

1. 小数

1. 小数（しょうすう）とは

- (1) 小数とは、小数点（.）のついた数のことである。

(例) 0.28, 13.046, 0.006

- (2) 小数は、整数部、小数点、小数部からなる。

(例) 13.046 ← 整数部は13, 小数部は046,
小数部の桁数（小数点以下の桁数）は3桁

- (3) 小数の読み方（小数部は位をつけずに読む）

(例) 13.046 ← じゅうさんてんれいよんろく, じゅうさんてんぜろよんろく

- (4) 小数は、次の2つに分類される。

- ① 純小数（真小数）… 整数部が0である小数（例）0.568
② 帯小数 … 整数部が0でない小数（例）3.568

- (5) 電卓でも Excel でも、0.5の0は省略できる。

(例) 0.28 ← (.) (2) (8) と入力しても良い

- (6) 有限小数と無限小数

- ① 有限小数 … 小数部の桁数が有限の小数（例）3.1234

- ② 無限小数 … 小数部の桁数が無限の小数（有限小数でない小数）

(例) $\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ (^{ひとよひとよ}一夜一夜に^{ひとみごろ}人見頃)

$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$ (^{ひと}人なみに^{オゴレ}や)

$\sqrt{5} = 2.2360679\cdots$ (^{ふじさんろく}富士山麓^なオーム鳴く)

2. 小数の位^{くらい}

- (1) 小数点から左の位（整数部の位）

(例) 123.456

一の位は3, 十の位は2, 百の位は1

- (2) 小数点から右の位（小数部の位）

(例) 123.456

$\frac{1}{10}$ の位 (^{だいいち}小数第一位) は4

$\frac{1}{100}$ の位 (^{だいに}小数第二位) は5

$\frac{1}{1000}$ の位 (^{だいさん}小数第三位) は6

(3) 切り捨て・切り上げ・四捨五入

① 小数第二位で切り捨て

$$\bigcirc \quad 23.416 \rightarrow 23.4 \qquad \bigcirc \quad 23.496 \rightarrow 23.4$$

② 小数第二位で切り上げ

$$\begin{aligned} \bigcirc \quad 23.416 &\rightarrow 23.5 & \bigcirc \quad 23.496 &\rightarrow 23.5 \\ \bigcirc \quad 23.4001 &\rightarrow 23.5 & \bigcirc \quad 23.400 &\rightarrow 23.4 \end{aligned}$$

③ 小数第二位で四捨五入

$$\bigcirc \quad 23.413 \rightarrow 23.4 \qquad \bigcirc \quad 23.453 \rightarrow 23.5$$

3. 小数のしくみ

(1) 0.234は、0.1を2個、0.01を3個、0.001を4個あわせた数

$$\begin{aligned} 0.234 &= 0.2 + 0.03 + 0.004 = 2 \times 0.1 + 3 \times 0.01 + 4 \times 0.001 \\ &= 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

(2) 0.234は、0.001が234個集まった数でもある。

(3) 重要

- 10倍するごとに小数点は右に1つずつ移動
- 10で割るごとに小数点は左に1つずつ移動

$$\textcircled{1} \quad 123.456 \times 100 = 12345.6$$

$$\textcircled{2} \quad 123.456 \div 100 = 1.23456$$

【問題】

(1) 35.078の整数部は(), 小数部は()

(2) 次の数を求めよ。

$$\textcircled{1} \quad 7.163 \text{ の } 100 \text{ 倍} \qquad (\qquad \qquad)$$

$$\textcircled{2} \quad 3.29 \text{ の } 0.1 \text{ 倍} \qquad (\qquad \qquad)$$

$$\textcircled{3} \quad 1.536 \text{ の } 1000 \text{ 倍} \qquad (\qquad \qquad)$$

$$\textcircled{4} \quad 50.1 \text{ の } 0.001 \text{ 倍} \qquad (\qquad \qquad)$$

(3) 次の数を求めよ。

$$\textcircled{1} \quad 10^7 = 10 \square \cdots \square \quad (0 \text{ は何個?})$$

$$\textcircled{2} \quad 10^{-7} = \frac{1}{10^7} = 0.0 \square \cdots \square 1 \quad (0 \text{ は何個?})$$

(4) 次の計算せよ。

$$\textcircled{1} \quad 12.45 \times 10^6 = (\qquad \qquad)$$

$$\textcircled{2} \quad 12.45 \div 10^6 = (\qquad \qquad)$$

(5) 0.4976に対して、次を求めよ。

- ① 小数第三位で切り捨て ()
- ② 小数第三位で切り上げ ()
- ③ 小数第三位で四捨五入 ()

<解答>

(1) 整数部 (35) 小数部 (078)

(2) ① 716.3 ② 0.329 ③ 1536 ④ 0.0501

(3) ① $10^1 = 10$ (0は1個) なので,

$$10^7 = 10000000 \quad (0は7個)$$

② $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$ (0は1個) なので,

$$10^{-7} = \frac{1}{10^7} = 0.0000001 \quad (0は7個)$$

※ ①②のどちらも0は7個

(4) ① 12.45 ○○○○○○ と, 右に○をたくさん書いて, 小数点を右に6つ移動。

$$12.45 \times 10^6 = 12450000$$

② ○○○○○○12.45 と, 左に○をたくさん書いて, 小数点を左に6つ移動。

$$12.45 \div 10^6 = 0.00001245$$

(5) ① 0.49 ② 0.50 ③ 0.50

2. 単位

1. 長さの単位

(1) 読み方

km (キロメートル) m (メートル) cm (センチメートル) mm (ミリメートル)

(2) 基本

$$1\text{km} = 1000\text{m} \quad 1\text{m} = 100\text{cm} \quad 1\text{cm} = 10\text{mm}$$

(3) 単位の変換

$$\textcircled{1} \quad 1\text{m} = 1\text{km} \div 1000 = \frac{1}{1000}\text{km} = 0.001\text{km}$$

$$\textcircled{2} \quad 1\text{cm} = 1\text{m} \div 100 = \frac{1}{100}\text{m} = 0.01\text{m}$$

$$\textcircled{3} \quad 1\text{mm} = 1\text{cm} \div 10 = \frac{1}{10}\text{cm} = 0.1\text{cm}$$

2. 重さの単位

(1) 読み方

t (トン) kg (キログラム) g (グラム) mg (ミリグラム)

(2) 基本

$$1\text{t} = 1000\text{kg} \quad 1\text{kg} = 1000\text{g} \quad 1\text{g} = 1000\text{mg}$$

(3) 単位の変換

$$\textcircled{1} \quad 1\text{kg} = 1\text{t} \div 1000 = \frac{1}{1000}\text{t} = 0.001\text{t}$$

$$\textcircled{2} \quad 1\text{g} = 1\text{kg} \div 1000 = \frac{1}{1000}\text{kg} = 0.001\text{kg}$$

$$\textcircled{3} \quad 1\text{mg} = 1\text{g} \div 1000 = \frac{1}{1000}\text{g} = 0.001\text{g}$$

3. 面積の単位

(1) 読み方

km² (平方キロメートル) m² (平方メートル) cm² (平方センチメートル)

mm² (平方ミリメートル) ha (ヘクタール) a (アール)

(2) 定義

$$\textcircled{1} \quad 1\text{km}^2 \quad \cdots \quad 1\text{辺が } 1\text{km} \text{ の正方形の面積}$$

$$\textcircled{2} \quad 1\text{m}^2 \quad \cdots \quad 1\text{辺が } 1\text{m} \text{ の正方形の面積}$$

$$\textcircled{3} \quad 1\text{cm}^2 \quad \cdots \quad 1\text{辺が } 1\text{cm} \text{ の正方形の面積}$$

$$\textcircled{4} \quad 1\text{mm}^2 \quad \cdots \quad 1\text{辺が } 1\text{mm} \text{ の正方形の面積}$$

- ⑤ 1a … 1 辺が 10m の正方形の面積
- ⑥ 1ha … 100a (1 辺が 100m の正方形の面積)

(3) 単位の変換

- ① $1\text{km}^2 = 1000\text{m} \times 1000\text{m} = 1000000\text{m}^2$ (100 万平方メートル)
- ② $1\text{m}^2 = 100\text{cm} \times 100\text{cm} = 10000\text{cm}^2$ (1 万平方センチメートル)
- ③ $1\text{cm}^2 = 10\text{mm} \times 10\text{mm} = 100\text{mm}^2$
- ④ $1\text{a} = 10\text{m} \times 10\text{m} = 100\text{m}^2$
- ⑤ $1\text{ha} = 100\text{a} = 100\text{m} \times 100\text{m} = 10000\text{m}^2$
- ⑥ $1\text{km}^2 = 100 \times 10000\text{m}^2 = 100\text{ha}$

4. 体積・容積の単位

(1) 体積と容積

体積と容積は同じ物理量である。体積は物体の大きさを表す。容積は、容器の中に入る物体（例えば水）の量を表す。

(2) 読み方

体積： km^3 (立方キロメートル) m^3 (立方メートル) cm^3 (立方センチメートル)
 mm^3 (立方ミリメートル)

容積：kL (キロリットル) L (リットル) dL (デシリットル) mL (ミリリットル)

(3) 定義

- ① 1km^3 … 1 辺が 1km の立方体の体積
- ② 1m^3 … 1 辺が 1m の立方体の体積
- ③ 1cm^3 … 1 辺が 1cm の立方体の体積 (1cc)
- ④ 1mm^3 … 1 辺が 1mm の立方体の体積
- ⑤ 1kL … 1L の 1000 倍 (1 辺が 1m の立方体の容積)
- ⑥ 1L … 1 辺が 10cm の立方体の容積 (1000cm^3)
- ⑦ 1dL … 1L の 10 分 1 倍 (100cm^3)
- ⑧ 1mL … 1L の 1000 分の 1 倍 (1 辺が 1cm の立方体の容積, 1cc)

(4) 重要

- ① $1\text{kL} = 1000\text{L}$ $1\text{L} = 10\text{dL} = 1000\text{mL}$ $1\text{dL} = 100\text{mL}$
- ② $1\text{kL} = 1\text{m}^3$ $1\text{L} = 1000\text{cm}^3$ $1\text{dL} = 100\text{cm}^3$ $1\text{mL} = 1\text{cm}^3 = 1\text{cc}$

(5) 体積・容積と水の重さの関係

- ① 水 1mL (1cm^3) の重さは 1g
- ② 水 1L (1000cm^3) の重さは 1kg
- ③ 水 1kL (1m^3) の重さは 1t

5. 時間の単位

(1) 基本

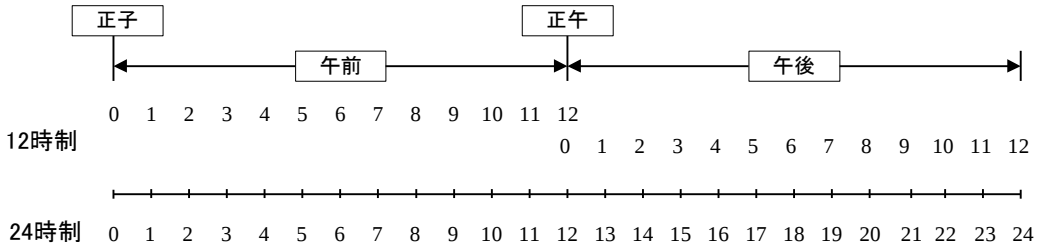
1 年 = 365 日 (平年。2 月は 28 日まで) 1 年 = 12 か月 1 週 = 7 日

1 日 = 24 時間 1 時間 = 60 分 1 分 = 60 秒

(2) うるうどし 閏年

1 年 = 366 日 (2 月は 29 日まで)

(3) 時刻 (12 時制と 24 時制)



- ① しょうご 正午 (24 時制で 12:00) = 午前 12 時 = 午後 0 時
しょうし 正子 (24 時制で 00:00) = 午前 0 時 = 午後 12 時

② 12 時制はまぎらわしい

- ・ 午後 12 時を昼 12 時と思っている人がたくさんいる
- ・ 24 時制で 12:30 のニュースが「午後 12 時 30 分のニュース」と言われたりする
- ・ 24 時制の 12:30 は、デジタル時計では「PM 12:30」と表示されてしまう

【問題 1】

- (1) 2.3 時間 = () 分
 (2) 2.3 時間 = () 時間 () 分
 (3) 40 分 = () 時間
 (4) 200 分 = () 時間

< 解答 >

- (1) 1 時間 = 60 分 だから、 $2.3 \times 60 = 138$ (分) (答) 138 分
 (2) 2.3 時間 = 2 時間 + 0.3 時間、 $0.3 \times 60 = 18$ (分) (答) 2 時間 18 分
 (3) 1 時間 = 60 分だから、
 $40 \div 60 = \frac{40}{60} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (時間) (答) $\frac{2}{3}$ 時間
 (4) $200 \div 60 = \frac{200}{60} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ (時間) (答) $\frac{10}{3}$ 時間

【問題 2】

2000 秒は、何分何秒か。以下はこの解答だが、誤りである。どこが誤りか。

<解答>

$$2000 \div 60 = 2000 / 60 = 200 / 6 = 100 / 3 = 100 \div 3 = 33 \text{ 余り } 1$$

よって、33 分 1 秒 (答)

【問題 3】

2060 年と 2100 年は、4 の倍数なので閏年？

<解答>

閏年は、次の 2 つしかない。

- ① 4 の倍数で、100 の倍数でない
- ② 400 の倍数

2060 年は①なので閏年である。2100 年は、①でも②でもないの、閏年でない。

6. 日数の計算

(1) 日にちの読み方

1 日 (ついたち) 2 日 (ふつか) 3 日 (みっか) 4 日 (よっか) 5 日 (いつか)
 6 日 (むいか) 7 日 (なのか) 8 日 (ようか) 9 日 (こののか) 10 日 (とおか)
 11 日 (じゅういちにち) … 14 日 (じゅうよっか) … 20 日 (はつか) …
 24 日 (にじゅうよっか) …

(2) 言葉に注意して計算する。

① 「3 日から 7 日**まで**」は、最初 (3 日) と最後 (7 日) 入れて、5 日間

3 日, 4 日, 5 日, 6 日, 7 日

② 「3 日から 4 日**目**」は、最初 (3 日) を入れて、6 日

3 日, 4 日, 5 日, 6 日

③ 「3 日から 4 日**後**」は、最初 (3 日) は入れないで、7 日

(3 日) 4 日, 5 日, 6 日, 7 日

(3) 1 年は 12 か月で、大の月と小の月がある。

① 大の月 (31 日間ある月) … 1 月, 3 月, 5 月, 7 月, 8 月, 10 月, 12 月

① 小の月 (それ以外の月) … 2 月, 4 月, 6 月, 9 月, 11 月

※ 西向く侍 (にしむくさむらい)

1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
31 日	28 日 (29 日)	31 日	30 日	31 日	30 日	31 日	31 日	30 日	31 日	30 日	31 日

3. 比

1. 比とは

(1) 2つの数量の大きさを比較する方法として、割合の他に「比」も使用される。

(2) 40人の60人に対する割合は、 $40 \div 60 = 40/60 = 2/3$

● 割合 $2/3$ の意味

① 40人は60人の $2/3$ 倍である、すなわち $60 \times 2/3 = 40$

② 60人の人数を1としたとき、40人の人数は $2/3$

(3) 40人と60人の比は、 $40 : 60 = 4 : 6 = 2 : 3$

● 比 $2 : 3$ の意味

① 60人の人数を3としたとき、40人の人数は2

② 40人の人数を2としたとき、60人の人数は3

2. 比の定義

(1) 2つの数量 a , b に対して、 $a : b$ で表現したものを「比」といい、 a や b を比の項こうという。特に、 a を前項ぜんこう、 b を後項こうこうという。

(2) $a : b$ は a 対 b と読むたい。また、比 $a : b$ のことを、次のようにも表現する。

① a と b の比

② a の b に対する比

③ b に対する a の比

④ a と b の割合（比率）

(3) $a : b$ に対して、 a の b に対する割合 $a \div b = \frac{a}{b}$ を「比の値」という。

比の値 = 前項 $\div$ 後項 = 前項の後項に対する割合

（前項が比べる量，後項がもとにする量）

① $2 : 3$ の比の値は、 $2 \div 3 = \frac{2}{3}$

(4) 2つの比 $a : b$ と $c : d$ について、それらの比の値が等しいとき、2つの比は等しいといい、 $a : b = c : d$ で表す。このような比の等式を、比例式という。

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \text{比の値が等しい} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

(5) $a : b = \frac{a}{b} : 1$ であるから、比 $a : b$ の値 $\frac{a}{b}$ は、 b の大きさを1としたときの a の大きさである。

3. 比の性質

- (1) 比の各項に、0 でない同じ数をかけても、0 でない同じ数で割っても、比は等しい。

$$a : b = (a \times t) : (b \times t) = (a \div t) : (b \div t) \quad (t \text{ は } 0 \text{ でない数})$$

- (2) 上の性質を利用して、できるだけ小さな整数の比になおすことを、「比を簡単にする」という。

$$\textcircled{1} \quad 16 : 20 = (16 \div 4) : (20 \div 4) = 4 : 5$$

$$\textcircled{2} \quad 1.2 : 3.3 = (1.2 \times 10) : (3.3 \times 10) = 12 : 33 = (12 \div 3) : (33 \div 3) \\ = 4 : 11$$

- (3) 比例式 $a : b = c : d$ において、内側の項 b と c を内項^{ないこう}、外側の項 a と d を外項^{がいこう}という。比例式では、外項の積と内項の積は常に等しい。

$$a : b = c : d \Rightarrow a \times d = b \times c$$

$$\textcircled{1} \quad 2 : 3 = 8 : x \text{ ならば, } 2 \times x = 3 \times 8 \text{ なので, } x = 3 \times 8 \div 2 = 12$$

- (4) a, b, c, d がいずれも 0 でないとき、次はみな同じ意味になる。

$$\textcircled{1} \quad a : b = c : d$$

$$\textcircled{2} \quad ad = bc$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\textcircled{5} \quad a = ct, \quad b = dt \text{ をみたす } t \text{ が存在する}$$

4. 連比^{れんぴ}

- (1) $2 : 3 : 4$ のように、3 つ以上の項で作られた比を連比^{れんぴ}という。

- (2) 2 つの連比 $a_1 : a_2 : a_3$ と $b_1 : b_2 : b_3$ について、

$$a_1 = b_1 t, \quad a_2 = b_2 t, \quad a_3 = b_3 t$$

をみたす数 t が存在するとき、2 つの連比は等しいといい、

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$$

で表す。これは、次が成立することと同じ意味である。

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

(3) 連比においても、各項に、0 でない同じ数をかけても、0 でない同じ数で割っても、連比は等しい。

$$\textcircled{1} \quad 2:3:4 = (2 \times 5):(3 \times 5):(4 \times 5) = 10:15:20$$

(4) 連比については、次が成り立つ。

$\textcircled{1} \quad a:b = 2:3, b:c = 3:5$ なら、 $a:b:c = 2:3:5$ である。

$$\text{なぜなら, } \frac{a}{2} = \frac{b}{3}, \frac{b}{3} = \frac{c}{5} \text{ より, } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$$

$\textcircled{2} \quad a:b = 2:3, b:c = 4:5$ なら、 b を等しくすれば連比が求まる。

$$\bigcirc (a:b) \text{ の各項を 4 倍 } \Rightarrow a:b = (4 \times 2):(4 \times 3) = 8:12$$

$$\bigcirc (b:c) \text{ の各項を 3 倍 } \Rightarrow b:c = (3 \times 4):(3 \times 5) = 12:15$$

$$\bigcirc \text{ 従って, } a:b:c = 8:12:15$$

$$\begin{array}{rcl} a : b : c & & \\ 2 : 3 & \leftarrow & \text{各項を 4 倍} \\ \hline 4 : 5 & \leftarrow & \text{各項を 3 倍} \\ \hline 8 : 12 : 15 & & \end{array}$$

5. 比例配分

(1) ある数量を、一定の比 (割合) に応じて分けることを「比例配分」という。

(2) ある数量を $a:b$ に比例配分するときは、全体の割合を $a+b$ と考えて分ける。このとき、

$$a \text{ にあたる数量} = \text{ある数量} \times \frac{a}{a+b}$$

$$b \text{ にあたる数量} = \text{ある数量} \times \frac{b}{a+b}$$

(例 1) あめ 10 個を、姉と妹に $2:3$ の比で配分すると、もらえるあめの個数は次のとおり。

$$\text{姉: } 10 \times \frac{2}{2+3} = 10 \times \frac{2}{5} = 4 \text{ (個)}$$

$$\text{妹: } 10 \times \frac{3}{2+3} = 10 \times \frac{3}{5} = 6 \text{ (個)}$$

なぜなら、もらえるあめの個数を、姉は A 個、妹は B 個とすると

$$A:B = 2:3, \quad A+B = 10$$

$A:B = 2:3$ から、 $A = 2t, B = 3t$ をみたす数 t が存在して、

$$\frac{A}{A+B} = \frac{2t}{2t+3t} = \frac{2}{2+3}$$

$$\frac{B}{A+B} = \frac{3t}{2t+3t} = \frac{3}{2+3}$$

従って、

$$A = 10 \times \frac{A}{10} = 10 \times \frac{A}{A+B} = 10 \times \frac{2}{2+3}$$

$$B = 10 \times \frac{B}{10} = 10 \times \frac{B}{A+B} = 10 \times \frac{3}{2+3}$$

(3) (2)は、連比 $a : b : c$ の場合も同様である。

(例 2)

2 歳と 3 歳と 5 歳の子どもがいる。あめ 100 個を年齢に応じて比例配分すると、それぞれいくつもらえるか。(2 : 3 : 5 の比で比例配分するという意味)

$$2 \text{ 歳の子ども} : 100 \times \frac{2}{2+3+5} = 100 \times \frac{2}{10} = 20 \text{ 個}$$

$$3 \text{ 歳の子ども} : 100 \times \frac{3}{2+3+5} = 100 \times \frac{3}{10} = 30 \text{ 個}$$

$$5 \text{ 歳の子ども} : 100 \times \frac{5}{2+3+5} = 100 \times \frac{5}{10} = 50 \text{ 個}$$

(例 3)

ビジネスの分野では、比例配分を案分^{あんぶん}（按分^{あんぶん}）ともいう。

予算 500 万円を、各課（A 課～C 課）の売上高に応じて各課に案分する。売上高は、A 課は 100 万円、B 課は 200 万円、C 課は 300 万円であるとする、

$$\text{A 課の予算} = 500 \times \frac{100}{100 + 200 + 300} \quad (\text{万円})$$

$$\text{B 課の予算} = 500 \times \frac{200}{100 + 200 + 300} \quad (\text{万円})$$

$$\text{C 課の予算} = 500 \times \frac{300}{100 + 200 + 300} \quad (\text{万円})$$

4. 割合・百分率・歩合

1. 割合

(1) 割合（わりあい）は、一方の数が他方の数の何倍であるのか，という数量の比較の話である。小学 5 年生で習う。

(2) 3 と 6 を比較し，3 を基準にして考えると，6 は 3 の 2 倍である。実際， $6 = 3 \times 2$ が成立する。この 2 倍の「2」を，3 に対する 6 の割合という。従って，3 に（3 に対する 6 の割合）を掛ければ，6 になる。また，この割合は，3 の大きさを 1 と見なしたときの，6 の大きさを意味する。

(3) 2 つの数量を比べるとき，一方の数量を基準にして，他の数量がその何倍にあたるのかを表した数を「割合」という。小学校では，他の数量を「比べる量」，基準になる量を「もとにする量」と習う。

$$\text{割合} = \text{比べる量} \div \text{もとにする量} = \frac{\text{比べる量}}{\text{もとにする量}}$$

従って，もとにする量に割合を掛けると，比べる量になる。

(4) 「 b に対する a の割合」「 a の b に対する割合」「 b を基準にしたときの a の割合」とは，

$$(\text{定義}) \quad a \div b = \frac{a}{b} \quad (b \text{ に対する} \rightarrow b \text{ が分母})$$

① 5 に対する 3 の割合はいくらか？（5 を何倍すれば 3 になるかということ）

$$3 \div 5 = \frac{3}{5} \quad (\text{従って，5 を } \frac{3}{5} \text{ 倍すると 3})$$

② 全体 40 人の中で，女子は 10 人である。女子の人数の（40 人に対する）割合は

$$10 \div 40 = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (40 \text{ を } 0.25 \text{ 倍すると } 10)$$

③ 40 に対する a の割合が 0.6 のとき（すなわち，40 を 0.6 倍すれば a のとき），

$$a \div 40 = \frac{a}{40} = 0.6 \quad \therefore a = 40 \times 0.6 = 24$$

④ b に対する 24 の割合が 0.6 のとき（すなわち， b を 0.6 倍すれば 24 のとき）

$$24 \div b = \frac{24}{b} = 0.6 \quad \therefore b = 24 \div 0.6 = \frac{24}{0.6} = 40$$

(5) a の b に対する割合は， b の大きさ 1 と見なしたときの， a の大きさを表す数である。

$$a : b = \frac{a}{b} : 1$$

(6) 割合は，2, 0.6, $\frac{3}{5}$ などのように，整数や小数，分数で表すほか，百分率や歩合を使って表すこともある。

2. 百分率（ひゃくぶんりつ）

- (1) 割合（比べる量÷もとにする量）を 100 倍した値を「百分率」という。百分率の単位は，%（パーセント）である。

$$\text{百分率} = \text{割合} \times 100 (\%), \quad \text{割合} = \frac{\text{百分率}}{100}$$

※ 割合を 100 倍すれば百分率，百分率を 100 で割れば割合

- (2) 割合と百分率の基本関係：

$$\cdot \text{割合 } 1 \rightarrow 100\% \quad \cdot \text{割合 } 0.1 \rightarrow 10\% \quad \cdot \text{割合 } 0.01 \rightarrow 1\%$$

- (3) 割合と百分率の相互変換：

$$\cdot \text{割合 } 0.573 \rightarrow \text{百分率 } 0.573 \times 100 = 57.3\%$$

$$\cdot \text{割合 } \frac{7}{20} \rightarrow \text{百分率 } \frac{7}{20} \times 100 = 35\%$$

$$\cdot \text{百分率 } 8\% \rightarrow \text{割合 } \frac{8}{100} = 0.08$$

$$\cdot \text{百分率 } 120\% \rightarrow \text{割合 } \frac{120}{100} = 1.2$$

- (4) 40 人に対する 10 人の割合は 0.25（ $=10 \div 40$ ）だが，百分率を使って「割合は 25%である」とも表現する。

- (5) 割合が百分率で表されているとき，百分率を 100 で割って，小数や分数に直してから計算する。

- ① 20 人は 50 人の何%か？

※ 20 は 50 の何倍か，50 に対する 20 の割合はいくらか，という問いと同じ。ただし，100 倍して百分率で表す。

$$\text{割合 } 20 \div 50 = \frac{20}{50} \rightarrow \text{百分率 } \frac{20}{50} \times 100 = 40 (\%)$$

- ② 50 人の 40%は何人か？（50 人の $\frac{40}{100} = 0.4$ 倍は何人かということ）

$$50 \times \frac{40}{100} = 50 \times 0.4 = 20 \text{ (人)}$$

- ③ 40 人は何人の 20%か？（ x 人の 20%が 40 人と考えればよい）

$$x \times \frac{20}{100} = 40 \text{ より } x = 40 \times \frac{100}{20} = 200 \text{ (人)}$$

3. 歩合（ぶあい）

- (1) 割合 0.1 を 1割^{わり}, 0.01 を 1分^ぶ, 0.001 を 1厘^{りん}, 0.0001 を 1毛^{もう}という。このように表した割合を「歩合」という。

1 = 10 割, 0.1 = 1 割, 0.01 = 1 分, 0.001 = 1 厘, 0.0001 = 1 毛

- (2) 割合・百分率・歩合の関係

割合	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
百分率	100%	10%	1%	0.1%	0.01%
歩合	10 割	1 割	1 分	1 厘	1 毛

- ① 割合 1 は, 100%, 10 割
 ② 割合 0.1 は, 10%, 1 割
 ③ 割合 0.3857 は, 38.57%, 3 割 8 分 5 厘 7 毛
 ④ 割合 1.796 は, 179.6%, 17 割 9 分 6 厘
 ⑤ 15.48% は, 割合 0.1548, 1 割 5 分 4 厘 8 毛
 ⑥ 2 割 5 分は, 割合 0.25, 25%
 ⑦ 6 分 7 厘 8 毛は, 割合 0.0678, 6.78%
- (3) 割合が歩合で表されているとき, 小数や分数に直してから計算する。
- ① 300 円の 1 割 5 分はいくらか? (300 の 0.15 倍はいくらかということ)
 $300 \times 0.15 = 45$ (円)
- ② 200 人の中の 50 人は, 200 人の何割何分か? (50 は 200 の何倍かと同じ)
 $50 \div 200 = 0.25$ 従って, 2 割 5 分

4. 中学の数学の解法が基本

(問題) 本の全体のページの 7% が 14 ページのとき, 全体は何ページか?

この種の問題に対しては, 以下の解法 2 が自然であり, 複雑な問題にも対応できる。

● 解法 1 (小学 5 年生)

上記の問題に対して, 小学 5 年生は, 次の解法を習う。

$$\text{割合} = \text{比べる量} \div \text{もとにする量} = \frac{\text{比べる量}}{\text{もとにする量}}$$

であるから,

$$\text{もとにする量} = \text{比べる量} \div \text{割合} = \frac{\text{比べる量}}{\text{割合}}$$

本の全体のページ数がもとにする量, 比べる量は 14 ページ, 14 ページの割合が 7% (0.07) であるから,

$$\text{全体のページ} = 14 \div 0.07 = 200 \text{ (ページ) (答)}$$

● 解法 2 (中学 1 年生)

中学 1 年で 1 次方程式を学習し, 次の解法を習う。

全体のページ数を x とおくと, x の 7% が 14 ページであるから,

$$x \times \frac{7}{100} = 14 \quad (\text{または, } x \times 0.07 = 14)$$

$$\text{この 1 次方程式を解くと, } x = 14 \times \frac{100}{7} = 200 \text{ (ページ) (答)}$$

● 解法 3 (比で解く)

比で解く方法も強力である。簡単な問題は, 比で解くことができる。

7% が 14 ページである。問題の要求は, 100% が何ページかということである。(もとにする量に対するもとにする量の割合は 1 である)

そこで, 次の比例式を考える。

$$7\% : 14 \text{ ページ} = 100\% : \square$$

外項の積と内項の積は等しいので,

$$7 \times \square = 14 \times 100$$

両辺を 7 で割って,

$$\square = 2 \times 100 = 200 \text{ (ページ) (答)}$$

7% を割合 0.07 と考えれば, 割合 1 が全体のページ数であるから, 次の比例式を考えてもよい。

$$0.07 : 14 = 1 : \square$$

5. a の b 倍 の c 倍

- (1) a の b 倍は, $a \times b$ である。では, a の b 倍の c 倍は, どうなるだろうか。日本語の問題である。当然, 次のようになる。

$$\begin{aligned} a \text{ の } b \text{ 倍の } c \text{ 倍} &= (a \text{ の } b \text{ 倍}) \text{ の } c \text{ 倍} = (a \times b) \text{ の } c \text{ 倍} \\ &= (a \times b) \times c = a \times b \times c \end{aligned}$$

- (2) 文字が増えても同じである。

$$a \text{ の } b \text{ 倍の } c \text{ 倍の } d \text{ 倍} = a \times b \times c \times d$$

- (3)

(問題 1) あるクラスの卒業生のうち、 $1/3$ は大学へ進学し、残りの $3/4$ は企業へ就職し、残りの 9 人が家事についた。このクラスの卒業生は何人か。

<解>

図を描いてよく考えてみよう。この問題は、卒業生の $2/3$ 倍の $1/4$ 倍が 9 人だといっているにすぎない。

従って、卒業生を x 人すると

$$x \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = 9 \quad \text{よって, } \frac{x}{6} = 9 \quad \text{より, } x = 9 \times 6 = 54 \text{ (人) (答)}$$

詳しく述べると次の通り。

① 大学へ進学した卒業生の人数 $\cdots \frac{1}{3}x$

② 残りの卒業生 (大学へ進学しなかった卒業生) の人数 $\cdots x - \frac{1}{3}x = \frac{2}{3}x$

③ 企業へ就職した卒業生の人数 = ②の $3/4$ 倍の人数 $\cdots ② \times \frac{3}{4}$

④ 家事についた卒業生の人数は

$$② - ② \times \frac{3}{4} = ② \times 1 - ② \times \frac{3}{4} = ② \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = ② \times \frac{1}{4}$$

従って、②の $1/4$ 倍が 9 人であるので、 $\frac{2}{3}x \times \frac{1}{4} = 9$

よって、 $\frac{x}{6} = 9$ より、 $x = 9 \times 6 = 54$ (人) (答)

(4) 次も前問と同様である。すべては「何倍なのか」を考えればよい。

(問題 2)

(1) 200 円の 2 割引はいくらか。

(2) 生徒が 300 人います。このうち男子生徒は 40%です。男子の生徒のうち、20%がメガネをかけています。メガネをかけていない男子生徒は何人いますか。

(3) ある遊園地の入園料金は、大学生は一般より 25%安い。さらに、高校生は大学生より 20%安い。高校生の入園料金は、一般よりも何%安い。

<解>

(1) 200 円の 2 割は $200 \times 0.2 = 40$ (円) なので、200 円の 2 割引は、

$$200 - 40 = 160 \text{ (円) (答)}$$

これでも良いが、次の計算でも求めることができる。

$$\begin{aligned} 200 - 200 \times 0.2 &= 200 \times 1 - 200 \times 0.2 = 200 \times (1 - 0.2) \\ &= 200 \times 0.8 = 160 \end{aligned}$$

すなわち、

$$200 \text{ 円の } 2 \text{ 割引} = 200 \text{ 円の } 8 \text{ 割} = 200 \text{ 円の } 0.8 \text{ 倍}$$

200 円の 2 割引とは、200 円の 0.8 倍であることに注意すること。

- (2) もうわかるであろう。メガネをかけていない男子生徒の人数は、300 人の 40%の 80%，すなわち、300 人の 0.4 倍の 0.8 倍であるから、

$$300 \times 0.4 \times 0.8 = 120 \times 0.8 = 96 \text{ (人) (答)}$$

- (3) 前問と同様。一般料金の 75%が大学生の料金，大学生の料金の 80%が高校生の料金であるから、

$$\begin{aligned} \text{高校生の料金} &= \text{一般料金} \times 0.75 \times 0.8 \\ &= \text{一般料金} \times 0.6 \end{aligned}$$

よって、高校生の料金は一般料金の 60%であるから、一般よりも 40%安い。

6. 増減の割合

- (1) x 円の 20%増は、

$$\begin{aligned} x + (x \text{ の } 20\%) &= x + x \times 0.2 = x \times 1 + x \times 0.2 = x \times (1 + 0.2) \\ &= x \times 1.2 = 1.2x \end{aligned}$$

- (2) x 円の 20%減は、

$$\begin{aligned} x - (x \text{ の } 20\%) &= x - x \times 0.2 = x \times 1 - x \times 0.2 = x \times (1 - 0.2) \\ &= x \times 0.8 = 0.8x \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{ぞう}}{\text{増}} = x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{ま}}{\text{増し}} = x \text{ 円の } 2 \text{ 割 } \overset{\text{ま}}{\text{増し}} = 1.2x$$

$$\textcircled{2} \quad x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{げん}}{\text{減}} = x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{び}}{\text{引き}} = x \text{ 円の } 2 \text{ 割 } \overset{\text{び}}{\text{引き}} = 0.8x$$

$$\textcircled{3} \quad x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{ぞう}}{\text{増}} = x \text{ 円の } 120\%$$

$$\textcircled{4} \quad x \text{ 円の } 20\% \overset{\text{げん}}{\text{減}} = x \text{ 円の } 80\%$$

$$\textcircled{5} \quad 1.45x = x \text{ 円の } 45\% \overset{\text{ぞう}}{\text{増}} = x \text{ 円の } 4 \text{ 割 } 5 \text{ 分 } \overset{\text{ま}}{\text{増し}}$$

$$\textcircled{6} \quad 0.75x = x \text{ 円の } 25\% \overset{\text{げん}}{\text{減}} = x \text{ 円の } 2 \text{ 割 } 5 \text{ 分 } \overset{\text{び}}{\text{引き}}$$

- (2) 50 人が 58 人になったとき、人数は何%増えたか？

<解 1> 増えた人数 $= 58 - 50 = 8$ 人なので、

$$\text{増えた人数の } \underline{50 \text{ に対する割合}} = 8 \div 50 = 0.16$$

従って、16%増えた。

<解 2> 58 の 50 に対する割合 $= 58 \div 50 = 1.16$ (この値を増加率という)

よって、 $1.16 - 1 = 0.16$ より、16%増えた。

- (2) 50 人が 43 人になったとき、人数は何%減少したか？

<解 1> $(50-43) \div 50 = 0.14$ より, 14%減少した。

<解 2> $43 \div 50 = 0.86$, $1 - 0.86 = 0.14$ より, 14%減少した。

5. 速さ

1. 速さ

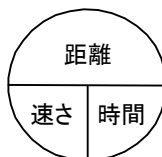
(1) 単位時間あたりに進む距離を「速さ」という。

(2) 速さ・距離・時間の関係

$$\text{速さ} = \text{距離} \div \text{時間}$$

$$\text{距離} = \text{速さ} \times \text{時間}$$

$$\text{時間} = \text{距離} \div \text{速さ}$$



(3) 速さの表し方

- ① 時速 … 1時間あたりに進む距離で表した速さ
- ② 分速 … 1分間あたりに進む距離で表した速さ
- ③ 秒速 … 1秒間あたりに進む距離で表した速さ

(4) 速さの例

- ① 時速 30 km, 毎時 30 km, 30 km 毎時
・ 1 時間に 30 km 進む速さ (30 km/時, 30 km/h)
- ② 分速 30 m, 毎分 30 m, 30 m 毎分
・ 1 分間に 30 m 進む速さ (30 m/分, 30 m/m)
- ③ 秒速 3 m, 毎秒 3 m, 3 m 毎秒
・ 1 秒間に 3 m 進む速さ (3 m/秒, 3 m/s)

■ 問題

- (1) 30 km/時 = () m/分
- (2) 180 m/分 = () m/秒
- (3) 8 m/秒 = () m/分
- (4) 1200 m/分 = () km/時

2. 通過算

1. 通過算（つうかざん）とは

列車や電車が通過したり, 2 台の列車や電車がすれちがったり, 追い越したりするときの, 速さ・時間・距離などを求める問題を「通過算」という。

2. 通過算の公式（下線部が考えるべき距離）

- ① 列車が, 人や電柱などを通過する場合

通過する時間 = 列車の長さ ÷ 列車の速さ

- ② 列車が、鉄橋やトンネルなどを通過する場合

通過する時間 = (列車の長さ + 鉄橋の長さ) ÷ 列車の速さ

- ③ 2 台の列車がすれちがう場合

すれちがう時間 = 列車の長さの和 ÷ 列車の速さの和

- ④ 一方の列車が、他方の列車を追い越していく場合

追い越す時間 = 列車の長さの和 ÷ 列車の速さの差

3. 相対速度

- (1) ともに運動している 2 つの物体 A, B において, B から見た A の速度を, 「B から見た A の相対速度」「B に対する A の相対速度」という。これは, B にいる観測者から A を見たときの, A の速度である。B から B 自身を見ると, B は静止している。
- (2) 2 台の車 A, B が一直線上を向かい合って走るとき, B から見た A の相対速度は
A の速さ + B の速さ
- (3) 2 台の車 A, B が一直線上を同じ方向に走るとき, B から見た A の相対速度は
A の速さ - B の速さ

■ 例

- (1) 秒速 20m で走る長さ 100m の列車は, 立っている人の目の前を何秒で通過するか。
- (2) 秒速 10m で走る長さ 100m の列車が, 長さ 200m の鉄橋にさしかかってから渡り終えるまでには, 何秒かかるか。
- (3) 秒速 7m で走る長さ 100m の列車と, 秒速 3m で走る長さ 200m の列車がすれちがうのには, 何秒かかるか。
- (4) 秒速 7m で走る長さ 100m の列車が, 秒速 4m で走る長さ 200m の列車に追いついてから追いこすまでに, 何秒かかるか。

(解)

- (1) $100 \div 20 = 5$ (秒) (答)
- (2) $(100 + 200) \div 10 = 30$ (秒) (答)
- (3) $(100 + 200) \div (7 + 3) = 300 \div 10 = 30$ (秒) (答)
- (4) $(100 + 200) \div (7 - 4) = 300 \div 3 = 100$ (秒) (答)

6. 損益算

1. 基本用語

(1) 損益算とは

売買による損益に関する計算のこと。算数の文章題の 1 つであり、小学 5 年生または 6 年生で「売買の問題」として学習する。さらに、中学 1 年生で、方程式を利用した解法を学習する。

(2) 原価・定価・売値・利益

モノを売る会社では、1 個の商品の原価・定価・^{うりね}売値・利益が重要になる。

① 原価（仕入れ値）

モノを作る、または、モノを仕入れるときにかかる費用。

② 定価

あらかじめ定めたモノの値段。

③ 売値

モノを売るときの値段。商品を定価で販売すれば、定価が売値になる。

④ 利益

1 個の商品の利益は、売値－原価 である。

(3) 売上高・売上原価・売上総利益

売上総利益は、^{あら}粗利益ともいう。

$$\text{① 売上高} = \text{売上の総額}$$

$$\text{② 売上原価} = \text{原価の総額}$$

$$\text{③ 売上総利益} = \text{売上高} - \text{売上原価} = \text{売上総利益}$$

2. 損益算の基本

$$(1) \text{ 売値} = \text{収入} = \text{入ってくるお金}, \text{ 原価} = \text{支出} = \text{出ていくお金}$$

$$(2) \text{ 売値} - \text{原価} = \text{利益}$$

$$(3) \text{ 定価} - \text{原価} = \text{利益（見込みの利益）}$$

$$(4) \text{ 定価の 2 割引} = \text{定価の 8 割} = \text{定価} \times 0.8$$

$$(5) \text{ 原価の 2 割の利益} = \text{原価} \times 0.2$$

$$(6) \begin{aligned} \text{原価の 2 割の利益がでる売値} &= \text{原価} + \text{原価の 2 割} \\ &= \text{原価} + \text{原価} \times 0.2 = \text{原価} \times 1.2 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \text{売上高} - \text{売上原価} = \text{売上総利益}$$

3. 練習問題

- (1) 原価 80 円の商品を 100 円で売ったとき、利益は（ ）円である。
- (2) 商品を 100 円で売ると、20 円の利益が得られるとき、原価は（ ）円である。
- (3) 原価 50 円の商品を、30 円の利益が出るように売るとき、売値は（ ）円である。
- (4) 原価 60 円の商品を、20 円の利益を見込んで定価をつけるとき、定価は（ ）円である。
- (5) 売上原価が 80 万円、売上高が 100 万円のとき、売上総利益は（ ）万円である。
- (6) 売上高が 100 万円で、売上総利益が 20 万円のとき、売上原価は（ ）万円である。
- (7) 売上原価が 50 万円、売上総利益が 30 万円のとき、売上高は（ ）万円である。
- (8) 定価 200 円の商品を 3 割引で売ったとき、売値は（ ）円である。
- (9) 原価 100 円の商品の定価を 200 円とし、定価の 3 割引で売ったとき、利益は（ ）円である。
- (10) 定価 200 円の商品を 3 割引で売ると、利益が 40 円得られるとき、原価は（ ）円である。
- (11) 原価 200 円の商品を、(原価の)30%の利益が出るように売るとき、売値は（ ）円である。
- (12) 商品を 120 円で売ると、原価の 2 割の利益が出るとき、原価は（ ）円である。
- (13) 定価 130 円の商品を 2 割引で売っても原価の 3 割の利益が出るとき、原価は（ ）円である。

7. 流水算

1. 流水算（りゅうすいざん）とは

船が川を上ったり下ったりするときの、船や川の流れの速さ、時間や距離などを求める問題を「流水算」という。

2. 基本となる4つの値

- ・ 船の静水時の速さ … 静水での船の速さ（船そのものの速さ）
- ・ 川の流れの速さ … 川の水の流れの速さ
- ・ 船の上りの速さ … 船が川を上るときの速さ
- ・ 船の下りの速さ … 船が川を下るときの速さ

3. 流水算の公式

- ① 船の上りの速さ = 船の静水時の速さ - 川の流れの速さ
 - ・ 船の上りの速さ < 船の静水時の速さ
 - ・ 船の静水時の速さ - 船の上りの速さ = 川の流れの速さ
- ② 船の下りの速さ = 船の静水時の速さ + 川の流れの速さ
 - ・ 船の下りの速さ > 船の静水時の速さ
 - ・ 船の下りの速さ - 船の静水時の速さ = 川の流れの速さ
- ③ 船の静水時の速さ = (船の上りの速さ + 船の下りの速さ) ÷ 2
- ④ 川の流れの速さ = (船の下りの速さ - 船の上りの速さ) ÷ 2

4. 注意

- (1) ①+②から③, ②-①から④が導かれる。
- (2) 船の上りの速さ, 静水時の速さ ← どちらが速いのか? その差が川の流れの速さ
- (2) 船の下りの速さ, 静水時の速さ ← どちらが速いのか? その差が川の流れの速さ

問題

- (1) 船の静水時の速さが時速 10km, 川の流れの速さが時速 3km のとき, 船の上りの速さは時速 () km, 下りの速さは時速 () km である。
- (2) 船の静水時の速さが時速 10km, 船の上りの速さが時速 6km のとき, 川の流れの速さは時速 () km である。
- (3) 船の静水時の速さが時速 10km, 船の下りの速さが時速 13km のとき, 川の流れの速さは時速 () km である。

- (4) 船の上りの速さが時速 20km, 川の流れの速さが時速 5km のとき, 船の静水時の速さは時速 () km である。
- (5) 船の下りの速さが時速 20km, 川の流れの速さが時速 5km のとき, 船の静水時の速さは時速 () km である。
- (6) 船の上りの速さが時速 10km, 下りの速さが時速 20km のとき, 船の静水時の速さは時速 () km, 川の流れの速さは時速 () km である。
- (7) 船の静水時の速さが時速 8km, 川の流れの速さが時速 2km のとき, この船で 30km 離れた 2 地点を往復するのに () 時間かかる。
- (8) 静水時の速さが時速 20km の船を使って, 48km 離れた 2 地点を往復した。上りに 3 時間かかったとき, 下りには () 時間かかった。
- (9) ある川に沿って, 60km 離れた 2 地点間を船で往復したところ, 上りに 10 時間, 下りに 6 時間かかった。このとき, 船の静水時の速さは時速 () km, 川の流れの速さは時速 () km である。

(解答)

- (1) 船の上りの速さ $= 10 - 3 = 7$ (km/時) (答)
船の下りの速さ $= 10 + 3 = 13$ (km/時) (答)
- (2) 川の流れの速さ $= 10 - 6 = 4$ (km/時) (答)
- (3) 川の流れの速さ $= 13 - 10 = 3$ (km/時) (答)
- (4) 船の静水時の速さ $= 20 + 5 = 25$ (km/時) (答)
- (5) 船の静水時の速さ $= 20 - 5 = 15$ (km/時) (答)
- (6) 船の静水時の速さ $= (\text{船の上りの速さ} + \text{船の下りの速さ}) \div 2$
 $= (10 + 20) \div 2 = 15$ (km/時) (答)
- (6) 川の流れの速さ $= (\text{船の下りの速さ} - \text{船の上りの速さ}) \div 2$
 $= (20 - 10) \div 2 = 5$ (km/時) (答)
- (7) 船の上りの速さ $= 8 - 2 = 6$ (km/時), 船の下りの速さ $= 8 + 2 = 10$ (km/時)
従って,
往復にかかる時間 $= \text{上りにかかる時間} + \text{下りにかかる時間}$
 $= 30 \div 6 + 30 \div 10 = 5 + 3 = 8$ (時間) (答)
- (8) 船の上りの速さ $= 48 \div 3 = 16$ (km/時) だから,
川の流れの速さ $= 20 - 16 = 4$ (km/時)
船の下りの速さ $= 20 + 4 = 24$ (km/時)
従って, 下りにかかる時間は $48 \div 24 = 2$ (時間) (答)
- (9) 船の上りの速さ $= 60 \div 10 = 6$ (km/時),
船の下りの速さ $= 60 \div 6 = 10$ (km/時)
従って, 船の静水時の速さ $= (6 + 10) \div 2 = 8$ (km/時) (答)

$$\text{川の流れの速さ} = (10 - 6) \div 2 = 2 \text{ (km/時)} \text{ (答)}$$

8. 仕事算

● 仕事算（しごとざん）

(1) 仕事算とは

全体の仕事を 1 と考えて、1 日または 1 時間の仕事量や、仕上げるのにかかる日数または時間を求める問題を「仕事算」という。

(2) 仕事算の公式

① 基本公式

$$1 \text{ 日の仕事量} \times \text{仕上げるにかかる日数} = 1 \text{ (全体の仕事量)}$$

② 他の公式

$$1 \text{ 日の仕事量} = \frac{1}{\text{仕上げるにかかる日数}}$$

$$\text{仕上げるにかかる日数} = \frac{1}{1 \text{ 日の仕事量}}$$

(3) 注意

通常の問題では、全体の仕事を 1 と考えるが、1 でなくもよい。全体の仕事を一定数（何でもよい）と考えれば、問題を解くことができる。

■ 例 1

以下では、全体の仕事量は 1 とする。

(1) ある仕事をするのに、A 1 人では 15 日かかる。A の 1 日の仕事量はいくらか。

(2) ある仕事をするのに、1 日の仕事量は $\frac{1}{9}$ である。この仕事を仕上げるのに何日かかるか。

(3) ある仕事をするのに、A 1 人では 15 日、B 1 人では 10 日かかる。この仕事を 2 人で仕上げるのに何日かかるか。

(解)

(1) A の 1 日の仕事量を x とすると、15 日分の仕事量は $15x$ なので、

$$15x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{15} \text{ (答)}$$

(2) 仕上げるにかかる日数を y とすると、

$$\frac{1}{9} \times y = 1 \quad \therefore y = 9 \text{ (日) (答)}$$

(3) A の 1 日の仕事量は $\frac{1}{15}$ 、B の 1 日の仕事量は $\frac{1}{10}$ であるから、2 人で行う 1 日の仕事量は

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{2+3}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \quad \therefore \text{求める日数} = 1 \div \frac{1}{6} = 6 \text{ (日) (答)}$$

■ 例 2

A だけですると 12 日, B だけですると 20 日かかる仕事がある。最初に A だけで 4 日間仕事をし, 残りを A, B の 2 人で行った。最初から終わるまで, 何日かかったか。

(説明)

まず, 次の等式を考える。

$$(\text{A だけが行った仕事量}) + (\text{2 人で行った仕事量}) = 1$$

(解)

全体の仕事量を 1 とすると,

$$\text{A の 1 日の仕事量は } \frac{1}{12}, \text{ A の 4 日分の仕事量は } \frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$$

$$\text{2 人の 1 日の仕事量は, } \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

2 人で仕事をした日数を y とすると,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{15} \times y = 1 \quad \therefore \frac{2}{15} \times y = \frac{2}{3} \quad \therefore y = 5$$

よって, 求める日数は, $4 + 5 = 9$ (日) (答)

■ 例 3

ある仕事をするのに, A 1 人では 12 時間かかり, B 1 人では 8 時間かかる。2 人でいっしょに仕事をする, どれだけの時間で作業が完了するか。

(解)

全体の仕事量を 1 とすると,

$$\text{A の 1 時間の仕事量は } \frac{1}{12}, \text{ B の 1 時間の仕事量は } \frac{1}{8}$$

$$\text{2 人合わせた 1 時間の仕事量は, } \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \frac{5}{24}$$

求める時間を x とすれば,

$$\frac{5}{24} \times x = 1 \text{ (全体の仕事量)} \quad \therefore x = \frac{24}{5} = 4.8$$

$0.8 \times 60 = 48$ より, 求める時間は, 4 時間 48 分 (答)

■ 例 4

大型の水槽に水を入れるのに, 大きいほうの管を使うと 6 時間, 小さい方の管を使うと 9 時間かかる。2 つの管を同時に使うと, 何時間かかるか。

(解)

全体の仕事量を 1 とする。

$$\text{大きい管の 1 時間の仕事量は } \frac{1}{6}, \text{ 小さい管の 1 時間の仕事量は } \frac{1}{9}$$

2つの管の1時間の仕事量は、 $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{3+2}{18} = \frac{5}{18}$

求める時間を x とすれば、

$$\frac{5}{18} \times x = 1 \quad (\text{全体の仕事量}) \quad x = \frac{18}{5} = 3.6$$

$0.6 \times 60 = 36$ より、求める時間は、3 時間 36 分（答）

9. 濃度算

● 濃度算

(1) 濃度算とは

水溶液の濃度を基にして、溶媒・溶質の質量（重さ）を求める問題である。食塩水の場合は、食塩水が水溶液、水が溶媒、食塩が溶質である。

(2) 食塩水の問題の基本

$$\textcircled{1} \quad \text{食塩水} = \text{水} + \text{食塩}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{食塩水の重さ} = \text{水の重さ} + \text{食塩の重さ}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{食塩水の濃度 (\%)} = \frac{\text{食塩の重さ}}{\text{食塩水の重さ}} \times 100 = \frac{\text{食塩の重さ}}{\text{水の重さ} + \text{食塩の重さ}} \times 100$$

$$\textcircled{4} \quad \text{食塩の重さ} = \text{食塩水の重さ} \times \frac{\text{食塩水の濃度 (\%)}}{100}$$

(3) (例)

① 水 180g, 食塩 20g からなる食塩水の濃度は

$$\frac{20}{180 + 20} \times 100 = \frac{20}{200} \times 100 = 10 (\%)$$

② 4%の食塩水 200g に含まれる食塩の重さは

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \text{ (g)}$$

(4) 注意

食塩水の問題では、食塩の重さに関する等式をつくるのが基本である。

10. 二語の関係（言語分野）

1. 二語の関係

① 二語の関係を読み取り、同じ関係の語を選ぶ問題。

関係	A : B の文章化	例
1. 同意語	・ A と B は同じ	ぶどう酒 : ワイン
2. 反意語	・ A と B は反対の意味	結果 : 原因
3. 包含関係	・ A は B である ・ A は B に含まれる ・ A は B の一種である	邦楽 : 音楽
4. 行為関係	・ A は B をする ・ A の仕事は B である	俳優 : 演技
5. 原料関係	・ A は B からできる ・ A の原料は B である	日本酒 : 米
6. 用途関係	・ A の用途は B である ・ A は B のために使われる	クーラー : 冷房
7. その他	・ 金星 : 土星（同列関係） ・ 自宅 : 拙宅（謙譲語の関係）	自宅 : 拙宅

■ 練習 1（同意語）

次の例と同じ関係になるように、A～E を選ぶ。

（例）忍耐 : 我慢

(1) 束縛 : ()

A 約束 B 収束 C 自縛 D 拘束 E 呪縛

(2) 天分 : ()

A 天性 B 天災 C 天候 D 天地 E 天体

(3) 機転 : ()

A 転機 B 動機 C 機運 D 機知 E 変転

(4) 激励 : ()

A 感激 B 乱舞 C 鼓舞 D 勉励 E 競争

(5) 対等 : ()

A 交互 B 対立 C 相互 D 対話 E 互角

■ 練習 2（反意語）

次の例と同じ関係になるように、A～E を選ぶ。

(例) 合成：分解

- (1) 達筆：()
A 毛筆 B 文筆 C 名筆 D 悪筆 E 能筆
- (2) 隠蔽：()
A 隠匿 B 拡散 C 遮断 D 暴露 E 激昂
- (3) 帰納：()
A 横暴 B 出立 C 演繹 D 放置 E 煩雑
- (4) 不足：()
A 十分 B 満足 C 過大 D 大量 E 過剰
- (5) 容易：()
A 容認 B 簡便 C 安易 D 難局 E 困難

■ 練習 3 (包含関係)

次の例と同じ関係になるように、A～E を選ぶ。

(例) 杉：植物

- (1) 農業：()
A 稲作 B 工業 C 畑作 D 産業 E 農場
- (2) 美術：()
A 音楽 B 美術館 C 油彩 D 日本画 E 芸術
- (3) 新聞：()
A テレビ B 原稿 C 記者 D マスコミ E 週刊誌
- (4) 茶碗：()
A 食器 B はし C 食卓 D 食事 E 陶芸
- (5) 刑法：()
A 法律 B 犯罪 C 裁判 D 憲法 E 警察
- (6) 文学：()
A 小説 B 社会科学 C 古典 D 評論 E 人文科学
- (7) テーブル：()
A 椅子 B 家具 C 内装 D 机 E 四つ足
- (8) スイカ：()
A かき氷 B 井戸 C きゅうり D 果物 E 野菜

■ 練習 4 (行為関係)

次の例と同じ関係になるように、A～E を選ぶ。

(例) 消防士：消火

- (1) 大工：()
A 棟梁 B 建物 C 造成 D 普請 E 木造
- (2) 作家：()
A 小説 B 文壇 C 評論 D 著作 E 著者
- (3) 教師：()
A 教育 B 学校 C 先生 D 職員室 E 担任
- (4) 刑事：()
A 警察 B 張り込み C 捜査 D 尾行 E 聞き込み
- (5) 医師：()
A 病院 B 診療 C 内科 D 手術 E 問診
- (6) 司書：()
A 図書貸出 B 図書編集 C 図書研究 D 図書案内 E 図書管理
- (7) カウンセラー：()
A 心理 B 相談 C 助言 D 研究 E 講演
- (8) オペレーター：()
A 指導 B 管理 C 操作 D 改造 E 分析
- (9) 社長：()
A 人事 B 会見 C 下達 D 出張 E 経営

■ 練習 5 (原料関係)

次の例と同じ関係になるように、A～Eを選ぶ。

(例) ワイン：ぶどう

- (1) 日本酒：()
A ビール B 米 C 酒粕 D 飲料 E 醸造酒
- (2) チーズ：()
A 豆乳 B 牛乳 C 練乳 D 乳製品 E 豆腐
- (3) 陶器：()
A うるし B ガラス C 食器 D 金ばく E 土
- (4) 和紙：()
A 巻紙 B 桐 C こうぞ D 洋紙 E 松
- (5) うどん：()
A でんぷん質 B 小麦粉 C 大麦粉 D 冷麦 E 片栗粉
- (6) 10円硬貨：()
A 錫 B アルミニウム C ニッケル D 亜鉛 E 銅

(7) バター：()

A ヨーグルト B チーズ C 片栗粉 D クリーム E 牛乳

(8) 毛糸：()

A 納豆 B 編み棒 C セーター D 羊毛 E 柔毛

■ 練習 6 (用途関係)

次の例と同じ関係になるように、A～E を選ぶ。

(例) ストーブ：暖房

(1) 石けん：()

A 入浴 B 洗濯 C 洗浄 D 水泡 E 洗剤

(2) たんす：()

A 洋服 B 収納 C 家具 D 貯蔵 E 引き出し

(3) はさみ：()

A 裁断 B 金物 C 刃物 D カニ E 裁縫

(4) 蛍光灯：()

A 白熱灯 B 照明 C 勉強 D ランプ E 室内

(5) カメラ：()

A 映画 B フィルム C テレビ D 撮影 E 映写

(6) ピアノ：()

A 音楽 B 演奏 C 楽器 D 作曲 E 鍵盤

(7) プリンタ：()

A スキャナ B 印刷 C インク D 電源 E 用紙

(8) 定規：()

A 計数 B 軽量 C 計測 D 分度器 E 算数

(9) トラック：()

A 大型 B 積載 C 輸送 D 通行 E 貨物

● 解答

練習 1：(1) D (2) A (3) D (4) C (5) E

練習 2：(1) D (2) D (3) C (4) E (5) E

練習 3：(1) D (2) E (3) D (4) A (5) A (6) E (7) B (8) E

練習 4：(1) D (2) D (3) A (4) C (5) B (6) E (7) C (8) C (9) E

練習 5：(1) B (2) B (3) E (4) C (5) B (6) E (7) E (8) D

練習 6：(1) C (2) B (3) A (4) B (5) D (6) B (7) B (8) C (9) C

11. 語句の用法（言語分野）

1. SPI3 出題範囲

● 各テストの制限時間

ペーパーテスト		テストセンター	WEB テストティング
SPI3-U	SPI3-A		
言語(30分) 非言語(40分) 性格(40分)	言語・非言語(50分) 性格(40分) ※ SPI3-U の短縮版	言語・非言語(35分) 性格(30分)	

● 各テストの出題範囲

	出題分野	対策の優先順位	ペーパーテスト		テストセンター	WEB テストティング
			SPI3-U	SPI3-A		
言語	二語の関係	★★★★★	○	○	○	---
	語句の意味	★★★★★		○	○	---
	語句の用法	★★★★★	○	---	○	---
	文の並び換え	★★★★★	---	---	○	---
	空欄補充	★★★★★	---	---	○	---
	空欄補充(3文)	★★★	---	---	---	○
	空欄補充(3語)	★★★	---	---	---	○
	熟語の成り立ち	★★★	---	---	---	○
	文節の並び換え	★★★	---	---	---	○
非言語	長文読解	★★★	○	○	○	○
	推論	★★★★★	○	○	○	○
	場合の数	★★★★★	○	○	○	○
	確率	★★★★★	○	---	○	○
	集合	★★★★★	○	○	○	○
	損益算	★★★★★	○	---	○	○
	速度算	★★★★★	○	---	○	○
	表の読み取り	★★★★★	○	○	○	○
	資料の読み取り	★★★★★	---	---	○	---
	長文読み取り計算	★★★★★	---	---	○	---
	代金の精算	★★★★★	---	○	○	---
	料金の割引	★★★★★	○	---	○	---
	割合の計算	★★★★★	---	---	○	○
	分割払い	★★★★★	○	---	○	---
	装置と回路	★★★★★	○	---	---	---
	物の流れと比率	★★★★★	○	---	---	---
	不等式と領域	★★★★★	○	---	---	---
	年齢算	★★★	---	---	---	○
	通過算	★★★	---	---	---	○
	整数の推理	★★★	---	---	---	○

2. 一般的な多義語（問題）

下線部の語が最も近い意味で使われているものを一つ選びなさい

(1) 自分が先に立って歩く

- A : 天気があやしいので先を急ぐことにした
- B : こんな調子では先が思いやられる
- C : みんなより先に帰ることにした
- D : あまりにおいしいので先を争って食べた
- E : 先に料金を払うことになっている

(2) あやしい空模様

- A : 空が気になる
- B : 空を飛んでみたい
- C : 他人の空似だった
- D : うわの空で聞く
- E : 空で覚えている

(3) 電話をきる

- A : 期限をきることが大事だ
- B : たんかをきる
- C : 親子の縁をきる
- D : かじをきる
- E : あぶらをきる

(4) 消費者の目が肥えてきた

- A : 目を凝らしてよく見た
- B : 目がまわる忙しさだ
- C : マナーの悪さが目にあまる
- D : まさかと目を疑う
- E : これを選ぶとは目が高い

(5) 食卓にのぼる

- A : トップの座にのぼる
- B : 話題にのぼる
- C : 猫が木にのぼる
- D : 来場者が 100 万人にのぼる
- E : 煙がのぼる

(6) 波が岸に寄せる

- A : 投書を寄せる
- B : 花言葉に寄せる思い
- C : 群集が押し寄せる
- D : 知人の話に事寄せる
- E : 親戚の家に身を寄せる

(7) 先月につぐ大雨

- A : 逆転につぐ逆転
C : 親の跡をつぐ
E : 折れた骨をつぐ

- B : 家業をつぐ
D : 火ばちに炭をつぐ

(8) 人の住まない家はいたむ

- A : 足の傷がいたむ
C : 悲しい話に心がいたむ
E : 故人をいたむ集い

- B : 友人の死をいたむ
D : 暑さで魚がいたむ

(9) 敵をうつ

- A : 転んで頭をうつ
C : 次の手をうつ
E : ライフルをうつ

- B : 盗賊をうつ
D : 人の心をうつ

(10) 解決につとめる

- A : 紛争調停につとめる
C : 会社につとめる
E : 仏事につとめる

- B : 主役をつとめる
D : 会議の議長をつとめる

(11) 研究成果をあらわす

- A : 頭角をあらわす
C : 名は体をあらわす
E : グラフであらわす

- B : 喜びをあらわす
D : 書物をあらわす

(12) 容積をはかる

- A : 暗殺をはかる
C : 相手の気持ちををはかる
E : 小麦粉をはかる

- B : 体温をはかる
D : 委員会にはかる

(13) 信望があつい

- A : あつい病におかされる
C : 今年の夏はあつい
E : あついそばを食べる

- B : あつい本を借りる
D : あつい仲のふたり

(14) 腕に覚えあり

- A : 腕相撲のチャンピオン

- B : 腕を組んで考える

C : いすに腕をかける

D : 腕のいい大工

E : 腕っぷしが強い

(15) 非常口を探す

A : 就職口を世話する

B : 入り口の案内をする

C : 口の重い人

D : 口火をきる

E : 思わず口がすべる

(16) うまい字をかく

A : うまい話にのる

B : この酒はうまい

C : うまいぐあいに話をそらす

D : うまい料理

E : あの人は歌がうまい

(17) 道にそむく

A : ゴールへの道

B : 道が開ける

C : その道の大家

D : 人の道

E : 登校の道

(18) この患者は今日が山だ

A : この物語は山のない内容だ

B : 書類の山にうんざりする

C : ひと山越えて海に出た

D : テストで山を外したことがある

E : 山盛りのお菓子をたいらげた

(19) 漬物をつける

A : 水につける

B : 糊につける

C : 身につける

D : 塩につける

E : 位につける

(20) 頭がかたい

A : 意思がかたい

B : かたい性格である

C : 表情がかたい

D : 表現がかたい

E : ガードがかたい

(21) 強盗にあう

A : 旧友にあう

B : 先生と目があう

C : 恋人にあう

D : にわか雨にあう

E : 時代にあう

(22) 犯人をついきゅうする

A : 真実をついきゅうする

C : 原因をついきゅうする

E : 失政をついきゅうする

B : 給与をついきゅうする

D : 利潤をついきゅうする

(23) 絵画をかんしょうする

A : 名園をかんしょうする

C : 自然をかんしょうする

E : 他人にかんしょうする

B : 退職をかんしょうする

D : 人生をかんしょうする

(24) 味を占める

A : 貧乏の味を知る

C : 味のある演奏

E : 薄味せんべい

B : スープの味が濃い

D : 味な趣向

(25) 彼の腹が分からない

A : 腹に一物

C : 腹が据わっている

E : 指の腹

B : 腹が痛い

D : 腹を立てる

3. 一般的な多義語（解答）

(1) (答) D

「先（さき）」は、先頭の意味。A・B・C・Eで「先頭」に言い換えると、意味不明。

A 継続している物事の残りの部分。「話の先を聞く」「先を急ぐ」

B 未来のある時点。将来。「先を見通しての計画」「先の楽しみな青年」

C 順序の前の方。「名簿の先の方に出ている」「だれが先に入りますか」「お先にどうぞ」

D 続いているものなどの一番はじめ。先頭。「列の先」「みんなの先に立って歩く」

E 時間的に前。あることより前。「代金を払うのが先だ」「ひと足先に帰る」

(2) (答) A

「空」を「天気」に言い換えると、意味が通じるのはAだけ。

A 天候。天気。空模様。「今にも降り出しそうな空」

B 頭上はるかに高く広がる空間。天。天空。「東の空が白む」「空高く舞い上がる」

C 実体のない、事実でない、などの意を表す。「空耳」「空音（ね）。空似（そらに）は、

他人どうしの顔かたちがよく似ていること。

D 他に心を奪われ、ぼんやりしているさま。

E 書いたものを見ないで、そのとおりに言ったり書いたりすること。「空で言える」

(3) (答) C

「きる」の漢字は、すべて「切る」である。「電話をきる」の「きる」は、何かを途中で止める意味。

A 「きる」は、物事に区切りをつける意味。「期限をきる」「先着 10 名できる」

B 「きる」は、際立った、または、思いきった行為・動作をする。啖呵（たんか）を切るは、歯切れのいい言葉で、勢いよくまくしたてること。

C 「きる」は、続いている物事を途中でやめる意味。「話をきる」「電話をきる」「縁をきる」

D 「きる」は、ハンドル・舵（かじ）などを操作して、進む方向を変える。「ハンドルを右にきる」「カーブをきる」

E 「きる」は、水分や油分（ゆぶん）を取り去ること。「水をきる」（水分が無くなるようにする）

(4) (答) E

「目」は、よしあしを見分ける判断力・能力。「目」を「能力」にでも言い換えると、意味が通じるのは E だけ。E 以外は、体の器官としての目で、慣用句。

A 目を凝らすは、じっと見つめること。

B 目がまわるは、非常に忙しいようす。

C 目にあまるは、程度がひどく黙って見ていられないこと。

D 目を疑うは、実際に見ても信じられないほど不思議に思うこと。

E よしあしを見分ける判断力・能力。

(5) (答) B

「食卓にのぼる」の「のぼる（上る）」は、「その場に出る」の意味。この「出る」で言い換えると、意味が通じるのは B のみ。

A 「昇る」は、高い地位につく、昇進する意味。「大臣の位に昇る」

B 「上る」は、その場に出るの意味。

C 「登る」は、下から上へ、低い所から高い所へ移る意味。

D 「上る」は、数量がある程度以上の多さに達すること。「死者が 100 人に上る」

E 「昇る」「上る」のどちらでも良い。上方へすすんで高い所に達する意味。

(6) (答) C

波が岸に来るので、「来る」と言い換えればよい。

- A 「寄せる」は、送ること。「回答を寄せる」「便りを寄せる」
B 「寄せる」は、愛情・興味・好意などの気持ちをいだくこと。「同情を寄せる」「思いを寄せる」
C 「寄せる」は、こちらに近づくこと。「敵軍が寄せて来る」
D 「事寄せる」は、口実にする、かこつけるの意味。「病気に寄せて休む」
E 「寄せる」は、まかせる、ゆだねる意味。

(7) (答) A

「つぐ（次ぐ）」は、あとに続くの意味。「続いて」で言い換える。

- A 「次ぐ」は、間をあけず、あとに続くの意味。「昨年につぐ豊作」
B 「つぐ（継ぐ）」は、相続する、継承するの意味。
C Bと同じ。
D 「つぐ（継ぐ）」は、加えるの意味。
E 「つぐ（継ぐ）」は、つなぎ合わせるの意味。つぐ（接ぐ）とも書く。

(8) (答) D

「いたむ（傷む）」は、こわれる、くさるの意。

- A 痛む B 悼む C 痛む D 傷む E 悼む

(9) (答) B

「やっつける」とでも言い換えれば、正解はB。

- A 「うつ（打つ）」は、強く当てるの意。
B 「うつ（討つ）」は、殺す、せめほろぼすの意。
C 「うつ（打つ）」は、手段・方法をほどこすの意。
D 「うつ（打つ）」は、感動させるの意。
E 「うつ（撃つ）」は、射撃するの意。

(10) (答) A

「努力する」意味なので、正解はA。

- A 努める B 務める C 勤める D 務める E 勤める

(11) (答) D

研究の成果であるから、発表するとでも言い換えると、正解はD。

- A 現す B 表す C 表す D 著す E 表す

・「表す」は、言葉・記号などにして表現する意。「考えを言葉に表す」「図に表す」「怒りを顔に表す」「名は体を表す」

・「現す」は、見える形に出現させる意。「姿を現す」「全貌を現す」「頭角を現す」

- ・「著す」は、書物を書いて出版する意。「多くの秀作を著す」
- ・「顕す」は、広く世に知らせる意。「功績を世に顕す」

(12) (答) E

量であるから、量る（はかる）である。従って、正解は E。推測の意味での「はかる」は、「量る」「測る」のどちらでもよい。

A 図る B 測る C 量る（測る） D 諮る E 量る

- ・「計る」は、時間や程度を調べる意。「タイムを計る」「損失は計り知れない」
- ・「測る」は、長さ・深さなどを調べる意。「面積を測る」「熱を測る」「子供の能力を測る」
- ・「量る」は、量（重さや容積）を調べる意。「体重を量る」
- ・「図る」は、計画を立て、実現を目ざす意。「紛争の解決を図る」
- ・「諮る」は、他人の意見を問う、諮問する意。「役員会に諮る」
- ・「謀る」は、だますの意。「しまった、謀られた」

(13) (答) B

「信望があつい」の漢字は「厚い」なので、正解は B。

A 篤い B 厚い C 暑い D 熱い E 熱い

- A 「篤い」は、病気が重い。
- B 「厚い」は、その意味の通り。ぶあついこと。転じて、情けや思いやりの程度が大きいこと。友情に厚い。厚いもてなし。厚くお礼申し上げます。
- C 「暑い」は、気温が高い。
- D 「熱い」は、はげしい気持ちを感じられる意。胸が熱くなる話。お熱い仲。
- E 「熱い」は、温度が高い。

(14) (答) D

D 以外は、身体の内側なので、正解は D である。「腕に覚えがある」とは、才能に自信があるという意味。この「腕」は、うでまえ、才能、力量の意味。

(15) (答) B

物理的な進入路なので、正解は B。

(16) (答) E

「うまい字」は上手な字の意味なので、正解は E。

(17) (答) D

「道にそむく」の道は、人が守るべき道徳のことなので、正解は D。

A 道のり、前途 B 打開策 C 専門 E 通学路

(18) (答) A

「山」は、クライマックス、大切な所の意味なので、正解は A。

B 数量 C 山地 D 予想 E たくさん

(19) (答) D

「漬物を漬ける」と書くが、漢字ではなく、「つける」の意味で考えた方がよい。

A 浸ける (または漬ける)。水の中に入れておくこと。

B 付ける。離れない状態にする。

C 着ける。からだにまとう。

D 漬ける。液体の中へ入れて、しみこませる。ひたす。

E 就ける (または即ける)。人をある地位に置く。社長のポストに就ける。

(20) (答) A

「頭が固い」とは、がんこ (頑固)、自分の考えを変えない、という意味。

A 固い B 堅い C 硬い D 硬い E 堅い

・「固い」は、しっかりしていて、強く、丈夫な様子の意。反対語は「ゆるい」。「固い決意」「固い守り」「(固守)」「固い信念」「固く持ち続ける」「(固持)」「固く辞退する」「(固辞)」「固い革のハンドバック」。

・「堅い」は、内部までしっかりと詰まっていて強い様子の意。反対語は「もろい」。「志が堅い」「身持ちが堅い」「堅い材質の机」「手堅い守備」「義理に堅い男」「堅い儲け話」「堅実」「堅牢」「堅固」「堅持」。

・「硬い」は、力を加えられても、容易に形や状態を変えない意。反対語は、「軟らかい」。「硬式テニス⇔軟式テニス」「硬水⇔軟水」「硬化⇔軟化」「態度が急に硬くなる」「硬い表現」「硬い骨」「硬い土質」「硬球」。

(21) (答) A

「強盗に遭う」であり、突然ひどい目にあう意味なので、正解は D。

A 会う B 合う C 会う D 遭う E 合う

「遭う」は、思いがけず出会うことだが、通常は、よくない事に会う意。交通事故に遭う、夕立に遭う、ひどい目に遭った、台風でたいへんな被害に遭った。

(22) (答) E

「犯人を追及」と書く。「犯人を追及」「真実を追究」「利益を追求」と覚えておけばよい。

A 追究 B 追給 C 追究 D 追求 E 追及

・「追及」は、のがれようとするものを、どこまでもあきらめずに調べ、追いつめること。責任を追及する。

- ・「追究」は、よく分かっていない事柄について、学問的に明らかにしようとして、どこまでも、おいきわめていくこと。真実を追究するように、「真実」「本質」の場合は、追究。
- ・「追求」は、最初に欲しいものがある、それをどこまでも追いかけて、手に入れようとする。こと。「利益」「快楽」を追いかけるときは、追求。
- ・「追給」は、給与の不足分などを、あとから支払うこと。

(23) (答) A

「絵画を鑑賞する」と書く。

A 鑑賞 B 勸奨 C 観賞 D 観照 E 干涉

- ・「鑑賞」は、芸術作品の美的価値を理解し、味わうこと。
- ・「観賞」は、ものを見て楽しむこと。
- ・「勸奨」は、すすめて、はげますこと。
- ・「観照」は、物事を静かにながめ考えて、その深い意味をとらえようとする。
- ・「干涉」は、自分と直接関係のないことに立ち入って、よけいな口を出すこと。

(24) (答) A

「味を占める」の味は、経験という意味。この意味で言い換えられるのは、A だけ。「味を占める」とは、一度経験した旨みや面白みを忘れられず、次にも同様のことを期待する、という意味の慣用句。

- B 「スープの味が濃い」は、飲食物を舌にのせた時に受ける感じという意味。
- C 「味のある演奏」は、趣き、味わい、という意味。
- D 「味な趣向」は、気が利いていること、という意味。
- E 「薄味せんべい」は、飲食物を舌にのせた時に受ける感じという意味。

(25) (答) A

「腹」は、心中という意味。この意味で言い換えられるのは、A だけ。「腹に一物」とは、心の中にたくらみがあること、という意味の慣用句。

- B 「腹」は、動物の身体の胴の下半部のこと。
- C 「腹」は、度量という意味。
- D 「腹」は、感情という意味。
- E 「腹」は、中央のふくらんでいるところ、という意味。

4. 文法の用法

■ 格助詞

1. で

- (1) 場所
 - ① 書店で買う ② 控室で待つ
- (2) 時間
 - ① 2時間で10キロ進む ② 三日で仕上げる
- (3) 手段・方法・道具・材料
 - ① 花で飾る ② 氷で冷やす ③ 地下鉄で行く ④ 粘土で作る
(「～を使って」と置き換えられる)
- (4) 原因・理由・動機
 - ① 健康診断で病院に行く ② 風邪で休む ③ 新築記念でもらう
(「～のため」と置き換えられる)
- (5) 状況・事情
 - ① みんなで暮らすと楽しい ② 全会一致で決定する
- (6) 動作・状態の主体
 - ① 役員会で作成した草稿 ② 自分で作った料理

2. に

- (1) 場所
 - ① 海外に住む ② 実家にいる
- (2) 時間
 - ① 3時に起きる ② 夕方にに届く ③ 作業の合間に休憩を取る
- (3) 目標・対象
 - ① 泳ぎに行く ② 結婚式に行く ③ 頭痛に効き目のある薬
- (4) 原因
 - ① 前祝いにワインをあける ② 音に驚く ③ 赤点に落胆する ④ 寒さに震える
- (5) 帰着点・動作のおよぶ方向
 - ① 会社に着く ② 向こうに届く
- (6) 資格（～として）
 - ① おみやげに真珠を買う ② 景品にメダルをもらう
- (7) 変化の結果
 - ① 医者になる ② 明日になる ③ 失恋に終わる ④ 立てるようにになりたい
- (8) 動作・作用の状態
 - ① 前後にゆれる ② カラカラに乾く ③ 髪を長めに伸ばす ④ 言わずに終わる
- (9) 受け身の対象
 - ① 犬にかまれた ② 父に叱られる ③ 風に吹かれる
- (10) 使役の対象
 - ① 彼にやらせる ② 赤ちゃんにミルクを飲ませる ③ 友人に言わせる

3. の

(1) 連体修飾語（所有・所属）

- ① 彼の傘 ② 母の形見 ③ 彼からの手紙 ④ 大学の教授

(2) 主語

- ① 彼の買った傘 ② 父の建てた家 ③ 雨の降る頃
（「が」に置き換えられる）

(3) 対象

- ① 紅茶の好きな人

(4) 体言に準ずる（のもの・のこと）

- ① 歩くのが好きだ ② 私のをお使いください ③ 果物は甘いのがいい
（「～こと」、「～のもの」に置き換えられる）

(5) 体言に準ずる（断定）

- ① 傘が折れたのです ② ついに終わったのだ

(6) 並列

- ① やるのやらないのと、ぐずぐずしているな。
（「とか」に置きかえられる）

4. と

(1) 動作の相手

- ① 父と野球をする ② 友人と旅行に出た ③ 父と言い争う

(2) 引用・主張・考え

- ① わんわんと泣く ② きれいな人だと思う ③ 正しいと主張する

(3) 結果

- ① 教師となった ② 開業は来年と決定した ③ 開催は東京と決まった

(4) 比較

- ① 昔と変わらない ② 君とは思想が違う ③ 彼と違った趣味をもつ

(5) 並列

- ① 赤と青の絵の具が足りない

5. から

(1) 場所・時間・人の起点

- ① 学校から帰る ② 窓から眺める ③ 朝から暑い ④ 彼から言われた

(2) 原因・理由

- ① 過労から寝込む ② 操作ミスから事故が発生した
（「～のために」「～のせいで」と置きかえられる）

(3) 材料

- ① 麦から作った酒 ② 米から作ったパン

(「～を用いて」と置きかえられる)

(4) 手段

- ① 欠席回数から成績をつける ② 現状から察する

■ 接続助詞

1. つつ

(1) 動作・作用の継続

- ① 雨が遠ざかりつつある ② 雨から雪に変わりつつある

(2) 同時に行われる複数の動作

- ① コーヒーを飲みつつ新聞を読む ② 落胆しつつ片付けをした

(3) 無関係・相反する2つの動作

- ① 欠陥商品と認識しつつ販売を続けた ② 無駄と知りつつも依頼をする

■ 副助詞

1. ばかり

(1) おおよその程度・分量

- ① まだ半分ばかり残っている ② 1時間ばかり待った

(2) 範囲の限定

- ① 弟ばかり，かわいがる ② あとは清書するばかりだ

(3) 動作が完了してまもない状態

- ① 今行ったばかりだ ② 銀行から引き出したばかりのお金

(4) 強調

- ① ここぞとばかり声援する ② 待っていたとばかりに飛び出す

2. さえ

(1) すでにあるものの上に、さらに付け加える意

- ① 風が吹き出しただけでなく、雨さえ降りだした

(2) 一例を挙げて他を類推させる意

- ① かな文字さえ読めない ② 水さえ飲めない

(3) 最低限度を示す意

- ① 水さえあればよい

3. でも

- (1) 一例を挙げて他を類推させる
 - ① 専門家でも難しい問題 ② 子どもでもできる
- (2) 大雑把な例示
 - ① 散歩にでも行こうか ② そばでも食べよう

■ 助動詞

1. そうだ

- (1) 性質についての判断
 - ① このケーキはおいしそうだ ② 楽しくなさそうだ
- (2) 状態の変化についての判断
 - ① 雷でも鳴りそうだ ② すぐにも勝てそうだ
- (3) 予測
 - ① 今日は暑くなりそうだ ② これからもお世話になりそうだ
- (4) 伝聞
 - ① 遠方から来るそうだ ② 雪に埋もれているそうだ

2. れる

- (1) 受け身
 - ① 母に待たされる ② 家屋が解体される
- (2) 尊敬
 - ① お客様が休まれる ② 会長が来られる
- (3) 自発
 - ① 小さい頃が思い出される ② 若い頃がしのばれる
- (4) 可能
 - ① 手軽に取れる食事 ② 四種類もの変化球を投げられる

■ 接尾語

1. らしい

- (1) 体言について、それにふさわしい意
 - ① 男らしい男 ② 春らしい陽気 ③ 人間らしい生活
- (2) 形容詞・形容動詞につき、～と感じられる
 - ① かわいらしい ② 愛らしい ③ 汚らしい

5. 多義語・文法問題

下線部の語が最も近い意味で使われているものを一つ選びなさい

(1) バスで行く

- A : 花で飾る
 B : 歯痛で休む
 C : 書店で買う
 D : 家族で暮らす
 E : すぐに飛んでいきたい

(2) このくらい世間によくあることだ

- A : 外国に住む
 B : 思い出に記念品を買う
 C : 腰痛によく効く湿布
 D : 出張に行く
 E : 書かずにすます

(3) 母のでよければお使いください

- A : コートが破れたのです。
 B : それは私のコートです。
 C : コートは軽いのがいい
 D : 私のなくしたコートが見つかった
 E : コートがないの、マフラーがないのと騒ぐ

(4) 彼は医者となった

- A : 友人と美術館に出かけた
 B : 引っ越しは今月と決まった
 C : くすくすと笑う
 D : 間違っているとと指摘する
 E : 美しい形だと思う

(5) 歩き疲れたから休憩しよう

- A : 早朝から出かけることにした
 B : 波が高いから泳ぐのはあきらめよう
 C : 京都を出て、名古屋から静岡へ向かう
 D : パンは、小麦粉から作ります
 E : 顔色から毎日の健康状態を判断する

(6) 台風が近づきつつある。

- A : 危険と知りつつ使い続ける。
 B : 1年を振り返りつつ来年の目標を立てる。
 C : 期待に胸をときめかせつつ門をくぐった。
 D : 春から夏に変わりつつある。
 E : 先方の事情も考慮しつつ検討する。

(7) たった今、こちらに到着したばかりです

- A : 彼の無事を祈るばかりだ

- B : 後ろから声を掛けると、少年は飛び上がらんばかりに驚いた
C : わずかばかりの小遣いで、プレゼントを買ってくれた
D : 君に頼ってばかりいるわけにはいかないから、自分で頑張る
E : 先ほど完成したばかりの作品を見せてもらった

(8) そんな問題は、小学生でさえ解くことができる

- A : 君さえいてくれれば、百人力だ
B : 風だけでなく、激しい雨さえ降りだしそうだ
C : 動物でさえ、自分の子どもをまもるため必死で闘う
D : 糸口さえつかめれば、解決できそうだ
E : ガソリンがなくなり、あまつさえタイヤもパンクした

(9) することがないのなら、本でも読んだらどうですか

- A : どれほど真剣に頼んでも、彼女は承知はしなかった
B : こんな簡単な問題は、小学生でも解けるだろう
C : 今朝は早起きしたけど、でも、やっぱり遅刻してしまった
D : こちらでコーヒーでもお飲みください。
E : どんな悪人でも、心を入れ替えてやり直すことができる

(10) 日本で作られた漢字を、国字とよぶそうだ。

- A : 黒い雲が立ちこめて、今にも雨が降り出しそうだ。
B : こちらのケーキの方がおいしそうだ。
C : 今日も暑くなりそうだ。
D : 昔はこのあたり一面、田園地帯だったそうだ。
E : 君には、これからも助けられそうだ。

(11) 知り合いから頼まれる

- A : うれしい知らせが待たれる B : 誰でも登れる
C : 夜露にぬれる D : ビルがこわされる
E : 先生が話される

(12) 彼女は、子どもに対して母親らしい気配りを見せた

- A : もっと学生らしい服装をしたらどうですか
B : 今年の夏は厳しい暑さになるらしい
C : 昨夜の夜、どうやら彼は一睡もできなかったらしい
D : うちの庭を荒らしたのは、となりの家の犬らしい
E : わざとらしい態度で、注意を引こうとする

6. 多義語・文法問題（解答）

(1) (答) A

手段の「で」なので、Aである。Eは接続助詞の「で」

B 原因 C 場所 D 状況 E 接続助詞

(2) (答) A

場所を表す「に」なので、正解はA

A 場所 B 資格（～として） C 対象 D 目標 E 動作の状態

(3) (答) C

「の」は、体言（もの・こと）に準ずる用法なので、正解はC

A 体言に準ずる（断定） B 連体修飾語 D 主語 E 並立

(4) (答) B

結果の「と」である。これは「に」に言い換えることができる。

A 動作の相手 C～E 引用・主張・考え

(5) (答) B

原因の「から」

A 起点 B 原因・理由 C 起点 D 材料 E 手段

(6) (答) D

動作・作用の継続を表す「つつ」

A 相反する2つの動作 B・C・E 同時に行われる複数の動作

(7) (答) E

「ばかり」は、動作が完了してまもない状態。

A・D 範囲の限定 B 強調 C おおよその程度・分量

(8) (答) C

一例を挙げて他を類推させる意

A・D 最低限度 B さらに付け加える意 E 「あまつさえ」（その上に）という副詞

(9) (答) D

大雑把な例示

A 逆接の接続助詞 C 逆接の接続詞 B・E 一例を挙げて他を類推させる

(10) (答) D

伝聞の「そうだ」なので、正解はD

A 状態の変化についての判断 B 状態の変化についての判断 C・E 予測

(11) (答) D

受け身の「れる」。

A 自発 B 可能 C 「ぬれる」という動詞 E 尊敬

(12) (答) A

ふさわしいの意味

B・C・D 「～だろう」という推定を表す助動詞 E 「わざとらしい」という形容詞

12. 線分図の問題

1. $n(A \cap B)$ のとり得る値

- (1) 以下、全体集合 U の部分集合 A, B について、 $n(A \cap B)$ のとり得る値を考察する。 U は有限集合である。
- (2) $n(U), n(A), n(B)$ の値はわかっているが、 $n(A \cap B)$ や $n(A \cup B)$ の値が不明のとき、 $n(A \cap B)$ のとり得る値はどのようになるだろうか。これを線分図で説明する。
- (3) まず、一般に次が成立している。

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

この状態を、次のように線分図で表す。

- ① A の矢印は左の境界線から引く (A の位置決め)。
- ② B の矢印の位置は不明なので、図 I のように書く。
- ③ A と B の矢印の重なり部分が、 $A \cap B$ である。

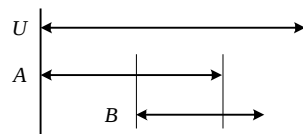


図 I 一般の状態

- (4) $n(A \cap B)$ の最大値を考える。

- ① B の矢印を左の境界線まで移動すると、 $n(A \cap B)$ が最大になる。
- ② $n(A) > n(B)$ なら、 $n(A \cap B)$ の最大値は $n(B)$ 。

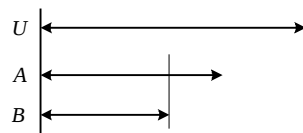


図 II $n(A \cap B)$ が最大

- (5) $n(A \cap B)$ の最小値を考える。

- ① B の矢印を右の境界線まで移動すると、 $n(A \cap B)$ が最小になる。
- ② $n(A \cap B)$ の最小値は、 $n(A) + n(B) - n(U)$ 。
- ③ ただし、常に $n(A \cap B) \geq 0$ であるから、
 $n(A) + n(B) - n(U) < 0$ になったときは、
 $n(A \cap B)$ の最小値は 0 になる (図 IV の場合)。
 これは、 A と B の重なりがない場合である。

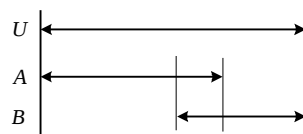


図 III $n(A \cap B)$ が最小

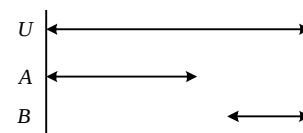


図 IV $n(A \cap B)$ の最小値は 0

- (6) 以上を整理すると、次が成り立つ。

- ① $n(A) + n(B) - n(U) \leq n(A \cap B) \leq (n(A) \text{ と } n(B) \text{ の小さい方})$
- ② $n(A \cap B)$ の最大値 = ($n(A)$ と $n(B)$ の小さい方)
- ③ $n(A \cap B)$ の最小値 = $n(A) + n(B) - n(U)$
 ただし、右辺 < 0 のときは、 $n(A \cap B)$ の最小値は 0

2. 少なくとも〇〇人とは

- (1) 「少なくとも〇〇人いる」という表現は、その最小値が〇〇人であることを意味する。
- (2) 例えば、ある条件 C をみたす学生の人数を X とするとき、次はみな同じ意味である。
 - ① 条件 C をみたす学生が少なくとも 2 人いる。
 - ② X の最小値は 2 である。
 - ③ 常に $2 \leq X$ が成立し、等号が成立する場合がある。

3. 練習 1

(問題) 学生 40 人について、英語ができる学生は 32 人、ドイツ語ができる学生は 20 人いるとする。

● 問 1 英語とドイツ語の両方ができる学生は、最大何人いるか。

- ① 両方できる学生の数、ドイツ語ができる学生 20 人が、みな英語ができる場合に最大になる。
- ② すなわち、右の図において、ドイツ語の矢印が左の境界線に一致した場合が最大である。
- ③ 従って、最大 20 人いる。

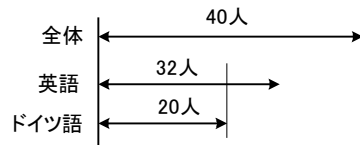


図 I $n(A \cap B)$ が最大

● 問 2 英語とドイツ語の両方ができる学生は、少なくとも何人いるか。

- ① 両方できる学生の数、右の図において、ドイツ語の矢印が右の境界線に一致した場合に最小になる。
- ② 従って、両方できる学生の数、最小値は $32 + 20 - 40 = 12$
- ③ よって、少なくとも 12 人いる。

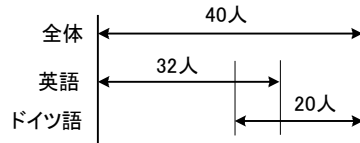


図 II $n(A \cap B)$ が最小

● 問 3 ドイツ語ができて英語ができない学生は、最大何人いるか。

- ① ドイツ語ができる学生は 20 人、英語ができない学生は $40 - 32 = 8$ 人いる。
- ② (問 1) と同様に考えると、最大 8 人いる。

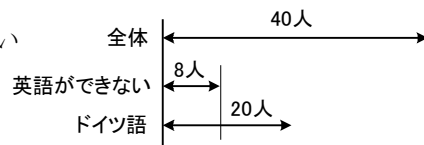


図 III $n(A \cap B)$ が最大

● 問 4 ドイツ語ができて英語ができない学生は、少なくとも何人いるか。

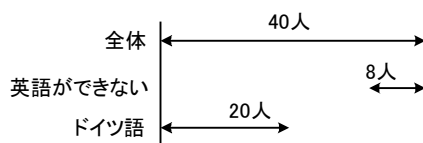
- ① ドイツ語ができる学生は 20 人、英語ができない学生は 8 人いる。
- ② (問 2) と同様に考えると、ドイツ語ができて

英語ができない学生の人数の最小値は

$$20 + 8 - 40 = -12$$

- ③ しかし、最小値 ≥ 0 であるから、
最小値は 0。

- ④ すなわち、ドイツができて英語ができない学生は 0 人の可能性もある。



図Ⅳ $n(A \cap B)$ の最小値は 0

4. 練習 2

- (1) 全体集合 U の中に 4 種類の集合 A, B, C, D が登場して、それらの共通部分などの要素の個数が問われる問題、すなわち 4 変数の問題の場合は、ベン図やカルノー図で考えるのは難しい。よって、線分図で考えるのが基本になる。
- (2) しかし、練習 1 の解答を見れば、単に $n(A \cap B)$ の最大値や最小値を求めているにすぎない。従って、線分図を描く必要もない。
- (3) 以下の問題では、

$$n(A \cap B) \text{ の最小値} = n(A) + n(B) - n(U)$$

を使うだけである。

(公務員試験・地方上級)

大学生 40 人にアンケート調査を行ったところ、フランス語を話せる人は 32 人、ドイツ語を話せる人は 28 人、中国語を話せる人は 20 人、スペイン語を話せる人は 18 人という結果がでた。このことから確実にいえるのは、次のうちどれか。

- (ア) フランス語と中国語の 2 か国語を話せる人は少なくとも 12 人いる。
- (イ) 中国語とスペイン語の 2 か国語を話せる人は 1 人もいない。
- (ウ) フランス語とドイツ語と中国語を話せる人は少なくとも 1 人いる。
- (エ) フランス語と中国語とスペイン語の 3 か国語を話せる人は、少なくとも 1 人いる。
- (オ) ドイツ語とスペイン語の 2 か国語話せる人は少なくとも 8 人いる。

全体 … 40 人

フランス語 … 32 人、ドイツ語 … 28 人、中国語 … 20 人、スペイン語 … 18 人

- (ア) 題意の人数を X とする。すなわち、フランス語と中国語の 2 か国語を話せる人の人数を X とすると、 X の最小値は

$$32 + 20 - 40 = 12$$

よって、この選択肢は正しい。

- (イ) 「1 人もいない」とは、断定できない。スペイン語が話せる 18 人が全員、中国語を話せ

る可能性もある。よって、この選択肢は誤り。

確認してみよう。題意の人数を X とすると、

$$20 + 18 - 40 \leq X \leq (20 \text{ と } 18 \text{ の小さい方})$$

$$\therefore 0 \leq X \leq 18$$

すなわち、 X の値は 0 になる場合もあるが、18 になる場合もあり得る。

(ウ) フランス語とドイツ語と中国語を話せる人とは

(フランス語とドイツ語を話せる人) かつ (中国語を話せる人) …… ①

のことである。

フランス語とドイツ語を話せる人の人数の最小値は

$$32 + 28 - 40 = 20$$

従って、①の人数の最小値は

$$20 + 20 - 40 = 0$$

よって、①の人数は 0 になる場合もあり得るので、この選択肢は誤り。

(注意)

上記を説明しよう。フランス語とドイツ語を話せる人の人数を X とすれば、

$$20 \leq X$$

が成立している。一方、①の人数を Y とすれば、

$$X + 20 - 40 \leq Y$$

が成立する。よって、 $X = 20$ のとき Y は最小になり、 Y の最小値は

$$(X \text{ の最小値}) + 20 - 40 = 20 + 20 - 40 = 0$$

(エ) 題意の人数を X とする。中国語とスペイン語を話せる人の人数の最小値は

$$20 + 18 - 40 = -2 \text{ より } 0$$

よって、中国語とスペイン語を話せる人が 0 人の可能性があるので、 $X = 0$ の可能性もある。よって、この選択肢は誤り。

(オ) 題意の人数を X とすると、 X の最小値は

$$28 + 18 - 40 = 6$$

よって、ドイツ語とスペイン語が話せる人は少なくとも 6 人いるので、この選択肢は誤り。

(注意)

(1) 上記の問題では、フランス語を話せる人 (A)、ドイツ語を話せる人 (B)、中国語を話せる人 (C)、スペイン語を話せる人 (D) の間には、何の関連性もない。

(2) 従って、例えば、 A と B について $A \cap B = \phi$ の可能性があれば、 A, B, C についても $A \cap B \cap C = \phi$ の可能性がある。

13. 命題と論理

1. 命題とは

- (1) 命題とは、正しいか正しくないかを判定できる文や式のこと。
- (2) 命題が正しいことを「真 (true)」^{しん}、命題が正しくないことを「偽 (false)」^ぎという。
- (3) いかなる命題も、真か偽のいずれかである。
- (4) 真を 1, 偽を 0 で表す。1 と 0 を、命題の真理値^{しんりち}という。
- (5) 命題は、 $A, B, C, \dots$ などの記号で表す。これらを命題記号という。
- (6) 1 つまたは複数の命題から、否定・論理和・論理積・条件文という論理演算によって、1 つの命題 (複合命題) を作ることができる。

- ① A の否定: $\bar{A}$
- ② A と B の論理和: A または B
- ③ A と B の論理積: A かつ B
- ④ A と B の条件文: $A \Rightarrow B$

2. $\bar{A}$ (A の否定)^{ひてい}

- (1) $\bar{A}$ (A の bar) は、 A の内容を否定する命題。 $\bar{A}$ は「 A でない」という意味。
- (2) $\bar{A}$ の真理表

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

※ $\bar{A}$ の真偽 A が真ならば $\bar{A}$ は偽, A が偽ならば $\bar{A}$ は真

- (3) $\bar{\bar{A}} = A$ が成立 ($\bar{\bar{A}}$ を A の二重否定という)
- (4) (例) A : 太郎は学生である
 $\bar{A}$: 太郎は学生でない

3. A または B (A と B の論理和)^{ろんりわ}

- (1) A または B が成立することを主張する命題。「 A と B の少なくとも一方が成立する命題」と言ってもよい。(A または B) には、 A と B の両方が成立する場合も含む。
- (2) (A または B) の真理表

A	B	A または B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

※ (A または B) の真偽 A が真または B が真のときは真, それ以外の場合は偽

- (3) 日常表現の「 A か B 」「 A あるいは B 」「 A もしくは B 」は、「 A または B 」になる。
- (4) (例) A : 太郎は学生である

B : 太郎は未成年である

A または B : (太郎は学生である) または (太郎は未成年である)

A または B : 太郎は学生または未成年である

4. A かつ B (A と B の論理積)

(1) A と B の両方が成立することを主張する命題。

(2) (A かつ B) の真理表

A	B	A かつ B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

※ (A かつ B) の真偽

A が真かつ B が真のときは真, それ以外の場合は偽

(3) 日常表現の「 A と B 」「 A そして B 」「 A も B も」は, 「 A かつ B 」になる。

(4) (例) A : 太郎は学生である

B : 太郎は未成年である

A かつ B : (太郎は学生である) かつ (太郎は未成年である)

A かつ B : 太郎は学生で未成年である

5. ド・モルガンの法則

(1) ド・モルガンの法則

$$\textcircled{1} \quad \overline{A \text{ または } B} = \bar{A} \text{ かつ } \bar{B}$$

(A または B) でない = (A でない) かつ (B でない)

$$\textcircled{2} \quad \overline{A \text{ かつ } B} = \bar{A} \text{ または } \bar{B}$$

(A かつ B) でない = (A でない) または (B でない)

(2) (例) A : 花子は英語ができる

B : 花子はドイツ語ができる。

A または B : 花子は英語またはドイツ語ができる

A かつ B : 花子は英語かつドイツ語ができる

	英語	ドイツ語
(ア)	○	○
(イ)	○	×
(ウ)	×	○
(エ)	×	×

○ (できる), × (できない)

① (A または B) は, (ア) (イ) (ウ) を表す。

② (A または B) の否定は (エ) になるので,

$$\overline{A \text{ または } B} = (\text{花子は英語ができない}) \text{ かつ } (\text{花子はドイツ語ができない})$$

$$= \bar{A} \text{ かつ } \bar{B}$$

= 花子は英語もドイツ語もできない

③ (A かつ B) は, (ア) を表す。

- ④ (A かつ B) の否定は (イ) (ウ) (エ) になるので,

$$\begin{aligned}\overline{A \text{ かつ } B} &= (\text{花子は英語ができない}) \text{ または } (\text{花子はドイツ語ができない}) \\ &= \bar{A} \text{ または } \bar{B} \\ &= \text{花子は英語ができないか, または, ドイツ語ができない} \\ &= \text{花子は英語またはドイツ語の少なくとも一方ができない}\end{aligned}$$

- (3) 複合命題を否定すると,

各命題 $\rightarrow$ 否定, 「または」 $\rightarrow$ 「かつ」, 「かつ」 $\rightarrow$ 「または」

- $$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \overline{A \text{ または } B \text{ または } C} &= \bar{A} \text{ かつ } \bar{B} \text{ かつ } \bar{C} \\ \textcircled{2} \quad \overline{A \text{ かつ } B \text{ かつ } C} &= \bar{A} \text{ または } \bar{B} \text{ または } \bar{C} \\ \textcircled{3} \quad \overline{A \text{ または } (B \text{ かつ } C)} &= \bar{A} \text{ かつ } (B \text{ または } \bar{C})\end{aligned}$$

- (4) (例)

- $$\begin{aligned}\textcircled{1} \quad \underline{\text{(学生または未成年である) の否定}} &= (\text{学生でない}) \text{ かつ } (\text{未成年でない}) \\ &= \underline{\text{学生でも未成年でもない}} \\ \textcircled{2} \quad \underline{\text{(学生かつ未成年である) の否定}} &= (\text{学生でない}) \text{ または } (\text{未成年でない}) \\ &= \underline{\text{学生でないか未成年でない}} \\ \textcircled{3} \quad \underline{\text{(太郎か次郎にメールを出す) の否定}} \\ &= (\text{太郎または次郎にメールを出す}) \text{ の否定} \\ &= (\text{太郎にメールを出さない}) \text{ かつ } (\text{次郎にメールを出さない}) \\ &= \underline{\text{太郎にも次郎にもメールを出さない}} \\ \textcircled{4} \quad \underline{\text{(太郎と次郎にメールを出す) の否定}} \\ &= (\text{太郎かつ次郎にメールを出す}) \text{ の否定} \\ &= (\text{太郎にメールを出さない}) \text{ または } (\text{次郎にメールを出さない}) \\ &= \underline{\text{太郎または次郎にメールを出さない}} \\ \textcircled{5} \quad \underline{\text{(太郎か花子は日本人である) の否定}} \\ &= \text{「(太郎は日本人である) または (花子は日本人である)」 の否定} \\ &= (\text{太郎は日本人でない}) \text{ かつ } (\text{花子は日本人でない}) \\ &= \underline{\text{太郎も花子も日本人ではない}} \\ \textcircled{6} \quad \underline{\text{(太郎と花子は日本人である) の否定}} \\ &= \text{「(太郎は日本人である) かつ (花子は日本人である)」 の否定} \\ &= (\text{太郎は日本人でない}) \text{ または } (\text{花子は日本人でない}) \\ &= \underline{\text{太郎と花子の少なくとも一方は日本人ではない}}\end{aligned}$$

6. $A \Rightarrow B$ (A と B の条件文^{じょうけんぶん})

- (1) 「 A ならば B 」という命題を「 $A \Rightarrow B$ 」で表す。これを A と B の条件文といい、 A を仮定、 B を結論と呼ぶ。
- (2) $A \Rightarrow B$ は、「 A が成立するとき B も成立する」ことを主張する命題である。
- (3) ($A \Rightarrow B$)の真理表

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

※ ($A \Rightarrow B$)の真偽

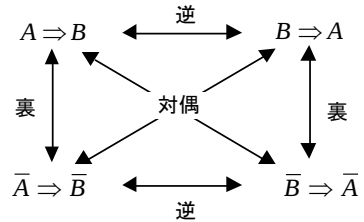
A が真で B が偽のときは偽、それ以外の場合は真

- (4) 真理表から、 $A \Rightarrow B$ が真であることを示すには、「 A が真のとき B も真」だけを
示せばよい。

7. 命題の逆・裏・対偶

- (1) 命題 $A \Rightarrow B$ に対して、その「逆^{ぎやく}」「裏^{うら}」「対偶^{たいぐう}」と呼ばれる命題を考える。

①	命題	$A \Rightarrow B$	A ならば B である
②	逆	$B \Rightarrow A$	B ならば A である
③	裏	$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$	A でなければ B でない
④	対偶	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	B でなければ A でない



- (2) 次が成立：
 - ・ 命題とその逆は、互いに逆
 - ・ 命題のその裏は、互いに裏
 - ・ 命題とその対偶は、互いに対偶
 - ・ 逆と裏は、互いに対偶
- (3) 次は重要である。
 - ・ 命題とその対偶の真偽は常に一致する。
 - ・ 命題が真であっても、その逆や裏は真とは限らない。
 - ・ 命題の逆と裏は、互いに対偶の関係にあり、それらの真偽は一致する。
- (4) 例：

命題：犬ならば、動物である
 逆：動物ならば、犬である
 裏：犬でないならば、動物でない
 対偶：動物でないならば、犬でない
- (5) 例：

命題：宿題を提出しなかった生徒は、テレビを見ていたかゲームをしていた。

逆：テレビを見ていたかゲームをしていた生徒は、宿題を提出しなかった。

裏：宿題を提出した生徒は、テレビも見ずゲームもしていなかった。

対偶：テレビも見ずゲームもしなかった生徒は、宿題を提出した。

8. 必要条件・十分条件・同値

(1) 条件文 $A \Rightarrow B$ が真であるとき、

A は B であるための十分条件、 B は A であるための必要条件

という。これらは、次の形で覚えておくとい。

(十分条件) $\Rightarrow$ (必要条件)

(2) $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ がともに真であるとき、

A は B であるための必要十分条件、 B は A であるための必要十分条件

といい、 $A \Leftrightarrow B$ で表す。また、このとき、 A と B は同値であるともいう。

(3) A と B が同値であれば、 A と B の真偽は常に一致する。

(4) 例：

① $x = 2$ は、 $(x - 2)(x + 3) = 0$ であるための何条件か。

・「 $x = 2 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0$ 」は真なので、十分条件。その逆は偽。

② $a \geq 1$ は、 $a > 1$ であるための何条件か。

・ $a \geq 1$ は、「 $a > 1$ または $a = 1$ 」という意味。

・「 $a \geq 1 \cdot a > 1$ 」は真なので、必要条件。その逆は偽。

③ $\triangle ABC$ が正三角形であることは、 $\triangle ABC$ が 2 等辺三角形であるための何条件か。

・「正三角形 $\Rightarrow$ 2 等辺三角形」は真なので、十分条件。その逆は偽。

④ $ab = 0$ は、 a, b のうち少なくとも 1 つは 0 であるための何条件か。

・「 $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ または $b = 0$ 」は真、「 $ab = 0 \cdot a = 0$ または $b = 0$ 」も真なので、必要十分条件

9. 正しい推論

(1) 推論とは、いくつかの仮定から、1 つの結論を導き出すことである。

(2) 例えば、 A, B, C を仮定、 D を結論とすれば、推論は次の形になる。

(推論) (A である) かつ (B である) かつ (C である) ならば、 D である

このような推論は、次のように簡単に表す。

(推論) A, B, C ゆえに D

(推論) $(A \text{ かつ } B \text{ かつ } C) \Rightarrow D$

(3) 推論において、「仮定がすべて真ならば、必ず結論も真である」とき、「推論は正しい」
「推論は妥当である」という。

(4) 次の2つは同じことを意味する。

- 推論「 A, B, C ゆえに D 」は、正しい
- 条件文「 $(A \text{ かつ } B \text{ かつ } C) \Rightarrow D$ 」は真である

(5) 以下の推論はみな正しい。

① 推論： $A \Rightarrow (A \text{ または } B)$

(意味) A ならば、 $(A \text{ または } B)$ である。

(例) 学生ならば、学生または未成年である。

② 推論： $(A \text{ かつ } B) \Rightarrow A$

(意味) $A \text{ かつ } B$ ならば、 A である。

(例) 学生かつ未成年ならば、学生である。

③ 推論： $A \text{ または } B, \bar{A} \text{ ゆえに } B$

(意味) $A \text{ または } B$ であり、 A でない。ゆえに、 B である。

(例) 学生または未成年であり、学生でない。ゆえに、未成年である。

④ 推論： $A \Rightarrow B, \bar{B} \text{ ゆえに } \bar{A}$

(意味) A ならば B であり、 B でない。ゆえに、 A でない。

(例) 花子が出席すれば、太郎も出席する。太郎は出席しない。ゆえに、花子は出席しない。

⑤ 推論： $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \text{ ゆえに } A \Rightarrow C$

(意味) A ならば B であり、 B ならば C である。ゆえに、 A ならば C である。

(例) 明日雨ならば、花見は中止である。花見が中止ならば、家で勉強する。ゆえに、明日雨ならば、家で勉強する。

(6) 以下の推論は、正しくない。

① 推論： $A \Rightarrow (A \text{ かつ } B)$

(例) 学生ならば、学生かつ未成年である。

② 推論： $(A \text{ または } B) \Rightarrow A$

(例) 学生または未成年ならば、学生である。

14. 集合

1. 集合の定義

- ① 範囲の明確な「ものの集まり」を集合という。
- ② 集合は、 $A, B, C, \dots$ などの文字で表す。
- ③ 集合 A を構成する一つ一つの「もの」を、 A の要素 (element) という。
- ④ a が集合 A の要素であることを、記号で

$$a \in A$$

と書く。このことをまた、 a が A に属する、 a は A に含まれる、 A は a を含む、などという。

- ⑤ a が集合 A の要素でないことを、記号で

$$a \notin A$$

と書く。これは、 $a \in A$ の否定である。

- ⑥ 無限に多くの要素をもつ集合を「無限集合」、有限個の要素しかもたない集合を「有限集合」という。

2. 集合の表し方

- ① 集合 A の外延的記法 (要素を具体的に書き並べて集合を表す方法)

$$A = \{a, b, c, \dots\} \quad (a, b, c, \dots \text{ は } A \text{ の要素, 要素の順番は無関係})$$

(例) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{3, 2, 1, 5, 4\}$ (5つの要素から集合)

(例) $A = \{p\}$ (1つの要素 p から集合)

- ② 集合 A の内包的記法 (要素に関する条件を与えて表す方法)

$$A = \{x \mid C\} \quad (\text{条件 } C \text{ を満たす要素 } x \text{ 全体の集まり})$$

(例) $A = \{x \mid (x-1)(x+1)=0\}$ ($A = \{1, -1\}$ と同じ)

(例) $A = \{x \mid x^2=4, x>0\}$ ($A = \{2\}$ と同じ)

- ③ 要素を1つも持たない集まりも集合と考え、それを空集合と呼ぶ。空集合は、 ϕ (ファイ) という記号で表す。

(例) $A = \{x \mid x^2+1=0, x>0\} = \phi$

3. 部分集合

- ① 2つの集合 A, B について、 A の要素が常に B に含まれるとき、 A は B の部分集合であるといい、 $A \subseteq B$ で表す。

- ② 空集合 ϕ は、すべての集合の部分集合であると約束する。

$$\phi \subseteq A \quad (A \text{ は任意の集合})$$

- ③ 集合において、含まれる・含まれない、という関係を「集合の包含関係」という。次が成り立つ。(「 $\Rightarrow$ 」は「ならば」と読む)

- ・ $A \subseteq A$
- ・ $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$
- ・ $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

4. 基本的な集合演算

- ① A と B の和集合 $A \cup B$

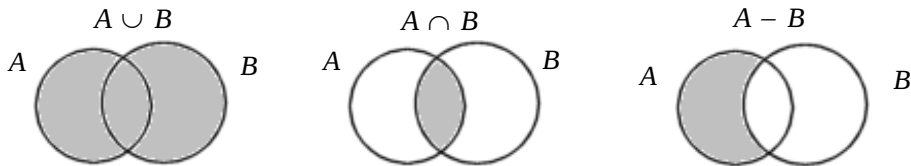
$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \}$$

- ② A と B の共通部分（積集合） $A \cap B$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \}$$

- ③ A と B の差集合 $A - B$

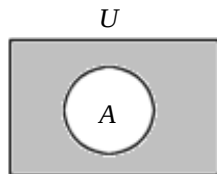
$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \}$$



(注) 上の図をベン図という。ベン図とは、複数の集合の関係や集合の範囲を、主に円を用いて図式化したものである。

5. 全体集合と補集合

- ① 具体的に集合を考察するとき、1つの集合 U とその部分集合 $A, B, C, \dots$ のみを考察の対象にすることがある。このよう場合、その定まった集合 U のことを、その考察における「全体集合」という。



- ② A の (U における) 補集合 $\bar{A}$

$$\bar{A} = U - A = \{ x \mid x \in U \text{ かつ } x \notin A \} \quad (A \text{ に含まれない } U \text{ の要素の集まり})$$

- ③ $\bar{\bar{A}} = A, A \cup \bar{A} = U, A \cap \bar{A} = \phi$ (空集合)

- ④ $A - B = A \cap \bar{B}$

- ⑤ ド・モルガンの法則 (重要)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

6. 集合の要素の個数

有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表す。空集合 ϕ には要素がないので、 $n(\phi) = 0$ である。

$$(公式 1) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(公式 2) \quad n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

7. カルノー図

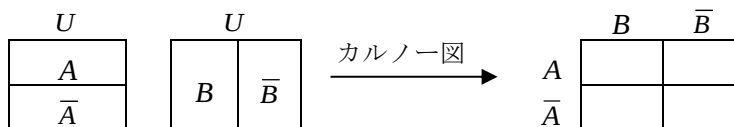
① 集合の要素やその個数を求めるには、ベン図のほかにカルノー図も有効である。2 変数の問題の場合は、カルノー図は有効である。

② 例えば、全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 A, B について、

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 9\}, \quad A \cap B = \{2\}, \quad \bar{A} \cap B = \{4, 6, 8\}$$

であるとき、 A を求めよという問題では、基本となる集合は A, B の 2 つである。 A と B を 2 変数という。 A, B, C の 3 つの集合が登場すれば、3 変数である。2 変数の場合は、以下のようにカルノー図ですぐに解くことができる。

③ U を A で横に分割、 B で縦に分割したものが、カルノー図である。



④ ②の仮定から、カルノー図の 4 つの領域に含まれる要素がすぐにわかり、

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

	B	$\bar{B}$
A	2	3, 5, 7
$\bar{A}$	4, 6, 8	1, 9

⑤ 一般に、4 つの領域の集合は次のようになる。

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$

8. 集合の直積

① 集合 A, B について、 A の要素 a と B の要素 b との組 (a, b) 全体のつくる集合を、 A と B の直積といい、 $A \times B$ で表す。

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

② 組 (a, b) において、 a を第 1 成分、 b を第 2 成分という。

③ $A \times B$ の 2 つの要素 $(a, b), (c, d)$ について、 $(a, b) = (c, d)$ とは

$$a = c \text{ かつ } b = d$$

が成立することである。

- ④ $A = \{1, 2\}$, $B = \{p, q\}$ のとき, $A \times B$ は, 次の 4 つの要素からなる集合である。

$$(1, p), (1, q), (2, p), (2, q)$$

- ⑤ $A = \{1, 2\}$ のとき, $A \times A$ は, 次の 4 つの要素からなる集合である。

$$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$$

- ⑥ 同様に, 3 つの集合 A, B, C に対して, 直積 $A \times B \times C$ を定義する。

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

ここで, 組 (a, b, c) において, a を第 1 成分, b を第 2 成分, c を第 3 成分という。

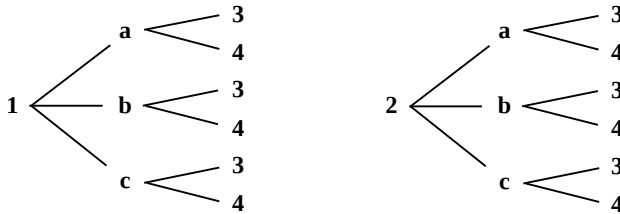
- ⑦ 例えば,

$$A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}, C = \{3, 4\}$$

とすると, 直積 $A \times B \times C$ は, 次の 12 個の組からなる集合である。

$$\begin{aligned} &(1, a, 3), (1, a, 4), (1, b, 3), (1, b, 4), (1, c, 3), (1, c, 4) \\ &(2, a, 3), (2, a, 4), (2, b, 3), (2, b, 4), (2, c, 3), (2, c, 4) \end{aligned}$$

このことは, 次の樹形図からでも確認できる。(樹形図とは, 下図のように, 順に次々に分岐点で枝分かれするような図であり, 順列や組合せの数, 場合の数などを求める際によく用いる。)



- ⑧ 上の樹形図から, $A \times B \times C$ の要素の個数 N を求めると

- (a) 左の樹形図において, 3 と 4 が 6 個ある。右の樹形図も同様。従って,

$$N = 6 + 6 = 2 \times 6$$

- (b) 左の樹形図において, 3 と 4 の組が 3 組あるので,

$$6 = 2 + 2 + 2 = 3 \times 2$$

- (c) 従って,

$$N = 2 \times 6 = 2 \times 3 \times 2 = n(A) \times n(B) \times n(C)$$

- ⑨ (直積の要素の個数) 有限集合 A, B, C について, 次が成り立つ。

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

$$n(A \times B \times C) = n(A) \times n(B) \times n(C)$$

15. 場合の数

1. 場合の数

ある事柄の起こり方が全部で何通りあるのか、言い換えれば、起こり方の総数がいくつなのかを求めるには、「^{ことがら}場合の数」を求めればよい。実際には、起こり方という表現以外にも、^{ばあい}選び方、^{かず}並べ方、塗り方、出方、引き方、入れ方、分け方 … などいろいろあるが、これらは「～となる場合」がいくつなのか、何通りあるのかを調べることになる。

場合の数を求めるには、もれなく重複なく場合を数えることが重要になるが、最も重要な法則は積の法則である。

2. 和の法則

● 和の法則

2つの事柄 A , B は、同時に起こらないとする。このとき、 A の起こり方が m 通り、 B の起こり方が n 通りあるならば、 A または B の起こる場合の数は $m + n$ (通り)

■ 例題

1個のサイコロを投げたとき、偶数の目または5の目が出る場合の数はいくらか。
(説明)

1個のサイコロを投げたとき

A … 偶数の目が出るという事柄

B … 5の目が出るという事柄

とする。

偶数の目は2, 4, 6であるから、 A が起こる場合は3通り。 B が起こる場合は1通りである。さらに、5は偶数ではないので、 A と B は同時に起こらない。

よって、 A または B が起こる場合の数(すなわち、偶数の目または5の目が出る場合の数)は、 $3 + 1 = 4$ (通り)。

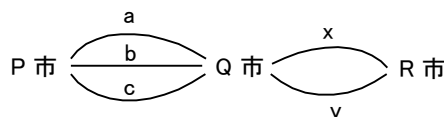
3. 積の法則

● 積の法則

2つの事柄 A , B があって、 A の起こり方が m 通り、そのおのおのについて B の起こり方が n 通りあるならば、 A と B がともに起こる場合の数は $m \times n$ (通り)

■ 例題 1

P市からQ市へ行くのに a , b , c の3つの道があり、



Q 市から R 市へ行くのに x, y の 2 つの道がある。

このとき、これらの道を通して P 市から R 市へ行く方法は何通りあるか。

(説明)

P 市から Q 市への道は 3 通り、そのおのおのについて、Q 市から R 市へ行く道は 2 通りあるので、P 市から Q 市を通して R 市へ行く方法は、 $3 \times 2 = 6$ (通り) である。

これは組の個数である。例えば、道 a と道 x を選んだ場合、これを組 (a, x) で表すと、

1 つの組 $(\bigcirc, \triangle) =$ P 市から Q 市を通して R 市へ行く 1 つの方法

従って、求める選び方の数は、次の組の個数のことになる。

$(a, x), (a, y)$

$(b, x), (b, y)$

$(c, x), (c, y)$



右の樹形図から組の個数を求めれば、 $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$

■ 例題 2

3 台の車があり、それぞれの車に 2 名の人が乗車している。3 台の車に乗車している人は全部で何人か。

(説明)

当然、合計人数は $2 + 2 + 2 = 6$ (人) だが、

車が 3 台あり、そのおのおのについて 2 名の人が乗車している

ので、積の法則が使え、合計人数は次の計算でも求めることができる。

$$(\text{車の台数}) \times (1 \text{ 台の車の乗車人数}) = 3 \times 2 = 6 \quad \cdots \text{①}$$

車を A, B, C , A に乗車している 2 人を a_1, a_2 , B に乗車している 2 人を b_1, b_2 , C に乗車している 2 人を c_1, c_2 とすると、①は次の組の個数である。

$(A, a_1), (A, a_2), (B, b_1), (B, b_2), (C, c_1), (C, c_2)$

■ 例題 3

男子 10 人、女子 20 人の中から、男女 1 人ずつ計 2 人の代表を選ぶ方法は何通りあるか。

(説明)

選んだ 2 人を組 (男子, 女子) で表せば、求める総数はこの組の個数のことである。そこで、まず男子 1 人を選び、次に女子 1 人を選ぶと考える。もちろん、最初に女子 1 人を選んで、次に男子 1 人を選んでもよい。

男子 10 人から 1 人を選ぶ方法は 10 通り、そのおのおのについて、女子 20 人から 1 人を選ぶ方法は 20 通りである。従って、積の法則により、求める選び方は

$$10 \times 20 = 200 \text{ (通り) (答)}$$

積の法則は、3つ以上の事柄についても成り立つ。

● 積の法則 (3つの事柄)

3つの事柄 A, B, C があって、 A の起こり方は l 通り、そのおのおのについて B の起こり方が m 通り、さらに、そのおのおのについて C の起こり方が n 通りあるならば、 A と B と C の3つが同時に起こる場合の数は $l \times m \times n$ (通り)

■ 例題4

数学・理科・英語の参考書を買に行ったところ、数学は5種類、理科は4種類、英語は7種類あった。これらのうちから、それぞれ1種類ずつ選ぶとすると、何通りの選び方があるか。

(説明)

選び方の総数は、組(数学、理科、英語)の個数である。ここで、数学の参考書の選び方は5通り、そのおのおのについて理科の参考書の選び方は4通り、さらに、そのおのおのについて英語の参考書の選び方は7通りであるので、積の法則により、求める選び方の数は、

$$5 \times 4 \times 7 = 140 \text{ (通り) (答)}$$

■ 例題5

- (1) 2桁の自然数の個数を求めよ。
- (2) 3桁の自然数で偶数であるものの個数を求めよ。

(説明)

- (1) 10の位の数字は1~9の9通り、そのおのおのについて1の位の数字は0~9の10通りあるので、積の法則により、

$$9 \times 10 = 90 \text{ (個) (答)}$$

- (2) 偶数は、1の位が0, 2, 4, 6, 8の自然数である。従って、100の位の数字は1~9の9通り、そのおのおのについて10の位の数字は0~9の10通り、さらに、そのおのおのについて1の位は5通りあるので、積の法則により、

$$9 \times 10 \times 5 = 450 \text{ (個) (答)}$$

4. 起こり方が無関係な場合

積の法則により、次が成り立つ。

2つの事柄 A, B があって、 A の起こり方は m 通り、 B の起こり方は n 通りであり、 A と B の起こり方が無関係であるとき、 A と B がともに起こる場合の数は $m \times n$ (通り)

無関係とは、起こり方について互いに相手に影響を与えないということである。つまり、 A についてどのような場合が起こったとしても B の起こり方は同じ n 通りの場合であり、 B についてどのような場合が起こったとしても A の起こり方は同じ m 通りの場合であるという意味である。この場合、積の法則の条件をみたすので、上記が成立する。

■ 例題 1

大小 2 個のサイコロを同時に投げたとき、2 個のサイコロの目の出方は何通りあるか。
(説明)

大きいサイコロの目を x 、小さいサイコロの目を y とすると、求める総数は組 (x, y) の個数である。ここで、 x のとり得る値は 6 通り、 y のとり得る値は 6 通りであり、 x と y は互いに影響を与えない無関係な変数なので、組 (x, y) の個数は、 $6 \times 6 = 36$ (個) である。
(x が 1~6 のどのような値をとっても、 y のとり得る値は 1~6 の 6 通りである。)

■ 例題 2

大小 2 個のサイコロを振るとき、目の和が奇数になる場合は何通りあるか。
(解説)

大きいサイコロの目を x 、小さいサイコロの目を y とし、出る目を組 (x, y) で表すと、和 $x + y$ が奇数になるのは、(偶数, 奇数) または (奇数, 偶数) の場合である。

(ア) $(x, y) = (\text{偶数}, \text{奇数})$ の場合

x のとり得る値は 2, 4, 6 の 3 通り、 y のとり得る値は 1, 3, 5 の 3 通りであり、 x と y は無関係な変数なので、(偶数, 奇数) となる場合の数は、 $3 \times 3 = 9$ (通り)。

(イ) $(x, y) = (\text{奇数}, \text{偶数})$ の場合

この場合の数は (ア) と同様に、 $3 \times 3 = 9$ (通り)。

(ア) と (イ) は同時には起こらないので、求める場合の数は $9 + 9 = 18$ (通り) (答)

■ 例題 3

大中小の 3 個のサイコロを投げるとき、それらの目の積が偶数になる場合の数を求めよ。
(解説)

大中小のサイコロの目の出方は互いに無関係なので、3 個のサイコロの目の出方は、

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ (通り)}$$

それらの目の積が奇数になる場合は、3 つの目のすべてが奇数のときだけであるから、その場合の数は

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ (通り)}$$

よって、目の積が偶数になる場合の数は、 $216 - 27 = 189$ (通り) (答)

16. 順列

1. 階乗

● n の階乗 $n!$

(1) (定義) 自然数 n に対して, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$

(2) (約束) $0! = 1$ と定める。

(3) (性質) 自然数 n に対して, $n! = n \times (n-1)!$

自然数 n に対して, 1 から n までの自然数の積を $n!$ で表し, n の階乗^{かいじょう} という。

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

従って,

$$1 \text{ の階乗 } 1! = 1$$

$$2 \text{ の階乗 } 2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3 \text{ の階乗 } 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4 \text{ の階乗 } 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

■ 例 4 本のくじがある。そこからくじを 1 本ずつ引き、全部で 4 本のくじを引くとき、「1 本ずつ引いて 4 本のくじを引く」という引き方は何通りあるか。ただし、引いたくじは元に戻さない。

(説明) 引いたくじは元に戻さないので、元のくじの本数は減っていく。

- ① 1 本目のくじの引き方 … 4 本から 1 本引くので, 4 通り
- ② 2 本目のくじの引き方 … 残り 3 本から 1 本引くので, 3 通り
- ③ 3 本目のくじの引き方 … 残り 2 本から 1 本引くので, 2 通り
- ④ 4 本目のくじの引き方 … 残り 1 本から 1 本引くので, 1 通り

よって, 求める引き方は, 積の法則により

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! \text{ (通り)}$$

2. 順列

いくつかのものを, 順序を考えて 1 列に並べたものを, それらの順列という。順列では, 異なる順番で並んでいる 1 列は異なる順列と見なす。順列の総数は, 並べ方の総数に等しい。

例えば, 2 つの文字 a, b の順列は

$a b$

$b a$

であり, 2 つある。従って, a, b の並べ方は 2 通りある。

■ 例 1 3つの文字 a, b, c の順列をすべて求めよ。

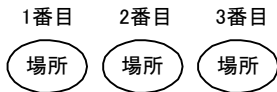
(説明) 求める順列は次の通りであり、全部で 6 つある。

abc, acb, bac, bca, cab, cba

■ 例 2 3つの文字 a, b, c の順列の総数を求めよ。

(説明) 前の例により総数は 6 であるが、この総数は次のように求めることができる。

横に並んだ次の 3 つの場所を考え、そこに、文字 a, b, c を 1 文字ずつ入れれば、それらの順列ができる。



従って、a, b, c の順列の総数とは、3 文字を上記の 3 つの場所に入れる入れ方の総数でもある。この入れ方はいろいろあるが、ここでは

1 番目 → 2 番目 → 3 番目

の順番で、各場所に 1 文字ずつ入れていくとする。

- ① 1 番目 … a, b, c の 1 文字を入れる。どれでもよいので、入れ方は 3 通り。
- ② 2 番目 … 1 番目に 1 文字を入れたので、残りは 2 文字である。残り 2 文字から 1 文字を選んで 2 番目に入れるので、その入れ方は 2 通り。
- ③ 3 番目 … 最後は、残り 1 文字しかない。この 1 文字を 3 番目に入れるしかないので、その入れ方は 1 通り。

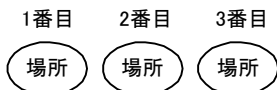
すなわち、1 番目に 1 文字を入れる入れ方は 3 通り、そのおのおのについて 2 番目に 1 文字を入れる入れ方は 2 通り、さらに、そのおのおのについて 3 番目に 1 文字を入れる入れ方は 1 通りであるから、積の法則により、a, b, c を 3 つの場所に入れる入れ方の総数は

$$3 \times 2 \times 1 = 3! \text{ (通り)}$$

従って、a, b, c の順列の総数は $3! = 6$ である。

■ 例 3 5つの文字 a, b, c, d, e から 3 文字をとって作った順列の総数を求めよ。

(説明) 前の例と同様に考えればよい。



- ① 1 番目 … a, b, c, d, e の 1 文字を入れる。どれでもよいので、入れ方は 5 通り。
- ② 2 番目 … 1 番目に 1 文字を入れたので、2 番目に 1 文字を入れる入れ方は 4 通り。
- ③ 3 番目 … 同様に、3 番目に 1 文字を入れる入れ方は 3 通り。

従って、求める順列の総数は

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

3. 順列の総数

● 順列の総数

(1) 異なる n 個から r 個とった順列の総数

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (r \text{ 個の自然数の積}) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

(2) 異なる n 個のものの順列の総数 ${}_n P_n = n!$

(3) ${}_n P_1 = n$

一般に、異なる n 個のものから、異なる r 個 ($1 \leq r \leq n$) をとって 1 列に並べたものを「 n 個のものから r 個とった順列」といい、その順列の総数を ${}_n P_r$ で表す。

${}_n P_r$ は、 n から始まって 1 ずつ減らしたとき、その r 個の自然数の積である。

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n(n-1)(n-2) \cdots \{n-(r-1)\} \quad (r \text{ 個の積}) \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \end{aligned}$$

特に、 $n = r$ ，すなわち、異なる n 個のものの全部をとって並べる順列の総数は

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

また、 $r \leq n$ のとき、 ${}_n P_r \times (n-r)! = n!$ より、

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

順列の問題では、 ${}_n P_r$ の記号よりも、積の法則の考え方が重要である。

■ 例題 1

次の値を求めよ。

$$(1) {}_5 P_1 = 5 \quad (2) {}_5 P_3 \quad (3) {}_8 P_2 \quad (4) {}_6 P_6$$

(解)

$$(1) {}_5 P_1 = 5 \quad (5 \text{ から始まって } 1 \text{ 個の積})$$

$$(2) {}_5 P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \quad (5 \text{ から始まって } 3 \text{ 個の積})$$

$$(3) {}_8 P_2 = 8 \times 7 = 56 \quad (8 \text{ から始まって } 2 \text{ 個の積})$$

$$(5) {}_6 P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \quad (6 \text{ から始まって } 6 \text{ 個の積})$$

■ 例題 2

次のものの総数を求めよ。

- (1) a, b, c, d, e の 5 個の文字から 4 個をとって 1 列に並べる方法。
- (2) 生徒 5 人を 1 列に並べる方法。
- (3) 1 から 7 までの自然数から 4 個をとって 1 列に並べる方法。

(解)

- (1) ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$
- (2) ${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- (3) ${}_7P_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$

4. 同じものを含む順列

● 同じものを含む順列

n 個のもののうちで、 p 個は同じもの、 q 個は同じもの、 r 個は同じもの、……であるとき、これら n 個のものを全部を並べて得られる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

■ 例題 1

a, a, b の文字全部から作られる順列の総数を求めよ。

(説明)

a, a, b の順列の 1 つ、たとえば

$a \ a \ b$

を考えてみる。この順列の中の 2 つの a を互いに入れ替えても、順列に変化はない。しかし、2 つの a に a_1, a_2 と番号をつけて区別すると、最初の順列から 2! 個の順列ができる。2! は a_1, a_2 の順列の総数である。

以上は、 a, a, b の他の順列についても同様であり、まとめると次のようになる。

(A) a, a, b の順列	(B) 2 つの a を区別した場合
① $a \ a \ b$	$a_1 \ a_2 \ b, a_2 \ a_1 \ b \leftarrow 2! \text{ 個の順列}$
② $a \ b \ a$	$a_1 \ b \ a_2, a_2 \ b \ a_1 \leftarrow 2! \text{ 個の順列}$
③ $b \ a \ a$	$b \ a_1 \ a_2, b \ a_2 \ a_1 \leftarrow 2! \text{ 個の順列}$

異なる 3 文字 a_1, a_2, b の順列の総数は 3! であり、これらの順列はすべて表の (B) に登場している。従って、 a, a, b の順列の総数を x とすると、 $x \times 2! = 3!$ が成立し、

$$x = \frac{3!}{2!}$$

■ 例題 2

a, a, a, b, b, c の文字全部から作られる順列の総数を求めよ。

(説明)

a は 3 つ、 b は 2 つあるので、求める総数は

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 60$$

5. 円順列

● 円順列

異なる n 個のものの円順列の総数は $(n - 1)!$

■ 例題 1

3 人の子どもが手をつないで円をつくる時、子どもの並び方は何通りあるか。

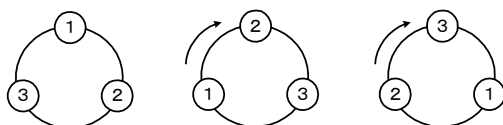
(説明)

いくつかのものを円形に並べた順列を「円順列」という。円順列では、円を回転して並びが一致するものは、同じ円順列になる。

ここでは、3 人の子どもを番号 1, 2, 3 で表すと、通常の順列

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2

はみな異なるが、両端の数字を結んで円順列をつくると、これらは同じものになる。



通常の順列の総数は $3! = 6$ であり、これら 6 つの順列は次の (a)(b) に分類され、(a) と (b) は異なる円順列になる。

(a) 1 2 3, 2 3 1, 3 1 2 ← 回転すると一致

(b) 1 3 2, 3 2 1, 2 1 3 ← 回転すると一致

円順列の総数を求めるには、1 つのものの位置を固定して、他のものの順列を考えればよい。ここでは、1 人の子ども（例えば、番号 1 の子ども）の位置を固定して、他の 2 人の順列を考えればよいので、求める円順列の総数は

$$(3 - 1)! = 2!$$

■ 例題 2

7 人を円卓に並べる方法は何通りあるか。

(説明)

$$(7 - 1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ (通り)}$$

■ 例題 2

両親と子ども 3 人の 5 人家族が、手をつないで輪になると、何通りの輪ができるか。ただし、両親は隣り合うものとする。

(説明)

両親は隣り合うのでまとめて 1 組と考えると、両親 1 組と 3 人の子どもでつくる円順列の総数は、 $(4 - 1)!$ 通り。このおのおのについて、両親の並び方は $2!$ 通りであるから、積の法則により、

$$(4 - 1)! \times 2! = 12 \text{ (通り) (答)}$$

6. 重複順列

● 重複順列

異なる n 個のものの中から、重複を許して r 個とって並べたものを、 n 個から r 個とった重複順列という。この重複順列の総数は n^r である。

ここでは、 $n < r$ であってもよい。

■ 例題 1

3 個の数字 1, 2, 3 から、同じ数字を繰り返し使うことを許して 2 桁の整数を作るとき、全部で何個の整数ができるか。

(説明)

上記の重複順列の総数は、積の法則を使うだけであるから、覚える必要はない。

ここでは、10 の位は 1, 2, 3 の 3 通り、そのおのおのについて 1 の位は 1, 2, 3 の 3 通りだから、求める個数は

$$3 \times 3 = 3^2 = 9 \text{ (個) (答)}$$

■ 例題 2

8 人を A または B の 2 つの部屋に入れるとき、入れ方は何通りあるか。ただし、1 つの部屋には少なくとも 1 人は入れるものとする。

(説明)

1 人につき A か B の 2 通りの入れ方があるから、積の法則により、8 人の入れ方は 2^8 通り。そのうち、全員を A に入れる方法は 1 通り、全員を B に入れる方法は 1 通りだから、1 つの部屋が 0 人になる場合は 2 通りある。よって、求める入れ方の総数は

$$2^8 - 2 = 256 - 2 = 254 \text{ (通り) (答)}$$

17. 組合せ

1. 組合せ

くみあわ

組合せとは、順序を考えないものの集まりのことである。2文字 a, b の順列は、 ab, ba の2つだが、組み合わせは、それらの集まり $\{a, b\}$ を意味する。従って、2文字 a, b の組み合わせは、1つしかない。

■ 例

- (1) 3文字 a, b, c から2文字をとって作った組合せの総数を求めよ。
- (2) 3文字 a, b, c から2文字を選ぶ選び方の総数を求めよ。

(説明)

- (1) 3文字 a, b, c から2文字をとる方法は、次の3通りである。また、その2文字の組合せは、次のようになる。

- ① a, b をとる → a, b の組合せは $\{a, b\}$
- ② a, c をとる → a, c の組合せは $\{a, c\}$
- ③ b, c をとる → b, c の組合せは $\{b, c\}$

よって、求める組合せの総数は、3通りである。

- (2) 2文字を選ぶ場合は、(1)において、「①の場合」「②の場合」「③の場合」であるから、その場合の数は3通りである。よって、求める選び方の総数は、3通りである。

この例で分かるように、2文字を選ぶ選び方の総数とは、2文字をとって作った組合せの総数のことである。

2. 組合せの総数

● 組合せの総数

- (1) 異なる n 個のものから r 個とった組合せの総数

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- (2) 異なる n 個のものから n 個とった組合せの総数 ${}_nC_n = 1$

- (3) 異なる n 個のものから1個とった組合せの総数 ${}_nC_1 = n$

- (4) (約束) ${}_nC_0 = 1$

- (5) (公式) ${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad (0 \leq r \leq n)$

異なる n 個のものから、異なる r 個 ($1 \leq r \leq n$) のものをとって作った組合せを、「 n 個のものから r 個とった組合せ」といい、その組合せの総数を ${}_nC_r$ で表す。

一方，異なる n 個のものから，異なる r 個 ($1 \leq r \leq n$) のものをもって 1 列に並べたものを「 n 個のものから r 個とった順列」といい，その順列の総数を ${}_nP_r$ で表した。

順列では，異なる n 個のものから r 個をとったとき，そこで終了せず，さらに， r 個のものを並べて順列を考える。

${}_nC_r$ に関する上記の等式は， ${}_nP_r$ の定義の文章をよく読めば，一瞬にしてわかる。その文章は，次の 2 つに分解できるからである。

◆ ${}_nP_r$ の定義の文章

- ① 異なる n 個のものから r 個をとる。(この取り出し方が ${}_nC_r$ 通り)
- ② とり出した r 個のものを並べる。(①のおののについて， r 個の並べ方は $r!$ 通り)

従って，異なる n 個のものから r 個をとる方法は ${}_nC_r$ 通りであり，そのおのおのについて，とり出した r 個の並べ方は $r!$ 通りであるから，積の法則により，

$${}_nC_r \times r! = {}nP_r$$

よって，

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$\text{また， } {}nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ であつたから， } {}nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

■ 例 1 10 人の生徒から 3 人を選ぶ方法は何通りあるか。

(説明)

10 人から 3 人を選んで作った組合せの総数であるから，

$${}_{10}C_3 = \frac{{}_{10}P_3}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times 3 \times 4 = 120 \text{ (通り)}$$

■ 例 2

1 つの部屋 X があり，男子が 10 人いる。このとき，10 人のうち 8 人だけを部屋 X に入れる方法は何通りあるか。

(説明)

10 人から 8 人を選べばよいので，その方法は ${}_{10}C_8$ 通り。よって，答は ${}_{10}C_8$ 通り。

	8人		2人
部屋 X	男男男男男男男男		男男

しかし，8 人を選ぶということは，部屋 X に入れない 2 人を選ぶことと同じであるから，次が成り立つ。

$${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2$$

両者を実際に計算してみよう。

$${}_{10}C_8 = \frac{{}_{10}P_8}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

$${}_{10}C_2 = \frac{{}_{10}P_2}{2!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \quad (\text{こちらの方が楽})$$

選ぶということは、選ばれないものを選ぶ、と本質的に同じである。

n 個のものから r 個のものを選ぶ

= n 個のものから $(n-r)$ 個の選ばれないものを選ぶ

従って、次の公式が成立する。

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r} \quad (0 \leq r \leq n)$$

${}_{10}C_8$ などは、 ${}_{10}C_{10-8} = {}_{10}C_2$ で計算すればよい。

■ 例 3

次の値を求めよ。

(1) ${}_5C_1$ (2) ${}_6C_3$ (3) ${}_9C_4$ (4) ${}_5C_5$ (5) ${}_{10}C_3$

(6) ${}_9C_8$ (7) ${}_7C_4$ (8) ${}_{15}C_{13}$

(解)

(1) ${}_5C_1 = 5$ (2) ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ (3) ${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$

(4) ${}_5C_5 = 1$ (5) ${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ (6) ${}_9C_8 = {}_9C_{9-8} = {}_9C_1 = 9$

(7) ${}_7C_4 = {}_7C_{7-4} = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

(8) ${}_{15}C_{13} = {}_{15}C_{15-13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$

■ 例 4

男子 3 人，女子 3 人について，次のような方法は何通りあるか。

(1) 6 人から 4 人を選ぶ方法

(2) 男子 2 人，女子 2 人を選ぶ方法

(解)

(1) 6 人から 4 人を選ぶので，

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

(2) 最初に男子を 2 人，次に女子を 2 人選ぶ，と考えればよい。積の法則を使う。

男子 3 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_3C_2$ 通り，そのおのおのについて女子 3 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_3C_2$ 通り。

従って、男子 2 人、女子 2 人を選ぶ方法は、

$${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9 \text{ (通り) (答)}$$

■ 例 5

男子 4 人、女子 5 人の計 9 人について、次のような方法は何通りあるか。

- (1) 9 人から 3 人選ぶ方法
- (2) 男子 2 人、女子 3 人を選ぶ方法
- (3) 男子 1 人、女子 2 人を選んで 1 列に並べる方法

(解)

$$(1) \quad {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り) (答)}$$

(2) 男子 4 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_4C_2$ 通り、女子 5 人から 3 人を選ぶ方法は ${}_5C_3$ 通り。

$$\text{よって、} {}_4C_2 \times {}_5C_3 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \times 10 = 60 \text{ (通り) (答)}$$

(3) 男子 4 人から 1 人を選ぶ方法は 4 通り、女子 5 人から 2 人を選ぶ方法は ${}_5C_2$ 通り。

よって、男子 1 人、女子 2 人を選ぶ方法は、 $4 \times {}_5C_2$ 通り。

選んだ 3 人を 1 列に並べる方法は 3! 通りあるから、求める方法は

$$4 \times {}_5C_2 \times 3! = 4 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 6 = 240 \text{ (通り) (答)}$$

3. 組分けの問題

■ 例 1 (分け方)

4 人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 3 人、1 人の 2 つの組に分ける。
- (2) 2 人、2 人の 2 つの組に分ける。
- (3) 2 人が A クラス、残り 2 人が B クラスに入るように分ける。

(説明)

組分けのポイントは次である。

- 同数でない 2 組は、区別できる。(人数によって区別できる。)
- 同数の 2 組は、区別されない。
- 同数の 2 組であっても、区別する情報があれば、区別できる。

区別できない組の場合は、最初に名前を付けて区別する。これが解法の原則である。

以下は解答ではなく、説明である。4 人の生徒を、a, b, c, d とする。

- (1) 4 人から 3 人を選んで 3 人の組をつくると、残りの組は自動的に決まる。2 組は同数で

ないので、区別できる。従って、求める数は、 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ （通り）である。

実際、2組に分けると、次のようになる。

- ① {a, b, c}, {d}
- ② {a, b, d}, {c}
- ③ {a, c, d}, {b}
- ④ {b, c, d}, {a}

(2) (1)と同様に考えて、求める数は ${}_4C_2 = 6$ （通り）とすると、誤りである。この 6 通りは、次の①～⑥の分け方の総数であるが、2組は区別されないので、①と②、③と④、⑤と⑥は、それぞれ同じ分け方になる。

- ① {a, b}, {c, d}
- ② {c, d}, {a, b}
- ③ {a, c}, {b, d}
- ④ {b, d}, {a, c}
- ⑤ {a, d}, {b, c}
- ⑥ {b, c}, {a, d}

正解は、①③⑤の 3 通りである。

解法としては、まず 2組に名前を付けて区別する。一方を A、他方を B とする。このとき、A、B の 2組に分ける方法は、上記のように ${}_4C_2 = 6$ （通り）である。

次に、A、B の区別をなくすと、 ${}_4C_2$ 通りのうち、同じ分け方が 2!通りずつ出てくるので、求める分け方は

$$\frac{{}_4C_2}{2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{（通り）}$$

2! は、A、B の順列の総数である。

これは、次のように考えてもよい。2組を区別すれば、①から 2!通りの分け方がつくられる。③と⑤についても同様である。

従って、2組を区別しない場合の分け方の数を x とすると

$$x \times 2! = 2 \text{組を区別した場合の分け方の数} = {}_4C_2 \quad \therefore x = \frac{{}_4C_2}{2!}$$

(3) A クラスと B クラスは、A と B で区別できるので、 ${}_4C_2 = 6$ （通り）

■ 例 2 (分け方)

8 人の生徒を次のように分ける方法は何通りあるか。

- (1) 5 人, 3 人の 2 つの組に分ける。
- (2) 4 人, 4 人の 2 つの組に分ける。
- (3) 4 人, 3 人, 1 人の 3 つの組に分ける。
- (4) 3 人, 3 人, 2 人の 3 つの組に分ける。
- (5) 2 人ずつ 4 つの組に分ける。

(解)

- (1) (2 組は区別できる) 8 人から 3 人を選べば 2 組になるので,

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

- (2) (2 組は区別できない) 2 組を区別して A, B とすると, 2 組に分ける方法は ${}_8C_4$ 通り。

A, B の順列の個数は $2!$ であるから, A, B の区別をなくすと, 求める数は

$$\frac{{}_8C_4}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2} = 35 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

- (3) (3 組は区別できる) 8 人から 1 人選び, 残り 7 人から 3 人を選べば 3 組になるので,

$$8 \times {}_7C_3 = 8 \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 280 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

- (4) (3 人と 3 人の 2 組は区別できない) 3 人, 3 人, 2 人の組をそれぞれ A, B, C とすると, この 3 組に分ける方法は, ${}_8C_2 \times {}_6C_3$ 通り。A と B の区別をなくすと, 同じものが $2!$ 通りずつ出てくるので, 求める数は

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_3}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{2} = 280 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

- (5) (4 組は区別できない) 4 つの組を A, B, C, D として区別すると, 4 組に分ける方法は ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2$ 通り。A, B, C, D の区別をなくすと, 同じものが $4!$ 通りずつ出てくるので, 求める数は

$$\frac{{}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2}{4!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 105 \quad (\text{通り}) \quad (\text{答})$$

■ 例 3 (分け方)

6 冊の異なる本を次のように分ける方法は, 何通りあるか。

- (1) 2 冊ずつ 3 人の子どもに分け与える。
- (2) 2 冊ずつに分けて, 3 つの組にする。

(解)

- (1) 3 人の子どもを A, B, C とし, A, B, C の順番に 2 冊ずつ分け与えると考えて

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} = 90 \text{ (通り) (答)}$$

- (2) 3組を区別して、それらを A, B, C とすると、3組に分ける方法は、(1)より、90通り。
A, B, C の区別をなくすと、90通りのうち、同じものが3!ずつ出てくるので、求める分け方の数は

$$\frac{90}{3!} = \frac{90}{6} = 15 \text{ (通り) (答)}$$

18. 確率

以下では、基本事項だけを説明する。高校 1 年生の数学 A の内容である。

1. 事象と集合（まとめ）

1. 試行

しこう

試行：繰り返し行うことができ、結果が偶然であるような実験や観測のこと。

- (例) ① サイコロを投げる（出る目が結果）
 ② コインを投げる（表が出る、裏が出るが結果）
 ③ トランプから 1 枚のカードを抜き出す（トランプのマークが結果）

2. 事象

じしょう

事象：試行の結果として起こる事柄

(例) 1 個のサイコロを投げて、「1 の目が出る」「偶数の目が出る」などは事象である。

3. 事象の表し方

事象は集合で表す。

(例) サイコロ投げにおいて、「偶数の目が出る」という事象 A は、 $A = \{2, 4, 6\}$ で表す。
 「1 の目が出る」という事象 B は、 $B = \{1\}$ で表す。

4. 事象が起こるとは

「事象 A が起こる」とは、試行の結果が A に含まれることである。「事象 A が起こる場合」とは、 A の要素のことである。

(例) サイコロ投げにおいて、「偶数の目が出る」という事象は $A = \{2, 4, 6\}$ である。事象 A が起こるとは、試行の結果（出た目の数）が A に含まれること、すなわち、出た目の数が 2, 4, 6 のいずれかになることである。また、事象 A が起こる場合とは、 A の要素 2, 4, 6 のことである。よって、 A が起こる場合の数は 3 である。

5. 根元事象

こんげん

根元事象：ただ 1 つの要素からなる事象、すなわち、それ以上細かく分割できない事象のこと。

(例) 1 個のサイコロを投げて、「1 の目が出る」「2 の目が出る」「3 の目が出る」「4 の目が出る」「5 の目が出る」「6 の目が出る」という事象は、みな根元事象である。

それに対して、「偶数の目が出る」という事象は、2 の目と 4 の目が出る事象と、6 の目が出る事象の 2 つの事象に分割できるので、根元事象ではない。

6. 標本空間

標本空間：試行において、起こりうる場合全体の集合のこと。標本空間は、一般に U で表す。事象とは、標本空間 U の部分集合のことである。

(例) 1 個のサイコロを投げたとき、標本空間は

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

であり、根元事象は次の 6 つの集合である。

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

U の部分集合

$$A = \{1, 3, 5\}$$

は、「奇数の目が出る事象」である。

7. 全事象

全事象：標本空間 U を全事象という。標本空間 U も 1 つの事象であり、試行の個々の結果は必ず U に含まれる。従って、全事象は必ず起こる事象である。

(例) 1 個のサイコロを投げたとき、標本空間は

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

であり、この U が全事象である。 U は「1 から 6 までのいずれかの目が出る」という事象であり、必ず起こる事象である。実際、出る目の数は、必ず U に含まれる。

8. 空事象

空事象：空集合 ϕ を空事象という。空集合 ϕ は標本空間 U の部分集合であるから、1 つの事象である。試行の個々の結果は空集合 ϕ には含まれないので、空事象は決して起こらない事象である。

(例) 1 個のサイコロを投げたとき、「7 以上の目が出る」という事象を A とすると、7 以上の目はないので、

$$A = \phi \text{ (空集合)}$$

である。よって、 A は空事象である。

9. 和事象と積事象

和事象：2 つの事象 A, B に対して、和集合 $A \cup B$ を「 A と B の和事象」という。これは、「 A または B が起こる事象」である。

積事象：2 つの事象 A, B に対して、共通部分 $A \cap B$ を「 A と B の積事象」という。これは、「 A と B がともに起こる事象」である。

(例) 1 個のサイコロを投げるとき、「偶数の目が出る」という事象を A 、「3 の倍数の目が出る」という事象を B とすると、

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{3, 6\}$$

A と B の和事象は

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

である。これは、偶数または3の倍数の目が出る事象である。

A と B の積事象は

$$A \cap B = \{6\}$$

である。これは、偶数かつ3の倍数の目が出る事象である。

10. 互いに排反

互いに排反^{はいはん}：2つの事象 A, B に対して、 $A \cap B = \phi$ のとき、「 A と B は互いに排反である」「 A と B は排反事象である」という。これは、 A と B は同時に起こらないという意味である。

(例) 1個のサイコロを投げたとき、「偶数の目が出る」という事象を A 、「奇数の目が出る」という事象を B とすると、 A と B は同時に起こらないので、互いに排反である。

11. 余事象

余事象^よ：事象 A に対して、 A の標本空間 U における補集合 $\bar{A}$ を「 A の余事象」という。余事象 $\bar{A}$ は「 A が起こらない」という事象である。

(例) 1個のサイコロを投げたとき、「偶数の目が出る」という事象を A とすると、 A の余事象 $\bar{A}$ は、「偶数の目が出ない」という事象である。

また、「4以上の目が出る」という事象を A とすると、余事象 $\bar{A}$ は「3以下の目が出る」という事象になる。

2. 確率の定義と基本性質

1. 確率の定義

ある試行について、どの根元事象も同様に確からしいとき、事象 A の起こる確率 $P(A)$ を

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

で定義する。 U は標本空間、 $n(A)$ と $n(U)$ はそれぞれ A と U に含まれる要素の個数である。 $P(A)$ を単に事象 A の確率ともいう。

2. 確率の基本性質

- ① 任意の事象 A について、 $0 \leq P(A) \leq 1$
- ② 全事象 U について、 $P(U) = 1$
- ③ 空事象 ϕ について、 $P(\phi) = 0$

3. 和事象の確率

任意の事象 A, B について、次が成り立つ。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(証明)

次の等式の両辺を $n(U)$ で割れば, 上記の等式が得られる。

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

4. 加法定理

2つの事象 A と B が互いに排反のとき, 次が成り立つ。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(証明)

$A \cap B = \phi$ なので, $P(A \cap B) = 0$ である。従って, 和事象の確率より, 加法定理が得られる。

5. 余事象の確率

事象 A の余事象 $\bar{A}$ について, 次が成り立つ。

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

(証明)

$A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \phi$ であるから, 加法定理より

$$1 = P(U) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

3. 基本事項

1. 確率では場合の数を求めるのが基本

■ 例題 1

男子 4 人, 女子 3 人の計 7 人から 1 人を選ぶとき, 女子 1 人を選ぶ確率を求めよ。

(説明)

確率では, 「場合の数」を求めて計算するのが基本である。

試行は「7 人から 1 人を選ぶ」であり, 事象は「女子 1 人を選ぶ」である。この事象を A とする。

7 人から 1 人を選ぶ方法は 7 通りであるから,

起こりうるすべての場合の数は 7 通り

7 人から女子 1 人を選ぶ方法は 3 通りであるから,

事象 A が起こる場合の数 (女子 1 人を選ぶ場合の数) は 3 通り

従って, 求める確率は

$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}} = \frac{3}{7} \quad (\text{答})$$

男子 4 人を a, b, c, d , 女子 3 人を x, y, z とすると, 試行の標本空間 (起こりうるすべての場合の集合) は

$$U = \{a, b, c, d, x, y, z\}$$

であり、女子 1 人を選ぶという事象 A は

$$A = \{x, y, z\}$$

になるので、

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{7}$$

要するに、この確率は、7 人に対する女子の人数の割合（7 に対する 3 の割合）である。

2. 確率計算ではすべてのものは区別する

■ 例題 2

見た目が全く同じ 2 枚のコインを投げたとき、1 枚だけ表が出る確率を求めよ。

(説明)

2 枚のコインを投げたとき、表を○、裏を×で表せば、表・裏の出方は

$$\text{○○, ○×, ××}$$

であるから、起こりうるすべての場合の数は 3 通り、1 枚だけ表が出る場合の数は 1 通りであるから、求める確率は

$$\frac{1}{3}$$

この解答は誤りである。 確率の定義では、「どの根元事象も同様に確からしい」が大前提であり、これはどの根元事象も同じ程度に起こるという意味である。しかし、

○○と○×は、同じ程度に起こるとはいえない

そこで、「どの根元事象も同様に確からしい」という大前提を満たすために、確率計算ではすべてのものは区別する。

例えば、2 枚のコインを a, b とすると、表・裏の出方は次の 4 通りになる。

- ① $(a, b) = (\text{○}, \text{○})$
- ② $(a, b) = (\text{○}, \text{×})$
- ③ $(a, b) = (\text{×}, \text{○})$
- ④ $(a, b) = (\text{×}, \text{×})$

①～④が根元事象であり、どの根元事象も同じ程度に起こるといえる。

従って、起こりうるすべての場合の数は 4 通り、1 枚だけ表が出る場合の数は②、③の 2 通りなので、求める確率は

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

3. どの試行での確率なのかに注意すること

■ 例題 3

1 個のサイコロを 2 回投げるとき、1 回目に 1 の目が出る確率を求めよ。

(説明)

答えはすぐに $1/6$ であることが分かるが、これは、次の①と②の確率は等しいという著しい事実から得られる。

- ① 1 個のサイコロを 2 回投げたとき、1 回目に 1 の目が出る確率
- ② 1 個のサイコロを 1 回投げたとき、1 の目が出る確率

確率は、ある試行のもとで定義される値である。①の試行は「1 個のサイコロを 2 回投げる」であり、②の試行は「1 個のサイコロを 1 回投げる」であるから、試行が異なる。よって、①と②は、全く別次元の確率なのである。確率を考えると、どの試行での確率なのかに注意すること。

4. 「少なくとも」があれば余事象を考えるのが原則

■ 例題 4

3 枚のコインを同時に投げるとき、少なくとも 1 枚は表が出る確率を求めよ。

(説明)

「少なくとも 1 枚は表が出る」とは、

$$\text{表が出るコインの枚数} \geq 1 \quad \cdots \quad \text{①}$$

のことであるから、この否定（余事象）は

$$\text{表が出るコインの枚数} \leq 0$$

である。つまり、

$$\text{表が出るコインの枚数} = 0 \quad \cdots \quad \text{②}$$

①の確率よりも、②の確率を求める方がはるかに容易である。「少なくとも」という言葉が出たら、余事象を考えるの原則である。

「少なくとも 1 枚は表が出る」という事象を A とすれば、 A の余事象 $\bar{A}$ は、「1 枚も表が出ない」すなわち「3 枚とも裏が出る」という事象になる。

3 枚のコインの表・裏の出方は 2^3 通り、3 枚とも裏が出る場合の数は 1 通りなので、

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{2^3}$$

従って、求める確率は

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8} \quad (\text{答})$$

4. 独立試行

1. 試行の独立性

- (1) 2つの試行において、一方の試行の結果が他方の試行の結果に影響を及ぼさないとき、これらの試行は独立であるという。2つの試行が独立であるとは、2つの試行の結果が全く無関係であると考えればよい。
- (2) 3つ以上の試行においても、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を及ぼさないとき、これらの試行は独立であるという。
- (3) 2つの独立な試行 T_1, T_2 をまとめた試行 T において、「 T_1 では事象 A が起こり、 T_2 では事象 B が起こる」という事象を C とすると、次が成り立つ。

$$P(C) = P(A)P(B)$$

2. 独立試行

- (1) 1つの試行を n 回繰り返すとき、各回の試行の結果がそれ以外の試行の結果に影響を及ぼさないとき、この n 回の試行を「 n 回の独立試行」という。
- (独立試行の例)
- ① 1個のサイコロを繰り返し投げる
 - ② 1枚のコインを繰り返し投げる
- (2) n 回の独立試行において、1回目に事象 A_1 、2回目に事象 A_2 、……、 n 回目に事象 A_n が起こる確率を $P(A_1, A_2, \dots, A_n)$ で表すと、次が成り立つ。

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

■ 例題 5

1枚のコインと1個のサイコロを同時に投げたとき、「コイン側では1枚だけ表が出て、サイコロ側では偶数の目が出る」確率を求めよ。

(説明)

試行の独立性は全く簡単な話である。次をよく理解すること。

- ① 求める確率は、「1枚のコインと1個のサイコロを同時に投げる」という試行での確率である。
- ② ①の試行は、「1枚のコイン投げる」という試行と、「1個のサイコロを投げる」という試行をまとめた試行である。
- ③ ところが、②の2つの試行は独立である。コイン側で表が出ても裏が出ても、そのことがサイコロの目の出方に影響を与えない。表でも裏でも、サイコロの出る目は1～6の6通りである。逆に、サイコロ側でどの目が出ても、そのことがコインの表・裏の出方には影響を与えない。
- ④ そこで、サイコロは忘れて、1枚のコイン投げたときに表が出る確率を求めると

$$\frac{1}{2}$$

- ⑤ コインは忘れて、1 個のサイコロを投げたときに偶数の目が出る確率を求めると

$$\frac{3}{6}$$

- ⑥ 求める確率は、④と⑤を掛けるだけである。

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1 \times 3}{2 \times 6} = \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

つまり、求める確率は、(1 枚のコインを 1 回投げたときに表が出る確率) と (1 個のサイコロを 1 回投げたときに偶数の目が出る確率) との積に等しいのである。

(注意)

なぜ、掛けるだけで OK なのか、自分で確認してみればよい。

1 枚のコインと 1 個のサイコロを同時に投げたとき、その結果を

(○, □) (○はコインの表・裏, □はサイコロの目)

で表す。

(○, □) において、○は表か裏の 2 通り、そのおのおのについて、□は 1~6 の 6 通りであるから、組 (○, □) の個数、すなわち、起こりうるすべての場合の数は

$$2 \times 6 \quad (\text{通り})$$

次に、「1 枚だけ表が出て、偶数の目が出る場合」の数を求めると、(○, □) において、○は表の 1 通り、□は 2, 4, 6 の 3 通りであるから、その場合の数は

$$1 \times 3 \quad (\text{通り})$$

従って、求める確率は

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 6} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{6}$$

確かに、④の確率と⑤の確率の積になる。この理由は、(○, □) において、○と□は互いに影響を及ぼさないからである。

■ 例題 6

1 のサイコロを 2 回投げるとき、次の確率を求めよ。

- (1) 1 回目に 1 の目が出る確率
- (2) 1 回目に 1 の目が出て、2 回目に 1 以外の目が出る確率
- (3) 2 回目に 1 の目が出る確率

(説明)

試行は「1 のサイコロを 2 回投げる」であるが、これは 2 回の独立試行である。つまり、この試行は、次の 2 つの試行をまとめたものであり、それらは独立である。

- ・ 1 回目に「1 個のサイコロを 1 回投げる」という試行
- ・ 2 回目に「1 個のサイコロを 1 回投げる」という試行

よって、求める確率は、これらの試行のもとでの確率を求めて、それらを掛け合わせるだけである。

(1) 1 回目に 1 の目が出る確率とは、

1 回目は 1 で、2 回目は 1～6 のいずれかになる確率

である。そこで

① 1 個のサイコロを 1 回投げて、1 の目が出る確率を求めると

$$\frac{1}{6}$$

② 1 個のサイコロを 1 回投げて、1～6 のいずれかの目が出る確率を求めると

$$\frac{6}{6}$$

求める確率は、①×②であるから、

$$\frac{1}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

よって、次のことが成立することがわかるだろう。

1 個のサイコロを 2 回投げたとき 1 回目に 1 の目が出る確率は、

1 個のサイコロを 1 回投げたとき 1 の目が出る確率に等しい

(2) もうわかるであろう。

1 個のサイコロを 1 回投げたとき 1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$

1 個のサイコロを 1 回投げたとき 1 以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$

よって、求める確率は、

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36} \quad (\text{答})$$

(3) (1)と同様であり、求める確率は、1 個のサイコロを 1 回投げたとき 1 の目が出る確率に等しいので、

$$\frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

■ 例題 7

1 のサイコロを 100 回投げるとき、次の確率を求めよ。

(1) 20 回目に 1 の目が出る確率

(2) 20 回目に奇数の目、70 回目に偶数の目が出る確率

(説明)

(1) 確認である。サイコロを何回投げたとしても、〇〇回目に 1 の目が出る確率は、1 個のサイコロを 1 回投げたときに 1 の目が出る確率に等しいので、答えは

$$\frac{1}{6} \quad (\text{答})$$

(2) (1)と同じである。

20 回目に奇数の目が出る確率は、 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

70 回目に偶数の目が出る確率は $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{答})$$

5. 条件つき確率と乗法定理（まとめ）

1. 条件つき確率

事象 A , B に対して、事象 A が起こったという条件のもとで事象 B の起こる確率を $P_A(B)$ で表し、次で定義する。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ を A が起こったときの B の条件つき確率という。 $P_A(B)$ は、標本空間を A に変えた場合の事象 B の起こる確率である。

(注意) 条件つき確率の定義は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

であるが、右辺の分母と分子を $n(U)$ (U は標本空間) で割ると、

$$P_A(B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(A)}{n(U)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2. 確率の乗法定理

(1) 確率の乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

(2) (1)を文章で述べると

A と B がともに起こる確率

= (A が起こる確率) $\times$ (A が起こったときの B の条件つき確率)

3. 事象の独立性

- (1) 2つの事象 A, B について,

$$P_A(B) = P(B)$$

が成り立つとき、 A と B は独立であるという。これは、 A と B が無関係な事象であることを意味する。

- (2) 事象 A, B が独立ならば、乗法定理は次のようになる。

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

■ 例題 8

袋の中に赤玉が 2 個、白玉が 2 個入っている。この中から 1 個ずつ 2 回取り出すとき、以下の確率を求めよ。ただし、取り出した玉は袋に戻さないとする。

1 回目に赤玉が出たという条件のもとで、2 回目に白玉が出る条件つき確率

(説明)

条件つき確率も簡単な話である。 実際には、これを知らなくても自然に使用している場合が多い。

赤玉を○、白玉を×で表すと、最初の袋の中の状態は次の通り。

○, ○, ×, ×

1 回目に赤玉が出たという条件のもとで、2 回目に白玉が出る条件つき確率とは、1 回目に赤玉が出たと仮定して、その仮定のもとで、2 回目に白玉を取り出す確率のことである。この確率は、2 回目に 1 個取り出すという試行を行って白玉を取り出す確率に等しい。

まとめると、次の通り。

- ① 試行は「2 回取り出す」である
- ② 1 回目に赤玉を取り出したと仮定する
- ③ すると、袋の中の状態は、○, ×, × になる
- ④ 次に、③をスタートにして、③の状態の袋から「1 個取り出す」という新たな試行を考える。この試行において、白玉を取り出す確率は、当然

$$\frac{2}{3}$$

である。これが求める条件つき確率である。

■ 例題 9

袋の中に赤玉が 2 個、白玉が 2 個入っている。この中から 1 個ずつ 2 回取り出すとき、以下の確率を求めよ。ただし、取り出した玉は袋に戻さないとする。

- (1) 1 回目に赤玉が出たという条件のもとで、2 回目に白玉が出る条件つき確率

(2) 1 回目に赤玉が出て、2 回目に白玉が出る確率

(3) 2 回目に白玉が出る確率

(説明)

1 個ずつ 2 回取り出すという試行を行ったとき、

「1 回目に赤玉が出る」という事象を A

「2 回目に白玉が出る」という事象を B

とする。

(1) 求める確率は、前の例題で示したように、

$$P_A(B) = \frac{2}{3} \quad (\text{答})$$

(2) 求める確率は $P(A \cap B)$ であり、乗法定理から

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{答})$$

(3) 次の 2 つの場合に分ける。

(イ) 1 回目が赤玉で、2 回目が白玉の場合

この場合の確率は、(2)より

$$\frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

(ロ) 1 回目が白玉で、2 回目が白玉の場合

この場合の確率は、

$$\frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

よって、求める確率は

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(注意)

赤玉と白玉は同数であるから、2 回目に白玉が出る確率と、2 回目に赤玉が出る確率は、当然等しく、これらの確率を足すと 1 である。従って、2 回目に白玉が出る確率が $1/2$ であることは、計算しなくてもわかる。

■ 例題 10

10 本のくじの中に、当たりくじが 4 本ある。この中から任意に 3 本を引くとき、

(1) 3 本とも当たりくじである確率を求めよ。

(2) 1 本だけが当たりくじである確率を求めよ。

(説明)

この種の問題は、乗法定理による解法と組合せによる解法の 2 通りの解法がある。どちらの方法が良いかは、ケースバイケースである。2 通りの解法を示しておく。

● 解法 1 (乗法定理)

(1) 1本ずつ3回引くと考え (引いたくじは元に戻さない)。

① 1本目が当たりである確率は $4/10$

② そのとき、2本目が当たりである (条件つき) 確率は、くじが9本で当たりが3本なので、 $3/9$

③ さらにそのとき、3本目が当たりである (条件つき) 確率は、くじが8本で当たりが2本なので、 $2/8$

従って、乗法定理より、求める確率は

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30} \quad (\text{答})$$

(2) (1)と同様に考えて、

1本目だけが当たる確率は、 $\frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$ ($\bigcirc \times \times$ の場合)

2本目だけが当たる確率は、 $\frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{1}{6}$ ($\times \bigcirc \times$ の場合)

3本目だけが当たる確率は、 $\frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$ ($\times \times \bigcirc$ の場合)

よって、1本だけが当たりである確率は、

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

● 解法 2 (組合せ)

(1) 同時に3本引くと考え、10本から3本を引く引き方は ${}_{10}C_3$ 通り。

3本とも当たりである場合の数は ${}_4C_3$ 通り。

よって、求める確率は、

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3} = 4 \times \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{30} \quad (\text{答})$$

(2) 当たりを $\bigcirc$ 、外れを $\times$ で表すと、1本だけが当たりである場合は、引いた3本が次の形の組合せの場合である。

$\{\bigcirc, \times, \times\}$

この組合わの総数を求めると、 $\bigcirc$ は ${}_4C_1$ 通りであり、そのおのおのについて、 $\{\times, \times\}$ は ${}_6C_2$ 通りなので、 ${}_4C_1 \times {}_6C_2$ (通り)。

よって、求める確率は

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = 4 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{2} \quad (\text{答})$$

(注意)

条件つき確率は上記の理解で十分であるが、確率ではすべてのものは区別する、1 回目に取り出した赤玉はどちらの赤玉なのかを考える必要があるのではないかと疑問に思うかもしれない。しかし、この疑問は全く不要である。

実際に確認してみる。赤玉を a, b 、白球を x, y で表す。「1 個ずつ 2 回取り出す」という試行において、

「1 回目に赤玉が出る」という事象を A

「2 回目に白玉が出る」という事象を B

とすると、根元事象（起こり得るすべての場合）は、次の 16 通り。

$(a, b), (a, x), (a, y)$

$(b, a), (b, x), (b, y)$

$(x, a), (x, b), (x, y)$

$(y, a), (y, b), (y, x)$

1 回目に赤玉が出る場合は、次の 6 通りであるので、 $n(A) = 6$

$(a, b), (a, x), (a, y)$

$(b, a), (b, x), (b, y)$

1 回目に赤玉が出て、2 回目に白玉が出る場合は、次の 4 通りなので、 $n(A \cap B) = 4$

$(a, x), (a, y)$

$(b, x), (b, y)$

よって、1 回目に赤玉が出たという条件のもとで、2 回目に白玉が出る条件つき確率（ A が起こったときの B の条件つき確率）は、条件つき確率の定義より、

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

事象は集合で表す。

(例) サイコロ投げにおいて、「偶数の目が出る」という事象 A は、 $A = \{2, 4, 6\}$ で表す。

「1 の目が出る」という事象 B は、 $B = \{1\}$ で表す。

● まとめ

(1) 条件つき確率

事象 A, B に対して、事象 A が起こったという条件のもとで事象 B の起こる確率を $P_A(B)$ で表し、次で定義する。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ を A が起こったときの B の条件つき確率という。 $P_A(B)$ は、全事象を A に変えた場合の事象 B の起こる確率である。

(2) 確率の乗法定理

$$P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$$

すなわち

$$\begin{aligned} & A \text{ と } B \text{ がともに起こる確率} \\ &= (A \text{ が起こる確率}) \times (A \text{ が起こったときの } B \text{ の条件つき確率}) \end{aligned}$$

異なる n 個のものから、異なる r 個 ($1 \leq r \leq n$) のものをもって 1 列に並べたものを、「 n 個のものから r 個とって作った順列」といい、その順列の総数を ${}_n P_r$ で表す。

(2) 順列の総数

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \quad (r \text{ 個の自然数の積}) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

(3) 異なる n 個のものの順列の総数 ${}_n P_n = n!$

(4) ${}_n P_1 = n$

(5) 順列の問題は、 ${}_n P_r$ ではなく、積の法則で考えること。

4. 条件つき確率と乗法定理

(1) 条件つき確率は高校数学 C の内容であるが、全く容易な話なので、以下は理解するとよい。

(2) 事象 A, B に対して、事象 A が起こったという条件のもとで事象 B の起こる確率を $P_A(B)$ で表し、次で定義する。

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$P_A(B)$ を A が起こったときの B の条件つき確率という。 $P_A(B)$ は、全事象を A に変えた場合の事象 B の起こる確率である。

(3) 例えば、1 個のサイコロを投げるとき、単に「1 の目が出る確率」といえば $1/6$ である。しかし、「奇数の目が出ている」と分かっている「1 の目が出る確率」といえば、1

$\frac{1}{3}$ である。奇数と分かっているならば、出る目は 1, 3, 5 に限定されるからである。この $\frac{1}{3}$ が、奇数の目が出るという条件のもとで 1 の目が出る条件つき確率である。

すなわち、

A … 奇数の目が出る事象

B … 1 の目が出る事象

とおけば、

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1\}, A \cap B = \{1\}$$

このとき、 A が起こったときの B の条件つき確率は、

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{3}$$

要するに、奇数の目が出ているという状況をスタートにして、1 の目が出る確率を考えているだけである。

(4) 上記により、積事象 $A \cap B$ の確率は条件つき確率で表現でき、乗法定理が得られる。

- 乗法定理： $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$
- A と B がともに起こる確率
 $= (A \text{ が起こる確率}) \times (A \text{ が起こったときの } B \text{ の条件つき確率})$

5. 事象の独立性

(1) 2 つの事象 A, B について、

$$P_A(B) = P(B)$$

が成り立つとき、 A と B は独立であるという。これは、 A と B が無関係な事象であることを意味する。

(2) 事象 A, B が独立ならば、乗法定理は次のようになる。

- 乗法定理： $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

●頻出パターン① (p.112)

3 枚のコインを同時に投げるとき、2 枚だけ表が出る確率はいくらか。

(考え方)

表を H, 裏を T で表し、3 枚のコインを A, B, C とし、表・裏の出方を (A, B, C) の組で表す。

例えば、(H, H, T) となる確率は

$$\begin{aligned} & (A \text{ が表になる確率}) \times (B \text{ が表になる確率}) \times (C \text{ が裏になる確率}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

(A, B, C) において、2 枚のコインのみが表になる場合の数は ${}_3C_2$ であるから、求める

確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = {}_3C_1 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad (\text{答})$$

(注意)

独立試行の定理を使う問題である。この定理を知らなくても解けるが、覚えておくとよい。
 n 枚のコインでも同じ。

(n 枚のコインを同時に投げるとき、 r 枚だけ表が出る確率)

= (1 枚のコインを n 回投げるとき、 r 回だけ表が出る確率)

$$= {}_nC_r \left(\frac{1}{2} \right)^r \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{n-r} = {}_nC_r \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

●頻出パターン② (p. 114)

1 組 52 枚のトランプの中から 2 枚同時に引くとき、2 枚ともスペードまたは 2 枚ともハートである確率はいくらか。

(考え方)

クラブ (♣), ダイヤ (♦), ハート (♥), スペード (♠) がそれぞれ 13 枚, 合計 52 枚である。乗法定理を使った方が簡単であるが、2 通りの解法を示す。

(解 1) (組合せで考える)

52 枚から 2 枚引く方法は、 ${}_{52}C_2$ 通り。このうち

(イ) 2 枚ともスペードである場合の数は ${}_{13}C_2$

(ロ) 2 枚ともハートである場合の数は ${}_{13}C_2$

(イ) と (ロ) は同時には起こらないので、求める確率は

$$\frac{{}_{13}C_2 + {}_{13}C_2}{{}_{52}C_2} = \frac{{}_{13}C_2 \times 2}{{}_{52}C_2} = \frac{13 \times 12 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{52 \times 51} = \frac{2}{17} \quad (\text{答})$$

(解 2) (乗法定理を使う)

52 枚から 1 枚ずつ 2 回引くと考え、2 枚ともスペードである確率は、

(1 枚目がスペードである確率) $\times$ (2 枚目もスペードである確率)

$$= \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} = \frac{1}{17}$$

2 枚ともハートである確率も同じなので、求める確率は $\frac{1}{17} + \frac{1}{17} = \frac{2}{17}$ (答)

(注意)

(解 2) の

(1 枚目がスペードである確率) $\times$ (2 枚目もスペードである確率)

を正確に書けば、乗法定理から次のようになる。

(1 枚目がスペードである確率) ×
 (1 枚目がスペードであったという条件のもとで 2 枚目がスペードである確率)
 = (52 枚から 1 枚引いたときに, それがスペードである確率) ×
 (スペードが 1 枚足りない 51 枚から 1 枚引いたときに, それがスペードである確率)

●頻出パターン③ (p. 116)

当たりくじが 2 本入っている 10 本のくじがある。このくじを S が 1 本引き, 当たりかどうか確認してもとに戻し, そのあと T が引くとき, S がはずれて T が当たる確率はいくらか。

(考え方)

乗法定理から

(S がはずれて T が当たる確率)
 = (S がはずれる確率) × (S がはずれたときに, T が当たる確率)
 となるが, くじを戻すので, 結局, 次になる。

(S がはずれて T が当たる確率)
 = (S が 10 本から 1 本引いたときに, はずれる確率) ×
 (T が 10 本から 1 本引いたときに, 当たる確率)

(解答)

求める確率は, $\frac{8}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{4}{25}$ (答)

(注意)

引いたくじをもとに戻さなければ, 次の解答になる。

(S がはずれて T が当たる確率)
 = (S が 10 本から 1 本引いたときに, はずれる確率) ×
 (当たりが 2 本残っている 9 本から T が 1 本引いたときに, 当たる確率)
 $= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$

●頻出パターン④ (p. 117)

さいころを 3 回投げるとき, 少なくとも 1 回は 2 以下の目が出る確率はいくらか。

(考え方)

「少なくとも」があれば, 余事象で考える。「少なくとも 1 回は 2 以下の目が出る」とは,

(2 以下の目が出る回数) ≥ 1

という意味である。従って, この否定は,

(2 以下の目が出る回数) = 0 すなわち「3 回とも 3 以上の目が出る」

(解答)

少なくとも 1 回は 2 以下の目が出るという事象を A とすれば, その余事象 $\bar{A}$ は 3 回とも 3 以上の目が出る事象である。3 以上の目は, 3, 4, 5, 6 の 4 通りであるから,

$$P(\bar{A}) = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

よって、求める確率は

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

●問題 1 (p. 118)

3人でじゃんけんを1回するとき、あいこになる確率はいくらか。

(考え方)

「じゃんけん」の問題は、以下を理解するだけでよい。じゃんけんは、グー（石）、チョキ（鉈：はさみ）、パー（紙）の手で勝負する。「あいこ」とは、引き分けのこと。

● 2人のじゃんけん

2人（AとB）の手の出し方は、 $3 \times 3 = 9$ （通り）

このうち、引き分けは、2人が同じ手を出す3通りなので、その確率は $3/9 = 1/3$

Aが勝つ確率とBが勝つ確率は当然等しいので、それぞれ $1/3$

従って、

$$\text{引き分けになる確率 } \frac{1}{3}, \text{ Aが勝つ確率 } \frac{1}{3}, \text{ Bが勝つ確率 } \frac{1}{3}$$

● 3人のじゃんけん

3人（A, B, C）の手の出し方は、 $3 \times 3 \times 3 = 27$ （通り）

このうち、引き分けは、

・3人とも同じ手 … 3通り

・3人とも違う手 … $3 \times 2 \times 1 = 6$ 通り（積の法則）

従って、引き分けは $3 + 6 = 9$ （通り）だから、その確率は $9/27 = 1/3$

また、Aだけが勝つ場合は、どの手で勝つかを考えて、3通り。BとCも同様。従って、1人だけが勝つ確率は $9/27 = 1/3$

よって、2人が勝つ確率（すなわち1人だけが負ける確率）も $1/3$

まとめると、

$$\text{引き分けになる確率 } \frac{1}{3}, \text{ 1人だけが勝つ確率 } \frac{1}{3}, \text{ 2人が勝つ確率 } \frac{1}{3}$$

●問題 2 (p. 118)

赤玉3個と白玉5個が入った袋から同時に3個の玉を取り出すとき、3個とも同じ色である確率はいくらか。

(考え方)

2通りの解法を示す。

(解1)（組合せで考える）

8個から3個取り出す方法は ${}_8C_3$ 通り。そのうち、3個とも赤玉である場合の数は1通り、3個とも白玉である場合の数は ${}_5C_3$ 通り。よって、求める確率は

$$\frac{1 + {}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{1 + {}_5C_2}{{}_8C_3} = \left(1 + \frac{5 \times 4}{2 \times 1}\right) \times \frac{3 \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times 6} = \frac{11}{56} \quad (\text{答})$$

(解2) (乗法定理で考える)

袋から1個ずつ3回取り出すと考えると、

$$(イ) \text{ 3回とも赤玉である確率は, } \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$$

$$(ロ) \text{ 3回とも白玉である確率は, } \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{10}{56}$$

よって、求める確率は、

$$\frac{1}{56} + \frac{10}{56} = \frac{11}{56} \quad (\text{答})$$

●問題3 (p. 118)

1から8までの数を1つずつ書いたカードが8枚ある。この中から1枚ずつ2回続けてカードを取り出すとき、2枚とも偶数である確率はいくらか。ただし、取り出したカードはもとに戻さないものとする。

(考え方)

乗法定理を使え、という問題である。

(解)

1~8の中で、偶数は2, 4, 6, 8の4個である。従って、

$$\begin{aligned} (\text{求める確率}) &= (\text{1回目が偶数である確率}) \times (\text{2回目が偶数である確率}) \\ &= \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14} \quad (\text{答}) \end{aligned}$$

●問題4 (p. 120)

3個のさいころを同時に投げるとき、出た目の積が3の倍数である確率はいくらか。

(考え方)

3は素数であるから、整数 a, b, c の積 $a \times b \times c$ が3の倍数であれば、「 a, b, c のうちの少なくとも1つは3の倍数」である。これが、「4の倍数」なら事情は違う。とにかく、「少なくとも」が出たので、まず「3の倍数でない」という余事象を考える

(解答)

3個のさいころ(A, B, C)の目の出方は、 $6 \times 6 \times 6$ 通り。

このうち、出た目の積が3の倍数でない場合の数は、それぞれの目が3の倍数でないので、 $4 \times 4 \times 4$ 通り。よって、求める確率は

$$1 - \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \quad (\text{答})$$

●問題 5 (p. 120)

ある試験を P, Q, R の 3 人が受験して合格する確率はそれぞれ, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ である。

1 人だけが合格する確率はいくらか。

(考え方)

少し説明しよう。次の 3 つの事象を考える。

A … P が合格するという事象

B … Q が合格するという事象

C … R が合格するという事象

このとき,

$$P \text{ が合格する確率 } P(A) = \frac{1}{2}, \quad P \text{ が不合格になる確率 } P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$$

また, 問題文には書かれていないが, 3 つの事象 A, B, C は互いに独立 (無関係) と考えてよい。つまり, 3 人のそれぞれの合否は互いに影響を与えない。

従って, 3 人とも合格する確率 $P(A \cap B \cap C)$ などは, 次のようになる。

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$$

同様に, P だけが合格する確率は,

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C})$$

(解法)

(イ) P だけが合格する確率

$$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = P(A) \times P(\bar{B}) \times P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$$

(ロ) Q だけが合格する確率

$$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) = P(\bar{A}) \times P(B) \times P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$$

(ハ) R だけが合格する確率

$$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{3}$$

よって, 求める確率は (イ) ~ (ア) の合計であるから,

$$\frac{2+3+4}{2 \times 5 \times 3} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10} \quad (\text{答})$$

●問題 6 (p. 120)

10 個の製品の中に 4 個の不良品が含まれている。この 10 個の製品の中から 5 個を同時に取り出すとき, 2 個以上不良品が含まれている確率はいくらか。

(考え方)

余事象で考えるだけである。「2 個以上不良品が含まれている」という事象の余事象は、「不良品の個数が 1 個以下」である。

(解法)

10 個の製品から 5 個選ぶ方法は、 ${}_{10}C_5$ 通りである。そのうち、

不良品が 0 個である場合は、 ${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$ 通り。

不良品が 1 個である場合は、 ${}_4C_1 \times {}_6C_4 = 4 \times {}_6C_2 = 60$ 通り。

従って、不良品が 1 個以下である確率は、

$$\frac{6 + 60}{{}_{10}C_5} = 66 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6} = \frac{11}{42}$$

よって、求める確率は、 $1 - \frac{11}{42} = \frac{31}{42}$ (答)

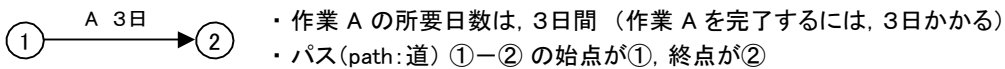
19. PERT 図

1. PERT とは

PERT（パート：Program Evaluation and Review Technique）は、製品開発の作業工程などを管理・分析するための手法であり、ビジネスの分野でよく使用される。もともとは、1950 年代に、米海軍で弾道ミサイル開発プロジェクトのために考案された手法である。

PERT 図（日程計画図）とは、記号（矢印と丸印）を用いて、各作業の順序関係とそれらの所要日数（または所要時間）を表した図である。矢印（arrow）で表現した図なので、「アローダイアグラム（arrow diagram）」ともいう。

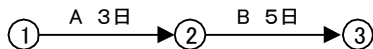
- 矢印（→） … 作業を表す。矢印の上や下に、作業名と作業の所要日数を書く。
- 丸印（○） … 作業と作業の結合点（結節点）を表す。○に番号を記入することもあるが、この番号は作業の順番とは無関係である。



2. PERT の問題は小学生でも解ける

PERT の問題は、小学生でも解けるほど簡単な内容なので、必ず理解するとよい。以下のような常識的なルールがある。

■ 例 1

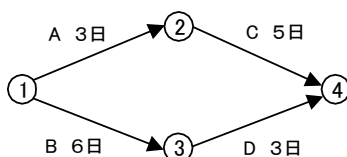


- (1) A が終了してから、B を開始する。（作業 A が完了しないと、作業 B を開始できない）
- (2) A と B の全体の所要日数は、 $3日 + 5日 = 8日$ である。
（これを、①-②-③の日数 = 8 で表す）
- (3) A を開始してから、B を開始できるのは、3日後であり、 $3 + 1 = 4$ 日目である。
（1月1日に A を開始すれば、A が終了するのは1月3日であるので、1月4日に B を開始できる）

（注意）日数計算では、次のことばに気をつける。

- ・「5日から8日**まで**」は、最初と最後の日をいれて、4日間
- ・「5日から4日**目**」は、最初の日を入れて、8日
- ・「5日から3日**後**」は、最初の日は入れないで、8日

■ 例 2

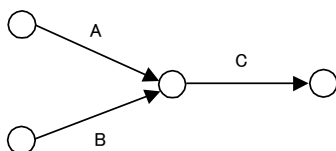


- (1) A と C の全体の所要日数は 8 日，B と D の全体の所要日数は 9 日である。

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}-\textcircled{4} \text{ の日数 } = 3 + 5 = 8, \textcircled{1}-\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ の日数 } = 6 + 3 = 9$$

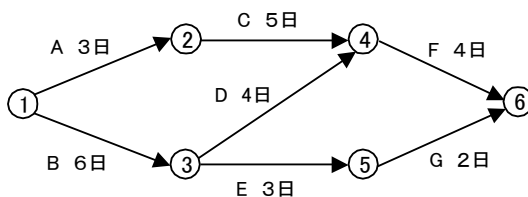
- (2) 8 日 < 9 日であるから，A，B，C，D のすべてを完了するのに要する日数は，9 日である。すなわち， $\textcircled{1}-\textcircled{4}$ の日数 = 9

■ 例 3



- (1) A と B の両方が終了してから，C を開始する。(作業 A と作業 B の両方が完了しないと，作業 C を開始できない)

■ 例 4



- (1) $\textcircled{1}-\textcircled{2}-\textcircled{4}$ の日数 = $3 + 5 = 8$ ， $\textcircled{1}-\textcircled{3}-\textcircled{4}$ の日数 = $6 + 4 = 10$

$$\therefore \textcircled{1}-\textcircled{4} \text{ の日数 } = 10 \quad \therefore \textcircled{1}-\textcircled{4}-\textcircled{6} \text{ の日数 } = 10 + 4 = 14$$

- (2) $\textcircled{1}-\textcircled{3}-\textcircled{5}-\textcircled{6}$ の日数 = $6 + 3 + 2 = 11$

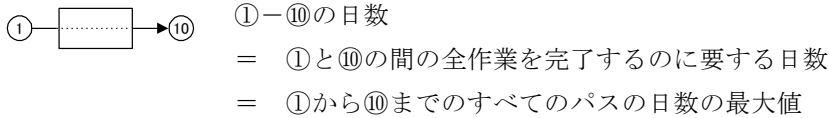
$$14 \text{ 日} > 11 \text{ 日より，} \textcircled{1}-\textcircled{6} \text{ の日数 } = 14$$

$$\therefore \text{全作業の所要日数} = 14 \text{ 日}$$

(注意) PERT 図の全体の作業経路 (パス) において，最も所要日数に多い経路をクリティカルパス (critical path)と呼ぶ。例 4 では， $\textcircled{1}-\textcircled{3}-\textcircled{4}-\textcircled{6}$ がクリティカルパスである。クリティカルパスの日数が，全作業の所要日数である。クリティカルパスの中の作業のどれが遅れても全体の作業が遅れるため，クリティカルパスが最重要管理工程になる。

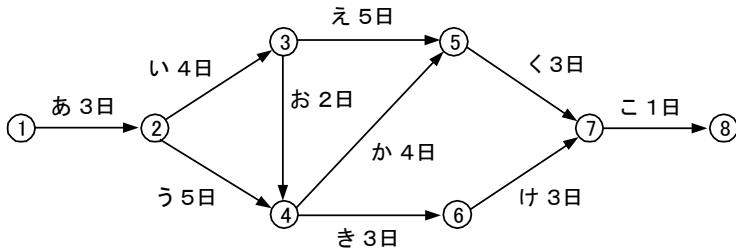
3. ポイント

下図において、①から⑩まで進むとすると、①ー⑩の日数は次を表す。



■ 問題 1

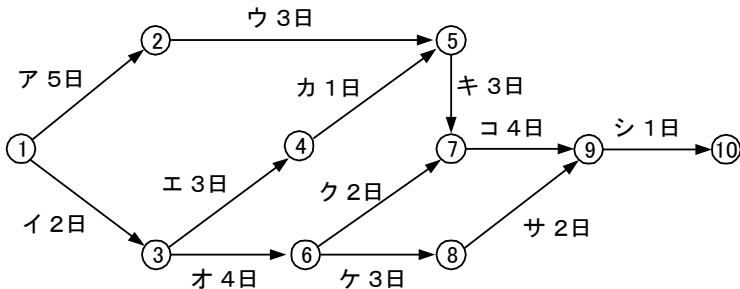
次は、PERT 図である。



- (1) 「か」の作業を開始するには、少なくともどの作業が終了していなければならないか。
- (2) 「く」の作業を開始できるのは、「あ」を開始してから何日目か（何日後か）。
- (3) 全作業が終了するのは、「あ」を開始してから何日目か（何日後か）。

■ 問題 2

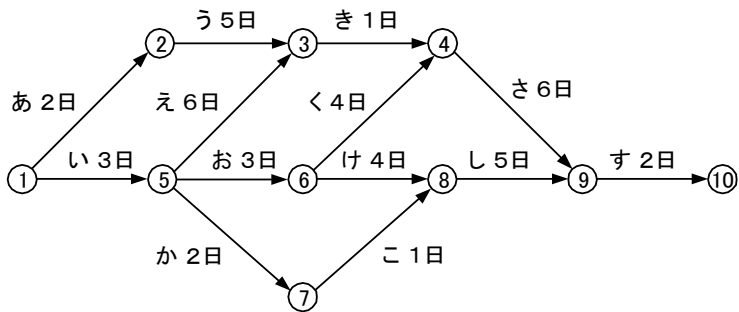
次は、PERT 図である。



- (1) 全作業が終了するのは、作業を開始してから何日目か（何日後か）。
- (2) 「コ」の作業を開始できるのは、「ア」を開始してから何日目か（何日後か）。
- (3) 工場で事故があり、「ケ」の作業が予定よりも 3 日遅れた場合、全作業の終了日はどうなるか。

■ 問題 3

次は、PERT 図である。



- (1) 「す」の作業を開始できるのは、「あ」を開始してから何日目か（何日後か）。
- (2) 他の作業に支障をきたさずに、「う」の作業を何日遅らせることができるか。
- (3) 他の作業に支障をきたさずに、「こ」の作業を何日遅らせることができるか。

● 解答

問題 1

- (1) 「あ」「い」「う」「お」である。（④までのすべての作業の終了が必要。）
- (2) 14 日目（13 日後）（②→③→⑤の日数＝4＋5＝9，②→③→④→⑤の日数＝4＋2＋4＝10，②→④→⑤の日数＝5＋4＝9 だから，②→⑤の日数＝10。従って，①→⑤の日数＝3＋10＝13。）
- (3) 17 日目（16 日後）（①→⑤→⑦→⑧の日数＝13＋3＋1＝17，①→②→④→⑥→⑦→⑧＝3＋5＋3＋3＋1＝15 だから，①→⑧の日数＝17。）

問題 2

- (1) 16 日目（15 日後）（まず，①→⑤の日数を求める。①→②→⑤の日数＝8，①→③→④→⑤の日数＝6より，①→⑤の日数＝8。従って，①→⑤→⑦の日数＝11。一方，①→③→⑥→⑦の日数＝8より，①→⑦の日数＝11。よって，①→⑦→⑨→⑩の日数＝16。一方，①→③→⑥→⑧→⑨→⑩の日数＝12 だから，①→⑩の日数＝16。）
- (2) 12 日目（11 日後）（①→⑦の日数＝11より，12 日目）
- (3) 変わらない（ケの日数は 6 日になるので，①→③→⑥→⑧→⑨→⑩の日数＝15 になる。しかし，①→⑩の日数＝16 には，影響なし。）

問題 3

- (1) 17 日目（16 日後）（まず，①→④の日数を求める。①→②→③→④の日数＝8，①→⑤→③→④の日数＝10，①→⑤→⑥→④の日数＝10 より，①→④の日数＝10。従って，①→④→⑨の日数＝16。一方，①→⑤→⑥→⑧の日数＝10，①→⑤→⑦→⑧＝6より，①→⑧の日数＝10。よって，①→⑧→⑨の日数＝15。従って，①→⑨の日数＝16。）
- (2) 2 日（①→②→③＝7，①→⑤→③＝9 だから，ウが 2 日遅れても OK。ウが 3 日遅れると，「キ」の開始が 1 日遅くなる。）

(3) 4日 (⑤-⑥-⑧の日数=7, ⑤-⑦-⑧の日数=3より, $7-3=4$ 。)