論理和

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \dots + \bar{A}_n$$

$$\overline{A_1 \text{ かつ } A_2 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } A_n} = \bar{A}_1 \text{ または } \bar{A}_2 \text{ または } \dots \text{ または } \bar{A}_n$$

11. 排他的論理和に関する注意

A と B の排他的論理和は $A \oplus B$ は、一方のみが真なら真、それ以外は偽と定義された。従って、 $A \oplus B$ は、 A または B のいずれか一方のみの成立を主張する命題であり、言い換えれば

「 A であり、かつ、 B でない」または「 A でない、かつ、 B である」

という命題になる。よって、次の等式が成立する。

$$A \oplus B = (A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)$$

排他的論理和は、ベン図では $(A - B) \cup (B - A)$ の部分を表す。

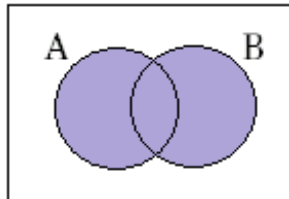
12. まとめ

これまでの論理演算をまとめると、以下のようになる。真理値表とベン図でよく理解しておこう。

① 論理和 $A + B$

A	B	$A + B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A または B

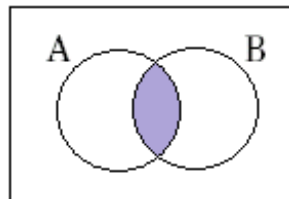


どちらかが 1 のときは 1

② 論理積 $A \cdot B$

A	B	$A \cdot B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A かつ B

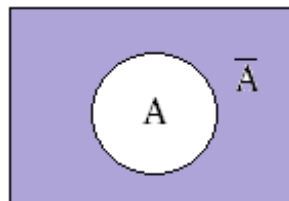


両方 1 なら 1

③ 論理否定 $\bar{A}$

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

A でない

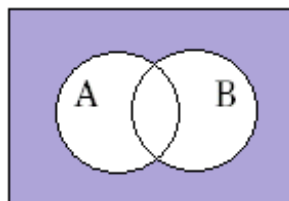


1 なら 0, 0 なら 1

④ 論理和の否定 $\overline{A + B}$

A	B	$\overline{A + B}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

“A または B” の否定



論理和の否定 = 否定の論理積

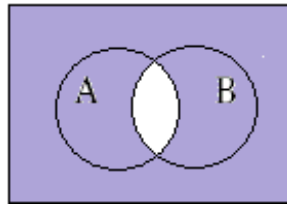
ド・モルガンの法則

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

⑤ 論理積の否定 $\overline{A \cdot B}$

A	B	$\overline{A \cdot B}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

“AかつB”の否定



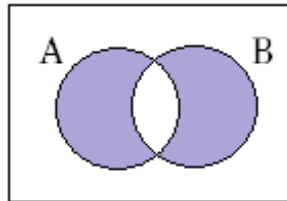
論理積の否定＝否定の論理和

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$$

⑥ 排他的論理和 $A \oplus B$

A	B	$A \oplus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0



一方のみが1なら1

論理演算を数の演算のように表現すれば、次のようになる。(以下は、2進数の計算ではなく、あくまでも論理演算であることに注意しよう。)

● 論理和

$$1 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 1 = 1, 0 + 0 = 0$$

● 論理積

$$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 0 \cdot 0 = 0$$

● 論理否定

$$\overline{1} = 0, \overline{0} = 1$$

● 排他的論理和

$$1 \oplus 1 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 0 \oplus 0 = 0$$