Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I[1] (*1931*)

1

Die Entwicklung der Mathematik in der Richtung zu größerer Exaktheit hat bekanntlich dazu geführt, daß weite Gebiete von ihr formalisiert wurden, in der Art, daß das Beweisen nach einigen wenigen mechanischen Regeln vollzogen werden kann. Die umfassendsten derzeit aufgestellten formalen Systeme sind das System der *Principia mathematica* (*PM*)[2] einerseits, das Zermelo–Fraenkelsche (von J. von Neumann weiter ausgebildete) Axiomensystem der Mengenlehre[3] andererseits. Diese beiden Systeme sind so weit, daß alle heute in der Mathematik angewendeten Beweismethoden in ihnen formalisiert, d. h. auf einige wenige Axiome und Schlußregeln zurückgeführt sind. Es liegt daher die Vermutung nahe, daß diese Axiome und Schlußregeln dazu ausreichen, *alle* mathematischen Fragen, die sich in den betreffenden Systemen überhaupt formal ausdrücken lassen, auch zu entscheiden. Im folgenden wird gezeigt, daß dies nicht der Fall ist, sondern daß es in den beiden angeführten Systemen sogar relativ einfache Probleme aus der Theorie der gewöhnlichen ganzen Zahlen gibt,[4] die sich aus den
174 Axiomen nicht | entscheiden lassen. Dieser Umstand liegt nicht etwa an der speziellen Natur der aufgestellten Systeme, sondern gilt für eine sehr weite Klasse formaler Systeme, zu denen insbesondere alle gehören, die aus den beiden angeführten durch Hinzufügung endlich vieler Axiome entstehen,[5]

[1] Vgl. die als *1930b* erschienene Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit.

[2] *Whitehead und Russell 1925.* Zu den Axiomen des Systems *PM* rechnen wir insbesondere auch: Das Unendlichkeitsaxiom (in der Form: es gibt genau abzählbar viele Individuen), das Reduzibilitäts- und das Auswahlaxiom (für alle Typen).

[3] Vgl. *Fraenkel 1927, von Neumann 1925, 1928a, 1929.* Wir bemerken, daß man zu den in der angeführten Literatur gegebenen mengentheoretischen Axiomen noch die Axiome und Schlußregeln des Logikkalküls hinzufügen muß, um die Formalisierung zu vollenden.—Die nachfolgenden Überlegungen gelten auch für die in den letzten Jahren von D. Hilbert und seinen Mitarbeitern aufgestellten formalen Systeme (soweit diese bisher vorliegen). Vgl. *Hilbert 1922, 1923, 1928, Bernays 1923, von Neumann 1927, Ackermann 1924.*

[4] D. h. genauer, es gibt unentscheidbare Sätze, in denen außer den logischen Konstanten: $\overline{\ }$ (nicht), $\vee$ (oder), (x) (für alle), $=$ (identisch mit) keine anderen Begriffe vorkommen als $+$ (Addition), $\cdot$ (Multiplikation), beide bezogen auf natürliche Zahlen, wobei auch die Präfixe (x) sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.

[5] Dabei werden in *PM* nur solche Axiome als verschieden gezählt, die aus einander nicht bloß durch Typenwechsel entstehen.

On formally undecidable propositions of *Principia mathematica* and related systems I[1] (*1931*)

1

The development of mathematics toward greater precision has led, as is well known, to the formalization of large tracts of it, so that one can prove any theorem using nothing but a few mechanical rules. The most comprehensive formal systems that have been set up hitherto are the system of *Principia mathematica* (*PM*)[2] on the one hand and the Zermelo–Fraenkel axiom system of set theory (further developed by J. von Neumann)[3] on the other. These two systems are so comprehensive that in them all methods of proof today used in mathematics are formalized, that is, reduced to a few axioms and rules of inference. One might therefore conjecture that these axioms and rules of inference are sufficient to decide *any* mathematical question that can at all be formally expressed in these systems. It will be shown below that this is not the case, that on the contrary there are in the two systems mentioned relatively simple problems in the theory of integers[4] that cannot be decided on the basis of the axioms. This situation is not in any way due to the special nature of the systems that have been set up, but holds for a wide class of formal systems; among these, in particular, are all systems that result from the two just mentioned through the addition of a finite number of axioms,[5] provided no false propositions

[1] See a summary of the results of the present paper in *Gödel 1930b.*

[2] *Whitehead and Russell 1925.* Among the axioms of the system *PM* we include also the axiom of infinity (in this version: there are exactly denumerably many individuals), the axiom of reducibility, and the axiom of choice (for all types).

[3] See *Fraenkel 1927* and *von Neumann 1925, 1928a,* and *1929.* We note that in order to complete the formalization we must add the axioms and rules of inference of the calculus of logic to the set-theoretic axioms given in the literature cited. The considerations that follow apply also to the formal systems (so far as they are available at present) constructed in recent years by Hilbert and his collaborators. See *Hilbert 1922, 1923, 1928, Bernays 1923, von Neumann 1927,* and *Ackermann 1924.*

[4] That is, more precisely, there are undecidable propositions in which, besides the logical constants $\overline{\ }$ (not), $\vee$ (or), (x) (for all), and $=$ (identical with), no other notions occur but $+$ (addition) and $\cdot$ (multiplication), both for natural numbers, and in which the quantifiers (x), too, apply to natural numbers only.

[5] In *PM* only axioms that do not result from one another by mere change of type are counted as distinct.

vorausgesetzt, daß durch die hinzugefügten Axiome keine falschen Sätze von der in Fußnote 4 angegebenen Art beweisbar werden.

Wir skizzieren, bevor wir auf Details eingehen, zunächst den Hauptgedanken des Beweises, natürlich ohne auf Exaktheit Anspruch zu erheben. Die Formeln eines formalen Systems (wir beschränken uns hier auf das System PM) sind äußerlich betrachtet endliche Reihen der Grundzeichen (Variable, logische Konstante und Klammern bzw. Trennungspunkte) und man kann leicht genau präzisieren, *welche* Reihen von Grundzeichen sinnvolle Formeln sind und welche nicht.[6] Analog sind Beweise vom formalen Standpunkt nichts anderes als endliche Reihen von Formeln (mit bestimmten angebbaren Eigenschaften). Für metamathematische Betrachtungen ist es natürlich gleichgültig, welche Gegenstände man als Grundzeichen nimmt, und wir entschließen uns dazu, natürliche Zahlen[7] als solche zu verwenden. Dementsprechend ist dann eine Formel eine endliche Folge natürlicher Zahlen[8] und eine Beweisfigur eine endliche Folge von endlichen Folgen natürlicher Zahlen. Die metamathematischen Begriffe (Sätze) werden dadurch zu Begriffen (Sätzen) über natürliche Zahlen bzw. Folgen von solchen[9] und daher (wenigstens teilweise) in den Symbolen des Systems PM selbst ausdrückbar. Insbesondere kann man zeigen, daß die Begriffe "Formel", "Beweisfigur", "beweisbare Formel" innerhalb des Systems PM definierbar sind, d. h. man kann z. B. eine Formel $F(v)$ aus PM mit einer freien Variablen v (vom Typus einer Zahlenfolge) angeben,[10] so daß $F(v)$ inhaltlich interpretiert besagt: v ist eine beweisbare Formel. Nun stellen wir einen unentscheidbaren Satz des Systems PM, d. h. einen Satz A, für den weder A noch *non-A* beweisbar ist, folgendermaßen her:

175 Eine Formel aus PM mit genau einer freien Variablen, und zwar vom Typus der natürlichen Zahlen (Klasse von Klassen) wollen wir ein *Klassenzeichen* nennen. Die Klassenzeichen denken wir uns irgendwie in eine Folge

[6] Wir verstehen hier und im folgenden unter "Formel aus PM" immer eine ohne Abkürzungen (d. h. ohne Verwendung von Definitionen) geschriebene Formel. Definitionen dienen ja nur der kürzeren Schreibweise und sind daher prinzipiell überflüssig.

[7] D. h. wir bilden die Grundzeichen in eineindeutiger Weise auf natürliche Zahlen ab. (Vgl. die Durchführung auf S. 179.)

[8] D. h. eine Belegung eines Abschnittes der Zahlenreihe mit natürlichen Zahlen. (Zahlen können ja nicht in räumliche Anordnung gebracht werden.)

[9] m. a. W.: Das oben beschriebene Verfahren liefert ein isomorphes Bild des Systems PM im Bereich der Arithmetik und man kann alle metamathematischen Überlegungen ebenso gut an diesem isomorphen Bild vornehmen. Dies geschieht in der folgenden Beweisskizze, d. h. unter "Formel", "Satz", "Variable" etc. *sind immer die entsprechenden Gegenstände des isomorphen Bildes zu verstehen.*

[10] Es wäre sehr leicht (nur etwas umständlich), diese Formel tatsächlich hinzuschreiben.

of the kind specified in footnote 4 become provable owing to the added axioms.

Before going into details, we shall first sketch the main idea of the proof, of course without any claim to complete precision. The formulas of a formal system (we restrict ourselves here to the system PM) in outward appearance are finite sequences of primitive signs (variables, logical constants, and parentheses or punctuation dots), and it is easy to state with complete precision *which* sequences of primitive signs are meaningful formulas and which are not.[6] Similarly, proofs, from a formal point of view, are nothing but finite sequences of formulas (with certain specifiable properties). Of course, for metamathematical considerations it does not matter what objects are chosen as primitive signs, and we shall assign natural numbers to this use.[7] Consequently, a formula will be a finite sequence of natural numbers,[8] and a proof array a finite sequence of finite sequences of natural numbers. The metamathematical notions (propositions) thus become notions (propositions) about natural numbers or sequences of them;[9] therefore they can (at least in part) be expressed by the symbols of the system PM itself. In particular, it can be shown that the notions "formula", "proof array", and "provable formula" can be defined in the system PM; that is, we can, for example, find a formula $F(v)$ of PM with one free variable v (of the type of a number sequence)[10] such that $F(v)$, interpreted according to the meaning of the terms of PM, says: v is a provable formula. We now construct an undecidable proposition of the system PM, that is, a proposition A for which neither A nor *not-A* is provable, in the following manner.

A formula of PM with exactly one free variable, that variable being of the type of the natural numbers (class of classes), will be called a *class sign.* We assume that the class signs have been arranged in a sequence

[6] Here and in what follows we always understand by "formula of PM" a formula written without abbreviations (that is, without the use of definitions). It is well known that [in PM] definitions serve only to abbreviate notations and therefore are dispensable in principle.

[7] That is, we map the primitive signs one-to-one onto some natural numbers. (See how this is done on page 157.)

[8] That is, a number-theoretic function defined on an initial segment of the natural numbers. (Numbers, of course, cannot be arranged in a spatial order.)

[9] In other words, the procedure described above yields an isomorphic image of the system PM in the domain of arithmetic, and all metamathematical arguments can just as well be carried out in this isomorphic image. This is what we do below when we sketch the proof; that is, by "formula", "proposition", "variable", and so on, *we must always understand the corresponding objects of the isomorphic image.*

[10] It would be very easy (although somewhat cumbersome) to actually write down this formula.

geordnet,[11] bezeichnen das n-te mit $R(n)$ und bemerken, daß sich der Begriff "Klassenzeichen" sowie die ordnende Relation R im System PM definieren lassen. Sei α ein beliebiges Klassenzeichen; mit $[\alpha; n]$ bezeichnen wir diejenige Formel, welche aus dem Klassenzeichen α dadurch entsteht, daß man die freie Variable durch das Zeichen für die natürliche Zahl n ersetzt. Auch die Tripel-Relation $x = [y; z]$ erweist sich als innerhalb PM definierbar. Nun definieren wir eine Klasse K natürlicher Zahlen folgendermaßen:

$$n \in K \equiv \overline{\text{Bew}}[R(n); n] \tag{1}$$

(wobei *Bew* x bedeutet: x ist eine beweisbare Formel).[11a] Da die Begriffe, welche im Definiens vorkommen, sämtlich in PM definierbar sind, so auch der daraus zusammengesetzte Begriffe K, d. h. es gibt ein Klassenzeichen S,[12] so daß die Formel $[S; n]$ inhaltlich gedeutet besagt, daß die natürliche Zahl n zu K gehört. S ist als Klassenzeichen mit einem bestimmten $R(q)$ identisch, d. h. es gilt

$$S = R(q)$$

für eine bestimmte natürliche Zahl q. Wir zeigen nun, daß der Satz $[R(q); q]$ in PM unentscheidbar ist.[13] Denn angenommen der Satz $[R(q); q]$ wäre beweisbar, dann wäre er auch richtig, d. h. aber nach dem obigen q würde zu K gehören, d. h. nach (1) es würde $Bew[R(q); q]$ gelten, im Widerspruch mit der Annahme. Wäre dagegen die Negation von $[R(q); q]$ beweisbar, so würde $q \in K$, d. h. $Bew[R(q); q]$ gelten. $[R(q); q]$ wäre also zugleich mit seiner Negation beweisbar, was wiederum unmöglich ist.

Die Analogie dieses Schlusses mit der Antinomie Richard springt in die Augen; auch mit dem "Lügner" besteht eine nahe Verwandtschaft,[14] denn der unentscheidbare Satz $[R(q); q]$ besagt ja, daß q zu K gehört, d. h. nach (1), daß $[R(q); q]$ nicht beweisbar ist. Wir haben also einen Satz vor uns, der

[11] Etwa nach steigender Gliedersumme und bei gleicher Summe lexikographisch.

[11a] Durch Überstreichen wird die Negation bezeichnet.

[12] Es macht wieder nicht die geringsten Schwierigkeiten, die Formel S tatsächlich hinzuschreiben.

[13] Man beachte, daß "$[R(q); q]$" (oder was dasselbe bedeutet "$[S; q]$") bloß eine *metamathematische Beschreibung* des unentscheidbaren Satzes ist. Doch kann man, sobald man die Formel S ermittelt hat, natürlich auch die Zahl q bestimmen und damit den unentscheidbaren Satz selbst effektiv hinschreiben.

[14] Es läßt sich überhaupt jede epistemologische Antinomie zu einem derartigen Unentscheidbarkeitsbeweis verwenden.

in some way,[11] we denote the nth one by $R(n)$, and we observe that the notion "class sign", as well as the ordering relation R, can be defined in the system PM. Let α be any class sign; by $[\alpha; n]$ we denote the formula that results from the class sign α when the free variable is replaced by the sign denoting the natural number n. The ternary relation $x = [y; z]$, too, is seen to be definable in PM. We now define a class K of natural numbers in the following way:

$$n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n); n] \tag{1}$$

(where *Bew* x means: x is a provable formula).[11a] Since the notions that occur in the definiens can all be defined in PM, so can the notion K formed from them; that is, there is a class sign S such that the formula $[S; n]$, interpreted according to the meaning of the terms of PM, states that the natural number n belongs to K.[12] Since S is a class sign, it is identical with some $R(q)$; that is, we have

$$S = R(q)$$

for a certain natural number q. We now show that the proposition $[R(q); q]$ is undecidable in PM.[13] For let us suppose that the proposition $[R(q); q]$ were provable; then it would also be true. But in that case, according to the definitions given above, q would belong to K, that is, by (1), $\overline{Bew}[R(q); q]$ would hold, which contradicts the assumption. If, on the other hand, the negation of $[R(q); q]$ were provable, then $\overline{q \in K}$, that is, $Bew[R(q); q]$, would hold. But then $[R(q); q]$, as well as its negation, would be provable, which again is impossible.

The analogy of this argument with the Richard antinomy leaps to the eye. It is closely related to the "Liar" too;[14] for the undecidable proposition $[R(q); q]$ states that q belongs to K, that is, by (1), that $[R(q); q]$ is not provable. We therefore have before us a proposition that says about itself

[11] For example, by increasing sum of the finite sequence of integers that is the "class sign", and lexicographically for equal sums.

[11a] The bar denotes negation.

[12] Again, there is not the slightest difficulty in actually writing down the formula S.

[13] Note that "$[R(q); q]$" (or, which means the same, "$[S; q]$") is merely a *metamathematical description* of the undecidable proposition. But, as soon as the formula S has been obtained, we can, of course, also determine the number q and, therewith, actually write down the undecidable proposition itself. [This makes no difficulty in principle. However, in order not to run into formulas of entirely unmanageable lengths and to avoid practical difficulties in the computation of the number q, the construction of the undecidable proposition would have to be slightly modified, unless the technique of abbreviation by definition used throughout in PM is adopted.]

[14] Any epistemological antinomy could be used for a similar proof of the existence of undecidable propositions.

seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet.[15] Die eben auseinandergesetzte
176 Beweismethode | läßt sich offenbar auf jedes formale System anwenden, das erstens inhaltlich gedeutet über genügend Ausdrucksmittel verfügt, um die in der obigen Überlegung vorkommenden Begriffe (insbesondere den Begriff "beweisbare Formel") zu definieren, und in dem zweitens jede beweisbare Formel auch inhaltlich richtig ist. Die nun folgende exakte Durchführung des obigen Beweises wird unter anderem die Aufgabe haben, die zweite der eben angeführten Voraussetzungen durch eine rein formale und weit schwächere zu ersetzen.

Aus der Bemerkung, daß $[R(q);q]$ seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, folgt sofort, daß $[R(q);q]$ richtig ist, denn $[R(q);q]$ *ist* ja unbeweisbar (weil unentscheidbar). Der *im System PM* unentscheidbare Satz wurde also durch metamathematische Überlegungen doch entschieden. Die genaue Analyse dieses merkwürdigen Umstandes führt zu überraschenden Resultaten, bezüglich der Widerspruchsfreiheitsbeweise formaler Systeme, die in Abschnitt 4 (Satz XI) näher behandelt werden.

2

Wir gehen nun an die exakte Durchführung des oben skizzierten Beweises und geben zunächst eine genaue Beschreibung des formalen Systems P, für welches wir die Existenz unentscheidbarer Sätze nachweisen wollen. P ist im wesentlichen das System, welches man erhält, wenn man die Peanoschen Axiome mit der Logik der PM[16] überbaut (Zahlen als Individuen, Nachfolgerrelation als undefinierten Grundbegriff).

Die Grundzeichen des Systems P sind die folgenden:

I. Konstante: "$\sim$" (nicht), "$\vee$" (oder), "Π" (für alle), "0" (Null), "f" (der Nachfolger von), "(", ")" (Klammern).

II. Variable ersten Typs (für Individuen, d. h. natürliche Zahlen inklusive 0): "x_1", "y_1", "z_1", ...

Variable zweiten Typs (für Klassen von Individuen): "x_2", "y_2", "z_2", ...

Variable dritten Typs (für Klassen von Klassen von Individuen): "x_3", "y_3", "z_3", ...

[15] Ein solcher Satz hat entgegen dem Anschein nichts Zirkelhaftes an sich, denn er behauptet zunächst die Unbeweisbarkeit einer ganz bestimmten Formel (nämlich der q-ten in der lexikographischen Anordnung bei einer bestimmten Einsetzung), und erst nachträglich (gewissermaßen zufällig) stellt sich heraus, daß diese Formel gerade die ist, in der er selbst ausgedrückt wurde.

[16] Die Hinzufügung der Peanoschen Axiome ebenso wie alle anderen am System PM angebrachten Abänderungen dienen lediglich zur Vereinfachung des Beweises und sind prinzipiell entbehrlich.

that it is not provable [in PM].[15] The method of proof just explained can clearly be applied to any formal system that, first, when interpreted as representing a system of notions and propositions, has at its disposal sufficient means of expression to define the notions occurring in the argument above (in particular, the notion "provable formula") and in which, second, every provable formula is true in the interpretation considered. The purpose of carrying out the above proof with full precision in what follows is, among other things, to replace the second of the assumptions just mentioned by a purely formal and much weaker one.

From the remark that $[R(q);q]$ says about itself that it is not provable, it follows at once that $[R(q);q]$ is true, for $[R(q);q]$ *is* indeed unprovable (being undecidable). Thus, the proposition that is undecidable *in the system PM* still was decided by metamathematical considerations. The precise analysis of this curious situation leads to surprising results concerning consistency proofs for formal systems, results that will be discussed in more detail in Section 4 (Theorem XI).

2

We now proceed to carry out with full precision the proof sketched above. First we give a precise description of the formal system P for which we intend to prove the existence of undecidable propositions. P is essentially the system obtained when the logic of PM is superposed upon the Peano axioms[16] (with the numbers as individuals and the successor relation as primitive notion).

The primitive signs of the system P are the following:

I. Constants: "$\sim$" (not), "$\vee$" (or), "Π" (for all), "0" (zero), "f" (the successor of), "(", ")" (parentheses).

II. Variables of type 1 (for individuals, that is, natural numbers including 0): "x_1", "y_1","z_1", ...

Variables of type 2 (for classes of individuals): "x_2","y_2","z_2", ...

Variables of type 3 (for classes of classes of individuals): "x_3","y_3", "z_3", ...

[15] Contrary to appearances, such a proposition involves no faulty circularity, for initially it [only] asserts that a certain well-defined formula (namely, the one obtained from the qth formula in the lexicographic order by a certain substitution) is unprovable. Only subsequently (and so to speak by chance) does it turn out that this formula is precisely the one by which the proposition itself was expressed.

[16] The addition of the Peano axioms, as well as all other modifications introduced in the system PM, merely serves to simplify the proof and is dispensable in principle.

Usw. für jede natürliche Zahl als Typus.[17]

Anmerkung: Variable für zwei- und mehrstellige Funktionen (Relationen) sind als Grundzeichen überflüssig, da man Relationen als Klassen geordneter Paare definieren kann und geordnete Paare wiederum als Klassen von Klassen, z. B. das geordnete Paar a, b durch $((a), (a, b))$, wo (x, y) bzw. (x) die Klassen bedeuten, deren einzige Elemente x, y bzw. x sind.[18]

177 | Unter einem *Zeichen ersten Typs* verstehen wir eine Zeichenkombination der Form:

$$a,\ fa,\ ffa,\ fffa,\ldots \quad \text{usw.},$$

wo a entweder 0 oder eine Variable ersten Typs ist. Im ersten Fall nennen wir ein solches Zeichen *Zahlzeichen*. Für $n > 1$ verstehen wir unter einem *Zeichen n-ten Typs* dasselbe wie *Variable n-ten Typs*. Zeichenkombinationen der Form $a(b)$, wo b ein Zeichen n-ten und a ein Zeichen $(n+1)$-ten Typs ist, nennen wir *Elementarformeln*. Die Klasse der *Formeln* definierten wir als die kleinste Klasse,[19] zu welcher sämtliche Elementarformeln gehören und zu welcher zugleich mit a, b stets auch $\sim(a)$, $(a) \vee (b)$, $x\Pi(a)$ gehören (wobei x eine beliebige Variable ist).[19a] $(a) \vee (b)$ nennen wir die *Disjunktion* aus a und b, $\sim(a)$ die *Negation* und $x\Pi(a)$ eine *Generalisation* von a. *Satzformel* heißt eine Formel, in der keine freie Variable vorkommt (*freie Variable* in der bekannten Weise definiert). Eine Formel mit genau n freien Individuenvariablen (und sonst keinen freien Variablen) nennen wir *n-stelliges Relationszeichen*, für $n = 1$ auch *Klassenzeichen*.

Unter Subst $a(^v_b)$ (wo a eine Formel, v eine Variable und b ein Zeichen vom selben Typ wie v bedeutet) verstehen wir die Formel, welche aus a entsteht, wenn man darin v überall, wo es frei ist, durch b ersetzt.[20] Wir sagen, daß eine Formel a eine *Typenerhöhung* einer anderen b ist, wenn a aus b dadurch entsteht, daß man den Typus aller in b vorkommenden Variablen um die gleiche Zahl erhöht.

[17] Es wird vorausgesetzt, daß für jeden Variablentypus abzählbar viele Zeichen zur Verfügung stehen.

[18] Auch inhomogene Relationen können auf diese Weise definiert werden, z. B. eine Relation zwischen Individuen und Klassen als eine Klasse aus Elementen der Form: $((x_2), ((x_1), x_2))$. Alle in den *PM* über Relationen beweisbaren Sätze sind, wie eine einfache Überlegung lehrt, auch bei dieser Behandlungsweise beweisbar.

[19] Bez. dieser Definition (und analoger später vorkommender) vgl. *Lukasiewicz und Tarski 1930.*

[19a] $x\Pi(a)$ ist also auch dann eine Formel, wenn x in a nicht oder nicht frei vorkommt. In diesem Fall bedeutet $x\Pi(a)$ natürlich dasselbe wie a.

[20] Falls v in a nicht als freie Variable vorkommt, soll Subst $a(^v_b) = a$ sein. Man beachte, daß "Subst" ein Zeichen der Metamathematik ist.

And so on, for every natural number as a type.[17]

Remark: Variables for functions of two or more argument places (relations) need not be included among the primitive signs, since we can define relations to be classes of ordered pairs, and ordered pairs to be classes of classes; for example, the ordered pair a, b can be defined to be $((a), (a, b))$, where (x, y) denotes the class whose sole elements are x and y, and (x) the class whose sole element is x.[18]

By a *sign of type* 1 we understand a combination of signs that has [any one of] the forms

$$a,\ fa,\ ffa,\ fffa,\ldots, \quad \text{and so on},$$

where a is either 0 or a variable of type 1. In the first case, we call such a sign a *numeral*. For $n > 1$ we understand by a *sign of type n* the same thing as by a *variable of type n*. A combination of signs that has the form $a(b)$, where b is a sign of type n and a is a sign of type $n + 1$, will be called an *elementary formula*. We define the class of *formulas* to be the smallest class[19] containing all elementary formulas and containing $\sim(a)$, $(a) \vee (b)$, $x\Pi(a)$ (where x may be any variable)[19a] whenever it contains a and b. We call $(a) \vee (b)$ the *disjunction* of a and b, $\sim(a)$ the *negation* and $x\Pi(a)$ a *generalization* of a. A formula in which no free variable occurs (*free variable* being defined in the well-known manner) is called a *sentential formula*. A formula with exactly n free individual variables (and no other free variables) will be called an *n-place relation sign*; for $n = 1$ it will also be called a *class sign*.

By Subst $a(^v_b)$ (where a stands for a formula, v for a variable, and b for a sign of the same type as v) we understand the formula that results from a if in a we replace v, wherever it is free, by b.[20] We say that a formula a is a *type elevation* of another formula b if a results from b when the type of each variable occurring in b is increased by the same number.

[17] It is assumed that we have denumerably many signs at our disposal for each type of variables.

[18] Nonhomogeneous relations, too, can be defined in this manner; for example, a relation between individuals and classes can be defined to be a class of elements of the form $((x_2), ((x_1), x_2))$. Every proposition about relations that is provable in *PM* is provable also when treated in this manner, as is readily seen.

[19] Concerning this definition (and similar definitions occurring below) see *Lukasiewicz and Tarski 1930.*

[19a] Hence $x\Pi(a)$ is a formula even if x does not occur in a or is not free in a. In this case, of course, $x\Pi(a)$ means the same thing as a.

[20] In case v does not occur in a as a free variable we put Subst $a(^v_b) = a$. Note that "Subst" is a metamathematical sign.

Folgende Formeln (I bis V) heißen *Axiome* (sie sind mit Hilfe der in bekannter Weise definierten Abkürzungen: ., $\supset$, $\equiv$, (Ex), $=$[21] und mit Verwendung der üblichen Konventionen über das Weglassen von Klammern angeschrieben):[22]

I. 1. $\sim(fx_1 = 0)$,
2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$,
3. $x_2(0) \,.\, x_1\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1\Pi(x_2(x_1))$.

178 | II. Jede Formel, die aus den folgenden Schemata durch Einsetzung beliebiger Formeln für p, q, r entsteht.

1. $p \vee p \supset p$,
2. $p \supset p \vee q$,
3. $p \vee q \supset q \vee p$,
4. $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$.

III. Jede Formel, die aus einem der beiden Schemata
1. $v\Pi(a) \supset \text{Subst } a(^v_c)$,
2. $v\Pi(b \vee a) \supset b \vee v\Pi(a)$

dadurch entsteht, daß man für a, v, b, c folgende Einsetzungen vornimmt (und in 1. die durch "Subst" angezeigte Operation ausführt):

Für a eine beliebige Formel, für v eine beliebige Variable, für b eine Formel, in der v nicht frei vorkommt, für c ein Zeichen vom selben Typ wie v, vorausgesetzt, daß c keine Variable enthält, welche in a an einer Stelle gebunden ist, an der v frei ist.[23]

IV. Jede Formel, die aus dem Schema
1. $(Eu)(v\Pi(u(v) \equiv a))$

dadurch entsteht, daß man für v bzw. u beliebige Variable vom Typ n bzw. $n+1$ und für a eine Formel, die u nicht frei enthält, einsetzt. Dieses Axiom vertritt das Reduzibilitätsaxiom (Komprehensionsaxiom der Mengenlehre).

V. Jede Formel, die aus der folgenden durch Typenerhöhung entsteht (und diese Formel selbst):
1. $x_1\Pi(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$.

Dieses Axiom besagt, daß eine Klasse durch ihre Elemente vollständig bestimmt ist.

Eine Formel c heißt *unmittelbare Folge* aus a und b (bzw. aus a), wenn a die Formel $(\sim(b)) \vee (c)$ ist (bzw. wenn c die Formel $v\Pi(a)$ ist, wo v eine beliebige Variable bedeutet). Die Klasse der *beweisbaren Formeln* wird

[21] $x_1 = y_1$ ist, wie in *PM*, I, *13, durch $x_2\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$ definiert zu denken (ebenso für die höheren Typen).

[22] Um aus den angeschriebenen Schemata die Axiome zu erhalten, muß man also (in II, III, IV nach Ausführung der erlaubten Einsetzungen) noch
1. die Abkürzungen eliminieren,
2. die unterdrückten Klammern hinzufügen.

Man beachte, daß die so entstehenden Ausdrücke "Formeln" in obigem Sinn sein müssen. (Vgl. auch die exakten Definitionen der metamathematischen Begriffe S. 182fg.)

[23] c ist also entweder eine Variable oder 0 oder ein Zeichen der Form $f \ldots fu$, wo u entweder 0 oder eine Variable 1. Typs ist. Bezüglich des Begriffs "frei (gebunden) an einer Stelle von a" vgl. *von Neumann 1927*, I, A5.

The following formulas (I–V) are called *axioms* (we write them using the abbreviations ., $\supset$, $\equiv$, (Ex), $=$,[21] defined in the well-known manner, and observing the usual conventions about omitting parentheses):[22]

I. 1. $\sim(fx_1 = 0)$,
2. $fx_1 = fy_1 \supset x_1 = y_1$,
3. $x_2(0) \,.\, x_1\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(fx_1)) \supset x_1\Pi(x_2(x_1))$.

II. All formulas that result from the following schemata by substitution of any formulas whatsoever for p, q, r:

1. $p \vee p \supset p$,
2. $p \supset p \vee q$,
3. $p \vee q \supset q \vee p$,
4. $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$.

III. Any formula that results from either one of the two schemata
1. $v\Pi(a) \supset \text{Subst } a(^v_c)$,
2. $v\Pi(b \vee a) \supset b \vee v\Pi(a)$

when the following substitutions are made for a, v, b, and c (and the operation indicated by "Subst" is performed in 1):

For a any formula, for v any variable, for b any formula in which v does not occur free, and for c any sign of the same type as v, provided c does not contain any variable that is bound in a at a place where v is free.[23]

IV. Every formula that results from the schema
1. $(Eu)(v\Pi(u(v) \equiv a))$

when for v we substitute any variable of type n, for u one of type $n+1$, and for a any formula that does not contain u free. This axiom plays the role of the axiom of reducibility (the comprehension axiom of set theory).

V. Every formula that results from
1. $x_1\Pi(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset x_2 = y_2$

by type elevation (as well as this formula itself). This axiom states that a class is completely determined by its elements.

A formula c is called an *immediate consequence* of a and b if a is the formula $(\sim(b)) \vee (c)$, and it is called an *immediate consequence* of a if it is the formula $v\Pi(a)$, where v denotes any variable. The class of *provable formulas* is defined to be the smallest class of formulas that contains the

[21] $x_1 = y_1$ is to be regarded as defined by $x_2\Pi(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$, as in *PM*, I, *13 (similarly for higher types).

[22] In order to obtain the axioms from the schemata listed we must therefore
(1) eliminate the abbreviations and
(2) add the omitted parentheses
(in II, III, and IV after carrying out the substitutions allowed).

Note that all expressions thus obtained are "formulas" in the sense specified above. (See also the exact definitions of the metamathematical notions on pp. 163ff.)

[23] Therefore c is a variable or 0 or a sign of the form $f \ldots fu$, where u is either 0 or a variable of type 1. Concerning the notion "free (bound) at a place in a", see I, A5 in *von Neumann 1927*.

definiert als die kleinste Klasse von Formeln, welche die Axiome enthält und gegen die Relation "unmittelbare Folge" abgeschlossen ist.[24]

Wir ordnen nun den Grundzeichen des Systems P in folgender Weise eineindeutig natürliche Zahlen zu:

179 |

"0" ... 1 "f" ... 3 "$\sim$" ... 5
"$\vee$" ... 7 "Π" ... 9 "(" ... 11
")" ... 13,

ferner den Variablen n-ten Typs die Zahlen der Form p^n (wo p eine Primzahl > 13 ist). Dadurch entspricht jeder endlichen Reihe von Grundzeichen (also auch jeder Formel) in eineindeutiger Weise eine endliche Reihe natürlicher Zahlen. Die endlichen Reihen natürlicher Zahlen bilden wir nun (wieder eineindeutig) auf natürliche Zahlen ab, indem wir der Reihe $n_1, n_2, \ldots, n_k$ die Zahl $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ entsprechen lassen, wo p_k die k-te Primzahl (der Größe nach) bedeutet. Dadurch ist nicht nur jedem Grundzeichen, sondern auch jeder endlichen Reihe von solchen in eineindeutiger Weise eine natürliche Zahl zugeordnet. Die dem Grundzeichen (bzw. der Grundzeichenreihe) a zugeordnete Zahl bezeichnen wir mit $\Phi(a)$. Sei nun irgend eine Klasse oder Relation $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zwischen Grundzeichen oder Reihen von solchen gegeben. Wir ordnen ihr diejenige Klasse (Relation) $R'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zwischen natürlichen Zahlen zu, welche dann und nur dann zwischen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ besteht, wenn es solche $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt, daß $x_i = \Phi(a_i)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gilt. Diejenigen Klassen und Relationen natürlicher Zahlen, welche auf diese Weise den bisher definierten metamathematischen Begriffen, z. B. "Variable", "Formel", "Satzformel", "Axiom", "beweisbare Formel" usw. zugeordnet sind, bezeichnen wir mit denselben Worten in Kursivschrift [[hier in Kapitälchen]]. Der Satz, daß es im System P unentscheidbare Probleme gibt, lautet z. B. folgendermaßen: Es gibt SATZFORMELN a, so daß weder a noch die NEGATION von a BEWEISBARE FORMELN sind.

Wir schalten nun eine Zwischenbetrachtung ein, die mit dem formalen System P vorderhand nichts zu tun hat, und geben zunächst folgende Definition: Eine zahlentheoretische Funktion[25] $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt *rekursiv definiert aus* den zahlentheoretischen Funktionen $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ und

[24]Die Einsetzungsregel wird dadurch überflüssig, daß wir alle möglichen Einsetzungen bereits in den Axiomen selbst vorgenommen haben (analog bei *von Neumann 1927*).

[25]D. h. ihr Definitionsbereich ist die Klasse der nicht negativen ganzen Zahlen (bzw. der n-tupel von solchen) und ihre Werte sind nicht negative ganze Zahlen.

axioms and is closed under the relation "immediate consequence".[24]

We now assign natural numbers to the primitive signs of the system P by the following one-to-one correspondence:

"0" ... 1 "f" ... 3 "$\sim$" ... 5
"$\vee$" ... 7 "Π" ... 9 "(" ... 11
")" ... 13,

further to the variables of type n the numbers of the form p^n (where p is a prime number > 13). Thus we have a one-to-one correspondence by which a finite sequence of natural numbers is associated with every finite sequence of primitive signs (hence also with every formula). We now map the finite sequences of natural numbers on natural numbers (again by a one-to-one correspondence), associating the number $2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$, where p_k denotes the kth prime number (in order of increasing magnitude), with the sequence $n_1, n_2, \ldots, n_k$. A natural number [[out of a certain subset]] is thus assigned one-to-one not only to every primitive sign but also to every finite sequence of such signs. We denote by $\Phi(a)$ the number assigned to the primitive sign (or to the sequence of primitive signs) a. Now let some relation (or class) $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ between [or of] primitive signs or sequences of primitive signs be given. With it we associate the relation (or class) $R'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ between [or of] natural numbers that obtains between $x_1, x_2, \ldots, x_n$ if and only if there are some $a_1, a_2, \ldots, a_n$ such that $x_i = \Phi(a_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ and $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ holds. The relations between (or classes of) natural numbers that in this manner are associated with the metamathematical notions defined so far, for example, "variable", "formula", "sentential formula", "axiom", "provable formula", and so on, will be denoted by the same words in SMALL CAPITALS. The proposition that there are undecidable problems in the system P, for example, reads thus: There are SENTENTIAL FORMULAS a such that neither a nor the NEGATION of a is a PROVABLE FORMULA.

We now insert a parenthetic consideration that for the present has nothing to do with the formal system P. First we give the following definition: A number-theoretic function[25] $\phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is said to be *recursively defined in terms of* the number-theoretic functions $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ and

[24]The rule of substitution is rendered superfluous by the fact that all possible substitutions have already been carried out in the axioms themselves. (This procedure was used also in *von Neumann 1927*.)

[25]That is, its domain of definition is the class of nonnegative integers (or of n-tuples of non-negative integers) and its values are nonnegative integers.

$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, wenn für alle $x_2, \ldots, x_n, k$[26] folgendes gilt:

$$\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n),$$
$$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \phi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n). \quad (2)$$

Eine zahlentheoretische Funktion ϕ heißt *rekursiv*, wenn es eine endliche Reihe von zahlentheoretischen Funktionen $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ gibt, welche mit ϕ endet und die Eigenschaft hat, daß jede Funktion ϕ_k der Reihe entweder
180 aus zwei der vorhergehenden rekursiv definiert ist oder | aus irgend welchen der vorhergehenden durch Einsetzung entsteht[27] oder schließlich eine Konstante oder die Nachfolgerfunktion $x+1$ ist. Die Länge der kürzesten Reihe von ϕ_i, welche zu einer rekursiven Funktion ϕ gehört, heißt ihre *Stufe*. Eine Relation zwischen natürlichen Zahlen $R(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *rekursiv*,[28] wenn es eine rekursive Funktion $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, so daß für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$R(x_1, \ldots, x_n) \sim [\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0].^{29}$$

Es gelten folgende Sätze:

I. *Jede aus rekursiven Funktionen (Relationen) durch Einsetzung rekursiver Funktionen an Stelle der Variablen entstehende Funktion (Relation) ist rekursiv; ebenso jede Funktion, die aus rekursiven Funktionen durch rekursive Definition nach dem Schema* (2) *entsteht.*

II. *Wenn R und S rekursive Relationen sind, dann auch $\overline{R}, R \vee S$ (daher auch $R \,\&\, S$).*

III. *Wenn die Funktionen $\phi(\mathfrak{x}), \psi(\mathfrak{y})$ rekursiv sind, dann auch die Relation: $\phi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{y})$.*[30]

IV. *Wenn die Funktion $\phi(\mathfrak{x})$ und die Relation $R(x, \mathfrak{y})$ rekursiv sind, dann auch die Relationen S, T*

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim (Ex)[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \,\&\, R(x, \mathfrak{y})]$$

[26]Kleine lateinische Buchstaben (eventuell mit Indizes) sind im folgenden immer Variable für nicht negative ganze Zahlen (falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist).

[27]Genauer: durch Einsetzung gewisser der vorhergehenden Funktionen an die Leerstellen einer der vorhergehenden, z. B. $\phi_k(x_1, x_2) = \phi_p[\phi_q(x_1, x_2), \phi_r(x_2)]$ $(p, q, r < k)$. Nicht alle Variable der linken Seite müssen auch rechts vorkommen (ebenso im Rekursionsschema (2)).

[28]Klassen rechnen wir mit zu den Relationen (einstellige Relationen). Rekursive Relationen R haben natürlich die Eigenschaft, daß man für jedes spezielle Zahlen-n-tupel entscheiden kann, ob $R(x_1, \ldots, x_n)$ gilt oder nicht.

[29]Für alle inhaltlichen (insbesondere auch die metamathematischen) Überlegungen wird die Hilbertsche Symbolik verwendet. Vgl. *Hilbert und Ackermann 1928.*

[30]Wir verwenden deutsche Buchstaben $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ als abkürzende Bezeichnung für beliebige Variablen-n-tupel, z. B. $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ if

$$\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n),$$
$$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu(k, \phi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \quad (2)$$

hold for all $x_2, \ldots, x_n, k$.[26]

A number-theoretic function ϕ is said to be *recursive* if there is a finite sequence of number-theoretic functions $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ that ends with ϕ and has the property that every function ϕ_k of the sequence is recursively defined in terms of two of the preceding functions, or results from any of the preceding functions by substitution,[27] or, finally, is a constant or the successor function $x+1$. The length of the shortest sequence of ϕ_i corresponding to a recursive function ϕ is called its *degree*. A relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ between natural numbers is said to be *recursive*[28] if there is a recursive function $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ such that, for all $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$R(x_1, \ldots, x_n) \sim [\phi(x_1, \ldots, x_n) = 0].^{29}$$

The following theorems hold:

I. *Every function (relation) obtained from recursive functions (relations) by substitution of recursive functions for the variables is recursive; so is every function obtained from recursive functions by recursive definition according to Schema* (2).

II. *If R and S are recursive relations, so are $\overline{R}$ and $R \vee S$ (hence also $R \,\&\, S$).*

III. *If the functions $\phi(\mathfrak{x})$ and $\psi(\mathfrak{y})$ are recursive, so is the relation $\phi(\mathfrak{x}) = \psi(\mathfrak{y})$.*[30]

IV. *If the function $\phi(\mathfrak{x})$ and the relation $R(x, \mathfrak{y})$ are recursive, so are the relations S and T defined by*

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim (Ex)[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \,\&\, R(x, \mathfrak{y})]$$

[26]In what follows, lower-case italic letters (with or without subscripts) are always variables for nonnegative integers (unless the contrary is expressly noted).

[27]More precisely, by substitution of some of the preceding functions at the argument places of one of the preceding functions, for example, $\phi_k(x_1, x_2) = \phi_p[\phi_q(x_1, x_2), \phi_r(x_2)]$ $(p, q, r < k)$. Not all variables on the left side need occur on the right side (the same applies to the recursion schema (2)).

[28]We include classes among relations (as one-place relations). Recursive relations R, of course, have the property that for every given n-tuple of numbers it can be decided whether $R(x_1, \ldots, x_n)$ holds or not.

[29]Whenever formulas are used to express a meaning (in particular, in all formulas expressing metamathematical propositions or notions), Hilbert's symbolism is employed. See *Hilbert and Ackermann 1928.*

[30]We use German letters, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, as abbreviations for arbitrary n-tuples of variables, for example, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$T(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \sim (x)[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \to R(x,\mathfrak{y})]$$

sowie die Funktion ψ

$$\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \varepsilon x[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \,\&\, R(x,\mathfrak{y})],$$

wobei $\varepsilon x F(x)$ bedeutet: Die kleinste Zahl x, für welche $F(x)$ gilt und 0, falls es keine solche Zahl gibt.

Satz I folgt unmittelbar aus der Definition von "rekursiv". Satz II und III beruhen darauf, daß die den logischen Begriffen $\overline{}$, $\vee$, $=$ entsprechenden zahlentheoretischen Funktionen

$$\alpha(x), \quad \beta(x,y), \quad \gamma(x,y)$$

nämlich:

$$\alpha(0) = 1,\ \alpha(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0,$$
$$\beta(0,x) = \beta(x,0) = 0,\ \beta(x,y) = 1 \text{ wenn } x,y \text{ beide } \neq 0 \text{ sind},$$
181 | $$\gamma(x,y) = 0 \text{ wenn } x = y,\ \gamma(x,y) = 1 \text{ wenn } x \neq y,$$

rekursiv sind, wie man sich leicht überzeugen kann. Der Beweis für Satz IV ist kurz der folgende: Nach der Voraussetzung gibt es ein rekursives $\rho(x,\mathfrak{y})$, so daß:

$$R(x,\mathfrak{y}) \sim [\rho(x,\mathfrak{y}) = 0].$$

Wir definieren nun nach dem Rekursionsschema (2) eine Funktion $\chi(x,\mathfrak{y})$ folgendermaßen:

$$\chi(0,\mathfrak{y}) = 0$$

$$\chi(n+1,\mathfrak{y}) = (n+1) \cdot a + \chi(n,\mathfrak{y}) \cdot \alpha(a),^{31}$$

wobei $a = \alpha[\alpha(\rho(0,\mathfrak{y}))] \cdot \alpha[\rho(n+1,\mathfrak{y})] \cdot \alpha[\chi(n,\mathfrak{y})]$.

$\chi(n+1,\mathfrak{y})$ ist daher entweder $= n+1$ (wenn $a = 1$) oder $= \chi(n,\mathfrak{y})$ (wenn $a = 0$).[32] Der erste Fall tritt offenbar dann und nur dann ein, wenn sämtliche Faktoren von a 1 sind, d. h. wenn gilt:

$$\overline{R}(0,\mathfrak{y}) \,\&\, R(n+1,\mathfrak{y}) \,\&\, [\chi(n,\mathfrak{y}) = 0].$$

[31] Wir setzen als bekannt voraus, daß die Funktionen $x+y$ (Addition), $x \cdot y$ (Multiplikation) rekursiv sind.

[32] Andere Werte als 0 und 1 kann a, wie aus der Definition für α ersichtlich ist, nicht annehmen.

and

$$T(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \sim (x)[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \to R(x,\mathfrak{y})],$$

as well as the function ψ *defined by*

$$\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \varepsilon x[x \leq \phi(\mathfrak{x}) \,\&\, R(x,\mathfrak{y})],$$

where $\varepsilon x F(x)$ means the least number x for which $F(x)$ holds and 0 in case there is no such number.

Theorem I follows at once from the definition of "recursive". Theorems II and III are consequences of the fact that the number-theoretic functions

$$\alpha(x), \quad \beta(x,y), \quad \gamma(x,y),$$

corresponding to the logical notions $\overline{}$, $\vee$, and $=$, namely,

$$\alpha(0) = 1,\ \alpha(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0,$$
$$\beta(0,x) = \beta(x,0) = 0,\ \beta(x,y) = 1 \text{ when } x \text{ and } y \text{ are both } \neq 0,$$
$$\gamma(x,y) = 0 \text{ when } x = y,\ \gamma(x,y) = 1 \text{ when } x \neq y,$$

are recursive, as we can readily see. The proof of Theorem IV is briefly as follows. By assumption there is a recursive $\rho(x,\mathfrak{y})$ such that

$$R(x,\mathfrak{y}) \sim [\rho(x,\mathfrak{y}) = 0].$$

We now define a function $\chi(x,\mathfrak{y})$ by the recursion schema (2) in the following way:

$$\chi(0,\mathfrak{y}) = 0,$$

$$\chi(n+1,\mathfrak{y}) = (n+1) \cdot a + \chi(n,\mathfrak{y}) \cdot \alpha(a),^{31}$$

where $a = \alpha[\alpha(\rho(0,\mathfrak{y}))] \cdot \alpha[\rho(n+1,\mathfrak{y})] \cdot \alpha[\chi(n,\mathfrak{y})]$.

Therefore $\chi(n+1,\mathfrak{y})$ is equal either to $n+1$ (if $a = 1$) or to $\chi(n,\mathfrak{y})$ (if $a = 0$).[32] The first case clearly occurs if and only if all factors of a are 1, that is, if

$$\overline{R}(0,\mathfrak{y}) \,\&\, R(n+1,\mathfrak{y}) \,\&\, [\chi(n,\mathfrak{y}) = 0]$$

holds.

[31] We assume familiarity with the fact that the functions $x+y$ (addition) and $x \cdot y$ (multiplication) are recursive.

[32] a cannot take values other than 0 and 1, as can be seen from the definition of α.

Daraus folgt, daß die Funktion $\chi(n, \mathfrak{y})$ (als Funktion von n betrachtet) 0 bleibt bis zum kleinsten Wert von n, für den $R(n, \mathfrak{y})$ gilt, und von da ab gleich diesem Wert ist (falls schon $R(0, \mathfrak{y})$ gilt, ist dem entsprechend $\chi(n, \mathfrak{y})$ konstant und $= 0$). Demnach gilt:

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \chi(\phi(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}),$$

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim R[\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \mathfrak{y}].$$

Die Relation T läßt sich durch Negation auf einen zu S analogen Fall zurückführen, womit Satz IV bewiesen ist.

Die Funktionen $x + y$, $x \cdot y$, x^y, ferner die Relationen $x < y$, $x = y$ sind, wie man sich leicht überzeugt, rekursiv und wir definieren nun, von diesen Begriffen ausgehend, eine Reihe von Funktionen (Relationen) 1-45, deren jede aus den vorhergehenden mittels der in den Sätzen I bis IV genannten Verfahren definiert ist. Dabei sind meistens mehrere der nach Satz I bis IV erlaubten Definitionsschritte in einen zusammengefaßt. Jede der Funktionen (Relationen) 1–45, unter denen z. B. die Begriffe "FORMEL", "AXIOM", "UNMITTELBARE FOLGE" vorkommen, ist daher rekursiv.

182 | 1. $x/y \equiv (Ez)[z \leq x \,\&\, x = y \cdot z]$,[33]
x ist teilbar durch y.[34]

2. $\mathrm{Prim}(x) \equiv \overline{(Ez)}[z \leq x \,\&\, z \neq 1 \,\&\, z \neq x \,\&\, x/z] \,\&\, x > 1$,
x ist Primzahl.

3. $0\, Pr\, x \equiv 0$
$(n+1)\, Pr\, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, x/y \,\&\, y > n\ Pr\, x]$,
$n\, Pr\, x$ ist die n-te (der Größe nach) in x enthaltene Primzahl.[34a]

4. $0! \equiv 1$
$(n+1)! \equiv (n+1) \cdot n!$

5. $Pr(0) \equiv 0$
$Pr(n+1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{Pr(n)\}! + 1 \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, y > Pr(n)]$,
$Pr(n)$ ist die n-te Primzahl (der Größe nach).

6. $n\, Gl\, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, x/(n\, Pr\, x)^y \,\&\, \overline{x/(n\, Pr\, x)^{y+1}}]$,
$n\, Gl\, x$ ist das n-te Glied der der Zahl x zugeordneten Zahlenreihe (für $n > 0$ und n nicht größer als die Länge dieser Reihe).

7. $l(x) \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, y\, Pr\, x > 0 \,\&\, (y+1)\, Pr\, x = 0]$,

[33] Das Zeichen $\equiv$ wird im Sinne von "Definitionsgleichheit" verwendet, vertritt also bei Definitionen entweder $=$ oder $\sim$ (im übrigen ist die Symbolik die Hilbertsche).

[34] Überall, wo in den folgenden Definitionen eines der Zeichen (x), (Ex), εx auftritt, ist es von einer Abschätzung für x gefolgt. Diese Abschätzung dient lediglich dazu, um die rekursive Natur des definierten Begriffs (vgl. Satz IV) zu sichern. Dagegen würde sich der *Umfang* der definierten Begriffe durch Weglassung dieser Abschätzung meistens nicht ändern.

[34a] Für $0 < n \leq z$, wenn z die Anzahl der verschiedenen in x aufgehenden Primzahlen ist. Man beachte, daß, für $n = z + 1$, $n\, Pr\, x = 0$ ist!

From this it follows that the function $\chi(n, \mathfrak{y})$ (considered as a function of n) remains 0 up to [but not including] the least value of n for which $R(n, \mathfrak{y})$ holds and, from there on, is equal to that value. (Hence, in case $R(0, \mathfrak{y})$ holds, $\chi(n, \mathfrak{y})$ is constant and equal to 0.) We have, therefore,

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \chi(\phi(\mathfrak{x}), \mathfrak{y}),$$

$$S(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \sim R[\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \mathfrak{y}].$$

The relation T can, by negation, be reduced to a case analogous to that of S. Theorem IV is thus proved.

The functions $x + y$, $x \cdot y$, and x^y, as well as the relations $x < y$ and $x = y$, are recursive, as we can readily see. Starting from these notions, we now define a number of functions (relations) 1–45, each of which is defined in terms of preceding ones by the procedures given in Theorems I–IV. In most of these definitions several of the steps allowed by Theorems I–IV are condensed into one. Each of the functions (relations) 1–45, among which occur, for example, the notions "FORMULA", "AXIOM", and "IMMEDIATE CONSEQUENCE", is therefore recursive.

1. $x/y \equiv (Ez)[z \leq x \,\&\, x = y \cdot z]$,[33]
x is divisible by y.[34]

2. $\mathrm{Prim}(x) \equiv \overline{(Ez)}[z \leq x \,\&\, z \neq 1 \,\&\, z \neq x \,\&\, x/z] \,\&\, x > 1$,
x is a prime number.

3. $0\, Pr\, x \equiv 0$,
$(n+1)\, Pr\, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, x/y \,\&\, y > n\, Pr\, x]$,
$n\, Pr\, x$ is the nth prime number (in order of increasing magnitude) contained in x.[34a]

4. $0! \equiv 1$,
$(n+1)! \equiv (n+1) \cdot n!$.

5. $Pr(0) \equiv 0$,
$Pr(n+1) \equiv \varepsilon y[y \leq \{Pr(n)\}! + 1 \,\&\, \mathrm{Prim}(y) \,\&\, y > Pr(n)]$,
$Pr(n)$ is the nth prime number (in order of increasing magnitude).

6. $n\, Gl\, x \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, x/(n\, Pr\, x)^y \,\&\, \overline{x/(n\, Pr\, x)^{y+1}}]$,
$n\, Gl\, x$ is the nth term of the number sequence assigned to the number x (for $n > 0$ and n not greater than the length of this sequence).

7. $l(x) \equiv \varepsilon y[y \leq x \,\&\, y\, Pr\, x > 0 \,\&\, (y+1)\, Pr\, x = 0]$,

[33] The sign $\equiv$ is used in the sense of "equality by definition"; hence in definitions it stands for either $=$ or $\sim$ (otherwise, the symbolism is Hilbert's).

[34] Wherever one of the signs (x), (Ex), or εx occurs in the definitions below, it is followed by a bound on x. This bound merely serves to ensure that the notion defined is recursive (see Theorem IV). But in most cases the *extension* of the notion defined would not change if this bound were omitted.

[34a] For $0 < n \leq z$, when z is the number of distinct prime factors of x. Note that $n\, Pr\, x = 0$ for $n = z + 1$.

$l(x)$ ist die Länge der x zugeordneten Zahlenreihe.

8. $x * y \equiv \varepsilon z\{z \leq [Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \,\&$
$(n)[n \leq l(x) \to n\,Gl\,z = n\,Gl\,x]\,\&$
$(n)[0 < n \leq l(y) \to (n + l(x))\,Gl\,z = n\,Gl\,y]\}$,

$x * y$ entspricht der Operation des "Aneinanderfügens" zweier endlicher Zahlenreihen.

9. $R(x) \equiv 2^x$,

$R(x)$ entspricht der nur aus der Zahl x bestehenden Zahlenreihe (für $x > 0$).

10. $E(x) \equiv R(11) * x * R(13)$,

$E(x)$ entspricht der Operation des "Einklammerns" (11 und 13 sind den Grundzeichen "(" und ")" zugeordnet).

11. n Var $x \equiv (Ez)[13 < z \leq x \,\&\, \mathrm{Prim}(z) \,\&\, x = z^n] \,\&\, n \neq 0$,

x ist eine VARIABLE n-TEN TYPS.

12. $\mathrm{Var}\,(x) \equiv (En)[n \leq x \,\&\, n$ Var $x]$,

x ist eine VARIABLE.

13. $\mathrm{Neg}(x) \equiv R(5) * E(x)$,

$\mathrm{Neg}(x)$ ist die NEGATION von x.

183 | 14. x Dis $y \equiv E(x) * R(7) * E(y)$,

x Dis y ist die DISJUNKTION aus x und y.

15. x Gen $y \equiv R(x) * R(9) * E(y)$,

x Gen y ist die GENERALISATION von y mittels der VARIABLEN x (vorausgesetzt, daß x eine VARIABLE ist).

16. $0\,N\,x \equiv x$
$(n + 1)\,Nx \equiv R(3) * n\,N\,x$,

$n\,N\,x$ entspricht der Operation: "n-maliges Vorsetzen des Zeichens 'f' vor x".

17. $Z(n) \equiv n\,N\,[R(1)]$

$Z(n)$ ist das ZAHLZEICHEN für die Zahl n.

18. $\mathrm{Typ}'_1(x) \equiv (Em, n)\{m, n \leq x \,\&\, [m = 1 \vee 1\,\mathrm{Var}\,m] \,\&$
$x = n\,N\,[R(m)]\}$,[34b]

x ist ZEICHEN ERSTEN TYPS.

19. $\mathrm{Typ}_n(x) \equiv [n = 1 \,\&\, \mathrm{Typ}'_1(x)] \vee$
$[n > 1 \,\&\, (Ev)\{v \leq x \,\&\, n$ Var $v \,\&\, x = R(v)\}]$,

x ist ZEICHEN n-TEN TYPS.

20. $Elf(x) \equiv (Ey, z, n)[y, z, n \leq x \,\&\, \mathrm{Typ}_n(y) \,\&\, \mathrm{Typ}_{n+1}(z) \,\&$
$x = z * E(y)]$,

x ist ELEMENTARFORMEL.

21. $Op(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(y) \vee x = y$ Dis $z \vee$
$(Ev)[v \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v$ Gen $y]$

[34b] $m, n \leq x$ steht für: $m \leq x \,\&\, n \leq x$ (ebenso für mehr als zwei Variable).

$l(x)$ is the length of the number sequence assigned to x.

8. $x * y \equiv \varepsilon z\{z \leq [Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \,\&$
$(n)[n \leq l(x) \to n\,Gl\,z = n\,Gl\,x]\,\&$
$(n)[0 < n \leq l(y) \to (n + l(x))\,Gl\,z = n\,Gl\,y]\}$,

$x * y$ corresponds to the operation of "concatenating" two finite number sequences.

9. $R(x) \equiv 2^x$,

$R(x)$ corresponds to the number sequence consisting of x alone (for $x > 0$).

10. $E(x) \equiv R(11) * x * R(13)$,

$E(x)$ corresponds to the operation of "enclosing within parentheses" (11 and 13 are assigned to the primitive signs "(" and ")", respectively).

11. n Var $x \equiv (Ez)[13 < z \leq x \,\&\, \mathrm{Prim}(z) \,\&\, x = z^n] \,\&\, n \neq 0$,

x is a VARIABLE OF TYPE n.

12. $\mathrm{Var}\,(x) \equiv (En)[n \leq x \,\&\, n$ Var $x]$,

x is a VARIABLE.

13. $\mathrm{Neg}(x) \equiv R(5) * E(x)$,

$\mathrm{Neg}(x)$ is the NEGATION of x.

14. x Dis $y \equiv E(x) * R(7) * E(y)$,

x Dis y is the DISJUNCTION of x and y.

15. x Gen $y \equiv R(x) * R(9) * E(y)$,

x Gen y is the GENERALIZATION of y with respect to the VARIABLE x (provided x is a VARIABLE).

16. $0\,N\,x \equiv x$,
$(n + 1)\,Nx \equiv R(3) * n\,N\,x$,

$n\,N\,x$ corresponds to the operation of "putting the sign 'f' n times in front of x".

17. $Z(n) \equiv n\,N\,[R(1)]$,

$Z(n)$ is the NUMERAL denoting the number n.

18. $\mathrm{Typ}'_1(x) \equiv (Em, n)\{m, n \leq x \,\&\, [m = 1 \vee 1\,\mathrm{Var}\,m] \,\&$
$x = n\,N\,[R(m)]\}$,[34b]

x is a SIGN OF TYPE 1.

19. $\mathrm{Typ}_n(x) \equiv [n = 1 \,\&\, \mathrm{Typ}'_1(x)] \vee$
$[n > 1 \,\&\, (Ev)\{v \leq x \,\&\, n\,\mathrm{Var}\,v \,\&\, x = R(v)\}]$,

x is a SIGN OF TYPE n.

20. $Elf(x) \equiv (Ey, z, n)[y, z, n \leq x \,\&\, \mathrm{Typ}_n(y) \,\&\, \mathrm{Typ}_{n+1}(z) \,\&$
$x = z * E(y)]$,

x is an ELEMENTARY FORMULA.

21. $Op(x, y, z) \equiv x = \mathrm{Neg}(y) \vee x = y$ Dis $z \vee$
$(Ev)[v \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v$ Gen $y]$.

[34b] $m, n \leq x$ stands for $m \leq x \,\&\, n \leq x$ (similarly for more than two variables).

22. $FR(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \to Elf(n\,Gl\,x) \vee (Ep,q)[0 < p, q < n \,\&\, Op(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)]\} \,\&\, l(x) > 0,$

x ist eine Reihe von FORMELN, deren jede entweder ELEMENTARFORMEL ist oder aus den vorhergehenden durch die Operationen der NEGATION, DISJUNKTION, GENERALISATION hervorgeht.

23. $\mathrm{Form}(x) \equiv (En)\{n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x\cdot[l(x)]^2} \,\&\, FR(n) \,\&\, x = [l(n)]\,Gl\,n\}$,[35]

x ist FORMEL (d. h. letztes Glied einer FORMELREIHE n).

24. $v\,\mathrm{Geb}\,n, x \equiv \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(x) \,\&\, (Ea,b,c)[a,b,c \leq x \,\&\, x = a * (v\ \mathrm{Gen}\ b) * c \,\&\, \mathrm{Form}(b) \,\&\, l(a) + 1 \leq n \leq l(a) + l(v\ \mathrm{Gen}\ b)]$,

die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle GEBUNDEN.

184 | 25. $v\,Frn,\ x \equiv \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(x) \,\&\, v = n\,Gl\,x \,\&\, n \leq l(x) \,\&\, \overline{v\ \mathrm{Geb}\ n,\ x}$,

die VARIABLE v ist in x an n-ter Stelle FREI.

26. $v\,Frx \equiv (En)[n \leq l(x) \,\&\, v\,Frn,\ x]$,

v kommt in x als FREIE VARIABLE vor.

27. $Su\,x(^n_y) \equiv \varepsilon z\{z \leq [Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \,\&\, (Eu,v)[u,v \leq x \,\&\, x = u * R(n\,Gl\,x) * v \,\&\, z = u * y * v \,\&\, n = l(u) + 1]\}$,

$Su\,x(^n_y)$ entsteht aus x, wenn man an Stelle des n-ten Gliedes von x y einsetzt (vorausgesetzt, daß $0 < n \leq l(x)$).

28. $0\,St\,v,\ x \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \,\&\, v\,Frn,\ x \,\&\, \overline{(Ep)}[n < p \leq l(x) \,\&\, v\,Frp,\ x]\}$

$(k+1)\,St\,v,\ x \equiv \varepsilon n\{n < k\,St\,v,\ x \,\&\, v\,Frn,\ x \,\&\, \overline{(Ep)}[n < p < k\,St\,v,\ x \,\&\, v\,Frp,\ x]\}$,

$k\,St\,v,\ x$ ist die $(k+1)$-te Stelle in x (vom Ende der FORMEL x an gezählt), an der v in x FREI ist (und 0, falls es keine solche Stelle gibt).

29. $A(v,x) \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \,\&\, n\,St\,v,\ x = 0\}$,

$A(v,x)$ ist die Anzahl der Stellen, an denen v in x FREI ist.

30. $Sb_0(x^v_y) \equiv x$

$Sb_{k+1}(x^v_y) \equiv Su[Sb_k(x^v_y)](^{k\,St\,v,\,x}_{\ y})$.

31. $Sb(x^v_y) \equiv Sb_{A(v,x)}(x^v_y)$,[36]

$Sb(x^v_y)$ ist der oben definierte Begriff SUBST $a(^v_b)$.[37]

[35]Die Abschätzung $n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x\cdot[l(x)]^2}$ erkennt man etwa so: Die Länge der kürzesten zu x gehörigen Formelreihe kann höchstens gleich der Anzahl der Teilformeln von x sein. Es gibt aber höchstens $l(x)$ Teilformeln der Länge 1, höchstens $l(x) - 1$ der Länge 2 usw., im ganzen also höchstens $l(x)(l(x)+1)/2 \leq [l(x)]^2$. Die Primzahlen aus n können also sämtlich kleiner als $Pr\{[l(x)]^2\}$ angenommen werden, ihre Anzahl $\leq [l(x)]^2$ und ihre Exponenten (welche Teilformeln von x sind) $\leq x$.

[36]Falls v keine VARIABLE oder x keine FORMEL ist, ist $Sb(x^v_y) = x$.

[37]Statt $Sb[Sb(x^v_y)^w_z]$ schreiben wir: $Sb(x^{\,v\ \ w}_{\,y\ z})$ (analog für mehr als zwei VARIABLE).

22. $FR(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \to Elf(n\,Gl\,x) \vee (Ep,q)[0 < p, q < n \,\&\, Op(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)]\} \,\&\, l(x) > 0,$

x is a SEQUENCE OF FORMULAS, each term of which either is an ELEMENTARY FORMULA or results from the preceding FORMULAS through the operations of NEGATION, DISJUNCTION, or GENERALIZATION.

23. $\mathrm{Form}(x) \equiv (En)\{n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x\cdot[l(x)]^2} \,\&\, FR(n) \,\&\, x = [l(n)]\,Gl\,n\}$,[35]

x is a FORMULA (that is, the last term of a FORMULA SEQUENCE n).

24. $v\,\mathrm{Geb}\,n, x \equiv \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(x) \,\&\, (Ea,b,c)[a,b,c \leq x \,\&\, x = a * (v\ \mathrm{Gen}\ b) * c \,\&\, \mathrm{Form}(b) \,\&\, l(a) + 1 \leq n \leq l(a) + l(v\ \mathrm{Gen}\ b)]$,

the VARIABLE v is BOUND in x at the nth place.

25. $v\,Frn,\ x \equiv \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(x) \,\&\, v = n\,Gl\,x \,\&\, n \leq l(x) \,\&\, \overline{v\ \mathrm{Geb}\ n,\ x}$,

the VARIABLE v is FREE in x at the nth place.

26. $v\,Frx \equiv (En)[n \leq l(x) \,\&\, v\,Frn,\ x]$,

v occurs as a FREE VARIABLE in x.

27. $Su\,x(^n_y) \equiv \varepsilon z\{z \leq [Pr(l(x) + l(y))]^{x+y} \,\&\, (Eu,v)[u,v \leq x \,\&\, x = u * R(n\,Gl\,x) * v \,\&\, z = u * y * v \,\&\, n = l(u) + 1]\}$,

$Su\,x(^n_y)$ results from x when we substitute y for the nth term of x (provided that $0 < n \leq l(x)$).

28. $0\,St\,v,\ x \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \,\&\, v\,Frn,\ x \,\&\, \overline{(Ep)}[n < p \leq l(x) \,\&\, v\,Frp,\ x]\}$,

$(k+1)\,St\,v,\ x \equiv \varepsilon n\{n < k\,St\,v,\ x \,\&\, v\,Frn,\ x \,\&\, \overline{(Ep)}[n < p < k\,St\,v,\ x \,\&\, v\,Frp,\ x]\}$,

$k\,St\,v,\ x$ is the $(k+1)$th place in x (counted from the right end of the FORMULA x) at which v is FREE in x (and 0 in case there is no such place).

29. $A(v,x) \equiv \varepsilon n\{n \leq l(x) \,\&\, n\,St\,v,\ x = 0\}$,

$A(v,x)$ is the number of places at which v is FREE in x.

30. $Sb_0(x^v_y) \equiv x$,

$Sb_{k+1}(x^v_y) \equiv Su[Sb_k(x^v_y)](^{k\,St\,v,\,x}_{\ y})$.

31. $Sb(x^v_y) \equiv Sb_{A(v,x)}(x^v_y)$,[36]

$Sb(x^v_y)$ is the notion SUBST $a(^v_b)$ defined above.[37]

[35]That $n \leq (Pr([l(x)]^2))^{x\cdot[l(x)]^2}$ provides a bound can be seen thus: The length of the shortest formula sequence that corresponds to x can at most be equal to the number of subformulas of x. But there are at most $l(x)$ subformulas of length 1, at most $l(x) - 1$ of length 2, and so on, hence altogether at most $l(x)(l(x)+1)/2 \leq [l(x)]^2$. Therefore all prime factors of n can be assumed to be less than $Pr([l(x)]^2)$, their number $\leq [l(x)]^2$, and their exponents (which are subformulas of x) $\leq x$.

[36]In case v is not a VARIABLE or x is not a FORMULA, $Sb(x^v_y) = x$.

[37]Instead of $Sb[Sb(x^v_y)^w_z]$ we write $Sb(x^{\,v\ \ w}_{\,y\ z})$ (and similarly for more than two VARIABLES).

32. x Imp $y \equiv [\mathrm{Neg}(x)]$ Dis y
x Con $y \equiv \mathrm{Neg}\{[\mathrm{Neg}(x)]$ Dis $[\mathrm{Neg}(y)]\}$
x Aeq $y \equiv (x$ Imp $y)$ Con $(y$ Imp $x)$
v Ex $y \equiv \mathrm{Neg}\{v$ Gen $[\mathrm{Neg}(y)]\}$

33. $n\ Th\, x \equiv \epsilon y\{y \leq x^{(x^n)} \,\&\, (k)[k \leq l(x) \rightarrow$
$(k\,Gl\,x \leq 13 \,\&\, k\,Gl\,y = k\,Gl\,x) \vee$
$(k\,Gl\,x > 13 \,\&\, k\,Gl\,y = k\,Gl\,x \cdot [1\,Pr\,(k\,Gl\,x)]^n)]\}$,

$n\ Th\, x$ ist die n-TE TYPENERHÖHUNG von x (falls x und $n\ Th\ x$ FORMELN sind).

Den Axiomen I, 1 bis 3, entsprechen drei bestimmte Zahlen, die wir mit z_1, z_2, z_3 bezeichnen, und wir definieren:

34. $Z\text{-}Ax(x) \equiv (x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3)$

185 | 35. $A_1\text{-}Ax(x) \equiv (Ey)[y \leq x \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&\, x = (y$ Dis $y)$ Imp $y]$,

x ist eine durch Einsetzung in das Axiomenschema II, 1, entstehende FORMEL. Analog werden $A_2\text{-}Ax$, $A_3\text{-}Ax$, $A_4\text{-}Ax$ entsprechend den Axiomen II, 2 bis 4, definiert.

36. $A\text{-}Ax(x) \equiv A_1\text{-}Ax(x) \vee A_2\text{-}Ax(x) \vee A_3\text{-}Ax(x) \vee A_4\text{-}Ax(x)$,

x ist eine durch Einsetzung in ein Aussagenaxiom entstehende FORMEL.

37. $Q(z,y,v) \equiv \overline{(Ew,m,w)}[n \leq l(y) \,\&\, m \leq l(z) \,\&\, w \leq z \,\&$
$w = m\ Gl\ z \,\&\, w$ Geb $n, y \,\&\, v\ Fr\, n, y]$,

z enthält keine VARIABLE, die in y an einer Stelle GEBUNDEN ist, an der v FREI ist.

38. $L_1\text{-}Ax(x) \equiv (Ev,y,z,n)\{v,y,z,n \leq x \,\&\, n$ Var $v \,\&\, \mathrm{Typ}_n(z) \,\&$
$\mathrm{Form}(y) \,\&\, Q(z,y,v) \,\&\, x = (v$ Gen $y)$ Imp $[Sb(y^v_z)]\}$,

x ist eine aus dem Axiomenschema III, 1, durch Einsetzung entstehende FORMEL.

39. $L_2\text{-}Ax(x) \equiv (Ev,q,p)\{v,q,p \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(p) \,\&\, \overline{v\ Fr\, p} \,\&$
$\mathrm{Form}(q) \,\&\, x = [v$ Gen $(p$ Dis $q)]$ Imp $[p$ Dis $(v$ Gen $q)]\}$,

x ist eine aus dem Axiomenschema III, 2, durch Einsetzung entstehende FORMEL.

40. $R\text{-}Ax(x) \equiv (Eu,v,y,n)[u,v,y,n \leq x \,\&\, n$ Var $v \,\&$
$(n+1)$ Var $u \,\&\, \overline{u\ Fr\, y} \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&$
$x = u\,\mathrm{Ex}\{v$ Gen $[[R(u) * E(R(v))]$ Aeq $y]\}]$,

x ist eine aus dem Axiomenschema IV, 1, durch Einsetzung entstehende FORMEL.

Dem Axiom V, 1, entspricht eine bestimmte Zahl z_4 und wir definieren:

41. $M\text{-}Ax(x) \equiv (En)[n \leq x \,\&\, x = n\,Th\,z_4]$.

42. $Ax(x) \equiv Z\text{-}Ax(x) \vee A\text{-}A(x) \vee L_1\text{-}Ax(x) \vee L_2\text{-}Ax(x) \vee$
$R\text{-}Ax(x) \vee M\text{-}Ax(x)$,

x ist ein AXIOM.

43. $Fl(x,y,z) \equiv y = z$ Imp $x \vee (Ev)[v \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v$ Gen $y]$,

x ist UNMITTELBARE FOLGE aus y und z.

32. x Imp $y \equiv [\mathrm{Neg}(x)]$ Dis y,
x Con $y \equiv \mathrm{Neg}\{[\mathrm{Neg}(x)]$ Dis $[\mathrm{Neg}(y)]\}$,
x Aeq $y \equiv (x$ Imp $y)$ Con $(y$ Imp $x)$,
v Ex $y \equiv \mathrm{Neg}\{v$ Gen $[\mathrm{Neg}(y)]\}$.

33. $n\ Th\, x \equiv \varepsilon y\{y \leq x^{(x^n)} \,\&\, (k)[k \leq l(x) \rightarrow$
$(k\,Gl\,x \leq 13 \,\&\, k\,Gl\,y = k\,Gl\,x) \vee$
$(k\,Gl\,x > 13 \,\&\, k\,Gl\,y = k\,Gl\,x \cdot [1\,Pr\,(k\,Gl\,x)]^n)]\}$,

$n\ Th\, x$ is the nTH TYPE ELEVATION of x (in case x and $n\ Th\ x$ are FORMULAS).

Three specific numbers, which we denote by z_1, z_2, and z_3, correspond to the Axioms I, 1–3, and we define

34. $Z\text{-}Ax(x) \equiv (x = z_1 \vee x = z_2 \vee x = z_3)$.

35. $A_1\text{-}Ax(x) \equiv (Ey)[y \leq x \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&\, x = (y$ Dis $y)$ Imp $y]$,

x is a FORMULA resulting from Axiom Schema II, 1 by substitution. Analogously, $A_2\text{-}Ax, A_3\text{-}Ax$, and $A_4\text{-}Ax$ are defined for Axioms [rather, Axiom Schemata] II, 2–4.

36. $A\text{-}A(x) \equiv A_1\text{-}Ax(x) \vee A_2\text{-}Ax(x) \vee A_3\text{-}Ax(x) \vee A_4\text{-}Ax(x)$,

x is a FORMULA resulting from a propositional axiom by substitution.

37. $Q(z,y,v) \equiv \overline{(Ew,m,w)}[n \leq l(y) \,\&\, m \leq l(z) \,\&\, w \leq z \,\&$
$w = m\,Gl\,z \,\&\, w$ Geb $n, y \,\&\, v\ Fr\, n, y]$,

z does not contain any VARIABLE BOUND in y at a place at which v is FREE.

38. $L_1\text{-}Ax(x) \equiv (Ev,y,z,n)\{v,y,z,n \leq x \,\&\, n$ Var $v \,\&\, \mathrm{Typ}_n(z) \,\&$
$\mathrm{Form}(y) \,\&\, Q(z,y,v) \,\&\, x = (v$ Gen $y)$ Imp $[Sb(y^v_z)]\}$,

x is a FORMULA resulting from Axiom Schema III, 1 by substitution.

39. $L_2\text{-}Ax(x) \equiv (Ev,q,p)\{v,q,p \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, \mathrm{Form}(p) \,\&\, \overline{v\ Fr\, p} \,\&$
$\mathrm{Form}(q) \,\&\, x = [v$ Gen $(p$ Dis $q)]$ Imp $[p$ Dis $(v$ Gen $q)]\}$,

x is a FORMULA resulting from Axiom Schema III, 2 by substitution.

40. $R\text{-}Ax(x) \equiv (Eu,v,y,n)[u,v,y,n \leq x \,\&\, n$ Var $v \,\&$
$(n+1)$ Var $u \,\&\, \overline{u\ Fr\, y} \,\&\, \mathrm{Form}(y) \,\&$
$x = u$ Ex $\{v$ Gen $[[R(u) * E(R(v))]$ Aeq $y]\}]$,

x is a FORMULA resulting from Axiom Schema IV, 1 by substitution.

A specific number z_4 corresponds to Axiom V, 1, and we define

41. $M\text{-}Ax(x) \equiv (En)[n \leq x \,\&\, n\,Th\,z_4]$.

42. $Ax(x) \equiv Z\text{-}Ax(x) \vee A\text{-}A(x) \vee L_1\text{-}Ax(x) \vee L_2\text{-}Ax(x) \vee$
$R\text{-}Ax(x) \vee M\text{-}Ax(x)$,

x is an AXIOM.

43. $Fl(x,y,z) \equiv y = z$ Imp $x \vee (Ev)[v \leq x \,\&\, \mathrm{Var}(v) \,\&\, x = v$ Gen $y]$,

x is an IMMEDIATE CONSEQUENCE of y and z.

186 | 44. $Bw(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \to Ax(n\,Gl\,x) \vee (Ep,q)[0 < p, q < n \,\&\, Fl(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)]\} \,\&\, l(x) > 0,$

x ist eine BEWEISFIGUR (eine endliche Folge von FORMELN, deren jede entweder AXIOM oder UNMITTELBARE FOLGE aus zwei der vorhergehenden ist).

45. $x\,B\,y \equiv Bw(x) \,\&\, [l(x)]\,Gl\,x = y,$

x ist ein BEWEIS für die FORMEL y.

46. $\mathrm{Bew}(x) \equiv (Ey)y\ B\ x,$

x ist eine BEWEISBARE FORMEL. (Bew(x) ist der einzige unter den Begriffen 1–46, von dem nicht behauptet werden kann, er sei rekursiv.)

Die Tatsache, die man vage so formulieren kann: Jede rekursive Relation ist innerhalb des Systems P (dieses inhaltlich gedeutet) definierbar, wird, *ohne* auf eine inhaltliche Deutung der Formeln aus P Bezug zu nehmen, durch folgenden Satz exakt ausgedrückt:

Satz V: *Zu jeder rekursiven Relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ gibt es ein n-stelliges* RELATIONSZEICHEN r *(mit den* FREIEN VARIABLEN[38] $u_1, u_2, \ldots, u_n$*), so daß für alle Zahlen-n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \to \mathrm{Bew}\left[Sb(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)})\right], \tag{3}$$

$$\overline{R}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Neg}(Sb(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)}))\right]. \tag{4}$$

Wir begnügen uns hier damit, den Beweis dieses Satzes, da er keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet und ziemlich umständlich ist, in Umrissen anzudeuten.[39] Wir beweisen den Satz für alle Relationen $R(x_1, \ldots, x_n)$ der Form: $x_1 = \phi(x_2, \ldots, x_n)$[40] (wo ϕ eine rekursive Funktion ist) und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von ϕ an. Für Funktionen erster Stufe (d. h. Konstante und die Funktion $x + 1$) ist der Satz trivial. Habe also ϕ die m-te Stufe. Es entsteht aus Funktionen niedrigerer Stufe $\phi_1, \ldots, \phi_k$ durch die Operationen der Einsetzung oder der rekursiven Definition. Da für $\phi_1, \ldots, \phi_k$ nach induktiver Annahme bereits alles bewiesen ist, gibt es zugehörige RELATIONSZEICHEN $r_1, \ldots, r_k$, so daß (3), (4) gilt. Die Definitionsprozesse, durch die ϕ aus $\phi_1, \ldots, \phi_k$ entsteht (Einsetzung und rekursive Definition), können sämtlich im System P formal nachge-
187 bildet werden. Tut | man dies, so erhält man aus $r_1, \ldots, r_k$ ein neues

[38]Die VARIABLEN $u_1, \ldots, u_n$ können willkürlich vorgegeben werden. Es gibt z. B. immer ein r mit den FREIEN VARIABLEN $17, 19, 23, \ldots$ usw., für welches (3) und (4) gilt.

[39]Satz V beruht natürlich darauf, daß bei einer rekursiven Relation R für jedes n-tupel von Zahlen *aus den Axiomen des Systems* P entscheidbar ist, ob die Relation R besteht oder nicht.

[40]Daraus folgt sofort seine Geltung für jede rekursive Relation, da eine solche gleichbedeutend ist mit $0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, wo ϕ rekursiv ist.

44. $Bw(x) \equiv (n)\{0 < n \leq l(x) \to Ax(n\,Gl\,x) \vee (Ep,q)[0 < p, q < n \,\&\, Fl(n\,Gl\,x, p\,Gl\,x, q\,Gl\,x)]\} \,\&\, l(x) > 0,$

x is a PROOF ARRAY (a finite sequence of FORMULAS, each of which is either an AXIOM or an IMMEDIATE CONSEQUENCE of two of the preceding FORMULAS).

45. $x\,B\,y \equiv Bw(x) \,\&\, [l(x)]\,Gl\,x = y,$

x is a PROOF of the FORMULA y.

46. $\mathrm{Bew}(x) \equiv (Ey)y\,B\,x,$

x is a PROVABLE FORMULA. (Bew(x) is the only one of the notions 1–46 of which we cannot assert that it is recursive.)

The fact that can be formulated vaguely by saying that every recursive relation is definable in the system P (if the usual meaning is given to the formulas of this system) is expressed in precise language, *without* reference to any interpretation of the formulas of P, by the folllowing theorem:

Theorem V. *For every recursive relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ there exists an n-place* RELATION SIGN r *(with the* FREE VARIABLES[38] $u_1, u_2, \ldots, u_n$*) such that for all n-tuples of numbers $(x_1, \ldots, x_n)$ we have*

$$R(x_1, \ldots, x_n) \to \mathrm{Bew}\left[Sb(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)})\right], \tag{3}$$

$$\overline{R}(x_1, \ldots, x_n) \to \mathrm{Bew}\left[\mathrm{Neg}(Sb(r^{u_1 \ldots u_n}_{Z(x_1) \ldots Z(x_n)}))\right]. \tag{4}$$

We shall give only an outline of the proof of this theorem because the proof does not present any difficulty in principle and is rather long.[39] We prove the theorem for all relations $R(x_1, \ldots, x_n)$ of the form $x_1 = \phi(x_2, \ldots, x_n)$[40] (where ϕ is a recursive function) and we use induction on the degree of ϕ. For functions of degree 1 (that is, constants and the function $x + 1$) the theorem is trivial. Assume now that ϕ is of degree m. It results from functions of lower degrees, $\phi_1, \ldots, \phi_k$, through the operations of substitution or recursive definition. Since by the inductive hypothesis everything has already been proved for $\phi_1, \ldots, \phi_k$, there are corresponding RELATION SIGNS, $r_1, \ldots, r_k$, such that (3) and (4) hold. The processes of definition by which ϕ results from $\phi_1, \ldots, \phi_k$ (substitution and recursive definition) can both be formally reproduced in the system P. If this is

[38]The VARIABLES $u_1, \ldots, u_n$ can be chosen arbitrarily. For example, there always is an r with the FREE VARIABLES $17, 19, 23, \ldots$, and so on, for which (3) and (4) hold.

[39]Theorem V, of course, is a consequence of the fact that in the case of a recursive relation R it can, for every n-tuple of numbers, be decided *on the basis of the axioms of the system* P whether the relation R obtains or not.

[40]From this it follows at once that the theorem holds for every recursive relation, since any such relation is equivalent to $0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, where ϕ is recursive.

RELATIONSZEICHEN r,[41] für welches man die Geltung von (3), (4) unter Verwendung der induktiven Annahme ohne Schwierigkeit beweisen kann. Ein RELATIONSZEICHEN r, welches auf diesem Wege einer rekursiven Relation zugeordnet ist,[42] soll *rekursiv* heißen.

Wir kommen nun ans Ziel unserer Ausführungen. Sei κ eine beliebige Klasse von FORMELN. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Flg}(\kappa)$ (Folgerungsmenge von κ) die kleinste Menge von FORMELN, die alle FORMELN aus κ und alle AXIOME enthält und gegen die Relation "UNMITTELBARE FOLGE" abgeschlossen ist. κ heißt ω-widerspruchsfrei, wenn es kein KLASSENZEICHEN a gibt, so daß:

$$(n)[Sb(a^{v}_{Z(n)}) \in \mathrm{Flg}(\kappa)] \,\&\, [\mathrm{Neg}(v \text{ Gen } a)] \in \mathrm{Flg}(\kappa),$$

wobei v die FREIE VARIABLE des KLASSENZEICHENS a ist.

Jedes ω-widerspruchsfreie System ist selbstverständlich auch widerspruchsfrei. Es gilt aber, wie später gezeigt werden wird, nicht das Umgekehrte.

Das allgemeine Resultat über die Existenz unentscheidbarer Sätze lautet:

Satz VI: *Zu jeder ω-widerspruchsfreien rekursiven Klasse κ von* FORMELN *gibt es rekursive* KLASSENZEICHEN r, *so daß weder* v Gen r *noch* $\mathrm{Neg}(v \text{ Gen } r)$ *zu* $\mathrm{Flg}(\kappa)$ *gehört* (wobei v *die* FREIE VARIABLE aus r ist).

Beweis: Sei κ eine beliebige rekursive ω-widerspruchsfreie Klasse von FORMELN. Wir definieren:

$$Bw_{\kappa}(x) \equiv (n)[n \leq l(x) \to Ax(n\,Gl\,x) \vee (n\,Gl\,x) \in \kappa \vee (Ep,q)\{0 < p,\ q < n \,\&\, Fl(n\,Gl\,x,\ p\,Gl\,x,\ q\,Gl\,x)\}] \,\&\, l(x) > 0 \qquad (5)$$

(vgl. den analogen Begriff 44)

$$x\,B_{\kappa}\,y \equiv Bw_{\kappa}(x) \,\&\, [l(x)]\,Gl\,x = y \qquad (6)$$

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x) \equiv (Ey)\,y\,B_{\kappa}\,x \qquad (6.1)$$

(vgl. die analogen Begriffe 45, 46).

Es gilt offenbar:

$$(x)[\mathrm{Bew}_{\kappa}(x) \sim x \in \mathrm{Flg}(\kappa)], \qquad (7)$$

$$(x)[\mathrm{Bew}(x) \to \mathrm{Bew}_{\kappa}(x)]. \qquad (8)$$

[41] Bei der genauen Durchführung dieses Beweises wird natürlich r nicht auf dem Umweg über die inhaltliche Deutung, sondern durch seine rein formale Beschaffenheit definiert.

[42] Welches also, inhaltlich gedeutet, das Bestehen dieser Relation ausdrückt.

done, a new RELATION SIGN r is obtained from $r_1, \ldots, r_k$,[41] and, using the inductive hypothesis, we can prove without difficulty that (3) and (4) hold for it. A RELATION SIGN r assigned to a recursive relation[42] by this procedure will be said to be *recursive*.

We now come to the goal of our discussions. Let κ be any class of FORMULAS. We denote by $\mathrm{Flg}(\kappa)$ (the set of consequences of κ) the smallest set of FORMULAS that contains all FORMULAS of κ and all AXIOMS and is closed under the relation "IMMEDIATE CONSEQUENCE". κ is said to be ω-consistent if there is no CLASS SIGN a such that

$$(n)[Sb(a^{v}_{Z(n)}) \in \mathrm{Flg}(\kappa)] \,\&\, [\mathrm{Neg}(v \text{ Gen } a)] \in \mathrm{Flg}(\kappa),$$

where v is the FREE VARIABLE of the CLASS SIGN a.

Every ω-consistent system, of course, is consistent. As will be shown later, however, the converse does not hold.

The general result about the existence of undecidable propositions reads as follows:

Theorem VI. *For every ω-consistent recursive class κ of* FORMULAS *there are recursive* CLASS SIGNS r *such that neither* v Gen r *nor* $\mathrm{Neg}(v \text{ Gen } r)$ *belongs to* $\mathrm{Flg}(\kappa)$ (where v *is the* FREE VARIABLE of r).

Proof: Let κ be any recursive ω-consistent class of FORMULAS. We define

$$Bw_{\kappa}(x) \equiv (n)[n \leq l(x) \to Ax(n\,Gl\,x) \vee (n\,Gl\,x) \in \kappa \vee (Ep,q)\{0 < p,\ q < n \,\&\, Fl(n\,Gl\,x,\ p\,Gl\,x,\ q\,Gl\,x)\}] \,\&\, l(x) > 0 \qquad (5)$$

(see the analogous notion 44),

$$x\,B_{\kappa}\,y \equiv Bw_{\kappa}(x) \,\&\, [l(x)]\,Gl\,x = y \qquad (6)$$

$$\mathrm{Bew}_{\kappa}(x) \equiv (Ey)\,y\,B_{\kappa}\,x \qquad (6.1)$$

(see the analogous notions 45 and 46).

We obviously have

$$(x)[\mathrm{Bew}_{\kappa}(x) \sim x \in \mathrm{Flg}(\kappa)] \qquad (7)$$

and

$$(x)[\mathrm{Bew}(x) \to \mathrm{Bew}_{\kappa}(x)]. \qquad (8)$$

[41] When this proof is carried out in detail, r, of course, is not defined indirectly with the help of its meaning but in terms of its purely formal structure.

[42] Which, therefore, in the usual interpretation expresses the fact that this relation holds.

188 | Nun definieren wir die Relation:

$$Q(x,y) \equiv \overline{x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}. \tag{8.1}$$

Da $x\, B_\kappa\, y$ (nach (6), (5)) und $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ (nach Def. 17, 31) rekursiv sind, so auch $Q(x,y)$. Nach Satz V und (8) gibt es also ein RELATIONSZEICHEN q (mit den FREIEN VARIABLEN 17, 19), so daß gilt:

$$\overline{x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \to \mathrm{Bew}_\kappa\, [Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)})], \tag{9}$$

$$x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \to \mathrm{Bew}_\kappa[\mathrm{Neg}(Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)}))]. \tag{10}$$

Wir setzen:

$$p = 17\ \mathrm{Gen}\, q \tag{11}$$

(p ist ein KLASSENZEICHEN mit der FREIEN VARIABLEN 19) und

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{12}$$

(r ist ein rekursives KLASSENZEICHEN mit der FREIEN VARIABLEN 17).[43] Dann gilt:

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ \mathrm{Gen}\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ r \tag{13}$$

(wegen (11) und (12));[44] ferner:

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{14}$$

(nach 12)). Setzt man nun in (9) und (10) p für y ein, so entsteht unter Berücksichtigung von (13) und (14):

$$\overline{x\, B_\kappa\, (17\ \mathrm{Gen}\ r)} \to \mathrm{Bew}_\kappa[Sb(r^{17}_{Z(x)})] \tag{15}$$

$$x\, B_\kappa\, (17\ \mathrm{Gen}\ r) \to \mathrm{Bew}_\kappa[\mathrm{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))]. \tag{16}$$

189 | Daraus ergibt sich:

[43] r entsteht ja aus dem rekursiven RELATIONSZEICHEN q durch Ersetzen einer VARIABLEN durch eine bestimmte Zahl (p).

[44] Die Operationen Gen, Sb sind natürlich immer vertauschbar, falls sie sich auf verschiedene VARIABLE beziehen.

We now define the relation

$$Q(x,y) \equiv \overline{x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}. \tag{8.1}$$

Since $x\, B_\kappa\, y$ (by (6) and (5)) and $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ (by Definitions 17 and 31) are recursive, so is $Q(x,y)$. Therefore, by Theorem V and (8) there is a RELATION SIGN q (with the FREE VARIABLES 17 and 19) such that

$$\overline{x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \to \mathrm{Bew}_\kappa\, [Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)})] \tag{9}$$

and

$$x\, B_\kappa\, [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \to \mathrm{Bew}_\kappa[\mathrm{Neg}(Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(y)}))]. \tag{10}$$

We put

$$p = 17\ \mathrm{Gen}\ q \tag{11}$$

(p is a CLASS SIGN with the FREE VARIABLE 19) and

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{12}$$

(r is a recursive CLASS SIGN[43] with the FREE VARIABLE 17).
Then we have

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ \mathrm{Gen}\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ \mathrm{Gen}\ r \tag{13}$$

(by (11) and (12));[44] furthermore

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}{}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{14}$$

(by (12)). If we now substitute p for y in (9) and (10), and take (13) and (14) into account, we obtain

$$\overline{x\, B_\kappa\, (17\ \mathrm{Gen}\ r)} \to \mathrm{Bew}_\kappa[Sb(r^{17}_{Z(x)})], \tag{15}$$

$$x\, B_\kappa\, (17\ \mathrm{Gen}\ r) \to \mathrm{Bew}_\kappa[\mathrm{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))]. \tag{16}$$

This yields:

[43] Since r is obtained from the recursive RELATION SIGN q through the replacement of a VARIABLE by a definite number p. [Precisely stated the final part of this footnote (which refers to a side remark unnecessary for the proof) would read thus: "REPLACEMENT of a VARIABLE by the NUMERAL for p".]

[44] The operations Gen and Sb, of course, can always be interchanged in case they refer to different VARIABLES.

1. 17 Gen r ist nicht κ-BEWEISBAR.[45] Denn wäre dies der Fall, so gäbe es (nach 6.1) ein n, so daß $n\, B_\kappa$ (17 Gen r). Nach (16) gälte also:

$$\text{Bew}_\kappa[\text{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))],$$

während andererseits aus der κ-BEWEISBARKEIT von 17 Gen r auch die von $Sb(r^{17}_{Z(n)})$ folgt. κ wäre also widerspruchsvoll (umsomehr ω-widerspruchsvoll).

2. Neg(17 Gen r) ist nicht κ-BEWEISBAR. Beweis: Wie eben bewiesen wurde, ist 17 Gen r nicht κ-BEWEISBAR, d. h. (nach 6.1) es gilt

$$(n)\,\overline{n\, B_\kappa\,(17\text{ Gen }r)}.$$

Daraus folgt nach (15)

$$(n)\text{Bew}_\kappa[Sb(r^{17}_{Z(n)})],$$

was zusammen mit

$$\text{Bew}_\kappa[\text{Neg}(17\text{ Gen }r)]$$

gegen die ω-Widerspruchsfreiheit von κ verstoßen würde.

17 Gen r ist also aus κ unentscheidbar, womit Satz VI bewiesen ist.

Man kann sich leicht überzeugen, daß der eben geführte Beweis konstruktiv ist,[45a] d. h. es ist intuitionistisch einwandfrei folgendes bewiesen: Sei eine beliebige rekursiv definierte Klasse κ von FORMELN vorgelegt. Wenn dann eine formale Entscheidung (aus κ) für die (effektiv aufweisbare) SATZFORMEL 17 Gen r vorgelegt ist, so kann man effektiv angeben:

1. Einen BEWEIS für Neg(17 Gen r).

2. Für jedes beliebige n einen BEWEIS für $Sb(r^{17}_{Z(n)})$, d. h. eine formale Entscheidung von 17 Gen r würde die effektive Aufweisbarkeit eines ω-Widerspruches zur Folge haben.

Wir wollen eine Relation (Klasse) zwischen natürlichen Zahlen $R(x_1, \ldots, x_n)$ *entscheidungsdefinit* nennen, wenn es ein n-stelliges RELATIONSZEICHEN r gibt, so daß (3) und (4) (vgl. Satz V) gilt. Insbesondere ist also nach Satz V jede rekursive Relation entscheidungsdefinit. Analog soll ein RELATIONSZEICHEN *entscheidungsdefinit* heißen, wenn es auf diese Weise einer entscheidungsdefiniten Relation zugeordnet ist. Es genügt nun für die Existenz von aus κ unentscheidbarer Sätze, von der Klasse κ vorauszusetzen, daß sie ω-widerspruchsfrei und entscheidungsdefinit ist. Denn die

[45] x ist κ-BEWEISBAR, soll bedeuten: $x \in \text{Flg}(\kappa)$, was nach (7) dasselbe besagt wie: $\text{Bew}_\kappa(x)$.

[45a] Denn alle im Beweise vorkommenden Existentialbehauptungen beruhen auf Satz V, der, wie leicht zu sehen, intuitionistisch einwandfrei ist.

1. 17 Gen r is not κ-PROVABLE.[45] For, if it were, there would (by (6.1)) be an n such that $n\, B_\kappa$ (17 Gen r). Hence by (16) we would have

$$\text{Bew}_\kappa[\text{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))],$$

while, on the other hand, from the κ-PROVABILITY of 17 Gen r that of $Sb(r^{17}_{Z(n)})$ follows. Hence, κ would be inconsistent (and a fortiori ω-inconsistent).

2. Neg(17 Gen r) is not κ-PROVABLE. Proof: As has just been proved, 17 Gen r is not κ-PROVABLE; that is (by (6.1)),

$$(n)\overline{n\, B_\kappa\,(17\text{ Gen }r)}$$

holds. From this,

$$(n)\text{Bew}_\kappa[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$$

follows by (15), and that, in conjunction with

$$\text{Bew}_\kappa[\text{Neg}(17\text{ Gen }r)],$$

is incompatible with the ω-consistency of κ.

17 Gen r is therefore undecidable on the basis of κ, which proves Theorem VI.

We can readily see that the proof just given is constructive;[45a] that is, the following has been proved in an intuitionistically unobjectionable manner: Let an arbitrary recursively defined class κ of FORMULAS be given. Then, if a formal decision (on the basis of κ) of the SENTENTIAL FORMULA 17 Gen r (which [for each κ] can actually be exhibited) is presented to us, we can actually give

1. a PROOF of Neg(17 Gen r),

2. for any given n, a PROOF of $Sb(r^{17}_{Z(n)})$.

That is, a formal decision of 17 Gen r would have the consequence that we could actually exhibit an ω-inconsistency.

We shall say that a relation between (or a class of) natural numbers $R(x_1, \ldots, x_n)$ is *decidable* if there exists an n-place RELATION SIGN r such that (3) and (4) (see Theorem V) hold. In particular, therefore, by Theorem V every recursive relation is decidable. Similarly, a RELATION SIGN will be said to be *decidable* if it corresponds in this way to a decidable relation. Now it suffices for the existence of propositions undecidable on the basis of κ that the class κ be ω-consistent and decidable. For the decidability

[45] By "x is κ-PROVABLE" we mean $x \in \text{Flg}(\kappa)$, which, by (7), means the same thing as $\text{Bew}_\kappa(x)$.

[45a] Since all existential statements occurring in the proof are based upon Theorem V, which, as is easily seen, is unobjectionable from the intuitionistic point of view.

Entscheidungsdefinitheit überträgt sich von κ auf $x\, B_\kappa\, y$ (vgl. (5), (6)) und
190 auf $Q(x,y)$ (vgl. | (8.1)) und nur dies wurde in obigem Beweise verwendet. Der unentscheidbare Satz hat in diesem Fall die Gestalt v Gen r, wo r ein entscheidungsdefinites KLASSENZEICHEN ist (es genügt übrigens sogar, daß κ in dem durch κ erweiterten System entscheidungsdefinit ist).

Setzt man von κ statt ω-Widerspruchsfreiheit, bloß Widerspruchsfreiheit voraus, so folgt zwar nicht die Existenz eines unentscheidbaren Satzes, wohl aber die Existenz einer Eigenschaft (r), für die weder ein Gegenbeispiel *angebbar*, noch beweisbar ist, daß sie allen Zahlen zukommt. Denn zum Beweise, daß 17 Gen r nicht κ-BEWEISBAR ist, wurde nur die Widerspruchsfreiheit von κ verwendet (vgl. S. 189) und aus $\overline{\text{Bew}_\kappa}(17\text{ Gen }r)$ folgt nach (15), daß für jede Zahl x, $Sb(r^{17}_{Z(x)})$, folglich für keine Zahl $\text{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))$ κ-BEWEISBAR ist.

Adjungiert man Neg(17 Gen r) zu κ, so erhält man eine widerspruchsfreie aber nicht ω-widerspruchsfreie FORMELKLASSE κ'. κ' ist widerspruchsfrei, denn sonst wäre 17 Gen r κ-BEWEISBAR. κ' ist aber nicht ω-widerspruchsfrei, denn wegen $\overline{\text{Bew}_\kappa}(17\text{ Gen }r)$ und (15) gilt:

$$(x)\text{Bew}_\kappa(Sb(r^{17}_{Z(x)})),$$

umsomehr also:

$$(x)\,\text{Bew}_{\kappa'}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))$$

und anderseits gilt natürlich:

$$\text{Bew}_{\kappa'}(\text{Neg}(17\text{ Gen }r)).^{46}$$

Ein Spezialfall von Satz VI ist der, daß die Klasse κ aus endlich vielen FORMELN (und eventuell den daraus durch TYPENERHÖHUNG entstehenden) besteht. Jede endliche Klasse κ ist natürlich rekursiv. Sei a die größte in κ enthaltene Zahl. Dann gilt in diesem Fall für κ:

$$x \,\epsilon\, \kappa \sim (Em,n)[m \leq x \,\&\, n \leq a \,\&\, n \,\epsilon\, \kappa \,\&\, x = m\ Th\ n].$$

κ ist also rekursiv. Das erlaubt z. B. zu schließen, daß auch mit Hilfe des Auswahlaxioms (für alle Typen) oder der verallgemeinerten Kontinuumhypothese nicht alle Sätze entscheidbar sind, vorausgesetzt, daß diese Hypothesen ω-widerspruchsfrei sind.

[46] Die Existenz widerspruchsfreier und nicht ω-widerspruchsfreier κ ist damit natürlich nur unter der Voraussetzung bewiesen, daß es überhaupt widerspruchsfreie κ gibt (d. h. daß P widerspruchsfrei ist).

carries over from κ to $x\, B_\kappa\, y$ (see (5) and (6)) and to $Q(x,y)$ (see (8.1)), and only this was used in the proof given above. In this case the undecidable proposition has the form v Gen r, where r is a decidable CLASS SIGN. (Note that it even suffices that κ be decidable in the system enlarged by κ.)

If, instead of assuming that κ is ω-consistent, we assume only that it is consistent, then, although the existence of an undecidable proposition does not follow [by the argument given above], it does follow that there exists a property (r) for which it is possible neither to give a counterexample nor to prove that it holds of all numbers. For in the proof that 17 *Gen* r is not κ-PROVABLE only the consistency of κ was used (above, page 177). Moreover from $\overline{\text{Bew}_\kappa}(17\text{ Gen }r)$ it follows by (15) that, for every number x, $Sb(r^{17}_{Z(x)})$ is κ-PROVABLE and consequently that $\text{Neg}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))$ is not κ-PROVABLE for any number.

If we adjoin Neg(17 Gen r) to κ, we obtain a class of FORMULAS κ' that is consistent but not ω-consistent. κ' is consistent, since otherwise 17 Gen r would be κ-PROVABLE. However, κ' is not ω-consistent, because, by $\overline{\text{Bew}_\kappa}(17\text{ Gen }r)$ and (15),

$$(x)\text{Bew}_\kappa(Sb(r^{17}_{Z(x)}))$$

and, a fortiori,

$$(x)\text{Bew}_{\kappa'}(Sb(r^{17}_{Z(x)}))$$

hold, while on the other hand, of course,

$$\text{Bew}_{\kappa'}(\text{Neg}(17\text{ Gen }r))$$

holds.[46]

We have a special case of Theorem VI when the class κ consists of a finite number of FORMULAS (and, if we so desire, of those resulting from them by TYPE ELEVATION). Every finite class κ is, of course, recursive. Let a be the greatest number contained in κ. Then we have for κ

$$x \,\epsilon\, \kappa \sim (Em,n)[m \leq x \,\&\, n \leq a \,\&\, n \,\epsilon\, \kappa \,\&\, x = m\ Th\ n].$$

Hence κ is recursive. This allows us to conclude, for example, that, even with the help of the axiom of choice (for all types) or the generalized continuum hypothesis, not all propositions are decidable, provided these hypotheses are ω-consistent.

[46] Of course, the existence of classes κ that are consistent but not ω-consistent is thus proved only on the assumption that there exists some consistent κ (that is, that P is consistent).

Beim Beweise von Satz VI wurden keine anderen Eigenschaften des Systems P verwendet als die folgenden:

1. Die Klasse der Axiome und die Schlußregeln (d. h. die Relation "unmittelbare Folge") sind rekursiv definierbar (sobald man die Grundzeichen in irgend einer Weise durch natürliche Zahlen ersetzt).

2. Jede rekursive Relation ist innerhalb des Systems P definierbar (im Sinn von Satz V).

Daher gibt es in jedem formalen System, das den Voraussetzungen 1, 2 genügt und ω-widerspruchsfrei ist, unentscheidbare Sätze der Form $(x)F(x)$, wo F eine rekursiv definierte Eigenschaft natürlicher Zahlen ist,
191 und ebenso in jeder Erweiterung eines solchen | Systems durch eine rekursiv definierbare ω-widerspruchsfreie Klasse von Axiomen. Zu den Systemen, welche die Voraussetzungen 1, 2 erfüllen, gehören, wie man leicht bestätigen kann, das Zermelo–Fraenkelsche und das von Neumannsche Axiomensystem der Mengenlehre,[47] ferner das Axiomensystem der Zahlentheorie, welches aus den Peanoschen Axiomen, der rekursiven Definition (nach Schema (2)) und den logischen Regeln besteht.[48] Die Voraussetzung 1. erfüllt überhaupt jedes System, dessen Schlußregeln die gewöhnlichen sind und dessen Axiome (analog wie in P) durch Einsetzung aus endlich vielen Schemata entstehen.[48a]

3

Wir ziehen nun aus Satz VI weitere Folgerungen und geben zu diesem Zweck folgende Definition:

Eine Relation (Klasse) heißt *arithmetisch*, wenn sie sich allein mittels der Begriffe $+$, $\cdot$ (Addition and Multiplikation, bezogen auf natürliche Zahlen)[49] und den logischen Konstanten $\vee, \overline{}, (x), =$ definieren läßt, wobei (x) und $=$ sich nur auf natürliche Zahlen beziehen dürfen.[50] Entsprechend wird der Begriff "arithmetischer Satz" definiert. Insbesondere sind z. B.

[47]Der Beweis von Voraussetzung 1. gestaltet sich hier sogar einfacher als im Falle des Systems P, da es nur eine Art von Grundvariablen gibt (bzw. zwei bei J. von Neumann).

[48]Vgl. Problem III in *Hilbert 1929a.*

[48a]Der wahre Grund für die Unvollständigkeit, welche allen formalen Systemen der Mathematik anhaftet, liegt, wie im II. Teil dieser Abhandlung gezeigt werden wird, darin, daß die Bildung immer höherer Typen sich ins Transfinite fortsetzen läßt (vgl. *Hilbert 1926*), während in jedem formalen System höchstens abzählbar viele vorhanden sind. Man kann nämlich zeigen, daß die hier aufgestellten unentscheidbaren Sätze durch Adjunktion passender höherer Typen (z. B. des Typus ω zum System P) immer entscheidbar werden. Analoges gilt auch für das Axiomensystem der Mengenlehre.

[49]Die Null wird hier und im folgenden immer mit zu den natürlichen Zahlen gerechnet.

[50]Das Definiens eines solchen Begriffes muß sich also allein mittels der angeführten

In the proof of Theorem VI no properties of the system P were used besides the following:

1. The class of axioms and the rules of inference (that is, the relation "immediate consequence") are recursively definable (as soon as we replace the primitive signs in some way by natural numbers).

2. Every recursive relation is definable (in the sense of Theorem V) in the system P.

Therefore, in every formal system that satisfies the assumptions 1 and 2 and is ω-consistent, there are undecidable propositions of the form $(x)F(x)$, where F is a recursively defined property of natural numbers, and likewise in every extension of such a system by a recursively definable ω-consistent class of axioms. As can easily be verified, included among the systems satisfying the assumptions 1 and 2 are the Zermelo–Fraenkel and the von Neumann axiom systems of set theory,[47] as well as the axiom system of number theory consisting of the Peano axioms, recursive definition (by Schema (2)), and the rules of logic.[48] Assumption 1 is satisfied by any system that has the usual rules of inference and whose axioms (like those of P) result from a finite number of schemata by substitution.[48a]

3

We shall now deduce some consequences from Theorem VI, and to this end we give the following definition:

A relation (class) is said to be *arithmetical* if it can be defined in terms of the notions $+$ and $\cdot$ (addition and multiplication for natural numbers)[49] and the logical constants $\vee, \overline{}, (x)$, and $=$, where (x) and $=$ apply to natural numbers only.[50] The notion "arithmetical proposition" is defined

[47]The proof of assumption 1 turns out to be even simpler here than for the system P, since there is just one kind of primitive variables (or two in von Neumann's system).

[48]See Problem III in *Hilbert 1929a.*

[48a]As will be shown in Part II of this paper, the true reason for the incompleteness inherent in all formal systems of mathematics is that the formation of ever higher types can be continued into the transfinite (see *Hilbert 1926*, page 184), while in any formal system at most denumerably many of them are available. For it can be shown that the undecidable propositions constructed here become decidable whenever appropriate higher types are added (for example, the type ω to the system P). An analogous situation prevails for the axiom system of set theory.

[49]Here and in what follows, zero is always included among the natural numbers.

[50]The definiens of such a notion, therefore, must consist exclusively of the signs listed, variables for natural numbers, $x, y, \ldots$, and the signs 0 and 1 (variables for functions and sets are not permitted to occur). Instead of x any other number variable, of course, may occur in the quantifiers.

die Relationen "größer" und "kongruent nach einem Modul" arithmetisch, denn es gilt:

$$x > y \sim \overline{(Ez)}[y = x + z],$$
$$x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, n) \sim (Ez)[x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n].$$

Es gilt der

Satz VII: *Jede rekursive Relation ist arithmetisch.*

Wir beweisen den Satz in der Gestalt: Jede Relation der Form $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, wo ϕ rekursiv ist, ist arithmetisch, und wenden vollständige Induktion nach der Stufe von ϕ an. ϕ habe die s-te Stufe ($s > 1$). Dann gilt entweder:

192 | 1. $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \rho[\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \chi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)]$

(wo ρ und sämtliche χ_i kleinere Stufe haben als s)[51] oder:

2. $\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$
$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu[k, \phi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$

(wo ψ, μ niedrigere Stufe als s haben).

Im ersten Falle gilt:

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ey_1, \ldots, y_m)[R(x_0, y_1, \ldots, y_m)\,\& \\ S_1(y_1, x_1, \ldots, x_n)\,\& \ldots \& S_m(y_m, x_1, \ldots, x_n)],$$

wo R bzw. S_i die nach induktiver Annahme existierenden mit $x_0 = \rho(y_1, \ldots, y_m)$ bzw. $y = \chi_i(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalenten arithmetischen Relationen sind. Daher ist $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ in diesem Fall arithmetisch.

Im zweiten Fall wenden wir folgendes Verfahren an: Man kann die Relation $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ mit Hilfe des Begriffes "Folge von Zahlen" (f)[52] folgendermaßen ausdrücken:

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ef)\{f_0 = \psi(x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow \\ f_{k+1} = \mu(k, f_k, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\, x_0 = f_{x_1}\}.$$

Wenn $S(y, x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $T(z, x_1, \ldots, x_{n+1})$ die nach induktiver Annahme existierenden mit $y = \psi(x_2, \ldots, x_n)$ bzw. $z = \mu(x_1, \ldots, x_{n+1})$

Zeichen, Variablen für natürliche Zahlen $x, y, \ldots$ und den Zeichen 0, 1 aufbauen (Funktions- und Mengenvariable dürfen nicht vorkommen). (In den Präfixen darf statt x natürlich auch jede andere Zahlvariable stehen.)

[51] Es brauchen natürlich nicht alle $x_1, \ldots, x_n$ in den χ_i tatsächlich vorzukommen (vgl. das Beispiel in Fußnote 27).

[52] f bedeutet hier eine Variable, deren Wertbereich die Folgen natürlichen Zahlen sind. Mit f_k wird das $(k+1)$-te Glied einer Folge f bezeichnet (mit f_0 das erste).

accordingly. The relations "greater than" and "congruent modulo n", for example, are arithmetical because we have

$$x > y \sim \overline{(Ez)}[y = x + z],$$
$$x \equiv y \,(\mathrm{mod}\, n) \sim (Ez)[x = y + z \cdot n \vee y = x + z \cdot n].$$

We now have

Theorem VII. *Every recursive relation is arithmetical.*

We shall prove the following version of this theorem: Every relation of the form $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$, where ϕ is recursive, is arithmetical, and we shall use induction on the degree of ϕ. Let ϕ be of degree s ($s > 1$). Then we have either

1. $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \rho[\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \chi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)]$

(where ρ and all χ_1 are of degrees less than s)[51] or

2. $\phi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$,
$\phi(k+1, x_2, \ldots, x_n) = \mu[k, \phi(k, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n]$

(where ψ and μ are of degrees less than s).

In the first case we have

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ey_1, \ldots, y_m)[R(x_0, y_1, \ldots, y_m)\,\& \\ S_1(y_1, x_1, \ldots, x_n)\,\& \ldots \& S_m(y_m, x_1, \ldots, x_n)],$$

where R and S_i are the arithmetical relations, existing by the inductive hypothesis, that are equivalent to $x_0 = \rho(y_1, \ldots, y_m)$ and $y = \chi_i(x_1, \ldots, x_n)$, respectively. Hence in this case $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ is arithmetical.

In the second case we use the following method. We can express the relation $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ with the help of the notion "sequence of numbers" (f)[52] in the following way:

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ef)\{f_0 = \psi(x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow \\ f_{k+1} = \mu(k, f_k, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\, x_0 = f_{x_1}\}.$$

If $S(y, x_2, \ldots, x_n)$ and $T(z, x_1, \ldots, x_{n+1})$ are the arithmetical relations, existing by the inductive hypothesis, that are equivalent to $y = \psi(x_2, \ldots, x_n)$ and $z = \mu(x_1, \ldots, x_{n+1})$, respectively, then

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ef)\{S(f_0, x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow \\ T(f_{k+1}, k, f_k, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\, x_0 = f_{x_1}\}. \qquad (17)$$

[51] Of course, not all $x_1, \ldots, x_n$ need occur in the χ_i (see the example in footnote 27).

[52] f here is a variable with the [infinite] sequences of natural numbers as its range of values. f_k denotes the $(k+1)$th term of a sequence f (f_0 denoting the first).

äquivalenten arithmetische Relationen sind, gilt daher:

$$x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n) \sim (Ef)\{S(f_0, x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow T(f_{k+1}, k, f_k, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\,x_0 = f_{x_1}\}. \tag{17}$$

Nun ersetzen wir den Begriff "Folge von Zahlen" durch "Paar von Zahlen", indem wir dem Zahlenpaar n, d die Zahlenfolge $f^{(n,d)}$ ($f_k^{(n,d)} = [n]_{1+(k+1)d}$) zuordnen, wobei $[n]_p$ den kleinsten nicht negativen Rest von n modulo p bedeutet.

Es gilt dann der

Hilfssatz 1: Ist f eine beliebige Folge natürlicher Zahlen und k eine beliebige natürliche Zahl, so gibt es ein Paar von natürlichen Zahlen n, d, so daß $f^{(n,\,d)}$ und f in den ersten k Gliedern übereinstimmen.

Beweis: Sei l die größte der Zahlen $k, f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$. Man bestimme n so, daß:

$$n \equiv f_i\ [\mathrm{mod}\,(1 + (i+1)l!)] \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

193 | was möglich ist, da je zwei der Zahlen $1 + (i+1)l!$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ relativ prim sind. Denn eine in zwei von diesen Zahlen enthaltene Primzahl müßte auch in der Differenz $(i_1 - i_2)l!$ und daher wegen $|i_1 - i_2| < l$ in $l!$ enthalten sein, was unmöglich ist. Das Zahlenpaar $n, l!$ leistet dann das Verlangte.

Da die Relation $x = [n]_p$ durch:

$$x \equiv n\,(\mathrm{mod}\,p)\,\&\,x < p$$

definiert und daher arithmetisch ist, so ist auch die folgendermaßen definierte Relation $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$:

$$P(x_0, \ldots, x_n) \equiv (En, d)\{S([n]_{d+1}, x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow T([n]_{1+d(k+2)}, k, [n]_{1+d(k+1)}, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\,x_0 = [n]_{1+d(x_1+1)}\}$$

arithmetisch, welche nach (17) und Hilfssatz 1 mit: $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ äquivalent ist (es kommt bei der Folge f in (17) nur auf ihren Verlauf bis zum $(x_1 + 1)$-ten Glied an). Damit ist Satz VII bewiesen.

Gemäß Satz VII gibt es zu jedem Problem der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) ein äquivalentes arithmetisches Problem und da der ganze Beweis von Satz VII sich (für jedes spezielle F) innerhalb des Systems P formalisieren läßt, ist diese Äquivalenz in P beweisbar. Daher gilt:

Satz VIII: *In jedem der in Satz* VI *genannten formalen Systeme*[53] *gibt es unentscheidbare arithmetische Sätze.*

[53]Das sind diejenigen ω-widerspruchsfreien Systeme, welche aus P durch Hinzufügung einer rekursiv definierbaren Klasse von Axiomen entstehen.

We now replace the notion "sequence of numbers" by "pair of numbers", assigning to the number pair n, d the number sequence $f^{(n,d)}$ ($f_k^{(n,d)} = [n]_{1+(k+1)d}$, where $[n]_p$ denotes the least nonnegative remainder of n modulo p).

We then have

Lemma 1. If f is any sequence of natural numbers and k any natural number, there exists a pair of natural numbers, n, d, such that $f^{(n,d)}$ and f agree in the first k terms.

Proof: Let l be the maximum of the numbers $k, f_0, f_1, \ldots, f_{k-1}$. Let us determine an n such that

$$n \equiv f_i\ [\mathrm{mod}(1 + (i+1)l!)] \quad \text{for} \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

which is possible, since any two of the numbers $1 + (i+1)l!$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ are relatively prime. For a prime number contained in two of these numbers would also be contained in the difference $(i_1 - i_2)l!$ and therefore, since $|i_1 - i_2| < l$, in $l!$; but this is impossible. The number pair $n, l!$ then has the desired property.

Since the relation $x = [n]_p$ is defined by

$$x \equiv n\ (\mathrm{mod}\,p)\,\&\,x < p$$

and is therefore arithmetical, the relation $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, defined by

$$P(x_0, \ldots, x_n) \equiv (En, d)\{S([n]_{d+1}, x_2, \ldots, x_n)\,\&\,(k)[k < x_1 \rightarrow T([n]_{1+d(k+2)}, k, [n]_{1+d(k+1)}, x_2, \ldots, x_n)]\,\&\,x_0 = [n]_{1+d(x_1+1)}\},$$

is also arithmetical. But by (17) and Lemma 1 it is equivalent to $x_0 = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ (the sequence f enters in (17) only through its first $x_1 + 1$ terms). Theorem VII is thus proved.

By Theorem VII, for every problem of the form $(x)F(x)$ (with recursive F) there is an equivalent arithmetical problem. Moreover, since the entire proof of Theorem VII (for every particular F) can be formalized in the system P, this equivalence is provable in P. Hence we have

Theorem VIII. *In any of the formal systems mentioned in Theorem VI,*[53] *there are undecidable arithmetical propositions.*

By the remark on page 181 above, the same holds for the axiom system of set theory and its extensions by ω-consistent recursive classes of axioms.

Finally, we derive the following result:

[53]These are the ω-consistent systems that result from P when recursively definable classes of axioms are added.

Dasselbe gilt (nach der Bemerkung auf Seite 190) für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch ω-widerspruchsfreie rekursive Klassen von Axiomen.

Wir leiten schließlich noch folgendes Resultat her:

Satz IX: *In allen in Satz* VI *genannten formalen Systemen*[53] *gibt es unentscheidbare Probleme des engeren Funktionenkalküls*[54] (d. h. Formeln des engeren Funktionenkalküls, für die weder Allgemeingültigkeit noch Existenz eines Gegenbeispiels beweisbar ist).[55]

194 | Dies beruht auf:

Satz X: *Jedes Problem der Form* $(x)F(x)$ (F *rekursiv*) *läßt sich zurückführen auf die Frage nach der Erfüllbarkeit einer Formel des engeren Funktionenkalküls* (d. h. zu jedem rekursiven F kann man eine Formel des engeren Funktionenkalküls angeben, deren Erfüllbarkeit mit der Richtigkeit von $(x)F(x)$ äquivalent ist).

Zum engeren Funktionenkalkül (e. F.) rechnen wir diejenigen Formeln, welche sich aus den Grundzeichen: $\bar{}$, $\vee$, (x), $=$, $x, y, \ldots$ (Individuenvariable), $F(x), G(x,y), H(x,y,z), \ldots$ (Eigenschafts- und Relationsvariable) aufbauen,[56] wobei (x) und $=$ sich nur auf Individuen beziehen dürfen. Wir fügen zu diesen Zeichen noch eine dritte Art von Variablen $\phi(x)$, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y,z)$ etc. hinzu, die Gegenstandsfunktionen vertreten (d. h. $\phi(x)$, $\psi(x,y)$ etc. bezeichnen eindeutige Funktionen, deren Argumente und Werte Individuen sind).[57] Eine Formel, die außer den zuerst angeführten Zeichen des e. F. noch Variable dritter Art ($\phi(x), \psi(x,y), \ldots$ etc.) enthält, soll eine Formel im weiteren Sinne (i. w. S.) heißen.[58] Die Begriffe "erfüllbar", "allgemeingültig" übertragen sich ohneweiters auf Formeln i. w. S und es gilt der Satz, daß man zu jeder Formel i. w. S. A eine gewöhnliche Formel des e. F. B angeben kann, so daß die Erfüllbarkeit von A mit der von B äquivalent ist. B erhält man aus A, indem man die in A vorkommenden Variablen dritter Art $\phi(x), \psi(x,y), \ldots$ durch Ausdrücke der Form:

[54] Vgl. *Hilbert und Ackermann 1928.* Im System P sind unter Formeln des engeren Funktionenkalküls diejenigen zu verstehen, welche aus den Formeln des engeren Funktionenkalküls der PM durch die auf S. 176 angedeutete Ersetzung der Relationen durch Klassen höheren Typs entstehen.

[55] In meiner Arbeit *1930* habe ich gezeigt, daß jede Formel des engeren Funktionenkalküls entweder als allgemeingültig nachweisbar ist oder ein Gegenbeispiel existiert; die Existenz dieses Gegenbeispiels ist aber nach Satz IX *nicht* immer nachweisbar (in der angeführten formalen Systemen).

[56] D. Hilbert und W. Ackermann rechnen in dem eben zitierten Buch (*1928*) das Zeichen $=$ nicht zum engeren Funktionenkalkül. Es gibt aber zu jeder Formel, in der das Zeichen $=$ vorkommt, eine solche ohne dieses Zeichen, die mit der ursprünglichen gleichzeitig erfüllbar ist (vgl. meiner Arbeit *1930*).

[57] Und zwar soll der Definitionsbereich immer der *ganze* Individuenbereich sein.

[58] Variable dritter Art dürfen dabei an allen Leerstellen für Individuenvariable stehen, z. B.: $y = \phi(x)$, $F(x, \phi(y))$, $G[\psi(x, (\phi(y)), x]$ usw.

Theorem IX. *In any of the formal systems mentioned in Theorem VI,*[53] *there are undecidable problems of the restricted functional calculus*[54] (that is, formulas of the restricted functional calculus for which neither validity nor the existence of a counterexample is provable).[55]

This is a consequence of

Theorem X. *Every problem of the form* $(x)F(x)$ (*with recursive* F) *can be reduced to the question whether a certain formula of the restricted functional calculus is satisfiable* (that is, for every recursive F, we can find a formula of the restricted functional calculus that is satisfiable if and only if $(x)F(x)$ is true).

By formulas of the restricted functional calculus (r. f. c.) we understand expressions formed from the primitive signs $\bar{}$, $\vee$, (x), $=$, $x, y, \ldots$ (individual variables), $F(x), G(x,y), H(x,y,z), \ldots$ (predicate and relation variables), where (x) and $=$ apply to individuals only.[56] To these signs we add a third kind of variables, $\phi(x)$, $\psi(x,y)$, $\chi(x,y,z)$, and so on, which stand for functions of individuals (that is, $\phi(x)$, $\psi(x,y)$, and so on denote single-valued functions whose arguments and values are individuals).[57] A formula that contains variables of the third kind in addition to the signs of the r. f. c. first mentioned will be called a formula in the extended sense (i. e. s.).[58] The notions "satisfiable" and "valid" carry over immediately to formulas i. e. s., and we have the theorem that, for any formula A i. e. s., we can find a formula B of the r. f. c. proper such that A is satisfiable if and only if B is. We obtain B from A by replacing the variables of the third kind, $\phi(x), \psi(x,y), \ldots$, that occur in A with expressions of the form $(\imath z)F(z,x)$, $(\imath z)G(z,x,y), \ldots$, by eliminating the "descriptive" functions by the method used in PM (I, $*14$), and by logically multiplying[59] the formula thus obtained by an expression stating about each $F, G, \ldots$ put in place of

[54] See *Hilbert and Ackermann 1928.* In the system P we must understand by formulas of the restricted functional calculus those that result from the formulas of the restricted functional calculus of PM when relations are replaced by classes of higher types as indicated on page 153 above.

[55] In *1930* I showed that every formula of the restricted functional calculus either can be proved to be valid or has a counterexample. However, by Theorem IX the existence of this counterexample is *not* always provable (in the formal systems we have been considering).

[56] Hilbert and Ackermann (*1928*) do not include the sign $=$ in the restricted functional calculus. But for every formula in which the sign $=$ occurs there exists a formula that does not contain this sign and is satisfiable if and only if the original formula is (see *Gödel 1930*).

[57] Moreover, the domain of definition is always supposed to be the *entire* domain of individuals.

[58] Variables of the third kind may occur at all argument places occupied by individual variables, for example, $y = \phi(x)$, $F(x, \phi(y))$, $G(\psi(x, \phi(y)), x)$, and the like.

[59] That is, by forming the conjunction.

$(\imath z)F(z,x), (\imath z)G(z,x,y), \ldots$ ersetzt, die "beschreibenden" Funktionen im Sinne der PM, I, $*14$, auflöst und die so erhaltene Formel mit einem Ausdruck logisch multipliziert,[59] der besagt, daß sämtliche an Stelle der $\phi, \psi, \ldots$ gesetzte $F, G, \ldots$ hinsichtlich der ersten Leerstelle genau eindeutig sind.

Wir zeigen nun, daß es zu jedem Problem der Form $(x)F(x)$ (F rekursive) ein äquivalentes betreffend die Erfüllbarkeit einer Formel i. w. S. gibt, woraus nach der eben gemachten Bemerkung Satz X folgt.

Da F rekursiv ist, gibt es eine rekursive Funktion $\Phi(x)$, so daß

$$F(x) \sim [\Phi(x) = 0],$$

und für Φ gibt es eine Reihe von Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, so daß: $\Phi_n = \Phi$, $\Phi_1(x) = x + 1$ und für jedes $\Phi_k \quad (1 < k \leq n)$ entweder:

1. $$(x_2, \ldots, x_m)[\Phi_k(0, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_p(x_2, \ldots, x_m)],$$
$$(x, x_2, \ldots, x_m)\{\Phi_k[\Phi_1(x), x_2, \ldots, x_m] = \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m]\},$$
$$p, q < k, \tag{18}$$

195 | oder:

2. $$(x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_r(\Phi_{i_1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, \Phi_{i_s}(\mathfrak{x}_s))],^{60}$$
$$r < k, \quad i_v < k \quad (\text{für } v = 1, 2, \ldots, s), \tag{19}$$

oder:

3. $$(x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_1(\Phi_1(\ldots(\Phi_1(0))\ldots))]. \tag{20}$$

Ferner bilden wir die Sätze:

$$(x)\overline{\Phi_1(x) = 0}\,\&\,(x, y)[\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \to x = y], \tag{21}$$
$$(x)[\Phi_n(x) = 0]. \tag{22}$$

Wir ersetzen nun in allen Formeln (18), (19), (20) (für $k = 2, 3, \ldots, n$) und in (21), (22) die Funktionen Φ_i durch Funktionsvariable ϕ_i, die Zahl 0 durch eine sonst nicht vorkommende Individuenvariable x_0 und bilden die Konjunktion C sämtlicher so erhaltener Formeln.

Die Formel $(Ex_0)C$ hat dann die verlangte Eigenschaft, d. h.:

[59] D. h. die Konjunktion bildet.

[60] $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ vertreten irgend welche Komplexe der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$; z. B.: x_1, x_3, x_2.

some $\phi, \psi, \ldots$ that it holds for a unique value of the first argument [for any choice of values for the other arguments].

We now show that, for every problem of the form $(x)F(x)$ (with recursive F), there is an equivalent problem concerning the satisfiability of a formula i. e. s., so that, on account of the remark just made, Theorem X follows.

Since F is recursive, there is a recursive function $\Phi(x)$ such that

$$F(x) \sim [\Phi(x) = 0],$$

and for Φ there is a sequence of functions, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, such that $\Phi_n = \Phi$, $\Phi_1(x) = x + 1$, and for every Φ_k $(1 < k \leq n)$ we have either

1. $$(x_2, \ldots, x_m)[\Phi_k(0, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_p(x_2, \ldots, x_m)],$$
$$(x, x_2, \ldots, x_m)\{\Phi_k[\Phi_1(x), x_2, \ldots, x_m] = \Phi_q[x, \Phi_k(x, x_2, \ldots, x_m), x_2, \ldots, x_m]\},$$
$$\text{with } p, q < k,^{59a} \tag{18}$$

or

2. $$(x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_r(\Phi_{i_1}(\mathfrak{x}_1), \ldots, \Phi_{i_s}(\mathfrak{x}_s))],$$
$$\text{with } r < k, \quad i_v < k \quad (\text{for } v = 1, 2, \ldots, s),^{60} \tag{19}$$

or

3. $$(x_1, \ldots, x_m)[\Phi_k(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_1(\Phi_1(\ldots(\Phi_1(0))\ldots))]. \tag{20}$$

We then form the propositions

$$(x)\overline{\Phi_1(x) = 0}\,\&\,(x, y)[\Phi_1(x) = \Phi_1(y) \to x = y], \tag{21}$$
$$(x)[\Phi_n(x) = 0]. \tag{22}$$

In all of the formulas (18), (19), (20) (for $k = 2, 3, \ldots, n$) and in (21) and (22) we now replace the functions Φ_i by function variables ϕ_i and the number 0 by an individual variable x_0 not used so far, and we form the conjunction C of all the formulas thus obtained.

The formula $(Ex_0)C$ then has the required property, that is,

[59a] [The last clause of footnote 27 was not taken into account in the formulas (18). But an explicit formulation of the cases with fewer variables on the right side is actually necessary here for the formal correctness of the proof, unless the identity function, $I(x) = x$, is added to the initial functions.]

[60] The $\mathfrak{x}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ stand for finite sequences of the variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$; for example, x_1, x_3, x_2.

1. Wenn $(x)[\Phi(x) = 0]$ gilt, ist $(Ex_0)C$ erfüllbar, denn die Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ ergeben dann offenbar in $(Ex_0)C$ für $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ eingesetzt einen richtigen Satz.

2. Wenn $(Ex_0)C$ erfüllbar ist, gilt $(x)[\Phi(x) = 0]$.

Beweis: Seien $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ die nach Voraussetzung existierenden Funktionen, welche in $(Ex_0)C$ für $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ eingesetzt einen richtigen Satz liefern. Ihr Individuenbereich sei $\mathfrak{I}$. Wegen der Richtigkeit von $(Ex_0)C$ für die Funktionen Ψ_i gibt es ein Individuum a (aus $\mathfrak{I}$), so daß sämtliche Formeln (18) bis (22) bei Ersetzung der Φ_i durch Ψ_i und von 0 durch a in richtige Sätze (18′) bis (22′) übergehen. Wir bilden nun die kleinste Teilklasse von $\mathfrak{I}$, welche a enthält und gegen die Operation $\Psi_1(x)$ abgeschlossen ist. Diese Teilklasse ($\mathfrak{I}'$) hat die Eigenschaft, daß jede der Funktionen Ψ_i auf Elemente aus $\mathfrak{I}'$ angewendet wieder Elemente aus $\mathfrak{I}'$ ergibt. Denn für Ψ_1 gilt dies nach Definition von $\mathfrak{I}'$ und wegen (18′), (19′), (20′) überträgt sich diese Eigenschaft von Ψ_i mit niedrigerem Index auf solche mit höherem. Die Funktionen, welche aus Ψ_i durch Beschränkung auf den Individuenbereich $\mathfrak{I}'$ entstehen, nennen wir Ψ_i'. Auch für diese Funktion gelten sämtliche Formeln (18) bis (22) (bei der Ersetzung von 0 durch a und Φ_i durch Ψ_i').

Wegen der Richtigkeit von (21) für Ψ_1' und a kann man die Individuen aus $\mathfrak{I}'$ eineindeutig auf die natürlichen Zahlen abbilden und zwar so, daß a in 0 und die Funktion Ψ_1' in die Nachfolgerfunktion Φ_1 übergeht. Durch diese Abbildung gehen aber sämtliche Funktionen Ψ_i' in die Funktionen Φ_i
196 über und wegen der Richtigkeit von (22) | für Ψ_n' und a gilt

$$(x)[\Phi_n(x) = 0]$$

oder $(x)[\Phi(x) = 0]$, was zu beweisen war.[61]

Da man die Überlegungen, welche zu Satz X führen (für jedes spezielle F), auch innerhalb des Systems P durchführen kann, so ist die Äquivalenz zwischen einem Satz der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) und der Erfüllbarkeit der entsprechenden Formel des e. F. in P beweisbar und daher folgt aus der Unentscheidbarkeit des einen die des anderen, womit Satz IX bewiesen ist.[62]

[61] Aus Satz X folgt z. B., daß das Fermatsche und das Goldbachsche Problem lösbar wären, wenn man das Entscheidungsproblem des e. F. gelöst hätte.

[62] Satz IX gilt natürlich auch für das Axiomensystem der Mengenlehre und dessen Erweiterungen durch rekursiv definierbare ω-widerspruchsfreie Klassen von Axiomen, da es ja auch in diesen Systemen unentscheidbare Sätze der Form $(x)F(x)$ (F rekursiv) gibt.

1. If $(x)[\Phi(x) = 0]$ holds, $(Ex_0)C$ is satisfiable. For the functions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ obviously yield a true proposition when substituted for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ in $(Ex_0)C$.

2. If $(Ex_0)C$ is satisfiable, $(x)[\Phi(x) = 0]$ holds.

Proof: Let $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ be the functions (which exist by assumption) that yield a true proposition when substituted for $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ in $(Ex_0)C$. Let $\mathfrak{I}$ be their domain of individuals. Since $(Ex_0)C$ holds for the functions Ψ_i, there is an individual a (in $\mathfrak{I}$) such that all of the formulas (18)–(22) go over into true propositions, (18′)–(22′), when the Φ_i are replaced by the Ψ_i and 0 by a. We now form the smallest subclass of $\mathfrak{I}$ that contains a and is closed under the operation $\Psi_1(x)$. This subclass ($\mathfrak{I}'$) has the property that every function Ψ_i, when applied to elements of $\mathfrak{I}'$, again yields elements of $\mathfrak{I}'$. For this holds of Ψ_1 by the definition of $\mathfrak{I}'$, and by (18′), (19′), and (20′) it carries over from Ψ_i with smaller subscripts to Ψ_i with larger ones. The functions that result from the Ψ_i when these are restricted to the domain $\mathfrak{I}'$ of individuals will be denoted by Ψ_i'. All of the formulas (18)–(22) hold for these functions also (when we replace 0 by a and Φ_i by Ψ_i').

Because (21) holds for Ψ_1' and a, we can map the individuals of $\mathfrak{I}'$ one-to-one onto the natural numbers in such a manner that a goes over into 0 and the function Ψ_1' into the successor function Φ_1. But by this mapping the functions Ψ_i' go over into the functions Φ_i; and, since (22) holds for Ψ_n' and a,

$$(x)[\Phi_n(x) = 0],$$

that is, $(x)[\Phi(x) = 0]$, holds, which was to be proved.[61]

Since (for each particular F) the argument leading to Theorem X can be carried out in the system P, it follows that any proposition of the form $(x)F(x)$ (with recursive F) can in P be proved equivalent to the proposition that states about the corresponding formula of the r. f. c. that it is satisfiable. Hence the undecidability of one implies that of the other, which proves Theorem IX.[62]

4

The results of Section 2 have a surprising consequence concerning a consistency proof for the system P (and its extensions), which can be stated as follows:

[61] Theorem X implies, for example, that Fermat's problem and Goldbach's problem could be solved if the decision problem for the r. f. c. were solved.

[62] Theorem IX, of course, also holds for the axiom system of set theory and for its extensions by recursively definable ω-consistent classes of axioms, since there are undecidable propositions of the form $(x)F(x)$ (with recursive F) in these systems too.

4

Aus den Ergebnissen von Abschnitt 2 folgt ein merkwürdiges Resultat, bezüglich eines Widerspruchslosigkeitsbeweises des Systems P (und seiner Erweiterungen), das durch folgenden Satz ausgesprochen wird:

Satz XI: *Sei κ eine beliebige rekursive widerspruchsfreie*[63] *Klasse von* FORMELN, *dann gilt: Die* SATZFORMEL, *welche besagt, daß κ widerspruchsfrei ist, ist nicht* κ-BEWEISBAR; insbesondere ist die Widerspruchsfreiheit von P in P unbeweisbar,[64] vorausgesetzt, daß P widerspruchsfrei ist (im entgegengesetzten Fall ist natürlich jede Aussage beweisbar).

Der Beweis ist (in Umrissen skizziert) der folgende: Sei κ eine beliebige für die folgenden Betrachtungen ein für allemal gewählte rekursive Klasse von FORMELN (im einfachsten Falle die leere Klasse). Zum Beweise der Tatsache, daß 17 Gen r nicht κ-BEWEISBAR ist,[65] wurde, wie aus 1., Seite 189, hervorgeht, nur die Widerspruchsfreiheit von κ benutzt, d. h. es gilt:

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r), \tag{23}$$

d. h. nach (6.1):

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)\overline{x\ B_\kappa\ (17\ \mathrm{Gen}\ r)}.$$

Nach (13) ist 17 Gen $r = Sb(p^{19}_{Z(p)})$ und daher:

197 |
$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)\overline{x\ B_\kappa\ (Sb(p^{19}_{Z(p)}))},$$

d. h. nach (8.1):

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)Q(x,p). \tag{24}$$

Wir stellen nun folgendes fest: Sämtliche in Abschnitt 2[66] und Abschnitt 4 bisher definierte Begriffe (bzw. bewiesene Behauptungen) sind auch in P ausdrückbar (bzw. beweisbar). Denn es wurden überall nur die gewöhnlichen Definitions- und Beweismethoden der klassischen Mathematik verwendet, wie sie im System P formalisiert sind. Insbesondere ist κ (wie jede rekursive Klasse) in P definierbar. Sei w die SATZFORMEL, durch welche in P Wid (κ) ausgedrückt wird. Die Relation $Q(x,y)$ wird gemäß (8.1), (9), (10) durch das RELATIONSZEICHEN q ausgedrückt, folglich $Q(x,p)$ durch r (da nach (12) $r = Sb(q^{19}_{Z(p)})$) und der Satz $(x)Q(x,p)$ durch 17 Gen r.

[63] κ ist widerspruchsfrei (abgekürzt als Wid(κ)) wird folgendermaßen definiert: $\mathrm{Wid}(\kappa) \equiv (Ex)[\mathrm{Form}(x)\ \&\ \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(x)]$.

[64] Dies folgt, wenn man für κ die leere Klasse von FORMELN einsetzt.

[65] r hängt natürlich (ebenso wie p) von κ ab.

[66] Von der Definition für "rekursiv" auf Seite 179 bis zum Beweis von Satz VI inklusiv.

Theorem XI. *Let κ be any recursive consistent*[63] *class of* FORMULAS; *then the* SENTENTIAL FORMULA *stating that κ is consistent is not* κ-PROVABLE; in particular, the consistency of P is not provable in P,[64] provided P is consistent (in the opposite case, of course, every proposition is provable [in P]).

The proof (briefly outlined) is as follows: Let κ be some recursive class of FORMULAS chosen once and for all for the following discussion (in the simplest case it is the empty class). As appears from 1, page 177 above, only the consistency of κ was used in proving that 17 Gen r is not κ-PROVABLE;[65] that is, we have

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(17\ \mathrm{Gen}\ r), \tag{23}$$

that is, by (6.1),

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)\overline{x\ B_\kappa\ (17\ \mathrm{Gen}\ r)}.$$

By (13), we have

$$17\ \mathrm{Gen}\ r = Sb(p^{19}_{Z(p)}),$$

hence

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)\overline{x\ B_\kappa\ Sb(p^{19}_{Z(p)})},$$

that is, by (8.1),

$$\mathrm{Wid}(\kappa) \to (x)Q(x,p). \tag{24}$$

We now observe the following: all notions defined (or statements proved) in Section 2,[66] and in Section 4 up to this point, are also expressible (or provable) in P. For throughout we have used only the methods of definition and proof that are customary in classical mathematics, as they are formalized in the system P. In particular, κ (like every recursive class) is definable in P. Let w be the SENTENTIAL FORMULA by which Wid(κ) is expressed in P. According to (8.1), (9), and (10), the relation $Q(x,y)$ is expressed by the RELATION SIGN q, hence $Q(x,p)$ by r (since, by (12), $r = Sb(q^{19}_{Z(p)})$), and the proposition $(x)Q(x,p)$ by 17 Gen r.

Therefore, by (24), w Imp (17 Gen r) is provable in P (and a fortiori κ-PROVABLE).[67] If now w were κ-PROVABLE, then 17 Gen r would also be κ-PROVABLE, and from this it would follow, by (23), that κ is not consistent.

[63] "κ is consistent" (abbreviated by "Wid(κ)") is defined thus: $\mathrm{Wid}(\kappa) \equiv (Ex)(\mathrm{Form}(x)\ \&\ \overline{\mathrm{Bew}_\kappa}(x))$.

[64] This follows if we substitute the empty class of FORMULAS for κ.

[65] Of course, r (like p) depends on κ.

[66] From the definition of "recursive" on page 159 above to the proof of Theorem VI inclusive.

[67] That the truth of w Imp (17 Gen r) can be inferred from (23) is simply due to the fact that the undecidable proposition 17 Gen r asserts its own unprovability, as was noted at the very beginning.

Wegen (24) ist also w Imp (17 Gen r) in P beweisbar[67] (um so mehr κ-BEWEISBAR). Wäre nun w κ-BEWEISBAR, so wäre auch 17 Gen r κ-BEWEISBAR und daraus würde nach (23) folgen, daß κ nicht widerspruchsfrei ist.

Es sei bemerkt, daß auch dieser Beweis konstruktiv ist, d. h. er gestattet, falls ein BEWEIS aus κ für w vorgelegt ist, einen Widerspruch aus κ effektiv herzuleiten. Der ganze Beweis für Satz XI läßt sich wörtlich auch auf das Axiomensystem der Mengenlehre M und der klassischen Mathematik[68] A übertragen und liefert auch hier das Resultat: Es gibt keinen Widerspruchslosigkeitsbeweis für M bzw. A, der innerhalb von M bzw. A formalisiert werden könnte, vorausgesetzt daß M bzw. A widerspruchsfrei ist. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß Satz XI (und die entsprechenden Resultate über M, A) in keinem Widerspruch zum Hilbertschen formalistischen Standpunkt stehen. Denn dieser setzt nur die Existenz eines mit finiten Mitteln geführten Widerspruchsfreiheitsbeweises voraus und es wäre denkbar, daß es finite Beweise gibt, die sich in P (bzw. M, A) *nicht* darstellen lassen.

Da, für jede widerspruchsfreie Klasse κ, w nicht κ-BEWEISBAR ist, so gibt es schon immer dann (aus κ) unentscheidbare Sätze (nämlich w), wenn
198 Neg(w) nicht κ-BEWEISBAR ist; m. a. W. man kann in Satz VI | die Voraussetzung der ω-Widerspruchsfreiheit ersetzen durch die folgende: Die Aussage "κ ist widerspruchsvoll" ist nicht κ-BEWEISBAR. (Man beachte, daß es widerspruchsfreie κ gibt, für die diese Aussage κ-BEWEISBAR ist.)

Wir haben uns in dieser Arbeit im wesentlichen auf das System P beschränkt und die Anwendungen auf andere Systeme nur angedeutet. In voller Allgemeinheit werden die Resultate in einer demnächst erscheinenden Fortsetzung ausgesprochen und bewiesen werden. In dieser Arbeit wird auch der nur skizzenhaft geführte Beweis von Satz XI ausführlich dargestellt werden.

[67]Daß aus (23) auf die Richtigkeit von w Imp (17 Gen r) geschlossen werden kann, beruht einfach darauf, daß der unentscheidbare Satz 17 Gen r, wie gleich zu Anfang bemerkt, seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet.

[68]Vgl. *von Neumann 1927*.

Let us observe that this proof, too, is constructive; that is, it allows us to actually derive a contradiction from κ, once a PROOF of w from κ is given. The entire proof of Theorem XI carries over word for word to the axiom system of set theory, M, and to that of classical mathematics,[68] A, and here, too, it yields the result: There is no consistency proof for M, or for A, that could be formalized in M, or A, respectively, provided M, or A, is consistent. I wish to note expressly that Theorem XI (and the corresponding results for M and A) do not contradict Hilbert's formalistic viewpoint. For this viewpoint presupposes only the existence of a consistency proof in which nothing but finitary means of proof is used, and it is conceivable that there exist finitary proofs that *cannot* be expressed in the formalism of P (or of M or A).

Since, for any consistent class κ, w is not κ-PROVABLE, there always are propositions (namely w) that are undecidable (on the basis of κ) as soon as Neg(w) is not κ-PROVABLE; in other words, we can, in Theorem VI, replace the assumption of ω-consistency by the following: The proposition "κ is inconsistent" is not κ-PROVABLE. (Note that there are consistent κ for which this proposition is κ-PROVABLE.)

In the present paper we have on the whole restricted ourselves to the system P, and we have only indicated the applications to other systems. The results will be stated and proved in full generality in a sequel to be published soon.[68a] In that paper, also, the proof of Theorem XI, only sketched here, will be given in detail.

Note added 28 August 1963. In consequence of later advances, in particular of the fact that due to A. M. Turing's work[69] a precise and unquestionably adequate definition of the general notion of formal system[70] can now be given, a completely general version of Theorems VI and XI is now possible. That is, it can be proved rigorously that in *every* consistent formal system that contains a certain amount of finitary number theory there exist undecidable arithmetic propositions and that, moreover, the consistency of any such system cannot be proved in the system.

[68]See *von Neumann 1927*.

[68a]⟦This explains the "I" in the title of the paper. The author's intention was to publish this sequel in the next volume of the *Monatshefte*. The prompt acceptance of his results was one of the reasons that made him change his plan.⟧

[69]See *Turing 1937*, page 249.

[70]In my opinion the term "formal system" or "formalism" should never be used for anything but this notion. In a lecture ⟦*1946*⟧ at Princeton (mentioned in *Princeton University 1947*, p. 11) I suggested certain transfinite generalizations of formalisms; but these are something radically different from formal systems in the proper sense of the term, whose characteristic property is that reasoning in them, in principle, can be completely replaced by mechanical devices.