はじめに

この本は受験参考書ではありません．むしろ入試資料です．1949 年新制入試元年から最近までの東大の入試のすべてを集めた資料集です．

私は受験業界に身をおいて 40 有余年多くの問題に出会ってきました．毎年多くの問題が作られ，その時代時代を反映してきました．そして多くの問題が流れ星の如く一瞬のきらめきを放ちながら消えていったように思います．

恐らく，多くの問題はその当時の出題者たちによって，心を込めて作られたに違いないと思います．そしてその問題たちによってそれぞれの人の人生が決まっていったのだと思います．たかが入試されど入試と言われます．

しかしながら，終ってしまえば幻の如く忘れさられてしまったでしょう．受験した人たちも，自分の合否は覚えていても，どんな問題であったかなどを覚えている人は稀だと思います．ひょっとすると出題者も忘れているかもしれません．

一方で我々受験業界では仕事の都合上過去の良問から学ぶことは大切な仕事です．過去の問題の集大成は聖文社の『数学入試便覧』が最も知られていて私も便利に使わせてもらっています．聖文社の『数学入試便覧』は昭和 31 年（1956 年）から始まって当時の主要大学の数学の入試問題を網羅的に集めた本です．

確か 1990 年頃河合塾の中森信哉先生から「こういうのを作りました」といって，大量のコピーをいただきました．内容は図書館でコピーしてきたという昭和 24 年（1949 年）から昭和 30 年（1955 年）までの入試問題と解答でした．主に当時の旺文社『入試問題正解』の「数学編」でした．そのときはその価値はわかるが，当面の仕事には役に立たないと思い，受け取ってそのまま死蔵しておりました．中森先生はそれ以前からも，戦前の陸軍士官学校の入試問題などを発掘したり，古本屋で古い参考書を調べたりしておりました．

2008 年頃まで私は河合塾のデータベースを作るプロジェクトに参加していました．そのとき，東大の過去の問題がそのデータベースのなかにないことに気が付きました．プロジェクトが終ってから，中森先生の資料，そして，昭和 51 年（1976 年）に私が河合塾駒場校に関ってから，ほぼ一貫して東大の入試問題に関ってきたこと，そして，私自身が河合塾の仕事をもうすぐ終りにしなければならないこと，などを考え，昭和 24 年から今日に至る東大の入試の集大成を作り，河合塾データベースに提供できるのではないかと考えました．そして，これは私個人の仕事として，一人で始めました．

私は 1990 年頃から $\TeX$ で原稿を書いていましたから，そのデータは手元にありました．また，1977 年以後 1992 年までは『東大直前問題集』（途中で表題が変り『東大予想問題集』）を執筆していましたから，その原稿を Digital 化すればよく，1976 年以前を新たに付け加えればよいという見通しが立ちました．

その作業を 2011 年頃から始め確か 2014 年頃に完成し，データベースとして公表しました．その折，数学科チーフだった中村政彦さん，データベース担当だった佐藤展章さんから「これを出版できるようにしたい」と励ましをいただきました．同じプロジェクトのメンバーだった黒田惠悟先生，花城宏明先生，富永正行先生からも励ましをいただきました．

でも，もともとはデータベ—スとして作成したので，本にするのが適切だろうかと考えていました．

そのとき，数学科の三原正裕先生が最後に後押しをしてくれました．読んでみても面白いといってくれました．そして，出版にこぎつけることができました．

そして，河合塾の数学科が全面的にバックアップしてくれることになりました．

もともとこのプロジェクトは中森信哉先生の資料提出がなければありえなかったと思います．その意味で中森信哉先生には感謝しています．

また，一方的なデータの提供に快く受け止めてくれた中村政彦さん，佐藤展章さん，最後に後押しをし

てくれた三原正裕先生にも感謝しています．

実際の作成に当たって校正等の指揮をとっていただいた中村敬一先生，堂前孝信先生には特にお世話になりました．

そのほか，校正のとりまとめをしていただいた瀬戸山義治先生，西浦高志先生，吉田大吾先生，田村拓之先生，伊東敦先生，実際の校正していただいた中村拓人先生，笹井理恵先生，木村文彦先生，鳥本真先生，樋原賢治先生，涌谷俊之先生，河内康容先生，住吉千波先生にも感謝します．

また，出版に当たり私のわがままや遅れを許していただいた河合出版のスタッフの方々にも感謝を申し上げます．

・本書に掲載の問題は，東京大学の公表問題，公表問題を扱った書籍・資料から引用したものです（下巻収録「巻末資料」の出典参照）．掲載にあたっては，用字・表記等を適宜，改めたところがあります．

・解答・解説は東京大学が公表したものではありません．また，東京大学の承認や推奨，その他の検討を受けたものではありません．

上巻 目次

はじめに (1)
凡例 (7)
欧文文字の用法・幾何の用語 (10)

第 1 章 1949〜1958（昭和 24〜昭和 33）年 — 1
新制東大の発足，おおらかな時代

1.0 前史 3
1.1 新制東京大学の発足（1949 年） 4
問題解答（1949〜1950 年） 5
1949 年 1950 年
1.2 第 1 次指導要領改訂（1951 年） 32
問題解答（1951〜1954 年） 33
1951 年 1952 年 1953 年 1954 年
1.3 一次試験の導入（1955 年） 85
問題解答（1955〜1958 年） 86
1955 年 1956 年 1957 年 1958 年

第 2 章 1959〜1965（昭和 34〜昭和 40）年 — 183
数 I 代数・数 I 幾何の時代，初等幾何の終焉

2.1 第 2 次指導要領改訂（1959 年） 185
問題解答（1959〜1960 年） 186
1959 年 1960 年
2.2 文理別の試験に（1961 年） 225
問題解答（1961〜1965 年） 226
1961 年 1962 年 1963 年 1964 年 1965 年

第 3 章 1966〜1975（昭和 41〜昭和 50）年 — 323
複素平面，ベクトルの登場から紛争の時代

3.1 第 3 次指導要領改訂（1966 年） 325
問題解答（1966〜1968 年） 326
1966 年 1967 年 1968 年
3.2 東大紛争と入試の中止（1969 年） 387
問題解答（1970 年） 389
1970 年（注：1969 年ナシ）
3.3 東大紛争後（1971 年） 403
問題解答（1971〜1975 年） 404
1971 年 1972 年 1973 年 1974 年 1975 年

第 4 章　1976〜1984（昭和 51〜昭和 59）年　491
数学の現代化と行列の登場，共通一次試験の登場

4.1　第 4 次指導要領改訂（1976 年）　493
問題解答（1976〜1978 年）　494
1976 年　1977 年　1978 年
4.2　共通一次試験と東大一次試験の廃止（1979 年）　563
問題解答（1979〜1984 年）　564
1979 年　1980 年　1981 年　1982 年　1983 年
1984 年

COLUMN 目次

衛生看護学科（1953〜1965 年）　60
最大何個打ち抜けるか　81
石取りゲーム（1957 年一般数学）　159
幾何の時代　181
1960 年代頃までの不備　321
$\frac{1}{6}$ 公式（1975 年（文科））　481
用語の変遷と指導要領　489
東大一次試験の終了（1978 年）　576
日本語の数詞の不思議　611
別解があることはよくないこと？　649

東京大学数学入試問題一覧表（1949〜1984 年）

下巻 目次 概要

第 5 章　1985〜1996(昭和 60〜平成 8）年 —— 1
国公立複数受験可能化から後期試験の登場

第 6 章　1997〜2005（平成 9〜平成 17）年 —— 255
数学Ⅰ，数学 A，数学Ⅱ，数学 B，数学Ⅲ，数学 C の形式など現代につながる形式の完成

第 7 章　2006〜2014（平成 18〜平成 26）年 —— 443
後期試験数学の廃止

第 8 章　2015〜2020（平成 27〜令和 2）年 —— 593
行列の消滅と新しい入試の時代へ

巻末資料 —— 689

凡例

問題

基本資料は 1974 年と 1976 年以後は東大入試の写真版資料に基づいています．

1974 年と 1976 年は河合塾で開催された単発の研究会資料であり，1977 年以後は，河合塾「入試解答速報」「直前問題集，予想問題集」「数学科入試研究会資料」「入試問題集」「河合塾ホームページ解答速報」などによっています．

1975 年と 1973 年以前は主にその年に出版された旺文社『入試問題正解』および聖文社『数学入試便覧』によっています．『数学入試便覧』は私が所蔵しているもので，『入試問題正解』の方は，私の所蔵と，中森先生が集められた資料，国立国会図書館で閲覧した資料に基づいています．

字句については極力原典に忠実になるよう心がけました．

写真版のない年の記述については，当該資料に基づきましたが，当時の指導要領に照らして「函数」や「根」に変更したものもあります．

ただ，欧文の書体やレイアウトなどについては必ずしもこだわっていません．

分　野

「科目：範囲」のように各問題の科目と範囲をつけました．ただ，科目と範囲は異なった概念で書かれています．

科目は入試年度で教科書の科目を表します．一覧を示すと以下のようです．

1949	解析 1，解析 2，幾何
1950～1958	解析Ⅰ，解析Ⅱ，幾何，一般数学
1959～1965	数学Ⅰ代数，数学Ⅰ幾何，数学Ⅱ，数学Ⅲ
1966～1975	数学Ⅰ，数学ⅡB，数学Ⅲ
1976～1984	数学Ⅰ，数学ⅡB，数学Ⅲ
1985～1996	数学Ⅰ，代数・幾何，基礎解析，微分・積分，確率・統計
1997～2005	数学Ⅰ，数学 A，数学Ⅱ，数学 B，数学Ⅲ，数学 C
2006～2014	数学Ⅰ，数学 A，数学Ⅱ，数学 B，数学Ⅲ，数学 C
2015～	数学Ⅰ，数学 A，数学Ⅱ，数学 B，数学Ⅲ

同じ数学Ⅰであっても，例えば 1959～1965 のものと，1966～1975 のものは違います．

課程の変わり目の年には新課程用と旧課程用に問題が分けられている年があります．

具体的には 1959 年，1966 年，1976 年，1977 年です．

これらの年の問題は新課程用の問題および新旧共通の問題は新課程の科目を書き，旧課程用の問題には旧課程の科目を書きました．

1958 年までの「解析Ⅰ」「解析Ⅱ」「幾何」「一般数学」の時代については，特記すべきことがあります．この時代の高校卒業に必須な科目は 4 科目中 1 科目でありました．1949 年の指導要領には科目名が書かれているだけで科目をどのように分類するかはよくわかりません．大学に任せられていたのかもしれません．1951 年以後でも例えば三角関数は「解析Ⅰ」「解析Ⅱ」「幾何」のいずれにも属していいます．

いずれにせよ，今からは考えにくいのですが，異なる科目に共通部分が存在します．東大の問題でも年度によって共通問題が存在します．

これらの年度の問題は科目別に出題されているので科目名はその出題されている科目名を書き，共通問題は適宜判断するという方法をとりました．

範囲の方はもともとデータベースの資料として作成した経緯から，今日の単元としてわかりやすい用語を用いています．

当時の教科書の用語として「三角函数」が使われていても範囲名は「三角関数」と書かれているはずです．

また，今日の教科書で「複素数平面」として扱われているものは1966年～1975年の教科書では「複素平面」と記載されていますが，範囲欄には「複素数平面」で統一しました．

また，その当時範囲外であっても実質的に一次変換の問題なら「一次変換」としました．そのような場合多くは一次変換の基礎知識が不要な出題になっていたり，基本事項が問題文に書かれていたりすることが多いですがあえて範囲として記述しました．

微分法，積分法については今日数学Ⅱと数学Ⅲに分けられています．このような分類がされたのは1966年（入試年度で）以後です．それ以後一貫してその分類は守られています．

そこで現教育課程で数学Ⅱに分類される問題は「整式の微分」「整式の積分」とし，数学Ⅲに分類される問題は「微分法」「積分法」と使い分けています．ただし「体積」については1997年から計算が整式であるか否かに関わらず数Ⅲに分類されるようになりました。これについては範囲に体積と書くことで対応しています。

科目名と範囲を比較すると指導要領の変遷がわかると思います．

巻末資料として指導要領の変遷を表にしておきます．

考え方

２次試験については全問つけました．ただ，初期の問題については「略」としたり「あとで**【解説】**」としたりしたものがあります．

考え方 を書くまでもないものは「略」としました．**【解答】**の前に書くと答を先に示すようになる問題については，「あとで**【解説】**」として**【解説】**を付けました．

１次試験（'55～'78）には付けませんでした．

【解答】

「函数」,「根」など現代と用語の違う表記については**【解答】**の冒頭に説明を付けました．（注）がふさわしいように思えますが**【解答】**の前に示すべきと考えたからです．

【解答１】,【解答２】,【別解】について

たくさんの問題を解いていると，解答の順序にいろいろなパターンがあり解答の表記にもいろいろなタイプがあることに気づかされます．

大体この本の解答は少なくとも1970年代後半からは河合塾の解答速報を基本としています．その意味で私だけの作品ではありません．それらの解答に私なりに加筆修正したものです．1970年代前半までは私の解答として書きましたが，当時の旺文社，聖文社の解答を参考にしています．

そのとき，そのときでスタイルが変っています．**【解答】**や**【別解】**の書き方にも不統一な面はあります．

２通り以上の解法がある場合オーソドックスな解法を**【解答】**とし，そうでないものを**【別解】**としていることが多いです．問題によってはどちらを別解にしてよいか迷うことがあります．解答速報では時間が制約されているのもあって，ある時期から**【解答１】,【解答２】**という表記が目立ち始めました．一旦このようにすると，安易に**【解答１】,【解答２】**を使いまくった時期もあります．今回なるべくオーソドックスなものを**【解答】**，そうでないものを**【別解】**という精神で直したものもありますが，基本的には当時の書き方を踏襲しています．

また，(1)，(2)とあるとき，(1)だけの別解，(2)だけの別解がある場合は **(1)の【別解】** などとして (1)の**【解答】**の直後に記載しています．

また，解法によって，ベクトルによる解法で(1)，(2)を解き，初等幾何的解法で(1)，(2)を解くというように考え方でまとめた順序になっているものもあります．

そのために解答の順序がいろいろになっています．

考え方 は主に**【解答】**の方法を中心に書きましたが，**【別解】**との関係も書きました．

【別解】によっては特に考え方を書いた方がよい場合もあります．その場合は枠組みで考え方を書きました．したがって，すべての**【別解】**に考え方を付けているわけではありません．

また，考え方ではなくただ計算の方法だけ違うものは**【別計算】**としました．**【別解】**とはおこがましいと感じた次第です．

【解答】，**【別解】**はただ単に羅列しているのでなく，それぞれにはそれぞれのストーリーがあります．そんな点まで読んでいただければこの上なく光栄です．

欧文文字の用法・幾何の用語

欧文文字の用法について

立体（ローマン体）…… 点，人や物の名

斜体（イタリック体）…… 数値，数式，集合，行列

と使い分けました．ただし東大の原文の使用に合わせている部分もあります．

幾何の用語と記号について

幾何が華やかだった1965年以前の時代からかなりの年が過ぎてしまい，今の教育を受けた若い人たちには理解できないことが多々あるようなので，基本的なことから説明しなければならないように思います．

三角形と △ の用例について，

「三角形」と「△」は基本的に意味上の相違はありません．

特定の三角形を指さない表現はすべて「三角形」．つまり，「二等辺 △」とか，「△ がある」などとはしません．

特定の三角形が式中にあるときは △ としました．それが三角形の何なのかは式（特に結合子）によって理解できると思います．

「△ABC＝△DEF」ならこれは三角形の面積に関する式を表します．

「△ABC≡△DEF」や「△ABC∽△DEF」ならこれは三角形の形状に関する式です．

「△ABC⊥△DEF」や「△ABC∥△DEF」ならこれは三角形を含む平面に関する式です．

「△ABC∪△DEF」や「△ABC∩△DEF」や「△ABC⊃△DEF」や「△ABC⊂△DEF」ならこれは三角形の点集合に関する式です．もっとも集合に関する使用例はないと思われます．

また，２つの三角形の合同や相似について語る直前ではその三角形を“ △ ”で表します．例えば，

「△ABC と △DEF において，AB＝DE，BC＝EF，CA＝FD だから △ABC≡△DEF.」

のように表します．これは私が高校でそのように指導を受けたせいでもあります．

それ以外，地の文章ではなるべく「三角形 ABC の面積は」とか「△ABC の面積は」のように三角形の何を表すかを明示するように記述しました．ただし，それ以前に △ABC の面積の式が存在するとき，△ABC を数値的に扱う場合，たとえば，「△ABC の２倍」とか「△ABC の最大値」のような表記をするときにはいちいち「の面積」などと断りませんでした．

「三角形」，「△」の使い分けについては，前後でなるべく矛盾がないようにしています．（あまり規則性はありません.）

「△」は面積，それ以外は「三角形」という俗説がありますが，上記のように数値または数式に近いときは「△」，平文に近いときは「三角形」という傾向はあると思います．厳格な分け方はできないと思います．

大雑把に，教科「幾何」，「数学Ⅰ幾何」があった，1965年までは「△」を優先し，1966年以後は「三角形」を優先にしています．

また，「＝」が式中で意味することは次のようになります．

線分や弧が等号で結ばれていれば，それはその「長さ」を表します．例えば，

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD},\quad \overset{\frown}{\mathrm{AB}}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}},\quad \mathrm{AB}=\overset{\frown}{\mathrm{CD}}.$$

最初の例は２つの線分の長さが等しいことを，次の例は２つの弧の長さが等しいことを，第３の例は線分 AB の長さが弧 CD の長さに等しいことを表しています．もっとも第３の例は使っていないと思われます．

なお，記号 $\overline{\mathrm{AB}}$ は線分の長さを表す記号で，いくつかの問題で使われています．

角が等号で結ばれていれば，それはその「角度」を表します．例えば，

$$\angle \mathrm{ABC}=60^\circ,\quad \angle \mathrm{CAB}=\frac{\pi}{6},\quad \angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{DEF}.$$

最初の例は角 ABC の大きさが 60° であることを，次の例は角 CAB の大きさが $\dfrac{\pi}{6}$ ラジアンであることを，第 3 の例は角 ABC と角 DEF の大きさが等しいことを表しています．いうまでもないことですが，$\angle$ABC は線分 BA と線分 BC が囲む角のことです．

なお幾何が盛んであった時代には B が x 軸上にあるとき $\angle \mathrm{AB}x$ は線分 BA と x 軸正方向のなす角，$\angle \mathrm{AB}x'$ は線分 AB と x 軸負方向のなす角を表すという方法がとられました．この表記は今の若い人には理解できないらしいので，使用していません．

また，特に断りのない限り，$\angle$ABC は BA から BC に向かう有向角を表してはいません．

三角形，長方形など平面図形が等号で結ばれていれば，それはその図形の「面積」を表します．例えば，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \square\, \mathrm{DEFG}$$

は三角形 ABC の面積と長方形 DEFG の面積が等しいことを表しています．

この他 ▱ABCD は平行四辺形 ABCD を，□ABCD は正方形 ABCD を表します．この他台形や扇形のように略記する記号がない平面図形でも，

台形 ABCD＝扇形 EFG

は台形 ABCD と扇形 EFG の面積が等しいことを表します．

なお，「台形 ABCD」はどの 2 辺が平行であるかを特定していません．

また，扇形 ABC は 2 つの等辺 AB，AC と弧 BC が囲む図形を表します．

この他特定の平面図形を表す言葉が等号で結ばれていればそれがその図形の面積を表していると理解すべきです．

四面体，錐体，柱体など立体図形が等号で結ばれていれば，それはその立体の「体積」を表します．例えば，

四面体 OABC＝ 正四角錐 V-DEFG

は四面体 OABC の体積と正四角錐 V-DEFG の体積が等しいことを表しています．

なお四角錐 V-DEFG の V は V が頂点で，DEFG が底面の四角形を表しています．同様に六角錐なら V-ABCDEF のような表し方をします．

一方，立方体，直方体，柱体，錐台では上底面と下底面をハイフンで結び，対応する頂点を同じ順で並べます．例えば立方体 ABCD-EFGH は上底面が正方形 ABCD で下底面が正方形 EFGH であり AE，BF，CG，DH が辺で結ばれていることを意味します．

円，球については，点 A が中心の円を「円 A」，点 B が中心の球を「球 B」のように中心名で表記することがあります．

ただし，この表記では半径が示されないから，多くの場合，「～の円を C とする」など集合として定義してから用いることが多いです．ただ，そのような表記は問題文中で使われている場合があります．

ただし，集合として定義した場合，さらに「円 C の面積を S とする」など面積，体積を別途定義し，C が直接面積を表すような表記はしないようにしています．

三角形 ABC について，三角比の公式を導く表記法，相対する頂点名の小文字で対辺の長さを表す方法，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$，や角の大きさをイタリックで表す方法，$\angle\mathrm{CAB}=A$，$\angle\mathrm{ABC}=B$，$\angle\mathrm{BCA}=C$ や頂点だけでどの角かわかる場合の表記，$\angle$A のような略記も使われています．誤解のない限り使っています．また，三角形は ABC だけでなく三角形 PQR では，$\mathrm{QR}=p$，$\angle\mathrm{RPQ}=P$ のような使い方もしています．

$\therefore$ 記号は「ゆえに」と読みます．また $\because$ は「なぜなら」と読みます．これらの記号は以前は教科書でも使われていましたが，いつの間にか使われなくなってしまいました．しかし，数式を多用するときに，いちいち，「ゆえに」と入れて改行するのは面倒なことなのと，以前の原稿も含まれているのでそのまま使っています．

第1章

1949~1958(昭和24~昭和33)年

新制東大の発足，おおらかな時代

1.0　前史

1945 年の敗戦とともに連合軍による占領が始まった．GHQ が最初に行ったことは戦争責任の追及であった．次に行ったことの中に教育改革があった．最初は旧制度の中での改革（墨塗り教科書，軍国教員の追放，医科大学の改革，女子専門学校の大幅認可など）であったが，抜本的な改革として新制の学校制度が導入された．それまでの複線型の学校制度を単線型の六三三四の制度に改めた．

それ以前の学校制度では小学校 6 年まではほぼ一律であったが，2 年制の高等小学校，5 年制の中等学校，4 年制の師範学校，3 年制の高等学校，3 年制の大学などがあり，一本道ではなく並列的な部分もあり複雑であった．また制度自身も政令によりかなり頻繁に変更が加えられ一貫したものではなかった．

高等教育への道も小学校 → 中等学校 → 高等学校 → 大学の他，小学校 → 高等小学校 → 師範学校 → 高等師範学校 → 文理大学のような道もあった．その他専門学校，女子教育の学校，陸海軍のための学校もあった．

学制の改革は 1947 年から始められ，新制大学は 1949 年にスタートする．1947 年に教育基本法，学校教育法が制定された．戦前の統制的な教育から民主的な教育へ改革が図られた．文部省による教科書検定，学習指導要領もこの年に始まった．しかし後の時代に見えるような強制力はともなわず．あくまでもひとつの基準だった．新制高等学校は 1948 年にスタートしている．この年旧制中学 5 年から新制高校 3 年に編入した生徒が最初の新制大学受験生になっている．

このころ　あんなこと・こんなこと

流行歌としては「リンゴの唄」（1945 年），「東京の花売り娘」（1946 年），「鐘の鳴る丘」（1947 年）など．

日本国憲法が制定されたのが 1947 年片山社会党内閣，芦田内閣をへて吉田長期政権になったのが 1948 年である．

学生運動で全学連が結成されたのも 1948 年である．

1.1　新制東京大学の発足（1949 年）

新制大学は旧制大学だけでなく，旧制の高等学校，師範学校，専門学校などが移管した．

旧制の高等学校は年齢的には現行の高校三年生から大学二年生までの期間なので多くの大学の教養部や東大の教養学部の基礎になった．また単独で文理学部などになった大学も多い（千葉大や埼玉大）．

また師範学校もほぼ高等学校と同様な年代構成であった．師範学校はほとんど官立であり，各県に 1 校ずつあったために，各県のいわゆる駅弁大学の教育学部の基礎になった．

また，専門学校は現在の専門学校と異なり，日本女子大や東京女子大のように大学を名乗っていたものや東京物理学校（東京理科大）や青山学院のように世間的に大学並に評価されていた学校も含まれていた．実際多くの専門学校は新制を機に大学に昇格した．国公立の専門学校は各県に，というほど多くはなかったが新制大学の農学部や工学部，薬学部の基礎になった．

なお一部の私立大学は 1948 年から新制に移行した．また，医学部は 1946 年から医学専門学校審査のうえ旧制医科大に格上げになるなどの改革が行われたばかりであったが，医学部の入学資格が大学 2 年修了者という規定が設けられたため多くの医科大は 1952 年に新制へ移管している．

こうした中，新制東京大学は旧制東京大学（1947 年に東京帝国大学から改称）と一高（第一高等学校）および七年制の東京高校と合併して，1949 年 5 月に新制に移管した．

最初の新制東大の入試は，1949 年 6 月に行われた（何故このような時期になったのかは未調査．この年，国立大は基本的に 6 月に入試を行っている）．

当時の教育制度はまだ始まったばかりのためか，学習指導要領も整備されておらず，教科書に「文部省検定」と書かれているが教科書はかなり自由に書かれていたように思われる．私が教科書図書館（(公）教科書センター附属．東京都江東区千石.）で見た，中等学校教科書株式会社（後の中教出版）の教科書などは三角関数の逆関数，空間図形に二次曲面，ベクトルなどを含み，積分では積分による重心の定義など現代では考えられないような内容まで記述されていた．ひょっとすると旧制中学の教科書のままかもしれない．

一方，入試の方は新制初期の問題は概して易問ばかりの印象を受ける．

当時の入試は基本的に「解析 1 」,「解析 2 」,「幾何」の中から 1 科目を選択するようになっていた．東京大学では「共通問題」 2 題と選択した教科 3 題を 120 分で解く形式が取られた．

「解析 1 」はいろいろな関数を取り扱う教科で,「解析 2 」は微積分と確率を扱う教科,「幾何」は図形問題を扱う教科であった．

1950 年には 3 科目に加えて,「一般数学」が加わって， 4 科目から 1 科目選択制になった．

「一般数学」は文章題または応用問題的な問題が多く，後の総合科目を思わせる出題が中心である．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1949〜1950）

この時代の東大の問題には真偽判定を求める問題が多い（1949 年共通第 1 問，解析 2 第 1 問，幾何第 1 問，1950 年共通第 2 問，幾何第 1 問）．

このころ　あんなこと・こんなこと

総選挙で民自党（吉田与党）と共産党が躍進（1949 年）．

戦後国鉄三大ミステリー事件（下山事件，三鷹事件，松川事件）が起こる（1949 年）．

共産党に対する公職追放いわゆるレッドパージ（1950 年）．共産党武装闘争方針（1951 年）．柴田翔『されどわれらが日々』の舞台の時代．

美空ひばりが「悲しき口笛」でデビュー（1949 年），その他「青い山脈」（1949 年），「長崎の鐘」（1949 年）など．

インフレの収束（1949 年），古橋廣之進世界記録（1949 年），湯川秀樹ノーベル賞受賞（1949 年）．

朝鮮戦争（1950 年）が始まり，日本の景気がよくなった．

1949 年　共通問題

第 1 問

次の事柄は正しいか。正しいときには，番号の後へ○印をつけよ。もし一般には正しくないときには，番号の後へ×印をつけて，その成り立つための條件を書け。

1．ある整数が整数 a でも整数 b でも割り切れるならば，これは $a\times b$ で割り切れる。

2．$ax-b=0$ ならば，$x=\dfrac{b}{a}$

3．$ax>b$ ならば $x>\dfrac{b}{a}$

4．$a>b$ ならば $a^2>b^2$

5．z が x に正比例し，かつ y に反比例すれば，x は $y\times z$ に正比例する。

分　野

解析Ⅰ：真偽判定

考え方

あとで解説。

【解答】

1．×　a，b が互いに素のとき．　…(答)

2．×　$a\neq 0$ のとき．　…(答)

3．×　$a>0$ のとき．　…(答)

4．×　$a+b$ が正のとき．　…(答)

5．×　決して成り立たない．　…(答)

【解説】

1．a，b で割り切れる数は a，b の最小公倍数で割り切れる．最小公倍数が ab に一致するのは，a，b が互いに素のときである．

2．$a=0$ のとき，$b=0$ となり，x は定まらない．

3．$a<0$ なら $x<\dfrac{b}{a}$ となる．$a=0$ なら $b<0$ のとき，x は任意で，$b\geqq 0$ なら x は存在しない．

4．a，b 共に正とか $b>0$ でも正解である．$a-b>0$ のもとで $a^2-b^2=(a-b)(a+b)>0$ となると考えると，$a+b>0$ が最も広い条件である．

5．z は y に反比例するから yz は定数で 0 ではない．したがって，x に正比例することはない．

第 2 問

次の括弧のなかに適当な言葉を入れよ。

1．二等辺三角形は（　　　）に関して対称である。

2．菱形は（　　　）ような平行四辺形である。

3．正五角形の一つの内角の大きさは（　　　）度である。

4．球の表面積は半径の（　　　）に比例し，その体積は半径の（　　　）に比例する。

5．三つの稜の長さが 3，4，12 である直方体内の二点間の距離は（　　　）を超えない。

分　野

幾何：平面図形

考え方

あとで解説。

【解答】

「稜」は辺のことである．

1．二等辺三角形は（頂点から対辺に下した垂線）に関して対称である．　…(答)

2．菱形は（4 辺の長さが等しい）ような平行四辺形である．　…(答)

3．正五角形の一つの内角の大きさは（108）度である．　…(答)

4．球の表面積は半径の（2 乗）に比例し，その体積は半径の（3 乗）に比例する．　…(答)

5．三つの稜の長さが 3，4，12 である直方体内の二点間の距離は（13）を超えない．　…(答)

【解説】

1．（頂点から対辺に引いた中線），（底辺の垂直二等分線），（頂角の二等分線）などでもよい．

(注)　二等辺三角形において 2 本の等辺が共有する点を頂点という．

2．菱形の定義が 4 辺が等しい平行四辺形である．（対角線が垂直な）でもよい．

3．1 外角が $\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$ だから，$180^\circ-72^\circ=108^\circ$．

4．半径が r なら表面積は $4\pi r^2$ で体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ である．この公式を知らなくても球がすべて相似であることから表面積は r^2 に比例し，体積が r^3 に比例することは明らか．

5．対角線の長さを超えない．$\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$ が対角線の長さである．実際には 13 以上の数であればこれを超えることはない．

1949 年　3 科目より 1 科目選択・解析 1

第 1 問

次の函数のグラフの大体の形をえがけ。

1．$y=2(x-1)$　　2．$y=(x-1)^2$

3．$y=2^{x-1}$　　4．$y=\log_2(x-1)$

5．$y=\sin\pi x$

分　野

解析 I：2 次関数，指数関数，対数関数，三角関数

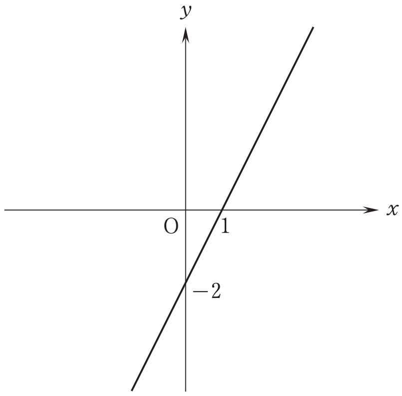
考え方

要所，要所をおさえてかけばよい．

【解答】

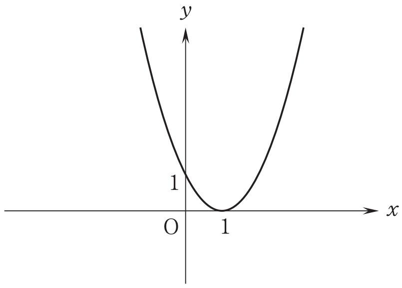
問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

1．x 切片が 1，y 切片が -2，傾き 2 の直線．



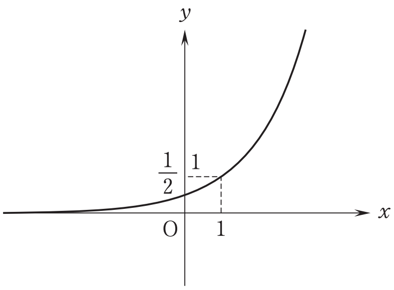
…(答)

2．軸が $x=1$，頂点が $(1,\ 0)$，y 切片が 1 の放物線．



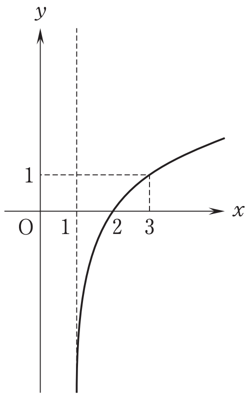
…(答)

3．x 軸が漸近線，y 切片が $\dfrac{1}{2}$，点 $(1,\ 1)$ を通る．



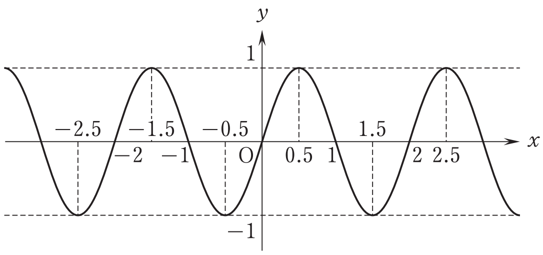
…(答)

4．$x=1$ が漸近線，$x>1$ が定義域，x 切片は 2，$(3,\ 1)$ を通る．



…(答)

5．x 軸と $x=\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ で交わり，$y=1$ と，$x=\cdots,\ -1.5,\ 0.5,\ 2.5,\ \cdots$ で接し，$y=-1$ と，$x=\cdots,\ -2.5,\ -0.5,\ 1.5,\ \cdots$ で接する．



…(答)

（注）　旺文社の（注）と思われるが，問題文に「(註：方眼紙を与える。)」とある．

第2問

次の(　　　)のなかへ適当な言葉又は式を入れよ。但しこゝでa，b，c及びx，yの値は何れも実数値のみを考えるものとする。$y=ax^2+bx+c$ において，

1．xの値をどのようにとっても，yの値はある一定の値を超えないならばaの値は(　　　)である。

2．xの値をどのようにとっても，yの値がいつも正なら，a(　　　)，b^2-4ac(　　　)である。

3．xの値をどのようにとっても，yの値がいつも負なら，a(　　　)，b^2-4ac(　　　)である。

4．xの値によって，yの値が正にも負にもなり得るならば，b^2-4ac(　　　)である。

5．xの値を適当にとれば，yはどんな値でもとり得るならば，aの値は(　　　)である。

分　野

解析Ⅰ：2次関数

考え方

x^2の係数aの意味と判別式の意味が正しく理解されているかどうかが問われている．

【解答】

1．xの値をどのようにとっても，yの値はある一定の値をこえないならばaの値は（負）である．…(答)
　ただし，$a=0$，$b=0$ のときも $y=ax^2+bx+c$ は一定値でその値をこえない．

2．xの値をどのようにとっても，yの値がつねに正なら，a（>0），b^2-4ac（<0）である．…(答)
　ただし，$a=0$，$b=0$，$c>0$ のときも $y=ax^2+bx+c$ はつねに正である．

3．xの値をどのようにとっても，yの値がつねに負なら，a（<0），b^2-4ac（<0）である．…(答)
　ただし，$a=0$，$b=0$，$c<0$ のときも $y=ax^2+bx+c$ はつねに負である．

4．xの値によって，yの値が正にも負にもなり得るならば，b^2-4ac（>0）である．…(答)

5．xの値を適当にとれば，yはどんな値でもとり得るならば，aの値は（0）である．…(答)

(注)　1．から3．までは $a\neq 0$ という前提なら難なく埋まる．しかし，$a=0$ も含めて考えると，(　　　)を埋める適当な式は見当たらない．

（1．には「$a=b=0$」，2．には「$a=b=0$ かつ $c>0$」，3．には「$a=b=0$ かつ $c<0$」の場合が上記の他にそれぞれ含まれる．）

4．においても，同様であるが，$a=0$ のとき，$b\neq 0$ が条件なので，$b^2-4ac=b^2>0$ となり，合せて，$b^2-4ac>0$ とできる．

また，5．で必要十分条件なら $a=0$ かつ $b\neq 0$ である．

第 3 問

直径 AB の長さが l である半円周上に点 P をとるとき，

$$3\mathrm{AP}+4\mathrm{BP}$$

の最大値を求めよ。

分　野

解析 I：三角関数

考え方

三角関数の合成公式を使うか，方程式を使うかのいずれかである．

【解答】

AB は直径だから，∠APB は直角または A＝P または B＝P である．AP＝x，BP＝y とおくと，

$$x^2+y^2=l^2.$$

$$3\mathrm{AP}+4\mathrm{BP}=3x+4y=k$$

とおくと，$y=\dfrac{k-3x}{4}$．よって，

$$x^2+\left(\frac{k-3x}{4}\right)^2=l^2. \quad \therefore \quad 25x^2-6kx+k^2-16l^2=0.$$

実数 x が存在する条件は，

$$(3k)^2-25(k^2-16l^2)\geqq 0. \quad \therefore \quad 16(25l^2-k^2)\geqq 0.$$

よって，$-5l\leqq k\leqq 5l$.

$k=5l$ のとき，$x=\dfrac{3}{5}l$，$y=\dfrac{4}{5}l$．ともに正だから，長さとして存在する．

よって，3AP＋4BP の最大値は $5l$.　　…(答)

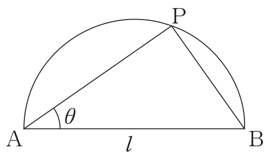
【別解】

AB＝l，∠APB が直角または A＝P または B＝P であるから，∠PAB＝θ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

AP＝$l\cos\theta$，BP＝$l\sin\theta$．よって，

$$3\mathrm{AP}+4\mathrm{BP}=3l\cos\theta+4l\sin\theta=5l\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ となる $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす角である．



3AP＋4BP が最大になるのは，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のときで，そのとき，AP＝$\dfrac{3}{5}l$，BP＝$\dfrac{4}{5}l$ で，3AP＋4BP の最大値は $5l$ である．　　…(答)

(注)　本来合成で解く問題と思われるが，当時合成公式が解析 I なのか解析 II なのか不明確なので，**【別解】**にした．'51 年以後なら確実に解析 II なのだが，それ以前は解析 I と解析 II の区分に関する明確な区別を示す文章は見当たらない．当時の教科書を見ると三角函数（関数）は解析 I に含まれている．

1949 年　3科目より1科目選択・解析2

第1問

次の事柄は正しいか。正しいときには，番号の後へ○印をつけよ。そうでないときには，番号の後へ×印をつけて，その成り立たない例をあげよ。

1．$\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = a^2$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

2．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$

3．$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，$a_n < b_n$ ならば $a < b$

4．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

5．$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

分　野

解析Ⅱ：数列の極限，真偽判定

考え方

注意深く証明するつもりでかかれば，正しくないときは反例が見つかる.

【解答】

1．×　$a_n = -1 + \dfrac{1}{n}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 = 1^2$ だが，$\lim_{n\to\infty} a_n = -1$ …(答)

2．×　$a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$，$b_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ で，∞ は $\dfrac{1}{0}$ ではない.

…(答)

3．×　$a_n = 1 + \dfrac{1}{n}$，$b_n = 1 + \dfrac{2}{n}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = a = 1$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b = 1$，$a_n < b_n$ だが，$a < b$ ではない.

…(答)

4．×　$a_n = n + 1$，$b_n = n$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ だが $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 1$.

5．○ …(答)

第2問

與えられた直円錐の中に含まれていて，それと同じ軸をもつ直円柱のうちで体積が最大のものを求めよ。

分　野

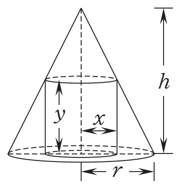
解析Ⅱ：整式の微分

考え方

直円錐について大きさ等が与えられていないから，例えば底面の半径を r，高さを h とおくなどして考える.

【解答】

直円錐の底面の半径を r 高さを h とする．含まれる直円柱のうち，底面の円の半径を固定すると下底面が円錐の底面上にあり，上底面が直円錐に接しているものが体積最大の直円錐である．



直円柱の底面の円の半径を $x(0<x<r)$，円錐に接する円柱の高さを y とすると，

$$\frac{x}{r}+\frac{y}{h}=1. \quad \therefore \quad y=h-\frac{h}{r}x.$$

この直円柱の体積は

$$\pi x^2 y=\pi x^2\left(h-\frac{h}{r}x\right)=\pi\frac{h}{r}x^2(r-x).$$

$f(x)=x^2(r-x)$ とおくと，$f'(x)=2xr-3x^2=(2r-3x)x$.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}r$	$\cdots$	(r)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，直円柱の体積が最大になるのは $x=\frac{2}{3}r$，$y=\frac{1}{3}h$ のとき．

つまり，直円錐の底面の半径の $\frac{2}{3}$ の半径をもち，直円錐の高さの $\frac{1}{3}$ の高さをもつ直円柱が求めるものである．　…(答)

(注)　体積の最大値は，直円錐の体積の $\frac{4}{9}$ 倍である．

第 3 問

座標がそれぞれ $(0,\ -5)$，$(2,\ 3)$，$(4,\ 3)$ である三点を通って，軸が y 軸に平行な抛物線と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：整式の積分

考え方

放物線（抛物線）の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおき，3 点の座標から，a，b，c を求める．あとは x 軸との交点を求めて積分すればよい．

【解答】

放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とする．

$(0,\ -5)$，$(2,\ 3)$，$(4,\ 3)$ を通るから，

$$-5=c, \quad 3=4a+2b+c, \quad 3=16a+4b+c.$$

よって，$a=-1$，$b=6$，$c=-5$.

よって，放物線の方程式は $y=-x^2+6x-5=-(x-5)(x-1)$.

放物線と x 軸とで囲まれた部分の面積は

$$\int_1^5(-x^2+6x-5)\,dx=\frac{32}{3}.$$　…(答)

1949 年　3 科目より 1 科目選択・幾何

第 1 問

次の事柄は成り立つか。成り立つときには，番号の前へ○印をつけよ。そうでないときには，番号の前へ×印をつけて，その成り立たない例を図示せよ。

1．二つの角の二辺がそれぞれ互に平行ならば，これらの角は互に相等しい。

2．長さ a，b，c の三つの線分が $a+b>c$ なる條件を満足していれば，a，b，c を三辺とする三角形を作図することができる。

3．二つの定円へ引いた接線の長さの等しい点の軌跡は一つの直線である。

4．直径によって二等分される弦は，この直径に垂直である。

5．二つの多角形は，その対應する内角が夫夫等しいとき，互に相似である。

分　野

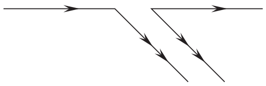
幾何：平面図形，真偽判定

考え方

図をかきながら考えること．

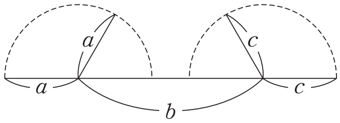
【解答】

×　1．



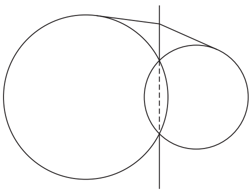
…(答)

×　2．



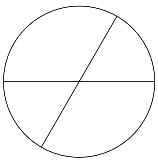
…(答)

×　3．



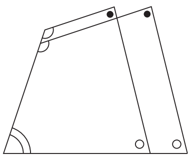
…(答)

×　4．



…(答)

×　5．



…(答)

(注)　念のため，問題文の「夫夫」は「それぞれ」と読む．

第 2 問

三角形 ABC は，頂点 A を通る適当な直線によって二つの相似三角形に分けられるという。三角形 ABC の形をしらべよ。

分　野

幾何：平面図形，相似

考え方

A と対辺を結ぶ線分が対辺となす角についてまず考える．

【解答】

A を通る直線が対辺 BC と交わる点を D とする．もし $\angle ADB \fallingdotseq \angle ADC$ なら 2 つの三角形の内角に $\angle ADB$ と $\angle ADC$ に等しい角が同時に存在しなければならない．しかし，$\angle ADB + \angle ADC$ は 2 直角だから，これらと等しい 2 つの角が 1 つの三角形の内角にはなることはない．

したがって，$\angle ADB = \angle ADC$ でこれらは直角である．

したがって，$\angle ABD + \angle BAD = \angle ACD + \angle CAD$ は直角である．

2 つの三角形は相似だから，

$$\angle ABD = \angle ACD, \quad \angle BAD = \angle CAD \qquad \cdots ①$$

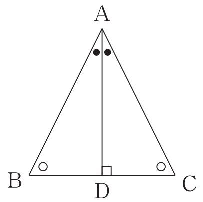
または

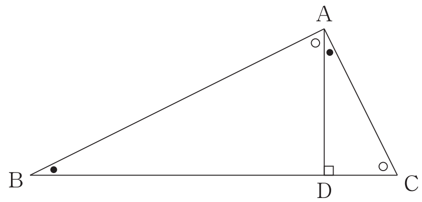
$$\angle ABD = \angle CAD, \quad \angle BAD = \angle ACD. \qquad \cdots ②$$

① のとき，三角形 ABC は $AB = AC$ の二等辺三角形であり，

② のとき，$\angle BAD + \angle CAD$ は直角だから，三角形 ABC は $\angle A$ が直角の直角三角形である．

よって，三角形 ABC は二等辺三角形か直角三角形である．　…(答)





第 3 問

一つの定円に外接し，かつ一つの定直線に接する円の中心の軌跡を求めよ。

分　野

幾何：二次曲線

考え方

軌跡の点から円の中心および，直線までの距離を考える．

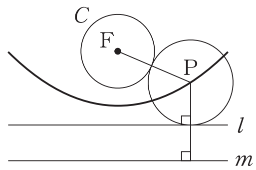
【解答】

定円を C，その中心を F，半径を r とする．また定直線を l とする．

また，軌跡の点を P とし，P を中心とし，円 C に外接し，l に接する円の半径を R とする．

$PF = R + r$，P と l の距離は R である．

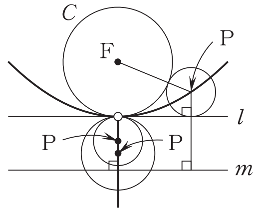
(i) C と l が交わらないとき，



　P は l について C と同じ側にある．l に平行で l との距離が r であり，l について C と反対側にある直線を m とすると，P と m の距離は $R+r$ となり，P から F までの距離と，P から m までの距離が等しくなる．したがって，P の軌跡は F を焦点，m を準線とする放物線である．

(ii) C と l が接するとき，

　P が l について C と同じ側にあるとき，(i) とほぼ同様であるが，C と l の接点は F を焦点，m を準線とする放物線上にある．しかし，この接点を中心とし，C に外接する円は存在しない．

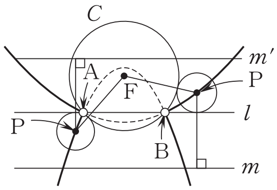


　また，P が l について C の反対側にあるとき，接点から l に立てた垂線上に P があれば，P を中心とし l に接する円は同じ点で C に接する．

　したがって，P の軌跡は F を焦点，m を準線とする放物線から頂点を除いたものおよび，l に接点から立てた垂線の l について C と反対側の半直線（端点を含まない）である．

(iii) C と l が交わるとき，

　交点を A，B とする．l に平行で l との距離が r である直線は，2 本あるそれらを m，m' とする．P は l のどちらにもとれる．



　P が l について，m' と同じ側にあるとき，P の軌跡は F を焦点，m を準線とする放物線上にある．また，P が l について，m と同じ側にあるとき，P の軌跡は F を焦点，m' を準線とする放物線上にある．

　2 つの放物線は l 上の点 A，B で交わる．この 2 点を中心とする C に外接する円は存在しないから，この 2 点は除かれる．

　まとめると，与円を C，中心を F，半径を r とし，与直線を l とするとき．

(i) C と l が交わらないとき，

　F を焦点とし，l に平行で C の反対側で l と r の距離にある直線 m を準線とする放物線．

(ii) C と l が接するとき，

　F を焦点とし，l に平行で C の反対側で l と r の距離にある直線 m を準線とする放物線（ただし頂点を除く）および，接点を端点とし，C と反対側の半直線（ただし端点を除く）．

(iii) C と l が交わるとき，

　l に平行で l と r の距離にある 2 直線を m，m' とするとき，F を焦点とし，m を準線とする放物線の l について m' 側と，F を焦点とし，m' を準線とする放物線の l について m 側．ただし，l 上の点は含まない．　…(答)

(注)　定直線を x 軸，定円の中心を $(0,\ a)(a>0)$，半径を r とするとき，求める軌跡は，

$$\begin{cases} (a+r)(2y-a+r)=x^2 & (a>r\ \text{のとき}), \\ 4ay=x^2\ (y>0),\ x=0\ (y<0) & (a=r\ \text{のとき}), \\ (a+r)(2y-a+r)=x^2\ (y>0),\ (a-r)(2y-a-r)=x^2\ (y<0) & (a<r\ \text{のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

となる．

　実はこの 3 式は場合分けせずに

$$(a+r)(2y-a+r)=x^2\ (y>0),\quad (a-r)(2y-a-r)=x^2\ (y<0)$$

だけでもよい．なぜなら，第 2 式は $a>r$ のとき，$0<a-r<a+r\leqq 2y$ となり，$y<0$ と矛盾し，みたされないし，$a=r$ のとき，$x^2=0$ となり $x=0$ と一致する．

1950 年　4 科目より 2 科目選択・共通問題

第 1 問

次の〔　　　〕の中に適当な数を入れよ。

点 (10, 2), (2, −2) を通る直線がある。

1．この直線の方程式は $y=$〔　　　〕$x+$〔　　　〕 である。

2．この直線の勾配は〔　　　〕である。

3．この直線が x 軸と交わる点の座標は〔　　　〕である。

4．この直線が y 軸と交わる点の座標は〔　　　〕である。

5．この直線と x 軸に関して対称な直線の方程式は $y=$〔　　　〕$x+$〔　　　〕 である。

分　野

解析 I：1 次関数

考え方

略

【解答】

1．$y=\dfrac{2-(-2)}{10-2}(x-2)-2=$〔 $\dfrac{1}{2}$ 〕$x+$〔 -3 〕　…(答)

2．勾配（傾き）は〔 $\dfrac{1}{2}$ 〕.　…(答)

3．x 切片は 6. x 軸と交わる点の座標は〔 6 〕である.　…(答)

4．y 切片は -3. y 軸と交わる点の座標は〔 -3 〕である.　…(答)

5．この直線と x 軸に関して対称な直線の方程式は $y=$〔 $-\dfrac{1}{2}$ 〕$x+$〔 3 〕である.　…(答)

(注)「適当な数を入れよ」とあるので, 3. 4. はそれぞれ〔 6 〕,〔 -3 〕とした.「座標は」とあることを優先的に考えれば, それぞれ〔 (6, 0) 〕,〔 (0, −3) 〕となるはずである.

第 2 問

次の事柄は正しいか，正しいときには番号の前の〔　〕の中に○印をつけよ。正しくないときには番号の前の〔　〕の中に×印をつけて，正しくないことを示す例をあげて簡単に説明せよ。

〔　〕1．水平な直線に垂直な直線は鉛直である。

〔　〕2．鉛直な直線に垂直な直線は水平である。

〔　〕3．二つの四角形の対応する四つの角が等しければ，この二つの四角形は相似である。

〔　〕4．一つの円で中心角の大きさと，これに対する弦の長さは比例する。

〔　〕5．$\sin A$ と $\cos A$ とは反比例する。但し A は鋭角とする。

分　野

幾何：論理

考え方

略

【解答】

1．〔×〕反例：水平面内で垂直な直線が存在する． …(答)

2．〔○〕 …(答)

3．〔×〕反例：隣合う辺が等しくない長方形と正方形は内角がすべて等しいが相似ではない． …(答)

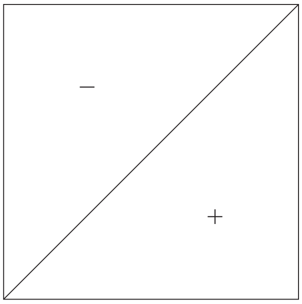
4．〔×〕反例：半径が r のとき 90° に対する弦の長さは $\sqrt{2}\,r$ だがその 2 倍の角 180° に対する弦の長さは $2r$ で 2 倍ではない． …(答)

5．〔×〕反例：$\sin A$ と $\cos A$ とが反比例するなら，$\sin A\cos A$ は一定のはずである．ところが，$A=30^\circ$ のとき，$\sin A\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$A=45^\circ$ のとき，$\sin A\cos A=\dfrac{1}{2}$ で一定ではない． …(答)

1950 年　4 科目より 1 科目選択・解析 I

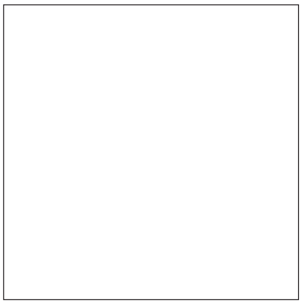
第 1 問

次の図に示したのは $x=\pm 1$，$y=\pm 1$ で囲まれた正方形である。$x-y$ はこの正方形の中で下図の $+$ としるした部分で正の値をとり，$-$ としるした部分で負の値をとる。

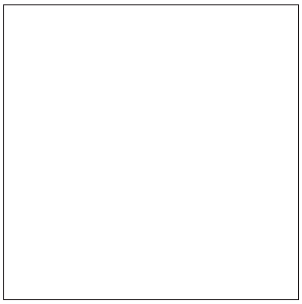


$x-y$ のかわりに次の諸式を考えると，この正方形のどの部分で正，あるいは負となるか。上の例にならって図に記入せよ。

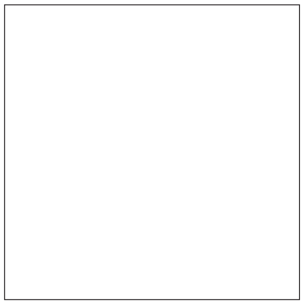
1．$x+y$



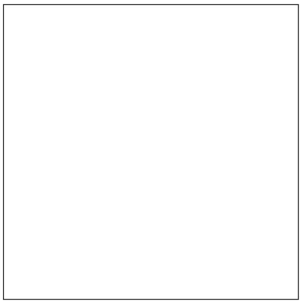
2．x^2-y^2



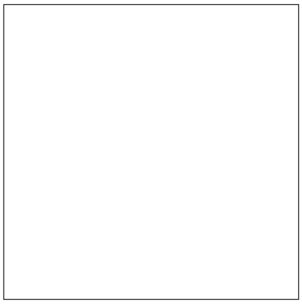
3．$(x+y)^2-1$



4．$|x|-|y|$



5．$|x-y|-1$



分　野

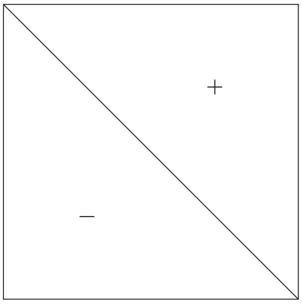
解析 I ：不等式と領域

考え方

それぞれが正になる不等式を解けばよい．

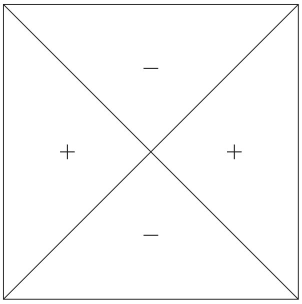
【解答】

1．$x+y>0$ となる範囲は $y>-x$ より下図のようになる．



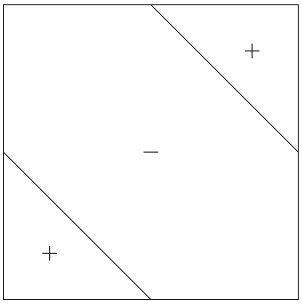
…(答)

2．$x^2-y^2>0$ となる範囲は $x+y>0$，$x-y>0$ または $x+y<0$，$x-y<0$ の範囲．下図のようになる．



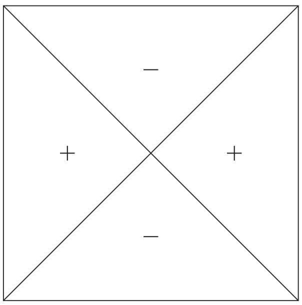
…(答)

3．$(x+y)^2-1>0$ となる範囲は $x+y<-1$ または $x+y>1$ の範囲．下図のようになる．



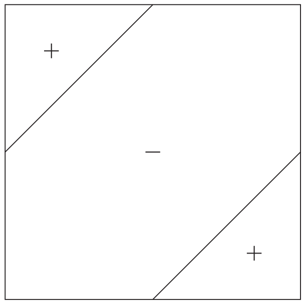
…(答)

4．$|x|-|y|>0$ すなわち，$|x|>|y|$ となる範囲は $x^2>y^2$ すなわち $x^2-y^2>0$ と同じ．下図のようになる．



…(答)

5．$|x-y|>1$ となる範囲は $x-y<-1$ または $x-y>1$ の範囲．下図のようになる．



…(答)

第２問

1．x の函数 $2x^2+3mx+2m$ の最小値 y は m のどんな函数になるか。
2．この m の函数 y は，m のどんな値に対して最大となるか。またその最大値を求めよ。

分 野

解析Ⅰ：2 次関数

考え方

与式を x について平方完成すれば最小値が求められ，その m の式を m について平方完成すればその関数の最大値が求められる．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

1．$2x^2+3mx+2m=2\left(x+\frac{3}{4}m\right)^2-\frac{9}{8}m^2+2m.$

よって，与関数の最小値は

$$y=-\frac{9}{8}m^2+2m.$$ …(答)

2．このとき，$y=-\frac{9}{8}m^2+2m=-\frac{9}{8}\left(m-\frac{8}{9}\right)^2+\frac{8}{9}.$

よって，$m=\frac{8}{9}$ のとき，y は最大値 $\frac{8}{9}$ をとる． …(答)

第3問

$\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$ を用いて次の値を求めよ。

1．$\log 125$

2．$\log\cos 30^\circ$

3．$\log\sqrt[3]{0.2}$

4．6^{52} の桁数

分　野

解析Ⅰ：対数，三角関数

考え方

$\log_{10}5=1-\log_{10}2$ などを使う．

【解答】

1．$\log_{10}125=\log_{10}5^3=3(1-\log_{10}2)=3(1-0.3010)=2.0970.$ …(答)

2．$\log_{10}\cos 30^\circ=\log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\log_{10}3-\log_{10}2=\dfrac{1}{2}\times 0.4771-0.3010=-0.06245=\overline{1}.93755.$ …(答)

3．$\log_{10}\sqrt[3]{0.2}=-\dfrac{1}{3}\log_{10}5=-\dfrac{1}{3}(1-\log_{10}2)=-\dfrac{1}{3}\times 0.6990=-0.2330=\overline{1}.7670.$ …(答)

4．$\log_{10}6^{52}=52(\log_{10}2+\log_{10}3)=52\times 0.7781=40.4612$ よって，6^{52} の桁数は 41. …(答)

(注)　この当時まだ電卓は登場していなかったので，桁の多い計算の有力な手段は計算尺であった．その基礎知識として常用対数が学習されていた．常用対数はまさに「常用」されていたのである．当時底が省略されている対数は常用対数であった．この問題の対数は数値で分かる通り常用対数である．

また，**【解答】**中でかかれた $\overline{1}.93755$ のような表記は，$-1+0.93755$ の意味で，例えば，$\log_{10}0.2$ を表すのに，-0.6990 とかくより，$-1+0.3010=\overline{1}.3010$ とかいた方が，$\log_{10}2=0.3010$ とのかかわりが明確になる．そのため，対数が負になるときは，整数部分だけ負にして，小数部分は正で表すという手法がとられた．整数部分が負であることを示すのに整数部分の上にバーをつけて表した．

常用対数 $\log_{10}x$ のこのような意味での整数部分 $[\log_{10}x]$ を指標といい，x の桁数または小数以下第何位に 0 でない数が現れるかを表し，小数部分，$\log_{10}x-[\log_{10}x]$ を仮数といい 10 進法で表したときの数字の並びを表すのに使われた．

1950 年　4 科目より 1 科目選択・解析 II

第 1 問

次の極限値を求む。

1．$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$

2．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log n-\log(n-1))$

3．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

4．$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos3\theta}{\theta^2}$

分　野

解析 II：極限

考え方

1．$x-1$ で分母分子を割る．2．は対数計算．3．は有理化．4．は $1+\cos3\theta$ を分母分子にかけ，$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ の形にする．

【解答】

1．$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x-3}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}.$ …(答)

2．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log n-\log(n-1))=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\log1=0.$ …(答)

3．$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0.$ …(答)

4．$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos3\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos^23\theta}{\theta^2(1+\cos3\theta)}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin3\theta}{3\theta}\right)^2\frac{9}{1+\cos3\theta}=\frac{9}{2}.$ …(答)

第２問

$f(x)=\dfrac{1-x}{2+x^2}$ とする。

1．x が増加するとき，$f(x)$ が増加するのは，x がどんな範囲にあるときか。
2．x が増加するとき，$f(x)$ が減少するのは，x がどんな範囲にあるときか。
3．$f(x)$ の最大値を求む。
4．$f(x)$ の最小値を求む。
5．$f(x)$ のグラフをえがけ。

分　野

解析Ⅱ：分数関数

考え方

微分して増減を求め，極限も求める．

【解答】

1．$f'(x)=\dfrac{-(x^2+2)+(x-1)(2x)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{x^2-2x-2}{(x^2+2)^2}$．$f'(x)=0$ となるのは $x=1\pm\sqrt{3}$ のとき．

x	$-\infty$	$\cdots$	$1-\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{3}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	↗		↘		↗	(0)

よって，$f(x)$ が増加する範囲は $x<1-\sqrt{3}$，$x>1+\sqrt{3}$．　…(答)

2．また，$f(x)$ が減少する範囲は $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$．　…(答)

3．$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ だから $f(x)$ の最大値は

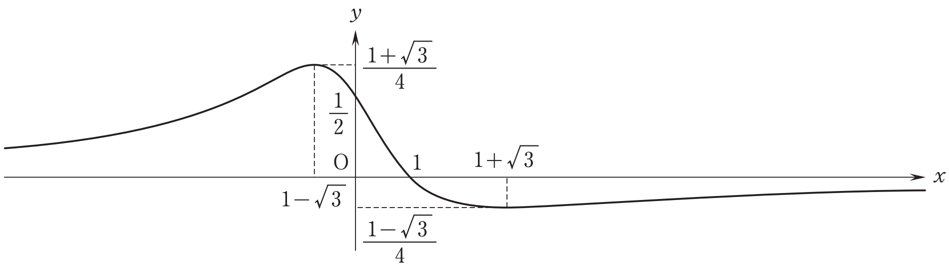
$$f(1-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{6-2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{4}.$$　…(答)

4．$f(x)$ の最小値は

$$f(1+\sqrt{3})=\frac{1-\sqrt{3}}{4}.$$　…(答)

5．$y=f(x)$ の x 切片は１で，y 切片は $\dfrac{1}{2}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$．

これらを考慮して図示すると，下図．



…(答)

第3問

曲線

$$y=\sin x,\quad 0\leqq x\leqq \pi$$

を x 軸のまわりに一回転してできる立体の体積を求む。

分　野

解析Ⅱ：積分法，体積

考え方

$V=\pi\int y^2\,dx$ として求める．

【解答】

求める体積は

$$\pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots(答)$$

（注１）　曲線を回転するとできる立体は曲面で，その体積は 0 なのだが，この時代はあまりこだわっていないように思える．

（注２）　この年はまだ三角関数の積分は教科書から排除されていなかったようである．最初の指導要領が発表されたのは '51 年である．

1950 年　4 科目より 1 科目選択・幾何

第 1 問

次の事柄は成り立つか，成り立つときは番号の前の□の中に○印をつけよ。そうでないときには，番号の前の□の中に×印をつけて，その成り立たないことを示す図をえがけ。

□ 1．外角の和が 4 直角である凸多角形は四角形である。
□ 2．対応する二辺と一角が等しい二つの鋭角三角形は互いに合同である。
□ 3．半径の等しい円においては長さの等しい弦の上に立つ円周角は相等しい。
□ 4．三角形を作る三直線から等距離にある点はこの平面上に四つある。

分　野

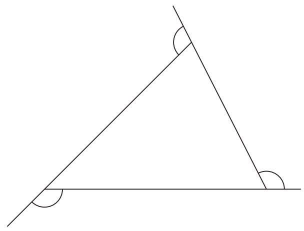
幾何：真偽判定

考え方

あとで解説。

【解答】

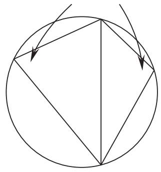
1．☒



…(答)

2．◯ …(答)

3．☒



…(答)

4．◯ …(答)

【解説】

1．任意の凸多角形の外角の和は 4 直角である．もちろん三角形でもそうである．したがって，これだけから四角形と断定することはできない．

2．対応する 2 辺と 1 角が等しい 2 つの三角形は一般に合同ではない．等角が 2 辺の挟む角のときは合同だが，そうでないとき，例えば a，b，A が等しいとき正弦定理から $\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A$ であるが，B が 1 通りでなくなることがある．しかし，B を鋭角に限定すれば，B は 1 通りに定まり，2 つの三角形は合同であるといえる．

　したがって，鋭角三角形に限定すれば合同である．

3．1 つの弦の上に立つ円周角は 2 通りあり，それらは補角をなす．したがって，直径以外の等弦の上に立つ円周角は必ずしも等しくない．

4．三角形をなす直線からの距離が等しい点は内心と 3 つの傍心の 4 つある．

第 2 問

一つの楕円の焦点を F_1，F_2 とする。この楕円上の一点を Q とし，$\triangle F_1QF_2$ の頂点 Q における外角の二等分線に焦点から下した垂線の足 P は定円周上にあることを証明せよ。

分　野

幾何：楕円

考え方

座標計算.

【解答】

楕円を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とし，$F_1(c, 0)$，$F_2(-c, 0)$ ただし，$c=\sqrt{a^2-b^2}$ とする.

$Q(x_1, y_1)$ における外角の二等分線は Q における楕円の接線

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y=1$$

である.

F_1 からこの直線へ下した垂線は $y=\dfrac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-c)$ である.

交点の x 座標は $x=\dfrac{a^4cy_1{}^2+a^2b^4x_1}{b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2}$ であり，y 座標は $y=\dfrac{b^2a^2(a^2-cx_1)y_1}{b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2}$ である.

ここで，

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=\frac{a^4(a^2cy_1{}^2+b^4x_1)^2+a^4b^4(a^2-cx_1)^2y_1{}^2}{(b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2)^2}\\ &=\frac{a^4(b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2)(c^2y_1{}^2+b^4)}{(b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2)^2}=\frac{a^4(c^2y_1{}^2+b^4)}{b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2}. \end{aligned}$$

ここで，$\dfrac{x_1{}^2}{a^2}+\dfrac{y_1{}^2}{b^2}=1$ で $c^2=a^2-b^2$ から，

$$b^4x_1{}^2+a^4y_1{}^2=a^2(b^4+c^2y_1{}^2).$$

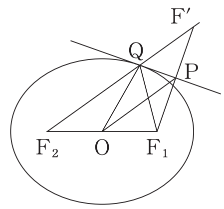
よって，

$$x^2+y^2=a^2.$$

つまり，F_1 から下した垂線の足は補助円 $x^2+y^2=a^2$ 上にある.

また，対称性から F_2 から下した垂線の足も補助円上にある.　　（証明終り）

【別解】



F_1 から外角の二等分線に下した垂線の足 P の軌跡を考える.

F_1P と F_2Q の延長の交点を F' とする.

$\angle PQF_1=\angle PQF'$ で，$PQ\perp F_1F'$ だから，F' は F_1 の PQ についての対称点.

よって，$F_1P=F'P$ かつ $F_1Q=F'Q$.

$F_1Q+F_2Q=F'Q+F_2Q=F_2F'$ は一定値で楕円の長軸の長さ.

楕円の中心 O は 2 焦点を結ぶ線分 F_1F_2 の中点で，P は F_1F' の中点だから，中点連結定理から $OP=\dfrac{1}{2}F_2F'=$(半長軸の長さ).

よって OP は一定．よって，P は O を中心とし，半径が半長軸の円（補助円）の周上にある.

対称性から F_2 から $\angle Q$ の外角の二等分線へ下した垂線の足も補助円の周上にある.

よって 2 つの垂線の足は補助円上にある.　　（証明終り）

（注） Q における $\triangle F_1QF_2$ の外角の二等分線は Q における楕円の接線である．

第 3 問

相交わる二定円の一つの交点 A を通る任意の直線が再びこの二円と交わる点を Q，R とするとき，線分 QR を定比に分ける点 P の軌跡は何か。

分　野

幾何：軌跡，円

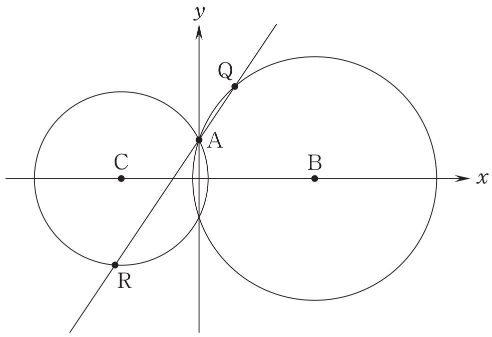
考え方

座標計算．

【解答】

2 円の中心が x 軸上にあり，A が y 軸上にあるようにする．

2 円の中心を $B(b,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ とし，A の座標を $(0,\ a)$ とする．



B を中心とする円の方程式は $(x-b)^2+y^2=b^2+a^2$．

A を通る直線が y 軸に平行なときは，Q=R は x 軸について A と対称な点 $(0,\ -a)$ である．このとき QR は線分をなさない．

A を通る直線の傾きが m のとき，$y=mx+a$．

B を中心とする円の方程式に代入して，

$$(x-b)^2+(mx+a)^2=b^2+a^2.\quad (1+m^2)x^2-2(b-ma)x=0.$$

$x \neq 0$ とすると，

$$x=\frac{2(b-ma)}{1+m^2},\quad y=\frac{2mb-(m^2-1)a}{1+m^2}.$$

よって，$Q\left(\dfrac{2(b-ma)}{1+m^2},\ \dfrac{2mb-(m^2-1)a}{1+m^2}\right)$.

同様に $R\left(\dfrac{2(c-ma)}{1+m^2},\ \dfrac{2mc-(m^2-1)a}{1+m^2}\right)$.

QR を $t:1-t$ に分ける点 P の座標は

$$\left(\frac{2\{b(1-t)+ct-ma\}}{1+m^2},\ \frac{2m\{b(1-t)+ct\}-(m^2-1)a}{1+m^2}\right)$$

よって，$b(1-t)+ct=d$ とおくと，P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{2(d-ma)}{1+m^2},\ \frac{2md-(m^2-1)a}{1+m^2}\right).$$

これは，Q の座標の b を d で置き換えたものに他ならない．

よって，P は定円

$$(x-d)^2+y^2=d^2+a^2$$

上にあることがわかる．

また，A を通る直線のうち y 軸に平行でないすべての向きに対して，Q，R があり，QR を定比に分ける点も存在するから，定円のうち $(0,\ -a)$ 以外のすべての点は軌跡の一部になりうる．

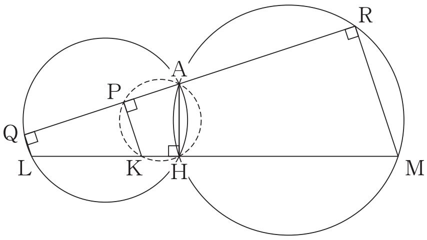
よって，P の軌跡は 2 円の交点を通る円のうち $(0,\ -a)$ を除いた部分である．　…(答)

(注)　P は直線 $y=mx+a$ 上にあり，$x=\dfrac{2(d-ma)}{1+m^2}$ である．これから m を消去しても，

$$(x-d)^2+y^2=d^2+a^2 \quad ((x,\ y)\neq(0,\ -a))$$

を導くことができる．

【別解】



2 円の交点のうち A と異なる点を H とする．A を端点とする 2 円の直径の他端をそれぞれ L，M とする．ただし，Q と L，R と M がそれぞれ同じ円周上にあるとする．

直径に対する円周角から，∠AQL，∠ARM は直角．線分 LM 上に定点 K を定比 QP：PR＝LK：KM となるようにとると，QL∥RM だから QL∥PK．またH は A から直線 LM に下した垂線の足である．

よって，∠KPA は直角．K は定点だから P は AK を直径とする円周上にある．また，H もこの円周上にある．

A を通る直線のうち AH は H 上で 2 円が交差する関係から 2 円との交点が一致して線分 QR をなさない．

また，A を通る直線のうち AH に平行でないものに対して，異なる 2 交点 Q，R が存在し，線分 QR を定比に分ける点も存在する．したがって，定円のうち H 以外のすべての点は軌跡の一部になりうる．

したがって，P の軌跡は AH を通る円から H を除いたものである．　…(答)

1950 年　4 科目より 1 科目選択・一般数学

第 1 問

牛肉と鶏卵に含まれるたんぱく質の量および熱量は次の表のようになっている。

鶏卵 100 g に加え何 g 以上の牛肉を用いれば，たんぱく質は 40 g 以上で，熱量は 350 *Cal* 以上の食品が出來るか。

	たんぱく質 %	*Cal* 100 g につき
牛　肉	20	140
鶏　卵	13	150

分　野

一般数学：不等式

考え方

鶏卵 100 g のたんぱく質と熱量を計算し，あとどれだけのたんぱく質と熱量が必要かを牛肉の量になおし，その多い方を越えればよい．

【解答】

鶏卵 100 g のたんぱく質は表より，13 g である．40 g 以上になるには，あと 27 g 必要である．これを牛肉で賄うには $\dfrac{27}{0.2}=135$ g の牛肉が必要である．

鶏卵 100 g の熱量は表より，150 *Cal* である．350 *Cal* 以上になるには，あと 200 *Cal* 必要である．これを牛肉で賄うには $\dfrac{200}{140}\times100=143$ g の牛肉が必要である．

以上から，牛肉 143 g が必要である．　…(答)

(注) 「何 g 以上か」を整数として答えた．分数で表せば $\dfrac{1000}{7}=142\dfrac{6}{7}$ g であり，小数で表せば $142.\dot{8}5714\dot{2}$g となる．

第 2 問

ある変量を N 回測って x_1, x_2, …, x_n という数値がそれぞれ f_1, f_2, …, f_n 回得られた $(f_1+f_2+\cdots+f_n=N)$。

1．この変量の平均 M はどう表わされるか。

2．M に近いと思われる一つの数を M' とするとき，

$$x_1-M'=h_1,\quad x_2-M'=h_2,\quad \cdots,\quad x_n-M'=h_n$$

となったとすれば，M は M' と h_1, h_2, …, h_n でどう表されるか.

3．ある体格検査で，次のような身長の度数分布表が得られた，これから平均の身長を求めよ。

身 長 cm	人　員
150−155	3
155−160	6
160−165	32
165−170	17
170−175	10
175−180	2

分　野

一般数学：資料の整理

考え方

1．2．は定義に従えばよい．3．は x_1, …, x_n に 152.5, 157.5, … を使い，たとえば，M' に 162.5 を用いればよい.

【解答】

1．平均値の定義から

$$M=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{N}. \qquad \cdots(\text{答})$$

2．$x_i=M'+h_i$ だから，

$$M=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(M'+h_i)}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_iM'+\sum_{i=1}^{n}f_ih_i}{N}=M'+\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ih_i}{N}.$$

よって，

$$M=M'+\frac{f_1h_1+f_2h_2+\cdots+f_nh_n}{N}. \qquad \cdots(\text{答})$$

3．$M'=162.5$ とし，$h_1=-10$, $h_2=-5$, $h_3=0$, $h_4=5$, $h_5=10$, $h_6=15$, $f_1=3$, $f_2=6$, $f_3=32$, $f_4=17$, $f_5=10$, $f_6=2$, $N=3+6+32+17+10+2=70$ とすれば，

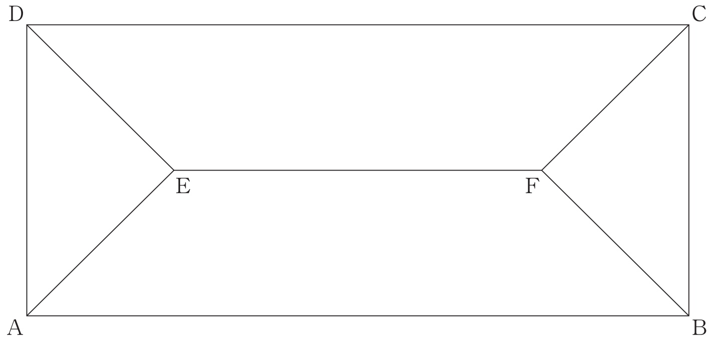
$$M=162.5+\frac{-10\times3-5\times6+0\times32+5\times17+10\times10+15\times2}{70}=164.7.$$

よって，身長の平均は 164.7 cm.　　…(答)

(注)　正確には $162.5+2.2\dot{1}4285\dot{7}=164.7\dot{1}4285\dot{7}$.

第3問

下図はある屋根の平面図である。この屋根は四つの面からなっているが，これらの面の勾配はみな 3/4 である。AB，BC の長さはそれぞれ 18 m，8 m である。この屋根の全面積および AE の長さと勾配を求めよ。



分　野

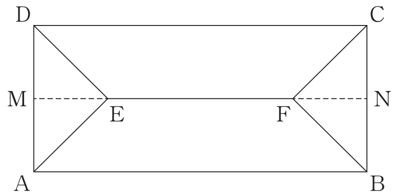
一般数学：立体図形，投影図

考え方

全ての面の勾配が同じだから，平面図の上で，∠DAE 等は 45° である．

高さは AD の $\frac{1}{2}$ に対して，$\frac{3}{4}$ の傾きだからわかる．

【解答】



全ての面の勾配が等しいから平面図の上で，∠DAE，∠ADE，∠CBF，∠BCF は 45° である．

AD，BC の中点をそれぞれ M，N とおくと，AM＝4 m だから EF＝18－4－4＝10 m．

勾配が $\frac{3}{4}$ だから，E，F の高さは $4\times\frac{3}{4}=3$ m．

EM の実長は $\sqrt{4^2+3^2}=5$ m．この長さは，台形 ABFE，台形 CDEF，△ADE，△BCF の高さでもある．

よって，屋根の全面積は

$$\triangle\mathrm{ADE}+台形\mathrm{ABFE}+\triangle\mathrm{BCF}+台形\mathrm{CDEF}=2\times\left\{\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{ME}+\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{EF})\cdot\mathrm{ME}\right\}=180\ \mathrm{m}^2. \quad \cdots(答)$$

AE の長さは $\sqrt{4^2+4^2+3^2}=\sqrt{41}$ m.　…(答)

勾配は $\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3}{8}\sqrt{2}$.　…(答)

（注） 投影図については **’74 年　理科　第 3 問** （注）参照.

1.2　第 1 次指導要領改訂（1951 年）

1951 年に第 1 次の指導要領の改訂が行われた．改訂というが，もとの指導要領はテーマだけで指導要領は内容に踏み込んだ記述がなかったので実質的にこのときの改訂が最初の指導要領といってよい．ただ，このときの指導要領の改訂は試案となっており，内容について強制力はなかったのだと思われる．また，このときの指導要領はこの年に高一から高三まで，一気に適用されている．また，この年の入試から指導要領の影響は出ているように見える．

強制力はなかったとはいえ，実際にはこのときの改訂から教科書の記述はかなり制約を受けるようになった．

教科は以前と同様「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」それに「一般数学」であった．

私が学習した指導要領以前の指導要領だったので「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」とあるからこの年代の指導要領は解析学に力を入れていたのだと長年思っていたが，実際は「解析Ⅱ」では自然対数の底 e を扱っていないため，微分法は x の整数乗と $\frac{1}{2}$ 乗だけしか扱えなかったようである．したがって，積分法も整数乗どまりであった．

また，三角関数の微積分も研究扱いであった．そのため微積分は有理数乗だけでしかも，$\frac{1}{2}$ 乗どまりだった．

また，積分法は置換積分，部分積分が範囲外であり，置換積分は研究による記述があったが，部分積分は皆無であった．

しかも，「解析Ⅱ」は順列組合せ確率，三角関数の加法定理，数列なども含み，その上で，微積分を「解析Ⅱ」だけで扱うようになっていたのだから扱いきれなかったのではないだろうか．

一方「解析Ⅰ」ではグラフの平行移動，軸についての対称移動，グラフの合成について突っ込んだ記述があった．

また，卒業単位としては 1 教科でよかったため，入試も選択制だった．カリキュラムも選択制のため「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」に共通部分があった．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1951〜1954）

1951 年　幾何第 1 問は往年の幾何の軌跡（実際は必要条件だけ）の問題の雰囲気がある．

1952 年　解析Ⅰ第 1 問は分数関数のグラフを微分法を使わずに描く問題．今日的にはありえないが当時はグラフの合成と相加相乗平均を使っていた．

1952 年　幾何第 1 問は線対称移動の合成が回転になることを用いる問題．今日的な行列や複素数を使わなくてもすっきり解答できる．

1953 年　幾何第 2 問は主軸のなす角が一般の楕円と放物線に関する問題．珍しい．二次曲線の定義を使う．

このころ　あんなこと・こんなこと

講和条約締結（1951 年）．単独講和か全面講和かの対立から当時あったほとんどの主要政党が分裂．

メーデー事件（1952 年）．

流行歌としては，「街のサンドイッチマン」（1953 年），「お富さん」（1954 年），「オー・マイ・パパ」（1954 年），「これが自由というものか」（1954 年）など．

白井義男ボクシング世界チャンピオン（1952 年）．テレビ時代の先駆け，1953 年にテレビ放送開始．街頭テレビが人気を集める．力道山によるプロレスブーム（1954 年）もこのころ．

洞爺丸事故（1954 年），青函連絡船の洞爺丸が台風のため沈没，多くの死者を出す．

1951 年　4 科目より 2 科目選択・解析 I

第 1 問

方程式 $|x^2-1|+x+k=0$ の実根の箇数は実数 k の値によってどのようにかわるか。

分　野

解析 II：方程式

考え方

x^2-1 の符号によって場合分けするか，グラフを考える.

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である.

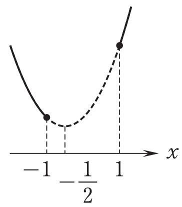
解の個数は相異なる個数を数える.

(i)　$x^2-1 \geqq 0$ のとき，すなわち $x \leqq -1$，$x \geqq 1$ のとき

$$x^2+x-1+k=0.$$

$f_1(x)=x^2+x-1+k$ とおくと，$f_1(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}+k.$

$$f_1(-1)=-1+k,\quad f_1\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}+k,\quad f_1(1)=1+k.$$



よって，$x \leqq -1$，$x \geqq 1$ の範囲に $f_1(x)=0$ の解のある個数は，

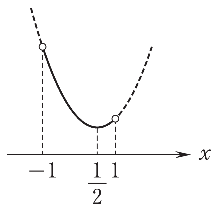
$k \leqq -1$ のとき 2 個，　$-1<k \leqq 1$ のとき 1 個，　$k>1$ のとき 0 個.

(ii)　$-1<x<1$ のとき，

$$-x^2+x+1+k=0 \text{ つまり，} x^2-x-1-k=0.$$

$f_2(x)=x^2-x-1-k$ とおくと，$f_2(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}-k.$

$$f_1(-1)=1-k,\quad f_1\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}-k,\quad f_1(1)=-1-k.$$



よって，$-1<x<1$ の範囲に $f_2(x)=0$ の解のある個数は，

$k<-\dfrac{5}{4}$ のとき 0 個，　$k=-\dfrac{5}{4}$ のとき 1 個，　$-\dfrac{5}{4}<k<-1$ のとき 2 個

$-1 \leqq k<1$ のとき 1 個，　$k \geqq 1$ のとき 0 個.

以上から異なる解の個数は

$k<-\dfrac{5}{4}$ のとき 2 個，　$k=-\dfrac{5}{4}$ のとき 3 個，　$-\dfrac{5}{4}<k<-1$ のとき 4 個，　$k=-1$ のとき，3 個，

$-1<k<1$ のとき 2 個，　$k=1$ のとき 1 個，$k>1$ のとき 0 個.　…(答)

【別解】

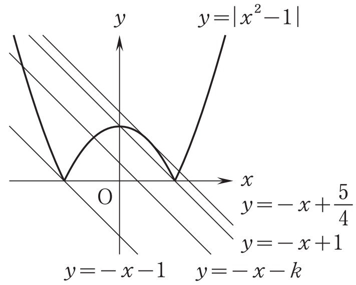
$|x^2-1|=-x-k$ として，$y=|x^2-1|$ のグラフと $y=-x-k$ のグラフの交点の個数を考える.

$y=-x^2+1\ (-1<x<1)$ と $y=-x-k$ が接するのは，

$x^2-x-1-k=0$ の重解条件 $1+4(1+k)=4k+5=0$ から，$k=-\dfrac{5}{4}$.

$y=-x-k$ が，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を通るのはそれぞれ $k=-1$，$k=1$.

交点の個数は図より，求める個数は



k	$\cdots$	$-\dfrac{5}{4}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
個数	2	3	4	3	2	1	0

…(答)

（注） この他，$k=-|x^2-1|-x$ として，$y=k$ と $y=-|x^2-1|-x$ のグラフの交点の個数を数えてもよい．

第2問

$f=x^2-xy-6$，$g=x^2-y^2-1$ とする。

(1) $f=g=0$ を満足する x，y の値を求めよ。

(2) $f<0$，$g<0$ を満足する x，y を座標とする点の存在する範囲を図示せよ。

(3) また，$fg<0$ を満足する x，y を座標とする点の存在する範囲を図示せよ。

分　野

解析Ⅰ：不等式と領域，二次曲線，双曲線

考え方

$f=0$ の式は $y=$ の形に直して読む．ただし，正負はもとのまま読まなければならない．

$g=0$ の式は双曲線の標準形である．

【解答】

(1) $f=0$ より，$y=x-\dfrac{6}{x}$．$g=0$ の式に代入して，

$$x^2-\left(x-\frac{6}{x}\right)^2-1=12-\frac{36}{x^2}-1=0.\quad \therefore\quad x=\pm\frac{6}{\sqrt{11}}.$$（以下，複号同順）

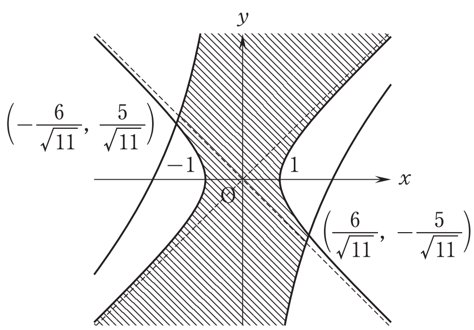
よって，$y=\pm\dfrac{6}{\sqrt{11}}\mp\sqrt{11}=\mp\dfrac{5}{11}\sqrt{11}$．

$$\therefore\quad (x,\ y)=\left(\frac{6}{11}\sqrt{11},\ -\frac{5}{11}\sqrt{11}\right),\ \text{または}\ \left(-\frac{6}{11}\sqrt{11},\ \frac{5}{11}\sqrt{11}\right).$$ …(答)

(2) $f=0$ のグラフは $y=x-\dfrac{6}{x}$ のグラフ，$g=0$ のグラフは双曲線で原点が中心，$y=\pm x$ が漸近線で，$(\pm1,\ 0)$ を通る．ともに $y=x$ を漸近線とする．

$f<0$，$g<0$ はそれぞれ $f=0$，$g=0$ のグラフを境界として原点側である．

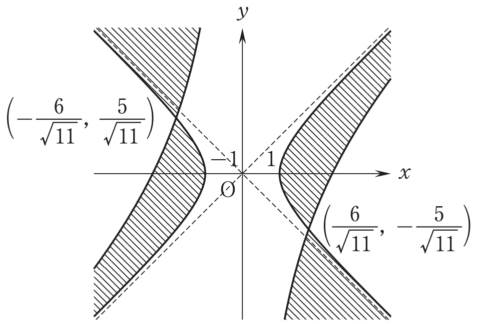
よって，$f<0$，$g<0$ をみたす範囲は下図斜線部，境界を含まない．



…(答)

(3) $fg<0$ は $f=0$，$g=0$ のグラフを境界として一方の原点側，他方の原点と反対側の範囲である．

よって，$fg<0$ をみたす範囲は次図斜線部，境界を含まない．


y
$\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{5}{\sqrt{11}}\right)$
-1
1
x
O
$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{5}{\sqrt{11}}\right)$

…(答)

第3問

山の高さを測るために，同じ水平面上に二地点 A，B をとり，山の頂点 C からこの水平面に下した垂線の足を D として，AB$=a$，∠CAB$=\alpha$，∠ABC$=\beta$，∠CAD$=\gamma$ を測った。このとき，

(1) 山の高さ CD$=h$ を求める式を作れ。

(2) $a=1000$ m，$\alpha=75°$，$\beta=53°$，$\gamma=39°$ のとき，次の数表を用いて h を求めよ。

三角函数表

	sin	cos	tan
37°	.6018	.7986	.7536
38°	.6157	.7880	.7813
39°	.6293	.7771	.8098

対　数　表

	0	1	2	3	4
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998
	5	6	7	8	9
6.2	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
7.8	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025

分　野

解析Ⅰ：三角関数，対数

考え方

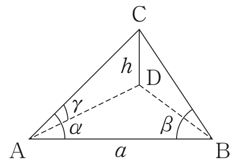
(1) は正弦定理などを使えばよい．

(2) は三角関数表，指数対数表を用いる．三角関数表は 45° までの角に翻訳して読み取る．対数表の最後の桁は線形近似で読み取る．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

(1) 三角形 ABC に関して，正弦定理を用いて，



$$\frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\mathrm{AC}}{\sin\beta}.\quad \therefore\quad \mathrm{AC}=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}a.$$

$h=\mathrm{AC}\sin\gamma$ だから

$$h=\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}a. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1) より

$$h=\frac{\sin 53°\sin 39°}{\sin(75°+53°)}\cdot 1000=\frac{\cos 37°\sin 39°}{\cos 38°}\cdot 1000.$$

三角関数表から

$$\cos 37°=0.7986,\quad \sin 39°=0.6293,\quad \cos 38°=0.7880.$$

$$h=\frac{0.7986\times 0.6293}{0.7880}\cdot 1000.$$

常用対数をとって，

$$\log_{10}h=\log_{10}7.986+\log_{10}6.293-\log_{10}7.880+\log_{10}100.$$

対数表から

$$\log_{10}7.986=\log_{10}7.98+0.6(\log_{10}7.99-\log_{10}7.98)=0.9020+0.6\times 0.0005=0.9023.$$
$$\log_{10}6.293=\log_{10}6.29+0.3(\log_{10}6.30-\log_{10}6.29)=0.7987+0.3\times 0.0006\fallingdotseq 0.7989.$$
$$\log_{10}7.880=\log_{10}7.88=0.8965.$$
$$\log_{10}h=0.9023+0.7989-0.8965+2=2.8047.$$

対数表から

$$\begin{aligned}0.8047=0.8041+0.0006&=\log_{10}6.37+\frac{0.0006}{0.0007}\times(\log_{10}6.38-\log_{10}6.37)\\&\fallingdotseq\log_{10}\left(6.37+\frac{0.0006}{0.0007}\times(6.38-6.37)\right).\end{aligned}$$

$$h=637+\frac{0.0006}{0.0007}=637.9\text{ m}.\qquad\cdots(\text{答})$$

（注1） 久しぶりに対数による近似計算をしたように思う．

今日ではこのような近似計算自体行われなくなっている．電卓で同じ計算をすると，637.80552 とより精度の高い計算をしてくれる．

もっとも電卓の掛け算は2進法による対数計算を行っているらしいのだが．

（注2） 対数表と線形近似について説明する．今日（2020）でも対数表は数学Ⅱの教科書の巻末に載っている．その精度は100分の1までである，つまり表に載っている数字は1.00から9.99までである．したがって上位3桁までで与えられた数の対数は表を読めばよいが，それより桁数が多い数の対数はより高い精度の対数表がないと求められないのかというとそうでもない．実は対数関数というのは極めて緩やかに変化するため，精度を上げて考えるとき，グラフの一部分だけ切りとれば，その部分はほぼ直線になっているとみなすことができるのである．そこで，上の**【解答】**の例でいうと，$\log_{10}7.986$ を求めるときは，その前後の対数 $\log_{10}7.98$ と $\log_{10}7.99$ に対して，$\log_{10}7.986$ は $\log_{10}7.98$ と $\log_{10}7.99$ との差の比が6：4になるような値であるとみなして求める．このような方法を線形近似という．このような近似の仕方は当時の教科書に載っていた．

$\log_{10}6.293$ を求める場合 $\log_{10}6.29+\frac{3}{10}(\log_{10}6.30-\log_{10}6.29)$ としているのも線形近似である．

また，h を求めるとき，$\log_{10}6.37=0.8041$，$\log_{10}6.38=0.8048$，$\log_{10}6.38-\log_{10}6.37=0.0007$ であることを使って，

$$\log_{10}6.37+\frac{0.0006}{0.0007}(\log_{10}6.38-\log_{10}6.37)\fallingdotseq\log_{10}\left(6.37+\frac{.0006}{0.0007}(6.38-6.37)\right)$$

としているのは，上の近似の逆をやっていることになる．

当時の教科書にも載っていないが，3桁の対数表では線形近似によって，10000分の1程度の精度は保証される．

1951 年　4 科目より 2 科目選択・解析 II

第 1 問

一定の体積 V なる直円柱の全表面積のうちで最小なものの値を求めよ。

分 野

解析 II：微分法

考え方

適当に底面の円の半径 r と高さ h を定めて，体積 V と表面積を計算してそれを 1 変数で表せばよい．

【解答】

底面の円の半径 r，高さを h，全表面積を S とする．

$$V=\pi r^2 h,\quad S=2\pi r^2+2\pi rh.$$

$h=\dfrac{V}{\pi r^2}$ を S の式に代入して，

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

S を r の関数として $S(r)$ とおく．

$$S'(r)=4\pi r-\frac{2V}{r^2}=\frac{2(2\pi r^3-V)}{r^2}.$$

r	(0)	$\cdots$	$\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$	$\cdots$
$S'(r)$	╳	$-$	0	$+$
$S(r)$	╳	↘		↗

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2+\frac{2V}{\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}}.\quad =3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

よって，全表面積の最小値は $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.　　…(答)

【別解】

$$S=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

まで**【解答】**と同じ.

$$S=2\pi r^2+\frac{V}{r}+\frac{V}{r}$$

として，3 数の相加平均・相乗平均の関係を用いると，

$$S\geqq 3\sqrt[3]{2\pi r^2\cdot\frac{V}{r}\cdot\frac{V}{r}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

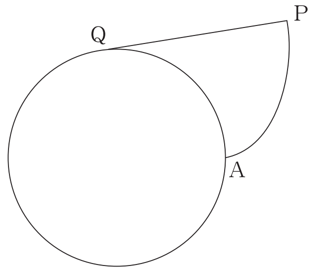
等号は $\dfrac{V}{r}=\sqrt[3]{2\pi V^2}$ つまり，$r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ のときに成り立つ.

よって，全表面積の最小値は $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.　　…(答)

（注）　このとき，$h=\sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

第2問

半径 a の固定した円に糸を巻きつけておき，その端を円周上の一点 A から，糸がたるまないように，その円の平面内でほぐして行くとき，その端の画く曲線の弧 AP の長さをほぐれた糸 QP の長さ l で表わせ。



分　野

解析Ⅱ：曲線長

考え方

A と接点 Q を結ぶ弧の長さが糸 PQ の長さに等しい．

【解答】

円の中心を O とし，$\angle \mathrm{AOQ}=\theta$ とおくと，$a\theta=l$．O を原点，OA を x 軸正方向にとると，Q の座標は $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$．

QP は OQ に垂直で，$\mathrm{PQ}=l=a\theta$ だから，P の座標は $(a\cos\theta+a\theta\sin\theta,\ a\sin\theta-a\theta\cos\theta)$．

$$x=a\cos\theta+a\theta\sin\theta,\quad y=a\sin\theta-a\theta\cos\theta$$

とおくと，

$$\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta+a\sin\theta+a\theta\cos\theta=a\theta\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=a\cos\theta-a\cos\theta+a\theta\sin\theta=a\theta\sin\theta.$$

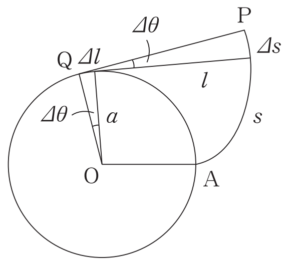
曲線の長さは

$$\int_0^\theta\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\theta a\theta\,d\theta=\frac{a}{2}\theta^2=\frac{l^2}{2a}.$$ …(答)

(注)　当時は三角関数の微積分も曲線長も範囲外だったのだが，今日的（2020）に解くなら上記の方法であろう．

では当時の手段でこの問題を解くのはどうしたのであろうか．

A からの曲線長を s とする．P をわずかに動かしたとき，l，s の変化から求めたと思われる．



円の中心を O とし，$\angle$AOQ を $\Delta\theta$ 変化させたとき，l，s の変化をそれぞれ Δl，Δs とすると，

$$\Delta l=a\Delta\theta,\quad \Delta s=l\Delta\theta$$

である．これから

$$\frac{ds}{dl}=\frac{l}{a},\quad s=\int_0^l\frac{l}{a}dl=\frac{l^2}{2a}$$

などとしたと考えられる．

第3問

二つの曲線

$$x^2+y^2=4\sqrt{3}\,py,$$
$$y^2=px$$

に囲まれる面積を求めよ。但し $p>0$ とする。

分　野

解析Ⅱ：整式の積分

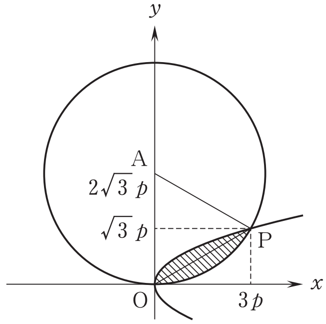
考え方

円と放物線の囲む部分の面積を求める問題．交点を求めるには，3次方程式を解く．$\sqrt{3}$ の処理をうまくやること．

あとは放物線と直線の囲む部分の面積は積分で求める．x で積分するより，y で積分する方が若干楽．

円と直線が囲む部分（弓形）の面積は扇形の面積から三角形の面積を引いて求める．

【解答】



円は放物線によって2つの部分に分けられる．狭い方の面積が求められているとして解答する．

交点の y 座標を求める．

$x=\dfrac{y^2}{p}$ から

$$\frac{y^4}{p^2}+y^2=4\sqrt{3}\,py.\quad \therefore\quad y^4+p^2y^2-4\sqrt{3}\,p^3y=0.$$
$$y(y-\sqrt{3}\,p)(y^2+\sqrt{3}\,py+4p^2)=0.$$
$$y^2+\sqrt{3}\,py+4p^2=\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)^2+\frac{13}{4}p^2>0$$

だから $y=0,\ \sqrt{3}\,p$．

交点は，$(0,\ 0)$，$(3p,\ \sqrt{3}\,p)$．これらをそれぞれ O，P とする．

直線 OP：$x=\sqrt{3}\,y$ だから，放物線 $y^2=px$ と OP が囲む部分の面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}\,p}\left(\sqrt{3}\,y-\frac{y^2}{p}\right)dy=\frac{\sqrt{3}}{2}p^2.$$

円の方程式は

$$x^2+(y-2\sqrt{3}\,p)^2=12p^2.$$

中心を A とすると，$A(0,\ 2\sqrt{3}\,p)$．半径が $2\sqrt{3}\,p$ だから，$\angle OAP=60^\circ$．よって，円を OP で区切ったとき小さい方の弓形の面積は

$$\frac{\pi(2\sqrt{3}\,p)^2}{6}-\frac{1}{2}(2\sqrt{3}\,p)^2\sin 60^\circ=2p^2\pi-3\sqrt{3}\,p^2.$$

よって，求める面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}p^2+(2p^2\pi-3\sqrt{3}\,p^2)=2p^2\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}p^2. \qquad \cdots(答)$$

（注）　問題文からは円と放物線の囲むもう一つの部分も答になりそうである．円の面積が $12p^2\pi$ だからその部分の面積は

$$10p^2\pi+\frac{5\sqrt{3}}{2}p^2.$$

1951 年　4 科目より 2 科目選択・幾何

第 1 問

正方形 ABCD の辺 CB，CD 上にそれぞれ点 E，F をとり，CE＝CF ならしめ，E から AF に垂線を下し，その足を G とする。E を辺 BC 上に動かすとき，G はどんな線の上を動くか。

分　野

幾何：平面図形，軌跡

考え方

座標計算.

【解答】

A を原点，AB を x 軸，AD を y 軸にとる．さらに，正方形の 1 辺の長さを a とすると，B$(a, 0)$，C(a, a)，D$(0, a)$.

E＝B のとき，F＝D，G＝A であり，E＝C のとき，F＝C，G＝C である.

E≠B，E≠C のとき，

CE＝CF＝b $(0<b<a)$ とおくと，E$(a, a-b)$，F$(a-b, a)$.

AF：$y=\dfrac{a}{a-b}x$．EG：$y=-\dfrac{a-b}{a}(x-a)+a-b$.

AF，EG の交点 G の座標は $\left(\dfrac{2(a-b)^2a}{a^2+(a-b)^2},\ \dfrac{2a^2(a-b)}{a^2+(a-b)^2}\right)$.

$X=\dfrac{2(a-b)^2a}{a^2+(a-b)^2}$，$Y=\dfrac{2a^2(a-b)}{a^2+(a-b)^2}$ とおくと，$0<a<b$ より，$Y>0$.

$Y=\dfrac{a}{a-b}X$ から，$b=\dfrac{Y-X}{Y}a$.

$$\therefore\quad Y=\frac{2a^2\left(a-\dfrac{Y-X}{Y}a\right)}{a^2+\left(a-\dfrac{Y-X}{Y}a\right)^2}=\frac{2XY}{Y^2+X^2}a.$$

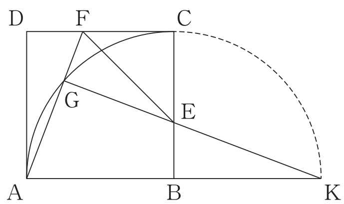
$Y\neq 0$ だから

$$X^2+Y^2=2aX.\quad (X-a)^2+Y^2=a^2.$$

$0<b=\dfrac{Y-X}{Y}a<a$，$Y>0$ から，$Y>X$，$X>0$.

G＝A，G＝C も軌跡に含まれるから，G の軌跡は B を中心とし，A，C を通る円のうち四角形 ABCD の周および内部.　…(答)

【別解 1】



AB と GE の交点を K とする.

△AFD と △KAG において，∠D，∠G が直角で，∠AFD＝∠KAG（錯角）だから，△AFD∽△KAG.

△KAG と △KEB において，∠G，∠B が直角で，∠AKG＝∠EKB だから，△KAG∽△KEB.

よって，△AFD∽△KEB．ところが，DF＝CD−CF＝BC−CE＝BE だから，△AFD≡△KEB．よって，DA＝BK（一定)．よって，K は定点.

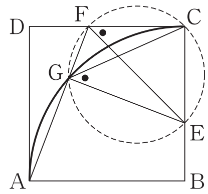
∠AGK が直角であるから，G は AK を直径とする円周上にある．AK の中点 B が中心で，E が B にあるとき，G は A にあり，E が C にあるとき，G は C にある.

よって，G の軌跡は B を中心とし，A，C を通る円の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ である．　…(答)

【別解 2】

$\angle$ECF，$\angle$EGF が直角だから，4 点 E，C，F，G は同一円周上にある．したがって，$\angle \mathrm{CGE}=\angle \mathrm{CFE}=45^\circ$ よって，$\angle \mathrm{CGA}=135^\circ$ である．よって G は AC を端点とする円弧の上にある．中心角が 270° だから B が中心．

E が辺 BC 上を動くとき，G は B を中心とする円弧 AC を動く．　…(答)



(注)　この問題では E が C と一致する場合 CE＝CF＝0 であり，E は AF 上の点である．

この場合 E から AF へ垂線を下すとはどういうことなのだろうか．

この**【解答】**では E は AF 上にあるが，E を通り AF に垂直な直線と AF の交点 E＝F＝C も垂線の足と解釈した．その場合 G は C である．

一方，E は AF 上にあるから垂線を下すことができないと解釈することも可能である．その場合この軌跡から C は除かれることになる．

一方，辺 BC の他端 B に E があることは特に問題ないと思われる．

実際には，「どんな線の上を動くか」という設問であるから，このような議論は不要である．

第 2 問

抛物線の焦点を通る弦を直径とする円はその抛物線の準線に接することを証明せよ。

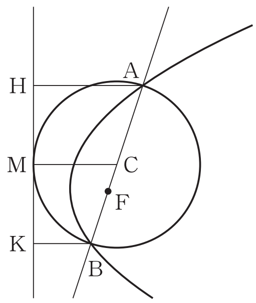
分　野

幾何：二次曲線，放物線

考え方

台形の 2 脚の中点を結ぶ線分の長さは上底，下底の長さの平均に等しいことを使う．

【解答】



放物線（抛物線）を C，焦点を F，F を通る直線が放物線と交わる点を A，B とし，AB の中点を C とする．A，B，C から準線に下した垂線の足をそれぞれ，H，K，M とする．C は AB の中点だから，M は HK の中点．

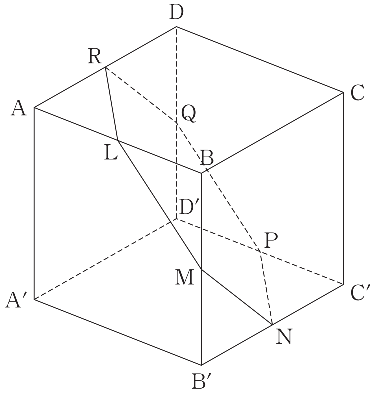
F が焦点だから，FA＝AH，FB＝BK．台形 AHKB において，CM は中点を結ぶ線分だから

$$\mathrm{CM}=\frac{\mathrm{AH}+\mathrm{BK}}{2}=\frac{\mathrm{FA}+\mathrm{FB}}{2}=\frac{\mathrm{AB}}{2}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}.$$

よって，A，B，M は C から等距離にあり，CM は準線に垂直だから，A，B を直径の両端とする円は M で準線に接する．　（証明終り）

第3問

図のような立方体 ABCDA′B′C′D′ において辺 AB，BB′，B′C′，C′D′，D′D，DA の中点をそれぞれ，L，M，N，P，Q，R とするとき，六角形 LMNPQR は正六角形であることを証明せよ。



分　野

幾何：立体図形

考え方

六つの頂点が同一平面上にあり，六つの辺と頂点から立方体の中心までの距離が等しいことをいえばよい．

【解答】

立方体の1辺の長さを a とすると，C，A′ から，6つの点 L，M，N，P，Q，R までの距離はすべて，$\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}a=\frac{\sqrt{5}}{2}a$ で等しいから，6つの点は，CA′ の垂直二等分面上にある．すなわち6点は同一平面上にある．

また，6個の辺 LM，MN，NP，PQ，QR，RL は等しくその長さは $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ である．

LP を通り，AA′D′D に平行な断面は対称性から立方体の中心 O を通る正方形で，LP＝$\sqrt{2}\,a$ であり，LP の中点は O である．よって，OL＝OP＝$\frac{\sqrt{2}}{2}a$．

同様に OL，OM，ON，OP，OQ，OR は等しく $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ である．

L，M，N，P，Q，R は同一平面上にあり，△OLM，△OMN，△ONP，△OPQ，△OQR，△ORL はすべて正三角形であるから六角形 LMNPQR は正六角形である．　（証明終り）

1951 年　4 科目より 2 科目選択・一般数学

第 1 問

或る会社の製品は 50 箇に 1 箇の割合で不良品が出るという。この製品三箇を一箱に包装して賣出すものとする。その際包装の不良なものが 100 箱に 1 箱の割合であるとすれば，1 万箱の中に内容または包装が不良なものが何箇位できるか。

分　野

一般数学：確率，検定

考え方

3 個の製品と包装のすべてが良品である割合を計算すればよい．

【解答】

1 個の製品が良品である割合は $1-\dfrac{1}{50}=\dfrac{49}{50}$.

包装が良品である割合は $1-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$.

よって，3 個の製品と包装が良品である割合は

$$\left(\frac{49}{50}\right)^3\frac{99}{100}=\frac{11647251}{12500000}.$$

よって 10000 個中にある不良品の個数はおおよそ，

$$10000\times\left(1-\frac{11647251}{12500000}\right)=10000-\frac{11647251}{1250}\fallingdotseq 10000-9317.8\fallingdotseq 682 \text{ 個}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注）　設問が「何個位」という設問なので最も近い個数 682 で答えた．不良品の場合安全性を考えると多めに数えることになるので，683 個でも正解としたい．推定値とすれば 682.2 個である．

第 2 問

12 時間のうちに時計の長針と短針が直角になる時刻はどのように分布しているか。

分　野

一般数学：文章題

考え方

速度の差を考えればよい．

【解答】

長針は 1 時間で 1 回転し，短針は 12 時間で 1 回転する．したがって，長針と短針の回転の速さの差は 1 時間当たり $1-\dfrac{1}{12}=\dfrac{11}{12}$ 回転である．したがって，$\dfrac{12}{11}$ 時間毎に長針と短針の位置関係は同じになる．

直角になるのは短針が右側にある場合（例えば 3 時）と左側にある場合（例えば 9 時）がある，その差は回転角についてちょうど半周になるので，$\dfrac{6}{11}$ 時間毎に長針と短針は直角になる．　…(答)

（注）　3 時を基準とすると，

$$3+\frac{6}{11}n \text{ 時}\quad (n \text{ は整数})$$

直角になる．0時から最初に直角になるのは $n=-5$ のときで，$\frac{3}{11}$ 時つまり，0時16分 $21+\frac{9}{11}$ 秒である．また，12時前の最後に直角になるのは $n=16$ のときで，$3+\frac{96}{11}=11+\frac{8}{11}$ 時つまり11時43分 $38+\frac{2}{11}$ 秒である．

第3問

甲は1万円を年利率7％，半年ごとの複利で利殖し，乙は10万円を年利率3％，一年ごとの複利で利殖するとすれば甲の元利合計は何時初めて乙の元利合計を越えるか。

(1)　$\log 1.03=0.0128$，$\log 1.035=0.0149$ を使って計算せよ．

(2)　この対数の最後の桁は四捨五入したものであることに注意し，その誤差を考えればどの程度のことが云えるか。

分野

一般数学：数列，対数，利息計算

考え方

対数計算．誤差は足しても引いても大きめにとって考える．

【解答】

(1)　n 年後の甲の元利合計は $(1.035)^{2n}$ 万円であり，その半年後は $(1.035)^{2n+1}$ 万円である．

n 年後の乙の元利合計は $10\times(1.03)^n$ 万円である．

$$\log_{10}\{(1.035)^{2n}\}-\log_{10}\{10\times(1.03)^n\}=2n\times0.0149-1-n\times0.0128=n0.0170-1>0$$

とすると，$58\times0.0170=0.9860$，$59\times0.0170=1.0030$.

$0.9860+0.0149=1.0009$ であるから，甲の元利合計が乙の元利合計を上回るのは58年と半年後である．　…(答)

(2)　それぞれの対数の誤差は最大で0.00005であるから，その 3×59 倍0.00885が最大の誤差である．

0.9860は1との差が100分の1以上であるから上記の結果に影響がないが，1.0009，1.0030は1との差が0.00885以下である，

$1.0030+0.0149=1.0179$ は誤差を考慮しても1より大きい．

よって甲の元利合計が乙の元利合計を初めて上回るのは58.5年から59.5年の間である．　…(答)

（注１）　設問の何時(いつ)を甲が利息を受け取る半年ごとで考えた．1年毎と解釈すれば，(1)は59年後，(2)は59年または60年になる．

（注２）　対数は常用対数である．**解析Ⅰ　第3問**（注）参照．

1952 年　4 科目より 2 科目選択・解析 I

第 1 問

次の函数のグラフを画け。

$$f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+1}$$

分　野

解析 I：分数関数

考え方

x^2+3x+3 を $x+1$ で割って $f(x)=(1\text{ 次式})+\dfrac{a}{x+1}$ の形にする．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

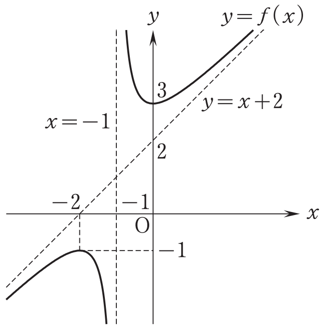
$$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)+1}{x+1}=x+2+\frac{1}{x+1}.$$

$x+1>0$ のとき，$f(x)=x+1+1+\dfrac{1}{x+1}\geqq 1+2\sqrt{(x+1)\dfrac{1}{x+1}}=3$．等号は $x=0$ のときに成り立つ．

$x+1<0$ のとき，$f(x)=-(-x-1)+1-\dfrac{1}{-x-1}\leqq 1-2\sqrt{(-x-1)\dfrac{1}{-x-1}}=-1$．等号は $x=-2$ のときに成り立つ．

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x=-1$，$y=x+2$ を漸近線とする曲線．

図示すると下図．



…(答)

(注)　本来なら $f'(x)=\dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+2)x}{(x+1)^2}$ を使って増減を調べるところだが，解析 I では微分法は扱っていない．

この当時，グラフの合成を解析 I で学習していた．グラフの合成の方法については，**1991 年文科第 3 問**（注）を参照．

第２問

二次方程式

$$ax^2+(1-5a)x+6a=0,\quad a\neq 0$$

の根が二つとも１より大きい実根となるのは実数 a がどんな範囲にあるときか。

分　野

解析Ｉ：２次方程式の理論

考え方

左辺を $f(x)$ とおき，$y=f(x)$ の軸，判別式，$f(1)$ を調べる．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

$f(x)=ax^2+(1-5a)x+6a$ とおく．

$y=f(x)$ の軸は $x=\dfrac{5a-1}{2a}$．$\dfrac{5a-1}{2a}>1$ とすると，$a>0$ のとき，$a>\dfrac{1}{3}$，$a<0$ のとき，常に成り立つ．よって，

$$a<0,\quad a>\frac{1}{3}. \qquad \cdots①$$

$f(x)=0$ の判別式を D とすると，$D=(1-5a)^2-24a^2=a^2-10a+1\geqq 0$.

$$\therefore\quad a\leqq 5-2\sqrt{6},\quad a\geqq 5+2\sqrt{6}. \qquad \cdots②$$

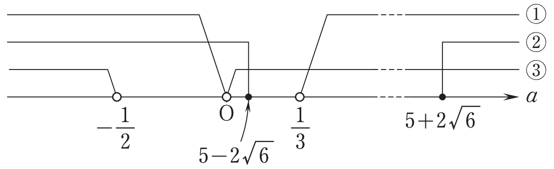
$f(1)=2a+1$.

$a>0$ のとき，$y=f(x)$ は下に凸だから，$f(1)=2a+1>0$．常に成り立つ．

$a<0$ のとき，$y=f(x)$ は上に凸だから，$f(1)=2a+1<0$．よって，$a<-\dfrac{1}{2}$.

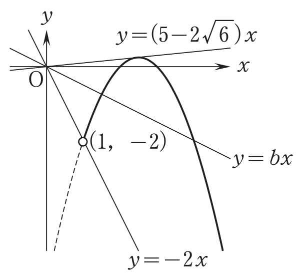
$$\therefore\quad a<-\frac{1}{2},\quad a>0. \qquad \cdots③$$

①，②，③ から，



$$a<-\frac{1}{2},\quad 5+2\sqrt{6}\leqq a. \qquad \cdots(答)$$

【別解】



両辺を a で割り，$\dfrac{1}{a}=b$ とおくと，

$$x^2+(b-5)x+6.\quad bx=-x^2+5x-6.$$

$y=-x^2+5x-6$ と $y=bx$ が $x>1$ の範囲で異なる２点で交わるか接するときの，傾き b の範囲を求める．

$y=-x^2+5x-6$ で $x=1$ のとき，$y=-2$．$y=bx$ が $(1,\ -2)$ を通るのは $b=-2$ のとき．

また，$y=bx$ と $y=-x^2+5x-6$ が接するのは $b=5\pm 2\sqrt{6}$ のときで，そのうち $x>1$ で接するのは $b=5-2\sqrt{6}$ のとき．

よって，$-2<b\leqq 5-2\sqrt{6}$．$a=\dfrac{1}{b}$ から**【解答】**と同じ結論をうる．

第 3 問

$\dfrac{\log a+\log b+\log c+\log d}{4}$ と $\log\dfrac{a+b+c+d}{4}$ の大小を比較せよ。但し対数は常用対数とし，a，b，c，d は正数とする。

分 野

解析 I：対数，不等式

考え方

調べることは $\sqrt[4]{abcd}$ と $\dfrac{a+b+c+d}{4}$ の大小であるから，相加平均・相乗平均の関係を用いる．

【解答】

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$ のとき，

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}\geqq\sqrt{\frac{a+b}{2}\,\frac{c+d}{2}}\geqq\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}.$$

よって，

$$\log_{10}\frac{a+b+c+d}{4}\geqq\log_{10}\sqrt[4]{abcd}=\frac{\log_{10}a+\log_{10}b+\log_{10}c+\log_{10}d}{4}.$$

等号は $a=b=c=d$ のときに成り立つ．

よって，

$a=b=c=d$ のとき，$\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b+\log_{10}c+\log_{10}d}{4}=\log_{10}\dfrac{a+b+c+d}{4}$.

それ以外のときは　$\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b+\log_{10}c+\log_{10}d}{4}<\log_{10}\dfrac{a+b+c+d}{4}$.

…(答)

（注）　4 個の正数の相加平均・相乗平均の関係からでは直接過ぎるように思えたので，2 個の相加平均・相乗平均の関係から導いた．

1952 年　4 科目より 2 科目選択・解析Ⅱ

第 1 問

$$a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\frac{a_{n+1}+a_n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：数列，漸化式，数列の極限

考え方

3 項漸化式の解法による．ただし，$a_{n+1}-a_n$ を求めて，階差数列の公式を使ったり，2 項漸化式にして a_n を求めることもできる．

【解答】

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$$

より，数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ は公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列．

よって，

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(a_2-a_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots①$$

また，

$$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$$

より，数列 $\left\{a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right\}$ は恒等数列．

よって，

$$a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=a_2+\frac{1}{2}a_1=1. \qquad \cdots②$$

②−① から

$$\frac{3}{2}a_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\frac{2}{3}. \qquad \cdots(答)$$

（注）① から，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}$ $(n\geqq 2)$ として a_n を求めてもよい．

また，② から，$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$．$a_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ として a_n を求めてもよい．

第２問

直角座標に関して座標 $(1,\ 1)$ の点が原点の周りを正の向きに $30°$ 回転すればその点の座標はどのようになるか。

分　野

解析Ⅱ：点の移動

考え方

$(1,\ 1)$ は原点からの距離が $\sqrt{2}$ で x 軸正方向とのなす角が $45°$ であるから，$30°$ 回転すれば $75°$ になる．

【解答】

原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ の距離は $\sqrt{2}$ で，OA と x 軸のなす角は $45°$ だから A の座標は $(\sqrt{2}\cos 45°,\ \sqrt{2}\sin 45°)$ とかける．

A を O の周りに $30°$ 回転した点を B とすると，

$$\mathrm{B}(\sqrt{2}\cdot\cos(45°+30°),\ \sqrt{2}\cdot\sin(45°+30°))=\left(\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\ \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

…(答)

（注）　行列を使うなら $\begin{pmatrix}\cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$ を計算することになるであろう．

また，複素数なら $(\cos 30°+i\sin 30°)(1+i)$ を計算することになるであろう．

第３問

$f(x)=x^3+x^2+x+1$ であるとき，$g(x)=ax^2+2bx+c$ の係数 $a,\ b,\ c$ をどのように定めれば

$$f(1)=g(1),\quad f(-1)=g(-1)$$

である上に，$\displaystyle\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx$ が最小となるか。

分　野

解析Ⅱ：整式の積分

考え方

与えられた条件を１つ１つみたす条件を求めてゆく．

【解答】

$f(1)=g(1)$ だから $4=a+2b+c.$ …①

$f(-1)=g(-1)$ だから $0=a-2b+c.$ …②

①，② から $b=1,\ a+c=2.$ …③

よって，$g(x)=ax^2+2x+2-a$．$f(x)-g(x)=x^3+(1-a)x^2-x+a-1.$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx&=\int_{-1}^{1}\{x^3+(1-a)x^2-x+a-1\}^2\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\{(x^3-x)^2+2(1-a)(x^3-x)(x^2-1)+(1-a)^2(x^2-1)^2\}\,dx\\&=2\int_{0}^{1}\{(x^3-x)^2+(1-a)^2(x^2-1)^2\}\,dx=\frac{16}{105}+(1-a)^2\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

これを最小にするのは $a=1$．よって，③ から

$$a=1,\quad b=1,\quad c=1.$$ …(答)

【別解】の考え方

$g(x)=ax^2+2bx+c$ ということは $g(x)$ が2次以下の整式であること以外何も規定されていない．

$f(x)-g(x)$ は x^3 の係数が1で，$(x-1)(x+1)$ で割り切れるから，
$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x^2-1)$ とかくことができる．

$f(x)-g(x)=F(x)$ とおくと，$F(x)$ の x^3 の係数は1で，$F(1)=F(-1)=0$ だから，$F(x)$ は $(x-1)(x+1)$ で割り切れる．

したがって，$F(x)=(x-\alpha)(x^2-1)$ とおくことができる．

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}F(x)^2\,dx&=\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx\\&=\int_{-1}^{1}(x-\alpha)^2(x^2-1)^2\,dx\\&=\alpha^2\int_{-1}^{1}(x^2-1)^2\,dx-2\alpha\int_{-1}^{1}x(x^2-1)^2\,dx+\int_{-1}^{1}x^2(x^2-1)^2\,dx\\&=2\alpha^2\int_{0}^{1}(x^2-1)^2\,dx+2\int_{0}^{1}x^2(x^2-1)^2\,dx.\end{aligned}$$

$\int_{0}^{2}(x^2-1)^2\,dx\geqq 0$ だから，$\alpha=0$ のとき，この積分は最小になる．

よって，

$$F(x)=x(x^2-1)=(x^3+x^2+x+1)-g(x)$$

より，$g(x)=x^2+2x+1$ すなわち，

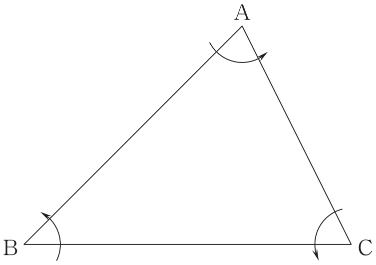
$$a=1,\quad b=1,\quad c=1.$$ …(答)

1952 年　4 科目より 2 科目選択・幾何

第 1 問

(i)　$\angle AOB$ を平面上の角，P をその平面上の任意の点とする。直線 OA に関する P の対称点を P' とし，直線 OB に関する P' の対称点を P'' とすれば，P'' は P を O の周りに $2\angle AOB$ 回転した点と一致することを証明せよ。

(ii)　$\triangle ABC$ の平面上の任意の点を P とする。その平面上で P を図のように B の周りに $2\angle CBA$ 回転し，次に A の周りに $2\angle BAC$ 回転し，さらに C の周りに $2\angle ACB$ 回転すれば最後の位置はどこになるか。



分　野

幾何：点の移動

考え方

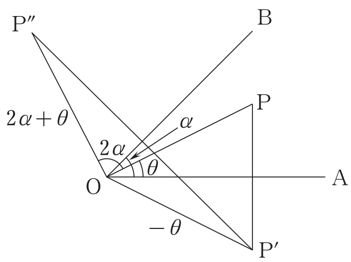
(i)　向き付をもって角を計算すれば不必要な場合分けをしないですむ.

(ii) は (i) を利用する.

【解答】

(i)　$OP=OP'=OP''$ であることは明らか.

以下で $\angle AOP=\theta$ とは半直線 OA を θ（一般角）だけ正の向きに回転すると半直線 OP に重なることを意味する．したがって，$\angle POA=-\angle AOP$ である.



$\angle AOB=\alpha$，$\angle AOP=\theta$ とする.

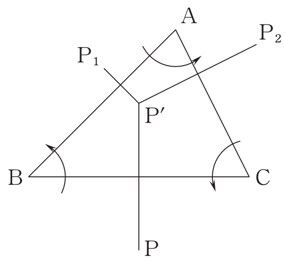
P' は OA について，P と対称な点だから，$\angle AOP'=-\theta$.

P'' は OB について，P' と対称な点で，$\angle P'OB=\theta+\alpha$ だから $\angle BOP''=\theta+\alpha$．よって，$\angle AOP''=\theta+2\alpha$.

よって $\angle POP''=2\alpha=2\angle AOB$.

したがって，P'' は P を O の周りに $2\angle AOB$ 回転した点である.　　（証明終り）

(ii)　(i) から，$2\angle CBA$ 回転はまず，BC について対称移動し，次に，BA について対称移動することである.



また，$2\angle BAC$ 回転はまず，AB について対称移動し，次に，AC について対称移動することである.

更に，$2\angle ACB$ 回転はまず，CA について対称移動し，次に，CB について対称移動することである.

したがって，P を BC について対称移動した点を P'，P' を BA について対称移動した点を P_1 とすると，P_1 は P を B の周りに $2\angle CBA$ だけ回転した点である.

P_1 を AB について対称移動した点は P' であり，P' を AC について対称移動した点を P_2 とすると，

P_2 は P_1 を A の周りに $2\angle BAC$ だけ回転した点である．

P_2 を CA について対称移動した点は P' であり，P' を CB について対称移動した点は P である．したがって，P_2 を C の周りに $2\angle ACB$ だけ回転した点は元の点 P である．

以上から，これらの移動の結果 P は P 自身に移される．…(答)

(注)　変換の合成としては(ii)は

(C の周りの $2\angle ACB$ 回転)∘(A の周りの $2\angle BAC$ 回転)∘(B の周りの $2\angle CBA$ 回転)
＝{(CB について対称移動)∘(CA について対称移動)}
∘{(AC について対称移動)∘(AB について対称移動)}
∘{(BA について対称移動)∘(BC について対称移動)}
＝(CB について対称移動)∘{(CA について対称移動)∘(AC について対称移動)}
∘{(AB について対称移動)∘{(BA について対称移動)}∘(BC について対称移動)
＝(CB について対称移動)∘(BC について対称移動)＝(恒等変換)

ということである．

第２問

半径 R の定円の周上を，その内側にある半径 $\dfrac{R}{2}$ の円がすべらずに転がるとき，小円の周上の一点の軌跡を求めよ。

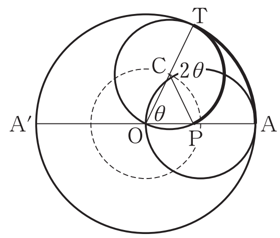
分　野

幾何：軌跡

考え方

小円上の一点は転がりながら大円の周上にあることがある．その時点から考える．半径が $\dfrac{R}{2}$ だから，小円の接点を端点とする直径の他端は大円の中心にある．

【解答】



大円の中心を O，最初小円の周上の点 P は大円の周上の点 A と一致し，小円と大円はこの点で接しているとする．

そこから小円は大円の内部をすべらずに転がったとする．小円の中心を C，そのときの小円と大円の接点を T とする．

すべらずに転がっているから大円の弧 $\overset{\frown}{AT}$ と小円の弧 $\overset{\frown}{PT}$ の長さは等しい．

$\angle AOT=\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\overset{\frown}{AT}$ の長さは $R\theta$ である．

一方小円の半径は $\dfrac{R}{2}$ であるから $\overset{\frown}{PT}$ の長さが $R\theta$ であるためには $\angle PCT=2\theta$ でなければならない．

さて，T は接点だから O，C，T は一直線上にある．したがって，$\angle COA=\theta$.

一方，$OC=R-\dfrac{R}{2}=\dfrac{R}{2}=CP$.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，△COP は二等辺三角形で頂角 $\angle OCP$ の外角が 2θ だから底角 $\angle COP=\angle CPO=\theta$．したがって，O，P，A は一直線上にある．

$\theta=0$ のとき $P=A$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $P=O$．よって，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，P は線分 OA 上を動く．

A を通る大円の直径の他端を A′ とすると，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，同様に P は線分 OA′ を動く．以後 $\theta > \pi$ のとき，P は線分 AA′ 上を往復する．

したがって，P は A を端点とする大円の直径上を動く．

P の軌跡は大円の 1 つの直径．　…(答)

（注）　O を原点，A を $(R,\ 0)$ となるように座標をとると，$\mathrm{T}(R\cos\theta,\ R\sin\theta)$，$\mathrm{C}\left(\dfrac{R}{2}\cos\theta,\ \dfrac{R}{2}\sin\theta\right)$，

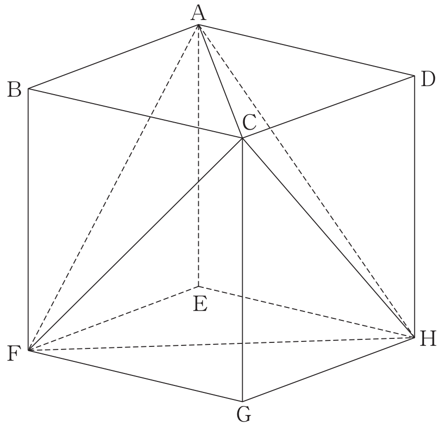
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{R}{2}(\cos\theta,\ \sin\theta) + \frac{R}{2}(\cos(\theta - 2\theta),\quad \sin(\theta - 2\theta)) = R(\cos\theta,\ 0).$$

となり，P が線分 AA′ 上を往復することがよりわかりやすい．

　この時代は座標幾何はあまり盛んでなかったようである．

第 3 問

稜の長さが 1 である立方体に図のように内接する四面体 ACFH の体積を求む。



分　野

幾何：立体図形，体積

考え方

立方体から 4 つの四面体を取り除くと考える．

【解答】

「稜」は辺のことである．

立方体の体積は 1．

四面体 BACF，四面体 DACH，四面体 EAFH，四面体 GCFH は合同でその体積は $\dfrac{1}{6}$．

よって，

$$\text{四面体 ACFH} = 1 - 4 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

…(答)

1952 年　4 科目より 2 科目選択・一般数学

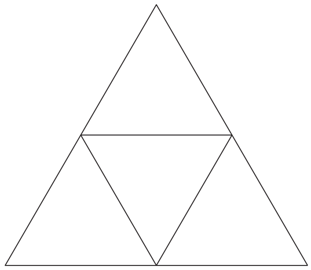
第 1 問

正三角形の板を図のように四つの合同な正三角形に分け，それを赤，黄，青，白の 4 色を用いて塗り分ける。

(i)　4 色全部を用いるとき幾通りの塗り方があるか。

(ii)　4 色のうち任意の 3 色を用いて隣り合う三角形は違う色になるようにするには幾通りの方法があるか。

(iii)　2 色を用いるとすれば幾通りの方法があるか。



分　野

一般数学：場合の数

考え方

条件を分解して，1 つ 1 つをみたす場合の数を数えかけ合わせてゆく．

【解答】

回転して同じ塗り方になるものを同一視しない．

(i)　4 個の三角形に異なる 4 色を配置するからその個数は $4!=24$ 通り．　…(答)

(ii)　用いる色の個数が 3 色であると解釈する．

中央の三角形の色をまず選ぶ，その色は 4 通り選べる．周りの 3 個の三角形のうち同じ色の三角形が 2 個，それと異なる色の三角形が 1 個ある．2 個ある三角形の色の選び方が 3 通り，残りの 1 個の三角形の色の選び方は 2 通り．同じ色の 2 色の位置の選び方は 3 通りある．

よって，条件をみたす色の塗り方は $4\times3\times2\times3=72$ 通り．　…(答)

(iii)　隣合う正三角形が同じ色でもよいと解釈する．

2 色の選び方は ${}_4C_2=6$ 通り．4 つの正三角形を 2 色のどちらかで塗る塗り方の個数は $2^4=16$ 通り．このうち 2 通りはすべて同じ色であるからこれを除くと，14 通り．

よって，求める塗り方の個数は $6\times14=84$ 通り．　…(答)

(注)　題意が明確でない．

回転して同じ塗り方になる場合を同一視するのかどうか．

任意の 3 色を選ぶ場合，使わない色があってよいのかどうか．

(ii) では隣り合う三角形は違う色に塗ると書いてあるが，(iii) ではどうなのか．

解答では回転して同じ塗り方になる場合を同一視しないことにした．

また，(ii)，(iii) では選ばれた 3 色，2 色に使われない色がないとした．ここで使わない色があるとすると，例えば赤と黄だけで塗られた図形は赤，黄，青を選んで青を使わなかったのか，赤，黄，白を選んで白を使わなかったのか，これらを 2 通りとみるのか，1 通りなのかという問題ができてしまう．

(iii) を隣り合う三角形は違う色に塗るとすると，中央と周辺とが異なる色に塗り分けられるからその個数は ${}_4P_2=12$ 通りとなる．

なお，回転して同じ塗り方になる場合を同一視し，あとの解釈を**【解答】**と同じにすれば，
(i) は $4\times2=8$ 通り，(ii) は $4\times3\times2=24$ 通り，(iii) は ${}_4C_2\times6=36$ 通りである．

第 2 問

何人かがある距離を自動車で行くとき，大型なら 2 台，小型なら 3 台いる。大型の料金は 1 台につき最初の 1 km までが 100 円，その後 320 m ごとに 20 円を加える。小型の料金は 1 台につき最初の 1 km までが 70 円，その後 480 m ごとに 20 円を加える。どのような距離を行くとき小型を使う方が有利になるか。

分　野

一般数学：場合分け，整数

考え方

具体的に書きだしてから考える．

【解答】

大型 2 台と小型 3 台を利用した場合の利用料金の表を作ると次のようである．

距離(m)	～ 1000	～ 1320	～ 1480	～ 1640	～ 1960	～ 2280	…
大型 2 台(円)	200	240	280	280	320	360	
小型 3 台(円)	210	270	270	330	330	390	

どちらを利用しても最初の 1 km 以後 960 m で $3\times20\times2=2\times20\times3=120$ 円であるから，1 km 以後 960 m 毎に追加される料金の差は同じである．

1 km から 1960 m までの間で小型を使う方が有利になるのは 1320 m から 1480 m まで，以後 960 m 毎に小型が有利な区間がある．

したがって，小型が有利になる区間は 1 km 以上の距離で，距離 (m) を 960 で割った余りが，360 以上で 520 未満の間になる区間である．　…(答)

(注)　距離を L m とすると

$$1320+960k\leqq L<1480+960k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

となる距離である．

第3問

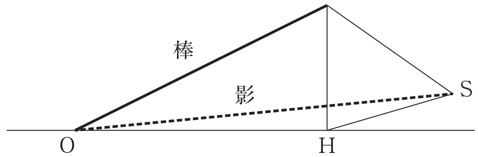
北緯 30° の地点で長さ 4 m の棒の先端を北極星に向けて地上に立てておく。太陽の方位が南より 30° 東，高度 45° であるとき，この棒の影の長さは何程か。

分　野

一般数学：空間図形

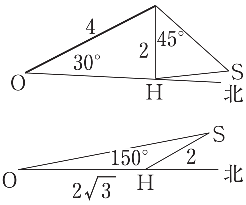
考え方

棒の先端は北に 30° 傾いている．太陽は南から 30° 東，高さ 45° にあるから棒の先端の影は，棒の先端の真下から西に 30° の向きに棒の先端から真下までの長さと同じ長さの位置にある．



【解答】

棒の根元を O，棒の先端から地面に下した垂線の足を H，棒の先端の影を S とする．



棒の長さは 4 m で棒の先端を北極星に向けているから先端の高さは 2 m で，$\mathrm{OH}=2\sqrt{3}$ m である．

太陽の向きは南より 30° 東にあるから，棒の先端の影は OH から 30° 西にある．したがって $\angle\mathrm{OHS}=150°$ である．

また太陽の高度が 45° だから，HS＝2 m である．

余弦定理から

$$\mathrm{OS}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{HS}^2-2\mathrm{OH}\cdot\mathrm{HS}\cos 150°=(2\sqrt{3})^2+2^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=28.$$

よって，影の長さは $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ m.　…(答)

1953 年　4 科目より 2 科目選択・解析 I

第 1 問

点 A(2, 3)，B(0, 0)，C(3, 0) を頂点とする三角形がある。底辺 BC 上の一点 P(x, 0) を通り BC に垂直な直線でこの三角形を二つの部分に分けるとき，頂点 B の側にある部分の面積を x の函数とみなすことができる。それはどんな函数であるか。またそのグラフをえがけ。

分　野

解析 I：2 次関数

考え方

P における垂線と AB，AC との交点を求めれば容易.

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である.

求める関数を $f(x)$ とする.

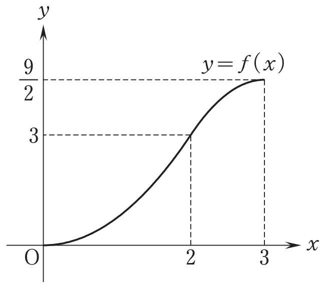
AB：$y=\dfrac{3}{2}x$ だから，$0\leqq x\leqq 2$ のとき，

$$f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\frac{3}{2}x=\frac{3}{4}x^2.$$

AC：$y=-3x+9$ から $2\leqq x\leqq 3$ のとき，

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3-\frac{1}{2}(3-x)(-3x+9)=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}(3-x)^2=-\frac{3}{2}x^2+9x-9.$$

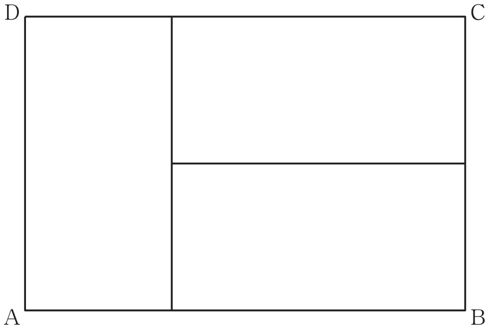
$$\therefore\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}x^2 & (0\leqq x\leqq 2 \text{ のとき}),\\[2mm] -\dfrac{3}{2}x^2+9x-9 & (2<x\leqq 3 \text{ のとき}).\end{cases}\qquad\cdots(答)$$



図示すると右図.

第2問

与えられた長さ l の線分を適当に六本の線分にわけ，それを使って図のような三箇の等積な長方形を合せた形の図形を作る。このようにして作り得る長方形 ABCD の面積の最大値を求めよ。



分　野

解析Ⅰ：2 次関数

考え方

等積だから，AB を 3 等分した点を通り AB に垂直な線分と，AB に平行で AB の $\dfrac{2}{3}$ の長さの線分で長方形 ABCD を分割している．

【解答】

AB の長さを $3a$，BC の長さを $2b$ とすると，縦の分割線分の長さは $2b$ で，横の分割線分の長さは $2a$ である．

よって，

$$l=8a+6b$$

である．よって，$2b=\dfrac{l}{3}-\dfrac{8}{3}a$.

長方形 ABCD の面積は

$$6ab=3a\left(\frac{l}{3}-\frac{8}{3}a\right)=-8\left(a-\frac{l}{16}\right)^2+\frac{l^2}{32}.$$

よって，$a=\dfrac{1}{16}$ つまり，$\mathrm{AB}=\dfrac{3}{16}l$，$\mathrm{BC}=\dfrac{l}{6}$ のとき，長方形の面積は最大値 $\dfrac{l^2}{32}$ をとる．　…(答)

【別解】

$S=6ab$ とおくと，相加平均・相乗平均の関係から，

$$l=8a+6b\geqq 2\sqrt{48ab}=4\sqrt{2S}.$$

$$\therefore\quad S\leqq\frac{l^2}{32}.$$

等号は $8a=6b=\dfrac{l}{2}$ つまり，$\mathrm{AB}=\dfrac{3}{16}l$，$\mathrm{BC}=\dfrac{l}{6}$ のときに成り立つ．

よって，長方形の面積の最大値は

$$\frac{l^2}{32}.$$　…(答)

第3問

$1<x<a$ なるとき，$(\log_a x)^2$，$\log_a x^2$，$\log_a(\log_a x)$ の大小の順序はどうか，またそれはどうしてわかるか。

分野

解析Ⅰ：対数

考え方

$1<x<a$ のとき，$0<\log_a x<1$ であることに注意する．

【解答】

$1<x<a$ のとき，$0<\log_a x<1$ である．

$$(\log_a x)^2-\log_a x^2=(\log_a x)^2-2\log_a x=\log_a x(\log_a x-2).$$

$\log_a x>0$，$\log_a x<2$ より，$(\log_a x)^2-\log_a x^2<0$.

$\log_a(\log_a x)<\log_a 1=0$ だから

$$\log_a(\log_a x)<0<(\log_a x)^2<\log_a x^2. \qquad \cdots(答)$$

衛生看護学科（1953～1965年）

東大の入試というと，文Ⅰ，文Ⅱ，文Ⅲ，理Ⅰ，理Ⅱ，理Ⅲの6類を想定すると思われるだろうが，1961年（昭和36年）までは文Ⅰ，文Ⅱ，理Ⅰ，理Ⅱの4類であった．1962年にそれまでの文Ⅰと理Ⅰが分割され，文Ⅰが文Ⅰ，文Ⅱに，文Ⅱが文Ⅲになり，理Ⅰが理Ⅰと理Ⅲになった．そのことは比較的に知られていることだと思われるが，その他に1953年（昭和28年）から1965年（昭和40年）まで科類とは別枠で「衛生看護学科」が募集されていた．入試問題は理類と同じであったが，女子だけの募集であった．東大医学部の学生とも知り合いになれることから「東大花嫁学校」と揶揄されていた．東大衛生看護学科は4年制の看護学科としては日本で2番目に古い学科である．（最も古い学科は高知女子大（現高知県立大）である．）医学部付属病院の看護婦養成を目指したものと思われるが，後に健康科学の教育・研究を主体とする学科に変っていき，別枠募集はされなくなった．現在の健康総合科学科の前身である．

看護婦（看護士）の地位が低く，今のような健康志向がなかった時代の話である．

1953 年　4 科目より 2 科目選択・解析Ⅱ

第 1 問

函数 $y=Ax+B+\dfrac{C}{x}$ に関し，次の各条件を求めよ。

(1) そのグラフが原点に関して対称な条件。

(2) そのグラフが x 軸と共通点をもたない条件。

(3) 極大値も極小値もとらない条件。

分　野

解析Ⅱ：分数関数，グラフの移動，微分法

考え方

(1) 奇関数である条件，(2) 分母を払った 2 次方程式の実解条件，(3) 微分する．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

A，B，C は実数として解答する．

(1) 原点について対称移動すると，$-y=-Ax+B-\dfrac{C}{x}$ から $y=Ax-B+\dfrac{C}{x}$. よって，これがもとの関数と一致する条件は

$$B=0. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $x \neq 0$ だから，分母を払って $Ax^2+Bx+C=0$. これが $x \neq 0$ の実数解をもたないことが条件.

$A \neq 0$ のとき，$B^2-4AC<0$ または $B=C=0$.

$A=0$，$B \neq 0$ のとき，$C=0$.

$A=0$，$B=0$ のとき，$C \neq 0$.

よって，

「$A \neq 0$，$B^2-4AC<0$」　または「$B=C=0$，$A \neq 0$」または

「$A=C=0$，$B \neq 0$」　　または「$A=B=0$，$C \neq 0$」．　…(答)

(3) $y'=A-\dfrac{C}{x^2}=\dfrac{Ax^2-C}{x^2}$.

$Ax^2-C=0$ が実数解をもたないか，重解をもつか，恒等的に成り立つことが条件.

$$A \neq 0,\ AC \leqq 0 \text{ または } A=0.$$

まとめて

$$AC \leqq 0. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注１) (2) で $A \neq 0$，$B=C=0$ の場合が答になるかどうかは微妙である．$B=C=0$ とすると $y=Ax$ となるが，もとの関数の定義域のまま $x \neq 0$ を条件として，これも正解とした.

(注２) (3) で $A=C=0$ の場合，$y=B$（恒等関数）となる．この場合すべての x に対し，y は極大値かつ極小値をとるという解釈もある（広義の極値)．その解釈に従うと (3) の答から $A=C=0$ を除くことになる.

第 2 問

函数 $y=|\sin x+\cos x-1|$ のグラフをえがけ。

分　野

解析Ⅱ：三角関数，合成公式

考え方

$\sin x+\cos x$ を合成して，$\sin x+\cos x=1$ となる x を求める．極値をとる x を求める．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$y=|\sin x+\cos x-1|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right|.$$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる x は

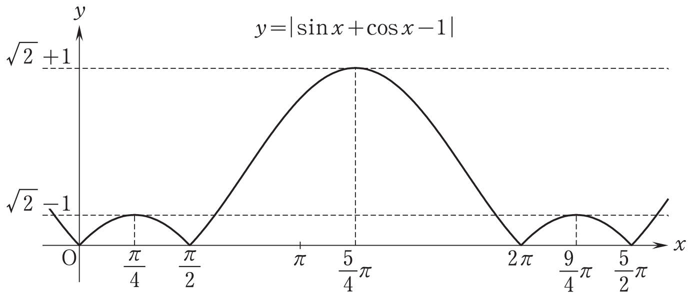
$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2n\pi \quad \text{または} \quad x+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi+2n\pi$$

から，

$$x=2n\pi \quad \text{または，} \quad \frac{\pi}{2}+2n\pi \quad (n \text{ は整数}).$$

$x=\dfrac{\pi}{4}+2n\pi$ のとき，$y=\sqrt{2}-1$，$x=-\dfrac{3}{4}\pi+2n\pi$ のとき，$y=\sqrt{2}+1$.

この関数は 2π の周期をもつ．そのグラフは下図．



…(答)

第3問

放物線 $y=x^2$ がある。点 $(1,\ 2)$ を通る弦のうちで，その放物線と囲む面積の最小なものを求めよ。

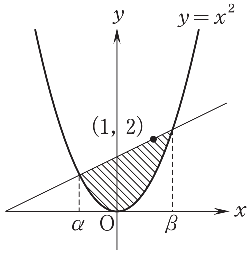
分　野

解析Ⅱ：整式の積分

考え方

$\dfrac{1}{6}$ 公式の利用.

【解答】



点 $(1,\ 2)$ を通り傾きが m の直線の方程式は $y=m(x-1)+2$.

$y=x^2$ との交点の x 座標を求める方程式は,

$$x^2=mx-m+2.\ \text{つまり}\ x^2-mx+m-2=0.$$

この方程式の2解を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha=\frac{m-\sqrt{m^2-4m+8}}{2},\quad \beta=\frac{m+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}.$$

よって，$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}$.

直線と放物線が囲む面積は

$$\int_\alpha^\beta\{(mx-m+2)-x^2\}\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{m^2-4m+8}^{\,3}=\frac{1}{6}\sqrt{(m-2)^2+4}^{\,3}.$$

これが最小になるのは $m=2$ のとき.

面積が最小になるのは弦が直線 $y=2x$ に重なるとき．弦の両端は $(0,\ 0)$，$(2,\ 4)$.　…(答)

（注）　面積の最小値は $\dfrac{4}{3}$.

1953 年　4 科目より 2 科目選択・幾何

第 1 問

四直線

$$x-y-4=0,\quad 2x+5y-15=0$$
$$4x-y+3=0,\quad x+3y+4=0$$

で囲まれた面積を求めよ。

分　野

幾何：直線の方程式

考え方

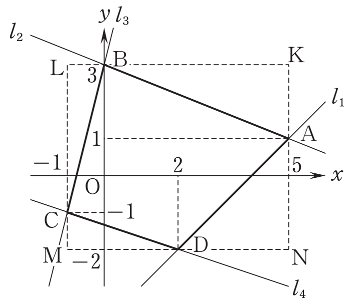
図を描いて考える．

【解答】

4 直線が囲む四角形のうち凸四角形になる部分の面積を求めることにする．

$$l_1 : x-y-4=0,\quad l_2 : 2x+5y-15=0$$
$$l_3 : 4x-y+3=0,\quad l_4 : x+3y+4=0$$

とおく．図示すると右図．



l_1 と l_2 の交点を A(5, 1)，l_2 と l_3 の交点を B(0, 3)，l_3 と l_4 の交点を C(−1, −1)，l_4 と l_1 の交点を D(2, −2) とおく．

また，ABCD を囲み座標軸に平行な辺をもつ長方形を考え，K(5, 3)，L(−1, 3)，M(−1, −2)，N(5, −2) とする．

$$\begin{aligned}\text{四角形 ABCD}&=\text{四角形 KLMN}-\triangle\text{KAB}-\triangle\text{LBC}-\triangle\text{MCD}-\triangle\text{NDA}\\&=(5+1)(3+2)-\frac{1}{2}(3-1)(5-0)-\frac{1}{2}(0+1)(3+1)\\&\quad-\frac{1}{2}(-1+2)(2+1)-\frac{1}{2}(5-2)(1+2)\\&=30-5-2-\frac{3}{2}-\frac{9}{2}=17.\end{aligned}$$

…(答)

（注）　一般に 4 直線がたがいに平行でなく，3 直線が同一点を共有しないならば 4 直線が囲む凸四角形はただ 1 つに定まる．しかし，4 直線が作る四角形は 4 直線による数珠順列から 3 通りある．そのうち 1 つはねじれ四角形で，他の 1 つは凹四角形である．

第２問

与えられた楕円の二つの焦点 F，F′ を通りこの楕円上の点を焦点とする放物線の準線は一定円に接することを証明せよ。

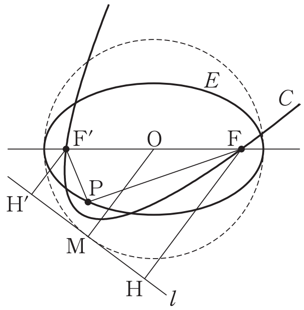
分　野

幾何：二次曲線

考え方

焦点，準線の意味を考えれば，見かけほど難しくない．

【解答】



楕円を E，その半長軸の長さを a とする．E 上に点 P をとり，P を焦点とし，F，F′ を通る放物線を C とする．C の準線を l とし，l へ F，F′ から下した垂線の足をそれぞれ H，H′ とする．

F，F′ は P を焦点とし，l を準線とする放物線上にあるから，

$$\mathrm{FP}=\mathrm{FH},\quad \mathrm{F'P}=\mathrm{F'H'}. \qquad \cdots①$$

P は楕円 E の周上にあるから，

$$\mathrm{FP}+\mathrm{F'P}=2a. \qquad \cdots②$$

ここで楕円 E の中心 O から放物線 C の準線 l へ下した垂線の足を M とする．O は FF′ の中点で，FH，OM，F′H′ は平行だから，M は HH′ の中点であり，①，② より，

$$\mathrm{OM}=\frac{1}{2}(\mathrm{FH}+\mathrm{F'H'})=\frac{1}{2}(\mathrm{FP}+\mathrm{F'P})=a.$$

よって，OM は P によらずに一定である．したがって，M は O を中心とする半径 a の円（補助円）の周上にある．

また，$\mathrm{OM}\perp l$ であるから l は補助円に接する．

したがって，楕円 E 上の任意の点 P を焦点とし，F，F′ を通る放物線 C の準線 l は E の補助円に接する．

（証明終り）

第3問

一辺の長さが a なる正 n 角形の紙片から，その中心 O を頂点とし，その一辺 AB を底辺とする三角形 OAB を切り取り，OA と OB とを一致させて，底面が正（$n-1$）角形で頂点 O なる角錐を作る時，その容積はいくらか。

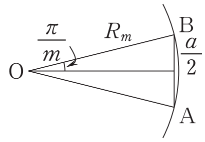
分野

幾何：立体図形，三角関数

考え方

一辺の長さに対する正多角形の外接円の半径を求めると，底面積，容器の深さを求めることができる．

【解答】



一辺の長さが a の正 m 角形の外接円の半径を R_m とすると，$R_m \sin\dfrac{\pi}{m}=\dfrac{a}{2}$ だから，$R_m=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{m}}$.

一辺の長さが a の正 $n-1$ 角形の面積は

$$(n-1)\times\frac{1}{2}R_{n-1}{}^2\sin\frac{2\pi}{n-1}=\frac{(n-1)a^2}{8\sin^2\dfrac{\pi}{n-1}}\sin\frac{2\pi}{n-1}=\frac{(n-1)a^2}{4\sin\dfrac{\pi}{n-1}}\cos\frac{\pi}{n-1}.$$

一方，容器の深さは

$$\sqrt{R_n{}^2-R_{n-1}{}^2}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}}-\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n-1}}}$$

求める体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{(n-1)a^2}{4\sin\dfrac{\pi}{n-1}}\cos\frac{\pi}{n-1}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}}-\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n-1}}}$$

$$=\frac{a^3(n-1)}{24}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{n-1}}{\sin\dfrac{\pi}{n-1}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n}}-\frac{1}{\sin^2\dfrac{\pi}{n-1}}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注）　この結果を cot を使って表すと，

$$\frac{a^3(n-1)}{24}\cot\frac{\pi}{n-1}\sqrt{\cot^2\frac{\pi}{n}-\cot^2\frac{\pi}{n-1}}$$

となる．

1953 年　4 科目より 2 科目選択・一般数学

第 1 問

n 日後に A 円支払う約束の手形がある。日歩 a 銭で n 日預けた後に A 円受け取ることのできる金額が，割引利率日歩 a 銭に対するこの手形の理論上の現在価格である。

銀行ではこれに対して A 円$\times\left(1-\dfrac{na}{10000}\right)$ を支払う習慣である。銀行で支払う金額は理論上の現在価格よりいつでも小さいことを証明せよ。しかし，a と n とが大きくなければ，その差額の A に対する比は小さい。$a \leqq 5$，$n \leqq 100$ のとき，この比はどのくらいか。

分　野

一般数学：利息計算，近似値

考え方

定義にしたがって，理論上の現在価格と，銀行で支払う金額を計算して引くだけ．

【解答】

理論上の現在価格は

$$A \div \left(1+\frac{na}{10000}\right).$$

である．

一方銀行が支払う価格は

$$A\left(1-\frac{na}{10000}\right).$$

よって，

$$\frac{A}{1+\dfrac{na}{10000}}-A\left(1-\frac{na}{10000}\right)=\frac{\left(\dfrac{na}{10000}\right)^2}{1+\dfrac{na}{10000}}A>0.$$

よって，銀行で支払う金額は理論上の現在価格よりいつも小さい．　（証明終り）

$a=5$，$n=100$ のとき，$na=500$．この比は

$$\frac{\left(\dfrac{500}{10000}\right)^2}{1+\dfrac{500}{10000}}=\frac{1}{420}.$$

よって，$a \leqq 5$，$n \leqq 100$ のとき，その差額の比は $\dfrac{1}{420}$ 以下である．

（注）日歩（ひぶ）とは 100 円に対し 1 日当りに発生する利息のことであり，単位の銭は $\dfrac{1}{100}$ 円である．したがって，日歩 a 銭のとき，A 円に対し 1 日当りに発生する利息は $\dfrac{A}{100}\cdot\dfrac{a}{100}=\dfrac{a}{10000}A$ 円である．

第２問

A，B，C，D ４箇の袋がある。

A には白球４箇，赤球１箇；

B には白球３箇，赤球１箇；

C には白球２箇，赤球１箇；

D には白球１箇，赤球１箇；

が入っている。これらの袋 A，B，C，D からそれぞれ１箇の球を取り出すとき，２箇以上が赤球である確率はいくらか。

分　野

一般数学：確率

考え方

袋ごとに球の個数が異なるから，場合の数が多くなる．１個以下と，２個以上を比べると１個以下の方が場合の数が少ないので，余事象の確率を計算する．

【解答】

余事象の確率を求める．

取り出した４個の球がすべて白球である確率は $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

A から赤球を取り出し，他の袋からは白球を取り出す確率は $\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{20}$.

B から赤球を取り出し，他の袋からは白球を取り出す確率は $\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{15}$.

C から赤球を取り出し，他の袋からは白球を取り出す確率は $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$.

D から赤球を取り出し，他の袋からは白球を取り出す確率は $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$.

よって求める確率は

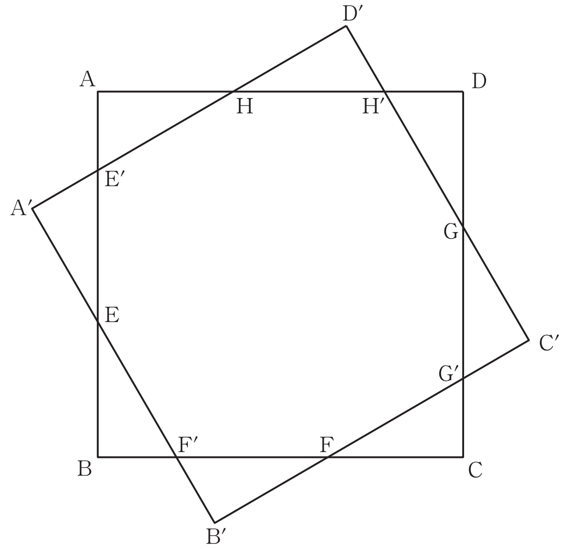
$$1-\frac{1}{5}-\frac{1}{20}-\frac{1}{15}-\frac{1}{10}-\frac{1}{5}=1-\frac{37}{60}=\frac{23}{60}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第3問

下の図で正方形 A′B′C′D′ は正方形 ABCD をその中心のまわりで正方向に 30° 回転したものである。点 P は，正方形 ABCD の周上を一定の速さで 5 分間に 7 回まわり，点 Q は，正方形 A′B′C′D′ の周上を一定の速さで 25 分間に 33 回まわるものとする。P，Q が同時に E を出発して同じ向きに回転するとき，

(1) P，Q は E を出発してから何分後に初めてどこで出会うか。

(2) P，Q は E′，F′，G′，H′ では出会わない。その理由を説明せよ。



分　野

一般数学：点の運動，有理数・無理数

考え方

出会うとすれば E，F，G，H または E′，F′，G′，H′ であるが (2) で E′，F′，G′，H′ では出会わないというから，E，F，G，H だけを考えればよい．

E から F までは 1 周の $\dfrac{1}{4}$ に相当することを確認する．

P と Q の速さの整数比を求める．

出会わない理由は E から，E′，F′，G′，H′ までの距離の比が有理数でないことに起因する．

【解答】

(1) 1 辺の長さを a とする．合同性，対称性から

$$\triangle AE'H \equiv \triangle A'E'E \equiv \triangle BF'E \equiv \triangle B'F'F \equiv \triangle CG'F \equiv \triangle C'G'G \equiv \triangle DH'G \equiv \triangle D'H'H.$$

$$a = AE' + E'E + EB = EB + BF' + F'F = FC + CG' + G'G = GD + DH' + H'H = HA + AE' + E'E$$
$$= EF' + F'B' + B'F = FG' + G'C' + C'G = GH' + H'D' + D'H = HE' + E'A' + A'E.$$

したがって，E から F までは，どちらの正方形を通っても a の距離の移動である．同様に，F から G，G から H，H から E までの距離も a である．

P，Q の速さをそれぞれ u，v とすると，P は 5 分間に 7 回りするから $u = \dfrac{7}{5} \times 4a$/分であり，Q は 25 分間に 33 回りするから $v = \dfrac{33}{25} \times 4a$/分である．

よって，$u : v = \dfrac{7}{5} : \dfrac{33}{25} = 35 : 33$．である．

P，Q が同時に E，F，G，H のどれかに到達するのは $\dfrac{25}{4}$ 分後で，P は $35a$ 進み，Q は $33a$ 進んだ時点である．$t_0=\dfrac{25}{4}$ とすると，P，Q が同時に E，F，G，H のどれかに到達するのは t_0 の整数倍の時点である．kt_0 分後（k は自然数）には P，Q の移動距離の差は $35ak-33ak=2ak$ となる．これが 1 周 $4a$ の整数倍になるのは k が偶数のときで，その最小の k は 2 である．

$k=2$ のとき，$2t_0=\dfrac{25}{2}=12.5$ 分後で，P，Q の移動距離はそれぞれ $70a$，$66a$ である．70，66 を 4 で割ると 2 余るから，出会う位置は G.

よって

12.5 分後に G で出会う．　…(答)

(2) P，Q の回転方向が反時計まわりとして解答する．

正方形 A′B′C′D′ は正方形 ABCD を 30° 回転したものであるから △AE′H において，∠AHE′＝30°，∠AE′H＝60° である．AE′：E′H：HA＝1：2：$\sqrt{3}$ である．これらの和が a であるから

$$\mathrm{AE'}=\frac{a}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}a,\quad \mathrm{E'H}=\frac{2a}{3+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}a,\quad \mathrm{HA}=\frac{\sqrt{3}\,a}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$$

である．

P が E′，F′，G′，H′ に至るまでの移動距離は a の整数倍に $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}a$ を加えた距離であり，Q が E′，F′，G′，H′ に至るまでの移動距離は a の整数倍に $\dfrac{a+\sqrt{3}\,a}{3+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ を加えた距離である．その比は，m，n を整数として，

$$\frac{ma+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}a}{na+\dfrac{\sqrt{3}}{3}a}=\frac{3m+3-\sqrt{3}}{3n+\sqrt{3}}=\frac{3(m+1)n+1-(m+n+1)\sqrt{3}}{3n^2-1}.$$

$m+n+1$ は正だから，P，Q の移動距離の比は無理数，一方，P，Q の移動速度の比は 35：33 で有理数だから，P，Q が E′，F′，G′，H′ に同時に着くことはない．　（証明終り）

（注） P，Q の回転方向が時計まわりとしても同じ結果をうる．

1954 年　4 科目より 2 科目選択・解析 I

第 1 問

函数 $y=\sqrt{x^2+x+1}$ のグラフをえがけ。

分　野

解析 I：二次曲線，双曲線

考え方

$y \geqq 0$ の下で両辺を 2 乗．平方完成すると曲線が何であるかわかる．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

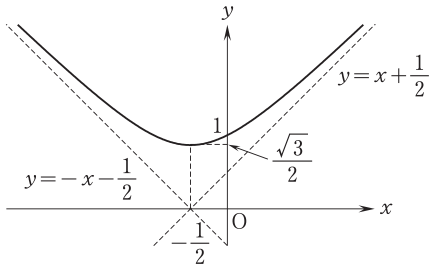
$\sqrt{x^2+x+1} \geqq 0$ であるから，$y \geqq 0$．

両辺を 2 乗して，

$$y^2=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

$$-\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}+\frac{y^2}{\frac{3}{4}}=1.$$

よってこのグラフは双曲線の $y \geqq 0$ の部分．中心は $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$．漸近線は $y=\pm\left(x+\frac{1}{2}\right)$．



第 2 問

点 $(x,\ y)$ が原点を中心とする半径 1 の円の内部を動くとき，点 $(x+y,\ xy)$ の動く範囲を図示せよ。

分　野

解析 I：不等式と領域，2 次方程式の理論

考え方

$X=x+y$，$Y=xy$ として，$x^2+y^2<1$ を X，Y で表す．また，x，y が実数であることにも注意する．

【解答】

$X=x+y$，$Y=xy$ とおく．$x^2+y^2<1$ より

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=X^2-2Y<1. \quad \therefore \quad Y>\frac{1}{2}(X^2-1).$$

また，x，y は方程式，

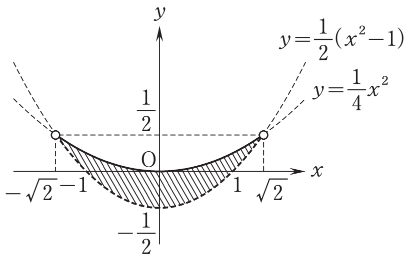
$$t^2-(x+y)t+xy=0 \text{ つまり，} t^2-Xt+Y=0$$

の 2 解で，x，y は実数だから（判別式）$=X^2-4Y \geqq 0$.

よって，

$$\frac{1}{2}(X^2-1)<Y \leqq \frac{1}{4}X^2.$$

よって，点 (X, Y) が存在する範囲は下図斜線部，境界は太実線を含み，破線および白丸を除く．



第 3 問

a，b は正の数で

$$\log ax \log bx+1=0$$

を満足する正の数 x があるとき，$\dfrac{b}{a}$ はどのような範囲にあるか，ただし log は常用対数を表わすものとする。

分　野

解析 I ：対数

考え方

$\log_{10}(ax)$ と $\log_{10}(bx)$ の積の形であるから，これを $\log_{10}a+\log_{10}x$ と $\log_{10}b+\log_{10}x$ の積とみることが重要．置き換えて考えると，$\log_{10}x$ の 2 次方程式になっている．

【解答】

与式から

$$(\log_{10}x+\log_{10}a)(\log_{10}x+\log_{10}b)+1=0.$$

$X=\log_{10}x$，$A=\log_{10}a$，$B=\log_{10}b$ とおくと，

$$(X+A)(X+B)+1=0. \quad \therefore \quad X^2+(A+B)X+AB+1=0. \qquad \cdots①$$

x が正の数の範囲ですべて動くと，$X=\log_{10}x$ は実数全体を動く．

① が実数解をもつ条件は

$$(A+B)^2-4(AB+1)=(A-B)^2-4 \geqq 0.$$

よって，

$$B-A \leqq -2 \text{ または } B-A \geqq 2.$$

$B-A=\log_{10}b-\log_{10}a=\log_{10}\dfrac{b}{a}$ だから，

$$\log_{10}\frac{b}{a} \leqq -2 \text{ または } \log_{10}\frac{b}{a} \geqq 2.$$

$$\therefore \quad 0<\frac{b}{a} \leqq \frac{1}{100} \text{ または } \frac{b}{a} \geqq 100. \qquad \cdots(\text{答})$$

1954 年　4 科目より 2 科目選択・解析 II

第 1 問

次の函数の最大値と最小値を求めよ。

$$a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$$

分　野

解析 II：三角関数，合成公式

考え方

全部 $2x$ の式で表せる．$2x$ について合成する．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$$

とおく．

倍角公式，半角公式から

$$f(x)=a\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+b\sin 2x+c\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{a+c}{2}+b\sin 2x+\frac{a-c}{2}\cos 2x.$$

合成公式から

$$f(x)=\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\sin(2x+\alpha).$$

ただし，α は $4b^2+(a-c)^2\neq 0$ のとき，

$$\cos\alpha=\frac{2b}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}},\quad \sin\alpha=\frac{a-c}{\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}$$

をみたす角．$b=0$，$a=c$ のとき α は任意．

x はすべての実数値をとって変化するから，

$f(x)$ の最大値は $\frac{1}{2}\left(a+c+\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\right)$.　…(答)

$f(x)$ の最小値は $\frac{1}{2}\left(a+c-\sqrt{4b^2+(a-c)^2}\right)$.　…(答)

第2問

等脚台形の1つの底辺が$7a$，等辺が$2a$であるとき，その面積を最大にするには，その高さをいくらにしたらよいか。

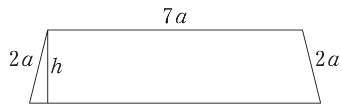
分野

解析Ⅱ：微分法

考え方

面積をhの関数として表し微分して増減を調べる．

【解答】



等脚台形の高さをhとすると，$0<h\leqq 2a$．上底の長さを$7a$とし，下底が上底より長いか等しい場合のみ考えればよい．下底の長さは

$$7a+2\sqrt{(2a)^2-h^2}=7a+2\sqrt{4a^2-h^2}.$$

等脚台形の面積をhの関数として，$S(h)$とおくと，

$$S(h)=\frac{1}{2}\{7a+(7a+2\sqrt{4a^2-h^2})\}h=(7a+\sqrt{4a^2-h^2})h.$$

$$S'(h)=\frac{-h}{\sqrt{4a^2-h^2}}h+7a+\sqrt{4a^2-h^2}=\frac{-h^2+7a\sqrt{4a^2-h^2}+4a^2-h^2}{\sqrt{4a^2-h^2}}$$

$$=\frac{7a\sqrt{4a^2-h^2}+4a^2-2h^2}{\sqrt{4a^2-h^2}}.$$

$S'(h)=0$ のとき，$7a\sqrt{4a^2-h^2}=2h^2-4a^2$.

よって，$h\geqq\sqrt{2}\,a$ かつ

$$49a^2(4a^2-h^2)=(2h^2-4a^2)^2. \quad \therefore \quad 4h^4+33a^2h^2-180a^4=0.$$

$$\therefore \quad (4h^2-15a^2)(h^2+12a^2)=0.$$

h	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{15}}{2}a$	$\cdots$	$2a$
$S'(h)$		$+$	0	$-$	
$S(h)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$S(h)$を最大にする高さは

$$h=\frac{\sqrt{15}}{2}a. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】

等脚台形の底角をθとすると高さは$2a\sin\theta$となる．

上底を$7a$とすると，下底は $7a+4a\cos\theta$.

面積をθの関数とし，$f(\theta)$とおくと，

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\{7a+(7a+4a\cos\theta)\}2a\sin\theta=2a^2(7+2\cos\theta)\sin\theta.$$

$$f'(\theta)=2a^2\{(-2\sin\theta)\sin\theta+(7+2\cos\theta)\cos\theta\}=2a^2(4\cos^2\theta+7\cos\theta-2)=2a^2(4\cos\theta-1)(\cos\theta+2).$$

$\cos\theta=\frac{1}{4}$ となる $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の角をαとおくと

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最大になる．このとき，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ だから高さは

$$\frac{\sqrt{15}}{2}a. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１） 当時，三角関数の微分，無理関数の微分は教科書の研究で扱われていて，x^α の微分は，α が整数，-1 程度までであったようである．したがって上の２つの解答は当時では範囲外ということになる．

そこで，面積を下底の頂点と上底の頂点から下した垂線の足の距離 $x=\sqrt{4a^2-h^2}$ の関数とみて

$$S=\frac{7a+(7a+2x)}{2}\sqrt{4a^2-x^2}=(7a+x)\sqrt{4a^2-x^2},\quad S^2=(7a+x)^2(4a^2-x^2)$$

として，S^2 を x で微分して解くなどの方法しかなかったようである．

（注２） 初等幾何的には条件を緩めて辺の長さが $2a$，$7a$，$2a$ である四角形 ABCD の面積が最大になる場合を考える．AB$=2a$，BC$=7a$，CD$=2a$ の四角形の面積が最大になる場合を求めると，$\angle$C を固定して AB を動かすとき，$\angle$ABD が直角のとき最大になる．同様に $\angle$B を固定して CD を動かして面積が最大のときを考えると，$\angle$ACD が直角のときの最大になる．このことから最大になる場合があるならそれは $\angle$ABD，$\angle$ACD が直角の等脚台形の場合であることがわかる．したがって，等脚台形の中で面積最大のものも $\angle$ABD，$\angle$ACD が直角の場合である．

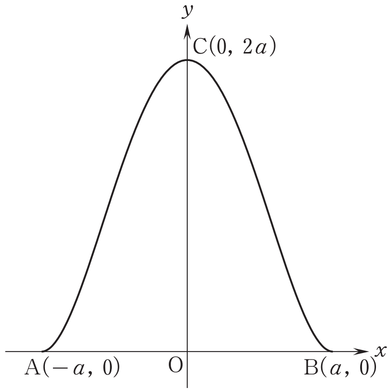
このままでは必要条件をのべただけだが，微分法が容易に使えなかったなら，このような解法も認められたのではないだろうか．

第3問

下の図で曲線 ACB は y 軸に関して対称で，点 A，B で x 軸に接し，かつ x の 4 次の整式のグラフとなっている。

(i) 曲線 ACB の方程式を求めよ。

(ii) 曲線 ACB を y 軸のまわりに回転するときできる立体の体積を求めよ。



分　野

解析Ⅱ：積分法，体積

考え方

$x=\pm a$ で x 軸に接するから $y=A(x-a)^2(x+a)^2$ とおける．

【解答】

(i) $x=a$ と $x=-a$ で x 軸に接し，4 次式だから

$$y=A(x-a)^2(x+a)^2$$

とおける．$(0,\ 2a)$ を通るから，$2a=Aa^4$．よって，$A=\dfrac{2}{a^3}$.

よって，この曲線の方程式は

$$y=\frac{2}{a^3}(x-a)^2(x+a)^2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(ii) 曲線と x 軸が囲む部分を y 軸について回転してできる立体の体積が求められていると解釈する．

$y=\dfrac{2}{a^3}(x^2-a^2)^2$ で $|x|\leqq a$ だから

$$a^2-x^2=\sqrt{\frac{a^3y}{2}}. \quad \therefore \quad x^2=a^2-\sqrt{\frac{a^3y}{2}}.$$

よって，求める体積は

$$\pi\int_0^{2a}x^2\,dy=\pi\int_0^{2a}\left(a^2-\sqrt{\frac{a^3}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}\right)dy=\pi\left[a^2y-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^3}{2}}\,y^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a}$$

$$=\pi\left(2a^3-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^3}{2}}(2a)^{\frac{3}{2}}\right)=\pi\left(2-\frac{4}{3}\right)a^3=\frac{2}{3}\pi a^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注) 曲線を回転しても体積は 0 のはず．しかもこの曲線を y 軸について回転したものは閉じた曲面でもない．帽子のような形になる．x 軸回転なら閉じた曲面になる．最も妥当そうなのは x 軸と囲む領域なのでそう解釈した．

1954年　4科目より2科目選択・幾何

第1問

　2円O，O′ が点A，Bで交わるとき，Aを通る1つの直線が円O，O′ とそれぞれP，P′ でふたたび交わり，Bを通ってそれと平行な直線が円O，O′ とそれぞれQ，Q′ で交わるとする。

(i)　四辺形 PQQ′P′ は平行四辺形となることを証明せよ。

(ii)　この平行四辺形の面積が最大となるのはどのような場合か。

分　野

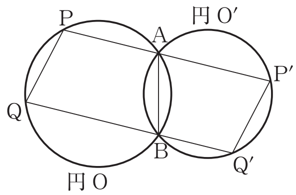
幾何：平面図形，円周角

考え方

　円に内接する四角形の対角の関係，平行線の同傍内角の関係などを使う．

【解答】

(i)(a)　P，P′ がAについて反対側にあり，Q，Q′ がBについて反対側にあるとき，∠APQ と ∠ABQ′ は円に内接する四角形の内対角の補角の関係から等しい．

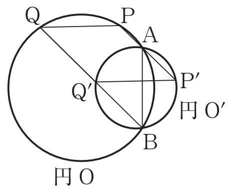


　また，∠ABQ′ と ∠AP′Q′ は円に内接する四角形の内対角の関係から補角である．したがって，∠APQ と ∠AP′Q′ は補角である．

　∠APQ と ∠AP′Q′ は直線 PP′ の同傍内角であるから，PQ∥P′Q′ である．

　また，PP′∥QQ′ であるから，四角形 PQQ′P′ は平行四辺形である．

(b)　P，P′ がAについて反対側にあり，Q，Q′ がBについて同じ側にあるとき，∠APQ と ∠ABQ′ は円に内接する四角形の内対角の関係から補角である．



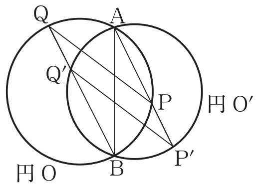
　また，∠ABQ′ と ∠AP′Q′ は円周角の関係から等しい．したがって，∠APQ と ∠AP′Q′ は補角である．

　∠APQ と ∠AP′Q′ は直線 PP′ の同傍内角であるから，PQ∥P′Q′ である．

　また，PP′∥QQ′ であるから，四角形 PQQ′P′ は平行四辺形である．

(c)　P，P′ がAについて同じ側にあり，Q，Q′ がBについて反対側にあるとき，(b)と同様にして，四角形 PQQ′P′ は平行四辺形である．

(d)　P，P′ がAについて同じ側にあり，Q，Q′ がBについて同じ側にあるとき，∠APQ と ∠ABQ′ は円周角の関係から等しい．



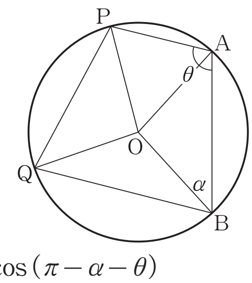
　また，∠ABQ′ と ∠AP′Q′ は円周角の関係から等しい．したがって，∠APQ と ∠AP′Q′ は等しい．

　∠APQ と ∠AP′Q′ は直線 PP′ の同位角であるから，PQ∥P′Q′ である．

　また，PP′∥QQ′ であるから，四角形 PQQ′P′ は平行四辺形である．

　以上より，四角形 PQQ′P′ は平行四辺形である．　（証明終り）

(ii)　円Oの弦ABを固定し，ABを等脚とし円Oに内接する等脚台形を考える．



$\angle OBA=\alpha$，$\angle BAP=\theta$ とおくと，$\angle OAP=\theta-\alpha$，

$\angle OBQ=(\pi-\theta)-\alpha=\pi-\alpha-\theta$.

　円Oの半径を r とおくと，

$$台形ABQP=\triangle OAB+\triangle OPQ+\triangle OAP+\triangle OBQ.$$

　ABが定弦だから，α は一定．よって，$\triangle OAB=\triangle OPQ$ は一定．

$$\triangle OAP+\triangle OBQ=\frac{r^2}{2}\cdot 2\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+\frac{r^2}{2}\cdot 2\sin(\pi-\alpha-\theta)\cos(\pi-\alpha-\theta)$$

$$=\frac{r^2}{2}\sin 2(\theta-\alpha)-\frac{r^2}{2}\sin 2(\theta+\alpha)=-r^2\cos 2\theta\sin 2\alpha.$$

α が一定で，θ を動かすとき，$2\theta=\pi$ すなわち，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，台形 ABQP の面積は最大になる．

また同様に台形 ABQ′P′ が最大になるのも $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき．

両方の台形が最大のとき，A，P，P′ および B，Q，Q′ は一直線上にあるから平行四辺形 PQQ′P′ の面積が最大になるのもこのときで，AB⊥PP′．

この平行四辺形の面積が最大になるのは PP′⊥AB のとき．　…(答)

（注１）（i）の場合分けは厳密にはこの他に P＝A，P′＝A，Q＝B または Q′＝B の場合があるが本質的な違いがあるわけではなくただただ煩雑になるだけなので省略した．

（注２）（ii）の四角形 APQB は AB について P，Q が反対側にあるときも含めて計算している．図形的にはこれらの場合，APQB はねじれ四辺形になり，計算から導かれる“面積”はねじれ四辺形を構成する２つの三角形の面積の差となるが，これが平行四辺形の面積を求めるのにそのまま使っても正しい結果をうるから，そのまま適用した．しかもその差の面積は最大面積より明らかに小さい．

（注３）（ii）の平行四辺形 PQQ′P′ の面積の最大値は △AOO′ の面積の８倍である．

第２問

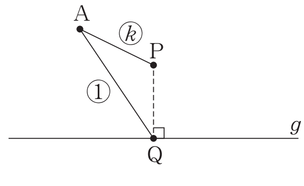
平面上に点 A と，それを通らない直線 g とが与えられている。この平面上に点 P をとり，P から g に下した垂線の足を Q とする．AP：AQ が一定の値をとるような点 P の軌跡は何か。その図をえがけ。

分　野

幾何：軌跡，二次曲線

考え方

g を x 軸，A が y 軸上にあるように座標をとって考える．



【解答】

g を x 軸，A の座標を $(0,\ a)$ となるように座標をとる．

P の座標を $(X,\ Y)$ とおくと Q の座標は $(X,\ 0)$

AP：AQ＝k：1 とすると，

$$k^2(X^2+a^2)=X^2+(Y-a)^2.\quad \therefore\quad (1-k^2)X^2+(Y-a)^2=k^2a^2.$$

中心が A の二次曲線である．

（i）$0<k<1$ のとき楕円で，

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{ka}{\sqrt{1-k^2}}\right)^2}+\frac{(y-a)^2}{(ka)^2}=1.$$

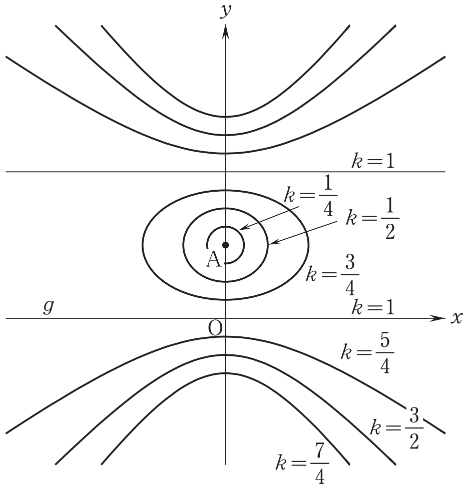
よって，横長楕円で，半長軸が $\dfrac{ka}{\sqrt{1-k^2}}$，半短軸が ka である．

（ii）$k=1$ のとき，$y=0$，$y=2a$ の２平行直線になる．（一方は g で他方は A について，g と点対称な直線である．）

(iii) $k>1$ のとき，双曲線で，

$$-\frac{x^2}{\left(\frac{ka}{\sqrt{k^2-1}}\right)^2}+\frac{(y-a)^2}{(ka)^2}=1.$$

よって，主軸が y 軸，漸近線が $y=\pm\sqrt{k^2-1}\,x+a$ の双曲線である．まとめて図示すると次図．



(注) $0<k<1$ のとき焦点は $\left(\pm\frac{ak^2}{\sqrt{1-k^2}},\ a\right)$ であり，準線は $x=\pm\frac{a}{\sqrt{1-k^2}}$ で，離心率は k である．

また，$k>1$ のとき焦点は $\left(0,\ a\pm\frac{ak^2}{\sqrt{k^2-1}}\right)$ であり，準線は $y=a\pm a\sqrt{k^2-1}$ で，離心率は $\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$ である．

第3問

空間において，3 定点 A，B，C からの距離の 2 乗の和が一定であるような点の軌跡を求めよ。

分　野

幾何：空間図形，軌跡

考え方

$\triangle$ABC の重心からの距離の 2 乗に帰着されることを意識しないと難しいであろう．

【解答】

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=k^2$$

となる点の軌跡を考える．

AB の中点を M とおくと，中線定理から，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=2\mathrm{AM}^2+2\mathrm{PM}^2.$$

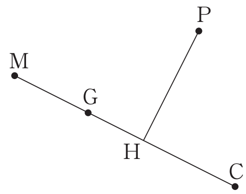
よって，

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=2\mathrm{AM}^2+2\mathrm{PM}^2+\mathrm{PC}^2.$$

MC を 1：2 に内分する点を G，P から直線 MC へ下した垂線の足を H とし，GC，GH，GM は C から M 方向を正とする有向線分の長さとする．

$$\begin{aligned}2\mathrm{PM}^2+\mathrm{PC}^2&=3\mathrm{PH}^2+2\mathrm{MH}^2+\mathrm{CH}^2=3\mathrm{PH}^2+2(\mathrm{GH}-\mathrm{GM})^2+(\mathrm{GC}-\mathrm{GH})^2\\&=3\mathrm{PH}^2+3\mathrm{GH}^2-2\mathrm{GH}(2\mathrm{GM}+\mathrm{GC})+2\mathrm{GM}^2+\mathrm{GC}^2=3\mathrm{PG}^2+\frac{3}{2}\mathrm{GC}^2.\end{aligned}$$

$$\left(\because\quad 2\mathrm{GM}+\mathrm{GC}=0,\ \mathrm{GM}^2=\frac{1}{4}\mathrm{GC}^2\right)$$



また，中線定理より，

$$\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2=2\mathrm{GM}^2+2\mathrm{AM}^2=\frac{1}{2}\mathrm{GC}^2+2\mathrm{AM}^2$$

から

$$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2=2\mathrm{AM}^2+3\mathrm{PG}^2+\frac{3}{2}\mathrm{GC}^2=3\mathrm{PG}^2+\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{GC}^2.$$

よって，

$$\mathrm{PG}^2=\frac{1}{3}(k^2-\mathrm{AG}^2-\mathrm{BG}^2-\mathrm{CG}^2)=(\text{一定})$$

である．

$k>\sqrt{\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2}$ のとき，P の軌跡は $\triangle$ABC の重心（広義）G を中心とする球面であり，$k=\sqrt{\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2}$ のとき，P の軌跡は 1 点 G，$k<\sqrt{\mathrm{AG}^2+\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2}$ のとき，P の軌跡は存在しない．　…(答)

（注 1）　$k^2=2\mathrm{AM}^2+3\mathrm{PG}^2+\frac{3}{2}\mathrm{GC}^2$ だけでも P が G を中心とする球面（点または虚球面）を描くことがわかる．解答の最後は対称性がよく見えるための変形である．

（注 2）　ベクトルを使えばもっと自然に G が中心であることを導ける．（当時ベクトルは教科書になかった）

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2.$$

ここで，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ となる点 G をとると，G は $\triangle$ABC の重心（広義）．

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2&=3|\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2-3|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2\\&=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2-3|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2\\&=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}})\\&=3|\overrightarrow{\mathrm{GP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2.\end{aligned}$$

（注３） この問題では３点 A，B，C の位置関係は定められていないので３点が一直線上にある場合まで題意に含まれている．その場合でも AB の中点 M に対して MC を１：２に内分する点 G は存在する．そこでこのような場合も含めて G を △ABC の重心（広義）とした．

最大何個打ち抜けるか

「1 辺の長さが 1 m の正方形のトタンの板から直径 10 cm の円板をなるべく多く打ち抜きたい．少なくとも何個打ち抜くことができるか．」

これは 1949 年の名古屋工業大学の問題である（数値は少し変えてある）．

もちろん，100 個打ち抜けることは容易に想像できる．

当時の O 社の解答は「105 個」と答え「これが一番多いと思う」と答えている．しかし，実際には 106 打ち抜くことができる（どういう方法か考えてみてほしい）．

したがって，私なら「106 個が最大だと思う」と答えるだろう．

しかし，これが最大であることを示すには 107 個を打ち抜くことができないことを示さなければならない．その証明は極めて難しいように思える．

問題文は「少なくとも何個」といっているから，意地悪く言えば 1 個でも正解のはずである．入試としては 100 個以上何個を示すことができたかで採点できるであろう．

おおらかな時代の面白い問題だと思う．

1954 年　4 科目より 2 科目選択・一般数学

第 1 問

半径に等しい長さ円弧に対する中心角を 1 弧度という。従って 1 弧度は $\dfrac{180}{\pi}$ 度である。

$\pi=3.1415926\cdots$ をなるべく少ない桁数で 4 捨 5 入して 1 弧度の近似値を計算し，その誤差を 30 秒以下にしたい。π の近似値を何とすればよいか。

分　野

一般数学：近似値

考え方

30 秒は $\dfrac{1}{2}$ 分つまり $\dfrac{1}{120}$ 度である.

【解答】

1 弧度は $\dfrac{180}{\pi}$ であるから，これに対して 30 秒 $=\dfrac{1}{2\times60}=\dfrac{1}{120}$ 度は $\dfrac{\pi}{180\times120}=\dfrac{\pi}{21600}\fallingdotseq\dfrac{1}{7200}$ 位の割合である.

したがって，π に対して，$\dfrac{1}{2400}$ 以下の誤差を考えればよい.

3.142 までだと誤差は $0.00040\cdots\fallingdotseq\dfrac{1}{2500}$ となりとなりかろうじて誤差の範囲内である.

よって，π を 3.142 またはそれより良い近似をとればよい.　…(答)

(注)　ここでいう「秒」は時間の単位ではなく角度の単位であり，

$$60 \text{ 秒}=1 \text{ 分},\quad 60 \text{ 分}=1 \text{ 度}$$

である.

第 2 問

4 つのクラスから 3 人ずつ選手がでている。これを 4 人ずつ 3 組に分けて 1 組ずつ競走させる。

(i)　同じクラスのものが同じ組に入らないように分けるとき，番組は幾通りできるか。

(ii)　勝手に組分けする場合，番組は幾通りできるか。

(iii)　(ii) の場合，特別の 2 名のものが同じ組に入る確率はいくらか。

分　野

一般数学：場合の数，確率

考え方

ここでいう番組は 3 組の競走の順序までが決められていると考える．つまり，同じメンバーによる競走が異なる順序で行われる場合は異なる番組と考える.

【解答】

(i)　各クラスの 3 人がどの順に競走するかが決まればよいから番組の個数は

$$(3!)^4=1296 \text{ 通り}.$$　…(答)

(ii)　12 人から 4 人選び，残りの 8 人から 4 人選ぶから

$$ {}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 34650 \text{ 通り．} \quad \cdots(答) $$

(iii) 特別な 2 名が含まれる組が 3 通り．その組の他の 2 名は ${}_{10}C_2$ 通り，残り 2 組は 8 人から 4 人選ぶから ${}_8C_4$ 通り．

よって，求める確率は

$$ \frac{3 \times {}_{10}C_2 \cdot {}_8C_4}{{}_{12}C_4 \cdot {}_8C_4} = \frac{3 \times {}_{10}C_2}{{}_{12}C_4} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{3}{11}. \quad \cdots(答) $$

(iii) の【別解】

特別の 1 名が入る組は 1 つ決まる．もう 1 名は特別の 1 名の入る組の残りの 3 名の 1 人になるか，残りの 2 組の 8 名の 1 人になるかのいずれかである．よって，特別の 2 名が同じ組になる確率は

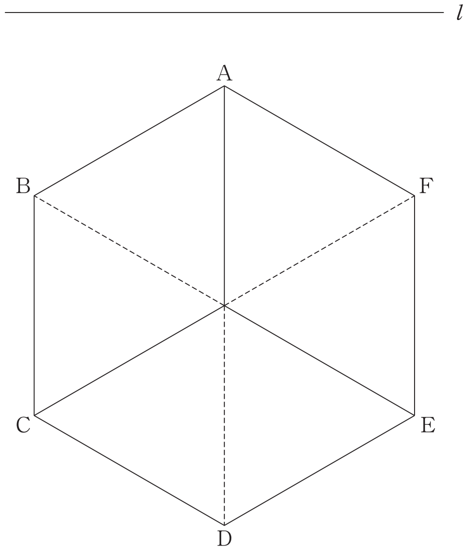
$$ \frac{3}{3+8} = \frac{3}{11}. \quad \cdots(答) $$

第 3 問

下の図はある位置におかれた立方体の平面図である。ABCDEF は正六角形で辺 BC，EF は基線 l に垂直である。

(i) この立方体の立面図をえがけ。

(ii) AB の図上の長さが a ならば，稜と対角線の実長はそれぞれいくらか。



分　野

一般数学：投影図

考え方

平面図で，中心の 2 頂点が重なっているから，立面図では，この 2 点は基線に垂直で長さは実長になるはずである．対称性から A，C，E および B，D，F は同じ高さにあり，6 つの面は立面図でも平行四辺形である．

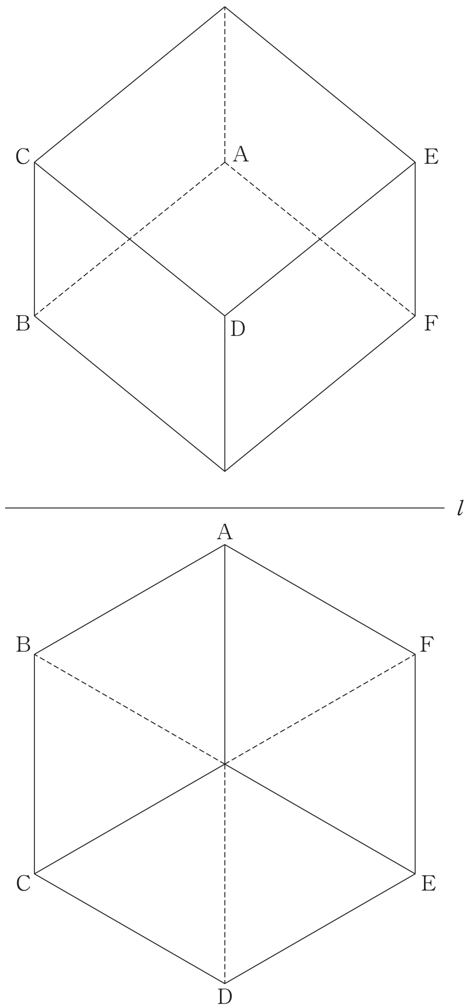
【解答】

「稜」は辺のことである．

(i) 平面図で対称性から，A，C，E および B，D，F それぞれ同じ高さにある．

よって，AC は実長で AC を対角線とする正方形の 1 辺の長さが AB の実長である．

また，AB の実長と対角線 BD の実長を 2 辺とする長方形の対角線の長さが立方体の対角線の実長．これを高さとして，その高さを 3 等分した高さに，A，C，E と B，D，F がある．幅は平面図と同じ．



(ii) AB の平面図上の長さが a だから，正三角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$．この 2 倍 $\sqrt{3}\,a$ が正方形の対角線の長さの実長．よって，正方形の 1 辺つまり立方体の 1 辺の長さは $\dfrac{\sqrt{3}\,a}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$． …(答)

立方体の対角線の長さは $\sqrt{3}\,a$ と $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a$ を 2 辺とする長方形の対角線の長さ．すなわち

$$\sqrt{(\sqrt{3}\,a)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\,a. \quad \cdots(答)$$

（注） 投影図については **'74 年 理科 第 3 問**（注）参照．

1.3　一次試験の導入（1955 年）

1955 年の入試から東大は一次試験を課すようになった．英数国で初年度は 180 分，翌年から 150 分，数学は初年度は「解析Ｉ」と「幾何」から 1 科目選択制，翌年から「解析Ｉ」のみとなる．

穴埋め式の客観式で数学は 20 枠であった．当初記入方式は自由であったように思える．各枠は 5 つのマスに数字または − または / を 1 つずつ入れるようになっていた．分数は 1956 年から真分数表示で分母，分子を / で区切るように指示されていた．記号で答える問題もあった．1965 年以後は記号で答える問題も数字を選択するようになった．最後までマーク式は採用されなかったが，枠を指定しその中に数字または記号を書くようにする方式は採点の効率を考えてのことと思われるが，後の共通一次試験やセンター試験の先駆けになった．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1955〜1958）

客観式の初期には論理の問題が多いというジンクスがある（他大学でも）．東大一次試験の初期には必要十分や論理を問う問題（1955 年 1 次文科幾何Ｉ，1 次理科幾何Ｉ，1956 年 1 次文科Ｉ）が出題されている．

「一般数学」から 1 問選ぶとすれば 1957 年第 3 問の石取りゲームの問題．

このころ　あんなこと・こんなこと

1955 年にはそれまでの左派と右派の社会党が統一され，また自由党と民主党が合併して自由民主党となりいわゆる 55 年体制が出来上がった．

共産党が六全協を開き武装闘争を放棄したのもこの年であった．

流行歌としては「ガード下の靴磨き」(1955 年),「リンゴ村から」(1956 年）など，また，マンボ（1956 年），チャチャチャ（1955 年），ロカビリー（1958 年）がブームになった．

もはや戦後ではない（1956 年）といわれたが，ジラード事件（1957 年），砂川闘争（1957 年）など米軍基地に関る事件が起こった．

プロ野球で西鉄が巨人を破り三連覇（1956 − 58 年）

1958 年には第 3 回アジア大会が東京で開催され，後のオリンピックや万博の前触れとなった．

1955 年　1 次試験（文科・2 科目より 1 科目選択・解析Ⅰ）

Ⅰ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが三点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(-3,\ 0)$，$(1,\ 20)$ を通るならば

$a=\boxed{(1)}$，$b=\boxed{(2)}$，$c=\boxed{(3)}$ である。

従ってグラフが三点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -3\right)$，$(-3,\ -3)$，$(1,\ 17)$ を通る二次函数は，

$y=\boxed{(4)}x^2+\boxed{(5)}x+\boxed{(6)}$ である。

分　野

解析Ⅰ：2 次関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

2 点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(-3,\ 0)$ を通るから

$$y=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+3)$$

と書ける．

点 $(1,\ 20)$ も通るから

$$20=a\left(1+\frac{3}{2}\right)(1+3)=10a.$$

$$\therefore\quad a=2,\quad \therefore\quad y=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+3)=2x^2+9x+9.$$

$$\therefore\quad a=\boxed{2},\quad b=\boxed{9},\quad c=\boxed{9}.$$ …(1)，(2)，(3)

グラフが 3 点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0-3\right)$，$(-3,\ 0-3)$，$(1,\ 20-3)$ を通るから，後者の 2 次関数は前者の 2 次関数から 3 を引いたもの．よって，後者の 2 次関数は

$$y=\boxed{2}x^2+\boxed{9}x+\boxed{6}$$ …(4)，(5)，(6)

Ⅱ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

方程式 $x^2+y^2-6x+8y=0$ が表わす曲線は円でその中心の x 座標は $\boxed{(7)}$，y 座標は $\boxed{(8)}$，半径の長さは $\boxed{(9)}$，この円が x 軸と交わる点を P，Q とするとき線分 PQ の長さは $\boxed{(10)}$，この円の周上の動点から直線 $4x+3y=30$ までの距離の最小値は $\boxed{(11)}$ である。

分　野

解析Ⅰ：円の方程式，点と直線の距離

【解答】

与方程式を変形して

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

よって，中心の x 座標は $\boxed{3}$，y 座標は $\boxed{-4}$，半径の長さは $\boxed{5}$． …(7)，(8)，(9)

x 軸との交点の x 座標は与式に $y=0$ を代入した $x^2-6x=0$ の2解 0，6 である．よって，線分 PQ の長さは $\boxed{6}$． …(10)

中心 $(3,\ -4)$ と直線 $4x+3y=30$ の距離は

$$\frac{|4\cdot3+3(-4)-30|}{\sqrt{4^2+3^2}}=6$$

だから，円周上の点から直線 $4x+3y=30$ までの距離の最小値は

$$6-5=\boxed{1}.$$ …(11)

（注） 当時の教科書では距離の公式は「幾何」の研究にあるので，「解析Ⅰ」で解くなら中心 $(3,\ -4)$ から $4x+3y=30$ へ下した垂線の足 $\left(\frac{39}{5},\ -\frac{2}{5}\right)$ を求めて，それを使って距離を求めるのが正攻法か．

Ⅲ

$a>b$ なる任意の正数 a，b に対して，次の各不等式が

常に成り立つならば　A，

常に成り立たないならば　B，

成り立つときもあり，成り立たないときもあるならば　C，

とそれぞれ答案用紙の所定の欄（省略）に記入せよ。

(12) $\dfrac{2a+b}{a+2b}>\dfrac{a}{b}$，　(13) $a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$，　(14) $\sqrt{\dfrac{b^2+1}{a^2+1}}>\dfrac{b}{a}$

分野

解析Ⅰ：分数不等式

【解答】

(12) $\dfrac{2a+b}{a+2b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)}$.

$0<b<a$ だから，この式は常に負で，$\dfrac{2a+b}{a+2b}<\dfrac{a}{b}$ が常に成り立つことになり，与不等式は $\boxed{\text{常に成り立たない}}$． …(12)＝B

(13) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(b+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{(a-b)(ab-1)}{ab}$.

$0<b<a$ について，与不等式は $a=2$，$b=1$ のとき成り立つが，$a=0.5$，$b=0.3$ のときは成り立たない．よって，$\boxed{\text{成り立つときもあり，成り立たないときもある}}$． …(13)＝C

(14) $\dfrac{b^2+1}{a^2+1}-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2(a^2+1)}$.

$0<b<a$ だから，この式は常に正で，与不等式は $\boxed{\text{常に成り立つ}}$． …(14)＝A

（注） 問題文中の（省略）は旺文社の編集者が記入したものと思われるが，ここでも答案用紙を提示していないのでそのまま記した．以下の問題でも，また，'56 年以後は聖文社の原稿を参照しているが同様にした．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

2^{45} は $\boxed{(15)}$ 桁の数である。

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{15}$ を小数で表わせば，小数第 $\boxed{(16)}$ 位に初めて 0 でない数字が現われる。

$(\cos 45^\circ)^{25}$ を小数で表わせば，小数第 $\boxed{(17)}$ 位に初めて 0 でない数字が現われる。

但し，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

分 野

解析 I ：対数，桁

【解答】

$$\log_{10} 2^{45} = 45 \log_{10} 2 = 45 \times 0.3010 = 13.5450.$$

よって，2^{45} は $\boxed{14}$ 桁の数である． …(15)

$$\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{15} = -15(1 - \log_{10} 2) = -15 \times 0.6990 = -10.4850.$$

よって，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{15}$ を小数で表せば，小数第 $\boxed{11}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる． …(16)

$$(\cos 45^\circ)^{25} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{25} = 2^{-\frac{25}{2}},$$

$$\log_{10} 2^{-\frac{25}{2}} = -\frac{25}{2} \log_{10} 2 = -\frac{25}{2} \times 0.3010 = -3.7625.$$

よって，$(\cos 45^\circ)^{25}$ を小数で表せば，小数第 $\boxed{4}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる． …(17)

Ⅴ

$\sin(90^\circ + \theta) = \boxed{(18)}\,\theta \qquad \cos(\theta - 90^\circ) = \boxed{(19)}\,\theta \qquad \tan(180^\circ - \theta) = \boxed{(20)}\,\theta$

上の $\boxed{}$ にはそれぞれ下記のもののうちどれを入れればよいか。

A．sin　B．cos　C．tan　D．cot　E．$-$sin　F．$-$cos　G．$-$tan　H．$-$cot

分 野

解析 I ：三角関数

【解答】

$$\sin(90^\circ + \theta) = \boxed{\cos}\,\theta. \qquad \cdots(18) = \mathrm{B}$$

$$\cos(\theta - 90^\circ) = \boxed{\sin}\,\theta. \qquad \cdots(19) = \mathrm{A}$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \boxed{-\tan}\,\theta. \qquad \cdots(20) = \mathrm{G}$$

1955 年　1 次試験（文科・2 科目より 1 科目選択・幾何）

I

四角形に関する四組の条件が下に書いてある。右側の条件が，対応する左側の条件の

必要十分条件ならば　A

必要条件であるが十分条件ではないならば　B

十分条件ではあるが必要条件ではないならば　C

必要条件でも十分条件でもないならば　D

とそれぞれ答案用紙の所定の欄（省略）に記入せよ。

(1)	台形である	円に内接する
(2)	対角線が互に他を二等分する	長方形である
(3)	等脚台形である	対角線の長さが等しい
(4)	対角線の長さが等しい平行四辺形である	長方形である

分　野

幾何：必要十分

【解答】

(1)　台形であって円に内接しないものも，円に内接し台形でないものもあるから，円に内接することは台形であるためには $\boxed{\text{必要条件でも十分条件でもない}}$．　…(1)＝D

(2)　長方形の対角線は互に他を二等分するが，対角線が互に他を二等分するのは平行四辺形だから，長方形であることは対角線が互に他を二等分するための $\boxed{\text{十分条件であるが必要条件ではない}}$．　…(2)＝C

(3)　等脚台形の対角線の長さは等しいが，対角線の長さが等しい等脚台形でない四角形は存在する．よって，対角線の長さが等しいことは等脚台形であるための $\boxed{\text{必要条件であるが十分条件ではない}}$．…(3)＝B

(4)　長方形は対角線の長さが等しく平行四辺形であり，平行四辺形で対角線の長さが等しいのは長方形である．よって，長方形であることは対角線の長さが等しい平行四辺形であるための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ である．　…(4)＝A

Ⅱ

下の図の四辺形 PQRS は等脚台形で PS＝3，PQ＝5，$\angle PSQ=90°$ である。

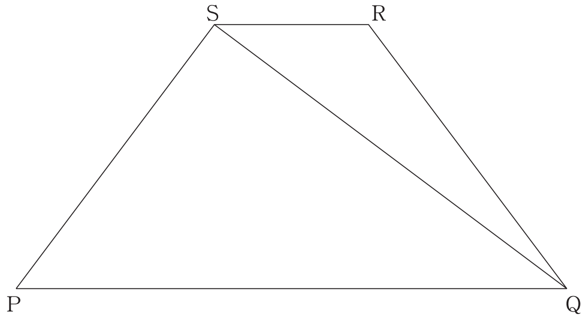
(5) RS の長さ

(6) この台形の面積

(7) PS，QR の延長の交点を T とするとき，ST の長さ

(8) △TSR の面積

はそれぞれ次に書かれたどれに等しいか。またはどれにほぼ等しいか。



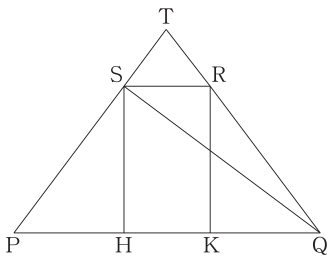
A．6.54　B．7.68　C．2.8　D．1.4　E．1.17　F．2.35

G．0.75　H．0.65　I．0.84　J．1.3　K．15.36

分野

幾何：図形計量

【解答】



(5) S，R から辺 PQ へ下した垂線の足をそれぞれ H，K とする．

$\angle PSQ=90°$ から $\triangle PQS \backsim \triangle PSH$（2 角相等）．

$$\therefore\quad PQ:PS=PS:PH.\quad PH=\frac{PS^2}{PQ}=\frac{9}{5}.$$

PQRS は等脚台形だから，$\triangle PSH\equiv\triangle QRK$．

よって，$QK=\dfrac{9}{5}$．

$$\therefore\quad RS=HK=PQ-PH-QK=5-\frac{9}{5}-\frac{9}{5}=\frac{7}{5}=\boxed{1.4}.\qquad \cdots(5)=D$$

(6) $SH=\sqrt{PS^2-PH^2}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{9}{5}\right)^2}=\dfrac{12}{5}.$

$$\therefore\quad 台形\ PQRS=\frac{1}{2}(RS+PQ)SH=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{5}+5\right)\frac{12}{5}=\frac{192}{25}=\boxed{7.68}.\qquad \cdots(6)=B$$

(7) $PQ:SR=5:\dfrac{7}{5}=25:7$ であるから，$TP:TS=25:7$．

また，PS＝3 であるから，

$$ST=\frac{7}{25-7}PS=\frac{7}{6}=1.1\dot{6}\fallingdotseq\boxed{1.17}.\qquad \cdots(7)=E$$

(8) (△TSR の高さ)：$SH=7:25-7=7:18$ だから (△TSR の高さ)$=\dfrac{7}{18}\cdot\dfrac{12}{5}=\dfrac{14}{15}$

$$\therefore\quad \triangle TSR=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\cdot\frac{14}{15}=\frac{49}{75}=0.65\dot{3}\fallingdotseq\boxed{0.65}.\qquad \cdots(8)=H$$

Ⅲ

一平面上において，M，N を二つの定点，P をこの平面上の動点，k を与えられた正の定数とするとき，

(9) PM＋PN＝k を満足する点 P の軌跡（但し MN＜k）

(10) $PM^2+PN^2=k^2$ を満足する点 P の軌跡（但し $MN<\sqrt{2}k$）

(11) PM～PN＝k を満足する点 P の軌跡（但し k＜MN）

(12) $\dfrac{PM}{PN}=k$ を満足する点 P の軌跡（但し $k\neq1$）

はそれぞれ次にあげたどの図形か。

A．直線　B．半直線　C．二つの直線　D．円　E．半円　F．放物線
G．楕円　H．双曲線

分　野

幾何：軌跡

【解答】

(9) PM＋PN＝k となる点の軌跡は，M，N を焦点とし，長軸の長さが k の $\boxed{\text{楕円}}$ である．　…(9)＝G

(10) 線分 MN の中点を O とすると中線定理から

$$PM^2+PN^2=2(PO^2+OM^2)=k^2. \quad \therefore \quad PO^2=\frac{k^2}{2}-\frac{MN^2}{4}.$$

よって，OP は一定値（$MN<\sqrt{2}k$ から正数）である．よって，P の軌跡は$\left(\text{半径が } \dfrac{\sqrt{2k^2-MN^2}}{2} \text{ の}\right)$ $\boxed{\text{円}}$ である．　…(10)＝D

(11) PM～PN＝k となる点の軌跡は，M，N を焦点とし，主軸の長さが k の $\boxed{\text{双曲線}}$ である．　…(11)＝H

(12) $\dfrac{PM}{PN}=k$ のとき，PM：PN＝k：1 である．よって，P の軌跡はアポロニウスの $\boxed{\text{円}}$ である．

…(12)＝D

（注） (11) において，x～y は x と y の差の絶対値を表す記号である．

Ⅳ

（文科・解析Ⅰ　Ⅱと同じ）（(7)(8)(9)(10)(11) → (13)(14)(15)(16)(17)）

Ⅴ

（文科・解析Ⅰ　Ⅴと同じ）

（注） 解析Ⅰと幾何で共通問題があるということは，今（2020）から考えると奇妙に思えるかもしれないが，当時の科目は「解析Ⅰ」，「解析Ⅱ」，「幾何」，「一般数学」のうち１科目を修得すれば卒業単位を取得できる仕組みになっていた．そのために，相互に共通部分が存在した．特に平面座標，三角比，三角関数に関しては複雑に入り組んでいた．

基本的な問題は解析Ⅰと幾何の両方に属すると考えられていたようである．

1955 年　1 次試験（理科・2 科目より 1 科目選択・解析 I）

I

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

整式 ax^3+bx^2+cx+d を x^2-1 で割ると $6x+2$ 余り，x^2+1 で割ると $2x+8$ 余るならば，

$$a=\boxed{(1)},\quad b=\boxed{(2)},\quad c=\boxed{(3)},\quad d=\boxed{(4)}$$

である。

分　野

解析 I ：整式の割り算

【解答】

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく．$f(x)$ を x^2+1 で割ると，$2x+8$ 余るから

$$f(x)=(ax+e)(x^2+1)+2x+8 \qquad \cdots①$$

とおける．

$f(x)$ を x^2-1 で割ると，$6x+2$ 余るから，$f(1)=8$，$f(-1)=-4$．① に代入して，

$$f(1)=2(a+e)+10=8,\quad f(-1)=2(-a+e)+6=-4.\quad \therefore\quad a+e=-1,\quad -a+e=-5.$$

$$\therefore\quad a=2,\quad e=-3.$$

① に代入して

$$f(x)=(2x-3)(x^2+1)+2x+8=2x^3-3x^2+4x+5.$$

$$\therefore\quad a=\boxed{2},\quad b=\boxed{-3},\quad c=\boxed{4},\ d=\boxed{5}. \qquad \cdots(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

II

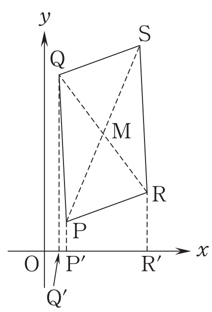
次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

座標面上に三点 P(3, 4)，Q(2, 24)，R(14, 8) が与えられている。線分 PQ，PR を二辺とする平行四辺形の第四の頂点を S とすれば，S の x 座標は $\boxed{(5)}$，y 座標は $\boxed{(6)}$，対角線の交点の x 座標は $\boxed{(7)}$，y 座標は $\boxed{(8)}$，対角線 PS の長さは $\boxed{(9)}$，この平行四辺形 PRSQ の面積は $\boxed{(10)}$ である。

分　野

解析 I ：平面座標

【解答】



S の x 座標は

$$(\text{Q の } x \text{ 座標})+(\text{R の } x \text{ 座標})-(\text{P の } x \text{ 座標})=2+14-3=\boxed{13}. \qquad \cdots(5)$$

S の y 座標は

$$(\text{Q の } y \text{ 座標})+(\text{R の } y \text{ 座標})-(\text{P の } y \text{ 座標})=24+8-4=\boxed{28}. \qquad \cdots(6)$$

対角線の交点を M とすると，M は QR の中点だから

$$\mathrm{M}\left(\frac{2+14}{2},\ \frac{24+8}{2}\right)=(\boxed{8},\ \boxed{16}). \qquad \cdots(7),\ (8)$$

$$(\text{PS の長さ})=\sqrt{(13-3)^2+(28-4)^2}=\boxed{26}. \qquad \cdots(9)$$

P，Q，R から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ P′，Q′，R′ とおくと，

$$\text{平行四辺形 PQSR}=2\triangle\text{PQR}=2(\text{台形 Q′QRR′}-\text{台形 Q′QPP′}-\text{台形 P′PR′R})$$

$$=(24+8)(14-2)-(24+4)(3-2)-(4+8)(14-3)=\boxed{224}. \quad \cdots(10)$$

（注）　今日（2020）ならベクトルの易問になるであろう．（当時ベクトルは教科書にない．）

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PR},\quad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR})$$

から S，M の座標は容易に導かれる．また $PS=|\overrightarrow{PS}|$ であるし，$\overrightarrow{PQ}=(-1,\ 20)$，$\overrightarrow{PR}=(11,\ 4)$ から，

$$\text{平行四辺形 PQSR}=|-1\times4-20\times11|$$

である．

Ⅲ

不等式 $\boxed{(11)}<\boxed{(12)}<\boxed{(13)}<\boxed{(14)}<\boxed{(15)}$ が成り立つように，次の各数値をならべるとき，$\boxed{}$ の中にはそれぞれどれを入れればよいか。

A．$\dfrac{3}{2}$　B．$\log_3 0.6$　C．$\log_2\sqrt[3]{24}$　D．$\log_4 5$　E．$\log_5 4$

分　野

解析Ⅰ：対数

【解答】

まず，0，1 との大小を比較．

負のもの：B．$\log_3 0.6$．

0 と 1 の間のもの：E．$\log_5 4$，

1 より大きいもの：A．$\dfrac{3}{2}$，C．$\log_2\sqrt[3]{24}$，D．$\log_4 5$．

$$\frac{3}{2}-\log_2\sqrt[3]{24}=\frac{1}{6}(9-2\log_2 24)=\frac{1}{6}\{9-2(3+\log_2 3)\}=\frac{1}{6}(3-2\log_2 3)=\frac{1}{6}(\log_2 8-\log_2 9)<0.$$

$$\frac{3}{2}-\log_4 5=\frac{1}{2}(3-\log_4 25)=\frac{1}{2}(\log_2 8-\log_2 5)>0.$$

以上から

$$\boxed{\log_3 0.6}<\boxed{\log_5 4}<\boxed{\log_4 5}<\boxed{\frac{3}{2}}<\boxed{\log_2\sqrt[3]{24}}.$$

…(11)＝B，(12)＝E，(13)＝D，(14)＝A，(15)＝C

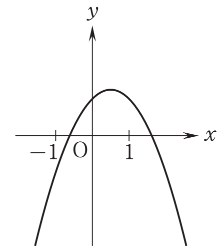
Ⅳ

次の A 図から E 図までの五つの図はいずれも次の二次函数のどれかのグラフである。

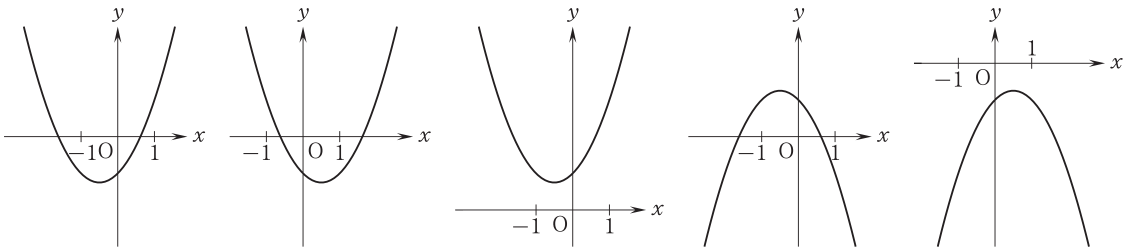
（i）$y=-ax^2-bx-c$　（ii）$y=ax^2-bx+c$

（iii）$y=-ax^2+bx+c$　（iv）$y=ax^2+bx-c$　（v）$y=cx^2+bx+a$

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが次の図のようになるとして次の $\boxed{}$ をみたせ。



(i) のグラフは $\boxed{(16)}$ 図，
(ii) のグラフは $\boxed{(17)}$ 図，
(iii) のグラフは $\boxed{(18)}$ 図，
(iv) のグラフは $\boxed{(19)}$ 図，
(v) のグラフは $\boxed{(20)}$ 図
である。



A 図　B 図　C 図　D 図　E 図

分　野

解析Ⅰ：2 次関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

(i)　$y=ax^2+bx+c$ に対して $y=-ax^2-bx-c$ のグラフは x 軸について対称移動したものである．
与えられたグラフの中でこれに該当するのは $\boxed{\text{B}}$ 図．…(16)

(ii)　$y=ax^2+bx+c$ に対して $y=ax^2-bx+c$ のグラフは y 軸について対称移動したものである．
与えられたグラフの中でこれに該当するのは $\boxed{\text{D}}$ 図．…(17)

(iii)　$y=ax^2+bx+c$ において，グラフは上に凸だから $a<0$，軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$ は $x>0$ の部分にあるから，$b>0$，y 切片 c は正の部分にあるから $c>0$．

$y=-ax^2+bx+c$ のグラフは下に凸で，軸 $x=\dfrac{b}{2a}$ は $x<0$ の部分にあり，y 切片は $c>0$．
与えられたグラフの中でこれに該当するのは $\boxed{\text{C}}$ 図．…(18)

(iv)　$y=ax^2+bx-c$ のグラフは $y=ax^2+bx+c$ のグラフを y 軸方向に $-2c$ だけ平行移動したものである．
与えられたグラフの中でこれに該当するのは $\boxed{\text{E}}$ 図．…(19)

(v)　$y=cx^2+bx+a$ のグラフは $c>0$ から下に凸，軸 $x=-\dfrac{b}{2c}$ は $x<0$ の範囲にあり，y 切片 a は負である．
与えられたグラフの中でこれに該当するのは $\boxed{\text{A}}$ 図．…(20)

(注)　(iii), (iv) のグラフは選択肢の中から選べばそれぞれ，C 図，E 図しかない．しかしこれらが C 図，E 図のように x 軸と交わらないことは与えられた式からは導かれない．

1955 年　１次試験（理科・２科目より１科目選択・幾何）

I

下の欄に書かれた右側の条件が，対応する左側の条件の

必要十分条件ならば　A

必要条件ではあるが十分条件ではないならば　B

十分条件であるが必要条件ではないならば　C

必要条件でも十分条件でもないならば　D

とそれぞれ答案用紙の所定の欄（省略）に記入せよ。

(1)	一つの三角形の三辺を a，b，c とするとき	
	$a^2+b^2=c^2$.	この三角形は c を斜辺とする直角三角形である。
(2)	△PQS において	
	∠P＜∠Q＜∠S.	PQ＞SP＞QS.
(3)	四角形が	
	円に内接する。	円に外接する。
(4)	平面上の相異なる四点 P，Q，R，S が同一直線上にないとき，	
	PQ＝SR，かつ QR＝PS.	PQ∥SR かつ QR∥PS.
(5)	a，b，c を三つの正数とするとき，	
	$b+c>a$.	三辺の長さがそれぞれ a，b，c に等しい三角形を作ることができる。

分　野

幾何：必要条件・十分条件，平面図形

【解答】

(1)　三角形の３辺の長さが a，b，c のとき，$a^2+b^2=c^2$ ならばその三角形は c を斜辺とする直角三角形であり，三角形が c を斜辺とする直角三角形のとき，$a^2+b^2=c^2$ であるから，

c を斜辺とする直角三角形であることは，$a^2+b^2=c^2$ であるための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ である．…(1)＝A

(2)　△PQS において，辺の大小と対角の大小は一致するから，∠P＜∠Q＜∠S なら QS＜SP＜PQ であり，PQ＞SP＞QS なら ∠S＞∠Q＞∠P であるから，PQ＞SP＞QS であることは，∠P＜∠Q＜∠S であるための $\boxed{\text{必要十分条件}}$ である．…(2)＝A

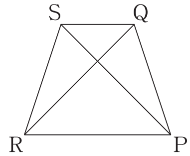
(3)　四角形が円に内接する条件は内対角の和が 180° であることであり，外接する条件は対辺の和が等しいことである．

内対角の和が 180° で対辺の長さの和が異なる四角形（例えば正方形でない長方形）が存在する一方，対辺の長さの和が等しくて内対角の和が 180° でない四角形（例えば正方形でない菱形）が存在するから，円に内接して，外接しない四角形も，円に外接して，内接しない四角形も存在する．

したがって，四角形が円に外接することは，四角形が円に内接するための

$\boxed{\text{必要条件でも十分条件でもない}}$．…(3)＝D

(4)　PQ∥SR かつ QR∥PS ならば PQRS は平行四辺形になり PQ＝SR，かつ QR＝PS になるが，例えば PR∥QS の等脚台形 PQSR についても，PQ＝SR，かつ QR＝PS となるから逆はいえない．



したがって，PQ∥SR かつ QR∥PS であることは，PQ=SR，かつ QR=PS であるための $\boxed{\text{十分条件であるが必要条件ではない}}$ …(4)=C

(5) 3辺の長さがそれぞれ a，b，c に等しい三角形を作ることができる条件は $b+c>a$，$c+a>b$，$a+b>c$ であるから，三角形を作ることができるなら $b+c>a$ であるが，$b+c>a$ であっても $b=5$，$c=1$，$a=2$ のときのように三角形が作れないこともある．

よって，3辺の長さがそれぞれ a，b，c に等しい三角形を作ることができることは $b+c>a$ であるための $\boxed{\text{十分条件であるが必要条件ではない}}$． …(5)=C

Ⅱ

（理科・解析Ⅰ　Ⅱと同じ）((5)(6)(7)(8)(9)(10) → (6)(7)(8)(9)(10)(11))

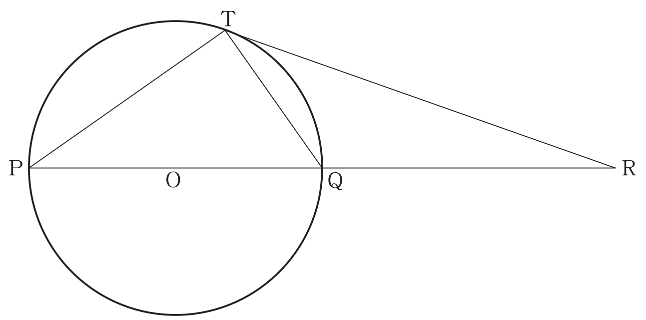
Ⅲ

下の図のように円Oの直径PQのQをこえた延長上にPQに等しくQRをとり，Rから円Oに一つの接線をひきその接点をTとする。PQ=1 とすれば

(12) RTの長さ　(13) PT：QT の値　(14) PTの長さ

(15) QTの長さ　(16) △PTRの面積

はそれぞれ次のどれであるか。



A. $\sqrt{5}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{\dfrac{2}{5}}$　E. $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$　F. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

G. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　H. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$　I. $\dfrac{1}{2}$　J. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　K. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

分野

幾何：方べきの定理，接弦定理

【解答】

(12) PQ=1 から，QR=1，PR=2．方べきの定理から，

$$RT^2=RP\cdot RQ=2.\quad \therefore\quad RT=\boxed{\sqrt{2}}.$$ …(12)=C

(13) 接弦定理から，∠RTQ=∠RPT．△PRT と △TRQ において2角が等しいから △PRT∽△TRQ．相似比は RT：RQ=$\sqrt{2}$：1．

よって，PT：TQ=$\sqrt{2}$：1．比の値は $\boxed{\sqrt{2}}$． …(13)=C

(14) $TQ=\dfrac{PT}{\sqrt{2}}$ で $PT^2+TQ^2=PQ^2=1$ だから，

$$\mathrm{PT}^2+\frac{\mathrm{PT}^2}{2}=\frac{3}{2}\mathrm{PT}^2=1. \quad \therefore \quad \mathrm{PT}=\boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$ …(14)＝H

(15)　$\mathrm{QT}=\frac{\mathrm{PT}}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$. …(15)＝F

(16)　△PTQ と △RTQ は底辺と高さが等しいから面積は等しい．

$$\triangle\mathrm{PTR}=2\triangle\mathrm{PQT}=2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{PT}\cdot\mathrm{QT}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}.$$ …(16)＝J

（注）　比 $a:b$ に対し，$\frac{a}{b}$ を「比の値」という．したがって，(13) の「PT：QT の値」とは「$\frac{\mathrm{PT}}{\mathrm{QT}}$」のことである．

Ⅳ

直交する二定直線 a，b が決定する平面上で

(17)　a，b までの距離の二乗の差が正の一定値であるような点の軌跡

(18)　a，b までの距離の二乗の和が正の一定値であるような点の軌跡

(19)　a，b までの距離の和が正の一定値であるような点の軌跡

(20)　a，b までの距離の積が正の一定値であるような点の軌跡

はそれぞれ次にあげたどの図形か。

A．直線	B．二つの半直線	C．二つの直線	D．正方形の四辺
E．円	F．半円周	G．放物線	H．二つの放物線
I．楕円	J．双曲線	K．二つの双曲線	

分　野

幾何：軌跡

【解答】

直交する 2 直線を x 軸，y 軸にとると，2 直線までの距離は $|x|$，$|y|$ である．

(17)　2 直線までの距離の 2 乗の差 x^2-y^2 が正の一定値 k であるような点の軌跡は $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{k}=1$ つまり $\boxed{\text{双曲線}}$ である． …(17)＝J

（注）　問題文の「差」を $|x^2-y^2|$ と読む可能性がある．このように解釈すると (17) は $\boxed{\text{二つの双曲線}}$ ということになる．ただし，そのように解釈すると，後続の「正の」が意図不明になるので解答のようにした．

(18)　2 直線までの距離の 2 乗の和 x^2+y^2 が正の一定値 k であるような点の軌跡は $x^2+y^2=k$ つまり $\boxed{\text{円}}$ である． …(18)＝E

(19)　2 直線までの距離の和 $|x|+|y|$ が正の一定値 k であるような点の軌跡は $|x|+|y|=k$ つまり $\boxed{\text{正方形}}$ である． …(19)＝D

(20)　2 直線までの距離の積 $|x||y|$ が正の一定値 k であるような点の軌跡は $|xy|=k$ つまり $xy=\pm k$ となり，これは $\boxed{\text{二つの双曲線}}$ である． …(20)＝K

1955 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析 I）

第 1 問

任意の実数 x，y に対して，不等式

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$$

がつねに成り立つために定数 a，b の満足すべき条件を求めよ。

分　野

解析 I：2 次不等式

考え方

x について平方完成し，さらに残った項を y について整理する．

【解答】

$$x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b=(x+2y+5)^2+(a-20)y+b-25.$$

任意の実数 x に対する最小値は $(a-20)y+b-25$.

y を変化させるとき，$a \fallingdotseq 20$ とすると，十分大きな y または十分小さな y に対してこの式の値は負になってしまうから，$a=20$ でなければならない．

このとき最小値 $b-25$ は正であるから $b>25$.

よって，求める条件は

$$a=20,\quad b>25. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問

二つの二次方程式

$$x^2+x\cos\theta+\sin\theta=0,$$
$$x^2+x\sin\theta+\cos\theta=0$$

が少くとも一つの実根を共有するとき，θ の値を求めよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

分　野

解析 I：2 次方程式，三角関数

考え方

2 式を引き算して，x^2 の項を消去すると，共通解または係数についての条件が導かれる．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

$$\begin{cases} x^2+x\cos\theta+\sin\theta=0, & \cdots① \\ x^2+x\sin\theta+\cos\theta=0 & \cdots② \end{cases}$$

とおく．

①−② から

$$(\cos\theta-\sin\theta)(x-1)=0.$$

よって，$\sin\theta=\cos\theta$ または $x=1$.

(i)　$\sin\theta=\cos\theta$ のとき，$\tan\theta=1$ だから $\theta=45°$ または $\theta=225°$．このとき，①，② は一致する．

$\theta=45°$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$．(判別式)$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\sqrt{2}}<0$ だから実数解をもたない．

$\theta=225^\circ$ のとき，$x^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$．(判別式)$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{\sqrt{2}}>0$ だから実数解をもつ．

(ii) $x=1$ のとき，$1+\sin\theta+\cos\theta=0$.

よって，$\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)=-1$.

よって，$\theta+45^\circ=225^\circ$ または 315°.

よって，$\theta=180^\circ$ または 270°.

よって，

$$\theta=180^\circ,\quad 225^\circ,\quad 270^\circ. \qquad \cdots(答)$$

(注) 合成公式は解析Ⅱの範囲だったので(ii)を解析Ⅰの範囲で解くなら以下のようである．

$\sin\theta=-(\cos\theta+1)\ (\leqq 0)$ より $180^\circ\leqq\theta<360^\circ$．これを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して，

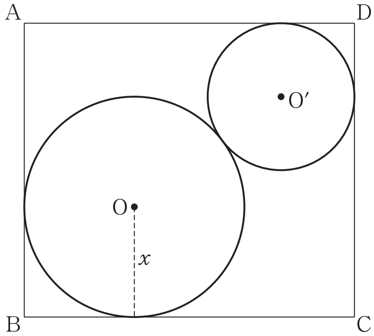
$$2\cos^2\theta+2\cos\theta=0.\quad \therefore\quad \cos\theta=0,\ -1.\quad \therefore\quad \theta=180^\circ,\ 270^\circ.$$

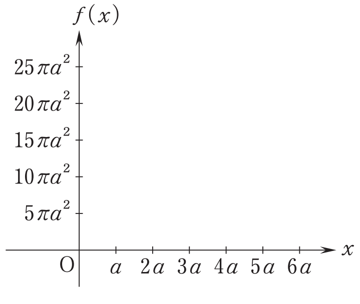
また $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおいて単位円と直線 $x+y+1=0$ の交点の位置からも $\theta=180^\circ$，270° が求められる．

第 3 問

図のように長方形ABCDの中にたがいに外接する二円O，O′があって，円OはABとBCに接し，円O′はADとDCに接する。このとき，二円の面積の和を円Oの半径 x の函数 $f(x)$ と考えてそのグラフをえがきその函数の最大値と最小値を求めよ。

ただし，$AB=8a$，$BC=9a$ とする。





注意。$f(x)$ のグラフをえがくのには，左図のような座標軸を答案用紙に写しとって用いよ。

分 野

解析Ⅰ：2次関数，平面図形

考え方

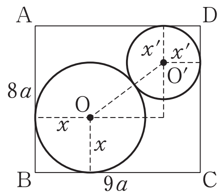
2つの円の中心を頂点とする直角三角形を考える．縦横の辺の長さは外側の長方形の縦横から2つの円の半径を引いたものであり，2円の中心を結ぶ線分の長さは半径の和であることから2円の半径の関係が

導かれる．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

2円の中心O，O′を斜辺の両端とし，長方形の辺に平行な辺をもつ直角三角形を考える．円O′の半径を x' とすると，斜辺OO′の長さは $x+x'$ であり，底辺の長さは $9a-x-x'$，高さは $8a-x-x'$ であるから，



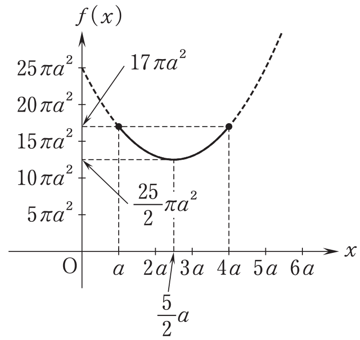
$$(x+x')^2=(9a-x-x')^2+(8a-x-x')^2.$$
$$\therefore\quad (x+x')^2-34a(x+x')+145a^2=0.$$
$$\therefore\quad (x+x'-5a)(x+x'-29a)=0.$$

$x+x'<8a$ であるから $x+x'=5a$.

$x'\leqq 4a$，$x\leqq 4a$ であるから，$a\leqq x\leqq 4a$

2円の面積の和は

$$\begin{aligned} f(x)&=\pi x^2+\pi x'^2=\pi\{x^2+(5a-x)^2\}\\ &=\pi(2x^2-10ax+25a^2)\\ &=\pi\left\{2\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2+\frac{25}{2}a^2\right\}. \end{aligned}$$



最大値は $f(a)=f(4a)=17a^2\pi$，最小値は $\dfrac{25}{2}a^2\pi$ である．…(答)

1955 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析Ⅱ）

第 1 問

次の函数のグラフをえがけ。

（i）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}$，ただし，$x\neq 0$ とする。

（ii）$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}$

分　野

解析Ⅱ：関数の極限

考え方

（i）x^n を含む分数の極限では $|x|>1$ のときと $|x|<1$ のときで場合分けして考える．

（ii）n の係数 $\sin^2\pi x=0$ のときとそうでないときで場合分けする．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\lim\limits_{n\to\infty}$ は n が整数値をとって ∞ になると解釈する．

（i）(a)　$|x|>1$ のとき，

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+x^{-2n-1}}{1+x^{-2n}}=x.$$

(b)　$x=1$ のとき，

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+1^{-n-1}}{1^n+1^{-n}}=1.$$

(c)　$x=-1$ のとき，

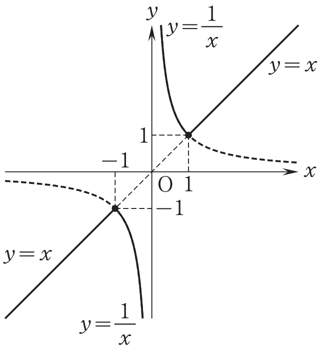
$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}+(-1)^{-n-1}}{(-1)^n+(-1)^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1+(-1)^{-2n-1}}{1+(-1)^{-2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1-1}{1+1}=-1.$$

(d)　$0<|x|<1$ のとき，

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}+1}{x^{2n+1}+x}=\frac{1}{x}.$$

以上から $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}$ のグラフは右図．



…(答)

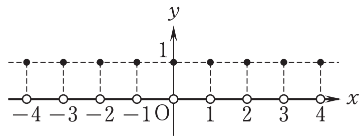
（ii）(ア)　$\sin\pi x\neq 0$ のとき，すなわち x が整数でないとき，

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sin^2\pi x+\dfrac{1}{n}\cos^2\pi x}=0.$$

(イ)　$\sin\pi x=0$ のとき，すなわち x が整数のとき，$\cos\pi x=\pm 1$.

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos^2\pi x}=1.$$

以上から $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}$ のグラフは下図太線部と黒丸．白丸は除く．



…(答)

第 2 問

直交座標に関し，四点 O(0, 0)，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を頂点とする正方形がある。$x>0$，$y>0$，$xy=2$ となるように二点 P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ y)$ をとるとき，△OPQ と正方形 OABC との共通部分の面積の最大値を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：平面座標，最大値

考え方

P が OA 上にあるときと，P，Q がともに正方形の外部にあるとき，Q が OC 上にあるときに分ける．

【解答】

直線 PQ の方程式を XY 平面上で考えると $\dfrac{X}{x}+\dfrac{Y}{y}=1$.

直線 $X=1$ との交点は $\left(1,\ y\cdot\dfrac{x-1}{x}\right)=\left(1,\ \dfrac{2(x-1)}{x^2}\right)$. これを R とおく．

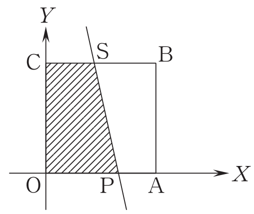
直線 $Y=1$ との交点は $\left(x\cdot\dfrac{y-1}{y},\ 1\right)=\left(\dfrac{x(2-x)}{2},\ 1\right)$. これを S とおく．

(i)　$0<x\leqq 1$ のとき，P は OA 上にあり，$y>1$ だから，共通部分は

$$台形\ \mathrm{OPSC}=\frac{1}{2}(\mathrm{OP}+\mathrm{CS})\mathrm{OC}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x(2-x)}{2}\right)\cdot 1$$

$$=-\frac{1}{4}\{(x-2)^2-4\}.$$

よって，$x=1$ で最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．



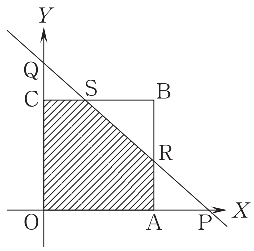
(ii)　$1<x<2$ のとき，P，Q は正方形の外にあり，

$$1-\frac{2(x-1)}{x^2}=\frac{x^2-2x+2}{x^2}>0,$$

$$1-\frac{x(2-x)}{2}=\frac{x^2-2x+2}{2}>0.$$

よって，B は直線 PQ より上にあり，

$$\mathrm{BR}=\frac{x^2-2x+2}{x^2},\quad \mathrm{BS}=\frac{x^2-2x+2}{2}.$$



$$\therefore\quad \triangle\mathrm{BRS}=\frac{(x^2-2x+2)^2}{4x^2}=\frac{1}{4}\left(x-2+\frac{2}{x}\right)^2.$$

$$\left(x+\frac{2}{x}\right)'=1-\frac{2}{x^2}$$

より，$x-2+\dfrac{2}{x}$ は $x=\sqrt{2}$ で最小値 $2\sqrt{2}-2\ (>0)$ をとる．

よって，

$$\frac{1}{4}(2\sqrt{2}-2)^2=3-2\sqrt{2}\leqq\triangle\mathrm{BRS}<\frac{1}{4}.$$

よって，

$$\frac{3}{4}<\text{五角形 OARSC}\leqq 2\sqrt{2}-2.$$

(iii) $x\geqq 2$ のとき，$y=x$ で対称移動すれば，$0<x\leqq 1$ の場合と同じになるから共通部分の面積の最大値は $\frac{3}{4}$.

以上から求める共通部分の面積の最大値は $2\sqrt{2}-2$. …(答)

【別解】

$X=1$，$Y=1$ と PQ：$\frac{X}{x}+\frac{Y}{y}=1$ との交点をそれぞれ R，S とすると

$$\mathrm{R}\left(1,\ y\frac{x-1}{x}\right),\quad \mathrm{S}\left(x\frac{y-1}{y},\ 1\right).$$

(i) $0<x\leqq 1$ のとき，P の X 座標は x，S の X 座標は

$$x\left(1-\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{2}(2x-x^2)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}.$$

よって，P，S の X 座標はともに x について増加する．

よって，台形 OPSC の面積も増加する．したがって，この範囲では $x=1$ のとき最大値 $\frac{3}{4}$ をとる．

(ii) $x>1$，$y>1$ のとき，

$$1-\frac{y(x-1)}{x}=\frac{x+y-2}{x},\quad 1-\frac{x(y-1)}{y}=\frac{x+y-2}{y}.$$

相加平均・相乗平均の関係から，$x+y-2\geqq 2\sqrt{xy}-2=2\sqrt{2}-2>0$.

B は PQ より上側にあり，$\mathrm{BR}=\frac{x+y-2}{x}$，$\mathrm{BS}=\frac{x+y-2}{y}$.

よって，共通部分は五角形 OARSC.

$$\triangle\mathrm{BRS}=\frac{(x+y-2)^2}{2xy}=\frac{(x+y-2)^2}{4}\geqq\frac{(2\sqrt{2}-2)^2}{4}=3-2\sqrt{2}.$$

よって，共通部分の面積の最大値は（$x=y=\sqrt{2}$ のとき）

$$1-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2.$$

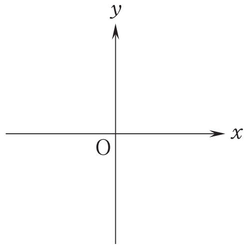
以下**【解答】**と同様.

第3問

下の図のようにとった直交軸に関し，

直線 $y=x$ より上，
曲線 $y=x^3$ より下，
直線 $x=a$ より左

にある平面の部分の面積を求め，それを a の関数と考えてそのグラフをえがけ。



分　野

解析Ⅱ：整式の積分

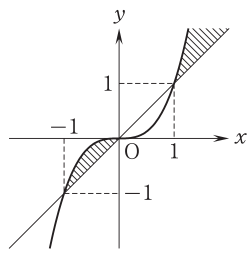
考え方

まず図を描いて考えること．$y>x$，$y<x^3$ の部分が2つの部分からなり，a の変化によって場合分けされる．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$y>x$，$y<x^3$ を図示すると右図．この部分を D とする．D と $x<a$ の共通部分の面積を $S(a)$ とする．



(i)　$a \leqq -1$ のとき，$x<a$ と D の共通部分は存在しない．

$$\therefore \quad S(a)=0.$$

(ii)　$-1<a<0$ のとき，

$$S(a)=\int_{-1}^{a}(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{a}=\frac{a^4}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}.$$

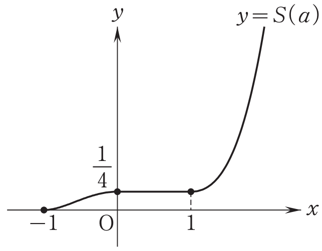
(iii)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき，

$$S(a)=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{4}.$$

(iv)　$a>1$ のとき，

$$S(a)=\frac{1}{4}+\int_{1}^{a}(x^3-x)\,dx=\frac{1}{4}+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{a}=\frac{a^4}{4}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

$y=S(a)$ のグラフは右図太線．



1955 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・幾何）

第 1 問

任意の三角形 ABC の外側に，辺 AB，AC をそれぞれ一辺とする平行四辺形 ABDE，ACFG を任意に作り，直線 DE，FG の交点を H とする。

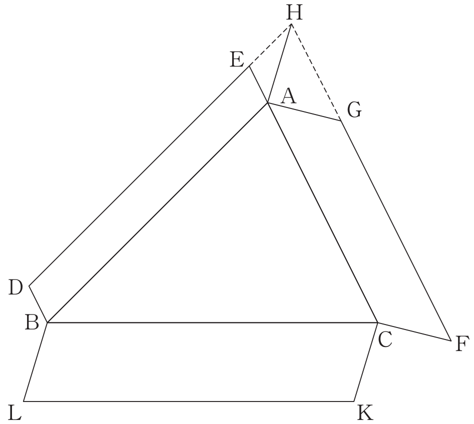
次に △ABC の辺 BC を一辺として平行四辺形 BCKL を

$$CK /\!/ HA,\quad CK = HA$$

となるように作れば

$$\text{▱ABDE} + \text{▱ACFG} = \text{▱BCKL}$$

となることを証明せよ。



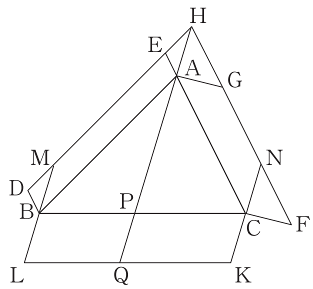
分　野

幾何：平面図形，面積

考え方

平行四辺形の平行辺の一方を平行線にそって平行移動しても面積は変らない．このことを利用する．

【解答】



B を通り AH に平行な直線が DE と交わる点を M，C を通り AH に平行な直線が FG と交わる点を N，HA を延長して，BC，LK と交わる点をそれぞれ P，Q とする．

AB∥HM，AH∥BM だから，四角形 ABMH は平行四辺形．

▱ABDE と ▱ABMH は AB を共有し高さが等しいから，

$$\text{▱ABDE} = \text{▱ABMH}.$$

同様に

$$\text{▱ACFG} = \text{▱ACNH}.$$

また，AH と，PQ は同一直線上にあるから平行で，AH∥CK だから，PQ∥CK．よって，四角形 BPQL，四角形 PCKQ は平行四辺形．

AH＝CK だから，AH＝PQ．これらを底辺とし高さを共有するから，

$$\text{▱ABMH} = \text{▱QLBP},\quad \text{▱ACNH} = \text{▱QKCP}.$$

以上より，

$$\text{▱ABDE} + \text{▱ACFG} = \text{▱ABMH} + \text{▱ACNH} = \text{▱QLBP} + \text{▱QKCP} = \text{▱BCKL}.$$ （証明終り）

第2問

定直線 l とこれに接する定円 O とがある。この円の任意の直径の両端を通り定直線 l に接する円の中心の軌跡を求めよ。また，その図をえがけ。

分　野

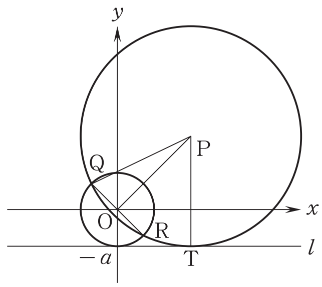
幾何：軌跡

考え方

1つの直径を通り l に接する円は直径が l に平行でない限り 2 つある．一方は定円 O である．他方の定円の中心の軌跡を求める．

座標をとって考える．O を原点とすると，l を x 軸にする場合より，結果が簡明になる．

【解答】



O を原点，x 軸を l に平行にとる．定円 O の直径の 1 つを QR とし，Q，R を通る円の中心を P$(X,\ Y)$ とおく．

定円 O の半径を a とするとき，円 P は l：$y=-a$ に接するから，円 P の半径は，$Y+a$．

P≠O のとき，PQ=PR，O は QR の中点だから OP⊥QR．

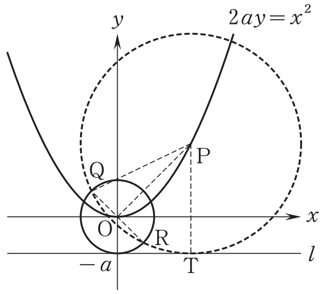
$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2}=Y+a=\sqrt{X^2+Y^2+a^2}.$$

$$\therefore\quad Y^2+2aY+a^2=X^2+Y^2+a^2.\quad \therefore\quad 2aY=X^2.$$

よって，P は放物線 $2ay=x^2$ 上にある．

また，P が放物線 $2ay=x^2$ 上にあり，O と異なるとき，円 O：$x^2+y^2=a^2$ と，l に接する円 P：$(x-X)^2+(y-Y)^2=(Y+a)^2$ $(2aY=X^2)$ について，$Y<\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{2aY+Y^2}<Y+2a$ だから，2 円は 2 点で交り，2 交点を通る直線は $2Xx+2Yy=0$ つまり，O を通り，OP に垂直な直線上にあるから，円 O の直径の両端を通る．

また，P が O に一致するときは円 P は円 O に一致し，任意の直径を共有する．



よって，P の軌跡は放物線 $2ay=x^2$．(右図太線)　　　…(答)

(注)　問題文に与えられた言葉だけでこの軌跡を説明すると次のようになる．

P の軌跡は O を頂点とし l に垂直な軸をもつ放物線で，準線は O から l に下した垂線の中点を通り l に平行な直線である．焦点は O から，l に下した垂線の中点の O に関する対称点である．

第3問

空間にある正三角形を一つの平面上に正射影したとき，三辺の長さがそれぞれ，2，3，$2\sqrt{3}$ であるような三角形がえられた。もとの正三角形の一辺の長さはいくらか。

分　野

幾何：空間図形

考え方

正三角形の頂点を A，B，C とし，その正射影を A′，B′，C′ とするとき，正三角形を平面に垂直な方向に平行移動して A が平面上にある場合，他の頂点と平面の距離を向きづけをして与えれば 2 変数の方程式になる．

【解答】

正三角形の頂点を A，B，C とし，定平面を π とする．A が π 上にあるように π に垂直な方向へ平行移動しても正射影は変らない．B，C の正射影を B′，C′ とする．

$AB'=2$，$B'C'=3$，$C'A=2\sqrt{3}$ とする．

B，C から π へ下した垂線の長さをそれぞれ b，c とする．ただし，b，c は同じ向きを正として計量する．

$$AB^2=2^2+b^2,\quad BC=3^2+(b-c)^2,\quad CA=12+c^2.$$

$AB=BC=CA$ だから，

$$4+b^2=9+(b-c)^2=12+c^2.\quad \therefore\quad 2bc-c^2=5,\quad 2bc-b^2=-3.$$

$$\therefore\quad c=-\frac{3}{2b}+\frac{b}{2},\quad b^2-3-\left(-\frac{3}{2b}+\frac{b}{2}\right)^2=5.$$

$$3b^4-26b^2-9=0.\quad \therefore\quad (b^2-9)(3b^2+1)=0.$$

$b^2\geqq 0$ より，$b^2=9$．　$b=\pm 3$．以下複号同順．

$$c=\mp\frac{3}{2\cdot 3}\pm\frac{3}{2}=\pm 1.$$

よって，AB の長さは $\sqrt{13}$．　…(答)

(注)　解答の複号は定平面 π について面対称な正三角形が答になることを表している．もちろん，π に垂直に平行移動しても同じ正射影をうるからこのような正三角形は無数にある．

1955 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・一般数学）

第 1 問

ある人が A 円を預金しその後一年目ごとに $\dfrac{A}{10}$ 円ずつ引き出すとする。利息は年 8 ％の利率で，一年ごとの複利で計算するとすれば，何回引き出したときにはじめて残りが $\dfrac{A}{10}$ 未満になるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

分　野

一般数学：数列，対数

考え方

n 年後の残りを a_n として，漸化式を立てる．

【解答】

n 回目に引き出した直後の残りを a_n とすると，

$$a_{n+1}=1.08a_n-\frac{A}{10},\quad a_0=A.$$

$$a_{n+1}-\frac{A}{0.8}=1.08\left(a_n-\frac{A}{0.8}\right).$$

$\left\{a_n-\dfrac{A}{0.8}\right\}$ は公比 1.08 の等比数列．

$$a_n-\frac{A}{0.8}=1.08^n\left(A-\frac{A}{0.8}\right).\quad\therefore\quad a_n=\frac{A}{0.8}-\frac{1.08^n}{4}A.$$

これが $\dfrac{A}{10}$ 未満になるから，

$$\frac{A}{0.8}-\frac{1.08^n}{4}A<\frac{A}{10}.\quad\therefore\quad 4.6<1.08^n.$$

$$\log_{10}4.6<n\log_{10}1.08.$$

$$\log_{10}1.08=\log_{10}\frac{27}{25}=3\log_{10}3-2(1-\log_{10}2)=3\times0.4771-2+2\times0.3010=0.0333.$$

$$\log_{10}4.5=2\log_{10}3-\log_{10}2=2\times0.4771-0.3010=0.6532.$$

$$\log_{10}4.8=4\log_{10}2+\log_{10}3-1=4\times0.3010+0.4771-1=0.6811.$$

よって，

$$\log_{10}4.6\fallingdotseq\frac{2\times0.6532+0.6811}{3}=0.6625.$$

$$\frac{\log_{10}4.6}{\log_{10}1.08}=\frac{0.6625}{0.0333}=19.\cdots$$

よって，はじめて残りが $\dfrac{A}{10}$ 未満になるのは 20 年後．　…(答)

（注）　この時代は対数計算は近似値で満足していたと思われる．誤差についての議論は教科書では扱っていない．

厳密な議論をしようと思えば不等式を用いるべきである．

$\dfrac{\log_{10}4.8}{\log_{10}1.08}=\dfrac{0.6811}{0.0333}=20.\cdots$ となるので，$\log_{10}4.8$ を直接使っても目的は達せられない．

$\dfrac{\log_{10}4.5}{\log_{10}1.08}=\dfrac{0.6532}{0.0333}=19.\cdots$ であるから 20 年以上であることは保証される．

本来なら 4.6 より少し大きく，$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ で表せ，対数比が 20 より小さい数を見つけることである．しかし，それができればそれに越したことがないがなかなか難しい．

たとえば，

$$\log_{10}4.608=\log_{10}\frac{2^9\cdot 3^2}{10^3}=9\times\log_{10}2+2\times\log_{10}3-3=9\times 0.3010+2\times 0.4771-3=0.6632.$$

$$\frac{\log_{10}4.608}{\log_{10}1.08}=\frac{0.6632}{0.0333}=19.\cdots$$

となるので，$\dfrac{\log_{10}4.6}{\log_{10}1.08}=19.\cdots$ となることが示される．

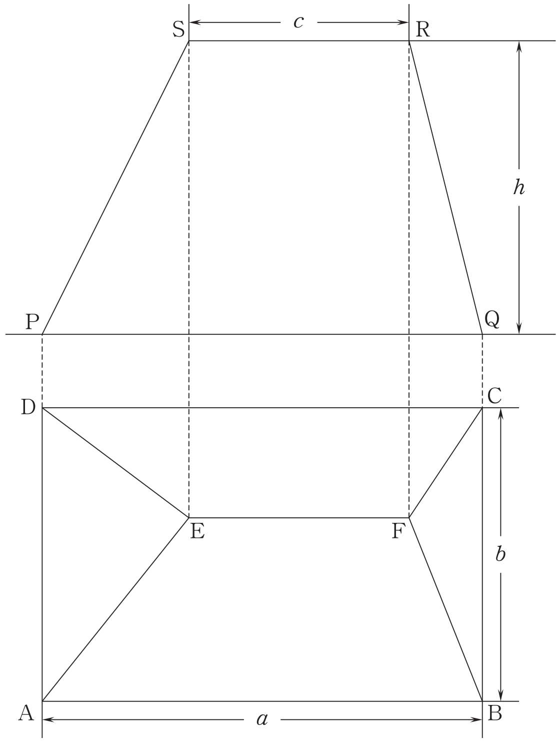
問題はこのように都合よい数 4.608 を見つけることがそうたやすいことではないことである．

対数計算における線形近似については **1951 年　解析 I　第 3 問**（注 2）を参照．

第2問

下の図のような投影図をもち，平面で囲まれた立体の体積を求めよ。

ただし，四角形 ABCD は長方形である。



分　野

一般数学：投影図

考え方

頂点の名前を平面図の頂点の名前でいうことにする．

E，F を通り，それぞれ AB に垂直な 2 平面で立体を 3 つに分ける．

分けられた 3 つの部分のうち，左右の 2 つを合体すると底面が長方形の錐体になり，中央の部分は三角柱になる．

【解答】

E，F を通り，それぞれ AB に垂直な 2 平面で立体を 3 つに分ける．

分けられた 3 つの部分のうち，左右の 2 つを合体すると底面が縦 b，横 $a-c$ の長方形で高さが h の錐体である．

その体積は $\dfrac{1}{3}(a-c)bh$.

中央の部分は三角柱で底面は切り口で，底辺が b，高さが h の三角形，三角柱の高さは c である．

その体積は $\dfrac{1}{2}bhc$.

よって求める体積は

$$\frac{1}{3}(a-c)bh+\frac{1}{2}bhc=\frac{1}{6}(2a+c)bh. \qquad \cdots(答)$$

（注）投影図については **1974 年　理科　第 3 問**（注）参照.

第 3 問

10 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 のどれかをとる変数 α と β とがある。$x=3.\alpha$, $y=2.\beta$ とし，これらを四捨五入して得られる整数をそれぞれ a, b とする．$x+y$ と $a+b$ との差の絶対値が 0.5 より小さくなる確率を求めよ。

ただし，α と β は互いに独立で，どの数字をとる確率もすべて等しいとする。

分　野

一般数学：確率

考え方

一覧表をかけばそれで判断できる．

【解答】

α, β と $x+y-5$ を表にすると，

β \ α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
2	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
3	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
5	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
6	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
7	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
8	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
9	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8

$a+b-5$ は上の表の左上で 0，右上，左下で 1，右下で 2 である．

$x+y$ と $a+b$ の差は $x+y-5$ と $a+b-5$ の差である．

差が 0.5 以上のマスに網かけをすると，網かけをしたマスは，左上で 10 個 ($x+y-5\geqq 0.5$)，右上で 1 個 ($x+y-5\leqq 0.5$)，左下で 1 個 ($x+y-5\leqq 0.5$)，右下で 19 個 ($x+y-5\leqq 1.5$) あるから，全部で 31 個ある．

よって，差が 0.5 より小さくなる確率は

$$\frac{100-31}{100}=\frac{69}{100}. \quad \cdots(答)$$

1956 年　1 次試験（文科）

旺文社の「入試問題正解」によるとこの年の問題の全問題の冒頭に次のような注意書きがあり，更に各問の後にも注意書きがあった．問題の後の注意書きは他の年には見られない．

冒頭の注意書き

（注意）　1．数の記入の仕方は必ず算用数字を用い普通の記数法に従うこと。

2．負の数を記入する場合には，もちろん符号 $-$ を前置しなければならないが，正の数には符号 $+$ をつけないこと。

3．整数でない分数の記入は必ず既約仮分数の形 $\dfrac{a}{b}$ または $-\dfrac{a}{b}$ を用い，帯分数や小数は用いないこと。

そのうえで，文科Ｉ以外の各問題の後に更に注意書きがあった．

文科IIの後の注意書きは以下の通り．

（注意）　(7)，(8)，(9)，(10) と番号がつけられれてある $\boxed{}$ に記入すべき数をそれぞれ答案用紙の数学のわくの (7)，(8)，(9)，(10) の解答欄に記入すること。また，数を記入する仕方は冒頭の注意１，２，３によること。

問題枠番号以外がほぼ同文の注意書きが理科Ｉの後にある．

文科IIIの後には

（注意）　解答用紙に記入するしかたはIIと同様である。

とあり，理科II，III，IVにもそれ以前の問題番号が記されたほぼ同文の注意書きがあった．

文科IVの後には

（注意）　たとえば (16) と番号がつけてある $\boxed{}$ に $\sin 870^\circ$ がはいるのであれば答案用紙の数字わくの (16) の解答欄に　イ　と記入すること。

$\sin 870^\circ$ またはその数値を記入してはいけない。(17)，(18)，(19)，(20) についても同様である。

理科Ｖの後にも解答例を $y=a^x$ にしたほぼ同文の注意書きがある．

I

下の(1)から(6)までの各場合に

$$a>b \text{ と } a^n>b^n \text{ とが}$$

つねに同時に成り立つならば …イ

同時に成り立つこともあり，成り立たないこともあるならば …ロ

決して同時に成り立つことがないならば …ハ

と答案用紙（省略）の数字のわくの該当する番号の解答欄に記入せよ。

(1) n が正の偶数で $a>0$，$b>0$ の場合

(2) n が正の偶数で $a>0$，$b<0$ の場合

(3) n が正の偶数で $a<0$，$b<0$ の場合

(4) n が正の奇数で $a>0$，$b>0$ の場合

(5) n が正の奇数で $a>0$，$b<0$ の場合

(6) n が正の奇数で $a<0$，$b<0$ の場合

分野

解析Ⅰ：論理

【解答】

(1) n が正の偶数で $a>b>0$ なら $a^n>b^n$．しかし，$0<a<b$ のとき同時に成り立たない．

よって $\boxed{\text{同時に成り立つこともあり，成り立たないこともある}}$． …(1)＝ロ

(2) $a>0$，$b<0$ のとき，$a>b$ はつねに成り立つ．しかし，a^n と b^n の大小は a，$|b|=-b$ の大小と一致するから，$a^n>b^n$ のことも $a^n \leqq b^n$ のこともある．

よって $\boxed{\text{同時に成り立つこともあり，成り立たないこともある}}$． …(2)＝ロ

(3) n が正の偶数で $0>a>b$ なら $a^n<b^n$．

よって $\boxed{\text{決して同時に成り立つことはない}}$． …(3)＝ハ

(4) n が正の奇数で $a>b>0$ なら $a^n>b^n$．しかし，$0<a<b$ のとき同時に成り立たない．

よって $\boxed{\text{同時に成り立つこともあり，成り立たないこともある}}$． …(4)＝ロ

(5) $a>0$，$b<0$ のとき，$a>b$ はつねに成り立つ．また，$a^n>0$，$b^n<0$ である．

よって $\boxed{\text{つねに同時に成り立つ}}$． …(5)＝イ

(6) n が正の奇数で $0>a>b$ なら $0>a^n>b^n$．しかし，$0>b>a$ のとき同時に成り立たない．

よって $\boxed{\text{同時に成り立つこともあり，成り立たないこともある}}$． …(6)＝ロ

(注) イを「つねに『同時に成り立つ』」すなわち「成り立たない場合はない」と理解し上のように解答した．

イだけをとり上げてこれを「『つねに同時に』成り立つ」つまり「同値」と解釈することも可能である．こう解釈すれば(1)，(4)，(6)は「$a>b \Longleftrightarrow a^n>b^n$」なのでイが正解になる．ただし，このように解釈したときロの意味が不確かになる．

ロの「成り立たない」を「一方だけが成り立たない」と無理に解釈しないとイとロは排反にならない．ロの「成り立たない」を「同時に成り立たない」または「少なくとも一方は成り立たない」と解釈すると(1)，(4)，(6)は「イかつロ」になり都合がわるい．

また，もし「つねに『同時に成り立たない』」場合があれば「イかつハ」になってしまう．

いずれにせよ誤解しやすい問題文であった．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

定点 (13, 0) を通る直線

$$y=m(x-13) \qquad \cdots(\mathrm{a})$$

は $\boxed{(7)} \leqq m \leqq \boxed{(8)}$ のとき，かつ，このときに限って

$$円\ x^2+y^2=25 \qquad \cdots(\mathrm{b})$$

と共有点をもつ。そのとき，直線(a)から円(b)によって切りとられる弦の中点は1つの円周Cの上にある。この円周Cの中心の x 座標は $\boxed{(9)}$ で半径は $\boxed{(10)}$ である。

分 野

解析Ⅰ：図形と方程式，軌跡

【解答】

$y=m(x-13)$ を円の方程式に代入.

$$x^2+\{m(x-13)\}^2=25. \quad \therefore \quad (1+m^2)x^2-26m^2x+169m^2-25=0. \qquad \cdots①$$

これが実数解をもつから，判別式を D とすると

$$\frac{1}{4}D=(13m^2)^2-(1+m^2)(169m^2-25)=-144m^2+25\geqq 0.$$

$$\therefore \quad \boxed{-\frac{5}{12}} \leqq m \leqq \boxed{\frac{5}{12}}. \qquad \cdots(7),\ (8)$$

① の2解を p，q とおくと，解と係数の関係から

$$p+q=\frac{26m^2}{m^2+1}.$$

2交点の中点を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{p+q}{2}=\frac{13m^2}{m^2+1}, \quad Y=m(X-13)=-\frac{13m}{m^2+1}.$$

$m\neq 0$ のとき，$m=-\dfrac{X}{Y}$.

$$\therefore \quad Y=-\frac{X}{Y}(X-13). \quad \therefore \quad X(X-13)+Y^2=0. \quad \therefore \quad \left(X-\frac{13}{2}\right)^2+Y^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2.$$

$m=0$ のとき，$(X,\ Y)=(0,\ 0)$.

よって，中点 $(X,\ Y)$ はつねに円 $\left(x-\dfrac{13}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{13}{2}\right)^2$ 上にある. この円がCである.

Cの中心の x 座標は $\boxed{\dfrac{13}{2}}$ であり，半径は $\boxed{\dfrac{13}{2}}$ である. $\cdots(9),\ (10)$

【別解】

円の中心 (0, 0) と直線 $mx-y-13m=0$ の距離は

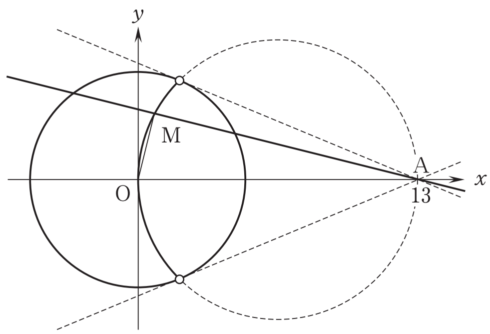
$$\frac{|13m|}{\sqrt{m^2+1}}.$$

円の半径が5だから，共有点をもつ条件は

$$\frac{|13m|}{\sqrt{m^2+1}}\leqq 5. \quad \therefore \quad (13m)^2\leqq 5^2(m^2+1).$$

$$\therefore \quad 144m^2\leqq 25. \quad \therefore \quad \boxed{-\frac{5}{12}} \leqq m \leqq \boxed{\frac{5}{12}}.$$

$\cdots(7),\ (8)$



円の弦の中点は中心Oから弦へ下した垂線の足である．したがって，A(13, 0) を通る直線が切り取られる弦の中点Mについて $\angle\mathrm{OMA}=90^\circ$ である．

よって，MはOAを直径とする円周上にある．

その中心はOAの中点 $\left(\boxed{\dfrac{13}{2}},\ 0\right)$ で，半径は $\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}=\boxed{\dfrac{13}{2}}$ である． …(9)，(10)

（注１） 中点Mの軌跡は円周C全体ではない．Cは円 $x^2+y^2=25$ の外側にもはみだしている．したがって，実際に弦の中点Mの軌跡を求めると，円Cの $x^2+y^2<25$ の部分すなわち

$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2,\quad \left(0\leqq x<\frac{25}{13}\right)$$

となる．

（注２） 距離の公式は当時の教科書の「幾何」の研究で取り上げられている程度で，おそらく範囲外であったと思われる．

（注３） むしろ幾何が盛んであった当時としては，定点と中心の距離13と半径5から接線の長さ12を出し，傾きの限界が $\pm\dfrac{5}{12}$ であるとすることを導く方が自然だったかもしれない．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

函数 $y=\boxed{(11)}+\boxed{(12)}x+\dfrac{\boxed{(13)}}{x}$ の $x=1$，2，4 に対する値がそれぞれ13，14，28になるならば，$x>0$ の範囲で，この函数 y は $x=\boxed{(14)}$ のとき最小値 $\boxed{(15)}$ をとる。

分　野

解析Ⅰ：分数関数，相加平均・相乗平均の関係

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\boxed{(11)}=a$，$\boxed{(12)}=b$，$\boxed{(13)}=c$ とおき，$f(x)=a+bx+\dfrac{c}{x}$ とおく．

$f(1)=13$，$f(2)=14$，$f(4)=28$ から，

$$\begin{cases} a+b+c=13, & \cdots① \\ a+2b+\dfrac{c}{2}=14, & \cdots② \\ a+4b+\dfrac{c}{4}=28. & \cdots③ \end{cases}$$

①，②，③から

$$a=\boxed{-12},\quad b=\boxed{9},\quad c=\boxed{16}.$$ …(11)，(12)，(13)

$$f(x)=-12+9x+\frac{16}{x}.$$

$x>0$ のとき，相加平均・相乗平均の関係から

$$f(x)=-12+9x+\frac{16}{x}\geqq-12+2\sqrt{9x\cdot\frac{16}{x}}=12.$$

等号は $x=\dfrac{4}{3}$ のとき成り立つ．よって，$f(x)$ を最小にする x は $\boxed{\dfrac{4}{3}}$ で，最小値は $\boxed{12}$．

…(14)，(15)

Ⅳ

不等式 $\boxed{(16)} < \boxed{(17)} < \boxed{(18)} < \boxed{(19)} < \boxed{(20)}$ が成り立つように次の各値をならべるとき，$\boxed{}$ の中にはそれぞれどれを入れればよいか。

イ　$\sin 870^\circ$　　　ロ　$\cos(-430)^\circ$

ハ　$\tan 1310^\circ$　　　ニ　$\sin(-2095)^\circ$

ホ　$\cos 1900^\circ$

分　野

解析Ⅰ：三角関数，不等式

【解答】

$$
\begin{array}{ll}
\text{イ} & \sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \sin 30^\circ. \\
\text{ロ} & \cos(-430)^\circ = \cos 430^\circ = \cos 70^\circ = \sin 20^\circ. \\
\text{ハ} & \tan 1310^\circ = \tan 230^\circ = \tan 50^\circ. \\
\text{ニ} & \sin(-2095)^\circ = -\sin 2095^\circ = -\sin 295^\circ = \sin 65^\circ. \\
\text{ホ} & \cos 1900^\circ = \cos 100^\circ = -\cos 80^\circ = -\sin 10^\circ.
\end{array}
$$

$$-\sin 10^\circ < 0 < \sin 20^\circ < \sin 30^\circ < \sin 65^\circ < 1 < \tan 50^\circ$$

から，

$$\boxed{\cos 1900^\circ} < \boxed{\cos(-430)^\circ} < \boxed{\sin 870^\circ} < \boxed{\sin(-2095)^\circ} < \boxed{\tan 1310^\circ}.$$

…(16)＝ホ，(17)＝ロ，(18)＝イ，(19)＝ニ，(20)＝ハ

1956 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

x^{10} を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割ったときの余りは

$$\boxed{(1)}\,x^3+\boxed{(2)}\,x^2+\boxed{(3)}\,x+\boxed{(4)}$$

である。

分　野

解析 I：整式の割り算

【解答】

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$ であるから,

$$x^{10}-1=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1).$$

$$\therefore\quad x^{10}=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)(x^5+1)+1.$$

よって, x^{10} を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割った余りは

$$\boxed{0}\,x^3+\boxed{0}\,x^2+\boxed{0}\,x+\boxed{1}.\qquad\cdots(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

（注）　直接割り算を実行しても難しくはない.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^6-x^5 \qquad\qquad +x-1 \\ \hline
x^4+x^3+x^2+x+1 & x^{10} \\
 & \underline{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6} \\
 & \quad -x^9-x^8-x^7-x^6 \\
 & \quad \underline{-x^9-x^8-x^7-x^6-x^5} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad x^5 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^5+x^4+x^3+x^2+x} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^4-x^3-x^2-x \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x^4-x^3-x^2-x-1} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1
\end{array}
$$

II

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

x, y, z を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} 5x+3y-z=0 \\ 2x+y+3z=l \\ x+4y+kz=10 \end{cases}$$

は $k=\boxed{(5)}$, $l=\boxed{(6)}$ のとき不定である（2 組以上の解をもつ）。

分　野

解析 I：連立方程式

【解答】

第 1 式から $z=5x+3y$. 残りの式に代入.

$$\begin{cases} 2x+y+3(5x+3y)=17x+10y=l, & \cdots① \\ x+4y+k(5x+3y)=(1+5k)x+(4+3k)y=10. & \cdots② \end{cases}$$

$(4+3k)\times①-10\times②$ とすると

$$(58+k)x=(4+3k)l-10^2 \qquad \cdots③$$

となるが，$k\neq-58$ のとき，x は定まり，① から y も定まり，z も定まる．(不定ではない．)

$k=-58$ のとき，③ は $0=-170l-10^2$ となる．

$l\neq-\dfrac{10}{17}$ のとき ③ は成り立たなくなり，与連立方程式は解をもたない．

$l=-\dfrac{10}{17}$ のとき，① と ② は同値な式になり，$289x+170y=-10$ をみたす $(x,\ y)$ がすべて解となる．

この $(x,\ y)$ に対して，z も定まるから，

$$k=\boxed{-58},\quad l=\boxed{-\frac{10}{17}}. \qquad \cdots(5),\ (6)$$

Ⅲ

次の □ に適当な数を記入せよ。

函数 $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ の $2\leqq x\leqq 6$ における最小値は $\boxed{(7)}$ で最大値は $\boxed{(8)}$，$-6\leqq x\leqq -2$ における最小値は $\boxed{(9)}$ で最大値は $\boxed{(10)}$ である。

分　野

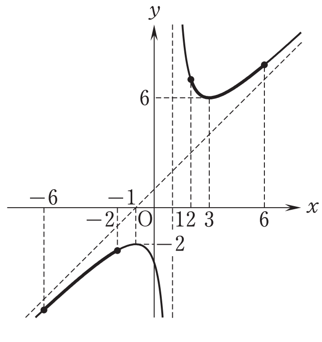
解析Ⅰ：分数関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\dfrac{x^2+3}{x-1}=f(x)$ とおくと，

$$f(x)=x-1+2+\frac{4}{x-1}.$$



$x-1>0$ のとき，相加平均・相乗平均の関係から

$$f(x)\geqq 2+2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}=6$$

で，$x-1=2$ つまり $x=3$ で最小になる．

$x-1<0$ のとき，

$$f(x)=-\left\{1-x-2+\frac{4}{1-x}\right\}\leqq-\left\{-2+2\sqrt{(1-x)\cdot\frac{4}{1-x}}\right\}=-2$$

で，$1-x=2$ つまり $x=-1$ で最大になる．

よって，$y=f(x)$ のグラフは $y=x+1$ と $y=\dfrac{4}{x-1}$ のグラフの合成で，右上図のようになる．

$$f(2)=7,\quad f(6)=\frac{39}{5}(>7),\quad f(-2)=-\frac{7}{3},\quad f(-6)=-\frac{39}{7}.$$

よって，$2\leqq x\leqq 6$ において，

$x=3$ のとき，最小値 $\boxed{6}$ をとり，$x=6$ のとき，最大値 $\boxed{\dfrac{39}{5}}$ をとる．　…(7)，(8)

また，$-6 \leqq x \leqq -2$ において，

$x=-6$ のとき，最小値 $\boxed{-\dfrac{39}{7}}$ をとり，$x=-2$ のとき，最大値 $\boxed{-\dfrac{7}{3}}$ をとる．　…(9)，(10)

（注）　グラフを描くところまでは以下のように微分法を考える方が自然であろう．しかし，当時の解析 I には微分法が含まれていないから上のような方法をとった．

また，分母を払ってできる x の 2 次方程式 $x^2-yx+y+3=0$ の解が $2 \leqq x \leqq 6$ または $-6 \leqq x \leqq -2$ に存在する条件から y の範囲，最大最小を求めてもよい．

【別解】

$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}.$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

これからグラフの概形が描けて，それぞれの区間における最大最小を求める部分は**【解答】**と同じ．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ に適当な数を記入せよ。

双曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{36}=1$ と直線 $y=mx+8$ との共有点の個数は $A=\boxed{(11)}$，$B=\boxed{(12)}$，$0<A<B$ とするとき

$0 \leqq m < A$　ならば $\boxed{(13)}$，
$m=A$　ならば 1，
$A<m<B$　ならば $\boxed{(14)}$，
$m=B$　ならば 1，
$B<m$　ならば $\boxed{(15)}$

である。

分　野

解析 I：二次曲線，双曲線

【解答】

$y=mx+8$ を双曲線の方程式に代入して，

$$\frac{x^2}{25}-\frac{(mx+8)^2}{36}=1. \quad \therefore \quad (36-25m^2)x^2-400mx-2500=0$$

$m \fallingdotseq \pm\dfrac{6}{5}$ のとき，判別式を D とすると，

$$\frac{1}{4}D=40000m^2+(36-25m^2)\times 2500=90000-22500m^2=22500(4-m^2).$$

解の個数すなわち共有点の個数が変る m の値 A，$B\,(0<A<B)$ は

$$A=\boxed{\dfrac{6}{5}},\quad B=\boxed{2}$$ …(11), (12)

で，共有点の個数は

$0 \leqq m < \boxed{\dfrac{6}{5}}$ 　ならば $\boxed{2}$ …(13)

$m=\boxed{\dfrac{6}{5}}$ 　ならば 1

$\boxed{\dfrac{6}{5}} < m < \boxed{2}$ 　ならば $\boxed{2}$ …(14)

$m=\boxed{2}$ 　ならば 1

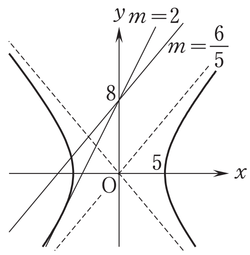
$\boxed{2} < m$ 　ならば $\boxed{0}$ …(15)

【別解】

双曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{36}=1$ の漸近線の傾きは $\pm\dfrac{6}{5}$ である．

l：$y=mx+8$ は点 $(0,\ 8)$ を通り傾き m の直線である．

双曲線上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線は $\dfrac{x_1}{25}x-\dfrac{y_1}{36}y=1$ である．この接線が $(0,\ 8)$ を通るとき，$y_1=-\dfrac{36}{8}=-\dfrac{9}{2}$．



このとき $\dfrac{{x_1}^2}{25}-\dfrac{\left(-\dfrac{9}{2}\right)^2}{36}=1$ から，$x_1=\pm\dfrac{25}{4}$．

したがって，$(0,\ 8)$ を通る接線の方程式は

$$\pm\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y=1.$$

その傾きは ± 2 である．

したがって，$m \geqq 0$ のとき，図より交点の個数は $A=\boxed{\dfrac{6}{5}}$，$B=\boxed{2}$ を境に変化する．…(11), (12)

$m=\dfrac{6}{5}$ のとき l は漸近線と平行なので共有点は 1 個で，その前後で共有点は 2 個である．

$m=2$ のとき，l は双曲線に接するから共有点は 1 個で，その前後で共有点は 2 個から 0 個に変化する．

個数の一覧は省略．

V

下に書いてあるイからトまでの方程式の中から適当なものを選んで次の $\boxed{}$ に記入せよ。ただし，イ，ロ，ハ，…などの記号のみを答案用紙（省略）の該当する解答欄に記入すること。

$\boxed{(16)}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に平行に移動したものである。

$\boxed{(17)}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを y 軸に平行に移動したものである。

$\boxed{(18)}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを原点に関して対称にうつしたものである。

$\boxed{(19)}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に関して対称にうつしたものである。

$\boxed{(20)}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを直線 $y=x$ 軸に関して対称にうつしたものである。

イ　$y=a^x$　　ロ　$a^y=x+h$

ハ　$x=y^a$　　ニ　$xa^y=-1$

ホ　$xa^{y+h}=1$　　ヘ　$y=\log_a \dfrac{x}{h}$

ト　$y=\log_{\frac{1}{a}} x$

ただし，$a>0$，$a\neq1$，$h>0$，$h\neq1$ とする。

分　野

解析Ⅰ：対数関数，グラフの移動

【解答】

イからトまでを log で表すと次のようになる．

イ　$x=\log_a y$　　ロ　$y=\log_a(x+h)$

ハ　$a=\log_y x$　　ニ　$y=-\log_a(-x)$

ホ　$y=-\log_a x-h$　　ヘ　$y=\log_a x-\log_a h$

ト　$y=-\log_a x$

$\boxed{ロ}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸方向に $-h$ だけ平行に移動したものである．　…(16)

$\boxed{ヘ}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを y 軸方向に $-\log_a h$ だけ平行に移動したものである．　…(17)

$\boxed{ニ}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを原点に関して対称にうつしたものである．　…(18)

$\boxed{ト}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に関して対称にうつしたものである．　…(19)

$\boxed{イ}$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフを直線 $y=x$ 軸に関して対称にうつしたものである．　…(20)

（注）　ホのグラフは $y=\log_a x$ のグラフを x 軸に関して対称に移動した後，y 軸方向に $-h$ だけ平行移動したものである．$\left(\text{直線 } y=-\dfrac{h}{2} \text{ に関して対称移動したといってもよい．}\right)$

また，ハのグラフは $y=\log_a x$ のグラフと合同でない．

1956 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析 I）

第 1 問

放物線 $y=x^2+3x-1$ 上の相異なる 2 点が直線 $x+y=0$ に関して対称であるとき，これら 2 点の座標を求めよ。

分　野

解析 I：2 次関数，グラフの移動

考え方

$x+y=0$ に関して対称移動したグラフの方程式はもとのグラフの方程式の，x と y を入れ替え，さらに双方の符号を反対にしたものである．

【解答】

放物線 $C: y=x^2+3x-1$ を直線 $x+y=0$ に関して対称移動した放物線 C' の方程式は
$-x=y^2-3y-1$.

問題の点は C，C' 上にあって，$x+y=0$ をみたさない点である．

$$\begin{array}{rrrr} & y \;= & x^2+ & 3x-1 \\ -) & -x \;= & y^2- & 3y-1 \\ \hline & \multicolumn{3}{r}{y+x=x^2-y^2+3(x+y)} \end{array}$$

$x+y\neq 0$ から

$$1=x-y+3. \quad \therefore \quad y=x+2.$$

C の方程式から

$$x+2=x^2+3x-1. \quad x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0.$$

求める点の座標は

$$(-3,\ -1),\ (1,\ 3). \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問

2 つの実係数の方程式

$$x^3-ax-2b=0 \ \text{と}\ x^3-bx-2a=0$$

とがただ 1 つの共通根をもち，どちらもそれ以外に実根をもたないためには，$(a,\ b)$ を座標にもつ点が平面上のどのような範囲にあることが必要で十分か。その範囲を図で示せ。

分　野

解析 I：高次方程式，共通解

考え方

共通解が存在するとき，それらの式を相互に引いてできる方程式，一方の式を他方の式で割った余りの式でできる方程式も共通解をもつ．

【解答】

問題文の「共通根，実根」は「共通解，実数解」の当時の表記である．

$$\begin{array}{rrrr} & x^3- & ax- & 2b=0 \\ -) & x^3- & bx- & 2a=0 \\ \hline & \multicolumn{3}{r}{(b-a)x-2(b-a)=0} \end{array} \qquad \cdots①$$

$$\therefore\quad (b-a)(x-2)=0.$$

よって，$b=a$ または $x=2$.

$b=a$ のとき，2つの方程式は一致するので，ただ1つの共通解をもつことに反する．よって，$a\neq b$.

$x=2$ を共通解にもつとき，① より，$8-2a-2b=0$.　$\therefore$　$b=4-a$.　$a\neq b$ から $a\neq 2$.

$$x^3-ax-2b=x^3-ax-8+2a=(x-2)(x^2+2x+4-a),$$
$$x^3-bx-2a=x^3-(4-a)x-2a=(x-2)(x^2+2x+a).$$

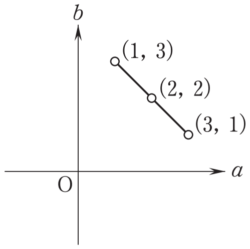
$x^2+2x+4-a=0$ が実数解をもたない条件は $1-(4-a)=a-3<0$. よって，$a<3$.

$x^2+2x+a=0$ が実数解をもたない条件は $1-a<0$. よって，$a>1$.

以上から

$$a+b=4\ (1<a<3,\ a\neq 2).$$

図示すると下図太線（白丸は除く）.



…(答)

第3問

放物線 $y^2=4p(x-\alpha)$ と円 $x^2+y^2=1$ との共有点の個数は α の変化に応じてどのように変わるか。ただし，$0<p<\dfrac{1}{2}$ とする。

分　野

解析 I ：図形と方程式

考え方

$y^2=4p(x-\alpha)$ を代入し，x のみの方程式にする．このとき，$y^2=1-x^2\geqq 0$ であるから，$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲にないと共有点の x 座標でなく，$x=\pm 1$ のとき対応する点は1個で，$-1<x<1$ のときは対応する点は2個であることにも注意しなければならない.

【解答】

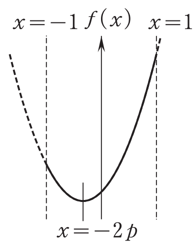
$y^2=4p(x-\alpha)$ から $x^2+4p(x-\alpha)=1$.

$$f(x)=x^2+4px-4p\alpha-1$$

とおくと，$f(x)=(x+2p)^2-4p^2-4p\alpha-1$ で，$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)=0$ の解が共有点の x 座標.

$0<p<\dfrac{1}{2}$ から $-1<-2p<0$.　よって，$f(-2p)<f(-1)<f(1)$.

$$f(-2p)=-4p^2-4p\alpha-1=-4p\left(\alpha+p+\frac{1}{4p}\right).$$
$$f(-1)=-4p-4p\alpha=-4p(1+\alpha).$$
$$f(1)=4p-4p\alpha=4p(1-\alpha).$$



相加平均・相乗平均の関係で等号は成り立たないから，$p+\dfrac{1}{4p}>1$,

$-p-\dfrac{1}{4p}<-1$ に注意する.

また，$f(x)$ の $x=-1$，$-2p$，1 における正負を考えて，

α	$\cdots$	$-p-\dfrac{1}{4p}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
x の個数	0	1	2	2	1	1	0
共有点の個数	0	2	4	3	2	1	0

…(答)

1956年　2次試験（4科目より2科目選択・解析Ⅱ）

第1問

次の函数の最大値および最小値を求めよ。またそのときのθの値はいかほどか。

$$(2\cos 2\theta+2\cos\theta+3)(2\cos\theta+3)-\sin^2 2\theta$$

ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

分　野

解析Ⅱ：整式の微分，三角関数，倍角公式

考え方

与式はすべて，$\cos\theta$の式でかくことができるから $t=\cos\theta$ で表し，微分法を用いてそのとりうる範囲を求める．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$\begin{aligned}(2\cos 2\theta+2\cos\theta+3)(2\cos\theta+3)-\sin^2 2\theta&=\{2(2\cos^2\theta-1)+2\cos\theta+3\}(2\cos\theta+3)-4\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=(4\cos^2\theta+2\cos\theta+1)(2\cos\theta+3)-4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta.\end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ から $-1\leqq t\leqq 1$ で

$$(\text{与式})=(4t^2+2t+1)(2t+3)-4(1-t^2)t^2=4t^4+8t^3+12t^2+8t+3.$$

これを $f(t)$ とおく．

$$f'(t)=16t^3+24t^2+24t+8=8(2t^3+3t^2+3t+1)=8(2t+1)(t^2+t+1).$$

$t^2+t+1>0$ より，

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$$f(-1)=3,\quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4},\quad f(1)=35.$$

以上から，$t=\cos\theta=1$ つまり，$\theta=0$ のとき，与式は最大値35をとり，$t=-\frac{1}{2}$ つまり，$\theta=\frac{2}{3}\pi$ のとき，与式は最小値 $\frac{5}{4}$ をとる．　…(答)

第2問

平面上の直交軸に関して，座標がそれぞれ $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ である 2 点を通る放物線

$$y=ax^2+bx+c \quad (a<0)$$

と x 軸とが囲む面積の最小値を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：整式の積分

考え方

放物線の方程式は 1 文字でかける．

【解答】

$y=ax^2+bx+c$ が $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$ を通るから，

$$y=a(x-1)(x+1)+1=ax^2-a+1$$

x 軸との交点の x 座標は $\pm\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$

放物線と x 軸が囲む部分の面積は

$$\int_{-\sqrt{\frac{a-1}{a}}}^{\sqrt{\frac{a-1}{a}}}(ax^2-a+1)\,dx=-\frac{a}{6}\left(2\sqrt{\frac{a-1}{a}}\right)^3=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(a-1)^3}{a}}.$$

$f(a)=\dfrac{(a-1)^3}{a}=a^2-3a+3-\dfrac{1}{a}$ とおくと，

$$f'(a)=2a-3+\frac{1}{a^2}=\frac{2a^3-3a^2+1}{a^2}=\frac{(a-1)^2(2a+1)}{a^2}.$$

a	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	(0)
$f'(a)$	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\searrow$		$\nearrow$	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3}{-\frac{1}{2}}=\frac{27}{4}.$$

面積の最小値は

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{27}{4}}=2\sqrt{3}. \qquad \cdots(答)$$

第3問

$10n$ 本のくじの中に当たりくじが n 本ある。

(1) このくじを 10 本引いて，そのうちの 1 本だけが当たりくじである確率 p_n を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：確率，数列の極限

考え方

$10n$ 本の中から 10 本を選ぶ組合せについて考えればよい．

【解答】

(1) $10n$ 本のくじから 10 本を選ぶからその組合せは ${}_{10n}\mathrm{C}_{10}$.

1 本だけが当りくじなのは，9 本のはずれくじと，1 本の当りくじを引いた場合でその組合せは ${}_{9n}\mathrm{C}_{9}\,{}_{n}\mathrm{C}_{1}$ である．

よって，

$$p_n=\frac{{}_{9n}\mathrm{C}_{9}\,{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{{}_{10n}\mathrm{C}_{10}}=\frac{10!(10n-10)!(9n)!\,n}{(10n)!9!(9n-9)!}=\frac{10n(10n-10)!(9n)!}{(10n)!(9n-9)!}=\frac{(10n-10)!(9n)!}{(10n-1)!(9n-9)!}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1) の p_n の極限を求める．

$$p_n=\frac{(9n)(9n-1)(9n-2)\cdots(9n-8)}{(10n-1)(10n-2)(10n-3)\cdots(10n-9)}.$$

分母分子を n^9 で割ると，

$$p_n=\frac{9\left(9-\frac{1}{n}\right)\left(9-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(9-\frac{8}{n}\right)}{\left(10-\frac{1}{n}\right)\left(10-\frac{2}{n}\right)\left(10-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(10-\frac{9}{n}\right)}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} p_n=\frac{9^9}{10^9}. \quad \cdots(\text{答})$$

(注) 結果的には 10 本中 1 本の割合で当たりくじがあるくじを繰り返し 10 回引く試行で 10 本のうち 1 本だけが当たりくじである確率

$${}_{10}\mathrm{C}_{9}\left(\frac{9}{10}\right)^9\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{9^9}{10^9}$$

と一致する．

1956 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・幾何）

第 1 問

一平面上に定円 O と，その中心 O とは異なる定点 A がある。円 O の任意の直径の両端と点 A とを頂点とする三角形の外心の軌跡を求めよ。

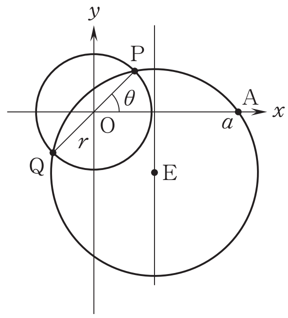
分　野

幾何：平面図形，軌跡

考え方

座標をとって考える．

【解答】



O を原点，OA を x 軸とする座標系をとり，OA$=a$，円 O の半径を r とする．

円 O 上の点 P の座標を $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおくと，直径の他端 Q の座標は $(-r\cos\theta,\ -r\sin\theta)$．

△APQ の外心 E の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，E は辺 PQ の垂直二等分線上にあるから，

$$X\cos\theta+Y\sin\theta=0. \qquad \cdots①$$

また，E は辺 AP の垂直二等分線上にあるから，

$(X-a)^2+Y^2=(X-r\cos\theta)^2+(Y-r\sin\theta)^2.\quad \therefore\quad -2aX+a^2=-2r(X\cos\theta+Y\sin\theta)+r^2.$

① から，

$$X=\frac{a^2-r^2}{2a}.$$

よって，外心 E は OA に垂直な直線 $x=\dfrac{a^2-r^2}{2a}$ 上にある．

この直線上に E をとれば，O を通り OE に垂直な直径 PQ が存在し，A，P，Q は一直線上にないから外心が存在しそれが E だから，E の軌跡は OA に垂直な直線

$$x=\frac{a^2-r^2}{2a} \qquad \cdots(答)$$

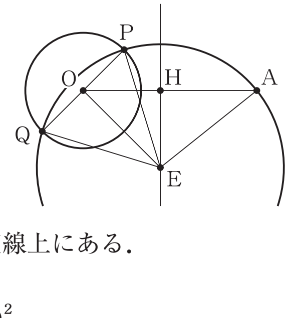
である．ただし $a=$OA，r は円 O の半径．

【別解 1】

円 O の直径の両端を P，Q，△APQ の外心を E とする．

$$AE^2-EO^2=PE^2-EO^2$$

で，E は PQ の垂直二等分線上にあるから，∠POE$=90°$．



よって，円 O の半径を r とすると，$PE^2-EO^2=OP^2=r^2$

E から，直線 OA に下した垂線の足を H とすると，

$$AE^2-EO^2=(AH^2+EH^2)-(EH^2+OH^2)=AH^2-HO^2=r^2$$

となるから，H は定点である．したがって，E は定点 H を通り OA に垂直な直線上にある．

また，E がこの直線上にあるとき，OE⊥OP となるように P をとれば

$$AE^2-EO^2=r^2=OP^2.\quad AE^2=EO^2+OP^2=EP^2=EQ^2$$

となり，E は △APQ の外心である．

よって，直線 OA 上で $AH^2-OH^2=r^2$ をみたす定点 H を通り，OA に垂直な直線が E の軌跡である．

$\cdots$(答)

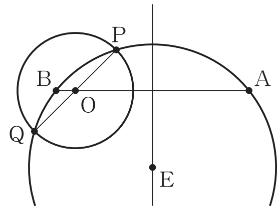
【別解 2】

△APQ の外接円と直線 OA の A 以外の交点を B とすると，方べきの定理から

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}.$$

右辺は定数で，OA も定数だから OB も定数となり，B は定点である．

外接円は 2 定点 A，B を通るからその中心 E は AB の垂直二等分線上にある．



また，E が AB の垂直二等分線上にあるとき，E を中心とし A を通る円と円 O の交点を P，Q とすると，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=r^2=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$ だから，P，O，Q は一直線上にあり，円 O の直径である．また，A，B，P，Q は円 E 上の 4 点．よって，E は △APQ の外心．

よって，E の軌跡は AB の垂直二等分線．　…(答)

第 2 問

半径が一定の動円が平面上の直交座標系の原点 O を通りながら動くとき，この円と x 軸，y 軸との原点以外の交点を P，Q とすれば，線分 PQ の 3 等分点はどのような曲線上にあるか。

分　野

幾何：平面座標，軌跡

考え方

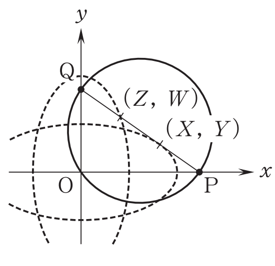
原点を通る円と x 軸，y 軸との交点を結ぶ線分は円の直径であり，その 3 等分点は x 軸，y 軸上に端点をもつ定長線分を定比に分ける点である．

【解答】

半径を r とすると，動円の中心は原点から r の距離にある．その中心を $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおくと，円の方程式は

$$(x-r\cos\theta)^2+(y-r\sin\theta)^2=r^2.$$

x 軸との交点を P，y 軸との交点を Q とすると，P，Q の座標はそれぞれ $(2r\cos\theta,\ 0)$，$(0,\ 2r\sin\theta)$．



P，Q を 1 : 2 に内分する点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$(X,\ Y)=\left(\frac{4}{3}r\cos\theta,\ \frac{2}{3}r\sin\theta\right).$$

よって，$\dfrac{X^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}+\dfrac{Y^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}=1.$

$(X,\ Y)$ は楕円

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}=1$$

上にある．

また，P，Q を 2 : 1 に内分する点を $(Z,\ W)$ とすると，

$$(Z,\ W)=\left(\frac{2}{3}r\cos\theta,\ \frac{4}{3}r\sin\theta\right).$$

よって，$\dfrac{Z^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}+\dfrac{W^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}=1.$

$(Z,\ W)$ は楕円

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}=1$$

上にある．

よって，PQ の三等分点は 2 つの楕円

$$\frac{x^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}=1,\quad \frac{x^2}{\left(\frac{2}{3}r\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{4}{3}r\right)^2}=1 \qquad \cdots(\text{答})$$

のいずれかの上にある．

（注 1） 円の中心が軸上にあるとき，原点以外の交点 P または Q は存在しない．軌跡とすると楕円と軸の交点は除かれる．

（注 2） PQ は直径だから定長 $2r$ の線分で，P，Q は軸上を動く．

定長線分 PQ の両端が垂直に交わる 2 つの軸上にそれぞれあるようにするとき，これを定比に分ける点 R の軌跡は楕円である．軸の長さはそれぞれ 2PR，2QR である．

第3問

平面上の直交軸に関して，座標 $(1,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-1,\ 2)$ をもつ3点を頂点とする三角形を，y 軸のまわりに回転して生ずる立体の体積を求めよ。

分　野

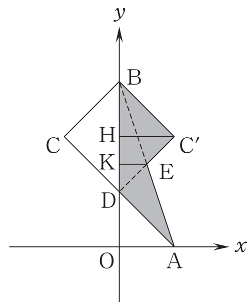
幾何：立体図形，体積

考え方

三角形は y 軸をまたいでいるから，y 軸について折返した図形を y 軸のまわりに回転する．直線図形だから，円錐と円錐台の体積を足し引きする．

【解答】

三角形は三角形板であるとして解答する．



$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 3)$，$\mathrm{C}(-1,\ 2)$ とおく．$\triangle\mathrm{ABC}$ は y 軸をまたぐ．AC と y 軸の交点を $\mathrm{D}(0,\ 1)$ とし，点 C の y 軸について対称な点を $\mathrm{C}'(1,\ 2)$ とし，AB と DC′ の交点を E とおくと，$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$.

また，点 C′，E から y 軸に下した垂線の足をそれぞれ H，K とおくと，$\mathrm{H}(0,\ 2)$，$\mathrm{K}\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$.

求める体積は図の網掛け部を y 軸の周りに回転してできる立体の体積．

便宜上，$\triangle\mathrm{XYZ}$ を y 軸のまわりに回転してできる円錐を「円錐 XYZ」とかく．

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \text{円錐 BOA}-\text{円錐 DOA}-\text{円錐 BKE}+\text{円錐 HDC}'-\text{円錐 KDE}+\text{円錐 BHC}' \\ &= \frac{1}{3}\pi\times 3-\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\pi \\ &= \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

…(答)

（注）　積分を使って，

$$V=\pi\int_0^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{1}{3}y+1\right)^2dy-\pi\int_0^1(1-y)^2dy+\pi\int_{\frac{3}{2}}^2(y-1)^2dy+\pi\int_2^3(3-y)^2dy$$

として計算してもよい．ただし，積分は解析Ⅱである．

1956年　2次試験（4科目より2科目選択・一般数学）

第1問

一定量の a %のアルコールがある。今第1回目にはその半分を汲みすてて x %のアルコールでおぎない，第2回目にはこのようにして得られたアルコールの半分を汲みすてて y %のアルコールでおぎなう。このように半分を汲みすてて x %のアルコールでおぎなうことと，y %のアルコールでおぎなうことを交互に続けるとする。

(i) このような操作を n 回行ったときには何%のアルコールとなるか。

(ii) このような操作を限りなく続けるとき，偶数回目と奇数回目のアルコールの濃さはそれぞれどのようになるか。

分　野

一般数学：数列，漸化式

考え方

一定の溶液中におけるアルコールの量に注目して行く．

【解答】

(i) a %アルコールの半分を汲みだすと，アルコールの量は半減するが，x %アルコールを半分補うから第1回の操作の後のアルコールの濃さは $\dfrac{a+x}{2}$ %である．

第2回の操作の後のアルコールの濃さは同様に $\dfrac{\dfrac{a+x}{2}+y}{2}=\dfrac{a+x+2y}{4}$ %である．

n 回の操作の後のアルコールの濃さを a_n %とおくと，

$$a_{2m+2}=\frac{a_{2m}+x+2y}{4}.$$

$$a_{2m+2}-\frac{x+2y}{3}=\frac{1}{4}\left(a_{2m}-\frac{x+2y}{3}\right).$$

$$a_{2m}-\frac{x+2y}{3}=\frac{1}{4^m}\left(a-\frac{x+2y}{3}\right).$$

よって，

$$a_{2m}=\frac{x+2y}{3}+\frac{1}{4^m}\left(a-\frac{x+2y}{3}\right)=\frac{x}{3}\left(1-\frac{1}{4^m}\right)+\frac{2}{3}y\left(1-\frac{1}{4^m}\right)+\frac{1}{4^m}a.$$

$$\begin{aligned}a_{2m+1}&=\frac{a_{2m}+x}{2}=\frac{x}{6}\left(1-\frac{1}{4^m}\right)+\frac{1}{3}y\left(1-\frac{1}{4^m}\right)+\frac{1}{2\cdot4^m}a+\frac{1}{2}x\\&=\frac{2}{3}x\left(1-\frac{1}{4^{m+1}}\right)+\frac{1}{3}y\left(1-\frac{1}{4^m}\right)+\frac{1}{2\cdot4^m}a.\end{aligned}$$

よって，求める濃度は

$$a_n\ \%=\begin{cases}\left\{\dfrac{x}{3}\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)+\dfrac{2}{3}y\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)+\dfrac{1}{2^n}a\right\}\ \% & (n\text{ が偶数のとき}),\\ \left\{\dfrac{2}{3}x\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)+\dfrac{1}{3}y\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)+\dfrac{1}{2^n}a\right\}\ \% & (n\text{ が奇数のとき}).\end{cases}$$

…(答)

(ii) $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{3}y$，$\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m+1}=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y$ から，

$$\left\{\begin{array}{l}\text{偶数回目は}\left(\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}y\right)\text{ %に}\\ \text{奇数回目は}\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y\right)\text{ %に}\end{array}\right.\text{ 近づく.} \qquad \cdots\text{(答)}$$

第 2 問

甲が乙から A 円を月利 r で借り，かつ同時に，丙に月利 s で B 円を貸したとする。一月ごとの複利法によって，n 箇月後に甲が乙に支払うべき元利合計を P_n 円，甲が丙から受け取るべき元利合計を Q_n とし，また，$Q_n-P_n=D_n$ とする。このとき，n には無関係で r，s のみによって定まる定数 a，b を適当に選べば

$$D_{n+2}=aD_{n+1}+bD_n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

が成り立つことを示し，かつ，a，b を求めよ。ただし，$r\neq s$ とする。

分　野

一般数学：数列，漸化式，利息計算

考え方

D_{n+2}，D_{n+1}，D_n から n を消去することを考える.

【解答】

$P_n=A(1+r)^n$，$Q_n=B(1+s)^n$ であるから，

$$D_n=B(1+s)^n-A(1+r)^n.$$

$$D_{n+2}=B(1+s)^{n+2}-A(1+r)^{n+2},\quad D_{n+1}=B(1+s)^{n+1}-A(1+r)^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}(1+s)D_n-D_{n+1}&=\{(1+s)B(1+s)^n-(1+s)A(1+r)^n\}-\{(1+s)B(1+s)^n-(1+r)A(1+r)^n\}\\&=(r-s)A(1+r)^n.\end{aligned}$$

$r\neq s$ から，

$$A(1+r)^n=\frac{(1+s)D_n-D_{n+1}}{r-s},\quad B(1+s)^n=A(1+r)^n+D_n=\frac{(1+r)D_n-D_{n+1}}{r-s}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad D_{n+2}&=(1+s)^2B(1+s)^n-(1+r)^2A(1+r)^n\\&=\frac{(1+s)^2\{(1+r)D_n-D_{n+1}\}}{r-s}-\frac{(1+r)^2\{(1+s)D_n-D_{n+1}\}}{r-s}\\&=(2+s+r)D_{n+1}-(1+s)(1+r)D_n.\end{aligned}$$

以上より

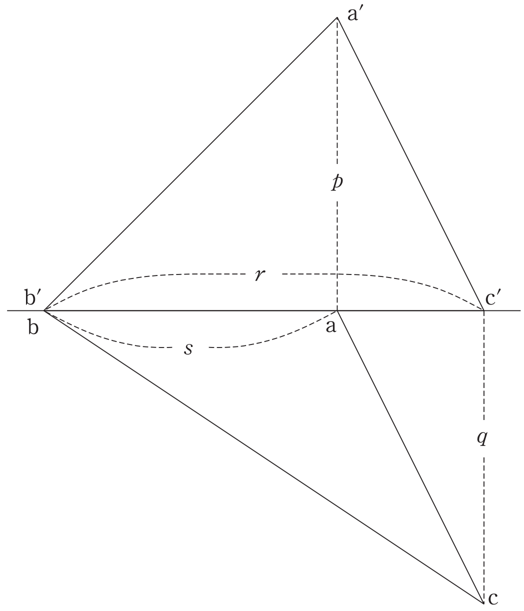
$$a=2+s+r,\quad b=-(1+s)(1+r). \qquad \cdots\text{(答)}$$

第 3 問

下の図は△ABC の投影図で，a，b，c および a′，b′，c′ はそれぞれ頂点 A，B，C の平面図および立面図である。

(i) △ABC の平面と平画面とのなす角 θ を作図せよ。

(ii) $\mathrm{aa}'=p$，$\mathrm{cc}'=q$，$\mathrm{b}'\mathrm{c}'=r$，$\mathrm{ab}=s$ として△ABC の面積を p，q，r，s で表わせ。



分　野

一般数学：投影図

考え方

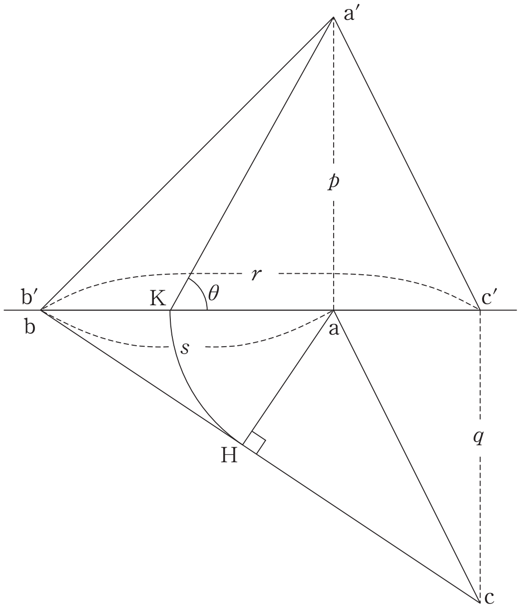
B，C は平画面内にあるから，△ABC と平画面のなす角は A から BC に下した垂線と平画面のなす角である．

△ABC の面積は BC＝bc が底辺で，A から BC へ下した垂線の長さが高さである．△ABC と△abc の高さの比が面積比である．

【解答】

(i) a から bc へ垂線をおろし，その足を H とする，H は A から BC へ下した垂線の足でもある．点 A は a の上方 p の位置にあり，AH と平画面のなす角が△ABC と平画面のなす角である．

a を中心に aH を半径とする円と基線の交点を K とすると，aH＝aK だから，△AHa≡△a′Ka より，∠a′Ka＝θ である．



(ii) △abc の面積は $\dfrac{1}{2}sq$ であり，bc の長さは $\sqrt{r^2+q^2}$．したがって，△abc の bc を底辺とする高さは

$\dfrac{sq}{\sqrt{r^2+q^2}}$．

△ABC の BC を底辺とした高さは(1)の図の

$$\mathrm{a'K}=\sqrt{\mathrm{aK}^2+\mathrm{aa'}^2}=\sqrt{\left(\frac{sq}{\sqrt{r^2+q^2}}\right)^2+p^2}=\frac{\sqrt{s^2q^2+p^2r^2+p^2q^2}}{\sqrt{r^2+q^2}}.$$

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{a'K}\cdot\mathrm{bc}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{s^2q^2+p^2r^2+p^2q^2}}{\sqrt{r^2+q^2}}\sqrt{r^2+q^2}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2q^2+p^2r^2+p^2q^2}. \qquad \cdots(答)$$

(ii) の【別解】

B を原点，平面図手前を x 軸，基線を y 軸，立面図上方を z 軸にとると，A$(0,\ s,\ p)$，B$(0,\ 0,\ 0)$，C$(q,\ r,\ 0)$．

△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(s^2+p^2)(q^2+r^2)-(sr)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2q^2+p^2q^2+p^2r^2}. \qquad \cdots(答)$$

（注 1） 投影図については **1974 年　理科　第 3 問**（注）参照．

（注 2） 当時ベクトルは高校数学で扱われていなかった．

1957 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

二点 A($\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$)，B$(-1,\ 3)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式は

$$\frac{x}{\boxed{(3)}}-\frac{y}{\boxed{(4)}}=1$$

である。また，二点 A，B から等距離にある x 軸上の点は $(3,\ 0)$ であり，y 軸上の点は $(0,\ -6)$ である。

分　野

解析 I：直線の方程式

【解答】

$\boxed{(1)}=a$，$\boxed{(2)}=b$ とおくと，A$(a,\ b)$ は $(3,\ 0)$，$(0,\ -6)$ について，B$(-1,\ 3)$ と等距離にあるから，

$$(a-3)^2+b^2=4^2+3^2,\quad a^2+(b+6)^2=1^2+9^2.$$

辺々引いて，整理して，

$$a+2b=5.\quad \therefore\quad \{(5-2b)-3\}^2+b^2=25.\quad \therefore\quad b=3,\ b=-\frac{7}{5}.$$

このうち，$b=3$ は B を表すから A の座標 $(a,\ b)$ は

$$a=\boxed{\frac{39}{5}},\quad b=-\boxed{\frac{7}{5}}.\qquad\cdots(1),\ (2)$$

垂直二等分線は 2 点から等距離にある点の軌跡だから，$(3,\ 0)$，$(0,\ -6)$ は垂直二等分線上にある．

よって，垂直二等分線の方程式は

$$\frac{x}{\boxed{3}}-\frac{y}{\boxed{6}}=1.\qquad\cdots(3),\ (4)$$

（注）　垂直二等分線が $(3,\ 0)$，$(0,\ -6)$ を通るから $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1$ であることは明らか．A はこの直線に関して B の対称点である．

II

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

$x=3$ のとき最大値 m をとる x の二次函数

$$y=ax^2+bx+\frac{1}{4a}$$

の $x=1$ のときの値が -2 であるとする。このとき，a，b，m の値はそれぞれ

$$a=\boxed{(5)},\quad b=\boxed{(6)},\quad m=\boxed{(7)}$$

である。

分　野

解析 I：2 次関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$x=3$ のとき最大になるから，$-\dfrac{b}{2a}=3$ で $a<0$.

$b=-6a$ だから，

$$y=ax^2-6ax+\frac{1}{4a}.$$

これが $(1,\ -2)$ を通るから，

$$-2=-5a+\frac{1}{4a}.\quad \therefore\quad 20a^2-8a-1=0.\quad \therefore\quad (10a+1)(2a-1)=0.$$

$a<0$ であるから，$a=-\dfrac{1}{10}$.

$$y=-\frac{1}{10}x^2+\frac{3}{5}x-\frac{5}{2}=-\frac{1}{10}(x-3)^2-\frac{8}{5}.$$

以上から，

$$a=\boxed{-\frac{1}{10}},\quad b=\boxed{\frac{3}{5}},\quad m=\boxed{-\frac{8}{5}}.$$ …(5)，(6)，(7)

Ⅲ

次の $\boxed{}$ の中に適当な正の数を記入せよ。

三次方程式 $x^3-\boxed{(8)}x^2+25x-26=0$ の3つの根は

$$2,\quad \boxed{(9)}+\boxed{(10)}i,\quad \boxed{(11)}-\boxed{(12)}i$$

である。ただし，$i=\sqrt{-1}$

分 野

解析Ⅰ：3次方程式

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

$\boxed{(8)}=a$ とおき，$f(x)=x^3-ax^2+25x-26$ とおく．

$x=2$ が $f(x)=0$ の解だから，

$$f(2)=32-4a=0.\quad \therefore\quad a=\boxed{8}.$$ …(8)

$$f(x)=x^3-8x^2+25x-26=(x-2)(x^2-6x+13)=0$$

から，残りの解は

$$x=\boxed{3}+\boxed{2}i,\quad \boxed{3}-\boxed{2}i.$$ …(9)，(10)，(11)，(12)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

a を任意の定数とするとき，円

$$(x^2+y^2-25)+a(2x-y-10)=0$$

は二つの定点 ($\boxed{(13)}$, $\boxed{(14)}$)，(5, $\boxed{(15)}$) を通り，その中心はつねに直線 $x+\boxed{(16)}\,y=\boxed{(17)}$ の上にある。

分　野

解析 I ：円の方程式

【解答】

円 $(x^2+y^2-25)+a(2x-y-10)=0$ は円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x-y-10=0$ の交点があればそれを通る．

$y=2x-10$ から

$$x^2+(2x-10)^2=25. \quad \therefore \quad x^2-8x+15=0. \quad \therefore \quad (x-3)(x-5)=0.$$

よって，常に通る 2 定点は

$$(\boxed{3},\ \boxed{-4}),\ (5,\ \boxed{0}). \qquad \cdots(13),\ (14),\ (15)$$

円

$$(x^2+y^2-25)+a(2x-y-10)=(x+a)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\{(a+4)^2+4\}=0$$

の中心 $\left(-a,\ \dfrac{a}{2}\right)$ は直線

$$x+\boxed{2}\,y=\boxed{0} \qquad \cdots(16),\ (17)$$

上にある．

(注)　この直線は円 $x^2+y^2=25$ の中心 (0, 0) を通り，直線 $2x-y=10$ に垂直な直線である．

V

次の不等式を満足する整数 n の値を求め，それぞれ答案用紙の数字のわくの⒅，⒆，⒇の解答欄（省略）に記入せよ。

⒅　$2^n < 3^{20} < 2^{n+1}$

⒆　$\cos^n 30^\circ > \left(\frac{1}{2}\right)^{30} > \cos^{n+1} 30^\circ$

⒇　$\log_{2^{n+1}} 15 < \log_{10} 3 < \log_{2^n} 15$

ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

分野

解析Ⅰ：指数・対数，三角比

【解答】

⒅　与式より，$n\log_{10}2 < 20\log_{10}3 < (n+1)\log_{10}2$.

$$n < \frac{20\times 0.4771}{0.3010} = \frac{9.5420}{0.3010} = 31.7\cdots < n+1$$

より，$n = \boxed{31}$.　…⒅

⒆　$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$n\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2} > -30\log_{10}2 > (n+1)\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad n\left(\log_{10}2 - \frac{1}{2}\log_{10}3\right) < 30\log_{10}2 < (n+1)\left(\log_{10}2 - \frac{1}{2}\log_{10}3\right).$$

$$n < \frac{2\times 30\times 0.3010}{2\times 0.3010 - 0.4771} = \frac{18.060}{0.1249} = 144.5\cdots < n+1$$

より，$n = \boxed{144}$.　…⒆

⒇　$\log_{2^n} 15 = \frac{\log_{10}15}{n\log_{10}2}$.

$$\frac{\log_{10}15}{(n+1)\log_{10}2} < \log_{10}3 < \frac{\log_{10}15}{n\log_{10}2}.$$

$$n < \frac{\log_{10}15}{\log_{10}2\log_{10}3} < n+1.$$

$$\frac{\log_{10}15}{\log_{10}2\log_{10}3} = \frac{1+\log_{10}3-\log_{10}2}{\log_{10}2\log_{10}3} = \frac{1+0.4771-0.3010}{0.3010\times 0.4771} = \frac{1.1761}{0.1436} = 8.1\cdots.$$

よって，$n = \boxed{8}$.　…⒇

1957 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

二点 A($\boxed{(1)}$, $\boxed{(2)}$)，B(4, 1) の距離は 5 で，直線 AB の勾配（傾き）は $-\dfrac{4}{3}$ である。また，△OAB の面積は $\boxed{(3)}$ である。ただし，O は座標系の原点であって，△OAB は鈍角三角形である。

分 野

解析 I：平面座標

【解答】

$\boxed{(1)}=a$，$\boxed{(2)}=b$ とおく．

AB=5 だから，

$$AB^2=(a-4)^2+(b-1)^2=25. \qquad \cdots①$$

AB の傾きが $-\dfrac{4}{3}$ であるから，

$$\frac{b-1}{a-4}=-\frac{4}{3}. \quad b=-\frac{4}{3}a+\frac{19}{3}.$$

① に代入して，$(a-4)^2+\left(-\dfrac{4}{3}a+\dfrac{16}{3}\right)^2=25.$

$$a^2-8a+7=0. \quad \therefore \quad a=1,\ 7.$$

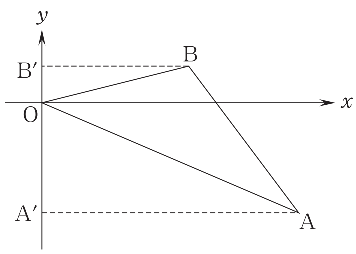
よって，A は (1, 5) または (7, −3).

$$1^2+5^2=26<OB^2+AB^2=4^2+1^2+5^2=42<7^2+(-3)^2$$

で △OAB は鈍角三角形だから，A は ($\boxed{7}$, $\boxed{-3}$) の方.　…(1)，(2)

A，B から y 軸に下した垂線の足を A′(0, −3)，B′(0, 1) とおくと，

$$\triangle OAB=台形A'ABB'-\triangle OA'A-\triangle OBB'=\frac{1}{2}\cdot(7+4)\cdot\{1-(-3)\}-\frac{1}{2}\cdot7\cdot3-\frac{1}{2}\cdot4\cdot1=\boxed{\frac{19}{2}}. \qquad \cdots(3)$$



（注）　$\boxed{(3)}$ を求めるとき，A(7, −3)，B(4, 1) から

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|7\times1-(-3)\times4|=\boxed{\frac{19}{2}}$$

としてもよい.

II

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

函数 $y=f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ において，

$$
\begin{array}{lllll}
f(0)=y_0 & & & & \\
 & y_1-y_0=z_0 & & & \\
f(1)=y_1 & & z_1-z_0=u_0 & & \\
 & y_2-y_1=z_1 & & u_1-u_0=v_0 & \\
f(2)=y_2 & & z_2-z_1=u_1 & & \\
 & y_3-y_2=z_2 & & & \\
f(3)=y_3 & & & &
\end{array}
$$

とおく。$y_0=0$，$z_0=3$，$u_0=-2$，$v_0=12$ のとき，

$$A=\boxed{(4)},\quad B=\boxed{(5)},\quad C=\boxed{(6)},\quad D=\boxed{(7)}$$

である。

分 野

解析 I ：連立方程式

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$y_n=An^3+Bn^2+Cn+D \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

$$z_n=y_{n+1}-y_n=A(3n^2+3n+1)+B(2n+1)+C \quad (n=0,\ 1,\ 2),$$

$$u_n=z_{n+1}-z_n=A\{3(2n+1)+3\}+2B=6(n+1)A+2B \quad (n=0,\ 1),$$

$$v_0=u_1-u_0=6A.$$

$$y_0=D=0,\quad z_0=A+B+C=3,\quad u_0=6A+2B=-2,\quad v_0=6A=12$$

から

$$A=\boxed{2},\quad B=-1-3A=\boxed{-7},\quad C=3-A-B=\boxed{8},\quad D=\boxed{0}.$$

…(4)，(5)，(6)，(7)

III

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

t があらゆる実数値にわたって変動するとき

$$x=2t^2-4t+5,\quad y=3t^2+at+7 \quad (a \text{ は定数})$$

を座標にもつ点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は定直線

$$Ax+By=1$$

の上にあるものとする。このとき，a，A，B の値はそれぞれ

$$a=\boxed{(8)},\quad A=\boxed{(9)},\quad B=\boxed{(10)}$$

である。そして，点 P から原点までの距離が最小値をとるのは

$$t=\boxed{(11)}$$

のときであって，その最小値は $\boxed{(12)}$ である。

分 野

解析 I ：図形と方程式

【解答】

t で表された x，y を定直線の方程式に代入すると

$$A(2t^2-4t+5)+B(3t^2+at+7)=1. \quad \therefore \quad (2A+3B)t^2+(-4A+aB)t+5A+7B=1.$$

これが任意の t について成り立つから，

$$2A+3B=0, \quad -4A+aB=0, \quad 5A+7B=1.$$

第1式と第3式から $A=3$，$B=-2$．第2式に代入すると，$a=-6$．

$$a=\boxed{-6}, \quad A=\boxed{3}, \quad B=\boxed{-2}.$$ …(8)，(9)，(10)

このとき $\mathrm{P}(2t^2-4t+5,\ 3t^2-6t+7)$．原点をOとして，

$\mathrm{OP}^2=(2t^2-4t+5)^2+(3t^2-6t+7)^2=\{2(t-1)^2+3\}^2+\{3(t-1)^2+4\}^2=13(t-1)^4+36(t-1)^2+25.$

よって，

$$t=\boxed{1}$$ …(11)

のとき，OPの最小値は

$$\boxed{5}.$$ …(12)

（注） Pの軌跡は，直線 $3x-2y=1$ のうち $x\geqq 3$ （$x=2(t-1)^2+3$ から）の部分．

Oからこの直線に下した垂線の足は $\left(\dfrac{3}{13},\ -\dfrac{2}{13}\right)$．よって，OPが最小になるのは $x=3$ のとき．

Ⅳ

次の各図形の面積を大きさの順に並べ，不等式

$$\boxed{(13)} < \boxed{(14)} < \boxed{(15)} < \boxed{(16)}$$

が成り立つようにするには，$\boxed{}$ の中にそれぞれどれを入れればよいか。

イ 原点を中心とし半径6の円の内部と，点$(0,\ 12)$を中心とし半径 $6\sqrt{3}$ の円の内部との共通部分。

ロ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の内部。

ハ 放物線 $12y=x^2$ と直線 $x-12y+72=0$ とが囲む図形。

ニ 四点$(5\cos 0°,\ 5\sin 0°)$，$(5\cos 60°,\ 5\sin 60°)$，$(5\cos 180°,\ 5\sin 180°)$，$(5\cos(-60)°,\ 5\sin(-60)°)$を頂点とする四辺形の内部。

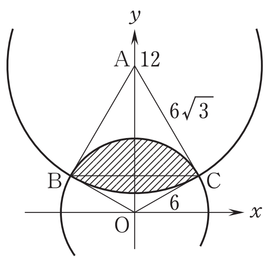
ただし，円周率 $\pi=3.14$，$\sqrt{3}=1.73$，$\sqrt{2}=1.41$ とする。

分 野

解析Ⅰ：図形と方程式，二次曲線，双曲線，**解析Ⅱ**：整式の積分

【解答】

イ 原点をO，点$(0,\ 12)$をA，2円の交点をB，Cとする．$\mathrm{OA}=12$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=6$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=6\sqrt{3}$ だから，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=60°$，$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OAC}=30°$，$\angle\mathrm{OBA}=\angle\mathrm{OCA}=90°$．イの面積は



扇形OBC－△OBC＋扇形ABC－△ABC

$$=\frac{\pi 6^2}{3}-\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi(6\sqrt{3})^2}{6}-\frac{1}{2}(6\sqrt{3})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=30\pi-36\sqrt{3}=94.20-62.28=31.92.$$

ロ 半長軸の長さが3，半短軸の長さが $2\sqrt{2}$ だから，ロの面積は

$$\pi\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,\pi\fallingdotseq 26.6$$

ハ $12y=x^2=x+72$ から $x^2-x-72=(x-9)(x+8)=0$．交点の x 座標は -8，9．

ハの面積は

$$\int_{-8}^{9}\left(\frac{x+72}{12}-\frac{x^2}{12}\right)dx=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{6}\{9-(-8)\}^3=\frac{17^3}{72}=68.2\cdots$$

ニ　4点を順に A，B，C，D とすると，A，C は x 軸上にあり，AC$=10$．B，D は x 軸について対称な位置にあり，x 軸との距離はともに，$\frac{5}{2}\sqrt{3}$．よって，ニの面積は

$$2\times\frac{1}{2}\times10\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=25\sqrt{3}=43.25.$$

以上より，面積の大きさの順は

$$\boxed{\text{ロ}}<\boxed{\text{イ}}<\boxed{\text{ニ}}<\boxed{\text{ハ}}. \qquad \cdots(13),\ (14),\ (15),\ (16)$$

V

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。もし，適当な数がないときはイと記入せよ。

θ の函数 $\sin^2\theta°$ の正の最小周期は $\boxed{(17)}$ °

θ の函数 $\cos\left(\frac{\theta}{2}+30\right)°$ の正の最小周期は $\boxed{(18)}$ °

θ の函数 $\sin\theta°\cos\theta°$ の正の最小周期は $\boxed{(19)}$ °

θ の函数 $\frac{1}{1+\tan 3\theta°}$ の正の最小周期は $\boxed{(20)}$ °

である。

分　野

解析Ⅰ：三角関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\sin\theta$，$\cos\theta$ の正の最小周期は 360° で，$\tan\theta$ の正の最小周期は 180°．

$\sin^2\theta°=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta°)$ の正の最小周期は $\frac{360°}{2}=\boxed{180}$ °　…(17)

$\cos\left(\frac{\theta}{2}+30\right)°$ の正の最小周期は $2\times360°=\boxed{720}$ °　…(18)

$\sin\theta°\cos\theta°=\frac{1}{2}\sin2\theta°$ の正の最小周期は $\frac{360°}{2}=\boxed{180}$ °　…(19)

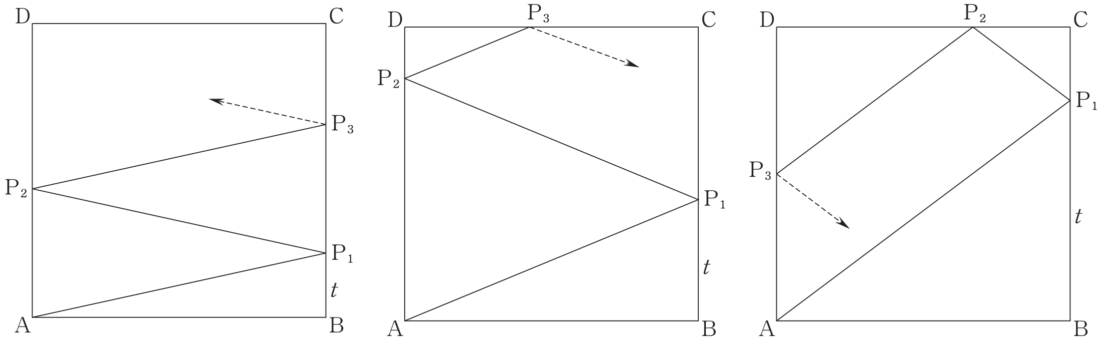
$\frac{1}{1+\tan3\theta°}$ の正の最小周期は $\frac{180°}{3}=\boxed{60}$ °　……(20)

1957年　2次試験（4科目より2科目選択・解析Ⅰ）

第1問

ABCDを一辺の長さが1の正方形とする。頂点Aより発した光が辺BCにあたって反射し，以下次々に正方形の辺にあたって反射するものとする。最初，辺BCにあたる点をP_1とし，以下次々に辺にあたる点をP_2，P_3，…とする。

$BP_1=t$ とおき，P_3から辺AD，ABに至る距離をそれぞれx，yとするとき，$x+y$ をtの函数とみなして，そのグラフをえがけ。ただし，光が正方形の頂点にあたる場合は除外する。



分　野

解析Ⅰ：いろいろな関数，平面図形

考え方

最初にあたる点がBCであるから，以後どの辺にどの順であたるかは，上の図の3つの場合だけである．それぞれの図になるtの範囲を定め，それぞれについて，P_3と，AD，ABとの距離を求めればよい．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

図を左から1図，2図，3図とよぶことにする．

(i)　1図のとき，$AP_2=2t$ で $BP_3=3t$ であり，$3t<1$ より，$0<t<\dfrac{1}{3}$.

P_3とADの距離は $x=1$．P_3とABの距離は $y=3t$ である．

$$\therefore\quad x+y=1+3t.$$

(ii)　2図のとき，$AP_2=2t$ から $0<2t<1$.

$P_2D=1-2t$．$\dfrac{DP_2}{DP_3}=\dfrac{BP_1}{AB}=t$ から，$DP_3=\dfrac{1}{t}-2$．$0<\dfrac{1}{t}-2<1$ より，$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}$.

よって，$\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2}$.

P_3とADの距離は $DP_3=x=\dfrac{1}{t}-2$．P_3とABの距離は1である．

$$\therefore\quad x+y=\frac{1}{t}-1.$$

(iii)　3図のとき，$CP_1=1-t$．$\dfrac{CP_1}{CP_2}=\dfrac{BP_1}{AB}=t$ から，$CP_2=\dfrac{1}{t}-1$．$0<\dfrac{1}{t}-1<1$ より，$\dfrac{1}{2}<t<1$.

$DP_2=2-\dfrac{1}{t}$．$\dfrac{DP_3}{DP_2}=\dfrac{BP_1}{AB}=t$ から，$DP_3=2t-1$．よって，$AP_3=2-2t$.

よって，$\dfrac{1}{2}<t<1$.

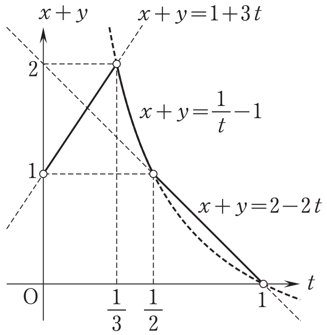
P_3とADの距離は0．P_3とABの距離は $2-2t$ である．

$$\therefore \quad x+y=2-2t.$$

$t=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ のときは光が正方形の頂点 (C, D) にあたるので除外する．

$$\therefore \quad x+y=\begin{cases} 1+3t & \left(0<t<\dfrac{1}{3} \text{ のとき}\right), \\ \dfrac{1}{t}-1 & \left(\dfrac{1}{3}<t<\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right), \\ 2-2t & \left(\dfrac{1}{2}<t<1 \text{ のとき}\right). \end{cases}$$

$x+y$ のグラフを図示すると，下図太線，白丸を除く．



…(答)

第2問

原点を通る直線が，三点 A(1, 0)，B(0, 1)，C$\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ を頂点とする三角形を，面積の等しい二つの部分に分けるとき，その直線の勾配（傾き）を求めよ。

分　野

解析 I：平面座標

考え方

原点を通る傾き m の直線と，AB，BC の交点の座標を求めれば面積比が求められる．

【解答】

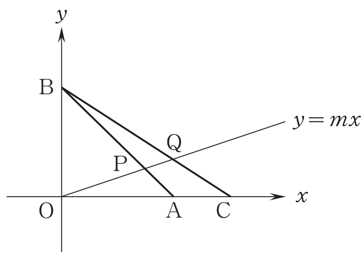
原点 O を通り，傾き $m\ (m>0)$ の直線 $l：y=mx$ と AB，BC の交点を P，Q とする．

直線 AB：$y=-x+1$，BC：$y=-\dfrac{2}{3}x+1$ から，P，Q の x 座標はそれぞれ，$\dfrac{1}{m+1}$，$\dfrac{3}{3m+2}$．

よって，P，Q はそれぞれ，BA，BC を

$$\frac{1}{m+1}:1-\frac{1}{m+1}=1:m,\quad \frac{3}{3m+2}:\frac{3}{2}-\frac{3}{3m+2}=2:3m$$

に内分する．



よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{PBQ}=(m+1)(3m+2):1\times2.$$

これが 2：1 のとき，l は △ABC を二等分する．このとき，

$(m+1)(3m+2)=4.\quad 3m^2+5m-2=0.\quad \therefore\ (3m-1)(m+2)=0.$

$m>0$ から，

$$m=\frac{1}{3}.$$

…(答)

第3問

不等式

$$(x^2-y^2)\{\log_2(9-x^2-y^2)-3\}>0$$

を満足する x，y を座標とする点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ。

分　野

解析Ⅰ：不等式と領域，対数

考え方

対数計算の真数条件に注意すること．

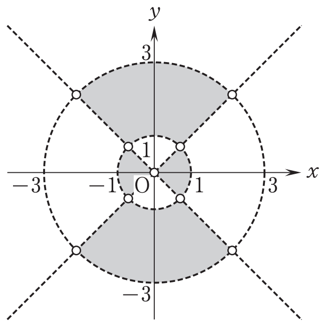
【解答】

真数条件より，$9-x^2-y^2>0$．∴　$x^2+y^2<9$．

$x^2-y^2>0$ なら $\log_2(9-x^2-y^2)-3>0$．∴　$9-x^2-y^2>8$．∴　$x^2+y^2<1$．

$x^2-y^2<0$ なら $\log_2(9-x^2-y^2)-3<0$．∴　$9-x^2-y^2<8$．∴　$x^2+y^2>1$．

以上より，$\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲は下図斜線部．境界および白丸は含まない．



…(答)

1957 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析Ⅱ）

第 1 問

時刻 t における 2 点 $P(x,\ y)$，$P'(x',\ y')$ の座標が

$$\begin{cases} x=t \\ y=20t-4t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x'=5-t \\ y'=h \quad (h\text{ は正の定数}) \end{cases}$$

という関係式によって与えられているとき，この 2 点間の距離が最小となる時刻を求めよ。

分　野

解析Ⅰ：2 次関数，**解析Ⅱ**：整式の微分

考え方

PP'^2 を t の式で表してその最小値を求める.

微分法でもできるが，下手に展開すると収拾がつかなくなる。

【解答】

$$\begin{aligned} PP'^2 &= \{(5-t)-t\}^2+\{h-(20t-4t^2)\}^2=(2t-5)^2+(4t^2-20t+h)^2 \\ &= (2t-5)^2+\{(2t-5)^2-25+h\}^2=(2t-5)^4-(49-2h)(2t-5)^2+(25-h)^2. \end{aligned}$$

(i)　$h \geqq \dfrac{49}{2}$ のとき，$49-2h \leqq 0$ だから，PP'^2 は $(2t-5)^2$ の単調増加関数．よって，$t=\dfrac{5}{2}$ のとき，PP' は最小になる.

(ii)　$0<h<\dfrac{49}{2}$ のとき，

$$PP'^2=\left\{(2t-5)^2-\frac{49-2h}{2}\right\}^2-\left(\frac{49-2h}{2}\right)^2+(25-h)^2$$

だから，$(2t-5)^2=\dfrac{49-2h}{2}$ つまり，

$$t=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}}$$

のとき PP' は最小になる.

以上から PP' を最小にする時刻は

$$t=\begin{cases} \dfrac{5}{2} & \left(h \geqq \dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right), \\ \dfrac{5}{2}\pm\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}} & \left(0<h<\dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】

$PP'=(2t-5)^4-(49-2h)(2t-5)^2+(25-h)^2$ まで**【解答】**と同じ．これを $f(t)$ とおく

$$f'(t)=8(2t-5)^3-4(49-2h)(2t-5)=4(2t-5)\{2(2t-5)^2-(49-2h)\}.$$

$f'(t)=0$ となるのは，$t=\dfrac{5}{2}$ および，$0<h<\dfrac{49}{2}$ のときの，$t=\dfrac{5}{2}\pm\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}}$.

(i)　$h \geqq \dfrac{49}{2}$ のとき，$t=\dfrac{5}{2}$ で，$f'(t)$ は負から正に変わるから，$f(t)$ は $t=\dfrac{2}{5}$ で最小になる.

(ii)　$0<h<\dfrac{49}{2}$ のとき，$\dfrac{5}{2}-\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}}=t_1$，$\dfrac{5}{2}+\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}}=t_2$ とおくと，

t	$\cdots$	t_1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	t_2	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘		↗

$(2t_1-5)^2=(2t_2-5)^2=\dfrac{49-2h}{2}$ だから，

$$f(t_1)=f(t_2)=\left(\frac{49-2h}{2}\right)^2-(49-2h)\cdot\frac{49-2h}{2}+(25-h)^2=\frac{99-4h}{4}.$$

よって，$t=\dfrac{5}{2}\pm\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}}$ のとき，$f(t)$ は最小になる．

以上から PP′ を最小にする時刻は

$$t=\begin{cases}\dfrac{5}{2} & \left(h\geqq\dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right),\\[2mm] \dfrac{5}{2}\pm\dfrac{\sqrt{49-2h}}{2\sqrt{2}} & \left(0<h<\dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right).\end{cases}$$ …(答)

(注)　PP′ の最小値は

$$\begin{cases}|25-h| & \left(h\geqq\dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right),\\[2mm] \dfrac{\sqrt{99-4h}}{2} & \left(0<h<\dfrac{49}{2}\text{ のとき}\right).\end{cases}$$

第２問

水を満たした半径 r の球状の容器の最下端に小さな穴をあける。水が流れ始めた時刻を 0 として時刻 0 から時刻 t までに，この穴を通って流出した水の量を $f(t)$，時刻 t における穴から水面までの高さを y としたとき，$f(t)$ の導函数 $f'(t)$ と y との間に

$$f'(t)=\alpha\sqrt{y}\quad(\alpha\text{ は正の定数})$$

という関係があると仮定する（ただし，水面はつねに水平に保たれているものとする）。水面の降下する速さが最小となるのは，y がどのような値をとるときであるか，また水が流れ始めてからこのときまでに要する時間を求めよ。

分　野

解析Ⅱ：微分法，積分法

考え方

y が t の関数であることに注意．水面の高さが y までに流出した水量を積分で表し，それを時間で微分する．流出した水量は y の式で表されるから，t の関数でもある．これを t で微分すると，y を t で微分した式 y' が出てくる．更にもう一回 t で微分すると y'' が求められる．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

球の中心から上方に座標軸をとると，水面の高さの座標は $y-r$ である．時刻 $t=0$ から流出した水の量は

$$\int_{y-r}^{r}\pi(r^2-z^2)\,dz=f(t)$$ …①

である．

y は t の関数であるから $\dfrac{dy}{dt}=y'$ として，① の両辺を t で微分する．

$\displaystyle\int_{y-r}^{r}\pi(r^2-z^2)dz$ を y で微分すると，$-\pi\{r^2-(y-r)^2\}$ だから

$$-\pi\{r^2-(y-r)^2\}y'=f'(t).$$

$f'(t)=\alpha\sqrt{y}$ だから，

$$\pi(2ry-y^2)y'=-\alpha\sqrt{y}. \quad \therefore \quad \pi\left(2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)y'=-\alpha. \qquad \cdots②$$

$2ry-y^2=(2r-y)y>0$ だから $y'<0$ である．

よって，$|y'|$ が最小になるのは，$2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ が最大のとき．$g(y)=2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ とおくと，

$$g'(y)=ry^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2\sqrt{y}}\left(\frac{2}{3}r-y\right).$$

y	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}r$	$\cdots$	$2r$
$g'(y)$		$+$	0	$-$	
$g(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって $y=\dfrac{2}{3}r$ のとき，$|y'|$ は最小になる． …(答)

② の両辺を t で積分する．そのとき $y=2r$ で，$t=0$ となるから，

$$\int_{2r}^{y}\pi(2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})\,dy=-\alpha t.$$

$y=\dfrac{2}{3}r$ まで積分する．

$$\begin{aligned}\int_{2r}^{\frac{2}{3}r}\pi(2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})\,dy&=\pi\left[\frac{4}{3}ry^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_{2r}^{\frac{2}{3}r}\\&=\pi\left\{\frac{4}{3}r\left(\frac{2}{3}r\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}r\right)^{\frac{5}{2}}\right\}-\pi\left\{\frac{4}{3}r(2r)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}(2r)^{\frac{5}{2}}\right\}\\&=\pi\left(\frac{32\sqrt{2}}{45\sqrt{3}}-\frac{16\sqrt{2}}{15}\right)r^{\frac{5}{2}}=-\alpha t.\end{aligned}$$

よって，このときの時刻は

$$t=\frac{\pi}{\alpha}\left(\frac{16\sqrt{2}}{15}-\frac{32\sqrt{2}}{45\sqrt{3}}\right)r^{\frac{5}{2}}=\frac{16\sqrt{2}\,\pi}{45\sqrt{3}\,\alpha}(3\sqrt{3}-2)r^{\frac{5}{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(注)　この当時置換積分は教科書の研究扱いであった．したがって，② の積分を行うとき，置換積分はできないはずである．

t は y の関数でもあるから，

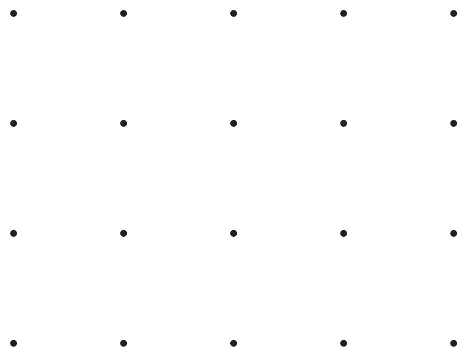
$$\frac{dt}{dy}=-\frac{\pi}{\alpha}(2ry^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{3}{2}})$$

として，y で積分するとでも言い換えて使ったのであろうか．

本質的には微分方程式の問題である．

第3問

下の図のように碁盤の目の形に並んでいる20個の点から，同一直線上にない3個の点を選んで，それらを頂点とする三角形を作る。全部でいくつの三角形ができるか。



分　野

解析Ⅱ：個数

考え方

20個の点から3点を取り出すと多くの場合三角形ができるが3点が一直線上にあるときはできない．一直線上にある3点の組が何個あるかを考える。

【解答】

20個の点から3個の点を取り出す組合せの個数は

$${}_{20}C_3=1140.$$

一直線上にある3点の組の個数を考える．

水平な直線は4本ありそれぞれに5個ずつの点がある．したがって，これらの直線上にある3点の組の個数は $4\times{}_5C_3=40$.

垂直な直線は5本ありそれぞれに4個ずつの点がある．したがって，これらの直線上にある3点の組の個数は $5\times{}_4C_3=20$.

横の点の幅と縦の点の幅が等間隔だとしたときの傾きを“傾き”と表現する．

“傾き”が ±1 の直線上に3点あるものが4本，4点あるものが4本ある．したがって，“傾き”が ±1 の直線上にある3点の組の個数は $4\times{}_3C_3+4\times{}_4C_3=4+16=20$.

“傾き”が $\pm\dfrac{1}{2}$ の直線上に3点あるものが4本ある．したがって，“傾き”が $\pm\dfrac{1}{2}$ の直線上にある3点の組の個数は $4\times{}_3C_3=4$.

よって，一直線上にある3点の組合せの個数は $40+20+20+4=84$.

よって，求める個数は

$$1140-84=1056\text{個}.$$

…(答)

1957 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・幾何）

第 1 問

△ABC の辺 BC の中点を M とする。∠BAM＋∠ACB が直角であるとき，△ABC はどのような形であるか。

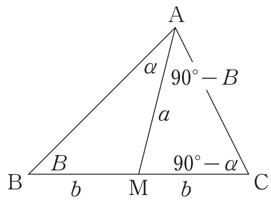
分　野

幾何：三角比

考え方

△ABM と △AMC において 2 辺の長さが等しいことに注目．それぞれの内角を ∠BAM と ∠B で表して比較する．

【解答】



△ABM と △AMC において AM が共通で，BM＝CM．AM＝a，BM＝b とおく．

また，∠BAM＝α，∠ABC＝B とおくと，∠ACB＝$90°-\alpha$．

∠BAC＝$180°-B-(90°-\alpha)=90°-B+\alpha$．

よって，∠MAC＝$(90°-B+\alpha)-\alpha=90°-B$．

△ABM と △AMC において正弦定理を用いると，

$$\frac{a}{\sin B}=\frac{b}{\sin\alpha},\quad \frac{a}{\sin(90°-\alpha)}=\frac{b}{\sin(90°-B)}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos B}.\quad \therefore\quad \sin\alpha\cos\alpha=\sin B\cos B.\quad \therefore\quad \sin 2\alpha=\sin 2B.$$

$$\therefore\quad 2\alpha=2B \text{ または } 2\alpha=180°-2B.\quad \therefore\quad \alpha=B \text{ または } \alpha=90°-B.$$

$\alpha=B$ のとき，∠BAC＝$\alpha+(90°-\alpha)=90°$ となるので，△ABC は ∠A が直角の直角三角形．

$\alpha=90°-B$ のとき，AM は ∠BAC の二等分線になり，AM が中線であることとあわせて，AB＝AC の二等辺三角形．

以上から

△ABC は ∠A が直角の直角三角形または AB＝AC の二等辺三角形である．　　…(答)

第2問

頂角がそれぞれ 45°，60°，75° で外接円の半径が r であるような三角形の面積を求めよ。

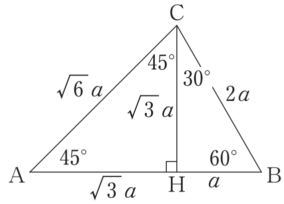
分　野

幾何：三角比

考え方

75° の頂点から対辺に垂線を下すと，3 辺の比がわかり，外接円の半径も出すことができる．

【解答】



45°，60°，75° の頂点を A，B，C とし，C から AB へ下した垂線の足を H とする．

BH$=a$ とおくと，△BCH において，∠B$=60°$，∠H$=90°$ だから，CH$=\sqrt{3}\,a$，BC$=2a$．

△ACH において，∠A$=45°$，∠H$=90°$ だから，AH$=\sqrt{3}\,a$，AC$=\sqrt{6}\,a$．

外接円の半径が r だから

$$2r=\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{2a}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}\,a.$$

よって，$r=\sqrt{2}\,a$.

△ABC の面積を a で書くと，

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)a\cdot\sqrt{3}\,a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2.$$

r で書くと，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}r^2. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

円

$$x^2+y^2=1$$

と定点 A$(a,\ b)$ がある。この円周上の動点 Q における接線上に点 P をとり,

$$\mathrm{AP}=2\mathrm{PQ}$$

ならしめるとき,点 P の軌跡はいかなる図形であるか。

また,とくに $a=3$, $b=-2$ の場合を図示せよ。

分 野

幾何:円の方程式,軌跡

考え方

三平方の定理から P を円 $x^2+y^2=1$ の外部にとれば,P から接線を引くことができ,その長さ PQ も定まる.これと AP の長さから P の軌跡の方程式は求められる.

【解答】

P の座標を $(x,\ y)$ とおく.$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{QP}$ より,$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{PQ}^2$.∴ $\mathrm{PQ}^2=x^2+y^2-1$.

$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$ で,$\mathrm{AP}=2\mathrm{PQ}$ だから,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=4(x^2+y^2-1). \quad \therefore \quad 3x^2+3y^2+2ax+2by=a^2+b^2+4.$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\left(y+\frac{b}{3}\right)^2=\frac{4}{9}(a^2+b^2+3).$$

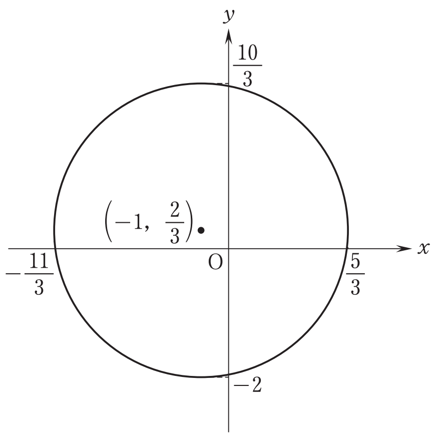
この式をみたすとき,$4(x^2+y^2-1)=(x-a)^2+(y-b)^2\geqq 0$ だから,この円は円 $x^2+y^2=1$ の外側にある.

よって,求める軌跡は円

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^2+\left(y+\frac{b}{3}\right)^2=\frac{4}{9}(a^2+b^2+3). \qquad \cdots(答)$$

$a=3$, $b=-2$ のとき

$$(x+1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{8}{3}\right)^2.$$



$\cdots$(答)

1957 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・一般数学）

第 1 問

ある年に甲は年利率 2.9 ％で 80 万円を，乙は年利率 5 ％で 50 万円を，丙は年利率 8 ％で 30 万円を預金した．そのままにしておけば，甲，乙，丙三人の貯金高の順位は預け入れた時から経過した年数とともにどのように変わるか。ただし，利息の計算は 1 年ごとの複利とする。必要があれば次の対数を用いよ。

$$\log_{10}2=0.30103,\quad \log_{10}3=0.47712,\quad \log_{10}7=0.84510$$

分　野

一般数学：数列，対数，利息計算

考え方

複利による貯金高は等比数列になる．公比は 1＋利率 で計算される．

【解答】

n 年後の甲の貯金高は 80×1.029^n 万円，乙の貯金高は 50×1.05^n 万円，丙の貯金高は 30×1.08^n 万円である．

$$1.029=\frac{3\times7^3}{10^3},\quad 1.05=\frac{3\times7}{2\times10},\quad 1.08=\frac{2^2\times3^3}{10^2}.$$

$$a_n=8\times1.029^n,\quad b_n=5\times1.05^n,\quad c_n=3\times1.08^n$$

とおくと，

$$\log_{10}a_n=3\log_{10}2+n(\log_{10}3+3\log_{10}7-3),$$
$$\log_{10}b_n=1-\log_{10}2+n(\log_{10}3+\log_{10}7-\log_{10}2-1),$$
$$\log_{10}c_n=\log_{10}3+n(2\log_{10}2+3\log_{10}3-2).$$

$$\begin{aligned}\log_{10}a_n-\log_{10}b_n&=4\log_{10}2-1-n(2-\log_{10}2-2\log_{10}7)\\&=4\times0.30103-1-n(2-0.30103-2\times0.84510)\\&=0.20412-0.00877n>0\end{aligned}$$

とすると，

$$n<\frac{0.20412}{0.00877}=23.2\cdots$$

$$\begin{aligned}\log_{10}b_n-\log_{10}c_n&=1-\log_{10}2-\log_{10}3-n(3\log_{10}2+2\log_{10}3-\log_{10}7-1)\\&=1-0.30103-0.47712-n(3\times0.30103+2\times0.47712-0.84510-1)\\&=0.22185-0.01223n>0\end{aligned}$$

とすると，

$$n<\frac{0.22185}{0.01223}=18.1\cdots$$

$$\begin{aligned}\log_{10}a_n-\log_{10}c_n&=3\log_{10}2-\log_{10}3-n(2\log_{10}2+2\log_{10}3-3\log_{10}7+1)\\&=3\times0.30103-0.47712-n(2\times0.30103+2\times0.47712-3\times0.84510+1)\\&=0.42597-0.02100n>0\end{aligned}$$

とすると，

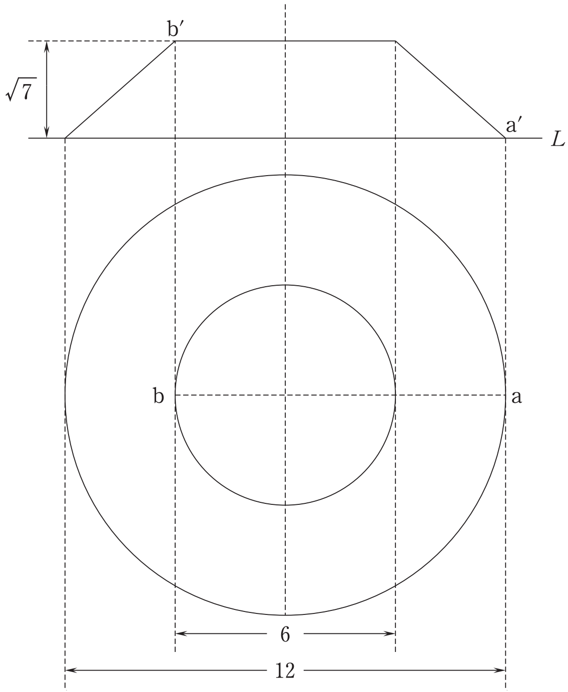
$$n<\frac{0.42597}{0.02100}=20.2\cdots$$

よって，n 年後の貯金高の大小の順は次のようになる．

$$\begin{cases} \text{丙の貯金高}<\text{乙の貯金高}<\text{甲の貯金高} & (0 \leqq n \leqq 18), \\ \text{乙の貯金高}<\text{丙の貯金高}<\text{甲の貯金高} & (19 \leqq n \leqq 20), \\ \text{乙の貯金高}<\text{甲の貯金高}<\text{丙の貯金高} & (21 \leqq n \leqq 23), \\ \text{甲の貯金高}<\text{乙の貯金高}<\text{丙の貯金高} & (24 \leqq n). \end{cases}$$ …(答)

第2問

下の図は直円錐台の投影図であって，その高さは $\sqrt{7}$，上底面と下底面の直径はそれぞれ 6 および 12 である。また側面上の二点 A，B の平面図はそれぞれ a，b であり，立面図はそれぞれ a′，b′ である。側面上を通って二点 A，B を結ぶ曲線の長さの最小値を求めよ。ただし，曲線は上底面および下底面の周上を通ってもよい。



分　野

一般数学：投影図，展開図

考え方

展開図上で最短コースを考える．側面の展開図は二重の円の一部になるが，中心角は底面の周長と半径の比から求めることができる．

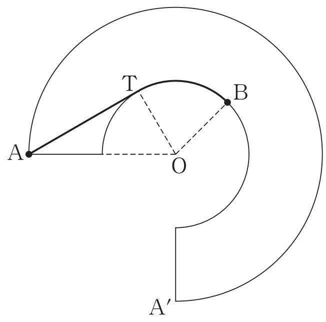
【解答】

円錐台を上へ延長して円錐を作り，その頂点を V とする．V を頂点とし，円錐台の下底面を底面とする円錐を V_1，V を頂点とし，円錐台の上底面を底面とする円錐を V_2 とする．V_1，V_2 は相似で，円錐台の上底面の半径は 3 で，下底面の半径は 6 だから，その相似比は 2：1．円錐台の高さが $\sqrt{7}$ だから，V_1，V_2 の高さの差は $\sqrt{7}$．よって，V_1 の高さは $2\sqrt{7}$，V_2 の高さは $\sqrt{7}$．それぞれの母線の長さは V_1 が $\sqrt{6^2+(2\sqrt{7})^2}=8$ で，V_2 は 4 である．

側面を点 A を通る母線で切った展開図を描く．

下底面の半径は 6，母線の長さが 8 だから側面の展開図の中心角は

$\dfrac{6}{8}\times 360^\circ=270^\circ$.



点 B は上底面で，A の反対側の点だから，内側の円の弧の中点である．

A から B へ側面を通って行く最短コースは A から内側の円へ接線 AT を引き，AT にそって直進し，その後内側の円（上底面の周）に沿って T から B へ行くコースである．最短コースは逆回りのコースもある．

二重円の中心を O とすると，OA=8，OT=4 で，$AT\perp OT$ だから，$AT=4\sqrt{3}$.

$\angle AOB=\dfrac{1}{2}\cdot 270^\circ=135^\circ$ で，$\angle AOT=60^\circ$ だから，$\angle TOB=75^\circ$．OB=4 だから，弧 $\overset{\frown}{TB}$ の長さは

$\dfrac{75}{360}\cdot 8\pi=\dfrac{5}{3}\pi$.

よって，最短コースの長さは

$$4\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi. \qquad \cdots(答)$$

（注） 投影図については **1974 年　理科　第 3 問**（注）参照．

第 3 問

甲乙両人が次のようなゲームをする。

まず机の上に n 個の碁石をおき，その中から甲乙交互に幾個かの碁石を取る。ただし，一回に取る碁石の個数は 1 個または 2 個または 3 個とし，相手が取った個数と同数の碁石をその直後に取ることは許されない。このようにして机の上の碁石の数をへらしてゆくうちに，しまいには碁石を取ることができなくなる。最初に取れなくなったものを負けとする（たとえば，乙が 3 個とって机の上の碁石がなくなれば甲の負けであり，乙が 1 個とって 1 個残しても甲の負けである）。

n が 4 の倍数であって，甲から取り始めるものとすれば，甲がどのような取り方をしても，乙は甲に勝つことができる。このことを証明せよ。

分　野

一般数学：論理

考え方

4 の倍数について，数学的帰納法で証明する．

【解答】

碁石の個数が $n=4m$ 個のとき，甲から始めると乙が必ず勝つことを数学的帰納法で証明する．

(I-a)　$n=4$ のときについて考える．

(i)　最初に甲が 1 個の碁石をとったとき乙は 3 個の碁石をとればよい．このとき，机の上には碁石がないから甲の負けである．

(ii)　最初に甲が 2 個の碁石をとったとき乙は 1 個の碁石をとればよい．このとき，机の上には碁石が 1 個あるが甲は乙と同じ個数の 1 個をとることができないから甲の負けである．

(iii)　最初に甲が 3 個の碁石をとったとき乙は 1 個の碁石をとればよい．このとき，机の上には碁石がないから甲の負けである．

以上から，甲が最初に何個の碁石をとっても負けるから，乙は必ず勝つ．　（証明終り）

(I-b)　$n=8$ のときについて考える．

(i)　最初に甲が1個の碁石をとったとき乙は3個の碁石をとればよい．このとき，机の上には4個の碁石があり，甲から始めるから(I-a)より甲は必ず負ける．

(ii)　最初に甲が2個の碁石をとったとき乙は3個の碁石をとればよい．このとき，机の上には碁石が3個あるが甲は乙と同じ個数の3個をとることができないから甲は1個か2個をとる．次に乙は残りの2個か1個をとることができる．このとき，机の上には碁石がなくなるから甲の負けである．

(iii)　最初に甲が3個の碁石をとったとき乙は1個の碁石をとればよい．このとき，机の上には4個の碁石があり，甲から始めるから(I-a)より甲は必ず負ける．

以上から，甲が最初に何個の碁石をとっても負けるから，乙は必ず勝つ．　　　　　　　　　　(証明終り)

(Ⅱ)　$n=4,\ 8,\ 12,\ \cdots,\ 4k$ のとき乙が甲に必ず勝つことができることが証明されているとする．

$n=4(k+1)$ のときについて考える．

(i)　最初に甲が1個の碁石をとったとき乙は3個の碁石をとればよい．このとき，机の上には $4k$ 個の碁石があり，甲から始めるから仮定より甲は必ず負ける．

(ii)　最初に甲が2個の碁石をとったとき乙は3個の碁石をとればよい．このとき，机の上には碁石が $4k-1$ 個あるが甲は乙と同じ個数の3個をとることができないから甲は1個か2個をとる．次に乙は残りの2個か1個をとることができる．このとき，机の上には碁石が $4(k-1)$ 個あり，甲から始めるから仮定より甲は必ず負ける．

(iii)　最初に甲が3個の碁石をとったとき乙は1個の碁石をとればよい．このとき，机の上には $4k$ 個の碁石があり，甲から始めるから仮定より甲は必ず負ける．

以上から，甲が最初に何個の碁石をとっても負けるから，乙は必ず勝つ．　　　　　　　　　　(証明終り)

(I-a)，(I-b)，(Ⅱ)から n が4の倍数のとき，乙は必ず勝つ．

(注1)　当時の一般数学では数学的帰納法は教えていないようなので，「以下同様に繰り返す」のような表現でよいのだと思う．

(注2)　n が4の倍数でないときは逆に甲が必ず勝つ．甲は n を4で割った余りの個数の碁石を最初にとればよいから．

(注3)　(I-b)，(Ⅱ)の(ii)のとき甲が2個とったあと乙は1個とってもよい．このとき甲が2個とっても，3個とっても，乙は甲のとった分と合わせて5個になるようにでき碁石を $4(k-1)$ 個にすることができる．

石取りゲーム（1957 年一般数学）

第 2 次改訂までは「一般数学」という科目があり '50 年から '58 年まで「解析Ⅰ」「解析Ⅱ」「幾何」とともに 4 科目から 1 科目または 2 科目選択するようになっていた．当時の卒業に必要な単位はこのうち 1 科目を修了することだったらしく，他の大学でも同様な処置がされていた．ただし，恐らく受験校でこの科目履修していたのはわずかであったと思われる．内容は社会生活と数学，経済生活と数学，文明の進歩と数学のような一般的な内容で，入試には何を出してもおかしくないような内容だった．しかも，これが「解析Ⅰ」「解析Ⅱ」「幾何」と並列に出題されるからその出題は超易問から奇問珍問にいたるまで様々であった．

また，今（2020）では信じにくいことなのだが，この時代東大の入試問題は文科と理科の別がなく，全問共通問題だった．

その中で，'57 年の石取りゲームの問題（上記）は特出できる良問だと思われる．

問題内容は繰り返さないが，このような問題は現代でも通用する問題に思える．

この問題では最終段階の手順から逆算する事が重要である．甲がどのような手を打っても乙に対応策があり，最終的に乙が勝つことが示される．

予め何か学習しておいたことが役に立つような問題ではない．
問題で表された規則をよく理解してその上で工夫をする能力が試されている．

このような問題は出題者も自由な発想が必要で，なかなか作ることが難しいが，これからの時代においてますます必要とされるタイプの問題であろう．

1958 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

x，y，z についての連立一次方程式

$$2x+\boxed{(1)}\,y+5z=10,\quad x+3y+\boxed{(2)}\,z=8,\quad -3x-8y+4z=17$$

の解は $x=\boxed{(3)}$，$y=1$，$z=\boxed{(4)}$ で，この値はまた $x^2+y^2+z^2=26$ を満足する。

分　野

解析 I：連立方程式

【解答】

$\boxed{(1)}=a$，$\boxed{(2)}=b$ とおくと，$y=1$ から

$$2x+a+5z=10,\quad x+3+bz=8,\quad -3x-8+4z=17,\quad x^2+1+z^2=26.$$

$$2x+a+5z=10 \quad \cdots①,\quad x+bz=5 \quad \cdots②,\quad -3x+4z=25 \quad \cdots③,\quad x^2+z^2=25 \quad \cdots④$$

とおく．

③ から $z=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{25}{4}$．④ に代入して

$$x^2+\left(\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}\right)^2=25. \quad \therefore \quad (x+3)^2=0.$$

よって，$x=-3$，$z=4$．①，② に代入して

$$\therefore \quad a=\boxed{-4},\quad b=\boxed{2},\quad x=\boxed{-3},\quad z=\boxed{4}. \qquad \cdots(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

II

次の（　　）の中にイロハニホのうち適当なものを記入し，$\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

イ　0 より小さい。

ロ　0 と 1 の間にある。

ハ　1 と 2 の間にある。

ニ　2 と 3 の間にある。

ホ　3 より大きい。

ax^2+4x-3 が $x=1$ で負，$x=2$ で正となるためには $\boxed{(5)}<a<\boxed{(6)}$ が必要十分条件である。このとき，方程式 $ax^2+4x-3=0$ の 2 根のうち大きい方を α，小さい方を β とすれば α は（ (7) ）。そして β は（ (8) ）。

分　野

解析 I：2 次方程式

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

$f(x)=ax^2+4x-3$ とおく．$f(1)=a+1<0$，$f(2)=4a+5>0$ より，

$$\boxed{-\frac{5}{4}}<a<\boxed{-1}. \qquad \cdots(5),\ (6)$$

このとき，$f(3)=9a+9<0$ より，

$$1<\beta<2<\alpha<3.$$

よって，α は（2 と 3 の間にある）．そして β は（1 と 2 の間にある）． …(7)＝ニ，(8)＝ハ

Ⅲ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

函数 $y=|x^2-4|-3x$ は $-2\leqq x\leqq 5$ なる範囲で $x=\boxed{(9)}$ のとき最大値 $\boxed{(10)}$ をとり，$x=\boxed{(11)}$ のとき最小値 $\boxed{(12)}$ をとる。

分野

解析Ⅰ：絶対値を含む関数，2 次関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$f(x)=|x^2-4|-3x$ とおくと

(i) $2<x\leqq 5$ のとき $y=f(x)=x^2-3x-4$ は $x=\dfrac{3}{2}$ に頂点をもつ下に凸な放物線の一部だから，

$$f(2)=-6<f(x)\leqq f(5)=6.$$

(ii) $-2\leqq x\leqq 2$ のとき $f(x)=-x^2-3x+4=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}.$

$$\therefore\quad f(2)=-6\leqq f(x)\leqq \frac{25}{4}.$$

よって，$x=\boxed{-\dfrac{3}{2}}$ のとき最大値 $\boxed{\dfrac{25}{4}}$ をとり， …(9)，(10)

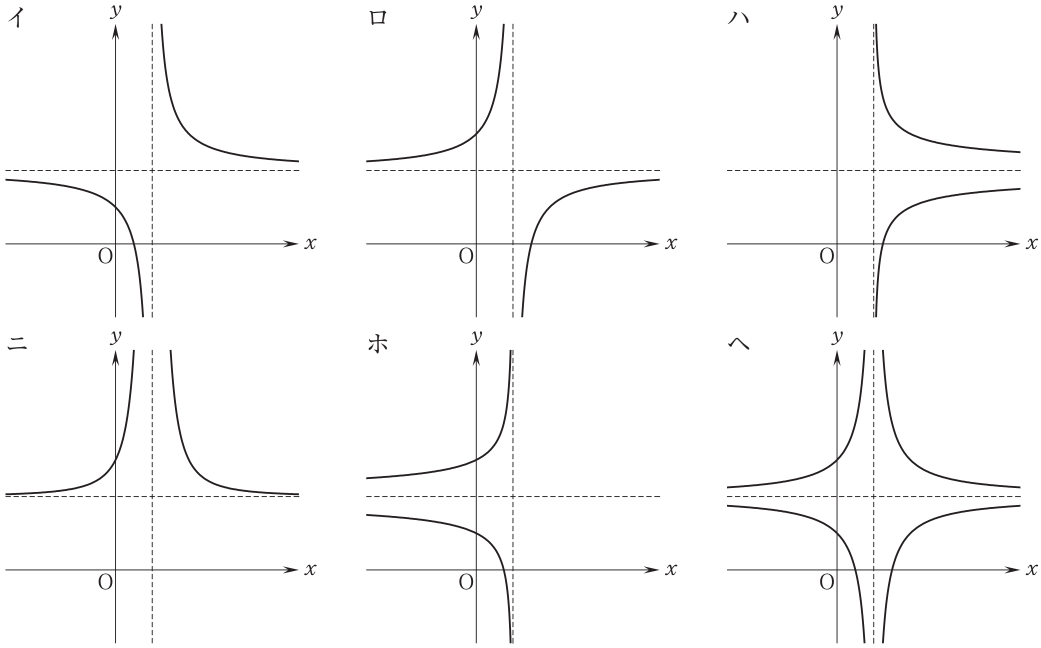
$x=\boxed{2}$ のとき最小値 $\boxed{-6}$ をとる． …(11)，(12)

Ⅳ

次の方程式の表わす曲線は下に示したイからへまでの 6 つの曲線のいずれかである。

(i) $(x-1)(y-2)^2=1$　　(ii) $(x-1)^2(y-2)=1$

(iii) $(x-1)(y-2)=1$　　(iv) $(x-1)^2(y-2)^2=1$



このとき，次の $\boxed{}$ にイロハニホへのうち適当なものを記入せよ。

(i) のグラフは $\boxed{(13)}$，(ii) のグラフは $\boxed{(14)}$，(iii) のグラフは $\boxed{(15)}$，(iv) のグラフは $\boxed{(16)}$ である。

分 野

解析 I ：曲線の方程式，分数関数

【解答】

(i) $(x-1)(y-2)^2=1$ のグラフは $x-1=\dfrac{1}{(y-2)^2}>0$ の範囲にある．(i) のグラフは $\boxed{\text{ハ}}$．　…(13)

(ii) $(x-1)^2(y-2)=1$ のグラフは $y-2=\dfrac{1}{(x-1)^2}>0$ の範囲にある．(ii) のグラフは $\boxed{\text{ニ}}$．　…(14)

(iii) $(x-1)(y-2)=1$ のグラフは $x-1>0$，$y-2>0$ または $x-1<0$，$y-2<0$ の範囲にある．(iii) のグラフは $\boxed{\text{イ}}$．　…(15)

(iv) $(x-1)^2(y-2)^2=1$ のグラフは $(x-1)(y-2)=1$ のグラフと $(x-1)(y-2)=-1$ からなる．(iv) のグラフは $\boxed{\text{ヘ}}$．　…(16)

V

$y=\log_x 2$ のとき，記号イロハニを次の $\boxed{}$ の中に入れて，不等式
$\boxed{(17)}<\boxed{(18)}<\boxed{(19)}<\boxed{(20)}$ が成り立つようにせよ。ただし，$x=\tan 230°$ のときの y の値をイ，$x=\tan 605°$ のときの y の値をロ，$x=\sin 1100°$ のときの y の値をハ，$x=\cos 770°$ のときの y の値をニで表わす。

分　野

解析Ⅰ：対数関数，三角関数

【解答】

0° から 90° までの角で表すと，

$$\tan 230°=\tan 50°,\quad \tan 605°=\tan 65°,\quad \sin 1100°=\sin 20°,\quad \cos 770°=\cos 50°.$$

$$\sin 20°<\cos 50°=\sin 40°<1<\tan 50°<\tan 65°.$$

$\log_x 2$ は $0<x<1$ のとき負で単調減少，$x>1$ のとき正で単調減少だから，

$$\log_{\cos 770°} 2<\log_{\sin 1100°} 2<0<\log_{\tan 605°} 2<\log_{\tan 230°} 2.$$

よって

$$\boxed{\text{ニ}}<\boxed{\text{ハ}}<\boxed{\text{ロ}}<\boxed{\text{イ}}.$$ …(17)，(18)，(19)，(20)

1958 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

a，b は実数とする。x^4-4x+a が $(x-b)^2$ で割り切れるとすれば，$a=\boxed{(1)}$，$b=\boxed{(2)}$ である。

また，そのときの商は $x^2+\boxed{(3)}x+\boxed{(4)}$ である。

分　野

解析 I：恒等式

【解答】

$\boxed{(3)}=c$，$\boxed{(4)}=d$ とすると，

$$x^4-4x+a=(x-b)^2(x^2+cx+d)=x^4-(2b-c)x^3+(b^2-2bc+d)x^2+(b^2c-2bd)x+b^2d$$

より

$$2b-c=0,\quad b^2-2bc+d=0,\quad b^2c-2bd=-4,\quad b^2d=a$$

よって，

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{1},\quad c=\boxed{2},\quad d=\boxed{3}.\qquad \cdots(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

II

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

3 直線 $2y=x+\boxed{(5)}$，$y=\boxed{(6)}x+4$，$\boxed{(7)}y=\boxed{(8)}x+1$ が囲む三角形の 2 つの頂点は $(0,\ 6)$，$(2,\ 0)$ である。

分　野

解析 I：直線の方程式

【解答】

$\boxed{(5)}=a$，$\boxed{(6)}=b$，$\boxed{(7)}=c$，$\boxed{(8)}=d$ とおき

$$l_1:2y=x+a,\quad l_2:y=bx+4,\quad l_3:cy=dx+1$$

とおく．l_2 は $(0,\ 6)$ を通らないから，$(2,\ 0)$ を通る．よって，$b=-2$.

よって，l_1，l_3 は $(0,\ 6)$ を通る．よって，$a=12$，$c=\dfrac{1}{6}$.

l_1 は $(2,\ 0)$ を通らないから，l_3 が $(2,\ 0)$ を通る．よって，$d=-\dfrac{1}{2}$.

よって，

$$a=\boxed{12},\quad b=\boxed{-2},\quad c=\boxed{\dfrac{1}{6}},\quad d=\boxed{-\dfrac{1}{2}}.\qquad \cdots(5),\ (6),\ (7),\ (8)$$

Ⅲ

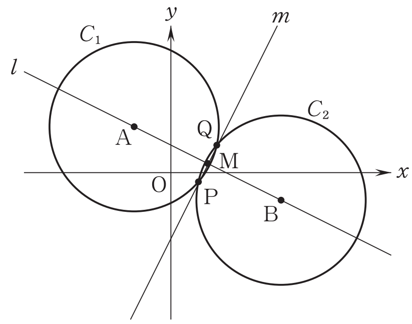
次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

半径が等しい2つの円 $x^2+y^2+8x-10y-44=0$ と $x^2+y^2+\boxed{(9)}x+\boxed{(10)}y+\boxed{(11)}=0$ とは2点 $(\boxed{(12)}, -1)$ と $(\boxed{(13)}, 3)$ で交わり，これら2つの円の中心を通る直線の方程式は $x+2y-6=0$ である。

分　野

解析Ⅰ：円の方程式

【解答】



C_1：$x^2+y^2+8x-10y-44=0$ とおくと，

C_1：$(x+4)^2+(y-5)^2=85$ から C_1 の中心Aは $(-4, 5)$ で半径は $\sqrt{85}$.

もう1つの円を C_2 とするとその中心Bは直線 l：$x+2y-6=0$ 上にあるから $B(6-2t, t)$ とおく.

半径が等しいから2円の交点は線分ABの垂直二等分線 m 上にあり，線分ABの中点Mは，2交点P，Qを結ぶ線分の中点でもある．y 座標が -1 の方をP，3の方をQとする.

ABの中点は $M\left(1-t, \dfrac{5+t}{2}\right)$ であり，P，Qの y 座標は -1 と3だから，

$$\frac{-1+3}{2}=\frac{5+t}{2}. \quad \therefore \quad t=-3.$$

よって $M(4, 1)$ であり，$B(12, -3)$ である．C_2 の方程式は

$$(x-12)^2+(y+3)^2=85. \quad x^2+y^2+\boxed{-24}x+\boxed{6}y+\boxed{68}=0. \qquad \cdots(9), (10), (11)$$

ABの垂直二等分線は m：$y=2x-7$ だから，P，Qの座標は，

$$P(\boxed{3}, -1), \quad Q(\boxed{5}, 3). \qquad \cdots(12), (13)$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

函数 $y=\sin^4 x°+\cos^4 x°$ のとりうる値の範囲は $\boxed{(14)} \leqq y \leqq \boxed{(15)}$ である。また，y の値が $\dfrac{13}{25}$ になるような x の値は $0<x<90$ の範囲に2つあるが，その大きい方を α とすれば

$$\cos\alpha°=\sqrt{\boxed{(16)}}, \quad \tan\alpha°=\sqrt{\boxed{(17)}}$$

である。

分　野

解析Ⅰ：三角関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である.

$t=\cos^2 x°$ とおくと，$\sin^2 x°=1-t$．$0 \leqq t \leqq 1$.

$$y=t^2+(1-t)^2=2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

よって，$\boxed{\dfrac{1}{2}} \leqq y \leqq \boxed{1}$. $\qquad \cdots(14), (15)$

$0<x<90$ のとき，$0<\cos x°<1$，$0<t<1$．

$y=2t^2-2t+1=\dfrac{13}{25}$ から，$25t^2-25t+6=(5t-2)(5t-3)=0$．

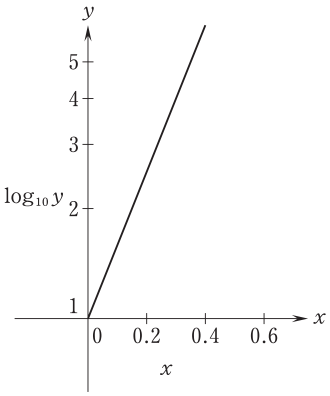
よって，$t=\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$．$\cos x°=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$，$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$．

$0<x<90$ のとき $\cos x°$ は x について減少するから，x の大きい方は $\cos x°$ の小さい方．

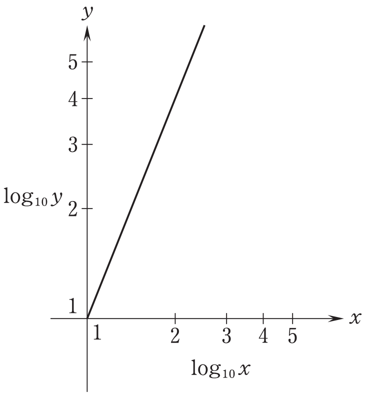
$$\therefore\quad \cos\alpha°=\sqrt{\boxed{\dfrac{2}{5}}},\quad \tan\alpha°=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha°}-1}=\sqrt{\boxed{\dfrac{3}{2}}}.$$ …(16)，(17)

V

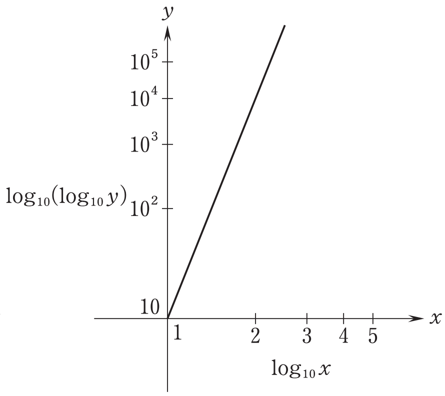
下に示した図(i)，(ii)，(iii)は，横軸の目盛りに x または $\log_{10}x$，縦軸の目盛りに $\log_{10}y$ または $\log_{10}(\log_{10}y)$ を用いて，下の函数イロハニホのいずれかをグラフに表わしたものである（ただし，$x>0$ とする）。



図(i)



図(ii)



図(iii)

函数　イ　$y=x^2$　　ロ　$y=\sqrt{x}$　　ハ　$y=x^{100}$

　　　ニ　$y=100^x$　　ホ　$y=10^{x^2}$（10 の x^2 乗）

次の $\boxed{}$ にイロハニホのうち適当な文字を入れよ。

図(i)のグラフは函数 $\boxed{(18)}$ を表わす。

図(ii)のグラフは函数 $\boxed{(19)}$ を表わす。

図(iii)のグラフは函数 $\boxed{(20)}$ を表わす。

分　野

解析Ⅰ：対数座標

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

(i)　傾きを a とすると，$\log_{10}y=ax$．$y=10^{ax}$．

$100^x=10^{2x}$ だから，この形をしているのは $\boxed{y=100^x}$ のみ．…(18)＝ニ

(ii)　傾きを a とすると，$\log_{10}y=a\log_{10}x$．$y=x^a$．

イ，ロ，ハはそれぞれ，x^2，$x^{\frac{1}{2}}$，x^{100} で同じ形をしている．図の直線の傾きから $\boxed{y=x^2}$．…(19)＝イ

(iii)　傾きを a とすると，$\log_{10}(\log_{10}y)=a\log x$．$\log_{10}y=x^a$　∴　$y=10^{x^a}$．

この形をしているのは $\boxed{y=10^{x^2}}$ のみ．…(20)＝ホ

1958 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析Ⅰ）

第 1 問

x に関する方程式

$$x^2+2(1-\cos\alpha^\circ)x+(1-\sin\alpha^\circ)^2=0$$

が実根をもつとき，x に関する方程式

$$x^2-2x+\cos(\alpha^\circ+45^\circ)+1=0$$

は実根をもつか虚根をもつか調べよ。

分　野

解析Ⅰ：2 次方程式，三角関数

考え方

2 つの方程式の判別式が正または 0 である条件を比較する．

【解答】

問題文の「実根，虚根」は「実数解，虚数解」の当時の表記である．

$$x^2+2(1-\cos\alpha^\circ)x+(1-\sin\alpha^\circ)^2=0, \quad \cdots①$$

$$x^2-2x+\cos(\alpha^\circ+45^\circ)+1=0 \quad \cdots②$$

① が実数解をもつ条件は

$$(1-\cos\alpha^\circ)^2-(1-\sin\alpha^\circ)^2=(2-\sin\alpha^\circ-\cos\alpha^\circ)(\sin\alpha^\circ-\cos\alpha^\circ)\geqq 0. \quad \cdots(*)$$

$$\sin\alpha^\circ+\cos\alpha^\circ=\sqrt{2}\sin(\alpha^\circ+45^\circ)<2$$

から，

$$\sin\alpha^\circ\geqq\cos\alpha^\circ. \quad \cdots③$$

② が実数解をもつ条件は

$$1-\{\cos(\alpha^\circ+45^\circ)+1\}=-\cos(\alpha^\circ+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha^\circ-\cos\alpha^\circ)\geqq 0. \quad \cdots④$$

③ と ④ は同値だから，① が実数解をもつとき，② も実数解をもつ．　…(答)

（注）　当時，加法定理は解析Ⅱであったから，① が実数解をもつ条件を求めるために合成公式を使ったり，② の最後の式で加法定理を使うべきではないかもしれない．

加法定理を使わなければ，次のようになる．

$\sin\alpha^\circ+\cos\alpha^\circ\leqq 2$ で等号は成り立たないことから ③ を導ける．これを単位円に当てはめれば，

$$45^\circ+n\times 360^\circ\leqq\alpha^\circ\leqq 225^\circ+n\times 360^\circ \quad (n \text{ は整数})$$

を導ける．これが ④ の $-\cos(\alpha^\circ+45^\circ)\geqq 0$ と同値であることも導かれる．

結構面倒である．

第2問

変量 y が変量 x に正比例することは理論的にわかっているが，比例定数 a の値がわからない。そこで，$x=2$，3，4 のときの y の値を測ったところ，それぞれ 3.1，4.4，5.6 という測定値を得た。a の値をかりに決めたとき

$$3.1-2a,\quad 4.4-3a,\quad 5.6-4a$$

をそれぞれ $x=2$，3，4 に対応する y の測定の誤差とみなす。

このとき，

(1) 誤差の 2 乗の和が最小になるように a の値を定めよ。

(2) 誤差の絶対値の和が最小になるように a の値を定めよ。

ただし，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

分　野

解析Ⅰ：近似値

考え方

題意が理解できれば何をすべきかは明快である．

【解答】

(1) 誤差の 2 乗の和を E とおく．

$$E=(3.1-2a)^2+(4.4-3a)^2+(5.6-4a)^2=29a^2-83.6a+3.1^2+4.4^2+5.6^2$$

$$=29\left(a-\frac{41.8}{29}\right)^2-\frac{41.8^2}{29}+3.1^2+4.4^2+5.6^2.$$

E を最小にする a は $\dfrac{41.8}{29}=1.441\cdots$

小数第 3 位を四捨五入して，1.44.　…(答)

(2) 誤差の絶対値の和を $A(a)$ とおく．

$$A(a)=|3.1-2a|+|4.4-3a|+|5.6-4a|$$

$3.1-2a=0$，$4.4-3a=0$，$5.6-4a=0$ となる a はそれぞれ，1.55，$1.4\dot{6}$，1.4.

$y=A(a)$ のグラフは，$a=1.4$，$1.4\dot{6}$，1.55 を折れ目とする折れ線で，$a\leqq1.4$ では傾き $-2-3-4=-9$，$1.4\leqq a\leqq1.4\dot{6}$ では傾き $-2-3+4=-1$，$1.4\dot{6}\leqq a\leqq1.55$ では傾き $-2+3+4=5$，$a\geqq1.55$ では傾き $2+3+4=9$ である．

よって，$A(a)$ は $a\leqq1.4\dot{6}$ のとき減少し，$a\geqq1.4\dot{6}$ のとき増加する．

$A(a)$ を最小にする a は $1.4\dot{6}=1.466\cdots$

小数第 3 位を四捨五入して，1.47.　…(答)

第3問

1 平面上の 2 点 $P(x,\ y)$，$Q(X,\ Y)$ の座標の間に

$$X=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Y=-\frac{y}{x^2+y^2}$$

という関係がある。このとき，点 $P(x,\ y)$ が，不等式

$$(4x+3y-5)(4x-3y+5)>0$$

で表わされる範囲を動くとき，点 $Q(X,\ Y)$ はどのような範囲を動くか。P の動く範囲および Q の動く範囲に斜線を引いて，これらを示せ。

分　野

解析 I ：不等式と領域

考え方

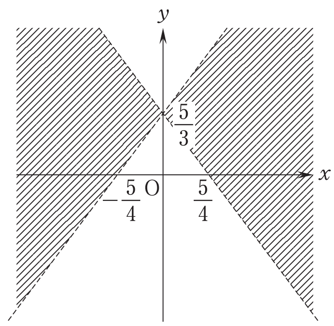
x，y を X，Y で表せれば，$P(x,\ y)$ と $Q(X,\ Y)$ は 1 対 1 に対応する．このとき，x，y の式に X，Y の式を代入すれば X，Y の式になる．

【解答】

P の動く範囲は

$$(4x+3y-5)(4x-3y+5)>0 \qquad \cdots①$$

で表される範囲だから右図斜線部．境界は含まない．



X，Y の式から $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$．

$$X^2+Y^2=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}$$

よって，$(X,\ Y)\neq(0,\ 0)$ で，

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\quad y=-\frac{Y}{X^2+Y^2}.$$

① に代入して，

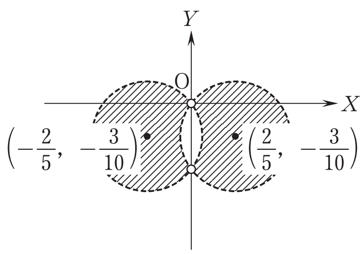
$$\left(\frac{4X}{X^2+Y^2}-\frac{3Y}{X^2+Y^2}-5\right)\left(\frac{4X}{X^2+Y^2}+\frac{3Y}{X^2+Y^2}+5\right)>0.$$

$(X^2+Y^2)^2\ (>0)$ をかけて，

$$\{4X-3Y-5(X^2+Y^2)\}\{4X+3Y+5(X^2+Y^2)\}>0.$$

$$\left\{\left(X-\frac{2}{5}\right)^2+\left(Y+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\left\{\left(X+\frac{2}{5}\right)^2+\left(Y+\frac{3}{10}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}<0.$$

Q の動く範囲は下図斜線部．境界は含まない．



…(答)

1958 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・解析Ⅱ）

第 1 問

平面上に点列 P_0，P_1，…，P_n，… があって，点 P_n の座標 $(x_n,\ y_n)$ と点 P_{n+1} の座標 $(x_{n+1},\ y_{n+1})$ の間に

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{2}{3}x_n+\dfrac{1}{3}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{1}{3}x_n+\dfrac{2}{3}y_n \end{cases} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

という関係があるとする。n が限りなく増すとき，点 P_n はどのような点に近づくか。この点の座標 $(x,\ y)$ を $(x_0,\ y_0)$ で表わせ。

分　野

解析Ⅱ：数列，連立漸化式，数列の極限

考え方

対称性を考えると，$x_{n+1}+y_{n+1}$ と $x_{n+1}-y_{n+1}$ を調べたくなる．

【解答】

与式から

$$x_{n+1}+y_{n+1}=x_n+y_n,\quad x_{n+1}-y_{n+1}=\frac{1}{3}x_n-\frac{1}{3}y_n.$$

数列 $\{x_n+y_n\}$ は恒等数列で，数列 $\{x_n-y_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であることがわかる．

よって，

$$x_n+y_n=x_0+y_0,\quad x_n-y_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(x_0-y_0).$$

これらから，

$$x_n=\frac{1}{2}(x_0+y_0)+\frac{1}{2\cdot3^n}(x_0-y_0),\quad y_n=\frac{1}{2}(x_0+y_0)-\frac{1}{2\cdot3^n}(x_0-y_0).$$

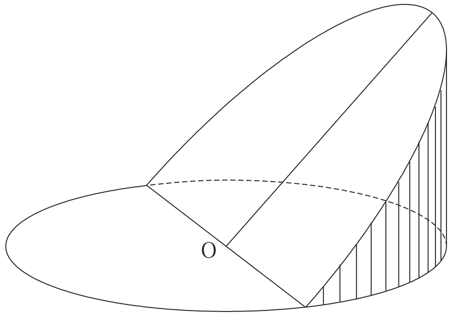
よって，

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(x_0+y_0),\quad y=\lim_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{2}(x_0+y_0).$$

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2}(x_0+y_0),\ \frac{1}{2}(x_0+y_0)\right). \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

底面の半径が a であるような直円柱がある。底面の直径を通り，底面と角 α をなす平面でこの直円柱をきり，この平面と直円柱の底面および側面で包まれた図のような立体を作る。この体積を求めよ。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。



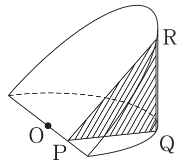
分　野

解析Ⅱ：整式の積分，体積

考え方

断面積を求めて積分する．そのとき，切り方によって積分の難易が異なる．底面の円の直径に垂直な断面をとるのがベスト．底面に垂直で円の直径に平行な断面をとると置換積分（当時範囲外）をしなければならなくなる．底面に平行な断面をとるとさらに難しくなる．

【解答】



円柱の底面の中心をＯとし，底面の直径上に点Ｐをとり，Ｐを通り直径に垂直な断面をとる．その断面と底面の円の交点をQ，切り取った平面との交線の端点をＲとする．

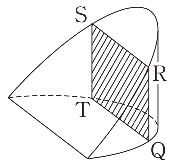
$\mathrm{OP}=x$ のとき，$\mathrm{PQ}=\sqrt{a^2-x^2}$，$\mathrm{QR}=\mathrm{PQ}\tan\alpha=\sqrt{a^2-x^2}\tan\alpha$.

よって，断面積 $\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{QR}=\dfrac{1}{2}(a^2-x^2)\tan\alpha$.

よって，求める体積は

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\tan\alpha(a^2-x^2)\,dx=\tan\alpha\int_0^a(a^2-x^2)\,dx=\tan\alpha\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha. \quad\cdots(\text{答})$$

【別解】



円柱の底面に垂直で底面の直径に平行な断面 QRST を図のようにとる．

直径と断面の距離を y とすると，$\mathrm{QR}=y\tan\alpha$，$\mathrm{QT}=2\sqrt{a^2-y^2}$.

よって，断面積 $\mathrm{QRST}=\mathrm{QR}\cdot\mathrm{QT}=2y\sqrt{a^2-y^2}\tan\alpha$.

よって，求める体積を V とすると，

$$V=\int_0^a 2\tan\alpha\cdot y\sqrt{a^2-y^2}\,dy.$$

$u=a^2-y^2$ とおくと，

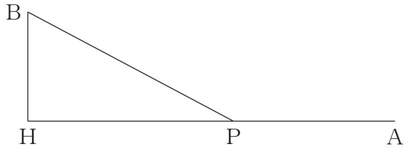
y	$0\longrightarrow a$
u	$a^2\longrightarrow 0$

$$V=\int_{a^2}^{0}\tan\alpha\sqrt{u}\,(-du)=\tan\alpha\int_0^{a^2}u^{\frac{1}{2}}du=\tan\alpha\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}=\frac{2}{3}a^3\tan\alpha. \quad\cdots(\text{答})$$

第3問

水平面上に $8a$ cm だけ離れた2定点 A，H があり，H の真上には高さ $a$cm のところに点 B がある。線分 AH 上に点 P をとり，最初 B に静止していた動点が線分 BP，PA に沿って B から A まで動くとき，BP 上では等加速度 $\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BP}}g$ cm/sec^2 で進み，PA 上では動点が P に達したときの速度の水平成分に等しい等速度で進む。

動点が B から A まで最短時間で到達するには HP をいくらにすればよいか。ただし，g は正の定数である。



分　野

解析Ⅱ：微分法，速度・加速度

考え方

B から P までの移動に要する時間は等加速度運動で計算し，終速も求めれば，P から A までにかかる時間も求められる．

【解答】

$\mathrm{HP}=x$ とおく．このとき，$\mathrm{BP}=\sqrt{x^2+a^2}$．加速度は $\dfrac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BP}}g=\dfrac{ag}{\sqrt{x^2+a^2}}$．

動点が B から P まで移動するのに必要な時間を t_1 とすると，

$$\mathrm{BP}=\sqrt{x^2+a^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{ag}{\sqrt{x^2+a^2}}t_1{}^2$$

だから，

$$t_1=\sqrt{\frac{2(x^2+a^2)}{ag}}.$$

またそのときの速さは

$$\frac{ag}{\sqrt{x^2+a^2}}t_1$$

だから，水平成分は

$$\frac{ag}{\sqrt{x^2+a^2}}t_1\cdot\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{BP}}=\frac{ag}{\sqrt{x^2+a^2}}\sqrt{\frac{2(x^2+a^2)}{ag}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{\sqrt{2ag}}{\sqrt{x^2+a^2}}x.$$

よって，P から A まで移動するのに必要な時間は

$$\frac{8a-x}{\dfrac{\sqrt{2ag}}{\sqrt{x^2+a^2}}x}=\frac{(8a-x)\sqrt{x^2+a^2}}{x\sqrt{2ag}}.$$

よって，B から A まで移動するのに必要な時間は

$$\sqrt{\frac{2(x^2+a^2)}{ag}}+\frac{(8a-x)\sqrt{x^2+a^2}}{x\sqrt{2ag}}=\frac{(x+8a)\sqrt{x^2+a^2}}{x\sqrt{2ag}}.$$

$$f(x)=\frac{(x+8a)^2(x^2+a^2)}{x^2}=x^2+16ax+65a^2+16\cdot\frac{a^3}{x}+64\cdot\frac{a^4}{x^2}$$

とおくと，

$$f'(x)=2x+16a-16\cdot\frac{a^3}{x^2}-128\cdot\frac{a^4}{x^3}=\frac{2x^4+16ax^3-16a^3x-128a^4}{x^3}$$

$$=\frac{2(x+8a)(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)}{x^3}.$$

x	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	$8a$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

B から A まで移動するのに必要な時間は $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{2ag}}$ だから，これが最小になるのは

HP$=x$ を $2a$ cm にしたとき．　…(答)

1958 年　2 次試験（4 科目より 2 科目選択・幾何）

第 1 問

半径 a の円の内部に凸四辺形がある。各頂点はその点を通る辺を延長してできる弦の 3 等分点になっている。この四辺形はどんな四辺形か。またこの四辺形の面積を求めよ。

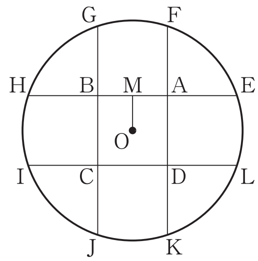
分 野

幾何：方べきの定理

考え方

方べきの定理と対称性を考える．

【解答】



問題の四辺形を ABCD とし，各辺の延長と円の交点を図のように，E，F，G，H，I，J，K，L とする．

AB の長さを x，AD の長さを y とすると，A，B は EH の，A，D は FK のそれぞれ 3 等分点だから，AE$=x$，AH$=2x$，AF$=y$，AK$=2y$．

方べきの定理から，

$$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AH}=\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AK}=2x^2=2y^2. \quad \therefore \quad x=y.$$

同様にして AB＝BC＝CD＝DA．よって四辺形 ABCD は菱形．

また，AB の中点を M とすると，M は EH の中点で，円の中心 O から下した垂線の足．したがって，△OAB は中線と垂線が一致するから，OA＝OB の二等辺三角形．同様に，OA＝OB＝OC＝OD．よって，

$$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{OBC}\equiv\triangle\mathrm{OCD}\equiv\triangle\mathrm{ODA}.$$

よって，菱形 ABCD の 4 つの角はすべて等しい．四辺形の内角の和は 4 直角だからそれらはすべて直角である．

よって，四辺形 ABCD は正方形である．　…(答)

また，$\mathrm{AM}=\dfrac{x}{2}$，よって，$\mathrm{ME}=\dfrac{x}{2}+x=\dfrac{3}{2}x$.

また，$\mathrm{OM}=\dfrac{\mathrm{AD}}{2}=\dfrac{x}{2}$ だから

$$\mathrm{OE}=a=\sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}x.$$

よって，

$$\text{四辺形 ABCD}=x^2=\left(\frac{2}{\sqrt{10}}a\right)^2=\frac{2}{5}a^2. \quad \cdots(\text{答})$$

第2問

平面上において，2定点A，Bを両端とする任意の円弧の3等分点のうちAに近い方の点の軌跡を求めよ。

分　野

幾何：軌跡

考え方

ABの中点を原点とする座標をとり，円弧の中心Eを一旦固定して考える．

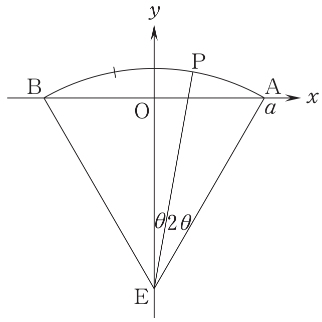
$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を3等分という設定だから，例えば $\angle\mathrm{AEB}=6\theta$ のようにおいて，弧の3等分点Cの座標を θ で表し，θ を消去する．

【解答】

ABの長さを $2a\,(a>0)$ とおき，ABの中点Oを原点とし，Aが x 軸の正の部分にあるように座標系をとる．このとき，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$．

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は x 軸の上側と下側にあるが，ここでは $y>0$ の点Pを考える．下側の点Pは x 軸についての対称点を考えればよい．

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心をEとし，$\angle\mathrm{AEB}=6\theta$ とおく．ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$．



$\angle\mathrm{OEA}=3\theta$ だから，$0<3\theta<\pi$ で，$\mathrm{OE}=\dfrac{a|\cos 3\theta|}{\sin 3\theta}$．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$ のとき，Eは x 軸より下側にあり，$\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき，Eは x 軸より上側にある．Eの座標は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のときも含めて，$\left(0,\ -\dfrac{a\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\right)$ とおける．

また，$\mathrm{EA}=\dfrac{a}{\sin 3\theta}=\mathrm{EP}$ である．

Pは $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の3等分点だから，$\angle\mathrm{AEP}=2\theta$．よって，$\angle\mathrm{OEP}=\theta$．

Pの座標は

$$\left(\frac{a}{\sin 3\theta}\sin\theta,\ \frac{a}{\sin 3\theta}\cos\theta-\frac{a\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\right).$$

$$X=\frac{a}{\sin 3\theta}\sin\theta,\quad Y=\frac{a}{\sin 3\theta}\cos\theta-\frac{a\cos 3\theta}{\sin 3\theta}$$

とおくと，和積公式から

$$Y=\frac{a(\cos\theta-\cos 3\theta)}{\sin 3\theta}=\frac{2a\sin\theta\sin 2\theta}{\sin 3\theta}=2X\sin 2\theta.$$

また，3倍角の公式から

$$X=\frac{a\sin\theta}{\sin 3\theta}=\frac{a}{3-4\sin^2\theta}.\quad\therefore\quad \sin^2\theta=\frac{3X-a}{4X},\quad \cos^2\theta=\frac{X+a}{4X}.$$

$$\begin{aligned}Y^2&=4X^2\sin^2 2\theta=16X^2\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=16X^2\cdot\frac{3X-a}{4X}\cdot\frac{X+a}{4X}=(3X-a)(X+a)\\&=3\left(X+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{4}{3}a^2.\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{P}(X,\ Y)$ は双曲線

$$\frac{\left(x+\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}a\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2}=1$$

上を動く.

x の範囲は $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ から，$x>\frac{a}{3}$.

$y<0$ の部分も対称性から同じ双曲線上にある.

以上から点 P の軌跡は双曲線

$$\frac{\left(x+\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}a\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2}=1$$

の $x>0$ の部分．ただし，頂点 $\left(\frac{a}{3},\ 0\right)$ を除く. …(答)

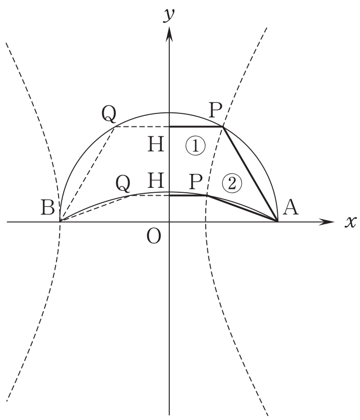
【別解】

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の 3 等分点を A に近い方から P，Q と置き，PQ と y 軸の交点を H とおくと，AP=PQ=QB で，H は PQ の中点だから，AP：PH=2：1 である.

よって，P から点 A までの距離と，y 軸までの距離の比は常に 2：1 である．また，P は $x>0$ にある.

したがって，P の軌跡は焦点が A，準線が y 軸で離心率が 2 の双曲線の $x>0$ の部分である.

よって，軌跡は



$$2|x|=\sqrt{(x-a)^2+y^2} \iff \frac{\left(x+\frac{a}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}a\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^2}=1$$

の $x>0$ の部分である．ただし，APB が弧をなさない頂点 $\left(\frac{a}{3},\ 0\right)$ は除かれる.

(注)　一般に定点と定直線までの距離の比が一定である点の軌跡は二次曲線になる．そのときの定点は二次曲線の焦点の 1 つであり，定直線をこの二次曲線の準線という.

定点を F，準線を l とし，動点 P から準線に下した垂線の足を H とするとき，$\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{HP}}=e$ を二次曲線の離心率といい，二次曲線は

$0<e<1$ のとき楕円，　$e=1$ のとき放物線，　$e>1$ のとき双曲線

である.

この双曲線の頂点は $\left(\frac{a}{3},\ 0\right)$ と，B$(-a,\ 0)$ で，焦点は A$(a,\ 0)$ と $\left(-\frac{5}{3}a,\ 0\right)$ で，中心は $\left(-\frac{a}{3},\ 0\right)$ であり，漸近線は $y=\pm\sqrt{3}\left(x+\frac{a}{3}\right)$ である.

また，準線は y 軸と直線 $x=-\frac{2}{3}$，離心率は 2 である.

第3問

ある直円錐とそれに内接する球の体積比が 2：1 であるとき，この直円錐の底面の半径と高さの比を求めよ。

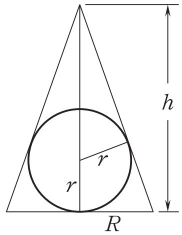
分　野

幾何：立体図形

考え方

直円錐の中心軸を含む断面は二等辺三角形で内接球の断面は内接円である．

【解答】



直円錐の底面の半径を R，高さを h とし，内接球の半径を r とする．

直円錐の中心軸を含む断面をとると直円錐の断面は底辺が $2R$，高さが h の二等辺三角形で，球の断面はその二等辺三角形の内接円で半径は r である．

二等辺三角形の面積は Rh で等辺の長さは $\sqrt{R^2+h^2}$ であるから，

$$Rh=\frac{r}{2}(2\sqrt{R^2+h^2}+2R). \quad r=\frac{Rh}{\sqrt{R^2+h^2}+R}.$$

直円錐と内接球の体積比は

$$\frac{1}{3}\pi R^2h : \frac{4}{3}\pi r^3=R^2h : 4r^3=R^2h : 4\cdot\frac{R^3h^3}{(\sqrt{R^2+h^2}+R)^3}=(\sqrt{R^2+h^2}+R)^3 : 4Rh^2=2:1.$$

直円錐の母線の長さ $\sqrt{R^2+h^2}$ を x とおくと，

$$(x+R)^3 : 4R(x^2-R^2)=2:1. \quad \therefore \quad 8R(x-R)=(x+R)^2.$$

$$\therefore \quad x^2-6Rx+9R^2=0. \quad \therefore \quad x=3R \text{（重解）}$$

$$\therefore \quad x^2=h^2+R^2=9R^2. \quad \therefore \quad h=2\sqrt{2}R \ (\because h>0,\ R>0)$$

直円錐の底面の半径と高さの比は

$$\therefore \quad R:h=1:2\sqrt{2}. \qquad \cdots\text{(答)}$$

1958年　2次試験（4科目より2科目選択・一般数学）

第1問

連立方程式

$$0.5x+1.2y=4.1$$
$$0.3x+1.8y=4.4$$

がある。左辺の係数および右辺の数値が，いずれも小数第二位を四捨五入した近似値であるとすれば，xの真の値はどのような範囲にあるか。

分　野

一般数学：近似値，誤差の計算

考え方

まずは近似値のままxの値を求める．その際かけたり約したりせず，係数の値で表す．次に，各係数を増減させたときのxの増減を考える．

【解答】

$$ax+by=c \quad \cdots①, \quad dx+ey=f \quad \cdots②$$

とおくと，$e\times①-b\times②$ から

$$(ae-bd)x=ce-bf. \quad \therefore \quad x=\frac{ce-bf}{ae-bd}.$$

同様に

$$y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

で

$$x=-\frac{b}{a}y+\frac{c}{a}=-\frac{e}{d}y+\frac{f}{d}.$$

ここで，

$a=0.5\pm0.05$,　$b=1.2\pm0.05$,　$c=4.1\pm0.05$,　$d=0.3\pm0.05$,　$e=1.8\pm0.05$,　$f=4.4\pm0.05$

とする．ただし，$X=X_0\pm\varepsilon$ は $X_0-\varepsilon\leqq X<X_0+\varepsilon$ を表すとする．

このとき，誤差の範囲内で，$ae-bd>0$，$ce-bf>0$ であり，a，b，c，d，e，f はすべて正だから，xはc，dについて増加し，a，fについて減少する．

また，$af-cd>0$ だからyはbについて増加し，eについて減少する．よって，xはeについて増加し，bについて減少する．

よって，

$$\frac{4.05\times1.75-1.25\times4.45}{0.55\times1.75-1.25\times0.25}<x<\frac{4.15\times1.85-1.15\times4.35}{0.45\times1.85-1.15\times0.35}.$$

$$\therefore \quad \frac{1.525}{0.650}=\frac{61}{26}<x<\frac{2.675}{0.430}=\frac{535}{86}.$$

有効数字を2桁とすると

$$2.3<x<6.2. \qquad \cdots(答)$$

第２問

定員５人を選ぶ選挙にＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆ，Ｇ，Ｈの８人が立候補し，選挙のときの総投票数は5700票であった。現在までの開票結果は右の表の通りである。当選確実な候補者はだれだれか。

Ａ	1143
Ｂ	850
Ｃ	745
Ｄ	712
Ｅ	602
Ｆ	419
Ｇ	409
Ｈ	321
無効票	3

分　野

一般数学：不等式

考え方

まず残票が何票かを数え，それを自分以外の有力５候補の票ができるだけ均等になるように配ったとき，自分の票より少なかったらその候補は当選といえる．

【解答】

$$1143+850+745+712+602+419+409+321+3=5204.$$

よって未開票の票は $5700-5204=496$ 票．

これをＤ候補とＥ候補とＦ候補の票が均等になるように配分すると，

$$\frac{712+602+419+496}{3}=743<745.$$

したがってＣ候補はＤ，Ｅ，Ｆの３候補より下位になることはない．よって，Ｃは当選である．

また，Ｅ候補とＦ候補の票が均等になるように配分すると，

$$\frac{602+419+496}{2}=\frac{1517}{2}=758.5>712.$$

したがってＤ候補はＥ，Ｆの２候補より下位になる可能性がある．

よって，当選が決まっている候補はＡ，Ｂ，Ｃの３候補である．　…(答)

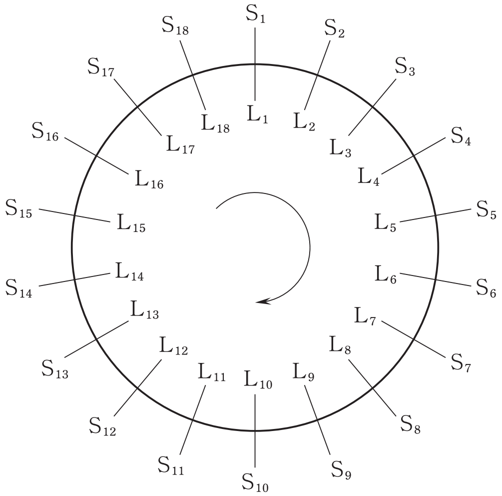
（注）　一般に「当選確実」という用語は当選が確定した候補に対してより，当選の可能性がある確率より高い候補に対して用いられ，当選が決定した場合「当選」の用語が使われている．しかし，この問題で「当選確実」の意味をそのように解釈した場合当選確率まで考えなければならなくなり問題が成り立たなくなる．**【解答】**では当選が決まった候補と解釈した．

第 3 問

下の図のように 18 個のランプ L_i とスイッチ S_i が円形においてある。ランプはすべて消えており，スイッチはすべて開いている。一つのスイッチをいれると，それから矢印の方向に三つ目のランプがつくものとする。

また，一たんランプがつくとそれと同じ番号のスイッチは使用不能になるものとする。しかし，ある番号のスイッチをいれてもそれと同じ番号のランプは依然としてつけることができる（たとえば，スイッチ S_{18} をいれるとランプ L_3 がつく。そして，スイッチ S_3 は使用不能となり，ランプ L_6 はもうつかなくなる。しかし，S_{15} をいれればランプ L_{18} はつけることができる）。

いま，スイッチ S_1 から始めて，次々にスイッチを入れて，なるべく多くのランプをつけたい。いくつまでつけることができるか。また，どのような順にスイッチをいれればよいか。



分　野

一般数学：論理

考え方

いれたスイッチと同じ番号のランプをつけるようにスイッチを入れてゆく．

【解答】

議論の都合上，$L_{18}=L_0$，$S_{18}=S_0$，$L_{19}=L_1$，$S_{19}=S_1$，$L_{20}=L_2$，$S_{20}=S_2$ とする．

ランプ L_i を点灯するには S_{i-3} が使用不能になる前に S_{i-3} をいれなければならない．S_{i-3} が使用不能になるのは S_{i-6} をいれて L_{i-3} が点灯したとき．したがって S_{i-6} より前に S_{i-3} を入れなければならない．

したがって，ランプを多く点灯させるためには上の図の矢印と反対方向に 3 つ目のスイッチを順にいれていかなければならない．

スイッチは [S_1，S_4，S_7，S_{10}，S_{13}，S_{16}]，[S_2，S_5，S_8，S_{11}，S_{14}，S_{17}]，[S_3，S_6，S_9，S_{12}，S_{15}，S_{18}] のグループにわけられそれぞれのグループ内で上記の逆順にいれてゆけばよい．

第 1 のグループは S_1 を最初にいれることになっているから，$S_1 \to S_{16} \to S_{13} \to S_{10} \to S_7 \to S_4$ の順で入れてゆかなければならないが，第 2 のグループは $S_2 \to S_{17} \to S_{14} \to S_{11} \to S_8 \to S_5$ の順で入れてもよいし，$S_8 \to S_5 \to S_2 \to S_{17} \to S_{14} \to S_{11}$ の順で入れてもよい．第 3 のグループについても同様である．

いずれの方法でも各グループの中で最初に点灯したランプと同じ番号のスイッチで点灯するランプはつかない．つまり，S_1 を入れると，L_4 が点灯し，S_4 が使用不能になり，S_4 でつくはずの L_7 はつかない．

したがって，各グループのうち 1 個のランプ，計 3 個は点灯できない．したがって，$18-3=15$ 個のランプをつけることができる．

…(答)

幾何の時代

かつて，「幾何」という科目があった．また，1965 年入試までは「数学 I 幾何」という科目があった．そして私が受験したのは 1964 年で「数学 I 幾何」の終わりから 2 年目に相当する．

旧制中等学校以来「幾何」は数学の重要な柱であったようである．ところが，1966 年入試から導入された指導要領の改訂によって，「幾何」は徹底的に排除された．

私の記憶では，幾何と他の科目とは雰囲気が可成違っていたように思える．先生の違いもあるかもしれない．上で「徹底的に」と書いた理由はそこにある．

点，直線，円などの用語の定義から入り，定理を 1 つ 1 つ証明してゆくというスタイルだった．

ただ，公理についてはユークリッドの公理でもヒルベルトの公理でもなく，出発点は中学の復習（三角形の合同，相似）だったように思える．

授業はいつもシーンとした雰囲気で，先生が「わかる者」と問いかけ，それに手を挙げて答えさせるという形式で進められた．先生が希望する答えを云うと「よし」と返ってくるが，違っていると，「ダメ」とか場合によっては「バカ」と返ってくる．うかつに発言できないから授業はいつもシーンとしていた．

幾何の問題の読み方，解答の仕方を懇切丁寧に教えてくれた．

当時の幾何は直観と論理性を重視したもので，経験批判的な要素がきわめて強かった．直観的に本質に迫り，それを論理的に証明してゆくという手法が用いられた．

図を描きそれをよく観察し，問題の本質を捉える．場合によっては 1 本の補助線を引くことにより図の見え方が一変する．見えた瞬間の感動は何とも言えない．

幾何を通して，必要条件，十分条件，背理法（当時は帰謬法といったように思う）なども学習した．

反面，座標を使う幾何は「解析幾何」といわれ後回しにされていた．

また，概して条件の適用限界や例外がある問題について鷹揚であったような気がする．時代的な背景もあると思われる．

指導要領の改訂が 1960 年だったので，それより以前から起こっていた「数学の現代化運動」によって，旧制以来の幾何が槍玉に挙げられた．

理由の 1 つは公理が不明確であること．高校数学でヒルベルトの公理まで戻ることはなかろうし，ユークリッドの公理（公準）でもそのまま適用することはできない．

また，経験批判的な教材は必ずしも幾何だけでなく，他の分野でも十分作ることができるという主張もあった．例として整数論があげられていた．

今日の目から見ると，確かに当時の教材が可成あいまいな部分を含んでいたことは確かである．今回見た東大の問題でもそのような傾向が見られる．

また，当然のことながら，当時の問題では座標設定は必要なら解答者が設定するようになっていた．

また，初等幾何的に処理していた多くの素材が座標やベクトルを使って容易に処理できるものが少なくない．

また，初等幾何的な記号の使い方は今日使われなくなっているものも少なくない．合同を表す $\equiv$ や相似を表す $\backsim$ は知っていたとしても中学で学習する程度であまり使われてはいない．三角形を表す $\triangle$ については現在と使われ方のニュアンスが異なるように思える．平行四辺形を表す ▱，長方形を表す ▭，正方形を表す □ などは初めての人も多いと思われる．今回直角を表す $\angle \mathrm{R}$ は他の表し方，90° や $\dfrac{\pi}{2}$ があるので用いなかった．

それでも，経験批判的な教材として当時の幾何より今日の教材が成功しているとは私には思えない．今日は情報過多の時代であり，そのために経験批判的な思考が難しい時代になっていることは事実である．しかし昨今では偽情報が横行するような事態が発生しており，再び経験批判の重要性が出てきているようにも思える．

第2章

1959~1965(昭和34~昭和40)年

数I代数・数I幾何の時代,
初等幾何の終焉

2.1　第 2 次指導要領改訂（1959 年）

第 2 次指導要領の改訂は 1955 年に行われ，1956 年から実施され，入試には 1959 年から採用された．

この回の改訂から今日でも使われている「数学Ⅰ」,「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」という教科名が採用された．

「数学Ⅰ」は代数と幾何に分かれていた．また前改訂で手薄だった微積分が,「数学Ⅱ」と「数学Ⅲ」に分かれて 2 年かけて学習するようになった．

「数Ⅱ」で微分（整数乗と 1/2 乗）を学習，∞ までの極限も「数Ⅱ」で学習，積分は「数Ⅲ」で学習，区分求積的な定義が導入として扱われている．「数Ⅲ」に三角関数の微積分が復活したが，指数対数の微積分と置換積分，部分積分はまだ範囲外であった．

私が高校で学習したのはこのときの指導要領である．

東大入試では新課程への移行措置は行われたが基本的には同じ問題を流用する形で行われたほか，最初の 2 年間は「数Ⅰ代数」,「数Ⅰ幾何」,「数Ⅱ」,「数Ⅲ」から 3 科目を選択する形式がとられた．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1959〜1960）

1959 年　「数Ⅰ代数」第 1 問は内容的に一次変換（この時代範囲外）の問題．行列式が 1 である変換による面積変化．

1959 年　「数Ⅰ幾何」第 1 問はいかにも初等幾何という問題．問題の対象の長さが中心距離の正射影の 2 倍であることに気付けば一発．

1959 年　「数Ⅱ」第 2 問は内容的に複素数平面（この時代範囲外）の問題である．方程式の解を $x \pm yi$ とおき，$(x,\ y)$ の軌跡を求める問題．

1960 年　「数Ⅱ」第 2 問のテーマ．平面上から垂直な直線上の 2 点を見込む角の問題はこの後，1970 年，1972 年に同様な問題が出題されている．

このころ　あんなこと・こんなこと

1960 年当時の岸内閣は安保条約の改訂を強行採決し，国中から反対の運動が盛り上がった．再び戦争への道を開くのではないかという心配を多くの国民がもった．

岸内閣は安保条約の改訂後辞任し，次の池田内閣が同年誕生した．池田内閣は低姿勢と高度成長をうたい国民の目は高度成長へと向かっていった．社会党の浅沼委員長が右翼によって殺されたのもこの年であった．

伊勢湾台風（1959 年）．

ヒット曲は,「僕は泣いちっち」(1959 年),「黒い花びら」(1959 年）など．

1959 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

平行四辺形 ABCD において，辺 AB の方程式は $3x-4y+1=0$，辺 AD の方程式は $2x+3y-5=0$ であり，頂点 C の座標が $(2,\ 6)$ であるとき，頂点 B の座標は $(\boxed{(1)},\ \boxed{(2)})$，頂点 D の座標は $(\boxed{(3)},\ \boxed{(4)})$ である。

分　野

数学 II：直線の方程式

【解答】

$C(2,\ 6)$ を通り AD に平行な直線が BC．その方程式は

$$2x+3y=22.$$

これと AB の方程式から B の座標は $(\boxed{5},\ \boxed{4})$．　…(1)，(2)

$C(2,\ 6)$ を通り AB に平行な直線が CD．その方程式は

$$3x-4y=-18.$$

これと AD の方程式から D の座標は $(\boxed{-2},\ \boxed{3})$．　…(3)，(4)

II

次の $\boxed{}$ の中にイロハニのうち適当なものを記入せよ。

x の二次方程式 $x^2-px-1=0$ の二つの実根のうち小さい方を α とし，大きい方を β とする。

p が正の範囲で増加するとき，α は $\boxed{(5)}$，β は $\boxed{(6)}$。

また p が負の範囲で増加するとき，α は $\boxed{(7)}$，β は $\boxed{(8)}$。

イ　正であって増加する
ロ　正であって減少する
ハ　負であって増加する
ニ　負であって減少する

分　野

数学 I 代数：2 次方程式

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

解の公式から

$$\alpha=\frac{p-\sqrt{p^2+4}}{2}=\frac{-2}{p+\sqrt{p^2+4}},\quad \beta=\frac{p+\sqrt{p^2+4}}{2}=\frac{2}{-p+\sqrt{p^2+4}}.$$

$|p|<\sqrt{p^2+4}$ より，p の正負にかかわらず，$\alpha<0$，$\beta>0$．

$p>0$ のとき，$p+\sqrt{p^2+4}$ は単調に増加するから，β は増加する．$\alpha=\dfrac{-2}{p+\sqrt{p^2+4}}$ の分母は増加するから，α の絶対値は減少し，α は増加する．

よって，α は $\boxed{\text{負であって増加する}}$．また，β は $\boxed{\text{正であって増加する}}$．　…(5)＝ハ，(6)＝イ

$p<0$ のとき，$\sqrt{p^2+4}$ は減少するから，$-p+\sqrt{p^2+4}$ は減少する．

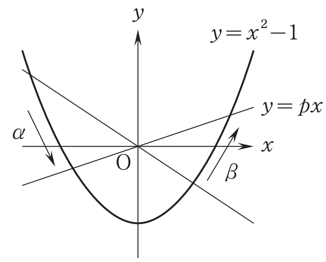
したがって，α は増加する．また，$\beta=\dfrac{2}{-p+\sqrt{p^2+4}}$ の分母は減少するから β は増加する．

よって，α は $\boxed{\text{負であって増加する}}$．また，β は $\boxed{\text{正であって増加する}}$．… (7)=ハ，(8)=イ

【別解 1】

$x^2-px-1=0$ の解は $y=x^2-1$ と $y=px$ の交点の x 座標である．

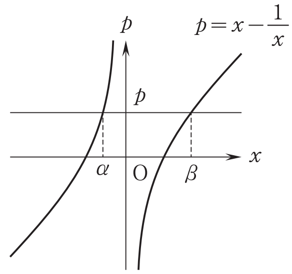
図より，p の正負にかかわらず，$\alpha<0<\beta$ であり，$y=px$ の傾きの増加に対して，p の正負によらず，α，β は増加する．



【別解 2】

p を x の関数として表すと，$p=x-\dfrac{1}{x}$．これは $x<0$ の範囲，$x>0$ の範囲それぞれで単調に増加する．1 つの p に対して正と負の x が存在するからこれが α (<0) と β (>0) である．p の増加に対して，α，β が増加することがわかる．

(注)　この時代，文系でも“グラフの合成”により，上のようなグラフを描くことができた．グラフの合成については **1991 年　文科　第 3 問**（注）を参照．



Ⅲ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

x，y に関する二つの一次方程式

$$(2-a)x+2y=0,\quad 2x-(1+a)y=0$$

が同じ直線を表わすような a の値が二つある。

それを a_1，a_2 $(a_1<a_2)$ とすれば $a_1=\boxed{(9)}$，$a_2=\boxed{(10)}$ である。$a=a_1$ のときその直線は点 $(1,\ \boxed{(11)})$ を通り，$a=a_2$ のときその直線は点 $(\boxed{(12)},\ 1)$ を通る。

分　野

数学Ⅱ：直線の方程式

【解答】

2 直線が一致するとき，

$$2-a:2=2:-(1+a).\quad \therefore\quad 4=-(2-a)(1+a).\quad \therefore\quad a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0.$$

よって，$a_1=\boxed{-2}$，$a_2=\boxed{3}$．…(9)，(10)

$a=a_1=-2$ のとき，2 直線とも $2x+y=0$ に一致する．

よって，$x=1$ のとき，$y=-2$．よって，点 $(1,\ \boxed{-2})$ を通る．…(11)

$a=a_2=3$ のとき，2 直線とも $x-2y=0$ に一致する．

よって，$y=1$ のとき，$x=2$．よって，点 $(\boxed{2},\ 1)$ を通る．…(12)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

直角三角形ABCにおいて，$\angle A=90°$，$AB=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$AC=\frac{5}{2}$ である。いまこの三角形と同じ平面上にあってAを通る直線 l をこの三角形の外側に引き，B，Cから直線 l におろした垂線の足をそれぞれP，Qとする。直線 l がACとなす角を α $(0°\leqq\alpha\leqq90°)$ とすれば，

(1)　PQが最大となるのは $\alpha=\boxed{(13)}$° のときであって，その最大値は $\boxed{(14)}$ である。

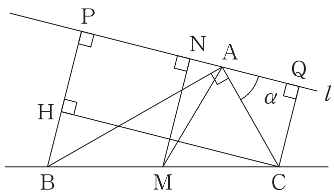
(2)　BP＋CQが最大となるのは $\alpha=\boxed{(15)}$° のときであって，その最大値は $\boxed{(16)}$ である。

分野

数学Ⅰ幾何：平面図形，垂線

【解答】

(1)　$AB=\sqrt{3}\,AC$ だから，$\angle BCA=60°$，$\angle ABC=30°$



CからPBに下した垂線の足をHとすると $PQ=CH$．$H\neq B$ のとき，$CH<BC$ だから，$CH=PQ$ が最大になるのは $H=B$ のとき，すなわち，$PQ /\!/ BC$ のとき．このとき，$\alpha=\boxed{60}$° で，PQの最大値は $BC=\boxed{5}$ である．…(13)，(14)

BCの中点をMとし，MからPQへ下した垂線の足をNとすると，$MN /\!/ BP /\!/ CQ$．Mは中点だから，$BP+CQ=2MN$．

$N\neq A$ のとき，$MA>MN$ だから，MNが最大になるのは，$MA\perp PQ$ のとき．

ACMは正三角形だから，MNの最大値は $\frac{5}{2}$．このとき，$\alpha=\boxed{30}$° で，$BP+CQ=2MN$ の最大値は $\boxed{5}$ である．…(15)，(16)

【別解】

$\angle PAB=90°-\alpha$．

$$PQ=AC\cos\alpha+AB\cos(90°-\alpha)=\frac{5}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)=5\sin(\alpha+30°).$$

$0°<\alpha<90°$ から $\alpha=\boxed{60}$° のとき，最大値 $\boxed{5}$ をとる．…(13)，(14)

(2)　$BP=AB\sin(90°-\alpha)$，$CQ=AC\sin\alpha$ だから，

$$BP+CQ=AC\sin\alpha+AB\sin(90°-\alpha)=\frac{5}{2}(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)=5\sin(\alpha+60°).$$

$0°<\alpha<90°$ から $\alpha=\boxed{30}$° のとき，最大値 $\boxed{5}$ をとる．…(15)，(16)

V

次の $\boxed{}$ の中にイロハニのうち適当なものを記入せよ。

$$\log_a 8=2.0794,\quad \log_a 9=2.1972,\quad \log_a 10=2.3026$$

であるとき，次の四つの数

イ　1　　　　ロ　$\log_a 2.5$

ハ　$2.5\log_{10} a$　　　　ニ　$(\log_a 2)(\log_a 3)$

を大きさの順にならべると，

$$\boxed{(17)}<\boxed{(18)}<\boxed{(19)}<\boxed{(20)}$$

となる。

分　野

数学Ⅰ代数：対数，大小判定

【解答】

小数点第4位までを有効桁として計算する．

$$\log_a 2=\frac{1}{3}\log_a 8=0.6931,\quad \log_a 3=\frac{1}{2}\log_a 9=1.0986,\quad \log_a 5=\log_a 10-\log_a 2=1.6095.$$

$$\log_a 2.5=\log_a 5-\log_a 2=0.9164,$$

$$2.5\log_{10} a=\frac{2.5}{2.3026},$$

$$(\log_a 2)(\log_a 3)=0.6931\times 1.0986.$$

$$0.6931\times 1.0986<0.7\times 1.1=0.77<0.9164<1<\frac{2.5}{2.3026}.$$

よって，

$$\boxed{(\log_a 2)(\log_a 3)}<\boxed{\log_a 2.5}<\boxed{1}<\boxed{2.5\log_{10} a}.$$

…(17)＝ニ，(18)＝ロ，(19)＝イ，(20)＝ハ

（注）　a は自然対数の底 e である．

1959 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

変域 $x>0$ において四つの函数

$$f_1(x)=\frac{x}{1},\quad f_2(x)=\frac{x^2}{1\cdot2},\quad f_3(x)=\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3},\quad f_4(x)=\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

を考える。

(1) $f_2(x)$ が $f_1(x)$，$f_3(x)$，$f_4(x)$ のどの値より大きいような x の範囲は $\boxed{(1)}<x<\boxed{(2)}$ である。

(2) $f_3(x)$ が $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_4(x)$ のどの値より大きいような x の範囲は $\boxed{(3)}<x<\boxed{(4)}$ である。

分　野

数学 I 代数：高次関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$f_2(x)-f_1(x)=\frac{x}{1\cdot2}(x-2).\ f_3(x)-f_2(x)=\frac{x^2}{1\cdot2\cdot3}(x-3),\ f_4(x)-f_3(x)=\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(x-4).$$

(1) よって，$f_2(x)$ が最大になるのは

$$\boxed{2}<x<\boxed{3}. \qquad \cdots(1),\ (2)$$

(2) また，$f_3(x)$ が最大になるのは

$$\boxed{3}<x<\boxed{4}. \qquad \cdots(3),\ (4)$$

II

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

a，b，c，d は実数で，$a<c$ である。

等式 $(x-a)^2(bx-x^2-1)=(x-c)^2(dx-x^2-1)$ が x についての恒等式であるとき，

$$a=\boxed{(5)},\quad b=\boxed{(6)},\quad c=\boxed{(7)},\quad d=\boxed{(8)}$$

である。

分　野

数学 I 代数：恒等式

【解答】

両辺の定数項を比較して $-a^2=-c^2$．$a\neq c$ より，$a=-c$．

$x=c$ を代入して，$(c-a)^2(bc-c^2-1)=0$．$a\neq c$ より，$c^2-bc+1=0$．

$x=a$ を代入して，$0=(a-c)^2(da-a^2-1)$．$a\neq c$，$a=-c$ より，$c^2+cd+1=0$．

よって $bc=-cd=c^2+1$．$a=-c<c$ より $c>0$．よって，$b=-d$．

よって，

$$(x+c)^2(-dx-x^2-1)=(x-c)^2(dx-x^2-1).$$

$$(2c+d)x^3+(2c+c^2d)x=0.$$

恒等式の条件から

$$2c+d=0,\quad (2+cd)c=0.$$

$c>0$ から，$c=1$，$d=-2$．よって，

$$a=\boxed{-1},\quad b=\boxed{2},\quad c=\boxed{1},\quad d=\boxed{-2}.$$ …(5)，(6)，(7)，(8)

（注１） 展開して，

$-x^4+(2a+b)x^3-(a^2+2ab+1)x^2+(a^2b+2a)x-a^2=-x^4+(2c+d)x^3-(c^2+2cd+1)x^2+(c^2d+2c)x-c^2$

として，係数比較しても難しくはない．

（注２） $a\neq c$ より，$(x-a)^2$ と $(x-c)^2$ は互いに素．

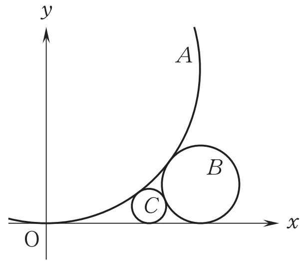
よって，$(x-a)^2=x^2-dx+1$，$(x-c)^2=x^2-bx+1$．

$a<c$ より $a=-1$，$c=1$，$b=2$，$d=-2$．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

三つの円 A，B，C がある。円 A の中心は $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，半径は $\frac{1}{2}$ である。円 B は A に接し，かつ x 軸に点 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ で接する。また円 C は A，B および x 軸と図のように接している。このとき B の半径は $\boxed{(9)}$，C の半径は $\boxed{(10)}$ で，C が x 軸と接する点の x 座標は $\boxed{(11)}$ である。



分　野

数学Ⅱ：円の方程式

【解答】

円 A，B，C の中心を点 A，B，C とし，$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ b\right)$，$\mathrm{C}(d,\ c)$ とすると，円 B，C の半径は b，c である．

円 A，B が接するから

$$\mathrm{AB}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-b\right)^2=\left(\frac{1}{2}+b\right)^2.\quad \therefore\quad b=\frac{1}{8}.$$

よって，円 B の半径は $\boxed{\frac{1}{8}}$． …(9)

円 C は円 A に接するから，

$$\mathrm{AC}^2=d^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2=\left(c+\frac{1}{2}\right)^2.\quad \therefore\quad 2c=d^2.$$ …①

円 C は円 B にも接するから，

$$\mathrm{BC}^2=\left(d-\frac{1}{2}\right)^2+(c-b)^2=(b+c)^2.\quad \therefore\quad d^2-d+\frac{1}{4}=\frac{c}{2}.$$ …②

①，② から，

$$3d^2-4d+1=0.\quad d=1,\ \frac{1}{3}.$$

図より点Ｃの x 座標 d は点Ｂの x 座標 $\frac{1}{2}$ より小さい．よって，$d=\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{18}$.

よって，円 C の半径は $\boxed{\frac{1}{18}}$，x 軸と接する点の x 座標は $\boxed{\frac{1}{3}}$. …⑽，⑾

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

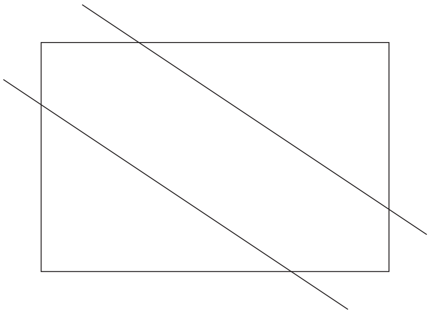
方程式 $x=\pm a$，$y=\pm b$，$bx+ay=\pm c^2$，$(a>0,\ b>0,\ c>0)$ で表わされる六個の直線を考える。

(1) これらの直線が図のように六角形を囲むための条件は $\dfrac{c^2}{ab}<\boxed{(12)}$

(2) その六角形の面積 A が直線 $x=\pm a$，$y=\pm b$ で囲まれる長方形の面積の $\dfrac{3}{4}$ に等しいとき，

$\dfrac{c^2}{ab}=\boxed{(13)}$

(3) $c=1$ とし，a，b を条件 $a^2+b^2=8$，$a\geqq b>0$ のもとで動かすとき，六角形の面積 A が最大となるのは $a=\boxed{(14)}$，$b=\boxed{(15)}$ の場合であって，そのとき $A=\boxed{(16)}$ である。



分　野

数学Ⅱ：直線の方程式

【解答】

(1) $x=a$ と $x=-a$，$y=b$ と $y=-b$，$bx+ay=c^2$ と $bx+ay=-c^2$ はそれぞれ原点について対称である．

A$(a,\ b)$，B$(-a,\ b)$，C$(-a,\ -b)$，D$(a,\ -b)$ とおくと，$bx+ay=\pm c^2$ は直線 BD：$bx+ay=0$ に平行．

$x=a$ と $bx+ay=c^2$ の交点をＰとすると P$\left(a,\ \dfrac{c^2-ab}{a}\right)$.

Ｐが辺 AD 上にある条件は，$-b<\dfrac{c^2-ab}{a}<b \iff \dfrac{c^2}{ab}<\boxed{2}$. …⑿

このとき，2 直線は図のように六角形を囲む.

(2) $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{b-\dfrac{c^2-ab}{a}}{2b}=1-\dfrac{c^2}{2ab}$.

$$\frac{\text{六角形}}{\text{長方形}}=1-\left(1-\frac{c^2}{2ab}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{ab}\right)^2+\frac{c^2}{ab}=\frac{3}{4}$$

から，

$$\left(\frac{c^2}{ab}\right)^2-4\frac{c^2}{ab}+3=\left(\frac{c^2}{ab}-1\right)\left(\frac{c^2}{ab}-3\right)=0.$$

$\dfrac{c^2}{ab}<2$ から $\dfrac{c^2}{ab}=\boxed{1}$. …(13)

(3) 長方形の面積は $4ab$ だから六角形の面積は

$$A=-\frac{c^4}{ab}+4c^2=4-\frac{1}{ab}.$$

$a^2+b^2=8$ から $8\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab$．等号は $a=b=2$ のときに成り立つ．よって，

$$A\leqq 4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.$$

よって，A が最大になるのは

$a=\boxed{2}$，　$b=\boxed{2}$ の場合であって，そのとき $A=\boxed{\dfrac{15}{4}}$. …(14)，(15)，(16)

（注）(1) は点 $(a,\ b)$ が直線 $bx+ay=c^2$ の上側にある条件とみれば，$ba+ab=2ab>c^2$.

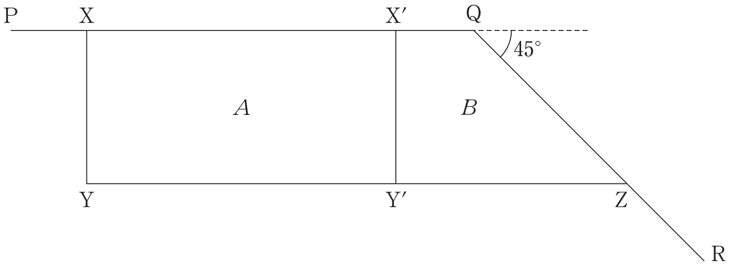
∴ $\dfrac{c^2}{ab}<2$.

(2) は直線 $bx+ay=c^2$ が各辺の中点を通るときであることに気付けば $(a,\ 0)$ または $(0,\ b)$ を代入して，$ab=c^2$.　∴ $\dfrac{c^2}{ab}=1$

V

次の $\boxed{}$ の中に適当な整数を記入せよ。

図のような‘へい’PQR を境界とする土地がある。この土地の一隅に‘さく’XYZ，X′Y′ を作って長方形の地面 XYY′X′ と台形の地面 X′Y′ZQ を囲み，長方形の面積 A が台形の面積 B の 2 倍となるようにする。いま，‘さく’の全長を 30 m とするとき，総面積 $A+B$ を最大にするには XY＝$\boxed{(17)}$ m，YY′＝$\boxed{(18)}$ m，Y′Z＝$\boxed{(19)}$ m，にすればよい。そのとき，$A+B=\boxed{(20)}$ m^2 になる。



分　野

数学 I 代数：2 次関数，最大・最小

【解答】

XY＝x m とすると，YZ＝$30-2x$．XQ＝YZ－x＝$30-3x$．

$$A+B=\text{台形 XYZQ}=\frac{1}{2}(30-3x+30-2x)x=30x-\frac{5}{2}x^2.$$

ここで，$A=2B$ だから，$A=\frac{2}{3}(A+B)=20x-\frac{5}{3}x^2$.

よって，XX′＝$20-\frac{5}{3}x \leqq$ XQ＝$30-3x$．よって，$(0<)x \leqq \frac{15}{2}$.

$$A+B=-\frac{5}{2}(x-6)^2+90.$$

よって，$x=6$ のとき $A+B$ は最大になる．このとき，

XY＝$x=\boxed{6}$ m，　YY′＝$20-\frac{5}{3}x=\boxed{10}$ m，　…(17)，(18)

Y′Z＝YZ－YY′＝$(30-2x)-10=\boxed{8}$ m，　…(19)

$A+B=\boxed{90}$ m^2.　…(20)

1959 年　2 次試験
(新課程・ 4 科目より 3 科目選択・数学 I 代数)

第 1 問

平面上の点 $(x,\ y)$ に $\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=3x+2y \end{cases}$ によって定まる点 $(x',\ y')$ を対応させる。

(1)　4 点 $(0,\ 0)$, $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$, $(a,\ b)$ を頂点とする長方形は，この対応によってどのような図形にうつるか。図をかいて説明せよ。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(2)　その図形の面積ともとの長方形の面積との比を求めよ。

分　野

数学 I 代数：不等式，不等式と領域，一次変換

考え方

長方形を不等式で表すと，$0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq b$.

x，y を x'，y' で表し，上の不等式に代入すれば，うつされた点 $(x',\ y')$ のみたすべき不等式になる．

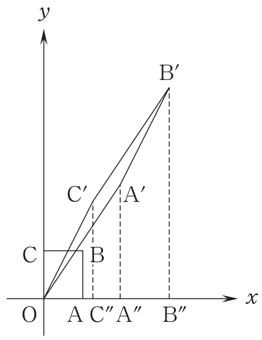
【解答】

(1)　O$(0,\ 0)$，A$(a,\ 0)$，B$(a,\ b)$，C$(0,\ b)$ とおく．長方形 OABC を表す領域は $0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq b$.

x，y を x'，y' について解くと，$x=2x'-y'$，$y=-3x'+2y'$.

$$\therefore \quad 0 \leqq 2x'-y' \leqq a, \quad 0 \leqq -3x'+2y' \leqq b.$$

これは 4 点 O$(0,\ 0)$，A$'(2a,\ 3a)$，B$'(2a+b,\ 3a+2b)$，C$'(b,\ 2b)$ を頂点とする平行四辺形である．図示すると，右図．



…(答)

(2)　A$'$，B$'$，C$'$ から x 軸へ下した垂線の足をそれぞれ A$''$，B$''$，C$''$ とすると，

$$\begin{aligned}
\text{平行四辺形 A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}' &= \triangle \text{OC}'\text{C}'' + \text{台形 C}''\text{B}''\text{B}'\text{C}' - \triangle \text{OA}'\text{A}'' - \text{台形 A}''\text{B}''\text{B}'\text{A}' \\
&= \frac{1}{2}b \cdot 2b + \frac{1}{2}(2b+3a+2b)(2a+b-b) \\
&\quad -\frac{1}{2}2a \cdot 3a - \frac{1}{2}(3a+3a+2b)(2a+b-2a) \\
&= ab.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \text{平行四辺形 OA}'\text{B}'\text{C}' : \text{長方形 OABC} = ab : ab = 1 : 1.$$

…(答)

(注 1)　この問題が「数学 I 代数」で出題されていることに違和感を覚える人もいるかも知れない．しかし，ここで使っている程度の座標は中学でも扱っているのでその意味で「数学 I 代数」として出題されたのかも知れない．

(注 2)　この時代ベクトルも一次変換も教科書の範囲外であったが内容的には一次変換の問題である．一次変換としては以下のようである．

$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とおき，長方形を $\overrightarrow{\text{OP}}=\alpha\overrightarrow{\text{OA}}+\beta\overrightarrow{\text{OC}}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 1,\ 0 \leqq \beta \leqq 1)$ とすると，

$M\overrightarrow{\text{OP}}=\alpha M\overrightarrow{\text{OA}}+\beta M\overrightarrow{\text{OC}}=\alpha\overrightarrow{\text{OA}'}+\beta\overrightarrow{\text{OB}'}$ から長方形 OABC は平行四辺形 OA$'$B$'$C$'$ にうつることがわかる．

平行四辺形の面積は $\sqrt{|\overrightarrow{\text{OA}}|^2|\overrightarrow{\text{OC}}|^2-(\overrightarrow{\text{OA}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}})^2}=|(2a)(2b)-(3a)b|=ab$ として求められる．

また面積比は $|\det M|=2\times 2-1\times 3=1$ からもただちに求められる．

第2問

井戸に小石を落としたところ，小石が水面に達した音が t 秒後に聞こえた。

(1) 重力の加速度を g m/秒^2，音の速度を c m/秒，地面から水面までの距離を d m とするとき，d を g，c，t で表わせ。ただし，空気の抵抗は無視するものとする。

(2) 音が伝わるのに要する時間を無視すれば，d の近似値として $d'=\dfrac{1}{2}gt^2$ が得られる。

このとき，相対誤差 $\dfrac{d'-d}{d}$ が与えられた正数 α より小さくなるために，t は g，c，α によって定まるある限界より小さくなければならない。この限界を求めよ。

分 野

数学 I 代数：2 次方程式，速度・加速度，近似値

考え方

t を d で表し，逆に d を t で表す.

相対誤差の不等式を t を含む不等式で表し，

【解答】

(1) 小石が水面に達するまでにかかる時間を t_1 とすると，$d=\dfrac{1}{2}g{t_1}^2$. $\therefore\quad t_1=\dfrac{\sqrt{2d}}{\sqrt{g}}$.

音が届くのに要する時間を t_2 とすると，$d=ct_2$.

$t=t_1+t_2$ だから

$$t=\frac{\sqrt{2d}}{\sqrt{g}}+\frac{d}{c}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{g}\,d+\sqrt{2}\,c\sqrt{d}-ct\sqrt{g}=0.$$

これを $\sqrt{d}$ の 2 次方程式とみれば

$$\sqrt{d}=\frac{-\sqrt{2}\,c\pm\sqrt{2c^2+4ctg}}{2\sqrt{g}}.$$

$\sqrt{d}>0$ に注意すると，

$$d=\frac{4c^2+4cgt-2\sqrt{2}\,c\sqrt{2c^2+4cgt}}{4g}=\frac{c^2+cgt-c\sqrt{c^2+2cgt}}{g}.$$ …(答)

(2) $d'=\dfrac{1}{2}gt^2$. $\dfrac{d'-d}{d}<\alpha \iff \dfrac{d'}{d}<1+\alpha$.

$$\frac{d'}{d}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{\frac{c^2+cgt-c\sqrt{c^2+2cgt}}{g}}=\frac{g^2t^2}{2c(c+gt-\sqrt{c^2+2cgt})}$$

$$=\frac{c+gt+\sqrt{c^2+2cgt}}{2c}=\frac{1}{2}+\frac{gt}{2c}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{gt}{2c}}.$$

$$u=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{gt}{2c}} \text{ とおくと，} u^2+\frac{1}{4}+u<1+\alpha.\ \frac{1}{2}\leqq u \text{ から } 1\leqq u+\frac{1}{2}<\sqrt{1+\alpha}.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{gt}{2c}=u^2<\left(\sqrt{1+\alpha}-\frac{1}{2}\right)^2=\alpha+1-\sqrt{\alpha+1}+\frac{1}{4}.$$

$$\therefore\quad t<\frac{2c}{g}(\alpha+1-\sqrt{\alpha+1}).$$

よって，t の限界は $\dfrac{2c}{g}(\alpha+1-\sqrt{\alpha+1})$. …(答)

（注１） ⑴の問題文には加速度 g による小石の運動が $d=\frac{1}{2}gt^2$ であることは明記されてない．⑴を解くには⑵の問題文を引用しなければならない．しかも，⑵の式はあくまでも近似値である．⑴の問題文に $d=\frac{1}{2}gt^2$ があるべきだったのではないか．

（注２） ⑵のような等号のない不等式をみたす上限を問う問題は，この問題以後出題がない．

1959 年　2 次試験
(新課程・ 4 科目より 3 科目選択・数学 I 幾何)

第 1 問

二つの円弧 AC_1B と AC_2B が弦 AB の同じ側にあって，いずれも半円より大きいとする。A を通る直線 l が弧 AC_1B，AC_2B と交わる点をそれぞれ P_1，P_2 とすれば，l がどのような位置にあるとき線分 P_1P_2 の長さが最大となるか。

分　野

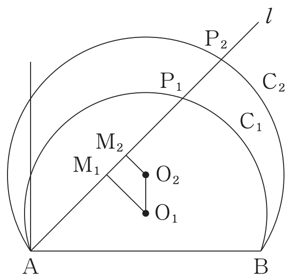
数学 I 幾何：平面図形，円，三角関数

考え方

P_1P_2 の長さを表す他の図形的要素を見つけることができるかどうかが鍵.

うまく見つからないようなら解析的方法も考える.

【解答】



弧 AC_1B が AC_2B より小さいとして一般性を失わない.

弧 AC_1B，AC_2B の中心をそれぞれ O_1，O_2 とし，O_1，O_2 から l に下した垂線の足をぞれぞれ M_1，M_2 とする.

M_1，M_2 はそれぞれ弦 AP_1，AP_2 の中点だから，

$$P_1P_2=AP_2-AP_1=2AM_2-2AM_1=2M_1M_2.$$

ここで，$M_1M_2 \leqq O_1O_2$ だから P_1P_2 が最大になるのは，$M_1M_2=O_1O_2$ のときで，そのようになるのは $l /\!/ O_1O_2$ すなわち，$l \perp AB$ のとき.

弧 AC_1B，AC_2B はともに半円より大きいから，このとき，l と交わる.

よって，線分 P_1P_2 の長さが最大となるのは $l \perp AB$ のとき.　…(答)

【別解】

弧 AC_1B が AC_2B より小さいとし，中心を O_1，O_2 とすることは**【解答】**と同じ.

$$\angle BAO_1=\theta_1,\quad \angle BAO_2=\theta_2,\quad \angle BAP_1=\angle BAP_2=\alpha$$

とおく．また $AB=a$ とおく.

AO_1 の延長と弧 AC_1B の交点を D_1 とすると，AD_1 は弧 AC_1B を含む円の直径で

$AD_1\cos\theta_1=a=AB$．また，$AD_1\cos(\alpha-\theta_1)=AP_1$.

よって，

$$AP_1=\frac{a\cos(\alpha-\theta_1)}{\cos\theta_1}.$$

同様に，

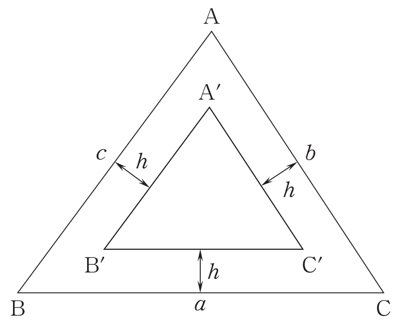
$$AP_2=\frac{a\cos(\alpha-\theta_2)}{\cos\theta_2}.$$

$$\mathrm{P_1P_2}=\mathrm{AP_2}-\mathrm{AP_1}=\frac{a\cos(\alpha-\theta_2)}{\cos\theta_2}-\frac{a\cos(\alpha-\theta_1)}{\cos\theta_1}$$
$$=\frac{a}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\{\cos\theta_1\cos(\alpha-\theta_2)-\cos\theta_2\cos(\alpha-\theta_1)\}$$
$$=\frac{a}{2\cos\theta_1\cos\theta_2}\{\cos(\alpha+\theta_1-\theta_2)+\cos(\alpha-\theta_1-\theta_2)-\cos(\alpha-\theta_1+\theta_2)-\cos(\alpha-\theta_1-\theta_2)\}$$
$$=\frac{a}{2\cos\theta_1\cos\theta_2}\{\cos(\alpha+\theta_1-\theta_2)-\cos(\alpha-\theta_1+\theta_2)\}=\frac{a}{\cos\theta_1\cos\theta_2}\sin(\theta_2-\theta_1)\sin\alpha.$$

θ_1，θ_2 は一定で，$0<\theta_1<\theta_2<90°$，$0<\alpha<\theta_1+90°$ だから，$\alpha=90°$ のとき，$\mathrm{P_1P_2}$ は最大となる．
つまり，$\mathrm{P_1P_2}$ が最大となるのは $l\perp\mathrm{AB}$ のとき． …(答)

第 2 問

△ABC の内部に △A′B′C′ をとり，その三辺 A′B′，B′C′，C′A′ はそれぞれ △ABC の三辺 AB，BC，CA に平行で，対応する辺の間の距離はいずれも h であるとする。△A′B′C′ の周が △ABC の周の $\frac{1}{2}$ であるとき，h を a，b，c で表わせ。ただし，a=BC，b=CA，c=AB とする。



分　野

数学Ⅰ幾何：三角比

考え方

各辺が平行だから △A′B′C′∽△ABC であることは明らか．その相似比が $\frac{1}{2}$ であると考えればよい．

【解答】

△ABC の内心を I，内接円の半径を r とすると，I から 3 辺 BC，CA，AB までの距離は r である．

BC∥B′C′，CA∥C′A′，AB∥A′B′ だから，I から △A′B′C′ の 3 辺 B′C′，C′A′，A′B′ までの距離は $r-h$ である．したがって，△ABC と △A′B′C′ は I を相似中心とし，相似比 $r:r-h$ の相似の位置にある．

△A′B′C′ の周は △ABC の周の $\frac{1}{2}$ だから，$r:r-h=2:1$．よって，$h=\frac{1}{2}r$.

△ABC の面積 S はヘロンの公式から $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で内接円の半径との関係は $S=rs$ だから $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ よって，

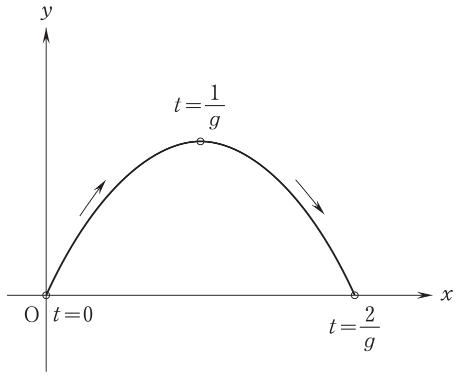
$$h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.\ \left(ただし，s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right).$$ …(答)

1959 年　2 次試験
(新課程・4 科目より 3 科目選択・数学Ⅱ)

第 1 問

時刻 t における点Pの位置 (x, y) が次の方程式(1), (2), (3), (4)によって与えられている。各場合について，t が 0 から 2π まで変わるとき点Pのえがく軌跡を下の例にならって図示せよ。

例 $\begin{cases} x = t \\ y = t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{g}\right)$



(1) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\cos\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos(t + \pi) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

分　野

数学Ⅱ：軌跡，三角関数，倍角公式

考え方

x，y を t のわかりやすい式に直し，t を消去する．あるいは，x，y の t に関する増減を調べる．

また，x または y が 0 になる点，x または y の増減が変る点における t の値を調べ図示する．

【解答】

(1)　$y = -2\sin t$．よって，$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$．図示すると図 1．

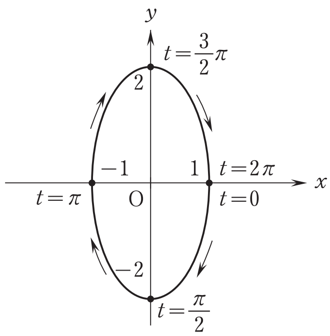
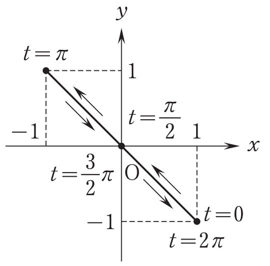


図 1

…(答)

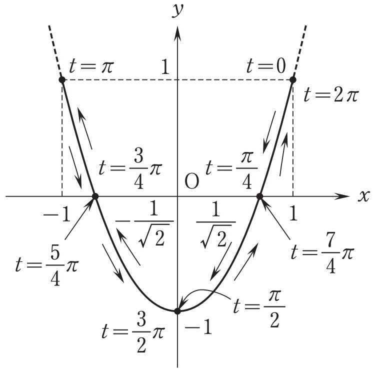
(2) $y=-\cos t$．よって，$y=-x$.$(-1\leqq x\leqq 1)$．図示すると図２．



…(答)

図２

(3) $y=2\cos^2 t-1$．よって，$y=2x^2-1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$．図示すると図３．



…(答)

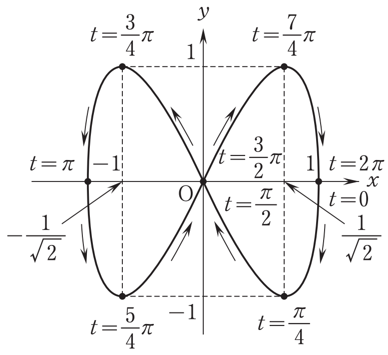
図３

(4) $y=-\sin 2t$．　x，y の増減を表にすると次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
x	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	-1
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$(x,\ y)$		↙		↖		↖		↙	

t	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
x	-1	↗	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	0	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↗	1
y	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$(x,\ y)$		↘		↗		↗		↘	

図示すると図４．



…(答)

図 4

（注） 問題の図は要所要所の通過点が白丸で描かれていたが除外点のようで気持ちがよくないので解答では黒丸にした．

第 2 問

a，b は実の定数で $a<b$ である。このとき，t を任意の正の数とすれば z に関する二次方程式

$$\frac{1}{t}(z-a)^2+t(z-b)^2=0$$

は虚根をもつ。それらを $x+yi$，$x-yi$（x，y は実数で $y>0$）とすれば，t が正の範囲を動くとき点 (x, y) はどのような曲線をえがくか。それを図示せよ。

分 野

数学 I 幾何：軌跡，複素数平面

考え方

x も y も 2 次分数式になるが，次数を下げれば t を x，y で表すことができる．

【解答】

問題文の「虚根」は「虚数解」の当時の表記である．

$(z-a)^2+t^2(z-b)^2=0$ から $z-a=\pm t(z-b)i$．

$$\therefore\quad z=\frac{a\mp itb}{1\mp ti}=\frac{(a\mp itb)(1\pm it)}{1+t^2}=\frac{a+bt^2}{1+t^2}\mp i\frac{(b-a)t}{1+t^2}.\ \text{（複号同順）}$$

$y>0$，$t>0$，$a<b$ より，

$$x=\frac{a+bt^2}{1+t^2},\quad y=\frac{(b-a)t}{1+t^2}.$$

ここで，

$$x=\frac{b(t^2+1)-(b-a)}{1+t^2}=b-\frac{b-a}{1+t^2}$$

より，$y=(b-x)t$．$y>0$，$t>0$ より，$x<b$，$t=\dfrac{y}{b-x}$．

$$\therefore\quad t^2+1=\frac{y^2}{(b-x)^2}+1=\frac{(x-b)^2+y^2}{(b-x)^2}.$$

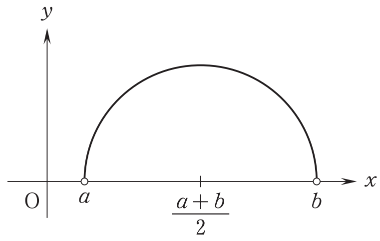
$$b-x=\frac{b-a}{1+t^2}=\frac{(b-a)(b-x)^2}{(x-b)^2+y^2}.$$

$b>x$ より，

$$(x-b)^2+y^2=(b-a)(b-x).$$

$$\therefore\quad \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

$x<b$，$y>0$ より，これを図示すると，右図．



【別解】 複素数平面で

与方程式は

$$(1+t^2)z^2-2(a+bt^2)z+(a^2+b^2t^2)=0$$

と変形される．実数係数の 2 次方程式だから，$z=x+yi$ ($y>0$) が解なら，もう 1 つの解は $\overline{z}=x-yi$.

解と係数の関係から

$$z+\overline{z}=\frac{2(a+bt^2)}{1+t^2},\quad z\overline{z}=\frac{a^2+b^2t^2}{1+t^2}.$$

$$z+\overline{z}=2b-\frac{2(b-a)}{1+t^2},\quad z\overline{z}=b^2-\frac{b^2-a^2}{1+t^2}.$$

よって，t を消去すると，

$$z\overline{z}=b^2-(a+b)\frac{2b-z-\overline{z}}{2}.\quad z\overline{z}-\frac{a+b}{2}(z+\overline{z})+ab=0.$$

$$\left(z-\frac{a+b}{2}\right)\left(\overline{z}-\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \left|z-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{b-a}{2}.$$

よって z は $\dfrac{a+b}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{b-a}{2}$ の円上にある．z の虚部 $y>0$ より $(x,\ y)$ はその円の上半分．（図省略）

（注） 当時複素数平面は教科書の範囲外であった．

1959 年　2 次試験
（新課程・4 科目より 3 科目選択・数学Ⅲ）

第 1 問

a，b を実の定数とするとき，定積分

$$I(a,\ b)=\int_0^{\pi}(1-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx$$

を求めよ。また　$I(a,\ b)$ を最小にする a，b の値を定めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

定積分は計算してしまうとただの数になるから $I(a,\ b)$ は a，b の 2 次式になるはずである．

【解答】

$$I(a,\ b)=\int_0^{\pi}(a^2\sin^2 x+2ab\sin x\sin 2x+b^2\sin^2 2x-2a\sin x-2b\sin 2x+1)\,dx.$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos x-\cos 3x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\sin x-\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2,$$

$$\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}dx=\pi$$

から，

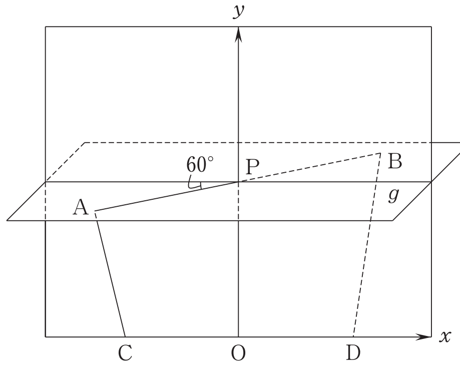
$$I(a,\ b)=\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2-4a+\pi=\frac{\pi}{2}\left(a-\frac{4}{\pi}\right)^2+\frac{\pi}{2}b^2+\pi-\frac{8}{\pi}.$$

よって，$I(a,\ b)$ を最小にするのは

$$a=\frac{4}{\pi},\quad b=0.$$ …（答）

第2問

x，y 平面上の点 $(0,\ a)$ をP，直線 $y=a$ を g とする。g を含み y 軸に垂直な平面上に，P を中点とし，g と角 $60°$ をなす長さ $2b$ の線分 AB をとり，A，B から x 軸におろした垂線の足をそれぞれ C，D とする。ねじれ四辺形 ABCD を x 軸のまわりに回転するときできる立体の体積を求めよ。



分野

数学Ⅲ：整式の積分，体積

考え方

回転軸（x 軸）方向の長さ x を変数として回転軸に垂直な断面積を求める．

x 軸に垂直な断面をとると，線分 AB 上の点 Q と Q から g へ下した垂線の足 K と，x 軸との交点 H が存在する．$\mathrm{HK}=a$ だから，QK が求められれば QH がわかり，断面積 $\pi\mathrm{QH}^2$ が求められる．

【解答】

ねじれ四辺形を回転してできる曲面が囲む立体の体積を求める．

線分 AB 上の点 Q をとり，Q から g へ下した垂線の足を K とする．K の x 座標を X とすると，

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=b$，$g$ と AB のなす角が $60°$ だから，$-\dfrac{b}{2}\leqq X\leqq\dfrac{b}{2}$．

QK の長さは $\sqrt{3}\,|X|$．

Q から x 軸へ下した垂線の足 H の座標は $(X,\ 0)$ だから $\mathrm{QH}^2=\mathrm{QK}^2+\mathrm{KH}^2=3X^2+a^2$．

Q を x 軸の周りに回転すると半径 $\sqrt{3X^2+a^2}$ の円になる．その面積は $\pi(3X^2+a^2)$．

求める体積は

$$\pi\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}(3X^2+a^2)\,dX=2\pi\Big[X^3+a^2X\Big]_0^{\frac{b}{2}}=2\pi\left(\frac{b^3}{8}+\frac{a^2b}{2}\right)=\frac{b}{4}(4a^2+b^2)\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注1） ねじれ四辺形とは，空間で同一平面上にない4点を結んでできる四辺形をいう．対辺がねじれの位置にある．ねじれ四角形ともいう．

（注2） 当時空間座標は教科書の範囲外だったので上のような表現になった．

z 軸を xy 平面に垂直手前にとると，$\mathrm{A}\left(-\dfrac{b}{2},\ a,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{b}{2},\ a,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}b\right)$，$\mathrm{Q}(X,\ a,\ -\sqrt{3}\,X)$，

$\mathrm{H}(X,\ 0,\ 0)$ から断面積 $\pi\mathrm{QH}^2=\pi(3X^2+a^2)$ は容易に求められる．

（注3） ねじれ四辺形を回転してできる図形は曲面で体積は0である．解答はこの曲面によって囲まれる部分の体積を求めている．ねじれ四辺形なのでその内外（うちそと）の議論はできない．

1959 年　2 次試験
(旧課程・3 科目より 2 科目選択)

解析 I

第 1 問

(新課程　数学 I 代数　第 1 問と同じ)

第 2 問

(新課程　数学 II　第 2 問と同じ)

第 3 問

(新課程　数学 I 代数　第 2 問と同じ)

解析 II

第 1 問

(新課程　数学 II　第 1 問と同じ)

第 2 問

(新課程　数学 III　第 1 問と同じ)

(注)　ただし，次のようなただし書きがある．

「ただし，m を定数とするとき，

$$\frac{d}{dx}\sin mx = m\cos mx$$

$$\frac{d}{dx}\cos mx = -m\sin mx$$

である。」

第3問

（新課程　数学Ⅲ　第2問と同じ）

幾何

第1問

（新課程　数学Ⅰ幾何　第1問と同じ）

第2問

（新課程　数学Ⅰ幾何　第2問と同じ）

第3問

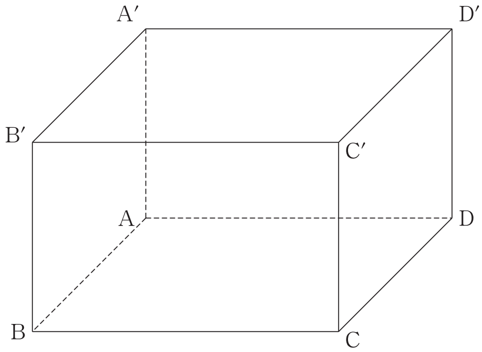
直方体の頂点を図のようにA，B，C，D，A′，B′，C′，D′とし，辺の長さを

$$AB=a,\quad AD=b,\quad AA'=c$$

とする。

(i)　対角線AC′が平面A′BDと交わる点をMとするとき，C′M：MAを求めよ。

(ii)　四面体A′BDC′の体積を求めよ。



分　野

（旧課程）**幾何**：立体図形

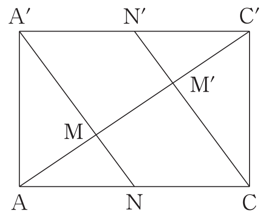
考え方

(i)は断面AA′C′Cで考える．

(ii)は直方体から四面体A′BDC′に取り除かれる部分の体積を考える．

【解答】

(i) 断面 $\mathrm{AA'C'C}$ で考える．



底面 ABCD 上で AC と BD の交点を N とすると，N は長方形の対角線の交点だから AC，BD の中点．N は平面 $\mathrm{A'BD}$ 上にある．

断面 $\mathrm{AA'C'C}$ において，N は AC の中点で，M は $\mathrm{A'N}$ と $\mathrm{AC'}$ の交点．

$\mathrm{A'C'}$ の中点を $\mathrm{N'}$ とおき，$\mathrm{CN'}$ と $\mathrm{AC'}$ の交点を $\mathrm{M'}$ とおく．

$\mathrm{A'N'=NC}$ だから $\mathrm{A'N /\!/ N'C}$．

中点連結定理から $\mathrm{AM=MM'}$．同様に $\mathrm{MM'=M'C'}$．

よって，$\mathrm{C'M : MA = 2 : 1}$． …(答)

(ii) 四面体 $\mathrm{A'BDC'}$ は直方体 $\mathrm{ABCD\text{-}A'B'C'D'}$ から，四面体 $\mathrm{ABDA'}$，四面体 $\mathrm{B'A'C'B}$，四面体 $\mathrm{D'C'A'D}$，四面体 $\mathrm{CDBC'}$ を取り除いたもの．

取り除かれる 4 四面体はいずれも 1 頂点の周りに長さ a，b，c の辺が直角をなす形をしているから，その体積は $\dfrac{1}{6}abc$．

$$\text{四面体 }\mathrm{A'BDC'} = abc - 4\times\frac{1}{6}abc = \frac{1}{3}abc. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注) 当時はまだベクトルは教科書になかったが，(1) はベクトルを使うと極めて容易になる．

△$\mathrm{A'BD}$ の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AA'}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC'}}.$$

よって，G が平面 $\mathrm{A'BD}$ と $\mathrm{AC'}$ の交点 M であることがわかる．また，$\mathrm{AM} = \dfrac{1}{3}\mathrm{AC'}$ であることも同時に明らかになる．

1960 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

三角形 ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ L，M，N，直線 MN，NL，LM の方程式をそれぞれ

$$2x-4y-3=0,\quad 2x+2y-3=0,\quad 4x-2y-9=0$$

とするとき，3 点 L，B，C の座標はそれぞれ

$$\mathrm{L}(\boxed{(1)},\ \boxed{(2)}),\quad \mathrm{B}(\boxed{(3)},\ \boxed{(4)}),\quad \mathrm{C}(\boxed{(5)},\ \boxed{(6)})$$

である。

分　野

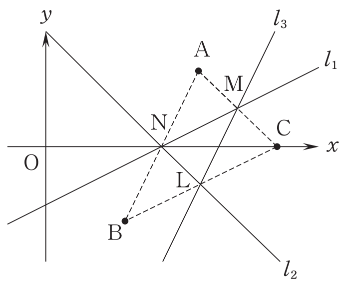
数学Ⅱ：直線の方程式

【解答】

$l_1: 2x-4y-3=0,\quad l_2: 2x+2y-3=0,\quad l_3: 4x-2y-9=0$

とすると，l_2，l_3 の交点が L だから，その座標は，$\mathrm{L}\left(\boxed{2},\ \boxed{-\dfrac{1}{2}}\right)$.

…(1)，(2)



M は l_3，l_1 の交点だから $\mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，N は l_1，l_2 の交点だから

$\mathrm{N}\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$.

A，B，C の座標をそれぞれ $(a_1,\ a_2)$，$(b_1,\ b_2)$，$(c_1,\ c_2)$ とすると，L，M，N はそれぞれ BC，CA，AB の中点だから

$$\left(2,\ -\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{b_1+c_1}{2},\ \frac{b_2+c_2}{2}\right),\quad \left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\left(\frac{c_1+a_1}{2},\ \frac{c_2+a_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\ \frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

よって，

$$b_1=\frac{b_1+c_1}{2}-\frac{c_1+a_1}{2}+\frac{a_1+b_1}{2}=2-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=1,$$

$$b_2=\frac{b_2+c_2}{2}-\frac{c_2+a_2}{2}+\frac{a_2+b_2}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=-1.$$

よって，$\mathrm{B}(\boxed{1},\ \boxed{-1})$. …(3)，(4)

$$c_1=\frac{b_1+c_1}{2}+\frac{c_1+a_1}{2}-\frac{a_1+b_1}{2}=2+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=3,$$

$$c_2=\frac{b_2+c_2}{2}+\frac{c_2+a_2}{2}-\frac{a_2+b_2}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-0=0.$$

よって，$\mathrm{C}(\boxed{3},\ \boxed{0})$. …(5)，(6)

【別解】

L，M，N の座標を求めるところまで**【解答】**と同じ．LMNB は平行四辺形だから LN の中点は BM の中点．

$$\left(\frac{7}{4},\ -\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{5+2b_1}{4},\ \frac{1+2b_2}{4}\right)$$

より，$\mathrm{B}(\boxed{1},\ \boxed{-1})$. …(3)，(4) LCMN も平行四辺形だから LM の中点は CN の中点.

$$\left(\frac{9}{4},\ 0\right)=\left(\frac{3+2c_1}{4},\ \frac{0+c_2}{2}\right)$$

より，C($\boxed{3}$, $\boxed{0}$).　…(5)，(6)

（注）　三角形 LMN と三角形 ABC は重心 G(2, 0) を共有するから，B は MG を，C は NG をそれぞれ 3：2 に外分した点である．このことを使ってもよい．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

a，b，c が定数であるとき，x，y の式 $ax+(a+b)y+(a+b+c)$ の，3 点 A(1, 1)，B(2, 2)，C(3, 4) における値がすべて 1 となるならば，

$$a=\boxed{(7)},\quad b=\boxed{(8)},\quad c=\boxed{(9)}$$

である。

分　野

数学Ⅰ代数：連立方程式

【解答】

A，B，C は一直線上にないから与式は xy 平面上のすべての点で 1.

よって，$a=0$，$a+b=0$，$a+b+c=1$.

よって，

$$a=\boxed{0},\quad b=\boxed{0},\quad c=\boxed{1}.$$　…(7)，(8)，(9)

【別解】

A(1, 1)，B(2, 2)，C(3, 4) で 1 になるから

$$a+(a+b)+(a+b+c)=3a+2b+c=1,\quad 2a+2(a+b)+(a+b+c)=5a+3b+c=1,$$
$$3a+4(a+b)+(a+b+c)=8a+5b+c=1.$$

これを解いて

$$a=\boxed{0},\quad b=\boxed{0},\quad c=\boxed{1}.$$　…(7)，(8)，(9)

Ⅲ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

x 軸の正の部分に接する円が，直線 $4x+3y-4=0$ に点 (4, $\boxed{(10)}$) で接するならば，その円の中心の座標は ($\boxed{(11)}$, $\boxed{(12)}$) である。

分　野

数学Ⅱ：円の方程式

【解答】

直線 $l：4x+3y-4=0$ 上で $x=4$ の点の y 座標は $\boxed{-4}$.　…(10)

円の中心を $(a,\ b)$ とすると，x 軸の正の部分で接する円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2\quad (a>0).$$

$l：y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{3}$. これを円の方程式に代入して整理すると，

$$(x-a)^2+\left(-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}-b\right)^2=b^2. \quad \therefore \quad 25x^2-2(9a-12b+16)x+9a^2-24b+16=0$$

これが $x=4$ を重解としてもつから,

$$9a-12b+16=100, \quad 9a^2-24b+16=400.$$

$b=\frac{3}{4}a-7$ から，$a^2-2a-24=(a+4)(a-6)=0$.

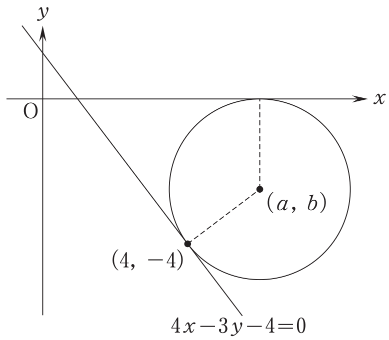
$a>0$ から $a=6$，$b=-\frac{5}{2}$. よって，円の中心は

$$\left(\boxed{6}, \boxed{-\frac{5}{2}}\right). \qquad \cdots(11),\ (12)$$

【別解】

接点の y 座標 $\boxed{-4}$ を出すまで**【解答】**と同じ.

中心を (a, b) とするとき，直線 $l：4x+3y-4=0$ と x 軸に接するから



$$\frac{|4a+3b-4|}{5}=|b|. \quad 4a+3b-4=\pm 5b.$$

よって，$b=2a-2$ または $a=-2b+1$.

また，中心は $(4, -4)$ を通り，l に垂直な直線 $m：3x-4y=28$ 上にあるから $3a-4b=28$.

$b=2a-2$ のとき，$3a-4(2a-2)=28$. よって，$a=-4$.

a は接点の x 座標でもあるが，これが正であるという仮定に反する.

$a=-2b+1$ のとき，$3(-2b+1)-4b=28$. よって，$b=-\frac{5}{2}$. このとき，$a=6$. よって，接点の x 座標も正である.

よって，円の中心は

$$\left(\boxed{6}, \boxed{-\frac{5}{2}}\right). \qquad \cdots(11),\ (12)$$

（注） この当時距離の公式は教科書によって研究のような形で載っているものがある程度であった.

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

三次式 x^3+Ax^2+Bx+2 が二次式 x^2+ax+b（ただし $a<b$）でも x^2+bx+a でも割り切れるならば,

$$A=\boxed{(13)}, \quad B=\boxed{(14)}, \quad a=\boxed{(15)}, \quad b=\boxed{(16)}$$

である。

分 野

数学Ⅱ：因数定理

【解答】

$F(x)=x^3+Ax^2+Bx+2$，$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+bx+a$ とおく.

3 次式 $F(x)$ が異なる 2 次式 $f(x)$，$g(x)$ で割り切れるから，$f(x)=0$，$g(x)=0$ は共通解をもつ.

$f(x)-g(x)=(a-b)x+b-a=(a-b)(x-1)$，$a \neq b$ から $x=1$ が共通解.

したがって，$f(1)=g(1)=1+a+b=0$. $a<b$ から $a<-\frac{1}{2}$.

$$f(x)=x^2+ax-a-1=(x-1)(x+a+1),\quad g(x)=x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a).$$
よって，
$$F(x)=(x-1)(x+a+1)(x-a)=x^3-(a^2+a+1)x+a^2+a.$$
定数項が 2 だから，$a^2+a=2$．$\therefore\quad a^2+a-2=(a-1)(a+2)=0$.

$a<-\dfrac{1}{2}$ から $a=-2$，$b=1$，$F(x)=x^3-3x+2$.

よって，
$$A=\boxed{0},\quad B=\boxed{-3},\quad a=\boxed{-2},\quad b=\boxed{1}.$$ …(13)，(14)，(15)，(16)

V

次の $\boxed{}$ の中にイロハのうち適当なものを記入せよ。

(1) $0<x<6$ の範囲で $f(x)=x^2-5x$ と $g(x)=x-1$ との大きさを比べると $\boxed{(17)}$

(2) $0^\circ<x<90^\circ$ の範囲で $f(x)=1-\cos x$ と $g(x)=\sin^2 x$ との大きさを比べると $\boxed{(18)}$

(3) $0^\circ<x<45^\circ$ の範囲で $f(x)=\tan x+\cot x$ と $g(x)=2$ との大きさを比べると $\boxed{(19)}$

(4) $1<x$ の範囲で $f(x)=\log_2 x$ と $g(x)=\sqrt{x}-1$ との大きさを比べると $\boxed{(20)}$

イ　$f(x)$ は $g(x)$ よりつねに大きい。
ロ　$f(x)$ は $g(x)$ よりつねに小さい。
ハ　イ，ロのどちらでもない。

分　野

数学 I 代数：2 次関数，対数関数，**数学 I 幾何**：三角関数

【解答】

(1) $f(x)-g(x)=(x^2-5x)-(x-1)=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$ から，
$f(0)-g(0)=1>0$，$f(3)-g(3)=-8<0$．よって，$\boxed{\text{イ，ロのどちらでもない.}}$ …(17)＝ハ

(2) $f(x)-g(x)=(1-\cos x)-\sin^2 x=(1-\cos x)\{1-(1+\cos x)\}=-(1-\cos x)\cos x$.
$0^\circ<x<90^\circ$ のとき，$1-\cos x>0$，$\cos x>0$ より $\boxed{f(x)\ \text{は}\ g(x)\ \text{よりつねに小さい.}}$ …(18)＝ロ

(3) $0^\circ<x<45^\circ$ のとき，$0<\tan x<1$.
相加平均・相乗平均の関係から $f(x)-g(x)=(\tan x+\cot x)-2\geqq 2\sqrt{\tan x\cdot\cot x}-2=0$.
等号は成り立たないから，$\boxed{f(x)\ \text{は}\ g(x)\ \text{よりつねに大きい.}}$ …(19)＝イ

(4) $f(2)=1>g(2)=\sqrt{2}-1$，$f(64)=6<g(64)=7$ より，$\boxed{\text{イ，ロのどちらでもない.}}$ …(20)＝ハ

1960 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

x が不等式 $\dfrac{x}{x-1}<-1$ を満たすあらゆる実数値をとるとき，函数 $\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{x^2-x-3}{x-2}$ のとる値の範囲はそれぞれ不等式

$$\boxed{(1)}<\frac{1}{x}<\boxed{(2)},\quad \boxed{(3)}<\frac{x^2-x-3}{x-2}<\boxed{(4)}$$

で表される。

分　野

数学Ⅱ：分数関数，値域

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

x の範囲は $\dfrac{x}{x-1}-(-1)=\dfrac{2x-1}{x-1}<0$ から $\dfrac{1}{2}<x<1$

よって，

$$\boxed{1}<\frac{1}{x}<\boxed{2}. \qquad \cdots(1),\ (2)$$

$$\frac{x^2-x-3}{x-2}=x+1-\frac{1}{x-2}$$

$x+1$，$-\dfrac{1}{x-2}$ は $\dfrac{1}{2}<x<1$ の範囲でともに単調に増加する．

よって，

$$\frac{1}{2}+1-\frac{1}{\frac{1}{2}-2}=\boxed{\frac{13}{6}}<\frac{x^2-x-3}{x-2}<\frac{1-1-3}{1-2}=\boxed{3}. \qquad \cdots(3),\ (4)$$

II

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

α を正の定数とし，連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-\alpha y=7 \end{cases}$$

の解 $x=x_1$，$y=y_1$ と，連立方程式

$$\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x+\alpha y=7 \end{cases}$$

の解 $x=x_2$，$y=y_2$ との間に $y_2=x_1+1$ という関係があるならば，

$$\alpha=\boxed{(5)},\quad x_1=\boxed{(6)},\quad y_1=\boxed{(7)},\quad x_2=\boxed{(8)}$$

である。

分 野

数学 I 代数：連立方程式

【解答】

$$\begin{cases} 3x_1+2y_1=5, & \cdots① \\ x_1-\alpha y_1=7, & \cdots② \\ 3x_2+2y_2=5, & \cdots③ \\ x_2+\alpha y_2=7, & \cdots④ \\ y_2=x_1+1 & \cdots⑤ \end{cases}$$

とおく．

①，② から，$\alpha \neq -\dfrac{2}{3}$ で，

$$x_1=\frac{5\alpha+14}{3\alpha+2},\quad y_1=\frac{-16}{3\alpha+2}.$$

③，④ から，$\alpha \neq \dfrac{2}{3}$ で，

$$x_2=\frac{5\alpha-14}{3\alpha-2},\quad y_2=\frac{16}{3\alpha-2}.$$

⑤ から，

$$\frac{16}{3\alpha-2}=\frac{5\alpha+14}{3\alpha+2}+1.\quad \therefore\quad 3\alpha^2-2\alpha-8=0.\quad \therefore\quad (\alpha-2)(3\alpha+4)=0.$$

α は正の定数だから

$$\alpha=\boxed{2},\quad x_1=\boxed{3},\quad y_1=\boxed{-2},\quad x_2=\boxed{-1}. \qquad \cdots(5),\ (6),\ (7),\ (8)$$

Ⅲ

次の (1)，(2)，(3)，(4) において，A 欄の 2 式が共に成り立つために，B 欄の 2 式が共に成り立つことが

必要十分であるときは　　　イ
必要であるが十分でないときは　ロ
十分であるが必要でないときは　ハ
必要でも十分でもないときは　　ニ

を C 欄の $\boxed{}$ の中に記入せよ。ただし x，y は実数を表わす。

	A	B	C
(1)	$x+y>0$ $xy>0$	$x>0$ $y>0$	$\boxed{(9)}$
(2)	$x+y>2$ $xy>1$	$x>1$ $y>1$	$\boxed{(10)}$
(3)	$y=7-x$ $x^2+y^2=25$	$y=7-x$ $x^2+(7-x)^2=25$	$\boxed{(11)}$
(4)	$y=7-x$ $x^2+y^2=25$	$x^2+y^2=25$ $x^2+(7-x)^2=25$	$\boxed{(12)}$

分 野

数学 I 幾何：必要条件・十分条件，**数学 I 代数**：方程式，不等式

【解答】

(1)「$x>0,\ y>0 \Longrightarrow x+y>0,\ xy>0$」は自明．

x，y が実数で，$x+y>0$，$xy>0$ のとき，$xy>0$ から，x，y は同符号で，$x+y>0$ から，x，y はともに正．よって，「$x+y>0,\ xy>0 \Longrightarrow x>0,\ y>0$」．

よって，

$$「x+y>0,\ xy>0 \Longleftrightarrow x>0,\ y>0」.$$

よって，$x>0$，$y>0$ は $x+y>0$，$xy>0$ であるために $\boxed{\text{必要十分である}}$．　…(9)＝イ

(2)「$x>1,\ y>1 \Longrightarrow x+y>2,\ xy>1$」は自明．

しかし，$x=\frac{1}{2}$，$y=3$ のとき，$x+y>2$，$xy>1$ であるが，$x>1$，$y>1$ でない．

よって，「$x+y>2,\ xy>1 \not\Longrightarrow x>1,\ y>1$」．

よって，$x>1$，$y>1$ は $x+y>2$，$xy>1$ であるために $\boxed{\text{十分であるが必要でない}}$．　…(10)＝ハ

(3) $y=7-x$，$x^2+y^2=25$ のとき，$x^2+(7-x)^2=25$ であり，$y=7-x$，$x^2+(7-x)^2=25$ のとき，$x^2+y^2=25$ であるから，

$$「y=7-x,\ x^2+y^2=25 \Longleftrightarrow y=7-x,\ x^2+(7-x)^2=25」.$$

よって，$y=7-x$，$x^2+(7-x)^2=25$ は $y=7-x$，$x^2+y^2=25$ であるために $\boxed{\text{必要十分である}}$．

…(11)＝イ

（注） A も B も「$(x,\ y)=(3,\ 4)$ または $(4,\ 3)$」と同値．

(4) $y=7-x$，$x^2+y^2=25$ のとき，$x^2+(7-x)^2=25$ から，

$$「y=7-x,\ x^2+y^2=25 \Longrightarrow x^2+y^2=25,\ x^2+(7-x)^2=25」$$

は成り立つ．

$x=3$，$y=-4$ のとき，$x^2+y^2=25$，$x^2+(7-x)^2=25$ をみたすが $y=7-x$ をみたさない．

よって

$$「x^2+y^2=25,\ x^2+(7-x)^2=25 \not\Longrightarrow y=7-x,\ x^2+y^2=25」.$$

よって，$x^2+y^2=25$，$x^2+(7-x)^2=25$ は $y=7-x$，$x^2+y^2=25$ であるために

$\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$．　…(12)＝ロ

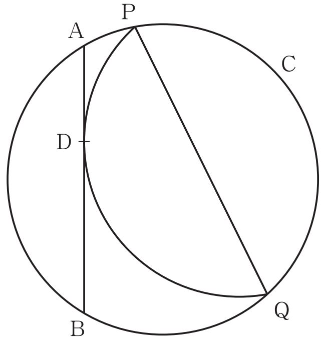
（注） A は「$(x,\ y)=(3,\ 4)$ または $(4,\ 3)$」と同値，B は「$(x,\ y)=(3,\ \pm4)$ または $(4,\ \pm3)$」と同値．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ の中に適当な数を記入せよ。

円 $x^2+y^2=4$ と直線 $x=-1$ で囲まれた弓形のうち，大きい方を ACB とする。

弧 ACB 上に 2 点 P，Q をとり，線分 PQ を折り目として，図のように弓形 PCQ を折り返し，点 $\mathrm{D}\left(-1,\ \frac{1}{2}\right)$ で弦 AB に接するようにすれば，円 PDQ の中心の座標は（$\boxed{(13)}$，$\boxed{(14)}$），弦 PQ の中点の座標は（$\boxed{(15)}$，$\boxed{(16)}$）である。



分　野

数学Ⅱ：円の方程式

【解答】

接点 D の座標が $\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ であり，半径は 2 であるから，折り返した円の中心は

$$\left(-1+2,\ \frac{1}{2}\right)=\left(\boxed{1},\ \boxed{\frac{1}{2}}\right). \qquad \cdots(13),\ (14)$$

PQ の中点は，原点 O と折り返した円の中心を結ぶ線分の中点だから

$$\left(\boxed{\frac{1}{2}},\ \boxed{\frac{1}{4}}\right). \qquad \cdots(15),\ (16)$$

V

次の $\boxed{}$ の中に適当な整数を記入せよ。
$\log_2 23$ の小数第 1 位以下を切り捨てると $\boxed{(17)}$ となる。
$\log_4 31$ の小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{(18)}$ となる。
$\log_3 140$ の小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{(19)}$ となる。
$\log_5 56$ の小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{(20)}$ となる。
ただし，$\sqrt{3}=1.732\cdots$，$\sqrt{5}=2.236\cdots$ である。

分　野

数学Ⅰ代数：対数

【解答】

$2^4=16<23<2^5=32$ だから $4<\log_2 23<5$.
よって，$\log_2 23=4.\cdots$ 小数第 1 位以下を切り捨てると $\boxed{4}$ となる. …(17)
$4^2=16<31<32=2^5=4^{2.5}$ だから $2<\log_4 31<2.5$.
よって，$\log_4 31$ を小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{2}$ となる. …(18)
$3^4=81<140<3^5=243$ だから $4<\log_3 140<5$.
また，$3^{4.5}=81\sqrt{3}=140.29\cdots$ だから，$3^4<140<3^{4.5}$ つまり $4<\log_3 140<4.5$.
よって，$\log_3 140$ を小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{4}$ となる. …(19)
$5^2=25<56<5^3=125$ だから $2<\log_5 56<3$.
また，$5^{2.5}=25\sqrt{5}=55.90\cdots$ だから，$5^{2.5}<56<5^3$ つまり $2.5<\log_5 56<3$.
よって，$\log_5 56$ を小数第 1 位以下を四捨五入すると $\boxed{3}$ となる. …(20)

1960 年　2 次試験
（4 科目より 3 科目選択・数学 I 代数）

第 1 問

三角形 ABC の辺 AB 上に点 P をとり，BP の中点を Q とする。次に，P，Q から BC に平行線を引いて AC との交点をそれぞれ R，S とする。台形 PQSR の面積が最大になるときの AP の長さと台形 PQSR の面積を求めよ。ただし辺 AB の長さを a，三角形 ABC の面積を s とする。

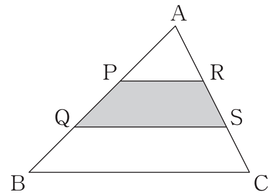
分　野

数学 I 代数：2 次関数，**数学 I 幾何**：相似

考え方

$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{APR} \backsim \triangle\mathrm{AQS}$ から相似比で考える．

【解答】



$\mathrm{BC}/\!/\mathrm{PR}/\!/\mathrm{QS}$ であるから，$\triangle\mathrm{ABC} \backsim \triangle\mathrm{APR} \backsim \triangle\mathrm{AQS}$.

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}}=t$ とおくと，$0<t<1$ で，$\mathrm{AP}=ta$，$\mathrm{BP}=(1-t)a$，$\mathrm{BQ}=\dfrac{1-t}{2}a$，

$\mathrm{AQ}=a-\dfrac{1-t}{2}a=\dfrac{t+1}{2}a$.

$\triangle\mathrm{ABC}$，$\triangle\mathrm{APR}$，$\triangle\mathrm{AQS}$ の相似比は $1:t:\dfrac{t+1}{2}$ である．

したがって，面積比は $1:t^2:\dfrac{(t+1)^2}{4}$.

よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=s,\quad \triangle\mathrm{APR}=t^2s,\quad \triangle\mathrm{AQS}=\frac{(t+1)^2}{4}s.$$

$$\therefore\quad 台形\ \mathrm{PQSR}=\triangle\mathrm{AQS}-\triangle\mathrm{APR}=\frac{(t+1)^2}{4}s-t^2s=\frac{-3t^2+2t+1}{4}s.$$

$-3t^2+2t+1=-3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$ だから，台形 PQSR の面積は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大になる．

そのとき AP の長さは $\dfrac{1}{3}a$ である．　…(答)

また，台形 PQSR の面積は $\dfrac{1}{3}s$ である．　…(答)

第2問

ある家で今年の一月と二月の水道の使用水量と水道料金とは右の表の通りであった。その町の家庭用水道料金は

水道料金＝基本料金＋超過料金＋メーター使用料

という式で計算される。

	使用水量	水道料金
一月	23 m^3	332 円
二月	19 m^3	276 円

基本料金とは一定の使用水量 $A\ \mathrm{m}^3$（A は整数）までに対して払う料金 120 円のことであり，超過料金とは $A\ \mathrm{m}^3$ をこえた分に対して支払う料金のことで，1 m^3 ごとに B 円と定められている。またメーター使用料 C 円は使用水量に関係せず，10 円の整数倍で 50 円以下である。このとき，上の表から，A，B，C を求めよ。

分　野

数学 I 代数：整数，文章題

考え方

一見すると料金が決まらなそうに見えるが，A が整数で C が 50 以下の 10 の整数倍であることを使うと，A，B，C が定まる．

【解答】

使用水量が $x\ \mathrm{m}^3$ のときの水道料金が y 円とすると，$x>A$ のとき，

$$y=(x-A)B+120+C.$$

$C\leqq 50$ だから，$120+C\leqq 170$．表の料金はともに 170 円以上だから，一月も二月も使用水量は一定水量 $A\ \mathrm{m}^3$ より多い．

よって，表から

$$332=(23-A)B+120+C,\quad 276=(19-A)B+120+C.\quad \therefore\quad 332-276=(23-19)B.$$

$$\therefore\quad B=14.\quad \therefore\quad 332=14(23-A)+120+C.\quad \therefore\quad 14A=110+C.$$

ここで，C は 10 の倍数で 50 以下だから，$C=10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$ のどれか．このうち $110+C$ が 14 で割り切れるのは $C=30$ のときだけ．

$$\therefore\quad A=10,\quad B=14,\quad C=30.$$ …(答)

1960 年　2 次試験
（4 科目より 3 科目選択・数学 I 幾何）

第 1 問

三角形 ABC の外心を O とし，3 辺 BC，CA，AB に関して O と対称な 3 点をそれぞれ A′，B′，C′ とするとき，三角形 A′B′C′ は三角形 ABC に合同であることを証明せよ。

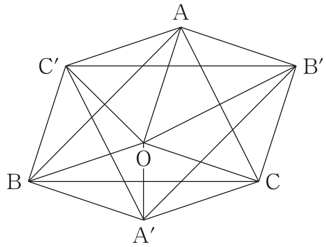
分　野

数学 I 幾何：平面図形，図形の移動

考え方

基本的に 3 辺が等しいことをいえばよい．そのためには，BC＝B′C′ がいえればよい．

【解答】



O が外心で，B′ は AC について対称点だから，OA＝OC＝AB′＝CB′.
よって，OAB′C は菱形である．よって，CB′∥OA.
同様に OAC′B も菱形だから，BC′＝OA で BC′∥OA.
よって CB′＝BC′ で CB′∥BC′.
よって，BCB′C′ は平行四辺形.
よって，BC＝B′C′.
同様に CA＝C′A′，AB＝A′B′.
3 辺が等しいから

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'.$$

（証明終り）

（注）AA′，BB′，CC′ の中点は一致し，九点円の中心.

第2問

弓形の弦の長さを $2a$，弧の長さを $2b$，弦の中点と弧の中点との距離を h とするとき，弓形の面積は

$$\frac{a^2}{2h}(b-a)+\frac{h}{2}(b+a)$$

で表わせることを証明せよ。

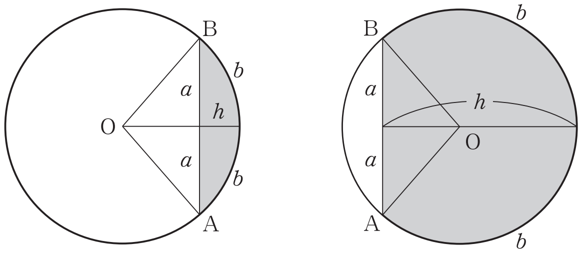
分　野

数学 I 幾何：円

考え方

円の半径を r として弓形の面積を求めてから，r を a，b，h で表せばよい．

【解答】



中心が O，弓形の弧を $\overparen{\mathrm{AB}}$ とする．左図は中心角 $\angle\mathrm{AOB}$ が 180° 以下の場合で，右図は 180° 以上の場合である．

円の半径を r とするとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ において，$\mathrm{AB}=2a$ を底辺とした高さは $\angle\mathrm{AOB}\leqq 180^\circ$ のとき，$r-h$ で $\angle\mathrm{AOB}\geqq 180^\circ$ のとき，$h-r$ である．

弓形の面積 S は $\angle\mathrm{AOB}\leqq 180^\circ$ のとき扇形 $\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OAB}$ で，$\angle\mathrm{AOB}\geqq 180^\circ$ のとき
扇形 $\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAB}$ である．いずれの場合も

$$S=\pi r^2\frac{2b}{2\pi r}-\frac{1}{2}(2a)(r-h)=(b-a)r+ah.$$

三平方の定理から

$$r^2=a^2+(r-h)^2. \quad \therefore \quad r=\frac{a^2+h^2}{2h}.$$

よって，

$$S=(b-a)\frac{a^2+h^2}{2h}+ah=\frac{a^2}{2h}(b-a)+\frac{h}{2}(b+a).$$

（証明終り）

1960 年　2 次試験
（4 科目より 3 科目選択・数学Ⅱ）

第 1 問

放物線 C が下の条件(1)，(2)を満たしながら動くとき，C の頂点のえがく図形を求めよ。

(1)　C は放物線 $y=x^2$ を平行移動して得られる。

(2)　C は放物線 $y=1-x^2$ に接する。

分　野

数学Ⅱ：軌跡，判別式

考え方

頂点の座標を $(p,\ q)$ とおいて，p，q がみたすべき関係式を求める．

【解答】

C の頂点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，(1)より x^2 の係数は 1 だから，

$$C:\ y=(x-p)^2+q.$$

これが，$y=1-x^2$ に接するから，方程式

$$(x-p)^2+q=1-x^2. \quad \therefore \quad 2x^2-2px+p^2+q-1=0$$

は重解をもつ．判別式を D とすると，

$$\frac{1}{4}D=p^2-2(p^2+q-1)=0. \quad \therefore \quad q=-\frac{p^2}{2}+1.$$

よって，頂点の軌跡は放物線で，

$$y=-\frac{x^2}{2}+1. \qquad \cdots(答)$$

（注）　放物線 C と C'：$y=1-x^2$ は合同．接するとき，C と C' は接点 T について点対称．したがって，C' の頂点 A(0, 1) と C の頂点 P について，T は AP の中点．つまり，A，T，P は同一直線上にこの順であり，AP=2AT．T は定放物線 C' 上を動くから，C の頂点 P の軌跡は点 A を相似中心とし，C' を 2 倍に相似拡大した放物線である．

第 2 問

1 辺 100 m の正方形の広場の 1 つの角に直立する高さ 60 m の棒があり，地上 10 m の所から上だけ赤く塗ってある。この広場の 1 点から棒の赤い部分を見込む角を α とするとき，$\alpha \geqq 45^\circ$ であるような広場の部分の面積を求めよ。

分　野

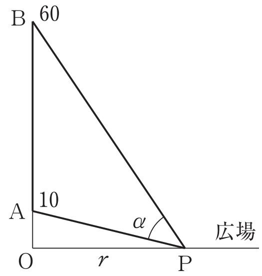
数学Ⅱ：三角関数，加法定理

考え方

棒を含む平面内で考え，tan を使って角度を計算する.

【解答】

棒の立っている地上の点を O，棒の赤い部分の最下部を A，棒の上端を B とする．広場の 1 点 P をとり，P と棒を含む平面で考える.



$\mathrm{OP} = r$ m とすると，$\tan\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{10}{r}$，$\tan\angle\mathrm{OPB} = \dfrac{60}{r}$.

$\angle\mathrm{APB} = \alpha$ から

$$\tan\alpha = \tan(\angle\mathrm{OPB} - \angle\mathrm{OPA}) = \frac{\dfrac{60}{r} - \dfrac{10}{r}}{1 + \dfrac{10}{r}\cdot\dfrac{60}{r}} = \frac{50r}{r^2 + 600}.$$

$\alpha \geqq 45^\circ$ から

$$\frac{50r}{r^2+600} \geqq 1. \quad \therefore \quad r^2 - 50r + 600 \leqq 0. \quad \therefore \quad (r-20)(r-30) \leqq 0.$$

$$\therefore \quad 20 \leqq r \leqq 30. \quad 400 \leqq x^2 + y^2 \leqq 900.$$

P の存在範囲は O を中心とする半径 30 m の円と 20 m の円の間の部分の 4 分の 1 の部分.

求める面積は

$$\frac{1}{4}(30^2\pi - 20^2\pi) = 125\pi \ \mathrm{m}^2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注)　この問題と類似の問題が **1970 年　文科　第 2 問**，**1972 年　共通　第 1 問**にも出題されている. 1970 年の問題の**【別解】**も参照.

1960 年　2 次試験
（4 科目より 3 科目選択・数学Ⅲ）

第 1 問

放物線 $y=x^2+\dfrac{1}{4}$ の頂点と異なる 1 点における接線と法線（接点を通り，接線に垂直な直線）が x 軸と交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

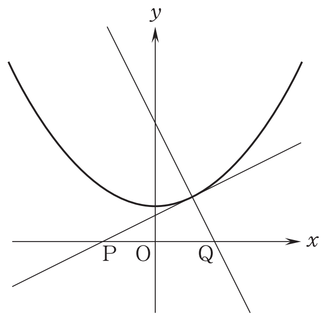
考え方

頂点以外での接線は x 軸と平行でなく，x 軸と交わる．また，法線は y 軸と平行でないので傾きをもつ．また，y 軸と平行な軸をもつ放物線の接線は y 軸とも平行でない．

【解答】

$y'=2x$．放物線の頂点と異なる 1 点 $\left(t,\ t^2+\dfrac{1}{4}\right)$ $(t\neq 0)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2+\frac{1}{4}=2tx-t^2+\frac{1}{4}.$$



x 軸との交点 P の x 座標は $\dfrac{t^2-\frac{1}{4}}{2t}=\dfrac{4t^2-1}{8t}$.

法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{3}{4}.$$

x 軸との交点 Q の x 座標は，$2t^3+\dfrac{3}{2}t$.

放物線は y 軸対称だから，$t>0$ だけで考えればよく，放物線は $y>0$ の部分にある．$t>0$ のとき接線の傾きは正で，法線の傾きは負である．よって，Q の x 座標の方が P の x 座標より大きい．

$$\mathrm{PQ}=2t^3+\frac{3}{2}t-\left(\frac{4t^2-1}{8t}\right)=2t^3+t+\frac{1}{8t}.$$

これを，$f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2+1-\frac{1}{8t^2}=\frac{48t^4+8t^2-1}{8t^2}=\frac{(12t^2-1)(4t^2+1)}{8t^2}.$$

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

よって，線分 PQ の長さの最小値は $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$.　…(答)

第2問

水平におかれた机に，直角をはさむ2辺の長さがそれぞれ9 cm，12 cm であるような直角三角形の穴をあけ，この穴に半径5 cm の球をのせるとき，この球の机の表面より上にある部分の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：整式の積分，体積

考え方

直角三角形の内接円が机の表面による球の切り口.

【解答】

直角三角形の斜辺の長さは $\sqrt{9^2+12^2}=15$ cm．面積は $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=54$ cm^2.

直角三角形の内接円の半径を r とすると，

$$54=\frac{r}{2}(9+12+15).\quad \therefore\quad r=\frac{54}{18}=3\text{ cm}.$$

球の机の表面による断面は半径3 cm の円．球の中心と机の表面の距離は $\sqrt{5^2-3^2}=4$ cm.

よって，求める体積は

$$V=\pi\int_{-4}^{5}(5^2-x^2)\,dx=\pi\left[25x-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{5}=\pi\left(25\times 9-\frac{5^3+4^3}{3}\right)=162\pi\text{ cm}^3. \qquad \cdots(答)$$

2.2　文理別の試験に（1961 年）

今から思うと不思議に思えるかもしれないが，東大の 2 次試験が文科と理科に分かれて出題されるようになったのは，1961 年のことである．1 次試験は 1955 年のスタート時点から文理別であったが 2 次試験はそれまで科目選択制であった．1958 年までは「解析Ⅰ」,「解析Ⅱ」,「幾何」,「一般数学」のうち 1 教科が高校卒業単位だったためか多くの大学で科目選択制を採用していた．1959 年，1960 年は東大他多くの大学で「数Ⅰ代数」,「数Ⅰ幾何」,「数Ⅱ」,「数Ⅲ」からの科目選択制が採られた．その結果 1961 年になって初めて文科の問題と理科の問題が別々に出題されるようになった．当時は文科 5 題，理科 6 題であった．理科の 6 題は大学紛争時期の 1970 年を除いて一貫している．文科は大学紛争まで 5 題の出題であった．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1961〜1965）

1961 年　1 次理科Ⅲは行列の固有値問題（当時行列は範囲外）.

1961 年　共通第 3 問，第 4 問は東大は図形問題を出すといわれた時代の雰囲気をよく示している．

1961 年　文科第 5 問は当時の文系でもこんな極限の問題が出た例である．

1962 年　文科第 4 問．長方形を直角な 2 半直線をすべらすと頂点が楕円を描く．ちょっと面白い．

1963 年　共通第 2 問．答がきれいに出せるように作られた図形問題．この当時の東大風．

このころ　あんなこと・こんなこと

1960 年に始まったベトナム戦争が激しくなり，日本からも米軍が多くベトナムに向かって出撃した時代である．

大鵬，柏戸同時横綱昇進（1961 年）.

東海道新幹線の開通，東京オリンピックが行われたのが 1964 年．

ヒット曲は，「スーダラ節」（1961 年），「上を向いて歩こう」（1963 年），「花はどこへ行った」（1962 年），「風に吹かれて」（1963 年）.

1961 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a，b を $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{5}$ であるような任意の数とするとき，2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線は定点 $(\boxed{(1)},\ \boxed{(2)})$ を通る。

また，$\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{2b'}=\dfrac{1}{5}$ $(ab \neq a'b')$ ならば，2 点 $(a',\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線と 2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b')$ を通る直線との交点は定直線 $y=\boxed{(3)}x$ の上にある。

分　野

数学Ⅱ：直線の方程式

【解答】

2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

与式から $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{2b}$. よって，

$$\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2b}\right)x+\frac{y}{b}=1. \quad \therefore \quad \frac{x-2y}{2b}=\frac{x-5}{5}.$$

よって，$x-2y=x-5=0$ となる定点 $\left(\boxed{5},\ \boxed{\dfrac{5}{2}}\right)$ を必ず通る.　…(1)，(2)

2 点 $(a',\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線は $\dfrac{x}{a'}+\dfrac{y}{b}=1$.

2 点 $(a,\ 0)$，$(0,\ b')$ を通る直線は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b'}=1$.

交点の座標は

$$\left(\frac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab},\ \frac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}\right).$$

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{2b'}$ より，$2a'bb'+aa'b'=2abb'+aa'b$ つまり，$aa'(b'-b)=-2bb'(a'-a)$.

よって，$x=\dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab}$，$y=\dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}$ とおくと，

$$x=-2y. \quad \therefore \quad y=\boxed{-\frac{1}{2}}x.$$　…(3)

（注 1）　$\dfrac{5}{a}+\dfrac{\frac{5}{2}}{b}=1$ から点 $\left(5,\ \dfrac{5}{2}\right)$ が常に直線 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 上にあることがわかる.

（注 2）　$\dfrac{x}{a'}+\dfrac{y}{b}=1$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b'}=1$ の辺々引いて，$\left(\dfrac{1}{a'}-\dfrac{1}{a}\right)x+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b'}\right)y=0$.

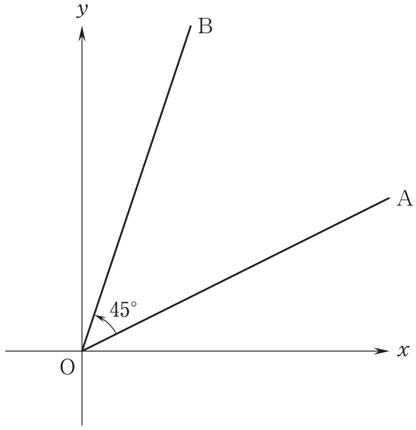
また，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{a'}+\dfrac{1}{2b'}=\dfrac{1}{5}$ から，$\left(\dfrac{1}{2b}-\dfrac{1}{2b'}\right)x+\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b'}\right)y=0$.

$\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b'} \neq 0$ から，$\dfrac{1}{2}x+y=0$.

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

点 $(4,\ 2)$ を A とし，図のように，線分 OA を原点 O のまわりに 45° 回転して OB の位置に移したとき，点 B の座標は $\left(\sqrt{\boxed{(4)}},\ \sqrt{\boxed{(5)}}\right)$ である。また，△OAB の外接円の中心の座標は $\left(3-\sqrt{\boxed{(6)}},\ \sqrt{\boxed{(7)}}-1\right)$ である。



分　野

数学Ⅱ：図形と方程式

【解答】

$\mathrm{OA}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$

x 軸正方向と OA のなす角を θ とおくと，

$$\sin\theta=\frac{2}{\mathrm{OA}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{4}{\mathrm{OA}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

B の座標は $(2\sqrt{5}\cos(\theta+45^\circ),\ 2\sqrt{5}\sin(\theta+45^\circ))$.

$$2\sqrt{5}\cos(\theta+45^\circ)=2\sqrt{5}(\cos\theta\cos45^\circ-\sin\theta\sin45^\circ)=2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}.$$

$$2\sqrt{5}\sin(\theta+45^\circ)=2\sqrt{5}(\sin\theta\cos45^\circ+\cos\theta\sin45^\circ)=2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

よって，B の座標は

$$\left(\sqrt{\boxed{2}},\ \sqrt{\boxed{18}}\right). \qquad \cdots(4),\ (5)$$

O，A，B を通る円の方程式を

$$x^2+y^2-2ax-2by=0$$

とおくと，$(a,\ b)$ が中心．この円は O を通る．

A を通るから

$$20-8a-4b=0.\quad \therefore\quad 2a+b=5. \qquad \cdots①$$

B を通るから

$$20-2\sqrt{2}a-6\sqrt{2}b.\quad \therefore\quad a+3b=5\sqrt{2}. \qquad \cdots②$$

①，② から $a=3-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-1$．よって，中心の座標は

$$\left(3-\sqrt{\boxed{2}},\ \sqrt{\boxed{8}}-1\right). \qquad \cdots(6),\ (7)$$

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$f(\theta)=\cos 7\theta-\cos 3\theta$ とする。

(i) $0^\circ<\theta<60^\circ$ の範囲において，

$$\text{不等式 } f(\theta)>0 \text{ の解は } \boxed{(8)}^\circ<\theta<\boxed{(9)}^\circ$$
$$\text{不等式 } f(\theta)<0 \text{ の解は } \boxed{(10)}^\circ<\theta<\boxed{(11)}^\circ$$

である。

(ii) また，$0^\circ<\theta<120^\circ$ の範囲において，方程式 $f(\theta)=0$ の解は $\boxed{(12)}$ 個ある。

分 野

数学Ⅱ：三角関数，和積公式

【解答】

$$f(\theta)=-2\sin 5\theta\sin 2\theta.$$

(i) $0^\circ<\theta<60^\circ$ の範囲で，$\sin 2\theta>0$.

$$\sin 5\theta>0\ (0^\circ<\theta<36^\circ),\quad \sin 5\theta<0\ (36^\circ<\theta<60^\circ).$$

よって，

$$\text{不等式 } f(\theta)>0 \text{ の解は } \boxed{36}^\circ<\theta<\boxed{60}^\circ. \qquad \cdots(8),\ (9)$$
$$\text{不等式 } f(\theta)<0 \text{ の解は } \boxed{0}^\circ<\theta<\boxed{36}^\circ. \qquad \cdots(10),\ (11)$$

(ii) $0^\circ<\theta<120^\circ$ において，$0^\circ<5\theta<600^\circ$，$0^\circ<2\theta<240^\circ$.

$\sin 5\theta=0$ となるのは，$\theta=36^\circ$，72°，108° であり，$\sin 2\theta=0$ となるのは，$\theta=90^\circ$ のみである.

よって $f(\theta)=0$ となる θ は $\boxed{4}$ 個ある. …(12)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまるのはイ，ロ，ハのなかのどれか。イ，ロ，ハで答えよ。

(1)　イ　1000　　　ロ　2^{10}　　　ハ　$\dfrac{5^5}{3}$

のなかで最大のものは $\boxed{(13)}$ である。

(2)　イ　15×10^5　　　ロ　3^{13}　　　ハ　$5^8\times4$

のなかで最大のものは $\boxed{(14)}$ である。

(3)　イ　0.001　　　ロ　$\dfrac{2}{45^2}$　　　ハ　$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{24}$

のなかで最大のものは $\boxed{(15)}$ である。

(4)　イ　-1.5　　　ロ　$\log_{0.5}3$　　　ハ　$\log\dfrac{1}{32}$

のなかで最大のものは $\boxed{(16)}$ である。

ただし $\log 2=0.3010$，$\log 3=0.4771$ である。

分　野

数学Ⅰ代数：指数，対数

【解答】

(1)　$\log_{10}1000=3$，$\log_{10}2^{10}=10\times0.3010=3.010$，

$\log_{10}\dfrac{5^5}{3}=5(1-\log_{10}2)-\log_{10}3=5-1.5050-0.4771=3.0179.$

よって，最大のものは $\boxed{ハ}$.　…(13)

(2)　$\log_{10}(15\times10^5)=5+(1-\log_{10}2)+\log_{10}3=6-0.3010+0.4771=6.1761,$

$\log_{10}3^{13}=13\times0.4771=6.2023,$

$\log_{10}(5^8\times4)=8(1-0.3010)+2\times0.3010=6.1940.$

よって，最大のものは $\boxed{ロ}$.　…(14)

(3)　$\log_{10}0.001=-3$，$\log_{10}\dfrac{2}{45^2}=0.3010-2(1-0.3010+2\times0.4771)=-3.0054,$

$\log_{10}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{24}=24(0.4771-2\times0.3010)=-2.9976.$

よって，最大のものは $\boxed{ハ}$.　…(15)

(4)　$\log_{0.5}3=\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}2^{-1}}=-\dfrac{0.4771}{0.3010}.$

$\log_{10}\dfrac{1}{32}=-5\log_{10}2=-5\times0.3010=-1.5050.$

$1.5\times0.3010=0.4515<0.4771$ より，$-1.5>-\dfrac{0.4771}{0.3010}.$

よって，最大のものは $\boxed{イ}$.　…(16)

（注）　この時代，常用対数の底は省略してよかった.

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

函数 $f(x)=x+a+\dfrac{b}{x}$ において，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-8$ であるとすれば，$a=\boxed{(17)}$，$b=\boxed{(18)}$ である。また，$f(x)=0$ となるのは $x=\dfrac{1}{2}$ のほかに，$x=\boxed{(19)}$ のときである。さらに，$x>0$ の範囲で $f(x)$ が最小値をとるのは，$x=\boxed{(20)}$ のときである。

分　野

数学Ⅱ：微分法，分数方程式

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+a+2b=0. \qquad \cdots①$$

$f'(x)=1-\dfrac{b}{x^2}$ より，

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1-4b=-8. \quad \therefore \quad b=\frac{9}{4}.$$

これと ① から，

$$a=\boxed{-5}, \quad b=\boxed{\frac{9}{4}}. \qquad \cdots(17),\ (18)$$

よって，$f(x)=x-5+\dfrac{9}{4x}$．$f(x)=0$ とすると $x^2-5x+\dfrac{9}{4}=\left(x-\dfrac{9}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

$x=\dfrac{1}{2}$ のほかの解は $x=\boxed{\dfrac{9}{2}}$. $\cdots(19)$

$x>0$，相加平均・相乗平均の関係から

$$f(x)=x-5+\frac{9}{4x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{9}{4x}}-5=-2.$$

等号は $x=\dfrac{3}{2}$ のときに成り立つ.

よって $x>0$ のとき，$f(x)$ が最小になるのは $x=\boxed{\dfrac{3}{2}}$ のとき. $\cdots(20)$

（注１）　$f'(x)=1-\dfrac{9}{4x^2}$ から，$x>0$ において $x=\dfrac{3}{2}$ で最小になることを導いてもよい.

（注２）　当時，数学Ⅱで x^{-n}（n は自然数）の微分まで扱っていた.

1961 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

周期が 3 の周期函数 $f(x)$ があって，そのグラフは切れめがない。また

(i)　$0 \leqq x \leqq 1$ では $f(x)=4x^2$，$1 \leqq x \leqq 3$ では $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ と書くことができる。

(ii)　$f(5)=8$，$f'(5)=-1$ である。

このとき，$a=\boxed{(1)}$，$b=\boxed{(2)}$，$c=\boxed{(3)}$，$d=\boxed{(4)}$

分　野

数学 II：整式の微分

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$f(x)$ は連続な周期関数だから $f(1)=4$，$f(3)=f(0)=0$，$f(5)=f(2)=8$，$f'(5)=f'(2)=-1$．$x=2$ の近傍で $f'(x)=3ax^2+2bx+c$．

以上から，

$$f(1)=a+b+c+d=4,\quad f(3)=27a+9b+3c+d=0,\quad f(2)=8a+4b+2c+d=8,$$
$$f'(2)=12a+4b+c=-1.$$

これらから

$$a=\boxed{-1},\quad b=\boxed{0},\quad c=\boxed{11},\quad d=\boxed{-6}. \qquad \cdots(1),\ (2),\ (3),\ (4)$$

（注）　出来上がった関数は $x=3n$（n は整数）で微分不可能，$x=3n+1$（n は整数）で微分可能．

II

次の $\boxed{}$ にそれぞれ不等号または等号があてはまる。それは何であるか。＞ならばイ，＝ならばロ，＜ならばハと答えよ。

$0<x<1$ のとき，

(i)　$2^x\ \boxed{(5)}\ 2^{\sqrt{x}}$　　(ii)　$2^{(x^2)}\ \boxed{(6)}\ (2^x)^2$

(iii)　$2^{\log x}\ \boxed{(7)}\ x^{\log 2}$　　(iv)　$\sqrt[3]{x}\ \boxed{(8)}\ x^{\sqrt{3}}$

分　野

数学 II：指数，対数

【解答】

(i)　$0<x<1$ において，$0<x<\sqrt{x}<1$ だから，

$$2^x\ \boxed{<}\ 2^{\sqrt{x}}. \qquad \cdots(5)=\text{ハ}$$

(ii)　$(2^x)^2=2^{2x}$．　$0<x<1$ において $0<x^2<2x$ だから，

$$2^{(x^2)}\ \boxed{<}\ (2^x)^2. \qquad \cdots(6)=\text{ハ}$$

(iii)　$\log_{10}2^{\log_{10}x}=(\log_{10}x)(\log_{10}2)$，$\log_{10}x^{\log_{10}2}=(\log_{10}2)(\log_{10}x)$ だから，

$$2^{\log x}\ \boxed{=}\ x^{\log 2}. \qquad \cdots(7)=\text{ロ}$$

(iv)　$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$，$\dfrac{1}{3}<1<\sqrt{3}$ だから，$0<x<1$ のとき，

$$\sqrt[3]{x}\ \boxed{>}\ x^{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(8)=\text{イ}$$

（注）　(iii) の log は常用対数．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

2 つの等式

$$11\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=k\cos\theta$$
$$\sqrt{3}\cos\theta+13\sin\theta=k\sin\theta$$

が同時に成り立つような k の値は 2 つある。大きい方を α，小さい方を β とすれば

$$\alpha=\boxed{(9)},\quad \beta=\boxed{(10)}$$

である。

また

$$k=\alpha \text{ のとき } \theta=\boxed{(11)}\pi,$$
$$k=\beta \text{ のとき } \theta=\boxed{(12)}\pi$$

である。ただし，$0\leqq\theta\leqq\pi$ とする。

分　野

数学Ⅰ幾何：三角方程式，連立方程式

【解答】

$\cos\theta=0$ とすると第 1 式が成り立たないから，$\cos\theta\neq0$.

よって，

$$\tan\theta=\frac{k-11}{\sqrt{3}},\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{k-13}.$$

よって

$$\frac{k-11}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{k-13}.\quad \therefore\quad (k-11)(k-13)=3.\quad \therefore\quad k^2-24k+140=0.$$

$$(k-10)(k-14)=0$$

から

$$\alpha=\boxed{14},\quad \beta=\boxed{10}. \qquad \cdots(9),\ (10)$$

$k=\alpha=14$ のとき，$\tan\theta=\sqrt{3}$．$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\theta=\boxed{\frac{1}{3}}\pi. \qquad \cdots(11)$$

$k=\beta=10$ のとき，$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．$0\leqq\theta\leqq\pi$ から，

$$\theta=\boxed{\frac{5}{6}}\pi. \qquad \cdots(12)$$

（注）　この問題は行列 $\begin{pmatrix}11 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$ の固有値，固有ベクトルを求める問題である．

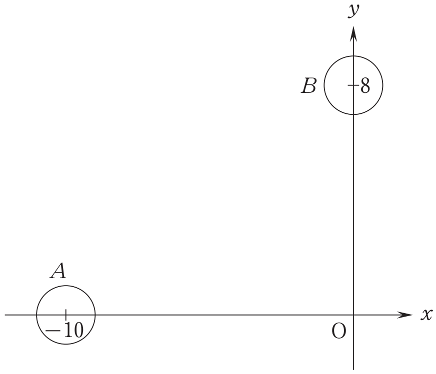
Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

半径1の2円 A，B がいま図の位置にあり，A の中心 $(-10,\ 0)$ は x 軸上を左から右へ，B の中心 $(0,\ 8)$ は y 軸上を上から下へ，ともに毎秒1の速さで動く。

円 A，B が最初に接するのはいまから $\boxed{(13)}$ 秒後で，2度目に接するのはいまから $\boxed{(14)}$ 秒後である。

また，円 A，B が交わってできる共通部分の面積が最大になるのはいまから $\boxed{(15)}$ 秒後で，そのときの共通部分の面積は $\boxed{(16)}\ \pi-1$ である。



分　野

数学Ⅱ：平面座標，速度

【解答】

2円は円板として以下解答する．A の中心をP，B の中心をQとする．

t 秒後のPの位置は $(-10+t,\ 0)$，Qの位置は $(0,\ 8-t)$ である．したがって，

$$\mathrm{PQ}^2=(-10+t)^2+(8-t)^2=2t^2-36t+164.$$

接するとき，$\mathrm{PQ}=2$ だから，$2t^2-36t+164=4$.

$$t^2-18t+80=(t-8)(t-10)=0.$$

よって，最初に接するのはいまから $\boxed{8}$ 秒後であり，2度目に接するのはいまから $\boxed{10}$ 秒後である．　…(13)，(14)

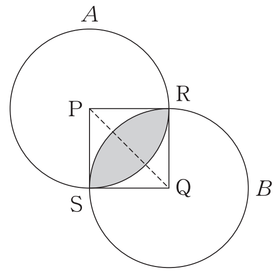
共通部分の面積が最大になるのは A，B の中心P，Qが最も近づいたとき．

$$\mathrm{PQ}^2=2(t-9)^2+2$$

だから，いまから $\boxed{9}$ 秒後に最大になる．　…(15)

そのとき，PQの距離は $\sqrt{2}$ である．2円 A，B の周の交点をR，Sとする．共通部分は

$$扇形\mathrm{PSR}+扇形\mathrm{QRS}-\square\mathrm{PSQR}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-1=\boxed{\frac{1}{2}}\pi-1.$$　…(16)



（注）　動点の初期位置の座標を点の名前のようにいうのは変である．「時刻0に A の中心は $(-10,\ 0)$ にあり，B の中心は $(0,\ 8)$ にある」のような表現にすべきだと思う．

V

次の $\boxed{}$ にあてはまるのは何か。(i)(ii)(iii) には数で，(iv) にはイ，ロ，ハで答えよ。

辺の長さ 1 の正四面体 ABCD において，辺 AB の中点を P，辺 CD の中点を Q とするとき，

(i) 線分 PQ の長さは $\sqrt{\boxed{(17)}}$

(ii) $\cos\angle AQB = \boxed{(18)}$

(iii) 各面の重心を頂点とする四面体の体積は，四面体 ABCD の体積の $\boxed{(19)}$ 倍に等しい。

(iv) イ $\angle QAB$ ロ $\angle AQB$ ハ $\angle BAC$

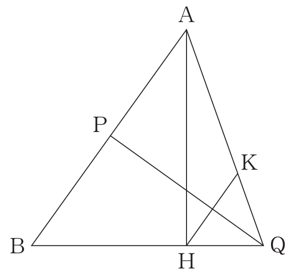
のなかで最も大きいものは $\boxed{(20)}$ である。

分野

数学 I 幾何：立体図形

【解答】

(i) 断面 ABQ をとって考える．



$AP=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}$，AQ は面 ACD の中線だから $AQ=\frac{\sqrt{3}}{2}$．よって，

$$PQ=\sqrt{AQ^2-AP^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}=\sqrt{\boxed{\frac{1}{2}}}. \qquad \cdots(17)$$

(ii) △BCD の重心を H とすると，H は BQ 上にあり，$QH=\frac{1}{3}BQ$.

H は A から面 BCD へ下した垂線の足であるから，$\angle AHQ=90°$.

$AQ=BQ$ で $QH=\frac{1}{3}BQ$ だから，

$$\cos\angle AQB=\frac{QH}{AQ}=\boxed{\frac{1}{3}}. \qquad \cdots(18)$$

(iii) △ACD の重心を K とすると，K は AQ 上にあり，$QK=\frac{1}{3}AQ$ である．△ABQ と △KHQ は ∠Q を共有する二等辺三角形だから相似で，その相似比は 3：1.

K，H は 2 面の重心だから KH は重心を頂点とする四面体の 1 辺である．AB：KH＝3：1 だから 2 つの正四面体の相似比も 3：1．よって，体積比は 27：1．よって，重心を頂点とする四面体の体積は四面体 ABCD の体積の $\boxed{\frac{1}{27}}$ 倍である． $\cdots(19)$

(iv) △ABC と △ABQ はともに AB を底辺とする二等辺三角形.

ここで，$AC>AQ$ に注意すると底角について，$\angle QAB<\angle CAB=\angle BAC$，頂角について，$\angle AQB>\angle ACB=\angle BAC$．よって，

$$\angle QAB<\angle BAC<\angle AQB$$

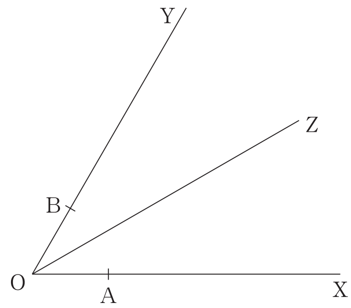
よって，最も大きいものは $\boxed{\angle AQB}$． $\cdots(20)$＝ロ

(注) $\cos\angle QAB=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\angle AQB=\frac{1}{3}$，$\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$ の大小関係からも 3 つの角の大小は判断できる．

1961 年　2 次試験（文科）

第 1 問

点 O で 60° の角をなす半直線 OX，OY と $\angle$XOY の二等分線 OZ があり，OX，OY 上に O から 1 cm の距離にそれぞれ点 A，B がある。いま動点 P，Q，R がそれぞれ A，O，B から同時に出発して半直線 OX，OZ，OY 上をそれぞれ毎秒 1 cm，$\sqrt{3}$ cm，2 cm の速さで O から遠ざかる。
⑴　3 点 P，Q，R が 1 直線上にくるまでの時間
および
⑵　$\triangle$PQR の面積が $\triangle$AOB の面積に等しくなるまでの時間を求めよ。



分　野

数学 I 幾何：三角比

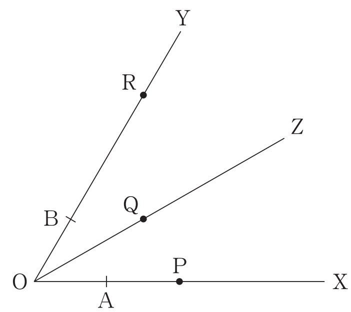
考え方

一直線上にある条件をどう表すかが問題だが，あとで面積を考えるから
$\triangle PQR=|\triangle OPQ+\triangle OQR-\triangle OPR|$ であることを利用する．

【解答】

求める時間は出発時刻を 0 としたときの正の時刻であるとして解答する．

⑴　時刻 t における OP，OQ，OR の長さは cm 単位でそれぞれ，$t+1$，$\sqrt{3}\,t$，$2t+1$ $(t>0)$ である．
このとき，3 つの三角形の面積は



$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}OP\cdot OQ\sin 30^\circ=\frac{1}{4}(t+1)\sqrt{3}\,t=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2+t).$$

$$\triangle OQR=\frac{1}{2}OQ\cdot OR\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{3}\,t(2t+1)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t^2+t).$$

$$\triangle OPR=\frac{1}{2}OP\cdot OR\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}(t+1)(2t+1)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t^2+3t+1).$$

3 点 P，Q，R が一直線上にあるとき，$\triangle OPQ+\triangle OQR=\triangle OPR$.

$$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{4}(t^2+t)+\frac{\sqrt{3}}{4}(2t^2+t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(2t^2+3t+1).$$

$$\therefore\ 3t^2+2t=2t^2+3t+1.$$

$$\therefore\ t^2-t-1=0.\quad \therefore\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

題意から $t>0$. よって，3 点が一直線上にくるまでの時間は

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ 秒.$$

…(答)

(2)　△AOB の面積は $\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=|\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{OQR}-\triangle\mathrm{OPR}|\\&=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}\{(t^2+t)+(2t^2+t)-(2t^2+3t+1)\}\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}|t^2-t-1|.\end{aligned}$$

これが $\frac{\sqrt{3}}{4}$ に等しいから $t^2-t-1=\pm1$.

$t^2-t-1=-1$ のとき，$t^2-t=0$.　$t>0$ から $t=1$.

$t^2-t-1=1$ のとき，$t^2-t-2=(t+1)(t-2)=0$.　$t>0$ から $t=2$.

よって，△PQR の面積が △AOB の面積に等しくなるまでの時間は

1 秒または 2 秒.　…(答)

(注)　時刻 $t=0$ において P=A，Q=O，R=B であるので自明に △AOB=△PQR である．この場合を (2) の答に含むべきかどうかは問題文からは明らかでない．**【解答】**では自明な場合を含まないものと解釈した.

第 2 問

x の四次式 $f(x)$ において

$f(-0.2)=2.226$　$f(-0.1)=2.460$　$f(0)=2.718$　$f(0.1)=3.004$　$f(0.2)=3.320$

であるとき，$f'(0)$ を求めよ。

分　野

数学 I 代数：4 次関数，**数学 II**：整式の微分

考え方

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおいて，a，b，c，d，e についての連立方程式を解けばよい．ただし，$f'(0)=d$ だから，d を求めることに集中する.

【解答】

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおく.

$$\begin{cases}f(-0.2)=(0.2)^4a-(0.2)^3b+(0.2)^2c-0.2d+e=2.226, & \cdots①\\ f(-0.1)=(0.1)^4a-(0.1)^3b+(0.1)^2c-0.1d+e=2.460, & \cdots②\\ f(0)=e=2.718, & \cdots③\\ f(0.1)=(0.1)^4a+(0.1)^3b+(0.1)^2c+0.1d+e=3.004, & \cdots④\\ f(0.2)=(0.2)^4a+(0.2)^3b+(0.2)^2c+0.2d+e=3.320. & \cdots⑤\end{cases}$$

$\frac{⑤-①}{2}$，$\frac{④-②}{2}$ より，

$$(0.2)^3b+0.2d=0.547,\quad (0.1)^3b+0.1d=0.272.$$

$$\therefore\quad b+25d=68.375,\quad b+100d=272.$$

$$\therefore\quad 75d=203.625.$$

$$\therefore\quad f'(0)=d=2.715.\qquad\cdots(答)$$

(参考)　$a=-0.8\dot{3}$，$b=0.5$，$c=1.408\dot{3}$，$d=2.715$，$e=2.718$.

厳密には，a，b，c，e が存在することをいわないと，d の値は定まらないのだが，そこまでは要求していないだろう.

第3問

与えられた半径 a の半球に外接する直円錐を作り，その全表面積（側面積と底面積の和）を最も小さくするには，その高さを何程にすればよいか。ただし，直円錐の底面は半球の底面と同じ平面上にあるものとする。

分　野

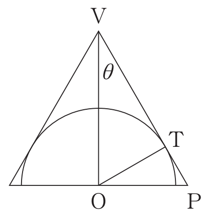
数学Ⅱ：立体図形，三角関数，微分法　**数学Ⅰ代数**：2次関数

考え方

円錐の底面に垂直な断面をとって考える．円錐の半頂角を θ として全表面積が最小になる θ を求める．

【解答】

円錐の頂点をV，底面の中心をO，円錐の底面の円周上に点Pをとり，VPと半球面が接する点をTとする．



円錐の半頂角 $\angle \mathrm{OVP}$ を θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ とすると，$\angle \mathrm{POT}=\theta$.

$\mathrm{OT}=a$ から，$\mathrm{VO}=\dfrac{a}{\sin\theta}$，$\mathrm{OP}=\dfrac{a}{\cos\theta}$，$\mathrm{VP}=\dfrac{\mathrm{VO}}{\cos\theta}=\dfrac{a}{\sin\theta\cos\theta}$.

よって，全表面積 S は

$$S=\pi\mathrm{OP}^2+\pi\mathrm{OP}\cdot\mathrm{VP}=\frac{a^2\pi}{\cos^2\theta}+\frac{a^2\pi}{\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{a^2\pi(\sin\theta+1)}{\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{a^2\pi}{\sin\theta(1-\sin\theta)}.$$

分母は $\sin\theta(1-\sin\theta)=-\left(\sin\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$.

よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，全表面積は最小になる．

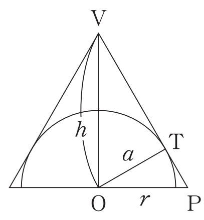
このとき高さ $\mathrm{VO}=\dfrac{a}{\sin\theta}=2a$.　…(答)

【別解】

【別解】の考え方(理科)

母線の長さを x，底面の半径を r としたとき，側面積は母線の長さを半径とする円の面積の $\dfrac{r}{x}$ 倍になる．これを利用して全表面積を円錐の高さ h で表して，微分する．

円錐の頂点をV，底面の中心をO，円錐の底面の円周上に点Pをとり，VPと半球面が接する点をTとする．



高さ $\mathrm{VO}=h$ $(h>a)$ とおき，円錐の底面の半径を r とすると，$\triangle\mathrm{VOP}$ の面積から，$hr=a\sqrt{h^2+r^2}$.

よって，$r=\dfrac{ah}{\sqrt{h^2-a^2}}$.

底面積は $\pi r^2=\dfrac{\pi a^2h^2}{h^2-a^2}$.

母線の長さ $\mathrm{VP}=x$ とおくと，$x=\sqrt{h^2+r^2}=\dfrac{h^2}{\sqrt{h^2-a^2}}$.

側面積は $\pi x^2\dfrac{r}{x}=\pi xr=\pi\dfrac{ah^3}{h^2-a^2}$.

よって，全表面積を $S(h)$ とすると，

$$S(h)=\pi\frac{ah^3}{h^2-a^2}+\frac{\pi a^2h^2}{h^2-a^2}=\pi\frac{ah^2}{h-a}.$$

$$S'(h)=\pi\frac{(2ah)(h-a)-ah^2}{(h-a)^2}=\pi\frac{ah(h-2a)}{(h-a)^2}.$$

$a<h$ だから

h	(a)	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$S'(h)$		$-$	0	$+$
$S(h)$		↘		↗

よって，全表面積を最小にするには高さ h を $2a$ にすればよい．

（注）　この問題は文理共通問題である．この当時でも商の微分は数Ⅲであったから，**【別解】**の方法は文系には無理かもしれない．

このS(h)から文系的な方法で $S(h)$ の最小値を与える h を求めるには以下のような方法がある．

(i)
$$S(h)=\pi\frac{a}{\frac{1}{h}-a\left(\frac{1}{h}\right)^2}=\pi\frac{a}{-a\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1}{4a}}$$

(ii)
$$S(h)=\pi a\left(h-a+2a+\frac{a^2}{h-a}\right)$$

で，$h-a>0$ だから相加平均・相乗平均の関係から

$$S(h)\geqq\pi a(2a+2a)=4a^2\pi$$

で等号が $h-a=a$ つまり $h=2a$ のときに成り立つ．

(iii)
$$S=\pi\frac{ah^2}{h-a}.\quad\therefore\quad \pi ah^2-Sh+aS=0$$

を h の方程式とみてそれが $h>a$ の解をもつ条件から $S\geqq4\pi a^2$ とし，等号成立条件から $h=2a$ を導く．

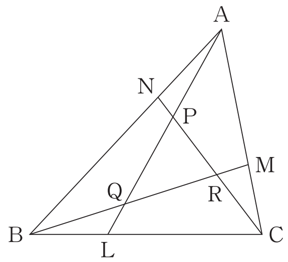
いずれにしろテクニカルな印象は免れない．

第４問

△ABCの３辺BC，CA，ABの上にそれぞれ点L，M，Nをとり，

$$\frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LC}}=\frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MA}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{NB}}=\frac{1}{2}$$

にする。ALとCNの交点をP，ALとBMの交点をQ，BMとCNの交点をRとするとき，△PQRの面積と△ABCの面積との比を求めよ。



分　野

数学Ｉ幾何：平面図形，面積比

考え方

BP を結んで，面積比 △PBC：△PCA：△PAB を出すと，△ABC に対する △PCA の面積比が出る．この比は △ABC に対する △QAB，△RBC の比に等しいから △ABC に対する △PQR の面積比が求められる．

【解答】

BP を結ぶと △PAC：△PBC＝AN：NB＝1：2 であることがわかる．

また，△PAC：△PAB＝CL：BL＝2：1 であることもわかる．

よって，△PAB：△PAC：△PBC＝1：2：4．

△PAB＋△PAC＋△PBC＝△ABC だから $\dfrac{\triangle \mathrm{PAC}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{2}{1+2+4}=\dfrac{2}{7}$.

同様に $\dfrac{\triangle \mathrm{QAB}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{\triangle \mathrm{RBC}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{2}{7}$.

よって，

$$\frac{\triangle \mathrm{PQR}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\frac{\triangle \mathrm{ABC}-\triangle \mathrm{PCA}-\triangle \mathrm{QAB}-\triangle \mathrm{RBC}}{\triangle \mathrm{ABC}}=1-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}-\frac{2}{7}=\frac{1}{7}.$$

よって，

△PQR：△ABC＝1：7．　…(答)

(注)　当時はベクトルは範囲外なので，メネラウスの定理やチェバの定理を使って辺の長さの比や面積比を求めていた．現代（2020）なら当然ベクトルを使って，

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

で AL，CN の交点として $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求め，これを使って面積比を求めるのが一般的であろう．

第５問

曲線 $y=\sqrt{1+x^2}$ の上に３点 P，A，Q があり，その x 座標がそれぞれ $a-h$，a，$a+h$ $(h>0)$ であるとする。いま A を通り，x 軸に垂直な直線が線分 PQ と交わる点を B とし，線分 AB の長さを l とするとき，

$$\lim_{h\to 0}\frac{l}{h^2}$$

を a を用いて表わせ。

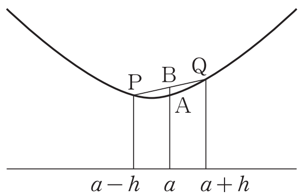
分　野

数学Ⅱ：関数の極限

考え方

B は PQ の中点であることに注意．

【解答】



$\mathrm{P}(a-h,\ \sqrt{(a-h)^2+1})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$，$\mathrm{Q}(a+h,\ \sqrt{(a+h)^2+1})$.

A を通り x 軸に垂直な直線は $x=a$ だから B は PQ の中点で，

$$\mathrm{B}\left(a,\ \frac{\sqrt{(a-h)^2+1}+\sqrt{(a+h)^2+1}}{2}\right).$$

$y=\sqrt{x^2+1}$ は双曲線の上半分であり，グラフが下に凸であることから，B の方が A より上にある．このことに注意して，

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB}=l&=\frac{\sqrt{(a-h)^2+1}+\sqrt{(a+h)^2+1}}{2}-\sqrt{a^2+1}\\
&=\frac{1}{2}\left\{\left(\sqrt{(a+h)^2+1}-\sqrt{a^2+1}\right)-\left(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{(a+h)^2-a^2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a+h)^2+1}}-\frac{a^2-(a-h)^2}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}}\right)\\
&=\frac{h}{2}\left(\frac{2a+h}{\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}}-\frac{2a-h}{\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}}\right)\\
&=\frac{h}{2}\,\frac{(2a+h)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)-(2a-h)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}\\
&=\frac{h}{2}\,\frac{h\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+2\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)-2a\left(\sqrt{(a+h)^2+1}-\sqrt{(a-h)^2+1}\right)}{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}\\
&=\frac{h^2}{2}\,\frac{\sqrt{(a+h)^2+1}+2\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}}{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}\\
&\quad-\frac{4h^2a^2}{\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{l}{h^2}&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(a+h)^2+1}+2\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}}{\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{4a^2}{\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{(a-h)^2+1}\right)\left(\sqrt{(a+h)^2+1}+\sqrt{a^2+1}\right)}\right\}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}}-\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+1}^{\,3}}\\
&=\frac{1}{2\sqrt{a^2+1}^{\,3}}.
\end{aligned}$$

…(答)

（注） $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ とおくと，

$$\frac{l}{h^2}=\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h^2}=\frac{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}}{2h}$$

であるから，結果が $\dfrac{f''(a)}{2}$ となることは予想できる．

この時代，数学Ⅱで極限を学習し $\sqrt{x}$ の微分を導くことまでやっている．その延長上にこの問題がある．

1961 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 5 問

t がすべての実数の範囲を動くとき

$$x=t^2+1 \quad y=t^2+t-2$$

を座標とする点 $(x,\ y)$ は 1 つの曲線をえがく。この曲線と x 軸とによって囲まれる部分の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

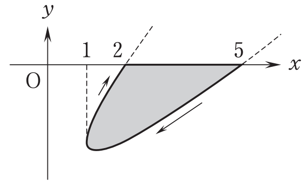
本来なら置換積分で解きたいところだが，当時置換積分は教科書にない．

y を x で表してこれを積分する．

【解答】

$$y=(t-1)(t+2)=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

t	-2	$\cdots$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
x	5	↘	$\dfrac{5}{4}$	↘	1	↗	2
y	0	↘	$-\dfrac{9}{4}$	↗	-2	↗	0
$(x,\ y)$	$(5,\ 0)$	↙	$\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{9}{4}\right)$	↖	$(1,\ -2)$	↗	$(2,\ 0)$



よって，曲線の概形は右図．$t=\pm\sqrt{x-1}$，$y=x-3\pm\sqrt{x-1}$．

ここで，$y_-=x-3-\sqrt{x-1}$，$y_+=x-3+\sqrt{x-1}$ とおく．

求める面積は

$$S=\int_1^5(-y_-)\,dx-\int_1^2(-y_+)\,dx=\int_1^5(-x+3+\sqrt{x-1})\,dx-\int_1^2(-x+3-\sqrt{x-1})\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+3x+\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5-\left[-\frac{x^2}{2}+3x-\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2=\frac{9}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】 置換積分で

$$S=\int_1^5(-y_-)\,dx-\int_1^2(-y_+)\,dx=\int_0^{-2}(-t^2-t+2)(t^2+1)'\,dt-\int_0^1(-t^2-t+2)(t^2+1)'\,dt$$

$$=-\int_{-2}^1(-t^2-t+2)2t\,dt=2\int_{-2}^1(t^3+t^2-2t)\,dt=2\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_{-2}^1=\frac{9}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

a，b，c は定数であって，函数

$$f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x$$

は $x=\dfrac{\pi}{4}$ において極大値 $6\sqrt{2}$ をとり，また

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx=5\pi$$

である。このとき

(1) a，b，c を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $f(x)$ を最小にする x の値とそのときの $f(x)$ の値とを求めよ。

分 野

数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=6\sqrt{2}$，$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ および与えられた積分から a，b，c についての連立方程式が立つ．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

(1) $f'(x)=a\cos x-b\sin x+2c\cos 2x$.

$x=\dfrac{\pi}{4}$ で $f(x)$ は極値 $6\sqrt{2}$ をとるから

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{b}{\sqrt{2}}=0. \quad \therefore \quad a=b. \qquad \cdots①$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}+c=6\sqrt{2}. \quad \therefore \quad a+b+\sqrt{2}\,c=12. \qquad \cdots②$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{2\pi}(a\sin x\cos x+b\cos^2 x+c\sin 2x\cos x)\,dx.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{2\pi}=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin 2x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin 3x+\sin x)\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3x-\cos x\right]_0^{2\pi}=0.$$

$$\therefore \quad \int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx=b\pi=5\pi. \quad \therefore \quad b=5. \qquad \cdots③$$

①，②，③ より

$$a=5, \quad b=5, \quad c=\sqrt{2}.$$

このとき，

$$f'(x)=5\cos x-5\sin x+2\sqrt{2}\cos 2x=-5\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left\{5+4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}.$$

$$5+4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqq 1>0$$

より，$f'(x)=0$ となるのは $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ のときのみ．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

よって，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ で確かに極大となる．

$$\therefore \quad a=5, \quad b=5, \quad c=\sqrt{2}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 上の増減表から $x=\frac{5}{4}\pi$ で $f(x)$ は最小になる． …(答)

このとき，$f(x)=5\sin x+5\cos x+\sqrt{2}\sin 2x$.

$$\therefore \quad f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-4\sqrt{2}. \qquad \cdots(答)$$

（注） (1) で $f(x)$ が $x=\frac{\pi}{4}$ で確かに極大になることを示すだけなら $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$ を示せばよい．

$$f'(x)=5\cos x-5\sin x+2\sqrt{2}\cos 2x,$$

$$f''(x)=-5\sin x-5\cos x-4\sqrt{2}\sin 2x. \quad \therefore \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-9\sqrt{2}<0.$$

よって，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{4}$ で確かに極大となる．

1962 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$a+b=1$，$a\sin x+b\cos x=1$，$a\sin^2 x+b\cos^2 x=1$ ならば，$a=\boxed{(1)}$，$b=\boxed{(2)}$，$x=\boxed{(3)}$° である。ただし，$0°<x<180°$ とする。

分　野

数学 I 幾何：三角方程式

【解答】

$a+b=1$ から

$$a\sin x+(1-a)\cos x=1,\quad a\sin^2 x+(1-a)\cos^2 x=1.$$

$$\therefore\quad (\sin x-\cos x)a=1-\cos x,\quad (\sin^2 x-\cos^2 x)a=1-\cos^2 x.$$

$$\therefore\quad (\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)a=(\sin x+\cos x)(1-\cos x)=1-\cos^2 x.$$

$$\therefore\quad (\sin x-1)(1-\cos x)=0.$$

$0°<x<180°$ から $1-\cos x>0$．　よって，$\sin x=1$．つまり，$x=90°$．

よって，

$$a=\boxed{1},\quad b=\boxed{0},\quad x=\boxed{90}°.$$ …(1)，(2)，(3)

II

x が正の数全体をうごくとき，次の函数 $f(x)$ について，

つねに $f(x)>0$ ならば　イ

つねに $f(x)<0$ ならば　ロ

$f(x)$ が正にも負にもなるならば　ハ

と $\boxed{}$ の中に記せ。

(i)　$f(x)=x^3-2x^2+x+1$　$\boxed{(4)}$

(ii)　$f(x)=(x^2-5x+2)^2-6(x^2-5x+2)+8$　$\boxed{(5)}$

(iii)　$f(x)=3(x+1)(x+2)(x+3)-(x+1)^3-(x+2)^3-(x+3)^3$　$\boxed{(6)}$

(iv)　$f(x)=\log(x^2-x+1)$　$\boxed{(7)}$

分　野

数学 I 代数：絶対不等式，高次関数，対数関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

(i)　$f(x)=x(x-1)^2+1$ から，$\boxed{\text{つねに } f(x)>0}$．　…(4)＝イ

(ii)　$f(x)=\{(x^2-5x+2)-2\}\{(x^2-5x+2)-4\}=x(x-5)(x^2-5x-2)$ より，

$\boxed{f(x) \text{ は正にも負にもなる}}$．　…(5)＝ハ

(iii)　
$$\begin{aligned}f(x)&=-\{(x+1)+(x+2)+(x+3)\}\\&\quad\times\{(x+1)^2+(x+2)^2+(x+3)^2-(x+1)(x+2)-(x+2)(x+3)-(x+3)(x+1)\}\\&=-9(x+2).\end{aligned}$$

よって，$\boxed{\text{つねに } f(x)<0}$．　…(6)＝ロ

(iv) 対数は常用対数として解く．

$$f(x)=\log\{x(x-1)+1\}$$

から，$0<x<1$ で $f(x)<0$，$x>1$ で $f(x)>0$．$\boxed{f(x)\text{ は正にも負にもなる}}$．　…(7)＝ハ

（注） この時代だから常用対数であろう．ただし，底 a が $a>0$，$a\neq1$ をみたす実数なら，正も負もとることに変りがない．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a を実数とする 3 つの 2 次方程式

$$x^2-2ax+1=0,\quad x^2-2ax+2a=0,\quad 4x^2-8ax+8a-3=0$$

のうち，1 つだけが虚根をもつような a の範囲は

$$\boxed{(8)}<a\leqq\boxed{(9)}\ \text{と}\ \boxed{(10)}\leqq a<\boxed{(11)}$$

である。

分　野

数学 I 代数：2 次方程式

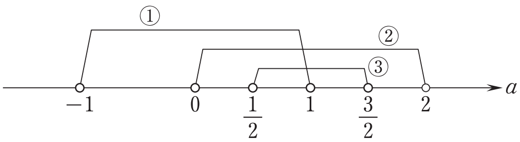
【解答】

問題文の「虚根」は「虚数解」の当時の表記である．

$x^2-2ax+1=0$ が虚数解をもつ条件は $a^2-1<0$ で $-1<a<1$．　…①

$x^2-2ax+2a=0$ が虚数解をもつ条件は $a^2-2a<0$ で $0<a<2$．　…②

$4x^2-8ax+8a-3=0$ が虚数解をもつ条件は $16a^2-4(8a-3)=4(2a-1)(2a-3)<0$ で $\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$．　…③



①，②，③ のうち，1 個だけ成り立つのは，

$$\boxed{-1}<a\leqq\boxed{0},\quad \boxed{\frac{3}{2}}\leqq a<\boxed{2}.$$　…(8)，(9)，(10)，(11)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

半径 r の球の表面積 $S=4\pi r^2$ と体積 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ との間には

$$\log S=\boxed{(12)}\log V+\boxed{(13)}\log\pi+\boxed{(14)}\log 6$$

なる関係がある。

分　野

数学Ⅰ代数：対数

【解答】

$$\log S=2\log 2+\log\pi+2\log r,\quad \log V=2\log 2-\log 3+\log\pi+3\log r.$$

よって，r を消去して，$\log S-\dfrac{2}{3}\log V=\dfrac{1}{3}\log\pi+\dfrac{2}{3}\log 2+\dfrac{2}{3}\log 3$

よって，

$$\log S=\boxed{\frac{2}{3}}\log V+\boxed{\frac{1}{3}}\log\pi+\boxed{\frac{2}{3}}\log 6. \qquad \cdots(12),\ (13),\ (14)$$

Ⅴ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

円 $x^2+y^2-2x+3y-3=0$ を x 軸の正の向きに $\boxed{(15)}$，y 軸の正の向きに $\boxed{(16)}$ だけ平行移動すれば，円 $x^2+y^2-6x+5y+\boxed{(17)}=0$ となる。

分　野

数学Ⅱ：円の方程式，図形の移動

【解答】

$x^2+y^2-2x+3y-3=0$ から $(x-1)^2+\left(y+\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$.

したがって，最初の円は中心が $\left(1,\ -\dfrac{3}{2}\right)$ で半径が $\dfrac{5}{2}$ の円である.

移動後の円で $\boxed{(17)}=a$ とおくと，$x^2+y^2-6x+5y+a=0$ から $(x-3)^2+\left(y+\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{61}{4}-a$ となる．その中心は $\left(3,\ -\dfrac{5}{2}\right)$.

中心が $\left(1,\ -\dfrac{3}{2}\right)$ から $\left(3,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ に移動するから，この移動は x 軸の正の向きに $\boxed{2}$，y 軸の正の向きに $\boxed{-1}$ だけの移動である. …(15), (16)

半径は変らないから $\dfrac{25}{4}=\dfrac{61}{4}-a$ で，

$$a=\boxed{9}. \qquad \cdots(17)$$

Ⅵ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

函数 $f(x)=x^3+\boxed{(18)}x^2+\boxed{(19)}$ は，$x=2$ のとき極小値 1 をとり，$x=\boxed{(20)}$ のとき極大になる。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\boxed{(18)}=a$，$\boxed{(19)}=b$ とおくと，$f(x)=x^3+ax^2+b$．

$$f'(x)=3x^2+2ax. \qquad \cdots①$$

$x=2$ で極値をとるから，$f'(2)=12+4a=0$．$a=\boxed{-3}$．　…(18)

極値が 1 だから，$f(2)=8+4a+b=8-12+b=-4+b=1$．よって，$b=\boxed{5}$．　…(19)

① から

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

よって，$x=\boxed{0}$ で極大値をとる．　…(20)

1962 年　1 次試験（理科）

I

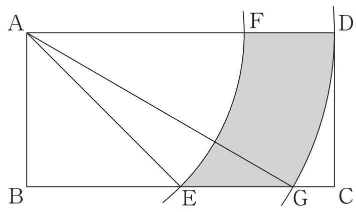
次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

AB＝2，BC＝4 なる長方形 ABCD の内部で，点 A からの距離が $2\sqrt{2}$ と 4 の間にある部分の面積は $\boxed{(1)}\pi+\boxed{(2)}\left(\sqrt{\boxed{(3)}}-1\right)$ である。

分　野

数学 I 幾何：平面図形，面積

【解答】



点 A を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円と辺 BC の交点を E，辺 AD との交点を F とし，点 A を中心とする半径 4 の円と辺 BC の交点を G とすると右図のようになる．

AE＝$2\sqrt{2}$ で，AB＝2 だから $\angle\mathrm{EAB}=\dfrac{\pi}{4}$，BE＝2.

AG＝4 で，AB＝2 だから $\angle\mathrm{GAB}=\dfrac{\pi}{3}$，BG＝$2\sqrt{3}$.

求める面積は

$$\triangle\mathrm{ABG}+\text{扇形 AGD}-\triangle\mathrm{ABE}-\text{扇形 AEF}.$$

$$\triangle\mathrm{ABG}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BG}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2=2\sqrt{3}.$$

$$\text{扇形 AGD}=\frac{4^2\pi}{12}=\frac{4}{3}\pi.$$

$$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BE}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2.$$

$$\text{扇形 AEF}=\frac{(2\sqrt{2})^2\pi}{8}=\pi.$$

求める面積は

$$2\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi-2-\pi=\boxed{\frac{1}{3}}\pi+\boxed{2}\left(\sqrt{\boxed{3}}-1\right).\qquad\cdots(1),\ (2),\ (3)$$

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

直線 $y-5x+\boxed{(4)}=0$ は円 $3x^2+3y^2-2x+4y+\boxed{(5)}=0$ と点 $(\boxed{(6)},\ -1)$ において接する。

分　野

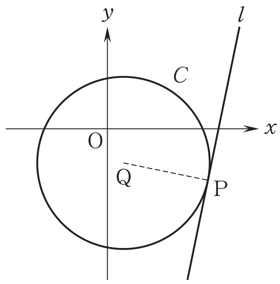
数学 II：図形と方程式

【解答】

$\boxed{(4)}=a$，$\boxed{(5)}=b$，$\boxed{(6)}=c$ とおく．

直線 l：$y-5x+a=0$ と円 C：$3x^2+3y^2-2x+4y+b=0$ すなわち，$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}-\dfrac{b}{3}$

が点 P$(c,\ -1)$ で接する．



円 C の中心 Q$\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ と点 P$(c,\ -1)$ を結ぶ直線は l に垂直だから

$$\frac{-1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{c-\frac{1}{3}}\cdot 5=\frac{-5}{3c-1}=-1.\quad \therefore\quad c=2.$$

P は l 上の点だから，$-1-10+a=0$．∴　$a=11$．

また，P は C 上の点でもあるから，$3\cdot 2^2+3(-1)^2-2\cdot 2+4(-1)+b=0$．

∴　$b=-7$．

よって，

$$a=\boxed{11},\quad b=\boxed{-7},\quad c=\boxed{2}.$$ …(4)，(5)，(6)

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

3 点 A(3, 0)，B(0, 2)，C(2, 4) がある。直線 AB 上の点 P$(x,\ y)$ と点 C を結ぶ直線が x 軸と交わる点を P′$(x',\ 0)$ とすれば $x'=\dfrac{\boxed{(7)}\,x+\boxed{(8)}}{x+\boxed{(9)}}$ である。

また直線 CP と y 軸との交点を Q とするとき，Q が線分 OB 上にあって PQ：QP′=1：3 になるのは，$x=\boxed{(10)}$ のときである。ただし，O は原点 (0, 0) である。

分　野

数学Ⅱ：直線の方程式

【解答】

座標平面を XY 平面として考える．

直線 AB の方程式は $Y=-\frac{2}{3}X+2$．

$x\neq 2$ のとき直線 CP の方程式は $Y=\frac{y-4}{x-2}(X-2)+4$．

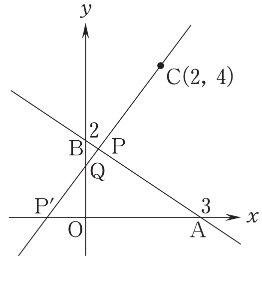
X 軸との交点 P′ の X 座標は，$x=2$ のときの，$x'=2$ も含めて，

$$x'=2-4\frac{x-2}{y-4}=2-4\frac{x-2}{\left(-\frac{2}{3}x+2\right)-4}=\frac{\boxed{8}\,x+\boxed{-6}}{x+\boxed{3}}.$$ …(7)，(8)，(9)

Q の x 座標は 0 だから，PQ：QP′=1：3 のとき，$x：-x'=1：3$．よって，

$$3x+x'=3x+\frac{8x-6}{x+3}=\frac{3x^2+17x-6}{x+3}=\frac{(3x-1)(x+6)}{x+3}=0.$$

$x>0$ より $x=\boxed{\frac{1}{3}}$． …(10)



Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$\sin 3x - \sin x = \cos 3x + \cos x$ を満足する x の値を小さい方から順に並べれば

$$\boxed{(11)}°,\quad \boxed{(12)}°,\quad \boxed{(13)}°,\quad \boxed{(14)}°$$

である。ただし，$0° \leqq x < 360°$ とする。

分 野

数学Ⅱ：三角方程式，3 倍角の公式

【解答】

3 倍角の公式より，

$$3\sin x - 4\sin^3 x - \sin x = 4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x.$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad \sin x + \cos x - 2\sin^3 x - 2\cos^3 x &= (\sin x + \cos x)\{1 - 2(1 - \sin x\cos x)\} \\ &= (\sin x + \cos x)(-1 + 2\sin x\cos x) \\ &= -(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)^2 = 0. \end{aligned}$$

よって，

$$\sin x + \cos x = 0 \text{ または } \sin x - \cos x = 0.$$

$\sin x + \cos x = 0$ のとき，

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + 45°) = 0$$

より，$x = 135°$，$315°$.

$\sin x - \cos x = 0$ のとき，

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin(x - 45°) = 0$$

より，$x = 45°$，$225°$.

以上より，

$$\boxed{45}°,\quad \boxed{135}°,\quad \boxed{225}°,\quad \boxed{315}°. \qquad \cdots(11),\ (12),\ (13),\ (14)$$

（注） 和積公式から

$$\sin 3x - \sin x - \cos 3x - \cos x = 2\sin x\cos 2x - 2\cos 2x\cos x = 2(\sin x - \cos x)\cos 2x = 0$$

としてもよい.

また，$-(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)^2 = 0 \iff (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = 0 \iff \cos 2x = 0$ から $x = 45° + 90° \times n$（n は整数）としてもよい.

Ⅴ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$3 \text{ 直線 } 3x + 2y - 7 = 0,\quad 2x - 6y - 5 = 0,\quad 4x - y + 3 = 0$$

の作る三角形を x 軸の正の向きに $\boxed{(15)}$，y 軸の正の向きに $\boxed{(16)}$ だけ平行移動すれば，

$$3 \text{ 直線 } 6x + 4y - 11 = 0,\quad x - 3y - 13 = 0,\quad 4x - y + \boxed{(17)} = 0$$

の作る三角形が得られる。

分 野

数学Ⅱ：平面図形，図形の移動

【解答】

$$l_1 : 3x + 2y - 7 = 0,\quad l_2 : 2x - 6y - 5 = 0,\quad l_3 : 4x - y + 3 = 0,$$

$$l_1' : 6x + 4y - 11 = 0,\quad l_2' : x - 3y - 13 = 0,\quad l_3' : 4x - y + \boxed{(17)} = 0$$

とする．$l_1 /\!/ l_1'$，$l_2 /\!/ l_2'$，$l_3 /\!/ l_3'$ であるから，l_1，l_2，l_3 はそれぞれ l_1'，l_2'，l_3' に平行移動される．

l_1，l_2 の交点は $\left(\dfrac{26}{11},\ -\dfrac{1}{22}\right)$．また，$l_1'$，$l_2'$ の交点は $\left(\dfrac{85}{22},\ -\dfrac{67}{22}\right)$．

$$\frac{85}{22}-\frac{26}{11}=\frac{3}{2},\quad -\frac{67}{22}-\left(-\frac{1}{22}\right)=-3$$

だから，x 軸の正の向きに $\boxed{\dfrac{3}{2}}$，y 軸の正の向きに $\boxed{-3}$ だけ平行移動した．　…(15)，(16)

l_3 を x 軸の正の向きに $\dfrac{3}{2}$，y 軸の正の向きに -3 だけ平行移動すると，

$$4\left(x-\frac{3}{2}\right)-(y+3)+3=0.\quad \therefore\quad 4x-y+\boxed{-6}=0.$$ …(17)

Ⅵ

$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ とする。次の(i)，(ii)，(iii)の各場合について，

$f(x)$ が有限な極限値に収束するならば，その極限値を，

$f(x)$ が正で限りなく大きくなるならばイと，

$f(x)$ が負で絶対値が限りなく大きくなるならばロと，

$\boxed{}$ の中に記せ。

(i)　$x\to 3$ のとき　$\boxed{(18)}$

(ii)　$x\to\infty$ のとき　$\boxed{(19)}$

(iii)　x が -1 より小さい値をとりながら -1 に近づくとき　$\boxed{(20)}$

分　野

数学Ⅱ：関数の極限

【解答】

(i)　$\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x)=\frac{3^2+3-2}{3^2-3-2}=\boxed{\frac{5}{2}}.$ …(18)

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=\boxed{1}.$ …(19)

(iii)　$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}.$

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-2}=\frac{(-1+2)(-1-1)}{-1-2}>0$ で $x\to -1-0$ のとき $x+1<0$ だから，

$$\lim_{x\to-1-0}f(x)=\boxed{-\infty}.$$ …(20)＝ロ

1962 年　2 次試験（文科）

第 1 問

二次方程式 $x^2-2x\log_a b+\log_b a=0$ が実根 α，β をもち，$0<\alpha<1<\beta$ となるものとする。

このとき，a，b，1 の大きさの順序はどのようになるか。ただし a，b はいずれも 1 と異なる正の数とする。

分　野

数学Ⅰ代数：2 次方程式の理論，対数

考え方

$f(x)=x^2-2x\log_a b+\log_b a$ とおくと，$0<\alpha<1<\beta$ から $f(0)$，$f(1)$ の符号がわかる．

$(\log_a b)(\log_b a)=1$ であることも利用．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

$f(x)=x^2-2x\log_a b+\log_b a$ とおくと，$y=f(x)$ は下に凸な放物線で，$0<\alpha<1<\beta$ だから，

$$f(0)=\log_b a>0,\quad f(1)=1-2\log_a b+\log_b a<0. \qquad \cdots ①$$

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}>0$ だから，① の第 2 式から，

$$\log_b a-2+(\log_b a)^2=(\log_b a-1)(\log_b a+2)<0.$$

よって，$-2<\log_b a<1$．① の第 1 式から

$$0<\log_b a<1.$$

$\log_b 1<\log_b a<\log_b b$ から $0<b<1$ のとき，$b<a<1$，$b>1$ のとき，$1<a<b$．

よって，

$$1<a<b \text{ または } b<a<1. \qquad \cdots(答)$$

第2問

△ABC において $\angle A=90°$，$AB=AC=2$ とする。点 B，C から直線 BC に関して A と同じ側に辺 BC に垂直な半直線 BX，CY を引く。半直線 BX，辺 AB，BC，CA，半直線 CY の上にそれぞれ点 P，Q，R，S，T をとり，

$$PQ /\!/ BC,\quad \frac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\sqrt{2},\quad \angle BRQ=\angle CRS,\quad \frac{\cos\angle CST}{\cos\angle ASR}=\sqrt{2}$$

となるようにする。

$BP=x$，$CT=y$ とするとき，x と y との間にはどのような関係式が成り立つか。

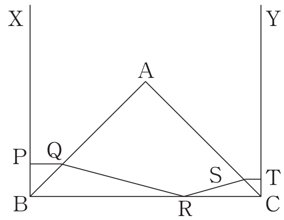
分　野

数学Ⅰ幾何：三角関数，平面図形

考え方

$\angle BQP$ と $\angle ASR$ がわかれば他の角もわかる．角がわかれば図の概形がわかる．

【解答】



$AB=AC=2$ で $\angle A=90°$ だから△ABC は直角二等辺三角形．したがって，$\angle ABC=45°$．

$PQ /\!/ BC$ だから $\angle BQP=\angle ABC=45°$．

$$\frac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\sqrt{2} \text{ だから } \cos\angle AQR=\frac{\cos 45°}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

よって，$\angle AQR=60°$．

△ARQ の外角と内対角の関係から $\angle QBR+\angle BRQ=\angle AQR$．

よって $\angle BRQ=\angle AQR-\angle QBR=60°-45°=15°$．

また $\angle BRQ=\angle CRS$，$\angle QBR=\angle SCR$ から $\triangle BRQ \backsim \triangle CRS$．

よって，$\angle BQR=\angle CSR$．よって，$\angle AQR=\angle ASR$．

$\dfrac{\cos\angle BQP}{\cos\angle AQR}=\dfrac{\cos\angle CST}{\cos\angle ASR}=\sqrt{2}$ から，$\cos\angle BQP=\cos\angle CST$．

よって，$\angle BQP=\angle CST=45°$．

PQRB の作る図形と TSRC の作る図形は相似．

$BP=x$ から，$BQ=\sqrt{2}\,x$．正弦定理から $\dfrac{BQ}{\sin\angle BRQ}=\dfrac{BR}{\sin\angle BQR}$．

よって，$BR=\dfrac{\sin 120°}{\sin 15°}\sqrt{2}\,x$．相似であることと $CT=y$ から $CR=\dfrac{\sin 120°}{\sin 15°}\sqrt{2}\,y$．

$BR+CR=BC=2\sqrt{2}$ から $\dfrac{\sin 120°}{\sin 15°}\sqrt{2}\,x+\dfrac{\sin 120°}{\sin 15°}\sqrt{2}\,y=2\sqrt{2}$．

よって，$x+y=\dfrac{2\sin 15°}{\sin 120°}$．

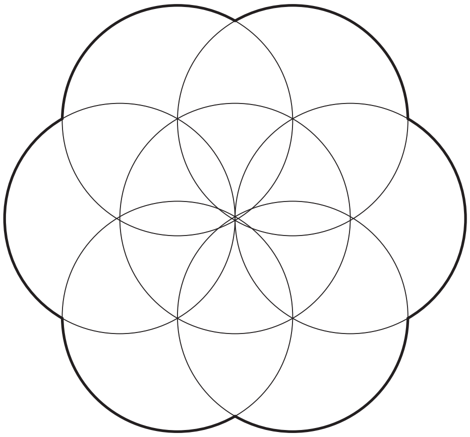
$\sin 120°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 15°=\sin(45°-30°)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ より，

$$x+y=\frac{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

（注）　△ABC が屈折率 $\sqrt{2}$ の直角プリズムで，その外側が真空のとき，PQ にそって入射された光線の軌跡が折線 PQRST になるということが問題のモデル．屈折率は通常，境界面の法線と光線のなす角の sin の比として表されるから，境界面とのなす角で表すと cos の比になる．

第3問

半径 a の円周を6等分する点のそれぞれを中心として，半径 a の円をえがくとき，これら6個の円がおおう範囲（図の太線で囲まれた範囲）の面積を求めよ。



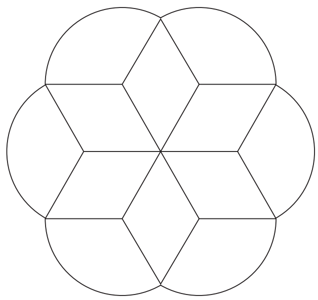
分　野

数学I幾何：平面図形，面積

考え方

外側の円弧から6個の扇形を作り，残った部分は6個の菱形になる．外形に円弧を含む図形の面積を求めるとき，その弧を弧とする扇形または弓形を切り抜けば残りは直線図形になっているはず．

【解答】



求める部分は，半径が a，中心角が 120° の扇形6個と，1つの角が 60° で1辺の長さが a の菱形6個からなる．

その面積は

$$6\times\frac{\pi a^2}{3}+6\times a^2\sin 60^\circ=(2\pi+3\sqrt{3})a^2. \qquad \cdots(答)$$

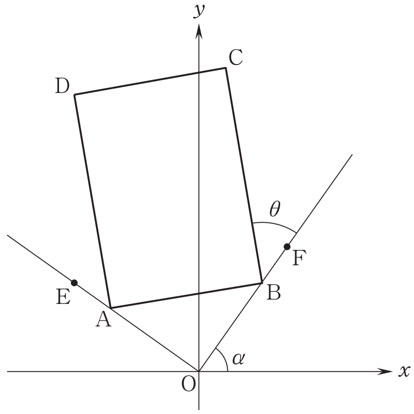
第 4 問

図のような xy 平面上の図形において，$\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=1$，$\angle\mathrm{EOF}=90°$，$\tan\alpha=\sqrt{2}$ とし，ABCD は $\angle\mathrm{EOF}$ の中にある長方形で $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ なるものとする。

この長方形の頂点 A が OE 上を E から O に向かって動き，頂点 B が OF 上を O から F に向かって動くとき，

(i) $\angle\mathrm{CBF}$ を θ として頂点 C の座標を θ で表わせ。

(ii) C はどのような曲線をえがくか。



分　野

数学Ⅱ：三角関数，加法定理，軌跡

考え方

$\angle\mathrm{BAO}=\theta$ であることに注意．OB の長さを求め，BC と x 軸のなす角が $\alpha+\theta$ であることを利用する．

【解答】

(i) $\angle\mathrm{OAB}=90°-\angle\mathrm{OBA}=\theta$．よって，$\mathrm{OB}=\mathrm{AB}\sin\theta=\sin\theta$．

よって，B の座標は $(\mathrm{OB}\cos\alpha,\ \mathrm{OB}\sin\alpha)=(\sin\theta\cos\alpha,\ \sin\theta\sin\alpha)$．

また，BC と x 軸正方向のなす角は $\alpha+\theta$ で，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ だから，C の座標は

$$(\sin\theta\cos\alpha+\sqrt{2}\cos(\alpha+\theta),\ \sin\theta\sin\alpha+\sqrt{2}\sin(\alpha+\theta)).$$

$\tan\alpha=\sqrt{2}$ で $0°<\alpha<90°$ だから，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，　$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

よって，

$$\mathrm{C}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta\right),\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right).$$ …(答)

(ii) C の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cos\theta=-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta=-\sin(\theta-\alpha),$$

$$Y=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta=2\sin\alpha\sin\theta+2\cos\alpha\cos\theta=2\cos(\theta-\alpha).$$

よって，

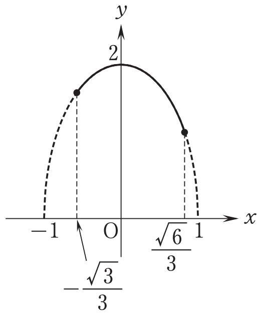
$$X^2+\frac{Y^2}{4}=1.$$

また，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ から，$-\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq X \leqq \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

よって，C は楕円の一部，

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \qquad \cdots(答)$$

をえがく.



第 5 問

1 つの頂点から出る 3 辺の長さが x，y，z であるような直方体において，x，y，z の和が 6，全表面積が 18 であるとき，

(i) x のとりうる値の範囲を求めよ。

(ii) このような直方体の体積の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：解と係数の関係，整式の微分

考え方

1 文字消去すれば 2 文字の 2 次方程式になる.

【解答】

(i) $x+y+z=6$ から $z=6-x-y$.

全表面積は $2(xy+yz+zx)=18$ だから，$xy+yz+zx=xy+(x+y)(6-x-y)=9$.

よって，

$$(x+y)^2-xy-6(x+y)+9=y^2+(x-6)y+x^2-6x+9=0. \qquad \cdots①$$

この式を y の式として $f(y)$ とおくと，y，z は正の実数だから，

$$0<y<6-x.$$

(① の判別式)$=(x-6)^2-4(x^2-6x+9)=-3x^2+12x=-3x(x-4) \geqq 0$.

軸：$y=-\dfrac{x-6}{2}>0$ から，$0<-\dfrac{x-6}{2}<6-x$.

$$\therefore \quad x<6.$$

$$f(0)=f(6-x)=x^2-6x+9=(x-3)^2>0.$$

よって，$x>0$ も含めて，

$$0<x<3, \quad 3<x \leqq 4. \qquad \cdots(答)$$

（注） yz の対称性から，$y+z=6-x$，$yz=x^2-6x+9$ として，t の方程式 $t^2-(x-4)t+x^2-6x+9=0$ が $t>0$ の 2 解をもつという条件から，x のとりうる値の範囲を求めてもよい．

(ii) $6-x=y+z$，$yz=9-x(y+z)=9-6x+x^2$ だから，この直方体の体積を V とすると

$$V=xyz=x(x^2-6x+9)=x^3-6x^2+9x.$$

これを $V(x)$ とすると，

$$V'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3).$$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)	$\cdots$	4
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)	$\nearrow$	

$V(1)=V(4)=4$ より，直方体の体積 $V(x)$ の最大値は 4. …(答)

【別解】

【別解】の考えかた

3 次方程式の解と係数の関係を考える．

(i)(ii) $x+y+z=6$ で全表面積は $2(xy+yz+zx)=18$ だから，$xy+yz+zx=9$．

直方体の体積 xyz を V とすると，x，y，z は t の 3 次方程式

$$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=t^3-6t^2+9t-V=0 \qquad \cdots②$$

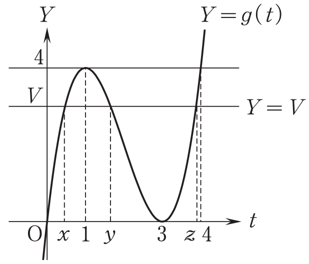
の 3 つの正の解．

$g(t)=t^3-6t^2+9t$ とおく．② が正の 3 実解をもつ条件は tY 平面上で $Y=g(t)$ と $Y=V$ のグラフが正の範囲で 3 点で交わるか接するとき．

$$g'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3).$$

$g(1)=4$，$g(3)=0$ から

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



$Y=g(t)$ と $Y=V$ のグラフが正の範囲で 3 点で交わるか接するのは

$$0<V\leqq 4$$

のとき．

このとき，交点の t 座標の範囲は $0<t\leqq 4$ $(t\neq 3)$

よって，x のとりうる値の範囲は，

$$0<x\leqq 4 \quad (x\neq 3). \qquad \cdots(答)$$

また，V の最大値は 4. …(答)

1962 年　2 次試験（理科）

第 1 問

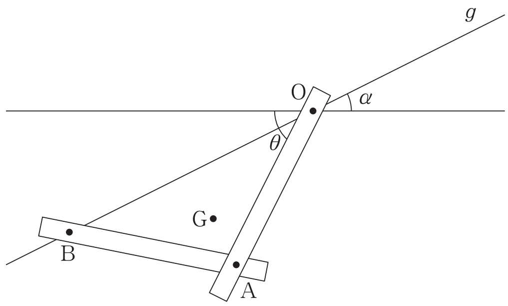
（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

図で，g は水平面に対する傾き $\tan\alpha$ が $\dfrac{1}{2}$ であるような定直線とし，OA，AB は A で（ちょうつがいで）連結された長さの等しい棒で，その端 O は g 上の定点に固定され，OA は g を含む鉛直面内で自由に回転し，他の端 B は g 上を動くことができるようになっている。このとき，折れ線 OAB の重心 G（OA，AB の中点を結ぶ線分の中点）が最低になるのは，OA の水平面となす傾き $\tan\theta$ がいくらになるときか。



分　野

数学Ⅱ：三角関数，合成公式

考え方

O を原点とし，鉛直上方に y 軸をとり，OA$=l$（1 でもよい）として，A，B の y 座標を求めればあとは容易．x 座標は不要．

【解答】

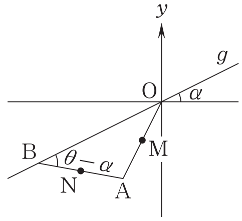
$0° < \theta < 90°$ として解答する．

O を原点とし，鉛直上方を y 軸とする座標を考える．A，B の y 座標をそれぞれ y_A，y_B とする．

OA$=l$ とすると，OA と水平面のなす角が θ だから $y_A = -l\sin\theta$.

$\angle$ABO$=\angle$AOB$=\theta-\alpha$ で OB と水平面のなす角が α だから，AB と水平面のなす角は $\alpha-(\theta-\alpha)=2\alpha-\theta$.

$y_A - y_B = l\sin(2\alpha-\theta)$.



よって，$y_B=-l\sin\theta-l\sin(2\alpha-\theta)$.

OA の中点を M，AB の中点を N とすると MN の中点が G.

M，N の y 座標はそれぞれ，

$$\mathrm{M}：-\frac{l}{2}\sin\theta,\quad \mathrm{N}：-l\sin\theta-\frac{l}{2}\sin(2\alpha-\theta).$$

G は MN の中点だから，その y 座標は

$$-\frac{l}{4}\sin\theta-\frac{l}{2}\sin\theta-\frac{l}{4}\sin(2\alpha-\theta)=-\frac{3}{4}l\sin\theta-\frac{l}{4}\sin(2\alpha-\theta)$$

$$=-\frac{l}{4}\{(3-\cos 2\alpha)\sin\theta+\sin 2\alpha\cos\theta\}.$$

ここで $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ から $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin 2\alpha=\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$.

よって，G の y 座標は

$$-\frac{l}{4}\left\{\left(3-\frac{3}{5}\right)\sin\theta+\frac{4}{5}\cos\theta\right\}=-\frac{l}{5}(3\sin\theta+\cos\theta)=-\frac{\sqrt{10}}{5}l\cos(\theta-\beta)$$

ただし，$\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\tan\beta=3$.

よって，G が最低になるのは $\theta=\beta$ のときで，そのとき，

$$\tan\theta=3.$$ …(答)

（注１） G は OB の中点 L と A を結ぶ線分の中点でもある.

L の y 座標は $\frac{y_B}{2}=-l\cos(\theta-\alpha)\sin\alpha=-\frac{l}{2}\sin\alpha-\frac{l}{2}\sin(2\alpha-\theta)$.

これから，G の y 座標を $-\frac{3}{4}l\sin\theta-\frac{l}{4}\sin(2\alpha-\theta)$ としてもよい.

また，y 座標は鉛直下方を正にとった方が気持ちよかったかもしれない.

（注２） 点 A の軌跡は O を中心とする半径 l の円であり，G は A から g へ下した垂線の中点であるから，G の軌跡は，O を中心とし，g 上に長さ $2l$ の長軸をもち，短軸の長さが l の楕円である.

したがって本問は水平方向と長軸が α だけ傾いた楕円の最低点を求める問題になっている.

（注３） 問題文では α，θ は図で定義されている．α は $0^\circ<\alpha<90^\circ$ と考えてよいだろうが，θ については‘図のように’$\alpha<\theta<90^\circ$ なのか，$\alpha-90^\circ<\theta<\alpha+90^\circ$ なのかどうか明らかでない．**【解答】**では $0^\circ<\alpha<90^\circ$ として解答した．$\alpha-90^\circ<\theta<\alpha+90^\circ$ として解答しても答は同じである.

ただ，$\theta=\alpha\pm 90^\circ$ の場合すなわち B が O に一致する場合を許すと事情は異なってくる．B が O に一致する場合，A は O を中心とする半径 l の円周上を自由に動くことができるようになる．OA と水平面のなす角 θ も自由にとれることになる．この場合，重心の y 座標が最小になるのは $\theta=\frac{\pi}{2}$ のときで，その最小値は $-\frac{l}{2}$ となる．この値は $-\frac{\sqrt{10}}{5}l$ より大きいから G が最低になる場合は変わらない．しかし，問題が変ってしまう.

第 4 問

無限級数

$$\frac{r}{1-r^2}+\frac{r^2}{1-r^4}+\frac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}+\cdots$$

の和を求めよ。ただし，$|r|\neq 1$ とする。

分　野

数学Ⅲ：無限級数

考え方

$\dfrac{r}{1-r^2}+\dfrac{r^2}{1-r^4}+\dfrac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}=a_n$ とおき，a_n を予想して，数学的帰納法で証明する．

その結果の極限を考える．

【解答】

$a_n=\dfrac{r}{1-r^2}+\dfrac{r^2}{1-r^4}+\dfrac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ とする．

$$a_1=\frac{r}{1-r^2}.$$

$$a_2=\frac{r}{1-r^2}+\frac{r^2}{1-r^4}=\frac{r(1+r^2)+r^2}{1-r^4}=\frac{r(1-r^3)}{(1-r)(1-r^4)}.$$

$$a_3=\frac{r(1-r^3)}{(1-r)(1-r^4)}+\frac{r^4}{1-r^8}=\frac{r(1-r^3)(1+r^4)+r^4(1-r)}{(1-r)(1-r^8)}=\frac{r(1-r^7)}{(1-r)(1-r^8)}.$$

よって，

$$a_n=\frac{r(1-r^{2^n-1})}{(1-r)(1-r^{2^n})} \qquad \cdots(*)$$

と推測する．これを証明する．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，

$$(右辺)=\frac{r(1-r)}{(1-r)(1-r^2)}=\frac{r}{1-r^2}$$

で確かに (*) が成り立っていることがわかる．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき，(*) が成り立っているとすると，

$$a_k=\frac{r(1-r^{2^k-1})}{(1-r)(1-r^{2^k})}.$$

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\frac{r^{2^k}}{1-r^{2^{k+1}}}\\&=\frac{r(1-r^{2^k-1})}{(1-r)(1-r^{2^k})}+\frac{r^{2^k}}{1-r^{2^{k+1}}}\\&=\frac{r(1-r^{2^k-1})(1+r^{2^k})+r^{2^k}(1-r)}{(1-r)(1-r^{2^{k+1}})}\\&=\frac{r(1-r^{2^k-1}+r^{2^k}-r^{2^{k+1}-1})+r(r^{2^k-1}-r^{2^k})}{(1-r)(1-r^{2^{k+1}})}\\&=\frac{r(1-r^{2^{k+1}-1})}{(1-r)(1-r^{2^{k+1}})}.\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ．

よって，$a_n=\dfrac{r(1-r^{2^n-1})}{(1-r)(1-r^{2^n})}$.

求める和は $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) $|r|<1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r(1-r^{2^n-1})}{(1-r)(1-r^{2^n})}=\frac{r(1-0)}{(1-r)(1-0)}=\frac{r}{1-r}.$$

(ii) $|r|>1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{r(1-r^{2^n-1})}{(1-r)(1-r^{2^n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{r}{r^{2^n}}-1}{(1-r)\left(\dfrac{1}{r^{2^n}}-1\right)}=\frac{0-1}{(1-r)(0-1)}=\frac{1}{1-r}.$$

よって，求める和は

$$\begin{cases}\dfrac{r}{1-r} & (|r|<1 \text{ のとき}),\\[2mm] \dfrac{1}{1-r} & (|r|>1 \text{ のとき}).\end{cases}$$ …(答)

【別解】

【別解】の考え方

$\dfrac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}=\dfrac{1}{1-r^{2^{n-1}}}-\dfrac{1}{1-r^{2^n}}$ に気づくこと．

$$\frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}=\frac{r^{2^{n-1}}+1}{1-(r^{2^{n-1}})^2}-\frac{1}{1-r^{2^n}}=\frac{1}{1-r^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-r^{2^n}}.$$

よって，

$$a_n=\frac{r}{1-r^2}+\frac{r^2}{1-r^4}+\frac{r^4}{1-r^8}+\cdots+\frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$$

とおくと，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{r^{2^{k-1}}}{1-r^{2^k}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-r^{2^{k-1}}}-\frac{1}{1-r^{2^k}}\right)=\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^{2^n}}.$$

求める和は $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(i) $|r|<1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^{2^n}}\right)=\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-0}=\frac{r}{1-r}.$$

(ii) $|r|>1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{1-r^{2^n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-r}-\frac{1}{r^{2^n}}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{r^{2^n}}-1}\right)=\frac{1}{1-r}.$$

よって，求める和は

$$\begin{cases}\dfrac{r}{1-r} & (|r|<1 \text{ のとき}),\\[2mm] \dfrac{1}{1-r} & (|r|>1 \text{ のとき}).\end{cases}$$ …(答)

第 5 問

（文科　第 5 問と同じ）

第 6 問

曲線 $y=6\sin\dfrac{x}{6}$ の上で $x=2\pi$，$x=6\pi$ なる点をそれぞれ P，Q とし，点 P，Q における曲線の接線の交点を R とする。このとき

(i)　R の座標を求めよ。

(ii)　線分 PR，QR と上の曲線とで囲まれる図形の面積を求めよ。

分　野

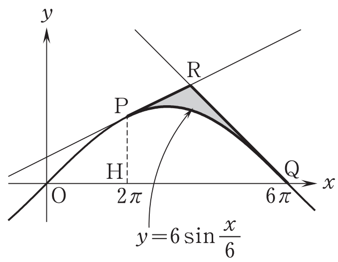
数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

接線の公式，面積の求め方についての基本問題である．

【解答】

(i)　P，Q における接線を l，m とする．



$y'=\cos\dfrac{x}{6}$．よって，

$$l:y=\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)(x-2\pi)+6\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x-\pi+3\sqrt{3}.$$

$$m:y=(\cos\pi)(x-6\pi)+6\sin\pi=-x+6\pi.$$

R の座標を求める．

$$\frac{1}{2}x-\pi+3\sqrt{3}=-x+6\pi.\quad\therefore\quad x=\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}.$$

$$y=\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}.$$

よって，

$$\mathrm{R}\left(\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3},\ \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right).$$ …(答)

(ii)　P$(2\pi,\ 3\sqrt{3})$，Q$(6\pi,\ 0)$．P から x 軸に下した垂線の足を H とすると，H$(2\pi,\ 0)$.

四角形 HPRQ の面積は，

$$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)\left(\frac{14}{3}\pi-2\sqrt{3}-2\pi\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)\left(6\pi-\frac{14}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(5\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)^2$$

$$=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-9.$$

$$\int_{2\pi}^{6\pi}6\sin\frac{x}{6}\,dx=\left[-36\cos\frac{x}{6}\right]_{2\pi}^{6\pi}=54.$$

求める面積は

$$\left(\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-9\right)-54=\frac{8}{3}\pi^2+8\sqrt{3}\pi-63.$$ …(答)

1963 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

任意の実数 x，y，z に対して

$$\boxed{(1)}\,x^2+\boxed{(2)}\,(x+y+3z)=\boxed{(3)}\,\{x^2+2(y+3z)\}+2(y+z)+\boxed{(4)}\,(2x+z)$$

が成り立つ。

分　野

数学 I 代数：恒等式

【解答】

$\boxed{(1)}=a$，$\boxed{(2)}=b$，$\boxed{(3)}=c$，$\boxed{(4)}=d$ とおくと，

$$ax^2+b(x+y+3z)=c\{x^2+2(y+3z)\}+2(y+z)+d(2x+z).$$

$$ax^2+bx+by+3bz=cx^2+2dx+(2c+2)y+(6c+d+2)z$$

が任意の実数 x，y，z に対して成り立つから，

$$a=c,\quad b=2d,\quad b=2c+2,\quad 3b=6c+d+2.$$

第 2 式を第 3，第 4 式に代入すると，

$$2d=2c+2,\quad 6d=6c+d+2.$$

よって，

$$5(c+1)=6c+2.\quad \therefore\ c=3.$$

$$\therefore\ a=\boxed{3},\quad b=\boxed{8},\quad c=\boxed{3},\quad d=\boxed{4}.$$ …(1)，(2)，(3)，(4)

II

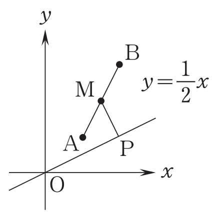
次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

2 定点 A(1, 1)，B(2, 3) と定直線 $y=\frac{1}{2}x$ … ① がある。直線 ① 上の動点 P をとって，$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ を最小にすれば，その最小値は $\boxed{(5)}$ で，その最小値を与える点 P_0 の座標は $(\boxed{(6)},\ \boxed{(7)})$ である。また，点 P_0 を通って直線 ① に垂線 l をひけば，l と直線 AB の交点の y 座標は $\boxed{(8)}$ である。

分　野

数学 II：平面座標

【解答】



AB の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$．中線定理から

$$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=2(\overline{\mathrm{PM}}^2+\overline{\mathrm{MA}}^2).$$

$\overline{\mathrm{MA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}$ で定数だから，$\overline{\mathrm{PM}}$ が最小のとき，$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ は最小になる．

$\overline{\mathrm{PM}}$ が最小になるのは，P が M から ① に下した垂線の足のとき．

M を通り ① に垂直な直線は $y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)+2=-2x+5$ から，P_0 の座標は (2, 1)．

よって，$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$ の最小値は

$$\overline{\mathrm{P_0A}}^2+\overline{\mathrm{P_0B}}^2=\boxed{\ 5\ }. \qquad \cdots(5)$$

P_0 の座標は

$$(\boxed{\ 2\ },\ \boxed{\ 1\ }). \qquad \cdots(6),\ (7)$$

P_0 を通り ① に垂直な直線は MP_0 に他ならないから，直線 AB との交点は

$$\mathrm{M}\left(\frac{3}{2},\ \boxed{\ 2\ }\right). \qquad \cdots(8)$$

（注） $\overline{\mathrm{PA}}$ は線分 PA の長さを表す.

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

△ABC において頂点 A の座標が (2, 16)，重心の座標が (3, −1)，外心の座標が (2, 1) であるとすれば，頂点 B の座標は ($\boxed{(9)}$, $\boxed{(10)}$)，C の座標は ($\boxed{(11)}$, $\boxed{(12)}$) である。ただし，C の x 座標は正とする。

分 野

数学Ⅱ：平面座標

【解答】

B，C の座標をそれぞれ $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ とすると，△ABC の重心が (3, −1) だから

$$3=\frac{2+a+c}{3},\quad -1=\frac{16+b+d}{3}.\quad \therefore\quad a+c=7,\quad b+d=-19. \qquad \cdots①$$

また，外心が (2, 1) だから，B，C は (2, 1) を中心とし，半径が $16-1=15$ の円

$$(x-2)^2+(y-1)^2=15^2$$

上にある．よって，

$$(a-2)^2+(b-1)^2=15^2,\quad (c-2)^2+(d-1)^2=15^2. \qquad \cdots②$$

$$\{(a-2)^2+(b-1)^2\}-\{(c-2)^2+(d-1)^2\}=(a-c)(a+c-4)+(b-d)(b+d-2)=0$$

① より，

$$-3(2c-7)+21(2d+19)=0.\quad \therefore\quad c=7d+70. \qquad \cdots③$$

② に代入して，

$$(7d+68)^2+(d-1)^2=15^2.\quad \therefore\quad d^2+19d+88=(d+8)(d+11)=0.$$

よって，$d=-8$ または $d=-11$.

③ より，$d=-8$ のとき，$c=14$，$d=-11$ のとき $c=-7$.

C の x 座標 $c>0$ より，$d=-8$．よって，① より $a=-7$，$b=-11$.

よって，

$$\mathrm{B}(\boxed{-7},\ \boxed{-11}),\quad \mathrm{C}(\boxed{14},\ \boxed{-8}). \qquad \cdots(9),\ (10),\ (11),\ (12)$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

曲線 $y=x^3+\boxed{(13)}x^2+\boxed{(14)}x+\boxed{(15)}$ の接線の傾きは接点が $(2,\ -10)$ のとき最小となり，そのときの傾きは $\boxed{(16)}$ で，その接線は原点を通る。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

【解答】

曲線の方程式を $y=f(x)$ とおくと，2 次関数 $f'(x)$ が $x=2$ で最小になり，x^2 の係数は 3 だから，$f'(x)=3(x-2)^2+c$ とおける．

そのときの接線は $(2,\ -10)$ と原点を通るから，

$$f'(2)=c=\frac{-10}{2}=-5.$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\{3(x-2)^2-5\}\,dx=(x-2)^3-5x+d$$

とおけて，$y=f(x)$ は $(2,\ -10)$ を通るから

$$-10=-10+d.\quad \therefore\ d=0.$$

$$\therefore\ f(x)=(x-2)^3-5x=x^3+\boxed{-6}x^2+\boxed{7}x+\boxed{-8}.$$ …(13)，(14)，(15)

また，点 $(2,\ -10)$ における接線の傾きは $\boxed{-5}$． …(16)

Ⅴ

次の $\boxed{}$ にあてはまるものは，下記のイロハニの中のどれであるか。イロハニの記号で答えよ。

長さ a，b，c の三つの線分がある。これらを三辺とする鋭角三角形をつくりうるために

(1) $|a-b|<c<a+b$ は $\boxed{(17)}$ である。

(2) $|a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2$ は $\boxed{(18)}$ である。

(3) $|a^2-b^2|<c^2<ab$ は $\boxed{(19)}$ である。

(4) $|a-b|<c<\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ は $\boxed{(20)}$ である。

イ　必要かつ十分な条件

ロ　十分であるが必要でない条件

ハ　必要であるが十分でない条件

ニ　必要でも十分でもない条件

分　野

数学Ⅰ幾何：必要条件・十分条件，三角比，**数学Ⅰ代数**：不等式

【解答】

長さ a，b，c の線分といっているから，これらが正であることは前提と考える．

a，b，c を 3 辺の長さとする鋭角三角形をつくりうる条件は

$$a^2<b^2+c^2,\quad b^2<c^2+a^2,\quad c^2<a^2+b^2$$

である．

(1) $|a-b|<c<a+b \iff a<b+c,\ b<c+a,\ c<a+b$ であるから，これは a，b，c を 3 辺とする三角形をつくりうる条件である．

鋭角三角形なら三角形であるが，三角形なら必ずしも鋭角三角形でない．

反例は鈍角三角形である．$a=2$，$b=3$，$c=4$ とすると，$|a-b|<c<a+b$ であるが，$c^2=16$，$a^2+b^2=13$ で $c^2<a^2+b^2$ をみたさない．

よって，$|a-b|<c<a+b$ は a，b，c を 3 辺とする鋭角三角形をつくりうるための $\boxed{\text{必要であるが十分でない条件}}$ である． …(17)＝ハ

(2) $|a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2 \iff a^2<b^2+c^2$，$b^2<c^2+a^2$，$c^2<a^2+b^2$ であるから，これは a，b，c を 3 辺とする鋭角三角形をつくりうる条件そのものである．

よって，$|a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2$ は a，b，c を 3 辺とする鋭角三角形をつくりうるための $\boxed{\text{必要かつ十分な条件}}$ である． …(18)＝イ

(3) a，b が正のとき $a^2+b^2-ab=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)+\dfrac{3}{4}b^2>0$ だから，

$$|a^2-b^2|<c^2<ab \Longrightarrow |a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2.$$

逆は成り立たない．例えば，$a=2$，$b=2$，$c=3$ のとき，これらを 3 辺の長さとする三角形は二等辺三角形で鋭角三角形だが，$c^2=9$，$ab=4$ で $c^2<ab$ とならない．

よって，$|a^2-b^2|<c^2<ab$ は a，b，c を 3 辺とする鋭角三角形をつくりうるための $\boxed{\text{十分であるが必要でない条件}}$ である． …(19)＝ロ

(4) $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{a^3+b^3}{ab}=(a+b)\left(\dfrac{a}{b}-1+\dfrac{b}{a}\right)\geqq a+b$．よって，

$$|a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2 \Longrightarrow |a-b|<c<a+b \Longrightarrow |a-b|<c<\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}.$$

逆は成り立たない．例えば，$a=2$，$b=3$，$c=4$ とすると，$|a-b|=1$，$c=4$，$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}=\dfrac{35}{6}$ で $|a-b|<c<\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ をみたすが，a，b，c を 3 辺とする三角形は鈍角三角形である．

よって，$|a-b|<c<\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ は a，b，c を 3 辺とする鋭角三角形をつくりうるための $\boxed{\text{必要であるが十分でない条件}}$ である． …(20)＝ハ

1963 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

任意の実数 x に対して

$$6x^3+\boxed{(1)}x^2-8x+\boxed{(2)}=(x-1)(\boxed{(3)}x+1)(3x+\boxed{(4)})$$

が成り立つ。

分 野

数学 I 代数：恒等式

【解答】

$\boxed{(1)}=a$，$\boxed{(2)}=b$，$\boxed{(3)}=c$，$\boxed{(4)}=d$ とおくと，

$$6x^3+ax^2-8x+b=(x-1)(cx+1)(3x+d). \qquad \cdots①$$

$x=1$ で成り立つから

$$6+a-8+b=0. \quad \therefore \quad b=2-a.$$

① に代入して

$$6x^3+ax^2-8x+2-a=(6x^3-8x+2)+a(x^2-1)=(x-1)\{6x^2+(a+6)x+(a-2)\}=(x-1)(cx+1)(3x+d).$$

よって，

$$6x^2+(a+6)x+(a-2)=(cx+1)(3x+d)=3cx^2+(cd+3)x+d.$$

よって，

$$6=3c, \quad a+6=cd+3, \quad a-2=d.$$

よって，

$$a=\boxed{7}, \quad b=\boxed{-5}, \quad c=\boxed{2}, \quad d=\boxed{5}. \qquad \cdots(1), (2), (3), (4)$$

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

平面上に二つの定点 A，B が与えられていて，AB=6 とする。この平面上で点 P を A のまわりに正の向きに 60° 回転した点を P′，点 P′ を B のまわりに正の向きに 120° 回転した点を P″ とする。

(1) P を AB の中点とすれば，$BP'=\sqrt{\boxed{(5)}}$，$P'P''=\boxed{(6)}$ である。

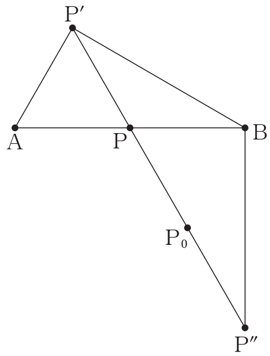
(2) P″ が P と一致するとすれば，$AP=\sqrt{\boxed{(7)}}$，$BP=\boxed{(8)}$ である。

分 野

数学 I 幾何：図形の移動，三角比

【解答】

(1) 点 P が AB の中点のときの，A，B，P，P′，P″ の位置を図示すると次図．



点 P を A のまわりに正の向きに 60° 回転した点が P′ だから，AP′=AP=3，AB=6 で $\angle BAP'=60°$ だから，$BP'=3\sqrt{3}=\sqrt{\boxed{27}}$. …(5)

$\angle P'BA=30°$ で $BP''=BP'=3\sqrt{3}$ だから，$P'P''=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}BP'=\boxed{9}$. …(6)

(2) 平面上の任意の点 P に対して，P″ はある点の周りの 60°+120°=180° の回転になっているはずである．(1) の点 P が (1) の P″ に移動することから回転の中心は (1) の P，P″ の中点である．この点を P_0 とすると平面上の任意の点 P に対して P″ は P_0 の周りに 180° 回転した点である．したがって，P=P″ となる点は $P=P_0$ となる点だけである．P_0 の位置は (1) の図のようである．(1) の P，P′，P″ を以下 P_1，P_1'，P_1'' とすると，$\angle P_1'BA=30°$ だから，$\angle ABP_1''=90°$．$\angle BP_1'P_1''=30°$，$\angle AP_1'B=90°$ だから，$\angle AP_1'P_1''=60°$．$\triangle AP_1P_1'$ は正三角形であるから，P_1'，P_1，P_1'' は一直線上にある．

$BP_1''=3\sqrt{3}$ だから，$P_1P_1''=6$．よって，$P_1P_0=3$．P_0 は P_1 について，P_1' の対称点．よって四角形 AP_0BP_1' は長方形．

よって，(2) の P は P_0 だから

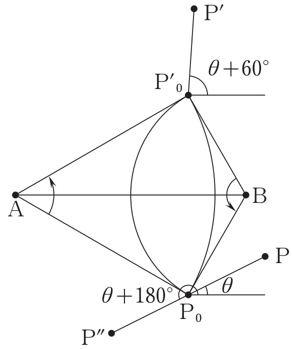
$$AP=AP_0=BP_1'=\sqrt{\boxed{27}},\quad BP=BP_0=AP_1'=AP_1=\boxed{3}.$$ …(7)，(8)

(注 1) 穴埋め式なので上記程度でよいと思うが，もう少し丁寧に P″ が P_0 を中心の 180° 回転であることを説明しよう．

P_0 を A を中心に 60° 回転した点を P_0' とし，P_0' を B を中心に 120° 回転した点が P_0 となるとする．P_0 と異なる任意の点 P をとり，P_0P と AB のなす角を θ とする．

点 P を A を中心に 60° 回転した点を P′ とすると，$P_0'P'$ と AB のなす角は $\theta+60°$ となる．

点 P′ を B を中心に 120° 回転した点を P″ とすると，P_0P'' と AB のなす角は $\theta+60°+120°=\theta+180°$ となる．



$P_0P=P_0'P'=P_0P''$ であるから，$P_0P=P_0P''$ で，P_0P と P_0P'' のなす角は $180°$ だから，P'' は P を P_0 を中心に $180°$ 回転した点である．

(2)の【別解】

$P=P''$ のとき，$AP=AP'$ で $\angle PAP'=60°$，$BP=BP'$ で $\angle P'BP=120°$ となる．

AB を共有するから $\triangle ABP$ と $\triangle ABP'$ は 3 辺が等しく合同である．

したがって，$\angle PAB=\dfrac{1}{2}\angle PAP'=30°$，$\angle PBA=\dfrac{1}{2}\angle PBP'=60°$．

よって，$BP:AB:AP=1:2:\sqrt{3}$．$AB=6$ より

$$\therefore\quad AP=\sqrt{\boxed{27}},\quad BP=\boxed{3}. \qquad \cdots(7),\ (8)$$

（注２） この当時はベクトルも行列も高校の範囲外だったので，上記のような解答になるであろう．座標，ベクトル，行列を使うなら次のようになる．複素数を使っても同様な計算になる．

(1) A を原点，AB を x 軸正方向とする座標系で $B(6,\ 0)$，$P(3,\ 0)$．

$60°$ 回転を表す行列は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$，$120°$ 回転を表す行列は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$．

$$\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BP'}=\overrightarrow{AP'}-\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad BP'=\frac{3}{2}\sqrt{(-3)^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{\boxed{27}}. \qquad \cdots(5)$$

$$\overrightarrow{BP''}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\ -4\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{P'P''}=\overrightarrow{BP''}-\overrightarrow{BP'}=\begin{pmatrix}0\\ -3\sqrt{3}\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-3\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\frac{9}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad P'P''=\frac{9}{2}\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=\boxed{9}. \qquad \cdots(6)$$

(2) $P(x,\ y)$ とおくと，

$$\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\sqrt{3}\,y\\ \sqrt{3}\,x+y\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BP'}=\overrightarrow{AP'}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\sqrt{3}\,y\\ \sqrt{3}\,x+y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\sqrt{3}\,y-12\\ \sqrt{3}\,x+y\end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BP''}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x-\sqrt{3}\,y-12\\ \sqrt{3}\,x+y\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}-x+3\\ -y-3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AP''}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP''}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x+3\\ -y-3\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+9\\ -y-3\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$P=P''$ より，$x=-x+9$，$y=-y-3\sqrt{3}$．よって，

$$P\left(\frac{9}{2},\ \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$AP=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\boxed{27}},\quad BP=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-6\right)^2+\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\boxed{3}. \qquad \cdots(7),\ (8)$$

Ⅲ

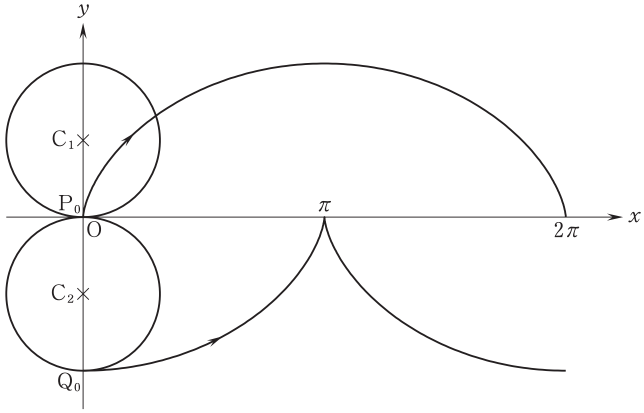
次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

時刻 $t=0$ のときに図のような位置にある半径1の二つの円 C_1, C_2 が x 軸にそってすべらないで x 軸の正の方向にころがる。二つの円 C_1, C_2 上の図に示された定点 P_0, Q_0 の時刻 t のときの位置をそれぞれ $P_t(x_1,\ y_1)$, $Q_t(x_2,\ y_2)$ とするとき

$x_1=t-\sin t$,　$y_1=1-\cos t$ および $x_2=t-\sin(t+a\pi)$,　$y_2=-1+\cos(t+a\pi)$　$(0\leqq a<2)$

となるとする。

このとき，a の値は $\boxed{(9)}$ で，$0\leqq t\leqq\pi$ の範囲における二点 P_t, Q_t の距離の最小値は $\boxed{(10)}$，最大値は $\sqrt{\boxed{(11)}}$ である。また，最大値をとるのは $t=\boxed{(12)}\pi$ のときである。



分　野

数学Ⅰ幾何：三角関数

【解答】

時刻 t において，2円の x 軸との接点を T とし，T を端点とする円 C_2 の直径の他端を S とすると，

$OT=\overset{\frown}{P_tT}=\overset{\frown}{Q_tS}=t$ である．

したがって，$x_1=t-\sin t$，$y_1=1-\cos t$，$x_2=t+\sin t$，$y_2=-1-\cos t$.

$\therefore$　$x_2=t-\sin(t+\pi)$，$y_2=-1+\cos(t+\pi)$.

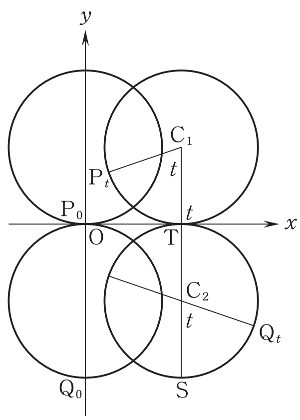
よって，a の値は $\boxed{1}$.　…(9)

$P_tQ_t{}^2=\{(t-\sin t)-(t+\sin t)\}^2+\{(1-\cos t)-(-1-\cos t)\}^2=4+4\sin^2 t$.

よって，P_tQ_t は $t=0$, π のとき最小値 $\boxed{2}$ をとる．　…(10)

最大値は $\sqrt{\boxed{8}}$ で，$0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で最大になるのは

$t=\boxed{\dfrac{1}{2}}\pi$ のとき．　…(11)，(12)



Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$\log_2 y=(\log_2 x)^3$ を満足する正の数 x，y に対して，$\dfrac{x^3}{y}$ は $1\leqq x\leqq 4$ の範囲で $x=\boxed{(13)}$，$y=\boxed{(14)}$ のとき最大となり，その最大値は $\boxed{(15)}$ である。また，この範囲で $\dfrac{x^3}{y}$ の最小値は $\boxed{(16)}$ である。

分　野

数学Ⅱ：対数関数，整式の微分

【解答】

$\log_2 x=t$ とおくと，$\log_2 y=t^3$．　$1\leqq x\leqq 4$ より，$0\leqq t\leqq 2$.

$\dfrac{x^3}{y}=k$ とおくと

$$\log_2 k=3\log_2 x-\log_2 y=3t-t^3.$$

$f(t)=3t-t^3$ とおくと，$f'(t)=3-3t^2$.

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	2	↘	-2

よって，$t=1$ つまり $x=\boxed{2}$，$y=\boxed{2}$ のとき，$f(t)$ は最大値 2 をとる．　…(13)，(14)

このとき，$\log_2 k=2$ だから，$k=\dfrac{x^3}{y}$ は最大値 $\boxed{4}$ をとる．　…(15)

また $f(t)$ の最小値は -2 だから，$k=\dfrac{x^3}{y}$ の最小値は $\boxed{\dfrac{1}{4}}$．　…(16)

V

次の $\boxed{}$ にあてはまるものは，下記のイロハニの中のどれであるか。イロハニの記号で答えよ。

二つの実数 a，b についての命題「どんな実数 x に対してもそれぞれ適当な実数 y をとれば $ax \neq by$ となる」が成り立たないために

(i)「どんな実数 x をとっても任意の実数 y に対して $ax=by$ となる」ことは $\boxed{(17)}$ である。

(ii)「どんな実数 x に対してもそれぞれ適当な実数 y をとれば $ax=by$ となる」ことは $\boxed{(18)}$ である。

(iii)「適当な実数 x をとればどんな実数 y に対しても $ax=by$ となる」ことは $\boxed{(19)}$ である。

(iv)「適当な実数 x をとれば適当な実数 y に対して $ax=by$ となる」ことは $\boxed{(20)}$ である。

イ　必要かつ十分な条件

ロ　十分であるが必要でない条件

ハ　必要であるが十分でない条件

ニ　必要でも十分でもない条件

分　野

数学 I 幾何：必要条件・十分条件，**数学 I 代数**：方程式

【解答】

与命題の否定は

「適当な実数 x をとれば任意の実数 y に対して $ax=by$ となる」　…(*)

これをみたす a，b の条件は $b=0$.

(i)　(i)の命題は任意の x，y に対して $ax=by$ となることだから，$a=b=0$.

よって，(i)は $\boxed{\text{十分であるが必要でない条件}}$ である.　…(17)＝ロ

(ii)　(ii)の命題が成り立つためには，任意の x に対して少なくとも 1 つ $ax=by$ が成り立つ y があればよいので，a，b についての条件は $b \neq 0$ または $a=b=0$.

よって，(ii)は $\boxed{\text{必要でも十分でもない条件}}$ である.　…(18)＝ニ

(iii)　(iii)の命題は，命題(*)に他ならない.

よって，(iii)は $\boxed{\text{必要かつ十分な条件}}$ である.　…(19)＝イ

(iv)　(iv)の命題が成り立つためには，$x=y=0$ でよいから，(iv)は恒真命題である.

よって，(iv)は $\boxed{\text{必要であるが十分でない条件}}$ である.　…(20)＝ハ

1963 年　2 次試験（文科）

第 1 問

直方体の一つの頂点 O から出る三つの辺を OA，OB，OC とし，O から最も遠い頂点を D とする。$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とするとき，OD の長さを a，b，c で表わせ。また，$a=5$，$b=3$ のとき c のとりうる値の範囲を求めよ。

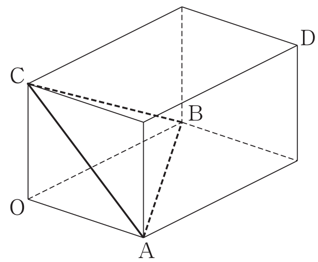
分　野

数学 I 幾何：立体図形

考え方

$OA=x$，$OB=y$，$OC=z$ とおいて，x，y，z を a，b，c で表せば，OD の長さも a，b，c で表せる．

【解答】



$OA=x$，$OB=y$，$OC=z$ とおくと，

$$a^2=y^2+z^2,\quad b^2=z^2+x^2,\quad c^2=x^2+y^2.$$

$OD^2=x^2+y^2+z^2.$

$$a^2+b^2+c^2=2(x^2+y^2+z^2).$$

よって，

$$OD=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}. \qquad \cdots(答)$$

$$a^2+b^2-c^2=(y^2+z^2)+(z^2+x^2)-(x^2+y^2)=2z^2.$$

よって，$z^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$．同様に

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}.$$

$a=5$，$b=3$ のとき，

$$x^2=\frac{c^2-16}{2}>0,\quad y^2=\frac{c^2+16}{2}>0,\quad z^2=\frac{34-c^2}{2}>0.$$

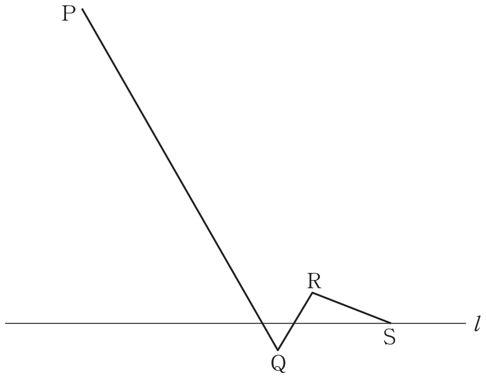
よって，

$$4<c<\sqrt{34}. \qquad \cdots(答)$$

（注）　△ABC が鋭角三角形である条件 $|a^2-b^2|<c^2<a^2+b^2$ が a，b，c の条件．

第2問

P は平面上の定点，l はこの平面上の定直線で，P から l までの距離は $\sqrt{3}+1$ である。また，Q, R，S はこの平面上の動点で，S は l 上にあるものとする。PQ，QR，RS の長さはそれぞれ一定で，$2+\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}-1$ に等しい。このとき R の動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



分　野

数学 I 幾何：平面図形，面積

考え方

折れ線 PQR と線分 RS に分けて考える．折れ線 PQR の端点として R が存在しうる範囲と，S が l 上にあるとき線分 RS の端点として R の存在しうる範囲を求め，その共通部分が実際に R が存在しうる範囲である．

【解答】

$PQ=2+\sqrt{2}$ で $QR=2-\sqrt{2}$ だから，線分 PR の長さは

$$PQ-QR=2\sqrt{2}\leqq PR\leqq PQ+QR=4.$$

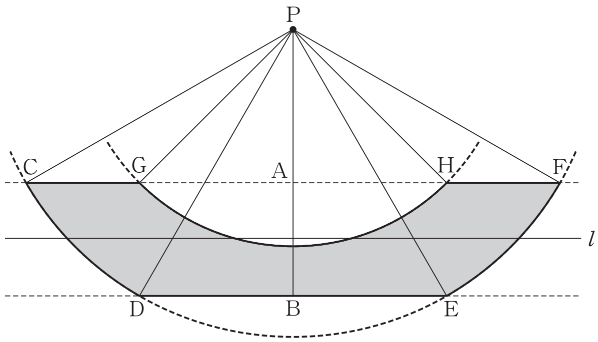
よって，R は P を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円と半径 4 の円の間の部分に存在する．

一方，S は l 上を自由に動き，RS の長さは $\sqrt{3}-1$ だから，R は l からの距離が $\sqrt{3}-1$ の 2 直線の間の部分に存在する．

P から 2 つの直線までの距離は $(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{3}$，$(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)=2$ である．

点 R の存在範囲は下図斜線部．図のように A，B，C，D，E，F，G，H をとる．ただし，

$$PA=2,\quad PB=2\sqrt{3},\quad PC=PD=PE=PF=4,\quad PG=PH=2\sqrt{2}.$$



$PB=2\sqrt{3}$，$PD=PE=4$ から，$\angle DPB=\angle BPE=30°$.

$PA=2$，$PG=PH=2\sqrt{2}$ から，$\angle GPA=\angle APH=45°$.

$PA=2$，$PC=PF=4$ から，$\angle CPA=\angle APF=60°$.

求める面積は

$$扇形\,\mathrm{PCD}+\triangle\mathrm{PDE}+扇形\,\mathrm{PEF}-\triangle\mathrm{PCG}-扇形\,\mathrm{PGH}-\triangle\mathrm{PFH}$$
$$=2\,扇形\,\mathrm{PCD}+\triangle\mathrm{PDE}-2\triangle\mathrm{PCG}-扇形\,\mathrm{PGH}.$$

$$扇形\,\mathrm{PCD}=\pi\cdot 4^2\times\frac{30^\circ}{360^\circ}=\frac{4}{3}\pi.$$

$$\triangle\mathrm{PDE}=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}.$$

$$\triangle\mathrm{PCG}=\frac{1}{2}(\mathrm{AC}-\mathrm{AG})\mathrm{PA}=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2)2=2\sqrt{3}-2.$$

$$扇形\,\mathrm{PGH}=\pi\cdot(2\sqrt{2})^2\times\frac{90^\circ}{360^\circ}=2\pi.$$

よって，求める面積は

$$2\times\frac{4}{3}\pi+4\sqrt{3}-2\times(2\sqrt{3}-2)-2\pi=\frac{2}{3}\pi+4. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

$f(x)=\dfrac{4x-2}{5-x}$ $(x\neq 5)$ とするとき

(1) $y=f(x)-x$ のグラフをかけ。

(2) $f(x)-x$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)>x$ となる x の範囲を求めよ。

分 野

数学Ⅱ：分数関数，分数方程式

考え方

グラフの合成を利用する．相加平均・相乗平均の関係を使って最大最小を求める．

【解答】

(1) $f(x)=-\dfrac{4(x-5)+18}{x-5}=-4-\dfrac{18}{x-5}.$

$$f(x)-x=-x-4-\frac{18}{x-5}.$$

$x>5$ のとき，相加平均・相乗平均の関係から

$$f(x)-x=-(x-5)-9-\frac{18}{x-5}\leqq-9-2\sqrt{(x-5)\frac{18}{x-5}}=-9-6\sqrt{2}.$$

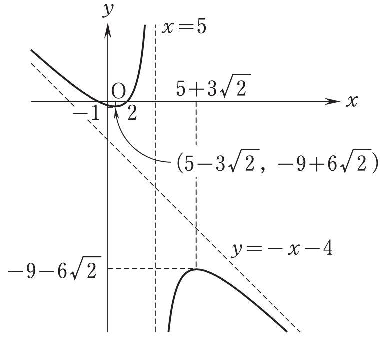
等号は $x-5=3\sqrt{2}$ すなわち $x=5+3\sqrt{2}$ のときに成り立つ．

$x<5$ のとき，

$$f(x)-x=(5-x)-9+\frac{18}{5-x}$$
$$\geqq-9+2\sqrt{(5-x)\frac{18}{5-x}}=-9+6\sqrt{2}.$$

等号は $5-x=3\sqrt{2}$ すなわち $x=5-3\sqrt{2}$ のときに成り立つ．

$y=f(x)-x$ のグラフは $y=-x-4$ のグラフと $y=-\dfrac{18}{x-5}$ の合成になる．図示すると右図．



⑵　グラフより，

$$f(x)-x \leqq -9-6\sqrt{2},\quad -9+6\sqrt{2} \leqq f(x)-x. \qquad \cdots(答)$$

⑶　$f(x)=x$ となるのは

$$\frac{4x-2}{5-x}=x.\quad 4x-2=x(5-x).\quad x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$$

から，$x=-1$，$x=2$.

　グラフと比較して，$f(x)-x>0$ となるのは

$$x<-1,\quad 2<x<5. \qquad \cdots(答)$$

（注）　当時の教科書ではグラフの合成が扱われていた．グラフの合成の仕方については **1991 年　文科第 3 問**（注）を参照．

　1 次関数と 1 次分数関数の合成は極大値，極小値をもつ場合ともたない場合がある．微分法を用いないと増減は正確には表現できない．しかし，相加平均・相乗平均の関係や判別式を用いると y のとりうる値の範囲が定まる．また，$y=k$ とおいた 2 次方程式の解の個数からグラフの概形はつかめる．

　⑵ の解答は，$y=k$ とおいて，

$$k=\frac{4x-2}{5-x}-x \iff x^2+(k-1)x-2-5k=0.\quad （これは\ x=5\ を解としない）$$

$$（判別式）=(k-1)^2-4(-2-5k)=k^2+18k+9 \geqq 0 \quad \therefore\quad k \leqq -9-6\sqrt{2},\quad -9+6\sqrt{2} \leqq k$$

として求めてもよい．

　微分法を使った次のような方法の方が正確であるが，商の微分を使うので文系には無理である．

　$F(x)=f(x)-x=\dfrac{4x-2}{5-x}-x$ とおく．

$$F'(x)=\frac{(4x-2)'(5-x)-(4x-2)(5-x)'}{(5-x)^2}-1=\frac{18}{(5-x)^2}-1=-\frac{(x-5)^2-18}{(x-5)^2}.$$

x	$\cdots$	$5-3\sqrt{2}$	$\cdots$	5	$\cdots$	$5+3\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗	$\times$	↗		↘

　$x=5\pm3\sqrt{2}$ のとき，

$$F(x)=-\frac{(4x-2)(x-5)}{(x-5)^2}-x=-\frac{(18\pm12\sqrt{2})(\pm3\sqrt{2})}{18}-5\mp3\sqrt{2}=-9\mp6\sqrt{2}.\quad （複号同順）$$

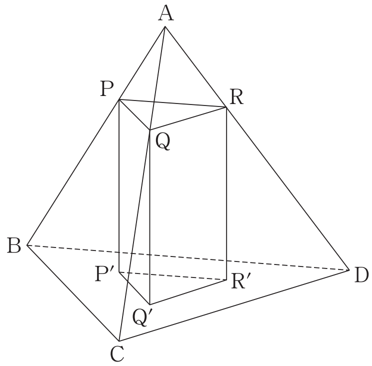
　これと，$F(x)=-x-4-\dfrac{18}{x-5}$ から $x=5$，$y=-x-4$ を漸近線としてもつことがわかる．これから $F(x)$ の増減がわかり，グラフが描ける．

第 4 問

一辺の長さ a の正四面体 ABCD の辺 AB，AC，AD の上に A から等距離にそれぞれ点 P，Q，R をとり，P，Q，R から面 BCD に下した垂線の足をそれぞれ P′，Q′，R′ とする。

(1) 三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積が最大になるときの AP の長さを求めよ。

(2) この三角柱の体積の最大値 V_0 と正四面体 ABCD の体積 V の比 $\dfrac{V_0}{V}$ を求めよ。



分　野

数学 I 幾何：立体図形，**数学 II**：整式の微分

考え方

底面積と高さの比がわかれば三角柱の体積がわかる．

【解答】

(1) △BCD の重心を G とすると，$\mathrm{BG}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$．AG⊥(面 BCD) だから，

$$\mathrm{AG}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BG}^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{3}a^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

AP$=x$ とおくと，AP=AQ=AR から四面体 APQR は四面体 ABCD に相似な正四面体である．よって，△PQR は 1 辺の長さが x の正三角形で，その面積は $\dfrac{1}{2}x^2\sin 60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$．

一方，三角柱 PQR-P′Q′R′ の高さと四面体 ABCD の高さの比は PB：AB に等しいから，$a-x : a$．よって，高さ $\mathrm{PP'}=\dfrac{a-x}{a}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}(a-x)$．

よって，三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}(a-x)=\frac{\sqrt{2}}{4}x^2(a-x).$$

$f(x)=x^2(a-x)$ とおくと，$f'(x)=2ax-3x^2=(2a-3x)x$．

x	0	…	$\frac{2}{3}a$	…	a
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗		↘	0

三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積が最大になるのは $f(x)$ が最大のときで，そのとき，

$$\mathrm{AP}=x=\frac{2}{3}a. \qquad \cdots(答)$$

(2) $\triangle$ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ だから，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積の最大値は

$$V_0=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2\left(a-\frac{2}{3}a\right)=\frac{\sqrt{2}}{27}a^3.$$

$$\therefore\quad \frac{V_0}{V}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{27}a^3}{\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3}=\frac{4}{9}.$$ …(答)

（注） 三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積を V_1 とし，正四面体 ABCD の高さを h，底面積を S，$x=ta$ とすると，$0<t<1$ で，三角柱 PQR-P′Q′R′ の高さは $(1-t)h$，底面積は t^2S である．したがって，三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積は，$V_1=Sht^2(1-t)$ である．

したがって，$0<t<1$ の範囲で $t^2(1-t)$ が最大のとき，三角柱 PQR-P′Q′R′ の体積は最大になる．

また，$t=\dfrac{2}{3}$ のときに最大になるから，$V_0=\dfrac{4}{27}Sh$.

$V=\dfrac{1}{3}Sh$ だから $\dfrac{V_0}{V}=\dfrac{4}{9}$.

S と h は具体的に計算しなくてもよい．

第 5 問

平面上の運動する点があり，その x 座標，y 座標が時刻 t の函数として

$$x=f(t)=vt\cos\alpha,\quad y=g(t)=vt\sin\alpha-5t^2\quad\left(v>0,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

で与えられている。ある時刻 t_0 に $x=10$，$y=0$ となるとして，その時刻 t_0 における x，y の変化率の 2 乗の和 $(f'(t_0))^2+(g'(t_0))^2$ を α の式で表わせ。また，この式の値を最も小さくするような α の値を求めよ。

分 野

数学 II：速度・加速度

考え方

等加速度運動の問題．結局 $f(t_0)=10$，$g(t_0)=0$ から v は α の関数．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$x=f(t_0)=vt_0\cos\alpha=10,\quad y=g(t_0)=vt_0\sin\alpha-5{t_0}^2=0$$

であるから，$t_0\neq 0$ で $t_0=\dfrac{v\sin\alpha}{5}$.

$$f'(t_0)=v\cos\alpha,\quad g'(t_0)=v\sin\alpha-10t_0.$$

$$\begin{aligned}\{f'(t_0)\}^2+\{g'(t_0)\}^2&=v^2\cos^2\alpha+(v\sin\alpha-10t_0)^2\\&=v^2\cos^2\alpha+(v\sin\alpha-2v\sin\alpha)^2=v^2.\end{aligned}$$

$$vt_0\cos\alpha=\frac{v^2}{5}\sin\alpha\cos\alpha=10$$

から，

$$\{f'(t_0)\}^2+\{g'(t_0)\}^2=v^2=\frac{100}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{100}{\sin 2\alpha}.\qquad\cdots(\text{答})$$

これが最小になるのは $\sin 2\alpha=1$ のとき．このとき，$2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$．よって，

$$\alpha=\frac{\pi}{4}.\qquad\cdots(\text{答})$$

（注） y 軸に平行で下向きの定加速度 10 のもとで球を投げるとき，距離 10 まで到達するのにできるだけ小さな初速で投げるなら水平面と $\dfrac{\pi}{4}$ の角度で投げればよい．このことを示す問題．

1963 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

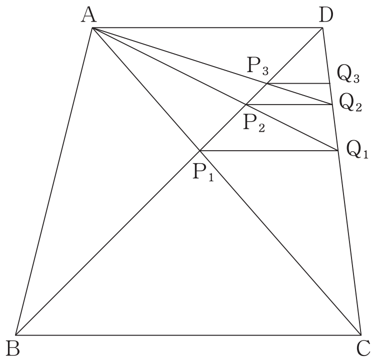
第 3 問

$AD=a$，$BC=b$，$AD /\!/ BC$ なる台形がある。対角線 AC，BD の交点を P_1 とし，CD 上に点 Q_1 を $P_1Q_1 /\!/ AD$ となるようにとる。次に，AQ_1，DP_1 の交点を P_2 とし，CD 上に点 Q_2 を $P_2Q_2 /\!/ AD$ となるようにとる。次に，AQ_2，DP_2 の交点を P_3 とし，CD 上に点 Q_3 を $P_3Q_3 /\!/ AD$ となるようにとる。以下同様にくりかえして n 回目にできる線分 P_nQ_n の長さを x_n とするとき

(1)　x_n を a，b，n で表わせ。

(2)　$\triangle DP_{n+1}Q_n$ の面積を F_n とするとき $\sum_{n=1}^{\infty} F_n$ を求めよ。

ただし，$\angle DBC=\beta$，$\angle DCB=\gamma$ とする。



分　野

数学 I 幾何：平面図形，**数学Ⅲ**：数列，数列の極限

考え方

$AD=a$，$BC=b$ と $P_1Q_1=x_1$ の関係がわかれば，a，x_n と x_{n+1} の関係は同様に求められる．

【解答】

(1)　$\triangle ADP_1$ と $\triangle CBP_1$ は角が等しい（対頂角と錯角）ことから相似である．その相似比は $AD : BC=a : b$ である．

したがって，$BD : DP_1=a+b : a$ である．$BC : P_1Q_1=a+b : a$ であるから

$$P_1Q_1=x_1=\frac{a}{a+b}b=\frac{ab}{a+b}$$

である．

同様に

$$x_2=\frac{ax_1}{a+x_1},\quad x_3=\frac{ax_2}{a+x_2},\quad \cdots,\quad x_{n+1}=\frac{ax_n}{a+x_n}.$$

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{a+x_n}{ax_n}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}$$

より，数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ は公差 $\frac{1}{a}$ の等差数列．

$$\therefore\quad \frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{n-1}{a}=\frac{n}{a}+\frac{1}{b}.$$

$$\therefore\quad x_n=\frac{ab}{a+nb}.$$ …(答)

(2) $\angle\mathrm{BDC}=D$，$\triangle\mathrm{DBC}=S$ とおくと，正弦定理から

$$\frac{b}{\sin D}=\frac{\mathrm{CD}}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{BD}}{\sin\gamma}.$$

$$\sin D=\sin(\beta+\gamma).\quad \therefore\quad \mathrm{CD}=\frac{b\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)},\quad \mathrm{BD}=\frac{b\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\sin D=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

$$\mathrm{DP}_{n+1}=\frac{x_{n+1}}{b}\mathrm{BD}=\frac{a}{a+(n+1)b}\mathrm{BD}.$$

$$\mathrm{DQ}_n=\frac{x_n}{b}\mathrm{CD}=\frac{a}{a+nb}\mathrm{CD}.$$

$$F_n=\triangle\mathrm{DP}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\frac{1}{2}\mathrm{DP}_{n+1}\cdot\mathrm{DQ}_n\sin D$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a+(n+1)b}\mathrm{BD}\cdot\frac{a}{a+nb}\mathrm{CD}\cdot\sin D=\frac{a^2}{(a+nb)\{a+(n+1)b\}}S.$$

$$\frac{1}{a+nb}-\frac{1}{a+(n+1)b}=\frac{b}{(a+nb)\{a+(n+1)b\}}$$

から

$$F_n=\frac{a^2S}{b}\left(\frac{1}{a+nb}-\frac{1}{a+(n+1)b}\right).$$

よって，N を自然数とするとき，

$$\sum_{n=1}^{N}F_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{a^2S}{b}\left(\frac{1}{a+nb}-\frac{1}{a+(n+1)b}\right)=\frac{a^2S}{b}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+(N+1)b}\right).$$

よって，

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{\mathrm{n}}=\lim_{N\to\infty}\frac{a^2S}{b}\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+(N+1)b}\right)=\frac{a^2S}{b}\cdot\frac{1}{a+b}$$

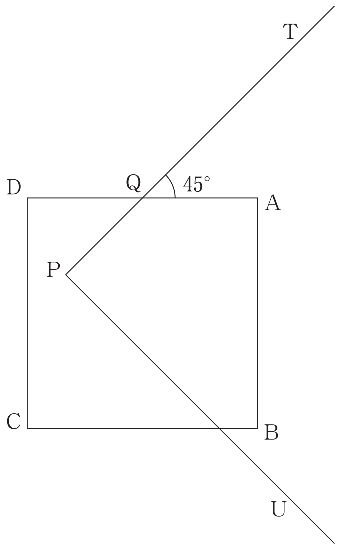
$$=\frac{a^2}{b(a+b)}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{a^2b\sin\beta\sin\gamma}{2(a+b)\sin(\beta+\gamma)}.$$ …(答)

第４問

（文科　第４問と同じ）

第5問

一辺の長さ a の正方形ABCDの内部の動点Pで直交する折線TPUがある（図参照）。PTは辺ADとQで交わり，$\angle$AQTは45°にたもたれている。正方形ABCDの面積を2等分しつつ折線TPUが動くとき，線分PQの通過する部分の面積を求めよ。



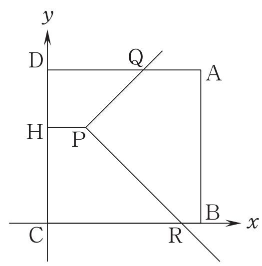
分　野

数学I幾何：平面図形，**数学III**：整式の積分

考え方

Cを原点とする座標をとって考える．面積は積分を使う．

【解答】



Cを原点，CBを x 軸，CDを y 軸にとる．Pの座標を $(p,\ q)$ とおく．
また，PUとBCの交点をR，PからCDへ下した垂線の足をHとする．

Pを通り，傾き1の直線 $y=x-p+q$ と AD：$y=a$ の交点Qの座標は $(p-q+a,\ a)$．

Pを通り，傾き -1 の直線 $y=-x+p+q$ と BC：$y=0$ の交点Rの座標は $(p+q,\ 0)$．

よって，$\mathrm{CR}=p+q$，$\mathrm{DQ}=p-q+a$，$\mathrm{PH}=p$，$\mathrm{CH}=q$，$\mathrm{HD}=a-q$．

よって，

$$\text{台形 PHCR}=\frac{1}{2}(\mathrm{PH}+\mathrm{CR})\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\{p+(p+q)\}q=\frac{1}{2}(2p+q)q.$$

$$\text{台形 PQDH}=\frac{1}{2}(\mathrm{PH}+\mathrm{DQ})\mathrm{DH}=\frac{1}{2}\{p+(p-q+a)\}(a-q)=\frac{1}{2}(2p-q+a)(a-q).$$

正方形の面積を2等分するとき，

$$\frac{1}{2}(2p+q)q+\frac{1}{2}(2p-q+a)(a-q)=\frac{1}{2}a^2.$$

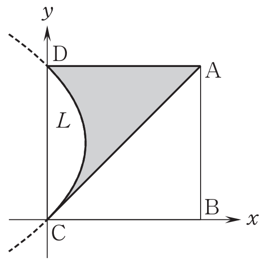
$$\therefore\quad p=-\frac{q^2}{a}+q.$$

よって，Pは放物線

$$x=-\frac{y^2}{a}+y=-\frac{1}{a}\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a}{4}\quad (0\leqq y\leqq a)$$

を動く．この放物線を L とする．

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{2y}{a}+1$$



だから，C における接線が直線 AC である．よって，PQ の通過範囲は L と AC と AD で囲まれた図形．

L と CD の囲む部分の面積は

$$\int_0^a\left(-\frac{y^2}{a}+y\right)dy=\frac{a^2}{6}.$$

△CAD の面積が $\frac{a^2}{2}$ だから，求める面積は

$$\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{6}=\frac{a^2}{3}.$$ …(答)

第 6 問

n を 2 より大きい正の整数とする。曲線 $y=x^n$ …① 上で，x 座標が 0，1，2 である点をそれぞれ O，A，B とし，O，A，B を通り y 軸に平行な軸をもつ放物線 $y=f(x)$ …② をえがく。曲線①および放物線②の O，A の間にある部分の囲む面積を S_1，A，B の間にある部分の囲む面積を S_2 とするとき，$S_1=S_2$ となるためには，n はどのような数でなければならないか。

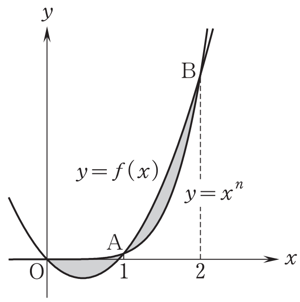
分　野

数学Ⅱ：整式の微分，**数学Ⅲ**：整式の積分

考え方

2 つの囲む部分で 2 つの曲線の上下が逆転するなら，通して積分して 0 と考えることができる．

【解答】



O(0, 0)，A(1, 1)，B(2, 2^n) から，$f(x)=ax(x-1)+x$ とかけて，$f(2)=2^n$ より $2^n=2a+2$．よって，$a=2^{n-1}-1$．よって，

$$f(x)=(2^{n-1}-1)x(x-1)+x=(2^{n-1}-1)x^2-(2^{n-1}-2)x.$$

$x^n-f(x)=x^n-(2^{n-1}-1)x(x-1)-x=\{x^{n-1}-1-(2^{n-1}-1)(x-1)\}x.$

$g(x)=x^{n-1}-1-(2^{n-1}-1)(x-1)$ とおき，その正負を考える．

$g(1)=g(2)=0$ で，

$$g'(x)=(n-1)x^{n-2}-(2^{n-1}-1).$$

$g'(x)=0$ となるのは $x=\sqrt[n-2]{\dfrac{2^{n-1}-1}{n-1}}$ のみ．

$g'(1)=n-2^{n-1}$，$2^{n-1}=1+(n-1)+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+\cdots>n$ だから，$g'(1)<0$，$g'(2)=(n-1)2^{n-2}-(2^{n-1}-1)=(n-3)2^{n-2}+1>0$ だから，$g(x)>0$ $(x<1,\ x>2)$，$g(x)<0$ $(1<x<2)$．

よって $x^n-f(x)>0$ $(0<x<1)$，$x^n-f(x)<0$ $(1<x<2)$．

$$S_1=\int_0^1\{x^n-f(x)\}\,dx,\quad S_2=\int_1^2\{f(x)-x^n\}\,dx.$$

$S_1=S_2$ のとき，

$$S_1-S_2=\int_0^1\{x^n-f(x)\}\,dx-\int_1^2\{f(x)-x^n\}\,dx=\int_0^2\{x^n-f(x)\}\,dx=0.$$

$$\begin{aligned}\int_0^2\{x^n-(2^{n-1}-1)x^2+(2^{n-1}-2)x\}\,dx&=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}-(2^{n-1}-1)\frac{x^3}{3}+(2^{n-1}-2)\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\&=\frac{2^{n+1}}{n+1}-(2^{n-1}-1)\frac{2^3}{3}+(2^{n-1}-2)\frac{2^2}{2}\\&=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{6}\right)2^{n+1}-\frac{4}{3}=0.\end{aligned}$$

少なくとも $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{6}>0$ でなければならないから，$3\leqq n\leqq 4$．

$n=3$ のとき，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{6}\right)2^{n+1}-\dfrac{4}{3}=\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right)2^4-\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{12}-\dfrac{4}{3}=0.$

$n=4$ のとき，$\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{6}\right)2^{n+1}-\dfrac{4}{3}=\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}\right)2^5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{30}-\dfrac{4}{3}\neq 0.$

$$\therefore\quad n=3.$$ …(答)

1964 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

函数 $f(x)=x^3+6x^2-15x+1$ の値は $x=\boxed{(1)}$ のとき極大になり，$x=\boxed{(2)}$ のとき極小になる。方程式 $f(x)=a$ が 3 個の相異なる実根をもつような a の値の範囲は $\boxed{(3)}<a<\boxed{(4)}$ である。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

【解答】

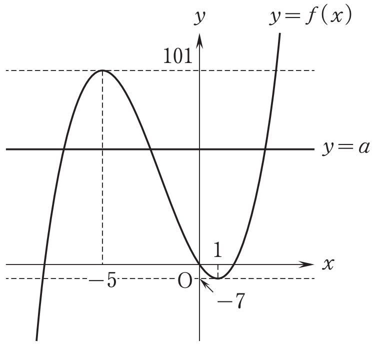
問題文の「函数，実根」はそれぞれ「関数，実数解」の当時の表記である．

$$f'(x)=3x^2+12x-15=3(x+5)(x-1).$$

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=\boxed{-5}$ のとき極大になり，$x=\boxed{1}$ のとき極小になる．　…(1)，(2)

$f(-5)=101$，$f(1)=-7$ だから，$y=f(x)$ のグラフは下図のようになる．



方程式 $f(x)=a$ が相異なる 3 実解（実根）をもつのは直線 $y=a$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるとき．

よって

$$\boxed{-7}<a<\boxed{101}.$$　…(3)，(4)

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

△ABC において

(i) ∠BAC＝120°

(ii) AB＞AC

(iii) BC＝$\sqrt{21}$

(iv) △ABC の面積＝$\sqrt{3}$

であるならば，AB＝$\boxed{(5)}$，AC＝$\boxed{(6)}$ であり，この三角形の内接円の半径の長さは

$\dfrac{\sqrt{\boxed{(7)}}\left(\boxed{(8)}-\sqrt{21}\right)}{2}$ に等しい。

分　野

数学 I 幾何：三角比

【解答】

BC＝a，CA＝b，AB＝c とおく．(iii) から $a=\sqrt{21}$.

余弦定理と(i)から，

$$a^2=21=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ=b^2+c^2+bc. \qquad \cdots①$$

(iv) から面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}bc\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3}. \quad \therefore \quad bc=4. \qquad \cdots②$$

① より

$$21=(b+c)^2-bc=(b+c)^2-4. \quad \therefore \quad (b+c)^2=25. \quad \therefore \quad b+c=5.$$

これと ② から，b，c は方程式 $x^2-5x+4=0$ の 2 解．(ii) から $c>b$．よって

$$\mathrm{AB}=c=\boxed{4}, \quad \mathrm{AC}=b=\boxed{1}. \qquad \cdots(5),\ (6)$$

内接円の半径を r とおくと，

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}+1+4}=\frac{\sqrt{\boxed{3}}\left(\boxed{5}-\sqrt{21}\right)}{2}. \qquad \cdots(7),\ (8)$$

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

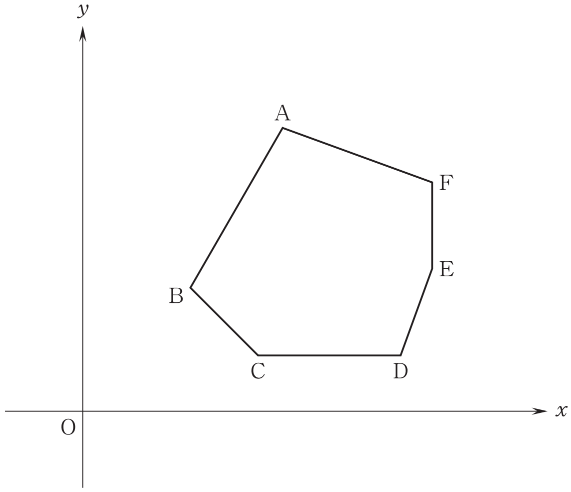
平面上に六角形 ABCDEF があって，$\angle A=100^\circ$ であり，辺 AB，BC，CD，DE，EF，FA はそれぞれ方程式

$$\sqrt{3}\,x-y=1,\quad x+y=4,\quad y=1,\quad \alpha x-y=14,\quad x=6,\quad x+\alpha y=\beta$$

で表わされる直線上にある。ただし，α，β は正の定数である。このとき

$\angle B=\boxed{(9)}^\circ$，　$\angle C=\boxed{(10)}^\circ$，　$\angle D=\boxed{(11)}^\circ$，　$\angle E=\boxed{(12)}^\circ$，　$\angle F=\boxed{(13)}^\circ$

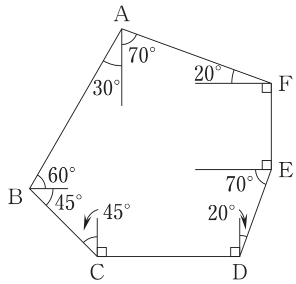
である。



分　野

数学Ⅱ：直線の方程式，**数学Ⅰ幾何**：三角関数

【解答】



AB：$\sqrt{3}\,x-y=1$ だから AB の傾きは $\sqrt{3}$，AB と x 軸のなす角は 60°.

BC：$x+y=4$ だから BC の傾きは -1，BC と x 軸のなす角は 45°.

よって $\angle B=60^\circ+45^\circ=\boxed{105}^\circ$. …(9)

BC と y 軸のなす角は 45°，CD：$y=1$ は x 軸に平行だから，

$\angle C=45^\circ+90^\circ=\boxed{135}^\circ$. …(10)

$\angle A=100^\circ$ で AB と y 軸のなす角が 30° だから FA と y 軸のなす角は $100^\circ-30^\circ=70^\circ$.

一方，FA：$x+\alpha y=\beta$ の傾きは $-\dfrac{1}{\alpha}$ で x 軸となす角が 20° だから，$\dfrac{1}{\alpha}=\tan 20^\circ$．よって，

$\alpha=\dfrac{1}{\tan 20^\circ}=\tan 70^\circ$.

DE：$\alpha x-y=14$ の傾きは $\alpha=\tan 70^\circ$，DE と x 軸のなす角は 70°，DE と y 軸のなす角は 20°.

よって $\angle D=90^\circ+20^\circ=\boxed{110}^\circ$. …(11)

EF：$x=6$ は y 軸に平行だから，$\angle E=90^\circ+70^\circ=\boxed{160}^\circ$. …(12)

$\angle F=90^\circ+20^\circ=\boxed{110}^\circ$. …(13)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$f(x)$ は x の整式，a は定数で，次の(i)，(ii)，(iii)が成り立つものとする。

(i)　$f(0)=-4$

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x+a}=2$

(iii)　$x\to2$ のとき $\dfrac{f(x)}{x+a}$ は有限な 0 でない極限値 b をもつ。

このとき，$f(x)$ の次数は $\boxed{(14)}$，$f(x)$ の x の係数は $\boxed{(15)}$，$a=\boxed{(16)}$，$b=\boxed{(17)}$ である。

分　野

数学Ⅱ：関数の極限

【解答】

$f(x)$ の次数が 2 以上なら，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+a}=\pm\infty$ となり(ii)に反する．

$f(x)$ が定数だとすると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x+a}=0$ となり(ii)に反する．

したがって，$f(x)$ の次数は $\boxed{1}$ である．　…(14)

よって，$f(x)=mx+n$ とおける．(i)より，$f(0)=n=-4$．

(ii)から，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{mx+n}{x+a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{m+\frac{n}{x}}{1+\frac{a}{x}}=m=2$.

x の係数は $\boxed{2}$.　…(15)

$f(x)=2x-4$．よって，

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+a}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{x+a}.$$

$a\neq-2$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+a}=0$ となり(iii)に反する．

したがって，$a=\boxed{-2}$.　…(16)

よって，

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x+a}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)}{x-2}=b=\boxed{2}.\quad\cdots(17)$$

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

命題(A)が成り立つような a の最小値は $\boxed{(18)}$,

命題(B)が成り立つような b の最大値は $\boxed{(19)}$,

命題(C)が成り立つような c の最小値は $\boxed{(20)}$

である。

(A)　$3x+4y \geqq a$ ならば，必ず $x^2+y^2 \geqq 1$ が成り立つ。

(B)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+4y \leqq b$ ならば，必ず $x^2+y^2 \leqq 1$ が成り立つ。

(C)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+4y \geqq c$ ならば，必ず $x+y \geqq 1$ が成り立つ。

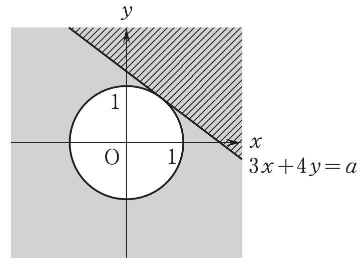
分　野

数学Ⅱ：命題，不等式と領域

【解答】

(A)　$3x+4y \geqq a$ は直線 $3x+4y=a$（傾き負）より右上側．$x^2+y^2 \geqq 1$ は単位円の外側．

求める条件は $3x+4y \geqq a$ の範囲が $x^2+y^2 \geqq 1$ の範囲に含まれることである．

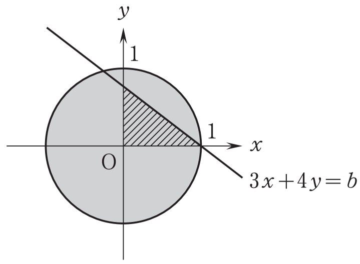


直線 $3x+4y=a$ が $x^2+y^2=1$ に接するのは $\dfrac{|a|}{5}=1$ のとき．

そのうち円の右上側で接するのは $a=5$ のとき．$3x+4y=a$ がそれより右上側にあるとき条件をみたす．

よって，命題(A)が成り立つような a の最小値は $\boxed{5}$．　…(18)

(B)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+4y \leqq b$ は $b>0$ のとき，3 点 $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{b}{4}\right)$ を頂点とする三角形．$x^2+y^2 \leqq 1$ は単位円の内側．

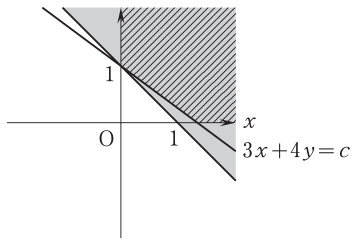


求める条件は三角形が $x^2+y^2 \leqq 1$ の範囲に含まれることであり，それは，三角形の 3 頂点が $x^2+y^2 \leqq 1$ の範囲に含まれることである．

$(0,\ 0)$ は常に単位円の内側にあり，$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$ が単位円の内側にある条件は $b \leqq 3$，$\left(0,\ \dfrac{b}{4}\right)$ が単位円の内側にある条件は $b \leqq 4$.

よって，命題(B)が成り立つような b の最大値は $\boxed{3}$．　…(19)

(C)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+4y \geqq c$ は $c \leqq 0$ のときは第 1 象限とその境界であり，$c>0$ のときは x 軸の $x \geqq \dfrac{c}{3}$ 部分，2 点 $\left(\dfrac{c}{3},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{c}{4}\right)$ を両端とする線分，y 軸の $y \geqq \dfrac{c}{4}$ 部分を境界としそれより右上部分．$x+y \geqq 1$ は $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を通る直線の右上部分．



求める条件は上の範囲が $x+y \geqq 1$ に含まれることであり，それは 2 点 $\left(\dfrac{c}{3},\ 0\right)$，$\left(0,\ \dfrac{c}{4}\right)$ が $x+y \geqq 1$ をみたすことである．

$\left(\dfrac{c}{3},\ 0\right)$ が $x+y \geqq 1$ をみたす条件は $c \geqq 3$，$\left(0,\ \dfrac{c}{4}\right)$ が $x+y \geqq 1$ をみたす条件は $c \geqq 4$.

よって，命題(C)が成り立つような c の最小値は $\boxed{4}$．　…(20)

1964 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

函数 $f(x)=|x-1|+|x-2|+|x-a|$ が $x=a$ で最小値をとるために必要十分な条件は $\boxed{(1)} \leqq a \leqq \boxed{(2)}$ である。このときの $f(x)$ の最小値は $\boxed{(3)}$，$f(0)+f(3)$ の値は $\boxed{(4)}$ である。

分　野

数学 I 代数：絶対値を含む関数

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

関数 $g(x)=|x-\alpha|+|x-\beta|+|x-\gamma|$ $(\alpha \leqq \beta \leqq \gamma)$ のグラフは $x \leqq \alpha$ で傾き -3，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ で傾き -1，$\beta \leqq x \leqq \gamma$ で傾き 1，$x \geqq \gamma$ で傾き 3 の折れ線になる．したがって $x=\beta$ すなわち 3 つの折れ目のまん中の値で最小になる．

よって，$f(x)$ が $x=a$ で最小になるのは $\boxed{1} \leqq a \leqq \boxed{2}$ のとき．…(1)，(2)

このときの最小値は $f(a)=|a-1|+|a-2|=(a-1)+(2-a)=\boxed{1}$．…(3)

$f(0)=|0-1|+|0-a|+|0-2|=1+a+2=3+a$．

$f(3)=|3-1|+|3-a|+|3-2|=(3-1)+(3-a)+(3-2)=6-a$．

よって，$f(0)+f(3)=(3+a)+(6-a)=\boxed{9}$．…(4)

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$\triangle$ABC の重心 G が原点にあり，A，B の座標がそれぞれ $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ にあるとする。このとき C の y 座標は $\boxed{(5)}$ である。

G を中心として，$\triangle$ABC を正の向きに 60° 回転したとき，C のうつる点を C′ とすれば，C′ の y 座標は $\boxed{(6)}$ となる。

もとの $\triangle$ABC の外心の y 座標は $\boxed{(7)}$ であり，$\triangle$ABC の面積は $\sqrt{\boxed{(8)}}$ である。

分　野

数学 II：平面座標

【解答】

点 C の座標を $(c,\ d)$ とすると，原点が重心だから，

$$\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+c=0, \quad 0+1+d=0.$$

よって，C の y 座標は $d=\boxed{-1}$．…(5)

$C(-\sqrt{3},\ -1)=(2\cos 210^\circ,\ 2\sin 210^\circ)$ だから，これを原点 G を中心として正の向きに 60° 回転した点 C′ の座標は $(2\cos 270^\circ,\ 2\sin 270^\circ)=(0,\ -2)$．

よって，C′ の y 座標は $\boxed{-2}$．…(6)

$\triangle$ABC の外心の座標を $(e,\ f)$ とおくと，

$$\left(e-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+f^2=\left(e-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(f-1)^2=(e+\sqrt{3})^2+(f+1)^2.$$

$$\therefore\quad -\frac{4}{\sqrt{3}}e+\frac{4}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}e-2f+\frac{4}{3}=2\sqrt{3}\,e+2f+4.$$

$$\therefore\quad f=\frac{1}{\sqrt{3}}e,\quad f=-\frac{5}{\sqrt{3}}e-\frac{4}{3}.$$

$$\therefore\quad e=-\frac{2}{9}\sqrt{3},\quad f=\boxed{-\frac{2}{9}}. \qquad \cdots(7)$$

$\triangle$GAB の面積は $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で G は重心だから，$\triangle ABC=3\triangle GAB=\sqrt{\boxed{3}}$. …(8)

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x$ は $x=\boxed{(9)}\pi$ のとき最大値 $\boxed{(10)}$ をとり，$x=\boxed{(11)}\pi$ のとき最小値 $\boxed{(12)}$ をとる。

分　野

数学Ⅱ：三角関数，倍角公式

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{x}{2}$．$\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$ から

$$f(x)=2\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}+1=-2\left(\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}.$$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ から $-1\leqq\cos\frac{x}{2}\leqq 1$.

$f(x)$ が最大になるのは $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$ のとき，すなわち $x=\boxed{\frac{2}{3}}\pi$ のときで，最大値は $\boxed{\frac{3}{2}}$.

…(9)，(10)

最小になるのは $\cos\frac{x}{2}=-1$ のとき，すなわち $x=\boxed{2}\pi$ のときで，最小値は，$\boxed{-3}$. …(11)，(12)

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

図の 2 点 A，B の距離は l である。点 A のまわりに毎秒 $\frac{\pi}{6}$ の角速度で正の向きに回転する半直線 AX と，点 B のまわりに毎秒 $\frac{\pi}{12}$ の角速度で負の向きに回転する半直線 BY とがある。時刻 $t=0$ のとき，これらの半直線はそれぞれ AB および BA の位置にあり，それから t_0 秒経過したとき，AX，BY がはじめて平行になるとすれば，

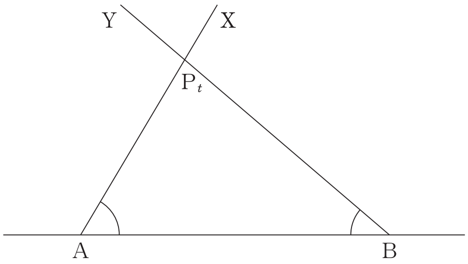
$$t_0=\boxed{(13)}$$

である。

$0<t<t_0$ なる t に対しては，AX，BY は 1 点 P_t で交わる。A，P_t の距離を $f(t)$ とすれば

$$f(t)=\frac{l}{\boxed{(14)}\cos\left(\boxed{(15)}\pi t\right)+\boxed{(16)}}$$

である。ただし，$\boxed{(15)}>0$ とする。



分 野

数学 I 幾何：三角比

【解答】

$\angle BAX=\dfrac{\pi}{6}t$，$\angle ABY=\dfrac{\pi}{12}t$.

$t=t_0$ のとき，

$$\angle BAX+\angle ABY=\pi. \quad \therefore \quad \frac{\pi}{6}t_0+\frac{\pi}{12}t_0=\frac{\pi}{4}t_0=\pi.$$

よって，$t_0=\boxed{4}$.　…(13)

$0<t<t_0$ $(=4)$ のとき，$\triangle ABP_t$ において，$\angle B=\dfrac{\pi}{12}t$，$\angle P_t=\pi-\dfrac{\pi}{4}t$.

正弦定理を用いると，

$$\frac{AP_t}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle P_t}.$$

$$\therefore \quad AP_t=\frac{l\sin\frac{\pi}{12}t}{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}t\right)}=\frac{l\sin\frac{\pi}{12}t}{\sin\frac{\pi}{4}t}=\frac{l\sin\frac{\pi}{12}t}{3\sin\frac{\pi}{12}t-4\sin^3\frac{\pi}{12t}}=\frac{l}{3-4\sin^2\frac{\pi}{12}t}$$

$$=\frac{l}{3-2\left(1-\cos\frac{\pi}{6}t\right)}=\frac{l}{\boxed{2}\cos\left(\boxed{\frac{1}{6}}\pi t\right)+\boxed{1}}.$$　…(14)，(15)，(16)

（注）　$\angle P_tAB=\dfrac{1}{6}\pi t$ だから導かれた式は，A を極，AB を始線とする極座標における点 P_t の極方程式の形をしている．しかもその方程式は P_t の軌跡が A を焦点とし，AB が主軸，離心率が 2 の双曲線上にあることを表している．B は A から遠い方の頂点である．

このように，$\angle BAP_t$ と $\angle ABP_t$ が定比をなして動くとき，点 P_t の軌跡が 2 次曲線になるのは $\angle BAP_t$ と $\angle ABP_t$ の比が 2：1 またはその逆の比のときだけである．（**1958 年　幾何　第 2 問**参照）

V

次の $\boxed{}$ にあてはまるものは，下記のイロハニの中のどれであるか。イロハニの記号で答えよ。ただし，(i)，(ii)，(iii) で，x，y は実数とする。

(i) $x+y$ と xy とが整数であることは，x と y とが整数であるために $\boxed{(17)}$

(ii) $x+y>2$，$xy>1$ であることは，$x>1$，$y>1$ であるために $\boxed{(18)}$

(iii) $x=y=0$ であることは，$x^2+y^2=0$ であるために $\boxed{(19)}$

(iv) x，y を複素数とするとき，$x=y=0$ であることは，$x^2+y^2=0$ であるために $\boxed{(20)}$

イ　必要十分である。

ロ　必要であるが十分でない。

ハ　十分であるが必要でない。

ニ　必要でも十分でもない。

分　野

数学 I 幾何：必要条件・十分条件，**数学 I 代数**：整数

【解答】

(i) x，y が整数であれば $x+y$，xy は整数であるが，$x+y$，xy が整数であるからといって x，y が整数であるとはいえない．

反例：$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$ のとき，$x+y=2$，$xy=-1$ はともに整数である．

よって，$x+y$ と xy が整数であることは，x と y とが整数であるために $\boxed{\text{必要であるが十分でない．}}$

…(17)＝ロ

(ii) $x>1$，$y>1$ なら $x+y>2$，$xy>1$ であるが，$x+y>2$，$xy>1$ だからといって $x>1$，$y>1$ とはいえない．

反例：$x=3$，$y=\dfrac{1}{2}$ のとき $x+y=\dfrac{7}{2}>2$，$xy=\dfrac{3}{2}>1$ だが $x>1$，$y>1$ ではない．

よって，$x+y>2$，$xy>1$ であることは，$x>1$，$y>1$ であるために $\boxed{\text{必要であるが十分でない．}}$

…(18)＝ロ

(iii) $x=y=0$ のとき，$x^2+y^2=0$ であり，$x^2+y^2=0$ のとき，$x=y=0$ である．

なぜなら，$x^2 \geqq 0$，$y^2 \geqq 0$ から $x^2+y^2=0$ となるのは $x^2=0$，$y^2=0$ すなわち，$x=y=0$ のときのみである．

よって，$x=y=0$ であることは，$x^2+y^2=0$ であるために $\boxed{\text{必要十分である．}}$ …(19)＝イ

(iv) $x=y=0$ のとき，$x^2+y^2=0$ であるが，$x^2+y^2=0$ のとき，$x=y=0$ であるとはいえない．

反例：$x=1$，$y=i$ のとき，$x^2+y^2=0$ だが $x=y=0$ ではない．

よって，$x=y=0$ であることは，$x^2+y^2=0$ であるために $\boxed{\text{十分であるが必要でない．}}$ …(20)＝ハ

1964 年　2 次試験（文科）

第 1 問

a，b，c を相異なる数，x，y，z を連立方程式 $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3 \\ x+by+b^2z=b^3 \\ x+cy+c^2z=c^3 \end{cases}$ の根とするとき，$a^3+b^3+c^3$ を x，y，z で表わせ。

分　野

数学Ⅱ：連立方程式

考え方

与連立方程式を x，y，z の連立 1 次方程式と見ずに，3 次方程式の 3 解が a，b，c と見ることができればあとは容易．

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

a，b，c は相異なるから，a，b，c は t の 3 次方程式

$$x+ty+t^2z=t^3 \quad \text{つまり} \quad t^3-zt^2-yt-x=0$$

の 3 解である．

解と係数の関係から，

$$z=a+b+c, \quad y=-(ab+bc+ca), \quad x=abc.$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+3abc \\ &= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)\}+3abc \\ &= z(z^2+3y)+3x=z^3+3yz+3x. \end{aligned}$$

…(答)

第 2 問

平面上に 2 つの曲線

$$y=x^2 \quad \cdots ①$$

$$y=3x^2+24x+50 \quad \cdots ②$$

がある。このとき 1 点 P をとり，曲線 ① 上の任意の点 A に対して，線分 AP を一定の比 $m:n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点 B が必ず曲線 ② の上にあるようにしたい。

点 P の座標 $(\alpha,\ \beta)$ と比 $m:n$ の値とを求めよ。

分　野

数学Ⅰ代数：2 次関数，**数学Ⅰ幾何**：内分，**数学Ⅱ**：軌跡

考え方

A の座標を $(t,\ t^2)$ とおき，AP を $m:n$ に内分する点の軌跡を求める．それが ② を常にみたす条件を求める．

【解答】

点 A は ① 上の任意の点だから，その座標は $(t,\ t^2)$ とかける．

$m+n\neq 0$ だから $\dfrac{m}{m+n}=s$ とおくと $m:n=s:1-s$，$0<s<1$.

点Pの座標が(α, β)だから，APを$s:1-s$に内分する点の座標は$(s\alpha+(1-s)t,\ s\beta+(1-s)t^2)$．

これが②上にあるから，

$$\begin{aligned} s\beta+(1-s)t^2 &= 3\{s\alpha+(1-s)t\}^2+24\{s\alpha+(1-s)t\}+50 \\ &= 3(1-s)^2t^2+6(1-s)(s\alpha+4)t+3s^2\alpha^2+24s\alpha+50. \end{aligned}$$

これがすべてのtについて成り立つから，

$$\begin{cases} 1-s=3(1-s)^2, & \cdots③ \\ 6(1-s)(s\alpha+4)=0, & \cdots④ \\ s\beta=3s^2\alpha^2+24s\alpha+50. & \cdots⑤ \end{cases}$$

③で $1-s>0$ から，$1-s=\dfrac{1}{3}$．$s=\dfrac{2}{3}$．④，⑤から

$$\begin{cases} \alpha+6=0, \\ \beta=2\alpha^2+24\alpha+75. \end{cases}$$

よって，

$$\alpha=-6,\quad \beta=3,\quad m:n=s:1-s=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1.$$

Pの座標は$(-6, 3)$で，内分比は$2:1$．比の値は2．　…(答)

（注１）　①と②は相似で，その相似比は$3:1$（x^2の係数の逆比）である．軸も平行で，ともに下に凸である．また，①の頂点A_0は$(0, 0)$で②の頂点B_0は$(-4, 2)$である．

相似中心はA_0，B_0を$3:1$に外分した点$\left(\dfrac{-0+3\cdot(-4)}{2},\ \dfrac{-0+3\cdot 2}{2}\right)=(-6, 3)$である．この点がPである．$A_0P:B_0P=3:1$ だから，$A_0B_0:B_0P=2:1$ である．

（注２）　比$m:n$に対して$m\div n$を比の値という．

第3問

点Vを頂点とし，正方形ABCDを底面とする四角錐 V-ABCD があって，その4つの側面はいずれも底辺20 cm，高さ40 cmの二等辺三角形である。

辺VA上に $VP:PA=3:1$ なる点Pをとり，3点P，B，Cを通る平面でこの四角錐を切るとき，切り口の面積を求めよ。

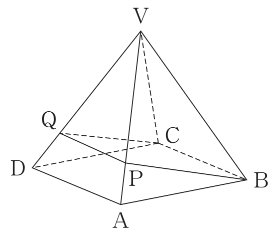
分　野

数学Ⅰ幾何：立体図形

考え方

対称性から切り口が等脚台形をなすことは容易に想像がつく．上底と下底の長さも容易に求められる．台形の高さは断面をとって考える．

【解答】



辺VDを$3:1$に内分する点をQとすると，$VP:VA=VQ:VD$ だから$PQ /\!/ AD$ であり，$PQ /\!/ BC$ だからB，C，P，Qは同一平面上にある．

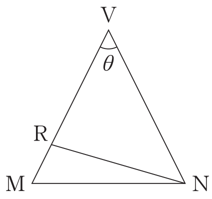
したがって，P，B，Cを通る切り口は台形PQCBである．

$BC=20$ cm．$AD:PQ=4:3$ で $AD=20$ cmだから $PQ=15$ cm．

AD，BC，PQの中点をそれぞれM，N，Rとし，V，M，Nを通る断面をとると，断面VMNは底面に垂直であるから，NRが台形PQCBの高さである．

MN は側面の底辺 20 cm に等しく，VM＝VN は側面の高さであるから 40 cm.

R は VM を 3：1 に内分した点だから，VR＝30 cm.



∠MVN＝θ とすると，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}\mathrm{MN}}{\mathrm{VM}}=\dfrac{1}{4}$ だから，$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{7}{8}$.

余弦定理から，

$$\mathrm{RN}^2=\mathrm{VN}^2+\mathrm{VR}^2-2\mathrm{VN}\cdot\mathrm{VR}\cos\theta=40^2+30^2-2\cdot40\cdot30\cdot\frac{7}{8}=400.$$

よって，台形 PQCB の高さ RN＝20 cm.

よって，

$$台形\ \mathrm{PQCB}=\frac{1}{2}(\mathrm{PQ}+\mathrm{BC})\cdot\mathrm{RN}=\frac{1}{2}(15+20)\cdot20=350\ \mathrm{cm}^2. \quad \cdots(答)$$

【別解】

正方形の中心を原点 O とし，BA が x 軸に平行，CB が y 軸に平行になり，V の z 座標が正になるように，10 cm を単位とする座標をとる.

AB＝BC＝CD＝DA＝2 より A(1, 1, 0)，B(−1, 1, 0)，C(−1, −1, 0)，D(1, −1, 0) とおける.

AD，BC の中点 M(1, 0, 0)，N(−1, 0, 0).

VM＝VN＝4 より OV＝$\sqrt{15}$．よって，V の座標は $(0,\ 0,\ \sqrt{15})$.

VA を 3：1 に内分する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$，VD を 3：1 に内分する点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$.

BC の長さは 2，PQ の長さは $\dfrac{3}{2}$,

BC の中点 N(−1, 0, 0)，PQ の中点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{3}{4},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ から，台形の高さは

$$\mathrm{RN}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=2.$$

以下**【解答】**と同じ.

第 4 問

4 点 $\mathrm{A}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0)$，$\mathrm{A}_3(2,\ 2)$，$\mathrm{A}_4(0,\ 2)$ を頂点とする四辺形がある。この平面上に 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 をとって，点 P_1 は $\mathrm{P}_4\mathrm{A}_4$ の中点，点 P_2 は $\mathrm{P}_1\mathrm{A}_1$ の中点，点 P_3 は $\mathrm{P}_2\mathrm{A}_2$ の中点，点 P_4 は $\mathrm{P}_3\mathrm{A}_3$ の中点となるようにする。4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 の座標および四辺形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$ の面積を求めよ。

分　野

数学 I 幾何：平面図形，面積

考え方

P_1 の座標を $(p,\ q)$ とおくと，P_2，P_3，P_4 の座標は p，q で表せる．その結果を使って再び P_1 の座標を表せば，p，q が求められる.

【解答】

P_1 の座標を $(p,\ q)$ とおくと，P_2 は $\mathrm{P}_1\mathrm{A}_1$ の中点だから,

$$\mathrm{P}_2\left(\frac{p}{2},\ \frac{q}{2}\right).$$

P_3 は P_2A_2 の中点だから，

$$P_3\left(\frac{\frac{p}{2}+1}{2},\ \frac{\frac{q}{2}}{2}\right)=\left(\frac{p+2}{4},\ \frac{q}{4}\right).$$

P_4 は P_3A_3 の中点だから，

$$P_4\left(\frac{\frac{p+2}{4}+2}{2},\ \frac{\frac{q}{4}+2}{2}\right)=\left(\frac{p+10}{8},\ \frac{q+8}{8}\right).$$

P_1 は P_4A_4 の中点だから，

$$P_1\left(\frac{\frac{p+10}{8}}{2},\ \frac{\frac{q+8}{8}+2}{2}\right)=\left(\frac{p+10}{16},\ \frac{q+24}{16}\right).$$

この点が $(p,\ q)$ だから，

$$p=\frac{p+10}{16},\quad q=\frac{q+24}{16}.\quad \therefore\quad p=\frac{2}{3},\quad q=\frac{8}{5}.$$

以上から，

$$P_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{5}\right),\quad P_2\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{5}\right),\quad P_3\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{5}\right),\quad P_4\left(\frac{4}{3},\ \frac{6}{5}\right).$$ …(答)

$P_1P_3=\dfrac{6}{5}$ から，

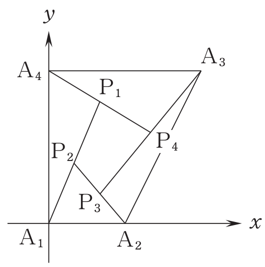
$$\triangle P_1P_2P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5},\quad \triangle P_3P_4P_1=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}.$$

よって，

$$\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$ …(答)

（参考） P_2 が P_1A_1 の中点，P_3 が P_2A_2 の中点だから，

$\triangle P_1P_2P_3=\triangle P_2A_1P_3=\dfrac{1}{2}\triangle P_2A_1A_2$ である．



同様に，

$$\triangle P_2P_3P_4=\frac{1}{2}\triangle P_3A_2A_3,\quad \triangle P_3P_4P_1=\frac{1}{2}\triangle P_4A_3A_4,$$

$$\triangle P_4P_1P_2=\frac{1}{2}\triangle P_1A_4A_1.$$

$$\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4=\triangle P_1P_2P_3+\triangle P_3P_4P_1=\triangle P_2P_3P_4+\triangle P_4P_1P_2$$

だから，

$$\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4=\frac{1}{2}(\triangle P_2A_1A_2+\triangle P_4A_3A_4)=\frac{1}{2}(\triangle P_3A_2A_3+\triangle P_1A_4A_1).$$

ここで，

$$\begin{aligned}\text{四辺形 } A_1A_2A_3A_4&=(\triangle P_2A_1A_2+\triangle P_4A_3A_4)+(\triangle P_3A_2A_3+\triangle P_1A_4A_1)+\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4\\&=2(\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4)+2(\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4)+\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4\\&=5(\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4).\end{aligned}$$

よって，

$$\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4=\frac{1}{5}(\text{四辺形 } A_1A_2A_3A_4).$$

$$\text{四辺形 } A_1A_2A_3A_4=\frac{1}{2}(A_1A_2+A_3A_4)A_1A_4=3 \text{ より，}(\text{四辺形 } P_1P_2P_3P_4)=\frac{3}{5}.$$

（注１） 四辺形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積が四辺形 $A_1A_2A_3A_4$ の面積の $\dfrac{1}{5}$ になることは，四辺形 $A_1A_2A_3A_4$ の

形状に関らず成り立つ.

（注２） 当時，ベクトルは範囲外だったが，今日（2020）なら当然，ベクトルを使うであろう．基本的な計算は変らない.

第５問

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ と y 軸との交点を A とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ における曲線の接線と y 軸との交点を Q とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}$，$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}$ を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：関数の極限

考え方

A，P，Q の座標を P の x 座標で表す．P の x 座標は座標系の x との混同を避けるため，他の文字を用いた.

【解答】

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$\mathrm{A}(0,\ f(0))=(0,\ d)$.

座標の変数 x との混同を避けるため，P の x 座標を t で表す.

$\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線は,

$$y=f'(t)(x-t)+f(t).$$

よって，$\mathrm{Q}(0,\ f(t)-tf'(t))$.

$$f(t)-tf'(t)=at^3+bt^2+ct+d-3at^3-2bt^2-ct=-2at^3-bt^2+d.$$

$$\mathrm{AP}^2=t^2+(at^3+bt^2+ct)^2=\{(at^2+bt+c)^2+1\}t^2.$$

$$\mathrm{AQ}^2=(-2at^3-bt^2)^2=(2at+b)^2t^4.$$

$$\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}=\frac{(2at+b)^2t^2}{(at^2+bt+c)^2+1}.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}=\lim_{t\to 0}\frac{(2at+b)^2t^2}{(at^2+bt+c)^2+1}=0. \qquad \cdots(答)$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{AQ}^2}{\mathrm{AP}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{(2at+b)^2t^2}{(at^2+bt+c)^2+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(2a+\dfrac{b}{t}\right)^2}{\left(a+\dfrac{b}{t}+\dfrac{c}{t^2}\right)^2+\dfrac{1}{t^4}}=4. \qquad \cdots(答)$$

（注） 当時，無限大への極限も数学Ⅱで扱っていたので，文科系でもこの程度の極限は学習していた.

1964 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 5 問

曲線 $xy=1$ の第 1 象限の部分に定点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ があり，同じ曲線の第 3 象限の部分に動点 Q がある。

(1)　線分 QP の長さの最小値を a で表わせ。

(2)　線分 QP の長さが最小になるとき，QP が x 軸の正の方向と 30° の角をなすような a の値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

QP の長さをパラメータで表し，微分して最小になる Q の x 座標を求める．

(1)の【解答】

(1)　$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(-t,\ -\dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ とおくと，

$$\mathrm{QP}^2=(a+t)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{t}\right)^2.$$

これを $f(t)$ とおくと，$f(t)=(t+a)^2+\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{2}{at}+\dfrac{1}{a^2}.$

$$\therefore\quad f'(t)=2(t+a)-\frac{2}{t^3}-\frac{2}{at^2}=\frac{2(t+a)(at^3-1)}{at^3}.$$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

よって，最小になるのは $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$ のときであり，$f(t)$ の最小値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)=\left(a+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{a}+\sqrt[3]{a}\right)^2=\frac{(a^{\frac{4}{3}}+1)^2}{a^{\frac{2}{3}}}+\frac{(1+a^{\frac{4}{3}})^2}{a^2}=\frac{(a^{\frac{4}{3}}+1)^3}{a^2}.$$

よって，QP の最小値は

$$\frac{(a^{\frac{4}{3}}+1)^{\frac{3}{2}}}{a}=(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.\qquad \cdots(答)$$

⑴ の**【別解】**

Q における法線が P を通るとき，QP は最小になる．

Q の x 座標を s $(s<0)$ とする．$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ だから，Q における法線の傾きは s^2．

法線の方程式は $y=s^2(x-s)+\dfrac{1}{s}$．

$\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通るから，

$$\frac{1}{a}=s^2(a-s)+\frac{1}{s}.\quad \therefore\quad \frac{s-a}{as}=s^2(a-s).$$

$a\neq s$ だから，$\dfrac{1}{as}=-s^2$．つまり，$s=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$．

以下**【解答】**と同様．

⑵ の**【解答】**

QP が最小のとき，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}},\ -\sqrt[3]{a}\right)$．

QP の傾きは，

$$\frac{\frac{1}{a}+\sqrt[3]{a}}{a+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}}=\frac{1+a^{\frac{4}{3}}}{(a^{\frac{4}{3}}+1)a^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

QP と x 軸正方向とのなす角が 30° のとき，傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

よって，$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$．よって，

$$a=3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{27}.\qquad \cdots(答)$$

第6問

函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は次の条件を満たすものとする。

(1) $f(1)=4$

(2) $x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$

このとき $\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を最大にする a，b の値，最小にする a，b の値をそれぞれ求めよ。

分　野

数学Ⅲ：整式の積分，　**数学Ⅰ代数**：2次関数

考え方

(1)より b は a で表される．その a の値の範囲は(2)で定まる．定積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ は a の式で表されるから，その増減を考えればよい．

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$f(1)=1+a+b=4$ より，$b=3-a$.

$$f(x)=x^3+ax^2+(3-a)x=x(x^2+ax+3-a).$$

$x>0$ において $g(x)=x^2+ax+3-a \geqq 0$ となる条件を考える．

(i) $a \geqq 0$ のとき，$g(0)=3-a \geqq 0$ が条件．よって，$0 \leqq a \leqq 3$.

(ii) $a<0$ のとき，$g(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a+3$ より，$-\dfrac{a^2}{4}-a+3 \geqq 0$.

$a^2-4(-a+3)=a^2+4a-12=(a-2)(a+6) \leqq 0$．よって，$-6 \leqq a \leqq 2$.

$a<0$ より，$-6 \leqq a<0$.

以上より，

$$-6 \leqq a \leqq 3. \qquad \cdots①$$

$I=\int_0^1 f(x)\,dx$ とおく．

$$I=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \{x^3+ax^2+(3-a)x\}\,dx=\frac{1}{4}+\frac{a}{3}+\frac{3-a}{2}=\frac{7}{4}-\frac{a}{6}.$$

I は a の減少関数.

① より，I を最大にするのは $a=-6$，$b=9$ のときで，最小にするのは $a=3$，$b=0$ のとき．　…(答)

1965 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

楕円 $2x^2+3y^2-1=0$ と楕円 $3x^2+\boxed{\text{a}}y^2+\boxed{\text{b}}x+\boxed{\text{c}}y+\boxed{\text{d}}=0$ とは直線 $x+y=1$ に関して対称である。

分　野

数学Ⅱ：図形の移動，楕円

【解答】

2 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ が直線 $l：x+y=1$ に関して対称であるなら，PQ の中点 $\left(\dfrac{x+X}{2},\ \dfrac{y+Y}{2}\right)$ は l 上にあるから，

$$\frac{x+X}{2}+\frac{y+Y}{2}=1. \quad \therefore \quad x+X+y+Y=2. \qquad \cdots ①$$

また，PQ は l に垂直だから，

$$\frac{Y-y}{X-x}=1. \quad \therefore \quad Y-y=X-x. \qquad \cdots ②$$

①，② より，

$$x=1-Y, \quad y=1-X.$$

点 $(x,\ y)$ が楕円 $2x^2+3y^2-1=0$ 上にあるとき，

$$2(1-Y)^2+3(1-X)^2-1=3X^2+2Y^2-6X-4Y+4=0.$$

よって，$2x^2+3y^2-1=0$ と $x+y-1=0$ に関して対称な楕円の方程式は

$$3x^2+\boxed{2}y^2+\boxed{-6}x+\boxed{-4}y+\boxed{4}=0. \qquad \cdots \text{a, b, c, d}$$

【別解】

$2x^2+3y^2=1$ は中心が原点，長軸は x 軸上で長さ $\sqrt{2}$，短軸は y 軸上で長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$x+y=1$ による対称移動で原点は $(1,\ 1)$ に移り，x 軸は直線 $x=1$ に，y 軸は直線 $y=1$ に移される．以上のことから，求める楕円は中心が $(1,\ 1)$ で，長軸は $x=1$ 上で長さ $\sqrt{2}$，短軸は $y=1$ 上で長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

よって，求める楕円の方程式は $3(x-1)^2+2(y-1)^2-1=0$．以下**【解答】**と同じ.

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

方程式

$$x^2-3y^2+6x+9=0$$

によって表わされるグラフと方程式

$$x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$$

によって表わされるグラフとが共有点をもつための必要十分条件は

$$\boxed{\text{e}} \leqq a \leqq \boxed{\text{f}}$$

である。共有点の個数が奇数であるような a の値は $\boxed{\text{g}}$ 個あって，それらの a の値のうちで最大なものは $\boxed{\text{h}}$ である。

分 野

数学Ⅱ：図形と方程式

【解答】

$$C_1：x^2-3y^2+6x+9=0,\quad C_2：x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$$

とおく．

C_1 の方程式から $y^2=\dfrac{x^2+6x+9}{3}=\dfrac{(x+3)^2}{3}$．よって，$y=\dfrac{\pm1}{\sqrt{3}}(x+3)$．よって，$x$ が実数なら y も実数．C_1 のグラフは 2 直線 $x=-3$，$y=0$ について対称である．

C_2 の方程式に代入して，

$$x^2+\frac{x^2+6x+9}{3}-2ax+a^2-1=0.\quad 4x^2+6(1-a)x+6+3a^2=0. \qquad \cdots①$$

これが実数解をもてばよいから，判別式を D として

$$\frac{1}{4}D=9(1-a)^2-4(6+3a^2)=-3a^2-18a-15=-3(a+1)(a+5)\geqq0.$$

よって，共有点をもつ a の範囲は，

$$\boxed{-5}\leqq a\leqq\boxed{-1}. \qquad \cdots\text{e, f}$$

$x=-3$ 以外の点では x に対応する y は 2 個存在するから，共有点の個数が奇数個になるためには ① が $x=-3$ を解にもつことが必要．

① が $x=-3$ を解にもつのは

$$3a^2+18a+24=0.\quad (a+2)(a+4)=0.$$

$a=-2$ のとき，① は $4x^2+18x+18=0$ となり，$x=-3$ と $x=-\dfrac{3}{2}$ を解にもつ．それぞれに 1 個と 2 個の点が対応するから，合計 3 個の共有点が存在する．

$a=-4$ のとき，① は $4x^2+30x+54=0$ となり，$x=-3$ と $x=-\dfrac{9}{2}$ を解にもつ．それぞれに 1 個と 2 個の点が対応するから，合計 3 個の共有点が存在する．

よって，共有点の個数が奇数であるような a は $\boxed{2}$ 個ある．　　　…g

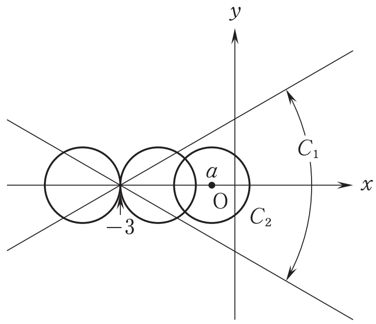
また，そのうち最大なものは $a=\boxed{-2}$ である．　　　…h

【別解】

$C_1：(x+3)^2-3y^2=(x+3+\sqrt{3}y)(x+3-\sqrt{3}y)=0,$

$C_2：(x-a)^2+y^2=1$

から，C_1 は点 $(-3,\ 0)$ で交わる 2 直線，C_2 は $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円である．



どちらも x 軸について対称であるから，C_1，C_2 が共有点をもつのは C_2 の中心 $(a,\ 0)$ と直線 $x+3\pm\sqrt{3}\,y=0$ との距離（どちらとの距離も等しい）について $\dfrac{|a+3|}{2}\leqq 1$ が条件．よって，

$$\boxed{-5}\leqq a\leqq\boxed{-1}\qquad\cdots\text{e, f}$$

x 軸上以外に交点をもてば，その点と x 軸について対称な点も交点である．よって，C_1，C_2 の交点の個数が奇数になるためには，x 軸上に奇数個の交点をもたなければならない．

C_1 と x 軸の交点は $(-3,\ 0)$ のみだから，C_1，C_2 の共有点が奇数個であるには C_1，C_2 がこの点を共有する場合だけである．そのとき，$a=-3\pm1$ つまり $a=-4,\ -2$．共有点の個数が奇数であるような a は $\boxed{2}$ 個ある． …g

そのうち最大なものは $a=\boxed{-2}$ である． …h

Ⅲ

下の $\boxed{\text{i}}$，$\boxed{\text{l}}$ にあてはまる数は何か。また，$\boxed{\text{j}}$，$\boxed{\text{k}}$ には，$<$，$\leqq$ のどれを入れればよいか。$<$ のときは 1，$\leqq$ のときは 2 と答えよ。

不等式

$$\log_{10}\frac{x+y}{m}\geqq\frac{\log_{10}x+\log_{10}y}{2}$$

が任意の正の数 x，y に対してつねに成り立つための必要十分条件は

$\boxed{\text{i}}\ \boxed{\text{j}}\ m\ \boxed{\text{k}}\ \boxed{\text{l}}$ である。ただし，$\boxed{\text{i}}<\boxed{\text{l}}$ とする。

分 野

数学 I 代数：対数不等式，不等式の証明

【解答】

$x>0$，$y>0$ だから，真数条件から，$m>0$．

$$\log_{10}\frac{x+y}{m}\geqq\frac{\log_{10}x+\log_{10}y}{2}\iff\log_{10}\frac{x+y}{m}\geqq\log_{10}\sqrt{xy}\iff\frac{x+y}{m}\geqq\sqrt{xy}$$

$$\iff(x+y)^2-m^2xy\geqq0\iff\left(\frac{x}{y}\right)^2+(2-m^2)\frac{x}{y}+1\geqq0.$$

$t=\dfrac{x}{y}$ とおくと，$t^2+(2-m^2)t+1\geqq0$ がすべての正の実数 t について成り立つ条件と同値だから，

$$m^2-2\leqq0\ \text{または}\ (2-m^2)^2-4=m^4-4m^2\leqq0\iff0\leqq m^2\leqq4.$$

$m>0$ から，

$$\boxed{0}\ \boxed{<}\ m\ \boxed{\leqq}\ \boxed{2}.\qquad\cdots\text{i, j=1, k=2, l}$$

（注）$\dfrac{x+y}{m}\geqq\sqrt{xy}$ から相加平均・相乗平均の関係を思い浮かべるであろう．$x=y$ のときから $m\leqq2$ は必要条件である．また，$0<m\leqq2$ のとき，$\dfrac{x+y}{m}\geqq\dfrac{x+y}{2}\geqq\sqrt{xy}$ である．したがって，本質がのみこめれば空欄を埋めるのは容易である．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$f(x)=\mathrm{Max}\{|x-3|,\ -x^2+8x-11\}$ とする。

(i) $0\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の最小値は $\boxed{\ \mathrm{m}\ }$ である。

(ii) $0\leqq x\leqq 6$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{\ \mathrm{n}\ }$ である。

(iii) $3\leqq x\leqq 6$ において $f(x)$ を最小にする x に最も近い整数は $\boxed{\ \mathrm{o}\ }$ である。

(iv) $0\leqq x\leqq 6$ で $f(x)=3$ を満たす x は $\boxed{\ \mathrm{p}\ }$ 個ある。

ただし，二つの実数 a，b のうち小さくない方を $\mathrm{Max}\{a,\ b\}$ と書く。すなわち

$$b\geqq a \text{ のとき } \mathrm{Max}\{a,\ b\}=b,$$
$$a\geqq b \text{ のとき } \mathrm{Max}\{a,\ b\}=a$$

である。

分　野

数学Ⅰ代数：いろいろな関数

【解答】

$$|x-3|-(-x^2+8x-11)=\begin{cases} x^2-9x+14=(x-2)(x-7) & (x<3 \text{ のとき}) \\ x^2-7x+8 & (x\geqq 3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$x^2-7x+8=0$ の解は $x=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$．$\dfrac{7-\sqrt{17}}{2}<3$，$5.5<\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}<6$.

$\alpha=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ とおくと，

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & (x\leqq 2), \\ -x^2+8x-11 & (2<x<\alpha), \\ x-3 & (x\geqq\alpha) \end{cases}$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	α	$\cdots$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

$f(x)$ は $x=4$ で極大，$x=2$，α で極小となる．

(i) $y=-x^2+8x-11$ の軸 $x=4$ と比較すると極小値をとる x のうち，$x=4$ により遠いのは $x=2$.
よって，$f(x)$ の最小値は $f(2)=\boxed{\ 1\ }$.　…m

(ii) $f(0)=f(6)=3$，$f(4)=5$ だから最大値は $\boxed{\ 5\ }$.　…n

(iii) $3\leqq x\leqq 6$ で $f(x)$ が最小になるのは $x=\alpha$.
$5.5<\alpha<6$ だから，α に最も近い整数は $\boxed{\ 6\ }$.　…o

(iv) $f(0)=3>f(2)<f(4)=5>f(\alpha)<f(6)=3$ であるから，$f(x)=3$ となる x は $\boxed{\ 4\ }$ 個ある．　…p

(注) $f(x)=3$ となる x は，

$$x=0,\ 4-\sqrt{2},\ 4+\sqrt{2},\ 6.$$

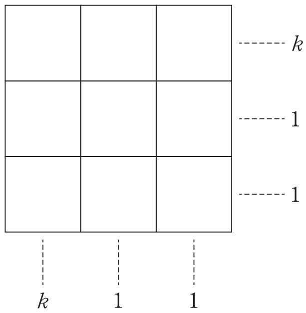
V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

k を 0 または正の整数とする。下図の 9 個の空欄に 0 または正の整数を記入して，横および縦に加えたものがそれぞれの欄外に付記した値（k，1，1 および k，1，1）になるような表をつくる。このようにしてできる表の個数を a_k で表わせば，

$$a_0=\boxed{\text{q}},\quad a_1=\boxed{\text{r}},\quad a_2=\boxed{\text{s}},\quad a_3=\boxed{\text{t}}$$

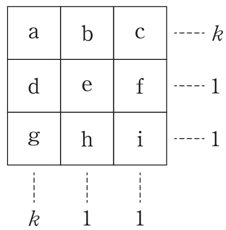
である。



分　野

数学 I 代数：個数

【解答】



空欄の名前を右図のように a，b，…，i とつける．

9 個の空欄のうち，e，f，h，i に記入する数が決まると，他の空欄に記入すべき数が定まる．この部分の縦横の和がたかだか 1 だから，この部分に記入できる数は 0 または 1 であり，1 はたかだか 2 個しか入らない．

e，f，h，i に 1 を記入する個数で場合分けする．

(i) e，f，h，i に記入する 1 の個数が 2 個のとき，記入の仕方は 1 を e と i または f と h に入れる 2 通りが考えられる．このとき，b，c，d，g には 0 を記入しなければならないから，a には k を記入する．

(ii) e，f，h，i に記入する 1 の個数が 1 個のとき，記入の仕方は 4 通り考えられる．このとき，b，c の一方は 1，他方は 0 を記入しなければならず，d，g の一方は 1，他方は 0 を記入しなければならない．この記入の仕方は e，f，h，i に記入した数によって 1 通りに定まる．このとき a には $k-1$ を記入しなければならない．したがって，$k \geqq 1$ のときに，この記入法が存在する．

(iii) e，f，h，i のすべてに 0 を記入するとき，b，c，d，g には 1 を記入しなければならないから，a には $k-2$ を記入する．したがって，$k \geqq 2$ のときに，この記入法が存在する．

以上から

$$a_0=\boxed{2},\quad a_1=2+4=\boxed{6},\quad a_2=6+1=\boxed{7},\quad a_3=\boxed{7}.\quad \cdots\text{q，r，s，t}$$

1965 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

点 $(-1,\ 1)$ を通る直線 $2x+\boxed{\text{a}}y+\boxed{\text{b}}=0$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に $\boxed{\text{c}}$ だけ平行移動した後，さらにこれを x 軸に関して対称に折り返して得られる直線 $2x-3y+\boxed{\text{d}}=0$ は点 $(3,\ 3)$ を通る。

分　野

数学Ⅱ：図形の移動

【解答】

$\boxed{\text{a}}=a$，$\boxed{\text{b}}=b$，$\boxed{\text{c}}=c$，$\boxed{\text{d}}=d$ とおき，

$$l_1: 2x+ay+b=0,\quad l_2: 2x-3y+d=0$$

とおく．

l_1 は $(-1,\ 1)$ を通るから，$-2+a+b=0$．また，l_2 は $(3,\ 3)$ を通るから，$d=3$．

よって，$b=2-a$ とすると，

$$l_1: 2x+ay+2-a=0,\quad l_2: 2x-3y+3=0$$

l_2 を x 軸で折り返した直線を l_2' とすると $l_2': 2x+3y+3=0$．

l_1 を平行移動して l_2' に重なることより $l_1 /\!/ l_2'$ だから，$a=3$，$b=-1$．

$l_1: 2x+3y-1=0$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に c だけ平行移動すると，

$$2(x-1)+3(y-c)-1=2x+3y-3c-3=0.$$

これが l_2' に一致するから，$-3c-3=3$．よって，$c=-2$．

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{-1},\quad c=\boxed{-2},\quad d=\boxed{3}.$$　…a，b，c，d

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

x, y, z, w を未知数とする連立一次方程式

$$\begin{aligned} x-y \quad\quad &+z+\boxed{\ \mathrm{e}\ }w=a \\ x-y+\boxed{\ \mathrm{f}\ }&z \quad\quad -w=b \\ -x+y \quad\quad &-z \quad\quad +w=c \\ \boxed{\ \mathrm{g}\ }x-y \quad\quad &+z \quad\quad -w=d \end{aligned}$$

は

(i) $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ のときは解をもたない。

(ii) $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=0$ のときは解をもたない。

(iii) $a=0$, $b=0$, $c=\boxed{\ \mathrm{h}\ }$, $d=0$ のときは $xyzw \neq 0$ となる解をもつ。

分 野

数学 I 代数：連立方程式

【解答】

$\boxed{\ \mathrm{e}\ }=e$, $\boxed{\ \mathrm{f}\ }=f$, $\boxed{\ \mathrm{g}\ }=g$ とおき,

$$x-y+z+ew=a, \quad \cdots①$$
$$x-y+fz-w=b, \quad \cdots②$$
$$-x+y-z+w=c, \quad \cdots③$$
$$gx-y+z-w=d \quad \cdots④$$

とおく．①+③，②+③，③+④ から,

$$(e+1)w=a+c, \quad (f-1)z=b+c, \quad (g-1)x=c+d. \quad \cdots⑤$$

また，x, z, w が定まれば，③ から y も定まる．

(i) $a=1$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ のとき，⑤ から

$$(e+1)w=1, \quad (f-1)z=0, \quad (g-1)x=0.$$

$(f-1)z=0$, $(g-1)x=0$ は，任意の f, g に対して解をもつ．

しかし，$(e+1)w=1$ は $e+1 \neq 0$ なら解をもつが，$e+1=0$ のとき解をもたない．よって，$e=-1$.

(ii) $a=0$, $b=1$, $c=0$, $d=0$ のとき，⑤ から

$$(e+1)w=0, \quad (f-1)z=1, \quad (g-1)x=0.$$

$(e+1)w=0$, $(g-1)x=0$ は，任意の e, g に対して解をもつ．

しかし，$(f-1)z=1$ は $f-1 \neq 0$ なら解をもつが，$f-1=0$ のとき解をもたない．よって，$f=1$.

(iii) $a=0$, $b=0$, $d=0$ のとき，$e=-1$, $f=1$, ⑤ から,

$$0=c, \quad 0=c, \quad (g-1)x=c.$$

よって，$c=0$. $(g-1)x=0$ から，$g=1$ に対してのみ $x \neq 0$ の解をもつ．

$a=b=c=d=0$ のとき，①，②，③，④ はすべて同値な式

$$x-y+z-w=0$$

となり，たとえば $x=y=z=w=1$ のような $xyzw \neq 0$ の解をもつ．

よって,

$$e=\boxed{-1}, \quad f=\boxed{1}, \quad g=\boxed{1}, \quad c=\boxed{0}. \qquad \cdots \mathrm{e, f, g, h}$$

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

函数

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}$$

の値が $x=a$ で極大になるとすれば，$a=\boxed{\ \mathrm{i}\ }$，$f(a)=\boxed{\ \mathrm{j}\ }$ である。点 $(a,\ f(a))$ を通る傾き m $(m\neq 0)$ の直線と曲線 $y=f(x)$ との交点は $\boxed{\ \mathrm{k}\ }$ 個ある。それらの交点のうちで x 座標が最大なものの x 座標は m の函数で，これを $h(m)$ で表わせば

$$\lim_{m\to\infty}h(m)=\boxed{\ \mathrm{l}\ }$$

となる。

分　野

数学Ⅱ：微分法

【解答】

問題文の「函数」は「関数」の当時の表記である．

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{x^2}=\frac{-4(x-1)}{(x-2)^2x^2}.$$

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(2)	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$
$f(x)$	↗	$\times$	↗		↘	$\times$	↘

よって，$x=1$ で極大になる．よって $a=\boxed{\ 1\ }$．また，$f(1)=\boxed{\ -2\ }$．　…i，j

点 $(1,\ -2)$ を通る傾き m の直線は $y=m(x-1)-2$．

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}=m(x-1)-2\ \text{から，}\ (x-1)\{mx^2-2(m+1)x+2\}=0.$$

$$(m+1)^2-2m=m^2+1>0$$

から，$g(x)=mx^2-2(m+1)x+2$ とおくと，$g(x)=0$ は $m\neq 0$ のとき，$x\neq 1$ の異なる 2 実解をもつ．よって，この直線と $y=f(x)$ の交点は $\boxed{\ 3\ }$ 個．　…k

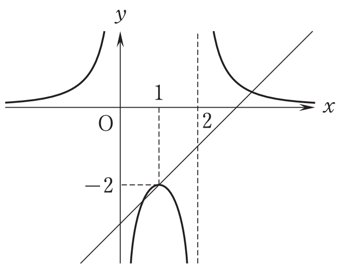
$g(1)=-m<0$ だから交点の x 座標は 1 より大きいものと，小さいものがある．大きい方の x 座標が $h(m)$．

$$h(m)=\frac{m+1+\sqrt{m^2+1}}{m}=1+\frac{1}{m}+\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}.$$

よって，

$$\lim_{m\to\infty}h(m)=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}+\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}\right)=\boxed{\ 2\ }.$$　…l

（注）　下のような図をかけば，交点が 3 個で，$m\to\infty$ のとき $h(m)\to 2$ であることは容易に想像がつく．



Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

不等式

$$\log_2\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\}<\log_4\{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(2x-3)^2\}$$

が成り立つような実数 x の範囲は

$$x<\boxed{\text{m}},\quad \boxed{\text{n}}<x<\boxed{\text{o}},\quad \boxed{\text{p}}<x$$

である。

分野

数学Ⅱ：対数不等式

【解答】

真数条件から

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0. \quad \therefore \quad x<1,\ 2<x<3,\ 4<x. \qquad \cdots①$$

底の変換公式から

$$\log_4\{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(2x-3)^2\}=\frac{2\log_2|(x-1)(x-2)(x-3)(2x-3)|}{\log_2 4}$$
$$=\log_2|(x-1)(x-2)(x-3)(2x-3)|.$$

よって，

$$\log_2\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\}<\log_2|(x-1)(x-2)(x-3)(2x-3)|.$$

① から $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=|(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)|$ だから，

$$\log_2|x-4|<\log_2|2x-3|. \quad \therefore \quad |x-4|<|2x-3|.$$

$$\therefore \quad (x-4)^2<(2x-3)^2. \quad \therefore \quad (x+1)(3x-7)>0. \quad \therefore \quad x<-1,\ x>\frac{7}{3}.$$

① とあわせて

$$x<\boxed{-1},\quad \boxed{\frac{7}{3}}<x<\boxed{3},\quad \boxed{4}<x. \qquad \cdots\text{m, n, o, p}$$

V

下の命題 q，r，s，t について
必ず成り立つものには 1，
必ずしも成り立たないものには 2
と答えよ。ただし，α，β は実数とする。

q．どのような正の数 x，y をとってもつねに $\alpha x+\beta y>0$ が成り立つならば $\alpha>0$ かつ $\beta>0$ である。

r．どのような負でない実数 x，y をとってもつねに $\alpha x+\beta y\geqq 0$ が成り立つならば $\alpha\geqq 0$ かつ $\beta\geqq 0$ である。

s．ある正の数 x が存在してすべての正の数 y に対して $\alpha x+\beta y>0$ が成り立つならば $\beta>0$ である。

t．ある正の数 x，y が存在して $\alpha x+\beta y>0$ が成り立つならば $\alpha>0$ または $\beta>0$ である。

分 野

数学Ⅰ代数：不等式の証明，**数学Ⅱ**：命題と論証

【解答】

q．$\boxed{\text{必ずしも成り立たない}}$．

反例：$\alpha=0$，$\beta>0$ のとき，どのような正の数 x，y をとってもつねに $\alpha x+\beta y>0$ が成り立つが，$\alpha>0$，$\beta>0$ でない． …q=2

r．$\boxed{\text{必ず成り立つ}}$．

証明：$(x,\ y)=(1,\ 0)$ のとき $\alpha\geqq 0$，$(x,\ y)=(0,\ 1)$ のとき $\beta\geqq 0$．したがって，$\alpha\geqq 0$ かつ $\beta\geqq 0$． …r=1

s．$\boxed{\text{必ずしも成り立たない}}$．

反例：$\alpha>0$，$\beta=0$ のとき，$x=1$（>0）とすると，すべての正の数 y に対して $\alpha x+\beta y=\alpha>0$ が成り立つが，$\beta>0$ でない． …s=2

t．$\boxed{\text{必ず成り立つ}}$．

証明：$\alpha x+\beta y>0$ だから，$\alpha x>0$ または $\beta y>0$．
$x>0$，$y>0$ だから，$\alpha>0$ または $\beta>0$． …t=1

（注） 鉛筆を倒しても 5 割は当たる問題．穴埋めにするにはもったいない．記述させたら良問．

1965 年　2 次試験（文科）

第 1 問

ある都市で A，B，C 三種類の新聞が発行されている。その都市の世帯で
A を購読しているものの割合は 69 %,
B を購読しているものの割合は 46 %,
C だけを購読しているものの割合は 3 %,
B，C の両方を購読しているものの割合は 21 %,
A，C の少なくとも一方を購読しているものの割合は 88 %,
B，C の少なくとも一方を購読しているものの割合は 50 %,
A，B，C のうちどれか一種類だけを購読しているものの割合は 61 %
である。このとき

(1)　A だけを購読しているものの割合,
(2)　B だけを購読しているものの割合,
(3)　A，B，C すべてを購読しているものの割合,
(4)　A，B，C のどれも購読していないものの割合

を求めよ。

分　野

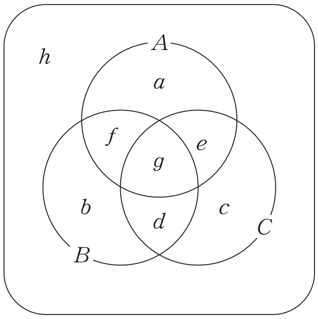
数学 I 代数：集合と個数

考え方

ベン図をかいて，各部分集合に属するものの割合について，連立方程式を立てればよい．

【解答】

A を購読しているものの集合を A，B を購読しているものの集合を B，C を購読しているものの集合を C とし，ベン図をかいて各部分集合に属する割合を%で a，b，c，d，e，f，g，h とする．



このとき，

$$a+b+c+d+e+f+g+h=100,$$

$$a+e+f+g=69,\quad b+d+f+g=46,\quad c=3,\quad d+g=21,$$

$$a+c+d+e+f+g=88,\quad b+c+d+e+f+g=50,\quad a+b+c=61.$$

(1)　A だけを購読しているものの割合は a %.

$a+h=100-50=50,\quad b+h=100-88=12,\quad a+b=61-3=58.$

よって，

$$a=\frac{1}{2}\{(a+h)+(a+b)-(b+h)\}=48\ \%.\qquad\cdots(答)$$

(2)　B だけを購読しているものの割合は b %.

$$b=(a+b)-a=10\ \%.\qquad\cdots(答)$$

(3)　A，B，C すべてを購読しているものの割合は g %.

$$c+d=88-69=19.\quad d=19-3=16.\quad \therefore\quad g=(d+g)-d=21-16=5\ \%.\qquad\cdots(答)$$

(4)　A，B，C のどれも購読していないものの割合は h %.

$$h=(a+h)-a=50-48=2\ \%.\qquad\cdots(答)$$

(参考)　$e=1$，$f=15$.

第2問

A，B，C を3つの山頂とする。A から見ると，C は真北より東 10° の方向にあって仰角 15° であり，B から見ると，C は真北より西 20° の方向にあって仰角 30° である。また，B から A を見る仰角は 30° である。A，B の高さがそれぞれ海抜 1600 m，1210 m であるとすれば，C の高さは海抜何メートルか。$\sqrt{3}=1.732$ として計算し，1 m 未満は四捨五入せよ。

分　野

数学Ⅰ幾何：空間図形

考え方

A，B，C の水平距離をもとに考える．$\tan 15°=\tan(60°-45°)$ として計算する．

【解答】

A，B，C の水平距離を $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とおく．C の海抜を $(h+1600)$ m とする．
$\angle ACB=10°+20°=30°$ だから，余弦定理より，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 30°=a^2+b^2-\sqrt{3}\,ab. \quad \cdots①$$

A から C を見る仰角が 15° だから，

$$b\tan 15°=b\tan(60°-45°)=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}b=h. \quad \cdots②$$

B から C を見る仰角が 30° だから，

$$a\tan 30°=\frac{a}{\sqrt{3}}=(h+1600)-1210=h+390. \quad \cdots③$$

B から A を見る仰角が 30° だから，

$$c\tan 30°=\frac{c}{\sqrt{3}}=1600-1210=390. \quad \cdots④$$

②，③，④ より，

$$a=(h+390)\sqrt{3}, \quad b=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}h=(2+\sqrt{3})h, \quad c=390\sqrt{3}.$$

① に代入して，

$$(390\sqrt{3})^2=\{(h+390)\sqrt{3}\}^2+\{(2+\sqrt{3})h\}^2-\sqrt{3}(h+390)\sqrt{3}(2+\sqrt{3})h.$$

$$\therefore\quad (4+\sqrt{3})h=(3\sqrt{3})390. \quad \therefore\quad h=\frac{3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}\cdot 390=(4\sqrt{3}-3)90.$$

$$\therefore\quad h=353.52.$$

よって，C の海抜は四捨五入して $1600+354=1954$ m である．　…(答)

第3問

直線 l は双曲線 $xy=1$ の第一象限にある部分に接し，l と x 軸との交点の x 座標は 2 より小さくないとする。この条件のもとで l が変動するとき，四直線 l，$y=0$，$x=1$ および $x=2$ で囲まれる部分の面積の最大値を求めよ。

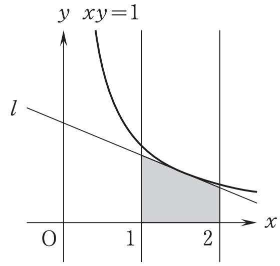
分　野

数学Ⅱ：微分法，**数学Ⅰ幾何**：平面図形

考え方

与えられた条件を丹念に計算してゆくこと．

【解答】



接点の x 座標を t とする．$y=\dfrac{1}{x}$，$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ から，点 $\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}.$$

x 軸との交点の x 座標は，$t^2\cdot\dfrac{2}{t}=2t$．これが 2 より小さくないから $t\geqq 1$.

$x=1$，$x=2$ と l の交点はそれぞれ

$$\left(1,\ \frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right),\quad \left(2,\ \frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}\right).$$

4 直線で囲まれる部分は台形だから，その面積は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}\right)+\left(\frac{2}{t}-\frac{2}{t^2}\right)\right\}\times 1=\frac{2}{t}-\frac{3}{2t^2}.$$

これを $S(t)$ とおく．

$$S'(t)=-\frac{2}{t^2}+\frac{3}{t^3}=-\frac{2t-3}{t^3}.$$

t	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		↗		↘

よって，$S(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大になる．最大値は

$$2\times\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}.$$

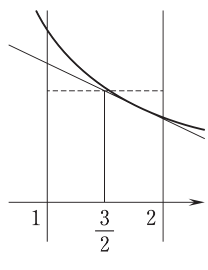
…(答)

（注 1） 当時は数学Ⅱで x^{-n}，$x^{\frac{1}{2}}$ の微分まで扱っていたから，この程度の微分は数学Ⅱの範囲になる．

（注 2） $S(t)$ は $\dfrac{1}{t}$ の 2 次関数．$0<\dfrac{1}{t}\leqq 1$ で

$$S(t)=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}.$$

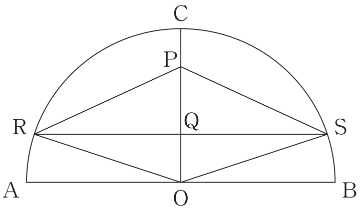
（注 3） 台形で高さが 1 だから，面積は中点を結ぶ直線 $x=\dfrac{3}{2}$ と l の交点の y 座標に等しい．$xy=1$ は下に凸だから，その値は $x=\dfrac{3}{2}$ で接するときに最大になる．そのときの y 座標は $\dfrac{2}{3}$.



第 4 問

下の図において ACB は長さ 2 の線分 AB を直径とし，O を中心とする半円周，P は AB に垂直な半径 OC 上の動点とする。

k を正の定数とし，線分 PO を $k:1$ に内分する点 Q を通って AB に平行な弦を RS とすれば，P をどこにとったとき四辺形 ROSP の面積が最大になるか。



分　野

数学 I 幾何：平面図形，**数学 I 代数**：2 次関数

考え方

OP の長さを t として，t の関数として四辺形 ROSP の面積を表し，増減を調べればよい．

【解答】

$\mathrm{OP}=t$ とおくと，PO を $k:1$ に内分した点が Q だから，$\mathrm{OQ}=\dfrac{t}{k+1}$.

$\mathrm{AB}=2$ だから，半円の半径は 1.

$$\mathrm{QR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OQ}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{t}{k+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{(k+1)^2-t^2}}{k+1}.$$

$$\text{四辺形 ROSP}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{RS}=\mathrm{OP}\cdot\mathrm{QR}=\frac{t\sqrt{(k+1)^2-t^2}}{k+1}=\frac{\sqrt{(k+1)^2t^2-t^4}}{k+1}.$$

$$(k+1)^2t^2-t^4=-\left\{t^2-\frac{(k+1)^2}{2}\right\}^2+\frac{(k+1)^4}{4}.$$

$0\leqq t\leqq 1$ だから，$\dfrac{(k+1)^2}{2}$ が 1 より大きいかどうかで場合分けする.

(i)　$0<k\leqq\sqrt{2}-1$ のとき，$t=\dfrac{k+1}{\sqrt{2}}$ のとき四辺形 ROSP の面積は最大になる.

(ii)　$k>\sqrt{2}-1$ のとき，$t=1$ のとき，すなわち P＝C のとき四辺形 ROSP の面積は最大になる.

よって，面積を最大にする P の位置は

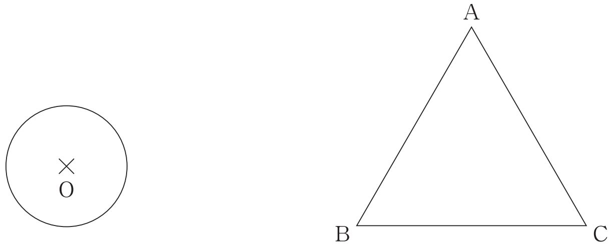
$$\begin{cases}\mathrm{OP}=\dfrac{\sqrt{2}(k+1)}{2}\ \text{となる点} & (0<k\leqq\sqrt{2}-1\ \text{のとき}),\\ \text{C と一致する点} & (k>\sqrt{2}-1\ \text{のとき})\end{cases}$$

…(答)

第5問

下の図のように，一平面上に半径の長さ1の円Oと一辺の長さ4の正三角形ABCがある。点Pは円内の任意の点を動き，点Qは正三角形の周上を動くとする。

このとき線分PQの中点Rの動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



分　野

数学Ｉ幾何：平面図形，面積

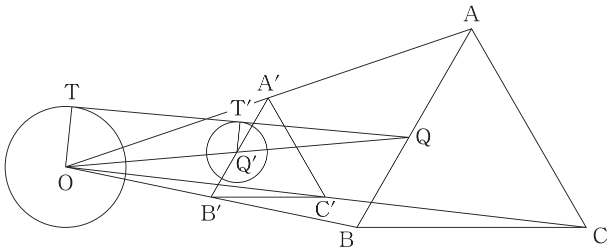
考え方

円Oと正三角形ABCの位置関係によらず，中点の描く図形が変らないことに注意.

まずQを止めてPを動かし，できた図形をQとともに動かすことを考える.

中央に穴ができることにも注意.

【解答】

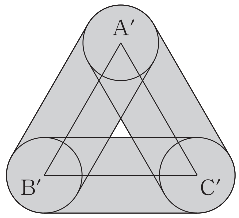


点Qを固定して，点Pを動かす．円Oの周上に点Tをとり，線分OT上に点Pをとるとき，PQの中点RはQT，QOの中点T′，Q′を結ぶ線分上を動く，点Tを円Oの周上で動かすとT′は $Q'T'=\frac{1}{2}$ でQ′の周りを動くから，T′はQ′を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の周上を動く．したがって，RはQ′を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円の内部を動く.

OA，OB，OCの中点をそれぞれA′，B′，C′とする．点Qを正三角形ABCの周上を動かすとき，OQの中点Q′は△A′B′C′の周上を動く.

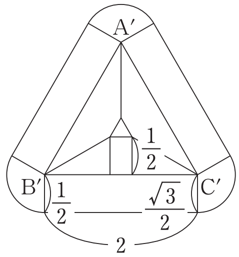
中点連結定理から，A′B′，B′C′，C′A′の長さはAB，BC，CAの長さ4の $\frac{1}{2}$ つまり2であるから，△A′B′C′は1辺の長さが2の正三角形.

以上から，点 R の存在範囲は，半径が $\frac{1}{2}$ の円板を中心が 1 辺の長さが 2 の正三角形 A′B′C′ の周上にあるように動かしたときに円板が通過する領域である．



図示すると右図網掛け部，境界を含まない．A′，B′，C′ はそれぞれ OA，OB，OC の中点．

この範囲は 3 つの扇形，3 つの長方形，3 つの台形に分けられる．



扇形は半径が $\frac{1}{2}$，中心角が 120° だから，その面積は $\frac{\pi}{12}$.

長方形は底辺が 2，高さが $\frac{1}{2}$ だから，その面積は 1.

台形の高さは $\frac{1}{2}$，下底は 2 である．上底は 2 から $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ を引いたものである．その面積は

$$\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+2)\frac{1}{2}=\frac{4-\sqrt{3}}{4}.$$

よって，求める面積は

$$3\times\frac{\pi}{12}+3\times1+3\times\frac{4-\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{4}+6-\frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注）この時代，教科書にはベクトルがなかったので，上記のように解答したが，現代（2020）ならベクトルを用いて以下のように表すであろう．

ベクトルを用いると，OQ の中点 Q′ に対して，

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}) \iff \overrightarrow{Q'R}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}$$

となるから，P が O を中心とする半径 1 の円板上を動くとき R は Q′ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円板上を動くことを示すことができ，OA，OB，OC の中点 A′，B′，C′ を用いて，例えば

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB} \iff \overrightarrow{OQ'}=(1-t)\overrightarrow{OA'}+t\overrightarrow{OB'}$$

から，Q が辺 AB 上を動くとき，Q′ が線分 A′B′ 上を動くこと等をより明快に表すことができる．

1965 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第5問

曲線 $y=3\sin 2x+\cos 3x$ の $0<x<\pi$ の範囲にある部分の接線のうち，直線 $3x+y=0$ に平行なものの方程式を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，**数学Ⅱ**：三角関数，3 倍角の公式

考え方

$y=-3x$ に平行だから $y'=-3$ となる x が接点の x 座標である．

【解答】

$f(x)=3\sin 2x+\cos 3x$ とおく．$y=-3x$ に平行だから，$f'(x)=-3$ となる x を求める．

$$f'(x)=6\cos 2x-3\sin 3x=-3.\quad \therefore\quad 1+2(1-2\sin^2 x)-(3\sin x-4\sin^3 x)=0.$$

$$\therefore\quad 4\sin^3 x-4\sin^2 x-3\sin x+3=0.\quad \therefore\quad (\sin x-1)(4\sin^2 x-3)=0.$$

よって，$\sin x=1$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．$0<x<\pi$ から，接点の x 座標は $x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2}{3}\pi$.

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$．接線の方程式は

$$y=-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-3x+\frac{3}{2}\pi.$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-1$．接線の方程式は

$$y=-3\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{2}-1=-3x+\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}-1.$$

$x=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$f\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+1$．接線の方程式は

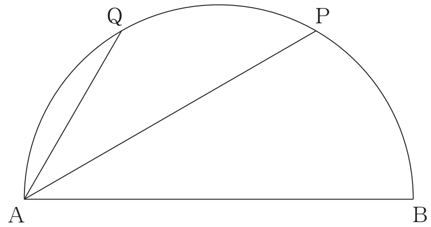
$$y=-3\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)-\frac{3\sqrt{3}}{2}+1=-3x+2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}+1.$$

よって，求める直線は

$$y=-3x+\frac{3}{2}\pi,\quad y=-3x+\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}-1,\quad y=-3x+2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}+1.$$ …(答)

第6問

下の図は半径の長さ1の半円で，弦 AP，AQ と直径 AB とのつくる角はそれぞれ 30°，60° である。このとき，弦 AP，AQ と円弧 PQ とで囲まれる部分を直径 AB のまわりに1回転して得られる立体の体積を求めよ。



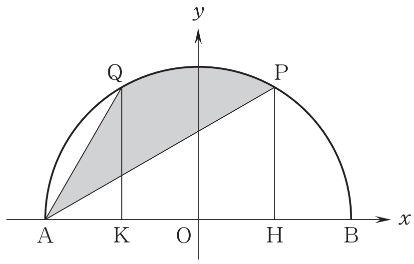
分　野

数学Ⅲ：整式の積分，体積

考え方

半円の中心を原点とする座標平面上で，$\overparen{\mathrm{PQ}}$ と x 軸の間の回転体の体積を積分で求め，それに円錐を付け加え，さらに円錐をくり抜く．

【解答】



半円の中心 O を原点とし，AB を x 軸，垂直上方を y 軸とする．P，Q から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ H，K とする．

半円の方程式は $y=\sqrt{1-x^2}$ であり，P，Q の x 座標はそれぞれ $\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$．また，$\mathrm{PH}=\mathrm{QK}=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

△APH，△AQK を x 軸の周りに1回転してできる円錐の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，求める体積は

$$\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,dx+V_2-V_1.$$

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\mathrm{PH}^2\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{8}\pi.$$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi\mathrm{QK}^2\cdot\mathrm{AK}=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

$$\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{11}{12}\pi.$$

よって，求める体積は

$$\frac{11}{12}\pi+\frac{\pi}{8}-\frac{3}{8}\pi=\frac{2}{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

1960 年代頃までの不備

1960 年代の前半までは幾何の全盛時代でした．また，その時代，今日では不備と思われるものが散見されます．

まず，範囲外の出題についてはこの本では取り上げていますが，当時は指導要領による締め付けはあまりなく，受験校では教科書にない発展的な内容を教えるのが当たり前だったように思えます．東大の入試では範囲外と思われる出題が少なくなかったが，そのことについてあまり問題にされなかったように思います（例えば 1951 年解析Ⅱ第 2 問）．大体の問題は教科書の範囲内で解けるように工夫されていますが，範囲外の知識を使うと容易になるものは少なからずあったように思います．現在のように手厳しく批判されることはなかったように思います．

曖昧な表現の問題もありました．解釈の仕方によっては問題が成り立たなくなるものもありました（例えば 1956 年 1 次文科Ⅰ）．このような場合，異議申し立てるより，問題が成り立つように解釈すべきだといわれたように思います．

同じく，曲線を回転して通過する部分の体積を求める問題が数題ありました（例えば 1950 年解析Ⅱ第 3 問）．曲線を回転しても体積は 0 のはずだが，この場合も出題者が意図している図形を回転すると解釈して解くべきだったのだろうと思います．

今から思うと随分権威主義的だったように思えますが，このようなことのために問題が廃問になったことはあまりなかったようです．

1960 年代までは幾何の全盛時代でした．幾何の問題については「幾何の時代」（上巻 p181）に書きました．問題不備という観点で幾何の問題を考えてみよう．

幾何では「気づき」が重視されていました．示された問題の本質がどこにあるかを一発で見抜く力があるかどうかが問われていて，補助線を一本引くだけで図の見え方がガラリと変ることがあるからです．

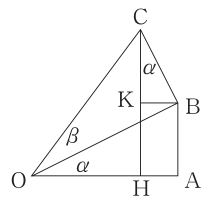
授業では先生がヒントを小出しにして気づくことを促してゆきます．

しかし，入試問題ではヒントを出すこともしますが，要点に気づかれないようにすると思います．その結果問題文はそっけないことが多いです．

ここからは私の推測ですが，そのため，問題が成立する条件について言及しないことが多いようです．例えば「ただし，$a>0$ とする」とか「AB と CD は平行でない」などの文言はヒントになると考えたのかもしれません．

「気付け」，「判れ」，「読み取れ」ということが重視されていたように思います．現代（2020）のようにデジタル化された時代とは異なる能力が求められていたのかもしれません．

また，同じ幾何について，自然な拡張は場合分けせずに理解させる傾向があったように思います．例えば 1954 年幾何第 1 問(i)の**【解答】**について私は現代風に細かく(a)，(b)，(c)，(d)と場合分けした解答を用意しましたが，当時としては(a)だけで OK だったかもしれません．



私が学習した第 2 次指導要領の教科書の数学Ⅱの加法定理の証明は右図のような図形で，OC から，OB，CBを計算し，それを使って，CK＋KH，OA－BK を計算し，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{CH}{OC}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{OH}{OC}$ を求めるだけで，$\alpha+\beta$ が直角以上の場合などは“推して知るべし”としていたように思います．

少し権威的で，今よりおおらかだった時代を現代の基準で批判するより，そういう時代であったと解釈すべきなのかもしれません．

第3章

1966~1975(昭和41~昭和50)年

複素平面，ベクトルの登場から紛争の時代

3.1　第 3 次指導要領改訂（1966 年）

第 3 次指導要領改訂は小学校で 1958 年から施行され，高校では 1963 年から実施され，入試には 1966 年から実施された．この改訂に際して家永三郎氏の書いた日本史の戦争記述が暗いとの理由で削除された問題で裁判が起こされた（1962 年検定，1965 年提訴）．今日に至る日本人の歴史認識を誤らせるきっかけを作った．

高校数学では，「数学Ⅰ」，「数学ⅡB」，「数学Ⅲ」を基本として，その他「数学ⅡA」という教科書もあったが東大入試とは関らない．

この改訂で特徴的なのは幾何学が大幅に削られたことである．代りにベクトル，複素平面が導入された．

とくに，「数ⅡB」で，ベクトル，複素平面，三角関数を同時学習するのが特徴であった．

一方微積分では「数ⅡB」では整式に限定，「数Ⅲ」では，三角関数，指数対数関数の微積分を扱うようになった．また置換積分，部分積分も「数Ⅲ」で扱うようになった．また，微分方程式も扱うようになった．

解析的な内容がやっと勢揃いした感じである．

東大入試の移行措置は 1966 年に行われ，文科が 1 題，理科が 2 題新旧別に出題された．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1966〜1968）

1966 年　共通第 2 問．一次変換による不動直線の問題（当時一次変換は範囲外だったが）．

1966 年　理科第 6 問．当時としては珍しく年号の数字を使った問題．特徴はそれだけだが．

1967 年　理科第 4 問．斜め楕円を座標変換して描く問題．

1968 年　1 次文理それぞれの問題Ⅱ，択一式でグラフを選ぶ問題．意欲的な出題だったが理科でミス問題にしてしまったのが残念．

1968 年　理科第 4 問．空間図形と回転体の体積の問題．以後何題か出題されるタイプ．

このころ　あんなこと・こんなこと

1967 年の都知事選挙で革新勢力（社会党，共産党）の推す美濃部亮吉氏が当選．京都の蜷川知事（1950 年選出），大阪の黒田知事（1971 年選出）とともに革新知事の時代が出現．

1962 年以来欧米でブームを起こしていたビートルズが 1966 年に来日して武道館で公演．日本でもグループサウンズがブームとなる．

また，アメリカのフォークソングの影響をうけた，日本のフォークソングが流行した．当時の流行曲には，「帰ってきたヨッパライ」（1967 年），「受験生ブルース」（1968 年），「山谷ブルース」（1968 年）．

1966 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

ある正の数 a に対して，連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} x+\ y+\qquad z&=4,\\ (a-4)x+\ y+\quad 5z&=0,\\ -x+ay+\qquad z&=0,\\ -3x+\ y+(a+4)z&=0 \end{aligned}$$

が $x\neq 0$，$y\neq 0$，$z\neq 0$ であるような解をもつならば $a=\boxed{\text{a}}$，$x=\boxed{\text{b}}$，$y=\boxed{\text{c}}$，$z=\boxed{\text{d}}$ である。

分　野

数学 I ：連立方程式

【解答】

$$\begin{cases} x+\ y+\qquad z=4, & \cdots① \\ (a-4)x+\ y+\quad 5z=0, & \cdots② \\ -x+ay+\qquad z=0, & \cdots③ \\ -3x+\ y+(a+4)z=0 & \cdots④ \end{cases}$$

とおく．

②−5×③ から，

$$(a+1)x+(1-5a)y=0. \qquad \cdots⑤$$

④−$(a+4)$×③ から

$$(a+1)x-(a^2+4a-1)y=0. \qquad \cdots⑥$$

⑤−⑥ から

$$(a^2-a)y=0.$$

$y\neq 0$ から $a=0$ または $a=1$．$a>0$ より $a=1$．

⑤，⑥ から $x=2y$．② から $y=z$．① から $y=1$，$x=2$，$z=1$．

$$a=\boxed{1},\quad x=\boxed{2},\quad y=\boxed{1},\quad z=\boxed{1}. \qquad \cdots\text{a, b, c, d}$$

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

直線 $y=k$（k は定数）をひくとき，円 $x^2+y^2=4$ の内部にある部分の長さと，楕円

$$\frac{(x-6)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{8}=1$$

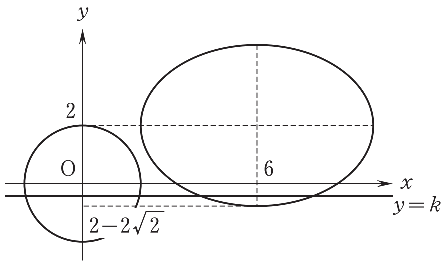
の内部にある部分の長さが等しいとする。その長さを $a\sqrt{\sqrt{5}+b}$ とし，$k=c+\sqrt{5}\,d$ とすれば，

$a=\boxed{\text{e}}$，$b=\boxed{\text{f}}$，$c=\boxed{\text{g}}$，$d=\boxed{\text{h}}$ である。

分　野

数学 II B ：二次曲線，楕円

【解答】



$y=k$ が円と異なる 2 点で交わるのは $-2<k<2$.

交点の x 座標は $x=\pm\sqrt{4-k^2}$.

切り取る線分の長さは $2\sqrt{4-k^2}$.

$y=k$ が楕円と異なる 2 点で交わるのは

$2-2\sqrt{2}<k<2+2\sqrt{2}$.

交点の x 座標は $x=6\pm\sqrt{16-2(k-2)^2}$. 切り取る線分の長さは $2\sqrt{16-2(k-2)^2}$.

$y=k$ が円と楕円に交わるとき,

$$2-2\sqrt{2}<k<2. \qquad \cdots①$$

切り取る線分の長さが等しいから

$$4-k^2=16-2(k-2)^2. \quad \therefore \quad k^2-8k-4=0.$$

よって, $k=4\pm2\sqrt{5}$. ① より $k=4-2\sqrt{5}$.

このとき, 切り取る線分の長さは $2\sqrt{4-k^2}=4\sqrt{4\sqrt{5}-8}=8\sqrt{\sqrt{5}-2}$.

よって,

$$a=\boxed{8},\quad b=\boxed{-2},\quad c=\boxed{4},\quad d=\boxed{-2}. \qquad \cdots\text{e, f, g, h}$$

Ⅲ

A, B, C, D は一平面上にない空間の 4 点とし, 線分 BC, CA, AB, AD, BD, CD の中点をそれぞれ L, M, N, L′, M′, N′ とする。次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉を, 下の 1, 2, 3 から選び, 数字 1, 2, 3 で答えよ。

直線 LL′ と AC は, $\boxed{\text{i}}$

直線 LM と L′M′ は, $\boxed{\text{j}}$

直線 LL′ と MM′ は, $\boxed{\text{k}}$

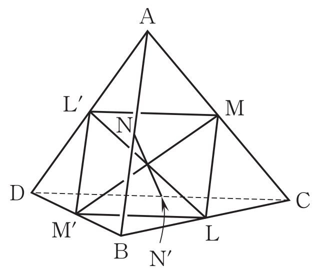
直線 MM′ と NN′ は, $\boxed{\text{l}}$

1. ねじれの位置にある。　2. 平行である。　3. 交わる。

分　野

数学Ⅰ：立体図形

【解答】



$\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$ とおくと,

$$\overrightarrow{DL}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{a}),\quad \overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),$$

$$\overrightarrow{DL'}=\frac{1}{2}\vec{a},\quad \overrightarrow{DM'}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{DN'}=\frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{LL'}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}),\quad \overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$$

だから $LL' \not\parallel AC$ で A, L, C は平面 ABC 上にあるが L′ は平面 ABC 上にない. よって, 2 直線 LL′, AC は, $\boxed{\text{ねじれの位置にある}}$. $\cdots$i=1

$$\overrightarrow{LM}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}),\quad \overrightarrow{L'M'}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$$

だから $LM \parallel L'M'$. よって, 2 直線 LM, L′M′ は, $\boxed{\text{平行である}}$. $\cdots$j=2

LL′ の中点を P, MM′ の中点を Q とすると,

$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DL}+\overrightarrow{DL'})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}),\quad \overrightarrow{DQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DM'})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

だから P＝Q．よって，2 直線 LL′，MM′ は，$\boxed{\text{交わる}}$．　…k＝3

NN′ の中点を R とすると，

$$\overrightarrow{DR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{DN'})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

だから Q＝R．よって，2 直線 MM′，NN′ は，$\boxed{\text{交わる}}$．　…l＝3

【別解】

中点連結定理から NL，L′N′ は AC に平行で長さは AC の $\frac{1}{2}$．よって，四角形 LNL′N′ は平行四辺形．対角線 LL′ は辺 NL に平行でなく AC は NL と平行だから LL′ と AC は平行でない．また，AC は平行四辺形 LNL′N′ と同一平面上にない．よって，2 直線 LL′，AC は，$\boxed{\text{ねじれの位置にある}}$．　…i＝1

同様に LML′M′ は平行四辺形．よって，対辺の 2 直線 LM，L′M′ は，$\boxed{\text{平行である}}$．　…j＝2

また，対角線の 2 直線 LL′，MM′ は，$\boxed{\text{交わる}}$．　…k＝3

また，平行四辺形 MNM′N′ の対角線の 2 直線 MM′，NN′ は，$\boxed{\text{交わる}}$．　…l＝3

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

A(0, 10)，B(0, 0)，C(5, 0)，D(14, 12) を平面上の 4 点とする。D をとおり線分 AB，AC とそれぞれ E，F で交わる直線をとり，B，C，E，F は同一円周上にある異なる 4 点となるようにする。このとき，この円の方程式は

$$x^2+y^2-\boxed{\text{m}}\,x-\boxed{\text{n}}\,y=0$$

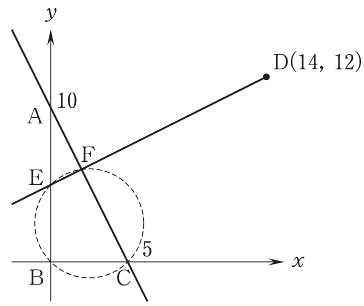
で，F の座標は ($\boxed{\text{o}}$，$\boxed{\text{p}}$) である。

分　野

数学 I：図形と方程式

【解答】

E は AB（y 軸）上にあるから ∠EBC は直角．B，C，E，F が同一円周上にあるから，∠CFE も直角．よって，F は D から AC に下した垂線の足．



AC：$y=-2x+10$ だから，DF の傾きは $\frac{1}{2}$．

$$\text{DF}：y=\frac{1}{2}(x-14)+12=\frac{1}{2}x+5.$$

E は DF と AB（y 軸）の交点だから (0, 5)．求める円は EC を直径とする．中心は $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$．

円の方程式は

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

すなわち

$$x^2+y^2-\boxed{5}\,x-\boxed{5}\,y=0.$$　…m，n

また，F は DF と AC の交点だから，その座標は ($\boxed{2}$，$\boxed{6}$)．　…o，p

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$f(x)$ は x の 2 次式とし，その x のところに $f(x)$ を代入してえられる式を $f(f(x))$ で表わす。そのとき，$f(f(x))=4x^2(f(x)+\boxed{\text{q}})$，$f(0)>0$ が成り立つならば，

$f(x)=\boxed{\text{r}}x^2+\boxed{\text{s}}x+\boxed{\text{t}}$ である。

分 野

数学 I ：恒等式，関数の合成

【解答】

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とし，$\boxed{\text{q}}=q$ とすると，

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c \\ &= a^3x^4+2a^2bx^3+a(b^2+2ac+b)x^2+(2ac+b)bx+ac^2+bc+c. \end{aligned}$$

$$4x^2(f(x)+q)=4ax^4+4bx^3+4(c+q)x^2.$$

これらが等しいから

$$\begin{cases} a^3=4a, & \cdots ① \\ 2a^2b=4b, & \cdots ② \\ a(b^2+2ac+b)=4(c+q), & \cdots ③ \\ (2ac+b)b=0, & \cdots ④ \\ (ac+b+1)c=0. & \cdots ⑤ \end{cases}$$

① で $a\neq 0$ から $a=\pm 2$．以下複号同順．

これを ② に代入すると $b=0$．

このとき ④ は成り立つ．⑤ から $(\pm 2c+1)c=0$．$f(0)=c>0$ から

$$c=\frac{1}{2},\quad a=-2.$$

③ から

$$-2(0^2-2+0)=4\left(\frac{1}{2}+q\right).\quad \therefore\quad q=\frac{1}{2}.$$

よって，

$$q=\boxed{\frac{1}{2}},\quad f(x)=\boxed{-2}x^2+\boxed{0}x+\boxed{\frac{1}{2}}. \qquad \cdots \text{q, r, s, t}$$

1966 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

6 個の関数（函数）

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\frac{1}{x},\quad f_3(x)=1-x,\quad f_4(x)=\frac{1}{1-x},\quad f_5(x)=\frac{x}{x-1},\quad f_6(x)=\frac{x-1}{x}$$

が与えられている。このとき，

$f_5(x)$ の逆関数は $f_a(x)$ で，$a=\boxed{\text{a}}$ である；

$f_6(x)$ の逆関数は $f_b(x)$ で，$b=\boxed{\text{b}}$ である；

$f_5(x)$ の x のところに $f_c(x)$ を代入して $f_4(x)$ となるならば，$c=\boxed{\text{c}}$ である；

$f_d(x)$ の x のところに $f_6(x)$ を代入して $f_4(x)$ となるならば，$d=\boxed{\text{d}}$ である。

（a，b，c，d は，番号 1，2，3，4，5，6 のうちいずれかである）

分　野

数学 I ：関数の合成

【解答】

$y=f_5(x)=\dfrac{x}{x-1}$ とおき，これを x について解くと $x=\dfrac{y}{y-1}=f_5(y)$．よって，$f_5(x)$ の逆関数は $f_5(x)$．よって，$a=\boxed{5}$ である． …a

$y=f_6(x)=\dfrac{x-1}{x}$ とおき，これを x について解くと $x=\dfrac{1}{1-y}=f_4(y)$．よって，$f_6(x)$ の逆関数は $f_4(x)$．よって，$b=\boxed{4}$ である． …b

$y=f_c(x)$ とおき，$f_5(f_c(x))=f_4(x)$ から $\dfrac{y}{y-1}=\dfrac{1}{1-x}$ を y について解くと，$y=\dfrac{1}{x}=f_2(x)$．よって，$c=\boxed{2}$ である． …c

$y=f_6(x)$ とおき，これを x について解くと $x=\dfrac{1}{1-y}$．$f_d(f_6(x))=f_4(x)$ を y で表すと，

$f_d(y)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-y}}=\dfrac{y-1}{y}=f_6(y)$．よって，$d=\boxed{6}$ である． …d

（注 1）　$f_1(x)$ は恒等関数．$f_2{}^{-1}(x)=f_2(x)$，$f_3{}^{-1}(x)=f_3(x)$，$f_4(x)=f_2(f_3(x))$，

$f_3(f_2(x))=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}=f_6(x)$，$f_5(x)=f_2(f_6(x))=f_2(f_3(f_2(x)))$，

$f_3(f_4(x))=f_3(f_2(f_3(x)))=1-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{x}{x-1}=f_5(x)$．

これらから $f_1=e$（恒等関数）．f_2，f_3 は自分自身が逆関数である関数である．

また，一般に関数の合成を $f(g(x))$ を $f\circ g(x)$ とかき，f，g，$f\circ g$ を 1 つの関数を表す記号として扱う．

また，$f(g(h(x)))$ を表す記号は $(f\circ g)\circ h$ でも $f\circ(g\circ h)$ でもあるので（結合法則が成り立つ），区別せず $f\circ g\circ h$ とかく．

e を恒等関数としたとき，一般に以下の関係が成り立つ．ただし，f，g，h は任意の関数．f の逆関数があればそれを f^{-1} とかく．

$$e\circ f=f\circ e=f,\quad f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=e,\quad (f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1},\quad (f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)=f\circ g\circ h.$$

本問の $f_1=e$，f_2，f_3 以外の関数は f_2，f_3 によって，

$$f_4=f_2\circ f_3,\quad f_5=f_2\circ f_3\circ f_2=f_3\circ f_2\circ f_3,\quad f_6=f_3\circ f_2$$

のように表される．これらを使うと次のように示せる．

$f_5^{-1}=(f_2\circ f_3\circ f_2)^{-1}=f_2^{-1}\circ f_3^{-1}\circ f_2^{-1}=f_2\circ f_3\circ f_2=f_5.$

$f_6^{-1}=(f_3\circ f_2)^{-1}=f_2^{-1}\circ f_3^{-1}=f_2\circ f_3=f_4.$

$f_c=f_5^{-1}\circ f_4=(f_2\circ f_3\circ f_2)\circ(f_2\circ f_3)=f_2.$

$f_d=f_4\circ f_6^{-1}=(f_2\circ f_3)\circ(f_2\circ f_3)=f_2\circ(f_2\circ f_3\circ f_2)=f_3\circ f_2=f_6.$

（注２） この年から新課程になり，教科書は関数に変わった．旧課程生のために問題文の１ヶ所だけ「関数（函数)」とし，以後「関数」としている．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

放物線 $y=x^2-4x-3$ と交わり，x 軸に平行な任意の直線を，l とし，l とその放物線との交点を P，Q とする。線分 PQ を，その中点のまわりに正の向きに 60° 回転してえられる線分を P′Q′ とすると，点 P′，Q′ はともに放物線

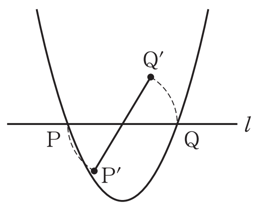
$$y=\boxed{\text{e}}\,x^2-(\boxed{\text{f}}-\sqrt{3})x+\boxed{\text{g}}-\boxed{\text{h}}\sqrt{3}$$

の上にある。

分　野

数学Ⅰ：2 次関数，**数学ⅡB**：図形の移動，軌跡

【解答】



「交わる」は接する場合を含まないと解釈する．また，P，Q の x 座標は Q の方が大きいとして一般性を失わない．

l：$y=l$ と与放物線の交点の x 座標は方程式 $x^2-4x-3=l$ の 2 解で，

$$x=2\pm\sqrt{l+7}$$

である．中点を M とすると，M の座標は $(2,\ l)$．$\mathrm{PM}=\mathrm{QM}=\sqrt{l+7}$．

$$-\overrightarrow{\mathrm{MP'}}=\overrightarrow{\mathrm{MQ'}}=\mathrm{MP}(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ)=\frac{\sqrt{l+7}}{2}(1,\ \sqrt{3}).$$

よって P′，Q′ の座標は P′ が上，Q′ が下の複号で表すと

$$\left(2\mp\frac{\sqrt{l+7}}{2},\ l\mp\frac{\sqrt{3(l+7)}}{2}\right).$$

$$x=2\mp\frac{\sqrt{l+7}}{2},\quad y=l\mp\frac{\sqrt{3(l+7)}}{2}$$

とおくと，

$$y-l=\sqrt{3}\,(x-2),\quad \frac{l+7}{4}=(x-2)^2$$

から l を消去して，

$$y=4(x-2)^2+\sqrt{3}\,(x-2)-7=\boxed{4}\,x^2-(\boxed{16}-\sqrt{3})x+\boxed{9}-\boxed{2}\sqrt{3}.$$

…e，f，g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

直方体の 1 つの頂点 O に集まる 3 辺を OA，OB，OC とする。AB=3，AC=2，∠BAC=60° であるとき，$OA^2=\boxed{\text{i}}$，$OB^2=\boxed{\text{j}}$，$OC^2=\boxed{\text{k}}$ である。

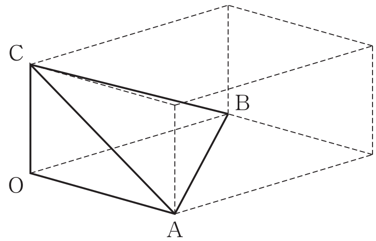
また，点 O から三角形 ABC までの距離は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\boxed{\text{l}}}$ である。

分　野

数学Ⅰ：立体図形

【解答】

余弦定理から



$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ$$
$$=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7.$$

$OA=a$，$OB=b$，$OC=c$ とおくと，

$AB^2=a^2+b^2=9$，　$AC^2=a^2+c^2=4$，　$BC^2=b^2+c^2=7$.

これらから，

$$OA^2=a^2=\boxed{3},\quad OB^2=b^2=\boxed{6},\quad OC^2=c^2=\boxed{1}.\qquad\cdots\text{i, j, k}$$

また，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

また四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{6}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

また，点 O から三角形 ABC までの距離を h とすると，四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle ABC\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{2}h$$

とも表される．よって，

$$h=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{\boxed{6}}.\qquad\cdots\text{l}$$

Ⅳ

下の不等式1，2，3，4，5から，次の $\boxed{\quad\quad}$ にあてはまるものを選び，数字1，2などで答えよ（x，y は実数とする）。

$x+y<1$ かつ $x-y<1$ ならば $\boxed{\text{m}}$ である。

$x+y<1$ かつ $\boxed{\text{n}}$ ならば $x-y<1$ である。

$x+y<1$ ならば $x-y<1$ または $\boxed{\text{o}}$ である。

$\boxed{\text{p}}$ ならば $x+y<1$ または $x-y<1$ である。

1．$y<1$　　2．$y-2x<1$　　3．$x-2y<1$

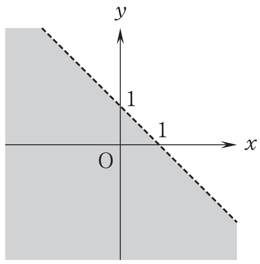
4．$x-y^2<1$　　5．$x^2+y^2<1$

分　野

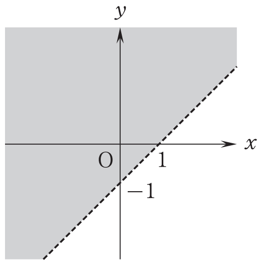
数学Ⅰ：不等式と領域，集合と論理

【解答】

$x+y<1$，$x-y<1$ の領域をそれぞれ A，B として図示すると下図網掛け部．境界を含まない．

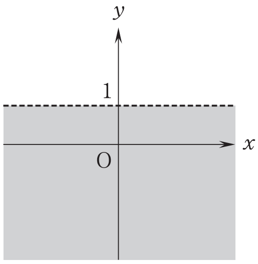


$A=\{(x,\ y)\,|\,x+y<1\}$

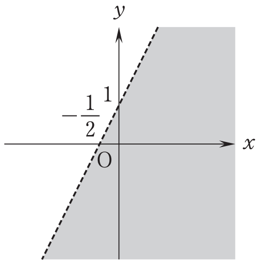


$B=\{(x,\ y)\,|\,x-y<1\}$

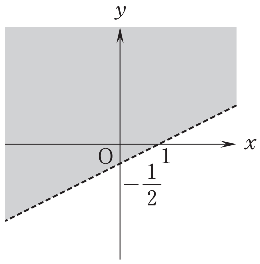
選択肢 i（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$）の領域をそれぞれ X_i として図示すると下図網掛け部．境界を含まない．



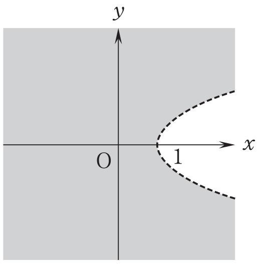
$X_1=\{(x,\ y)\,|\,y<1\}$



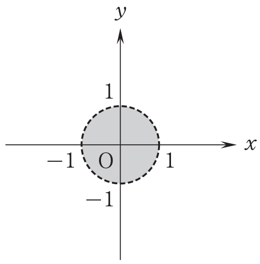
$X_2=\{(x,\ y)\,|\,y-2x<1\}$



$X_3=\{(x,\ y)\,|\,x-2y<1\}$



$X_4=\{(x,\ y)\,|\,x-y^2<1\}$



$X_5=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$

$\boxed{\text{m}}$ が成り立つのは $A\cap B\subset X_i$ をみたす場合．これをみたすのは $i=\boxed{4}$ のみ．　…m

$\boxed{\text{n}}$ が成り立つのは $A\cap X_i\subset B$ をみたす場合．これをみたすのは $i=\boxed{3}$ のみ．　…n

$\boxed{\text{o}}$ が成り立つのは $A\subset B\cup X_i$ をみたす場合．これをみたすのは $i=\boxed{1}$ のみ．　…o

$\boxed{\text{p}}$ が成り立つのは $X_i\subset A\cup B$ をみたす場合．これをみたすのは $i=\boxed{5}$ のみ．　…p

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

関数 $f(x)=\boxed{\text{q}}\,x^3+\boxed{\text{r}}\,x^2+\boxed{\text{s}}\,x+\boxed{\text{t}}$

は，$x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとる。

分 野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

$\boxed{\text{q}}=q$，$\boxed{\text{r}}=r$，$\boxed{\text{s}}=s$，$\boxed{\text{t}}=t$ とおくと

$$f(x)=qx^3+rx^2+sx+t,\quad f'(x)=3qx^2+2rx+s.$$

$f'(x)=0$ の解は 1，2 だから

$$f'(x)=3q(x-1)(x-2)=3qx^2-9qx+6q.\quad \therefore\quad f(x)=\int_0^x f'(u)\,du+t=qx^3-\frac{9}{2}qx^2+6qx+t.$$

$$f(1)=\frac{5}{2}q+t=6,\quad f(2)=2q+t=5.$$

よって，$q=2$，$t=1$．このとき，$f(x)$ は $x=1$ で極大，$x=2$ で極小となる．よって，

$$f(x)=\boxed{2}\,x^3+\boxed{-9}\,x^2+\boxed{12}\,x+\boxed{1}.$$ …q，r，s，t

1966 年　2 次試験（文科）

第 1 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕（A・B 共通問題）

ある鉄道の旅客運賃計算規則は下記のとおりであり，それによると，距離が 319 km，349 km のとき，運賃は，それぞれ 970 円，1010 円となる。下記の文中の a，b にあてはまる数を求めよ。ただし a，b はともに 0.1 の整数倍である。

> 旅客運賃は，距離が 300 km 以下の分に対しては 1 km につき a 円，300 km を超過した分に対しては 1 km につき b 円として計算し，その結果において，10 円未満の端数（はすう）は 10 円に切り上げるものとする。

分　野

数学 I：不等式，文章題

考え方

319 km と 349 km について a，b で計算しその結果にあてはまる a，b を求める．

【解答】

319 km について，300 km と 19 km に分け，970 円になるのだから計算結果は

$$960<300a+19b\leqq 970. \qquad \cdots ①$$

349km についても同様に計算すると，

$$1000<300a+49b\leqq 1010. \qquad \cdots ②$$

49×①−19×②

$$\begin{array}{rrcrcr} & 49\times 960= 47040 & < & 49\times 300a+49\times 19b & \leqq & 49\times 970= 47530 \\ +) & -19\times 1010=-19190 & \leqq & -19\times 300a-19\times 49b & < & -19\times 1000=-19000 \\ \hline & 27850 & < & 9000a & < & 28530 \end{array}$$

よって，

$$3<\frac{27850}{9000}<a<\frac{28530}{9000}<3.2$$

a は 0.1 の整数倍だから $a=3.1$ このときたしかに上の不等式をみたす.

①，② から

$$960-930=30<19b\leqq 970-930=40, \quad 1000-930=70<49b\leqq 1010-930=80.$$

$$\frac{70}{49}<\frac{30}{19}, \quad \frac{80}{49}<\frac{40}{19}. \quad 1.5<\frac{30}{19}<b\leqq\frac{80}{49}<1.7$$

b は 0.1 の整数倍だから $b=1.6$　このときたしかに上の不等式をみたす.

以上から

$$a=3.1, \quad b=1.6 \qquad \cdots(答)$$

第2問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕(A・B共通問題)

平面上のある直線 l の上の任意の点 $(x,\ y)$ に対し，点 $(4x+2y,\ x+3y)$ がふたたび l の上にあるという。このような直線 l をすべて求めよ。

分　野

数学Ⅰ：直線の方程式

考え方

直線を $x=k$ または $y=mx+n$ として直線上の点を t で表す.

【解答】

直線 l が y 軸に平行なとき，その方程式を $x=k$ とする．l 上の点 $\mathrm{P}(k,\ t)$ に対応する点 P' は $(4k+2t,\ k+3t)$．t は P が l 上を動くとき変化するから P' の x 座標が一定値 k であることはない．よって，l 上の任意の点 P に対して P' が l 上にあることはない．

直線 l が y 軸に平行でないとき，その方程式を $y=mx+n$ とする．l 上の点 $\mathrm{P}(t,\ mt+n)$ に対応する点 P' は $(4t+2(mt+n),\ t+3(mt+n))=(4t+2mt+2n,\ t+3mt+3n)$．$\mathrm{P}'$ が l 上にある条件は

$$t+3mt+3n=m(4t+2mt+2n)+n.\quad (3m+1)t+3n=(2m^2+4m)t+2mn+n.$$

l 上の任意の点 P についてこの式が成り立つから

$$3m+1=2m^2+4m,\quad 3n=2mn+n.$$

$$\therefore\quad 2m^2+m-1=0.\quad (2m-1)(m+1)=0.\quad \therefore\quad m=\frac{1}{2},\ -1.$$

$m=\dfrac{1}{2}$ のとき，第2式から $3n=2n$.　$n=0$.

$m=-1$ のとき，第2式から $3n=-n$.　$n=0$.

以上から条件をみたす l の方程式は

$$y=\frac{1}{2}x,\quad y=-x.$$ …(答)

(注)　一次変換はこの時代範囲外のはずだが，本質的に一次変換の不動直線の問題である．

行列をつかって $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とは表現されていないだけである．

一次変換の問題としても，固有ベクトルを求めることをしなければ上記の方法になるであろう．

第3問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

3直線 $x+y-1=0$，$x-y+1=0$，$3x+4y-5=0$ で囲まれる三角形の内心の座標と，内接円の半径を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：図形と方程式

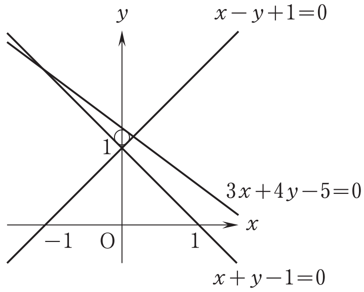
考え方

基本的には3直線までの距離が等しい点を求めるのだが，それだけだと内心の他に傍心も含まれてしまう．三角形の内部の点で3直線までの距離が等しい点を求める．

図を注意深く描けば内部が各直線のどちら側かわかる．

【解答】

$l_1: x+y-1=0,\quad l_2: x-y+1=0,\quad l_3: 3x+4y-5=0$ とする．



l_1，l_2 の交点は $(0,\ 1)$ で $3x+4y-5<0$ の範囲にあり，l_2，l_3 の交点は $\left(\dfrac{1}{7},\ \dfrac{8}{7}\right)$ で $x+y-1>0$ の範囲にあり，l_3，l_1 の交点は $(-1,\ 2)$ で，$x-y+1<0$ の範囲にある．

したがって，3 直線で囲まれた三角形内部は $x+y-1>0$，$x-y+1<0$，$3x+4y-5<0$ で表される．

この範囲内の点 $(x,\ y)$ から 3 直線までの距離が等しいとき

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}=\frac{-(x-y+1)}{\sqrt{2}}=\frac{-(3x+4y-5)}{5}.$$

よって，$x=0$，$y=\dfrac{5}{7}(3-\sqrt{2})$．内心の座標は

$$\left(0,\ \frac{5}{7}(3-\sqrt{2})\right).\qquad\cdots(\text{答})$$

また，内接円の半径は

$$\frac{x+y-1}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-5}{7}.\qquad\cdots(\text{答})$$

（注） 距離の公式が当時教科書の範囲内だったかは疑問．教科書章末問題にはある．

第 4 問

〔新課程・旧課程 共通の問題〕

半径 1 の定円 O の周上に 1 点 A が与えられている。A を中心とする円が，円 O の直径 AA′ と交わる点を R，円 O と交わる点を P，Q とするとき，四辺形 APRQ の面積の最大値を求めよ。

分 野

数学Ⅰ：平面図形，面積，**数学ⅡB**：整式の微分

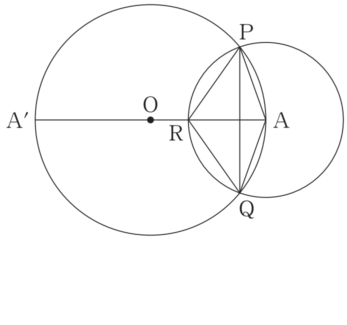
考え方

円 A の半径を r とし，四角形 APRQ$=2\triangle$APR を r で表すことを考える．$\sin\angle$PAR を r で表せばよい．

【解答】

円 A の半径を r $(0<r<2)$ とする．四角形 APRQ$=2\triangle$APR で，底辺を AR $(=r)$ としたとき，$\angle\text{PAR}=\theta$ とおくと，高さは $\text{AP}\sin\theta=r\sin\theta$．

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{\text{OA}^2-\left(\dfrac{\text{AP}}{2}\right)^2}}{\text{OA}}=\frac{\sqrt{4-r^2}}{2}.$$



よって，

$$\text{四角形 APRQ}=2\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\sqrt{4-r^2}.$$

$f(x)=x^2(4-x)$ $(0<x<4)$ とおくと四角形 APRQ の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{f(r^2)}$．

$f'(x)=8x-3x^2=(8-3x)x.$

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{8}{3}$	$\cdots$	(4)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$f\left(\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{64}{9}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{16^2}{3^3}.$

よって，四角形 APRQ の面積は $r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき最大値

$$\frac{8}{9}\sqrt{3} \qquad \cdots(答)$$

をとる．

第 5 問

〔新課程の問題〕

空間の 2 点 (10, 2, 5)，(−6, 10, 11) を直径の両端とする球面がある。

(1) この球面が，xy 平面からきりとる円の面積を求めよ。

(2) この球面が，z 軸からきりとる線分の長さを求めよ。

分　野

数学 I ：空間図形

考え方

中点と半径はすぐに求まり，球面の方程式も定まる．xy 平面は $z=0$，z 軸は $x=y=0$ であることを間違えなければ易しい．

【解答】

2 点を結ぶ線分の中点 (2, 6, 8) が中心，半径は $\sqrt{(10-2)^2+(2-6)^2+(5-8)^2}=\sqrt{89}.$

球面の方程式は

$$(x-2)^2+(y-6)^2+(z-8)^2=89.$$

(1) xy 平面との交わりは

$$(x-2)^2+(y-6)^2=89-8^2=25$$

だから，その面積は

$$25\pi. \qquad \cdots(答)$$

(2) z 軸との交わりは

$$(z-8)^2=89-2^2-6^2=49.$$

よって 2 交点は (0, 0, 15)，(0, 0, 1)．線分の長さは

$$14. \qquad \cdots(答)$$

(注)　球面の方程式は次のようにも求められる．A(10, 2, 5)，B(−6, 10, 11) とおくと，球面上の点は 2 点 A，B を直角に見込む点 P(x, y) の軌跡．(A，B も含む)

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-10)(x+6)+(y-2)(y-10)+(z-5)(z-11)=0.$$

これが球面の方程式.

第５問

〔旧課程の問題〕

点Ｏを中心とする定円の円周上に１点Ａを固定し，ＯともＡとも異なる点Ｐを半径OA上にとる。点Ｐを通りOAに垂直な弦の一端における円の接線が，OAの延長と交わる点をＱとする。

点Ｐが点Ａに近づくときの $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}$ の極限を求めよ。ただし，$\overline{\mathrm{PQ}}$，$\overline{\mathrm{PA}}$ はそれぞれ線分PQ，PAの長さである。

分　野

（旧課程）数学Ⅰ幾何：平面図形，**（旧課程）数学Ⅱ**：関数の極限

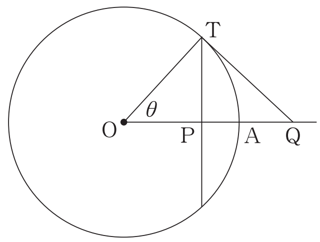
考え方

点Ｐを通りOAに垂直な弦の一端をＴとし，$\angle \mathrm{TOA}=\theta$ とおくと，OP，OQは θ の関数として表される．

【解答】

$\mathrm{OA}=1$ として一般性を失わない．

点Ｐを通りOAに垂直な弦の一端をＴとし，$\angle \mathrm{TOA}=\theta$ とおく．



$\mathrm{OP}=\mathrm{OT}\cos\theta=\cos\theta$，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\mathrm{OT}}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

$\mathrm{OA}=1$ より，

$$\mathrm{PQ}=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta},\quad \mathrm{PA}=1-\cos\theta.$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}.$$

$\mathrm{P}\to\mathrm{A}$ のとき $\theta\to 0$，$\cos\theta\to 1$ だから

$$\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}\to 2. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１）　聖文社解答ではＯを原点，A(1, 0)とし，$\mathrm{P}(x_1,\ 0)$ $(0<x_1<1)$ とし，$\mathrm{T}(x_1,\ y_1)$ とおくと，接線 $x_1x+y_1y=1$ から，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{x_1},\ 0\right)$.

$$\lim_{x_1\to 1}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\lim_{x_1\to 1}\frac{\dfrac{1}{x_1}-x_1}{1-x_1}=\lim_{x_1\to 1}\frac{1+x_1}{x_1}=2$$

のように解いていた．

（注２）　この問題では，図形を相似に拡大しても，縮小しても $\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{PA}}}$ の値は変わらないからOAの長さをどのようにとってもよい．**【解答】**では $\mathrm{OA}=1$ とした．

図形はそのままで，OAの長さを長さの単位としたと考えてもよい．

1966 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

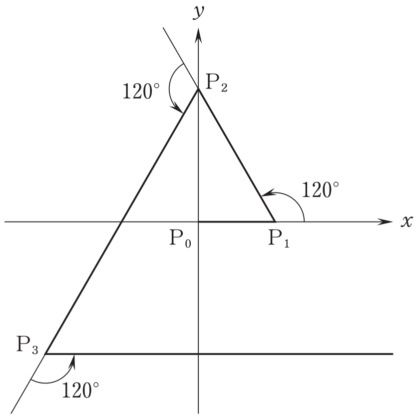
第 3 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

平面上に点列

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad \cdots,\quad P_n,\quad \cdots$$

があり，P_0，P_1 の座標はそれぞれ $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$ である。また，任意の自然数 n に対し，線分 P_nP_{n+1} の長さは $P_{n-1}P_n$ の長さの 2 倍で，半直線 P_nP_{n+1} が半直線 $P_{n-1}P_n$ となす角は 120° である。P_{3n} の座標を求めよ。



分　野

数学ⅡB：複素数平面，数列

考え方

複素数で考えるとよい．120° 回転して長さを 2 倍にするのは複素数では $2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ をかけることになる．有向線分 $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を表す複素数は有向線分 $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ を表す複素数を $2(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$ 倍したものである．したがって，有向線分 $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を表す複素数は複素数の等比数列をなす．

【解答】

xy 平面を複素数平面とみて，点 P_n を表す複素数を p_n とおくと，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ を表す複素数は $p_{n+1} - p_n$.

$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}$ は $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$ を正の向きに 120° 回転し 2 倍したものであるから，

$$r=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=-1+i\sqrt{3}$$

とおくと,

$$p_{n+1}-p_n=r(p_n-p_{n-1}).$$

$p_1-p_0=1$ だから,$p_{n+1}-p_n=r^n$.$p_0=0$ だから

$$p_n=p_0+\sum_{k=0}^{n-1}(p_{k+1}-p_k)=\sum_{k=0}^{n-1}r^k=\frac{r^n-1}{r-1}.$$

$$r^3=2^3\{\cos(3\times 120^\circ)+i\sin(3\times 120^\circ)\}=8,\quad r^{3n}=8^n.\quad \frac{1}{r-1}=\frac{1}{-2+i\sqrt{3}}=\frac{-2-i\sqrt{3}}{7}.$$

よって,

$$p_{3n}=(8^n-1)\frac{-2-i\sqrt{3}}{7}.$$

よって,

$$\mathrm{P}_{3n}\left(-\frac{2}{7}(8^n-1),\ -\frac{\sqrt{3}}{7}(8^n-1)\right). \qquad \cdots(答)$$

【別解】

【別解】の考え方

複素数平面を用いないなら,数列の問題になる.120° ずつ回転するから半直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の向きは n を 3 で割った余りで分類される.

P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする.線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さは公比 2 の等比数列をなす.$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=1$ が初項だから,$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=2^n$.

半直線 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の向きは x 軸正方向に対して $n\cdot 120^\circ$ だから,n が 3 の倍数のとき x 軸正方向である.

したがって

$$x_{n+1}=x_n+2^n\cos(n\cdot 120^\circ),\quad y_{n+1}=y_n+2^n\sin(n\cdot 120^\circ).$$

$$\begin{cases} x_{3k+1}=x_{3k}+2^{3k}, & y_{3k+1}=y_{3k}, \\ x_{3k+2}=x_{3k+1}-2^{3k}, & y_{3k+2}=y_{3k+1}+2^{3k}\sqrt{3}, \\ x_{3k+3}=x_{3k+2}-2^{3k+1}, & y_{3k+3}=y_{3k+2}-2^{3k+1}\sqrt{3}. \end{cases}$$

よって,

$$x_{3k+3}=x_{3k}-2^{3k+1},\quad y_{3k+3}=y_{3k}-2^{3k}\sqrt{3}.$$

$(x_0,\ y_0)=(0,\ 0)$ だから,

$$x_{3n}=x_0-\sum_{k=0}^{n-1}2^{3k+1}=-\frac{2}{7}(8^n-1).$$

$$y_{3n}=y_0-\sum_{k=0}^{n-1}2^{3k}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{7}(8^n-1).$$

よって,

$$\mathrm{P}_{3n}\left(-\frac{2}{7}(8^n-1),\ -\frac{\sqrt{3}}{7}(8^n-1)\right). \qquad \cdots(答)$$

(注) この問題は複素数平面を想定して出題されているように見える.しかし実際には新旧両課程共通問題として出題されている.旧課程の方法でも**【別解】**のように解けるが,新課程生は複素数平面とベクトルを学習しているのでこの問題に関しては新課程生が圧倒的に有利であったのではないかと想像される.

また,行列,一次変換はこの時点では範囲外であるが行列を使っても複素数平面と同様に解くことができる.

第4問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

x に関する方程式 $\dfrac{x}{9}-\sin\dfrac{\pi x}{6}=0$ の最大の根に，もっとも近い整数を求めよ。

分　野

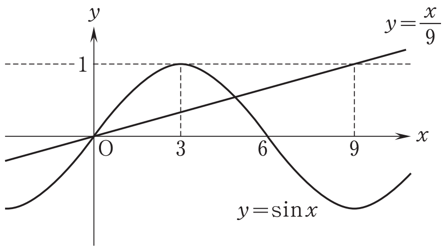
数学Ⅰ：三角関数

考え方

$\dfrac{x}{9}\leqq 1$ の中で考え，$\sin\dfrac{\pi x}{6}=1$ となる x を考える．

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．



$f(x)=\dfrac{x}{9}-\sin\dfrac{\pi x}{6}$，$g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{6}$ とおく．

$g(x)\leqq 1$ だから解（根）があるなら $\dfrac{x}{9}\leqq 1$．よって，$x\leqq 9$．

$g(x)=1$ となるのは $0<x\leqq 9$ の範囲では $x=3$ のみ，また $x=6$ のとき，$g(x)=0$ で $6\leqq x\leqq 9$ の範囲では $g(x)\leqq 0$ である．よって，$f(3)<0$，$f(6)>0$，$f(x)>0$ $(x\geqq 6)$．

したがって，$f(x)=0$ となる最大解は $3<x<6$ の範囲にある．この間 $g(x)$ は減少する．したがって，$f(x)$ は増加する．したがって，$f(x)=0$ の解はこの区間にただ1つ存在する．

$$f(4.5)=\frac{1}{2}-\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0.$$

$$f(5)=\frac{5}{9}-\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{9}-\frac{1}{2}>0.$$

よって，$f(x)=0$ の解は $4.5<x<5$ の範囲に存在しこれが最大解．

したがって，最大の解に最も近い整数は 5.　…(答)

(注)　この方程式の解を「根」というのはいささか抵抗がある．根は通常，整方程式に対して用いられる用語である．しかし，当時の教科書では方程式の解をすべて根と表現していたのだからこの表現になったのであろう．

なお教科書は'75年入試対象者まで根を使い続けているので，問題文では「根」が使われている．**【解答】**で使うときは「解（根）」のように表し，これらが同じものであることを示した．

第5問

〔新課程の問題〕

半直線OXが，点Oのまわりを毎秒1ラジアンの角速度で回転している。OX上を運動する点Pが，時刻 t 秒において，点Oから e^{2t} cmの距離にあるという。時刻0秒から 2π 秒までの間に，点Pの動く道のりを求めよ。ただし，e は自然対数の底である。

分　野

数学Ⅲ：曲線長

考え方

問題の表現は点の座標が極座標で表されている．一旦直交座標に直し曲線長の公式にのせればよい．

【解答】

O を原点とし，時刻 0 における半直線 OX の向きを x 軸正方向とする．時刻 t における x 軸正方向と OX のなす角は t で，$\mathrm{OP}=e^{2t}$ だから P の座標は $(e^{2t}\cos t,\ e^{2t}\sin t)$ これを $(X,\ Y)$ とする．

$$\frac{dX}{dt}=2e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t,\quad \frac{dY}{dt}=2e^{2t}\sin t+e^{2t}\cos t.$$

よって，速度ベクトルの大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2+\left(\frac{dY}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t)^2+(2e^{2t}\sin t+e^{2t}\cos t)^2}=\sqrt{4e^{4t}+e^{4t}}=\sqrt{5}\,e^{2t}.$$

求める長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{5}\,e^{2t}dt=\left[\frac{\sqrt{5}}{2}e^{2t}\right]_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)\quad \mathrm{cm}.$$ …(答)

第 5 問

〔旧課程の問題〕

2 つの一次式 $3ax+2$，$2x+b$ に対して，

$$\int_0^1(3ax+2)(2x+b)\,dx=0$$

が成り立つとき，$a+b$ はどのような範囲にあるか。

分　野

（旧課程）数学Ⅲ：整式の積分，（旧課程）数学Ⅱ：分数関数

考え方

積分は難しくないと思う．出てきた関係式は ab と a，b の 1 次式からなり b は a の 1 次分数関数で表わされる．$a+b=k$ とおき，a の 2 次方程式が実数解をもつ条件として k の範囲を求めればよい．

【解答】

$$\int_0^1(3ax+2)(2x+b)\,dx=\int_0^1(6ax^2+3abx+4x+2b)\,dx=\left[2ax^3+\frac{3}{2}abx^2+2x^2+2bx\right]_0^1$$

$$=2a+\frac{3}{2}ab+2+2b=0.$$

$a+b=k$ とおくと $b=k-a$.

これを上式に代入して整理すると，

$$3a^2-3ka-4k-4=0.$$

a が実数値をとって変化するから判別式は正または 0.

$$(3k)^2-4\cdot3(-4k-4)=9k^2+48k+48=3(3k+4)(k+4)\geqq0.$$

よって，$k\leqq-4$，$k\geqq-\frac{4}{3}$．よって，

$$a+b\leqq-4,\quad \text{または}\quad a+b\geqq-\frac{4}{3}.$$ …(答)

第6問

〔新課程の問題〕

箱の中に，1から9までの数字を1つずつかいた9枚のカードがある。それらをよくかきまぜて，その中から4枚のカードをつづけて取り出し，取り出した順に左からならべて4けたの数をつくる。この数が1966より小さくなる確率を求めよ。

分野

数学Ⅲ：確率

考え方

条件をみたす場合を丹念に要領よく数え上げることに尽きる．

【解答】

4枚のカードの取り出し方の総数は ${}_9\mathrm{P}_4=9\cdot8\cdot7\cdot6$ 通り．

取り出されたカードの番号を順に a，b，c，d とする．

a は1でなければならない．

$a=1$，$2\leqq b\leqq 8$ ならば条件をみたす．その個数は $1\times7\times{}_7\mathrm{P}_2=7\cdot7\cdot6=294$ 通り．

$a=1$，$b=9$ のとき，$2\leqq c\leqq 5$ なら条件をみたす．その個数は $1\times1\times4\times6=24$ 通り．

$a=1$，$b=9$，$c=6$ のとき，$d=2, 3, 4, 5$ の4通り．

よって，条件をみたすカードの取り出し方は $294+24+4=322$ 通り．

求める確率は

$$\frac{322}{9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{23}{216}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注） 当時としては珍しくその年の年号を使った問題，私の知る限り最古の部類に入る．

第６問

〔旧課程の問題〕

平面上で，曲線 $x+y^2-5=0$ を，x 軸に平行なある直線 l_1 に関して折り返し，さらに別の直線 l_2 に関して折り返せば，曲線 $x^2-y+1=0$ に重なるという。直線 l_1 および l_2 の方程式を求めよ。

分　野

（旧課程）数学Ⅱ：図形と方程式，図形の移動

考え方

最初の放物線は右に凸である，x 軸に平行な直線で折り返しても右に凸は変らない．最後の放物線は下に凸な放物線であるから２回目に折り返す直線は傾き -1 の直線のはずである．

【解答】

最初の放物線を C_1，２番目の放物線を C_2，最後の放物線を C_3 とする．

$l_1：y=k$ とすると，C_2 の方程式は C_1 の y を $2k-y$ で置き換えた方程式 $x+(2k-y)^2-5=0$．すなわち，$y=2k$ を軸とし，$(5,\ 2k)$ を頂点とする右に凸な放物線である．

C_3 は $(0,\ 1)$ を頂点とする下に凸な放物線であるから，l_2 は傾きが -1 の直線である．

点 $(5,\ 2k)$ を l_2 について対称移動すると $(0,\ 1)$ に重なるからこの２点を結ぶ直線の傾き $\dfrac{2k-1}{5-0}$ は１に等しい．よって，$k=3$．

よって，l_2 は $(5,\ 6)$ と $(0,\ 1)$ を結ぶ線分の垂直二等分線．よって，l_2 は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ を通る．

以上から，

$$l_1：y=3,\quad l_2：y=-x+6. \qquad \cdots(答)$$

【別解】　計算だけから

$l_1：y=k$，$l_2：y=\pm x+m$ とする．以下複号同順．

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の l_1 による対称点を $\mathrm{Q}(x',\ y')$，点 $\mathrm{Q}(x',\ y')$ の l_2 による対称点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする．

PQ の中点 $\left(\dfrac{x+x'}{2},\ \dfrac{y+y'}{2}\right)$ が $l_1：y=k$ 上にあり PQ が l_1 に垂直だから，

$$x'=x,\quad y'=2k-y. \qquad \cdots①$$

また，QR の中点 $\left(\dfrac{x'+X}{2},\ \dfrac{y'+Y}{2}\right)$ が $l_2：y=\pm x+m$ 上にあり QR が l_2 に垂直だから，

$$\frac{y'+Y}{2}=\pm\frac{x'+X}{2}+m,\quad \frac{Y-y'}{X-x'}=\mp 1.$$

これと，① から

$$X=\mp y\pm 2k\mp m,\quad Y=\pm x+m.$$
$$x=\pm Y\mp m,\quad y=\mp X+2k-m.$$

$x+y^2-5=0$ のとき，

$$\pm Y\mp m+(\mp X+2k-m)^2-5=0.\quad X^2\pm Y\mp 2(2k-m)X\mp m+(2k-m)^2-5=0.$$

これが $X^2-Y+1=0$ に一致するから，複号は下の方をとり，$2k-m=0$．また，定数項は $m-5=1$．よって，$m=6$，$k=3$．

よって，

$$l_1：y=3,\quad l_2：y=-x+6. \qquad \cdots(答)$$

1967年　1次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉を下の1，2，3，4の中から選び，その記号1，2，3，4で答えよ。
“$a<b$ である”ために，

(1) “$a<x$ と $x<b$ とを満足する x がある”ことは $\boxed{\text{a}}$。
(2) “$a\leqq x$ と $x\leqq b$ とを満足する x がある”ことは $\boxed{\text{b}}$。
(3) “$x<a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する”ことは $\boxed{\text{c}}$。
(4) “$x\leqq a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する”ことは $\boxed{\text{d}}$。

1．必要でも十分でもない
2．必要かつ十分である
3．必要であるが十分でない
4．十分であるが必要でない

分　野

数学Ⅰ：必要条件・十分条件，不等式

【解答】

a，b，x は実数であるとして解答する．

(1) $a<b$ であるとき，$a<x$ と $x<b$ とを満足する実数 x は存在する．
また，$a<x$ と $x<b$ とを満足する x が存在するとき，$a<b$ である．
よって，“$a<b$ である”ために，“$a<x$ と $x<b$ とを満足する x がある”ことは
$\boxed{\text{必要かつ十分である}}$．　…a＝2

(2) $a<b$ であるとき，$a\leqq x$ と $x\leqq b$ とを満足する実数 x は存在する．
しかし，$a\leqq x$ と $x\leqq b$ とを満足する x が存在しても，$a=b$ のとき，$a<b$ ではない．
よって，“$a<b$ である”ために，“$a\leqq x$ と $x\leqq b$ とを満足する x がある”ことは
$\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$．　…b＝3

(3) $a<b$ であるとき，$x<a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する．
しかし，$x<a$ を満足する x がすべて $x<b$ を満足しても，$a=b$ のとき，$a<b$ ではない．
よって，“$a<b$ である”ために，“$x<a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する”ことは
$\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$．　…c＝3

(4) $a<b$ であるとき，$x\leqq a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する．
また，$x\leqq a$ を満足する x がすべて $x<b$ を満足するなら，$x=a$ のときから，$a<b$ である．
よって，“$a<b$ である”ために，“$x\leqq a$ を満足する x はすべて $x<b$ を満足する”ことは
$\boxed{\text{必要かつ十分である}}$．　…d＝2

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。
点 $(-1,\ 3)$ を通る放物線 $y=x^2+\boxed{\text{e}}x+\boxed{\text{f}}$ と，点 $(2,\ 6)$ を通る放物線 $y=x^2+\boxed{\text{g}}x+\boxed{\text{h}}$ とは，直線 $x=1$ に関して対称である。

分　野

数学Ⅰ：2次関数

【解答】

$\boxed{\text{e}}$，$\boxed{\text{f}}$，$\boxed{\text{g}}$，$\boxed{\text{h}}$ をそれぞれ e，f，g，h とおき，放物線 $y=x^2+ex+f$ を C_1，放物線 $y=x^2+gx+h$ を C_2 とおく．

C_1 が点 $(-1,\ 3)$ を通り，C_2 が点 $(2,\ 6)$ を通るから，$3=1-e+f$．$6=4+2g+h$．

$$-e+f=2,\quad 2g+h=2. \qquad \cdots①$$

C_1，C_2 の頂点はそれぞれ $\left(-\dfrac{e}{2},\ -\dfrac{e^2-4f}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{g}{2},\ -\dfrac{g^2-4h}{4}\right)$ で C_1，C_2 は直線 $x=1$ について対称だから，

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{e}{2}-\frac{g}{2}\right)=1,\quad -\frac{e^2-4f}{4}=-\frac{g^2-4h}{4}.$$

つまり

$$e+g=-4,\quad e^2-4f=g^2-4h. \qquad \cdots②$$

①，② から，

$$f=e+2,\quad g=-e-4,\quad h=2-2g=2-2(-e-4)=10+2e.$$
$$e^2-4(e+2)=(-e-4)^2-4(10+2e).\quad e=4.$$

よって，

$$e=\boxed{4},\quad f=\boxed{6},\quad g=\boxed{-8},\quad h=\boxed{18}. \qquad \cdots\text{e, f, g, h}$$

(注)　点 $(2,\ 6)$ の $x=1$ に関して対称点は $(0,\ 6)$ だから $y=x^2+ex+f$ は $(0,\ 6)$ を通る．これからただちに $f=6$ が導かれ，$(-1,\ 3)$ を通ることから，$e=4$ が導かれる．

また，$y=(2-x)^2+4(2-x)+6=x^2-8x+18$ から g，h も導かれる．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

関数 $f(x)=x^4-4x^3-x^2+6x+3$ の最小値は $\boxed{\text{i}}$ である。方程式 $f(x)=0$ は $\boxed{\text{j}}$ 個の正根と $\boxed{\text{k}}$ 個の負根をもつ。最小の実根にもっとも近い整数は $\boxed{\text{l}}$ である。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

問題文の「正根，負根，実根」はそれぞれ「正の解，負の解，実数解」の当時の表記である．

$$f'(x)=4x^3-12x^2-2x+6=2(2x^3-6x^2-x+3)=2(x-3)(2x^2-1).$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

$f(x)$ は $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $x=3$ で極小値をとる．

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{11}{4}-2\sqrt{2},\quad f(3)=-15$$

より，最小値は $\boxed{-15}$．　…i

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{11}{4}-2\sqrt{2}<0$，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{11}{4}+2\sqrt{2}>0$，$f(3)<0$ より $f(x)=0$ は4個の異なる実数解をもち，$f(0)=3>0$ より，$x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<0$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<3$，$x>3$ にそれぞれ1個ずつ解が存在する．

したがって，正の解は $\boxed{\ 2\ }$ 個，負の解は $\boxed{\ 2\ }$ 個ある．　…j，k

$f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$ で $f(-1)=1>0$ だから，最小の実数解は -1 と $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の間にある．したがって，最も近い整数は $\boxed{-1}$．　…l

Ⅳ

次の $\boxed{\quad}$ にあてはまる言葉を，下の1から9までの中から選び，その記号1，2，3などで答えよ。

点Pの座標 $(x,\ y)$ が次の式で与えられている。

$$x=a\cos^2\alpha+b\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta+c\sin^2\alpha$$
$$y=b\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta$$

α，β がすべての実数をとって動くとき，点Pの動く範囲の形は，

(1)　$a=1$，$b=0$，$c=1$ のとき $\boxed{\ \mathrm{m}\ }$ である。
(2)　$a=1$，$b=0$，$c=-1$ のとき $\boxed{\ \mathrm{n}\ }$ である。
(3)　$a=0$，$b=1$，$c=0$ のとき $\boxed{\ \mathrm{o}\ }$ である。
(4)　$a=1$，$b=0$，$c=0$ のとき $\boxed{\ \mathrm{p}\ }$ である。

1．長さ1の線分　　2．長さ $\dfrac{3}{2}$ の線分
3．長さ2の線分　　4．半径 $\dfrac{1}{2}$ の円
5．半径1の円　　6．半径 $\dfrac{3}{2}$ の円
7．半径2の円　　8．ただ1つの点
9．上にあげたどれとも異なるもの

注　ここでいう円とは，円周とその内部の点とを合わせたものである。

分　野

数学ⅡB：三角関数，倍角公式，**数学Ⅰ**：図形と方程式

【解答】

(1)　$a=1$，$b=0$，$c=1$ のとき，

$$x=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,\quad y=0.$$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の動く範囲は $\boxed{\text{ただ1つの点}}$ $(1,\ 0)$ のみ．　…m＝8

(2)　$a=1$，$b=0$，$c=-1$ のとき，

$$x=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,\quad y=0.$$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の動く範囲は $-1\leqq x\leqq 1$，$y=0$．つまり $\boxed{\text{長さ2の線分}}$ である．　…n＝3

(3)　$a=0$，$b=1$，$c=0$ のとき，

$$x=\cos\alpha\sin\alpha\cos\beta,\quad y=\cos\alpha\sin\alpha\sin\beta.$$

$$x=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos\beta,\quad y=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin\beta.$$

α を固定して β を動かすと，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は半径 $\frac{1}{2}|\sin 2\alpha|$ の円を描く．

$0\leqq\frac{1}{2}|\sin 2\alpha|\leqq\frac{1}{2}$ だから，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の動く範囲は $x^2+y^2\leqq\frac{1}{4}$．つまり $\boxed{\text{半径 } \frac{1}{2} \text{ の円}}$ である．

…o=4

(4) $a=1$，$b=0$，$c=0$ のとき，

$$x=\cos^2\alpha\quad y=0.$$

よって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の動く範囲は $0\leqq x\leqq 1$，$y=0$．つまり $\boxed{\text{長さ 1 の線分}}$ である．　…p=1

（注）一般には $b\neq 0$ のとき楕円板で

$$\frac{\left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2}{\frac{(a-c)^2+b^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{4}}\leqq 1.$$

$b=0$，$a\neq c$ のときは線分で $y=0$，$\min(a,\ c)\leqq x\leqq\max(a,\ c)$．長さは $|a-c|$．

$b=0$，$a=c$ のときは 1 点 $(a,\ 0)$．

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

一定の角速度で円運動をしている点があり，8 秒間で 1 回転する。いまこれを静止させるために制動を与えて，角速度を毎秒 $\dfrac{\pi}{96}$（弧度/秒）の割合で減少させると，静止するまでに $\boxed{\text{q}}$ 秒かかり $\boxed{\text{r}}$ 回転する。また，ちょうど 1 回転して静止させようとすれば，角速度を毎秒 $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{s}}}$（弧度/秒）の割合で減少させればよい。なお，そのとき，静止するまでに $\boxed{\text{t}}$ 秒かかる。

分 野

数学ⅡB：速度・加速度

【解答】

8 秒間で 1 回転するとき，角速度は $\dfrac{2\pi}{8}=\dfrac{\pi}{4}$(rad/秒）である．毎秒 $\dfrac{\pi}{96}$(rad/秒）の割合で減少させると，

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{96}}=\boxed{24}\text{ 秒} \qquad \cdots\text{q}$$

で静止する．静止するまでの回転角は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}\times 24=3\pi$(rad)．すなわち $\boxed{\dfrac{3}{2}}$ 回転する．

静止するまで t 秒かかるとすれば，1 回転すなわち，2π だけ動いて静止するから，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}t=2\pi. \quad \therefore \quad t=16 \text{ 秒}.$$

角速度は毎秒

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{16}=\frac{\pi}{\boxed{64}}\text{ (rad/秒)} \qquad \cdots\text{s}$$

の割合で減少させればよい．

静止するまでの時間は $\boxed{16}$ 秒． …t

（注）　$t=0$ における角速度を ω_0(rad/秒)，角加速度 $-\alpha$(rad/秒^2) で減速するとすると，t 秒後の角速度は $\omega_0-\alpha t$．それまでの回転角は $\omega_0 t-\dfrac{1}{2}\alpha t^2$．静止するまでの時間は $t_1=\dfrac{\omega_0}{\alpha}$．よって，$\alpha=\dfrac{\omega_0}{t_1}$．

回転角は $\dfrac{1}{2}\omega_0 t_1=\dfrac{1}{2}\dfrac{{\omega_0}^2}{\alpha}$ である．

また回転角（rad）を 2π で割れば回転数（回）になる．

1967 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

関係式

(1)
$$\begin{cases} x=\boxed{\text{a}}\,u+5v, \\ y=4u+\boxed{\text{b}}\,v \end{cases}$$

を満たす数 x，y，u，v は必ず

(2)
$$\begin{cases} u=\boxed{\text{c}}\,x-5y, \\ v=\boxed{\text{d}}\,x+3y \end{cases}$$

を満たし，また逆に，(2) を満たす数 x，y，u，v は，必ず (1) をも満たす。

分 野

数学 I ：連立方程式

【解答】

$\boxed{\text{a}}=a$，$\boxed{\text{b}}=b$，$\boxed{\text{c}}=c$，$\boxed{\text{d}}=d$ とおくと，

$$\begin{cases} x=au+5v & \cdots①, \\ y=4u+bv & \cdots② \end{cases} \quad \begin{cases} u=cx-5y & \cdots③, \\ v=dx+3y & \cdots④ \end{cases}$$

$b\times①-5\times②$，$4\times①-a\times②$ から

$$bx-5y=(ab-20)u,\quad 4x-ay=(20-ab)v.$$

$ab=20$ とすると，$a:5=4:b$ だから (1) をみたすとき，$y=\dfrac{b}{5}x$ でなければならない．ところが (2) では x，y はそのような制約はない．したがって (2) をみたすが，(1) をみたさない x，y が存在する．

$ab\neq 20$ のとき，

$$u=\frac{b}{ab-20}x-\frac{5}{ab-20}y,\quad v=-\frac{4}{ab-20}x+\frac{a}{ab-20}y.$$

③，④ と比較して，例えば，$x=1$，$y=0$ や，$x=0$，$y=1$ を考えることにより，

$$\frac{b}{ab-20}=c,\quad \frac{5}{ab-20}=5,\quad -\frac{4}{ab-20}=d,\quad \frac{a}{ab-20}=3.$$

これらから，

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{7},\quad c=\boxed{7},\quad d=\boxed{-4}. \qquad \cdots\text{a, b, c, d}$$

このとき，(2) をみたせば (1) もみたす．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か。

複素数 z が実数 x，y を用いて $z=x+iy$（i は虚数単位）と表わされるとき，z の絶対値 $|z|$ は $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ によって与えられる。いま，条件 $2|z-3-3i|=|z|$ を満足するあらゆる複素数 z のうちで $|z|$ が最大であるものを z_1，$|z|$ が最小であるものを z_2 で表わせば

$$z_1=\boxed{\ \mathrm{e}\ }+i\boxed{\ \mathrm{f}\ },\quad z_2=\boxed{\ \mathrm{g}\ }+i\boxed{\ \mathrm{h}\ }$$

である。

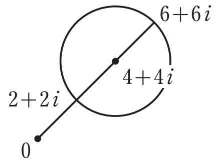
分　野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

条件式から

$$4\{(x-3)^2+(y-3)^2\}=x^2+y^2.\quad 3x^2-24x+3y^2-24y+72=0.$$
$$x^2-8x+y^2-8y+24=0.\quad (x-4)^2+(y-4)^2=8.$$



よって，z は $4+4i$ を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円をえがく．

$4+4i$ の実数倍（平行）で大きさが $2\sqrt{2}$ の複素数は $2+2i$.

よって，$|z|$ が最大になる $z=z_1$，$|z|$ が最小になる $z=z_2$ は

$$z_1=(4+4i)+(2+2i)=\boxed{\ 6\ }+i\boxed{\ 6\ },\quad z_2=(4+4i)-(2+2i)=\boxed{\ 2\ }+i\boxed{\ 2\ }.$$

…e，f，g，h

【別解】

0，$3+3i$，z を表す点をそれぞれ O，A，P とすると，与式は $|z-3-3i|:|z|=\mathrm{PA}:\mathrm{PO}=1:2$ を表すから，点 P は 2 定点 O，A からの距離の比が一定な円を描く（アポロニウスの円）.

O から最も遠いのは OA を 2：1 に外分する点で

$$z_1=\frac{-1\times0+2\times(3+3i)}{2-1}=\boxed{\ 6\ }+i\boxed{\ 6\ }.$$
…e，f

O から最も近いのは OA を 2：1 に内分する点で

$$z_2=\frac{1\times0+2\times(3+3i)}{2+1}=\boxed{\ 2\ }+i\boxed{\ 2\ }.$$
…g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数字は何か。

$(0.99)^{10}$ の小数第 1 位は $\boxed{\ \mathrm{i}\ }$，第 2 位は $\boxed{\ \mathrm{j}\ }$，第 3 位は $\boxed{\ \mathrm{k}\ }$，第 4 位は $\boxed{\ \mathrm{l}\ }$ である。

分　野

数学ⅡB：二項定理

【解答】

$$(0.99)^{10}=(1-0.01)^{10}=\sum_{k=0}^{10}{}_{10}\mathrm{C}_k(-0.01)^k=1-10\times0.01+45\times0.0001-120\times0.000001+\alpha.$$

ただし，$0<\alpha<{}_{10}\mathrm{C}_4\times10^{-8}=2.10\times10^{-6}$.

よって，

$$(0.99)^{10}=0.90438+\alpha.$$
$$(0.99)^{10}=0.\boxed{\ 9\ }\boxed{\ 0\ }\boxed{\ 4\ }\boxed{\ 3\ }\cdots.$$
…i，j，k，l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

放物線 $y=\boxed{\text{m}}x^2$ の上の異なる2点 $(\boxed{\text{n}}, 3)$ と $(4, \boxed{\text{o}})$ とにおける接線は点 $(\boxed{\text{p}}, -6)$ で交わる。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

$\boxed{\text{m}}$, $\boxed{\text{n}}$, $\boxed{\text{o}}$, $\boxed{\text{p}}$ をそれぞれ m, n, o, p, 放物線 $y=mx^2$ を C, 2点 $(n, 3)$, $(4, o)$ をそれぞれ A, B とする．

2点 A, B は C 上にあるから，

$$3=mn^2,\quad o=16m. \qquad \cdots①$$

また，C 上の点 (t, mt^2) における接線は

$$y=2mt(x-t)+mt^2=2mtx-mt^2.$$

A における接線は $y=2mnx-mn^2$，B における接線は $y=8mx-16m$.

交点の x 座標は $2mnx-mn^2=8mx-16m$ の解．

$C : y=mx^2$ は放物線だから $m\neq 0$，$(n, 3)$，$(4, o)$ は C 上の異なる2点だから $n\neq 4$.

よって，$x=p=\dfrac{16-n^2}{2(4-n)}=\dfrac{4+n}{2}$. $\qquad \cdots②$

y 座標は $8mx-16m=4m(n+4)-16m=4mn=-6$.

① から $m=\dfrac{3}{n^2}$ を代入して，

$$4\cdot\frac{3}{n^2}\cdot n=\frac{12}{n}=-6. \quad \therefore \quad n=-2.$$

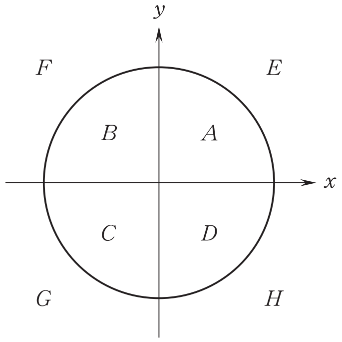
よって，①，② より，$m=\dfrac{3}{4}$，$o=12$，$p=\dfrac{n+4}{2}=1$.

$$m=\boxed{\frac{3}{4}},\quad n=\boxed{-2},\quad o=\boxed{12},\quad p=\boxed{1}. \qquad \cdots\text{m, n, o, p}$$

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉を下の1から12までの中から選び，その記号1，2，3などで答えよ。

平面を x 軸，y 軸と円 $x^2+y^2=1$ とによって8個の部分に分け，各部分を図のように A，B，C，D，E，F，G，H と名づける。ただし，これらの部分は境界上の点を含まないものとしておく。



点 (x, y) が B の部分全部を動くとき，

(1) 点 $(-y, x)$ は $\boxed{\text{q}}$。

(2) 点 $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ は $\boxed{\text{r}}$。

(3) 点 $\left(\log_{10}\dfrac{1}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x}\right)$ は $\boxed{\text{s}}$。

(4) 点 $(2^{-x}\cos y, 2^{-x}\sin y)$ は $\boxed{\text{t}}$。

1．A にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
2．B にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
3．C にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
4．D にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
5．E にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
6．F にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
7．G にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
8．H にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
9．A にも E にもはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
10．B にも F にもはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
11．C にも G にもはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。
12．D にも H にもはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない。

分 野

数学Ⅰ：不等式と領域，**数学ⅡB**：極座標

【解答】

点 (x, y) が B の部分を動くとき，

$$x<0, \quad y>0, \quad x^2+y^2<1. \qquad \cdots(*)$$

(1) $(-y, x)=(X, Y)$ とおくと，(*) から

$$X=-y<0, \quad Y=x<0, \quad X^2+Y^2=x^2+y^2<1.$$

よって，点 $(-y, x)$ は $\boxed{C\text{ にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない}}$．　…q=3

(注1) $(-y, x)$ は (x, y) を原点を中心に 90° 回転した点である．これから，領域 B は領域 C に移ると考えてもよい．

(2) $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)=(X,\ Y)$ とおくと，(*) から，

$$X=\frac{x}{x^2+y^2}<0,\quad Y=\frac{-y}{x^2+y^2}<0,\quad X^2+Y^2=\frac{1}{x^2+y^2}>1.$$

よって，点 $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ は $\boxed{G\text{ にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない}}$．

…r=7

（注２） 逆に $(X,\ Y)$ が G を動くとき，$x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}<0$，$y=\dfrac{-Y}{X^2+Y^2}>0$ だから，$(x,\ y)$ は B 内を動く．したがって，B 全体は G 全体に移る．

(3) B の点を $(x,\ y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ のようにとると，(*) から，$(0<r<1,\ 90^\circ<\theta<180^\circ)$

$\left(\log_{10}\dfrac{1}{x^2+y^2},\ -\dfrac{y}{x}\right)=(X,\ Y)$ とおくと，

$$(X,\ Y)=(-2\log_{10}r,\ -\tan\theta).$$

$0<r<1$，$90^\circ<\theta<180^\circ$ から

$$X=-2\log_{10}r>0,\quad Y=-\tan\theta>0$$

でそれぞれこの範囲全体を動く．

よって，点 $\left(\log_{10}\dfrac{1}{x^2+y^2},\ -\dfrac{y}{x}\right)$ は

$\boxed{A\text{ にも }E\text{ にもはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない}}$．　…s=9

（注３） 点 $\left(\log_{10}\dfrac{1}{x^2+y^2},\ -\dfrac{y}{x}\right)$ は A と E と A，E の境界の部分全体を動く．

(4) 直交座標が $(2^{-x}\cos y,\ 2^{-x}\sin y)$ である点を P とすると，P の極座標は $(2^{-x},\ y)$．

(*) から，$-1<x<0$，$0<y<1$．

よって，$2>2^{-x}>1$，$0<y<1<\dfrac{\pi}{2}$．

よって，点 $\mathrm{P}(2^{-x}\cos y,\ 2^{-x}\sin y)$ は

$\boxed{E\text{ にはいるが，その他の文字で表わされた部分にははいらない}}$．　…t=5

（注４） 点 $(2^{-x}\cos y,\ 2^{-x}\sin y)$ は E の一部分を動き，全体は動かない．

（注５） 問題文について，旺文社正解，聖文社便覧のいずれにおいても，$\boxed{}$ の直後，選択肢の末尾の両方に「。」がついている．そのまま書いた．

1967 年　2 次試験（文科）

第 1 問

a が正の定数，n が正の整数ならば，$x \geqq 0$ において不等式 $ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}>x$ が成り立つことを証明せよ。

分 野

数学ⅡB：整式の微分

考え方

$f(x)=ax^{n+1}-x+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ とおいてその増減を考える．

【解答】

$f(x)=ax^{n+1}-x+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ とおく．$f'(x)=(n+1)ax^n-1$．

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[n]{(n+1)a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)a}}\right)=\frac{a}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}a^{\frac{n+1}{n}}}-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}a^{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}\left(1-\frac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}\right).$$

$a>0$ で $(n+1)^{\frac{n+1}{n}}>n+1>n$ より，$\dfrac{1}{a^{\frac{1}{n}}}\left(1-\dfrac{n}{(n+1)^{\frac{n+1}{n}}}\right)>0$.

よって，$x \geqq 0$ で $f(x)>0$ つまり $ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}>x$.　（証明終り）

【別解 1】

【別解 1】の考え方

相加平均・相乗平均の関係を利用して a を消去する．

$x>0$ のとき，$n+1$ 個の相加平均・相乗平均の関係 $\dfrac{b_0+b_1+b_2+\cdots+b_n}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{b_0b_1b_2\cdots b_n}$ において，$b_0=ax^{n+1}$ (>0)，$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{a}}$ (>0) とすると，

$$\frac{ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{ax^{n+1}\frac{1}{n^n a}}=\sqrt[n+1]{\frac{x^{n+1}}{n^n}}=\frac{x}{n^{\frac{n}{n+1}}}.$$

よって，

$$ax^{n+1}+\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \geqq \frac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}x.$$

$n+1>n>n^{\frac{n}{n+1}}$ だから，$\dfrac{n+1}{n^{\frac{n}{n+1}}}x>x$．よって与不等式は成り立つ.

また，$x=0$ のとき，$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}>0$ より与不等式は成り立つ.

よって，与不等式は成り立つ．（証明終り）

【別解 2】

【別解 2】の考え方

$\sqrt[n]{a}=A$ とおいて式を見やすくする．適当な変形により不等式を証明する．

$f(x)=ax^{n+1}-x+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$ とおく．

$\sqrt[n]{a}=A$ とおくと，$A>0$．

$$f(x)=A^n x^{n+1}-x+\frac{1}{A}=\frac{1}{A}(A^{n+1}x^{n+1}-Ax+1)=\frac{1}{A}\{(A^n x^n-1)(Ax-1)+A^n x^n\}.$$

$A^n x^n-1$ と $Ax-1$ は同符号だから $(A^n x^n-1)(Ax-1)\geqq 0$．

また，$x\geqq 0$ のとき $A^n x^n\geqq 0$．

$(A^n x^n-1)(Ax-1)$ と $A^n x^n$ は同時に 0 にはならない．

よって，$f(x)>0$ つまり，

$$ax^{n+1}+\frac{1}{\sqrt[n]{a}}>x.$$

（証明終り）

第 2 問

一平面上に 3 個の半径 1 の円があり，それぞれ点 A(0, 0)，点 B$(2\sqrt{3}, 0)$，C$(\sqrt{3}, 3)$ を中心とする。このとき，次の条件 (i) と (ii) とを満たす点 P の存在する範囲を定め，その面積を求めよ。

(i) 点 P は円 A，円 B，円 C のすべての外部にある。

(ii) 点 P から円 A，円 B，円 C に引いた接線の接点をそれぞれ R，S，T とするとき，
$\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{PS}}^2+\overline{\mathrm{PT}}^2<36$

分　野

数学 I：不等式と領域

考え方

P から円 A には 2 本の接線が引ける，そのいずれの接点 R に対しても $\angle$PRA は直角である．したがって，$\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2$ となる．AR は半径で 1 だから，$\overline{\mathrm{PR}}$ は $\overline{\mathrm{AP}}$ でかける．

同様に $\overline{\mathrm{PS}}$ は $\overline{\mathrm{BP}}$ で，$\overline{\mathrm{PT}}$ は $\overline{\mathrm{CP}}$ でかける．

なお，$\overline{\mathrm{PQ}}$ は線分 PQ の長さを表す記号である．

【解答】

中心と接点と P の作る角 $\angle\mathrm{ARP}=\angle\mathrm{BSP}=\angle\mathrm{CTP}=\dfrac{\pi}{2}$.

よって，

$$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{AR}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2-1.$$

同様に

$$\overline{\mathrm{PS}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2-1.\quad \overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2-1.$$

よって，与式は

$$\overline{\mathrm{AP}}^2-1+\overline{\mathrm{BP}}^2-1+\overline{\mathrm{CP}}^2-1<36.\quad \overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2<39$$

となる．P の座標を (x, y) とおくと，

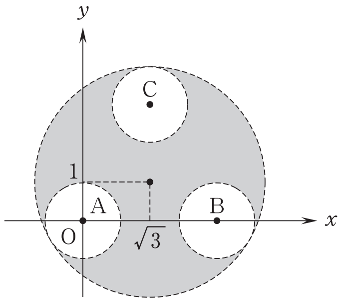
$$x^2+y^2+(x-2\sqrt{3})^2+y^2+(x-\sqrt{3})^2+(y-3)^2<39.\quad \therefore\quad 3x^2+3y^2-6\sqrt{3}\,x-6y-15<0.$$

$$\therefore\quad (x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2<9.$$

よって，P は $Q(\sqrt{3},\ 1)$ を中心とする半径 3 の円板の内部にある．

三角形 ABC は正三角形で Q はその重心で $AQ=BQ=CQ=2$ だから，円 A，円 B，円 C は P の存在範囲の円板に含まれる．よって，求める面積は

$$9\pi-3\pi=6\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$



第 3 問

南北の方向に水平でまっすぐな道路上を，自動車が南から北へ時速 100 km で走っている。また飛行機が一定の高度で一直線上を時速 $\sqrt{7}\times 100$ km で飛んでいる。自動車から飛行機を見たところ，ある時刻にちょうど西の方向に仰角 30 度に見えて，それから 36 秒後には北から 30 度西の方向に仰角 30 度に見えた。飛行機の高度は何 m であるか。

分 野

数学 I ：空間図形，速度

考え方

最初に飛行機を見た時点における自動車と飛行機の位置と，36 秒後の自動車と飛行機の位置の関係がわかればよい．

【解答】

最初に飛行機を見た時刻に自動車がいた点を原点，北方を x 軸，西方を y 軸，上方を z 軸にとり，m を長さの単位とする．自動車の速度は $\dfrac{100\times 1000}{60\times 60}=\dfrac{1000}{36}$ m/秒である．

飛行機の高度を h とすると，最初に飛行機は西方仰角 30° にいたからその座標は

$$\left(0,\ \frac{h}{\tan 30^\circ},\ h\right)=(0,\ \sqrt{3}\,h,\ h)$$

である．

36 秒後には自動車は 1000 m だけ進んでいる．自動車の座標は (1000, 0, 0) である．このとき飛行機は北から西 30° の方向に仰角 30° に見えたから飛行機の座標は

$$\left(1000+\cos 30^\circ\frac{h}{\tan 30^\circ},\ \sin 30^\circ\frac{h}{\tan 30^\circ},\ h\right)=\left(1000+\frac{3}{2}h,\ \frac{\sqrt{3}}{2}h,\ h\right)$$

である．

飛行機の速度は自動車の $\sqrt{7}$ 倍だからこの 36 秒間に $\sqrt{7}\times 1000$ m だけ移動している．

したがって，

$$(\sqrt{7}\times 1000)^2=\left(1000+\frac{3}{2}h\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h-\sqrt{3}\,h\right)^2.$$

$$\therefore\quad h^2+1000h-2\times 1000^2=0.\quad (h+2000)(h-1000)=0.$$

$h>0$ だから $h=1000$．つまり，飛行機の高度は 1000 m である． …(答)

第 4 問

a がすべての正の実数をとって動くとき，直線 $y=ax+b$ が点 A(0, 0)，B(1, 0)，C(0, 1) を頂点とする三角形を，面積の等しい 2 つの図形に分けるようにするには，b を a のどのような関数にとればよいか。

分 野

数学Ⅰ：直線の方程式，面積

考え方

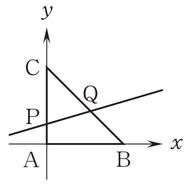
三角形 ABC を二等分する線分は 3 辺のうち 2 辺上に端点がある．そのうち傾きが正であるのは，BC と他の辺を通る 2 通りの場合がある．それぞれについて場合分けして考える．直線の方程式から辺との交点を求める．

【解答】

三角形 ABC の面積は $\frac{1}{2}$．この面積を二等分するとき一方の図形は三角形である．その三角形の 2 頂点がどの辺の上にあるかで場合分けする．

$a>0$ だから，$y=ax+b$ と交わる辺は AB と BC または AC と BC である．

(i) 三角形 ABC の面積を二等分する三角形の頂点が，AC，BC 上にあるとき，その頂点をそれぞれ P，Q とする．



直線 AC，BC，PQ の方程式がそれぞれ $x=0$，$x+y=1$，$y=ax+b$ であるから，P(0, b)，Q$\left(\frac{1-b}{a+1}, \frac{a+b}{a+1}\right)$．

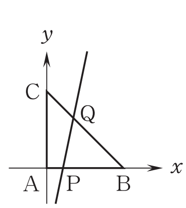
このとき，PQ は傾きが 0 のときから Q が BC の中点であるときまで変化する．したがって $0<a\leqq1$．三角形 CPQ の面積は $\frac{1}{4}$ である．

$$\frac{1}{2}(1-b)\frac{1-b}{a+1}=\frac{1}{4}.$$

から，

$$b=1-\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{2}},\quad 0<a\leqq1.$$

(ii) 三角形 ABC の面積を二等分する三角形の頂点が，AB，BC 上にあるとき，その頂点をそれぞれ P，Q とする．



直線 AB，BC，PQ の方程式がそれぞれ $y=0$，$x+y=1$，$y=ax+b$ であるから，P$\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$，Q$\left(\frac{1-b}{a+1}, \frac{a+b}{a+1}\right)$．

このとき，傾き a は正であるから，PQ は Q が BC の中点であるときから y 軸に平行であるときまで変化する．したがって $a\geqq1$．三角形 BPQ の面積は $\frac{1}{4}$ である．

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{a+b}{a+1}=\frac{1}{4}$$

から，

$$(a+b)^2=\frac{1}{2}a(a+1).$$

$a+b$ は $x=1$ における $y=ax+b$ の y 座標であることに注意すると，$a+b>0$.

$$b=-a+\frac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{2}}.$$

以上から

$$b=\begin{cases} 1-\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{2}} & (0<a\leqq 1), \\ -a+\dfrac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{2}} & (a\geqq 1). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） $a<0$ の場合を含めると，一般には

$$b=\begin{cases} -a-\dfrac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{2}} & (a\leqq -2), \\ \dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{2}} & \left(-2\leqq a\leqq -\dfrac{1}{2}\right), \\ 1-\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{2}} & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1\right), \\ -a+\dfrac{\sqrt{a(a+1)}}{\sqrt{2}} & (a\geqq 1). \end{cases}$$

第５問

だ円 $\dfrac{x^2}{a}+ay^2=1$ $(a>0)$ を考える。a がすべての正の実数をとって動くとき，これらのだ円の上にある点全体はどのような範囲にあるか，その範囲を決定せよ。なお，それを図示せよ。

分　野

数学ⅡB：楕円

考え方

方程式を a の方程式とみてそれが $a>0$ の解をもつ条件を求めればよい．

【解答】

$a>0$ だから分母を払った a の方程式 $y^2a^2-a+x^2=0$ が $a>0$ の解をもつ条件が求めるもの．

$f(a)=y^2a^2-a+x^2$ とおく．

(i)　$y=0$ のとき，$a=x^2$ となるから，$x\neq 0$ のとき $a>0$ の解をもつ．$x=0$ のときは $a>0$ の解をもたない．

(ii)　$y\neq 0$ のとき，$f(0)=x^2$．

(ii-a)　$x=0$ のとき，$a=\dfrac{1}{y^2}>0$ が解である．

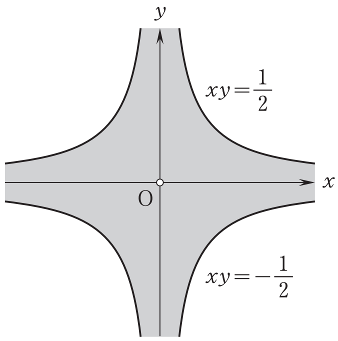
(ii-b)　$x\neq 0$ のとき，$f(0)>0$．(判別式)$=1-4x^2y^2\geqq 0$．軸は $\dfrac{1}{2y^2}>0$．

よって，$x^2y^2\leqq\dfrac{1}{4}$ のとき，つまり $|xy|\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(a)=0$ は $a>0$ の２解をもつ．

以上から $a>0$ の解をもつ条件，すなわち $a>0$ のとき与楕円が存在する範囲は

$$|xy|\leqq\frac{1}{2},\quad (x,\ y)\neq(0,\ 0).\qquad\cdots(\text{答})$$

図示すると下図網掛け部境界を含む．また白丸を除く．



1967 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

辺の長さ 2 の正方形 A が，その中心を円 $x^2+y^2=1$ の周上におきながら，かつその辺を座標軸に平行に保ちながら動く。一方，同じ大きさの正方形 B が固定されていて，辺が座標軸に平行であり，その中心が点 $(1,\ 2)$ にある。このとき，2 つの正方形 A，B の共通部分の面積の最大値を求めよ。

注．正方形の中心とは，その 2 つの対角線の交点をいう。

分　野

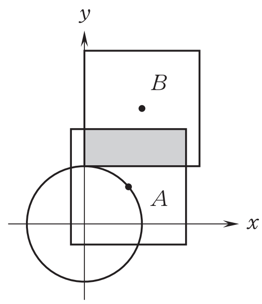
数学Ⅲ：微分法，**数学Ⅰ**：三角関数

考え方

A の中心の座標を $(X,\ Y)$ とすると 1 辺の長さが 2 の正方形の範囲は $X-1 \leqq x \leqq X+1$，$Y-1 \leqq y \leqq Y+1$．

辺が座標軸に平行だから x 座標の交わりと，y 座標の交わりを別々に考えることができる．

【解答】



A の中心を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，A の範囲は

$$-1+\cos\theta \leqq x \leqq 1+\cos\theta,\quad -1+\sin\theta \leqq y \leqq 1+\sin\theta.$$

B の中心が $(1,\ 2)$ だから，B の範囲は $0 \leqq x \leqq 2$，$1 \leqq y \leqq 3$.

したがって，$\pi < \theta < 2\pi$ のとき，$1+\sin\theta < 1$ となり，A，B は交わらない．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$A \cap B$ の範囲は

$$0 \leqq x \leqq 1+\cos\theta,\quad 1 \leqq y \leqq 1+\sin\theta.$$

面積を $S(\theta)$ とおくと，

$$S(\theta)=(1+\cos\theta)\sin\theta.$$

$$S'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1).$$

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	0
$S(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって A，B の共通部分の面積の最大値は

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}. \qquad \cdots（答）$$

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第4問

方程式 $x^2-xy+y^2=3$ の表わす曲線の略図をえがき，その第1象限にある部分が x 軸，y 軸と囲む図形の面積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：座標変換，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

対称式の方程式だから，$y=x$ について対称な図形である．座標軸を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して考える．

【解答】

座標軸を $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して，新しい座標を $(x',\ y')$ とすると，

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}-y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\quad y=x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

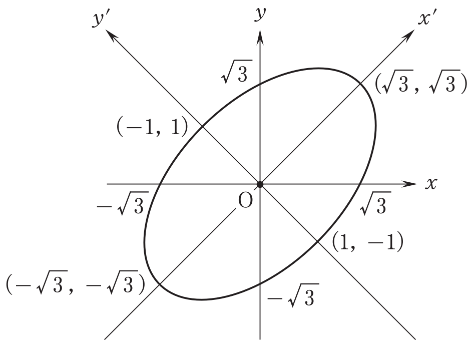
よって，

$$x^2-xy+y^2=\frac{1}{2}(x'-y')^2-\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'+y')^2$$

$$=\frac{x'^2}{2}+\frac{3y'^2}{2}=3.$$

よって

$$\frac{x'^2}{6}+\frac{y'^2}{2}=1.$$



…(答)

曲線は楕円で頂点は $(x',\ y')=(\pm\sqrt{6},\ 0)$，$(0,\ \pm\sqrt{2})$．
xy 座標に直すと頂点は
$(x,\ y)=(\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3})$，$(\mp1,\ \pm1)$ （複号同順）．
x 軸との交点は $(\pm\sqrt{3},\ 0)$，y 軸との交点は $(0,\ \pm\sqrt{3})$ である．
求める面積を $x'y'$ 座標で考えると，楕円のうち $-x'<y'<x'$ の部分の面積である．

その部分は，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ と原点Oで作る直角二等辺三角形OABと楕円の $x'\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ の部分に分けられる．

三角形OABの面積は $\dfrac{3}{2}$.

残りの部分の面積は

$$2\int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{6}}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x'^2}{6}}\,dx'.$$

$x'=\sqrt{6}\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx'}{d\theta}=\sqrt{6}\cos\theta$，

x'	$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\longrightarrow\sqrt{6}$
θ	$\dfrac{\pi}{6}\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$

$$2\int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{6}}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x'^2}{6}}\,dx'=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\sqrt{6}\cos\theta\,d\theta=4\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=2\sqrt{3}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{2}.$$

求める面積は

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi. \qquad \cdots(答)$$

（注１） 図には，この他 x の最大最小点 $(\pm 2,\ \pm 1)$，y の最大最小点 $(\pm 1,\ \pm 2)$ も通るがいちいち図示しなかった．

（注２） 当時座標変換が教科書にあり，行列はまだ教科書になかったので座標変換の解答を示した．問題もそれを求めているように思える．

現代（2020）なら複素数平面で，少し前（2014 以前）なら回転行列でこの曲線を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転することになると思われる．

（注３） この他，与式は $y=x$ について，$y=-x$ について対称であり，$\dfrac{1}{4}(x+y)^2+\dfrac{3}{4}(x-y)^2=3$ と変形できることから，$x+y$ は $(x,\ y)=(\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ のとき，最大値 $2\sqrt{3}$ をとり，$(x,\ y)=(-\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ のとき，最小値 $-2\sqrt{3}$ をとり，$x-y$ は $(x,\ y)=(1,\ -1)$ のとき，最大値 2 をとり，$(x,\ y)=(-1,\ 1)$ のとき，最小値 -2 をとることがわかる．これらからこの図形が楕円であり，4 頂点の座標も考えることができる．

（注４） 極方程式で表すと $r=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta}}$ となり，$\sqrt{2}\leqq r\leqq\sqrt{6}$ で，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$ で r は最大になり，$\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$ で最小になることがわかる．

ただし，極座標を使って面積を求めることは簡単でない．

（注５） 面積は y を x で表し $y=\dfrac{x\pm\sqrt{3(4-x^2)}}{2}$ とし，

$$\int_0^2\frac{x+\sqrt{3(4-x^2)}}{2}\,dx-\int_{\sqrt{3}}^2\frac{x-\sqrt{3(4-x^2)}}{2}\,dx$$

として計算してもなんとかなる．

（注６） 面積計算の方法として，楕円 $\dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{2}=1$ を y' 軸方向に $\sqrt{3}$ 倍すると半径 $\sqrt{6}$ の円になり，xy 座標の第１象限部分は中心角 $\dfrac{2}{3}\pi$ の扇形になるので，面積は $\dfrac{6\pi}{3}=2\pi$ となる．これを $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍にしたものが求める面積である．

第 5 問

$y=ax^2$ のグラフが $y=\log_e x$ のグラフに接するように定数 a の値を定めよ。なお，そのときこれらのグラフと x 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

2 曲線が接するのは，その点を共有し，その点における接線の傾きが等しいときである．

【解答】

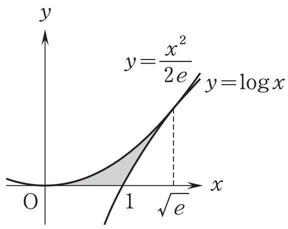
$\log_e x$ は自然対数であるとして解答する．

$f(x)=ax^2$，$g(x)=\log_e x$ とおき，接点の x 座標を t とおくと，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$．よって，

$$at^2=\log t,\quad 2at=\frac{1}{t}.$$

よって，$at^2=\log t=\dfrac{1}{2}$．よって，$t=\sqrt{e}$，

$$a=\frac{1}{2e}. \qquad \cdots(答)$$



このとき，$f(x)=\dfrac{x^2}{2e}$，$g(x)=\log x$.

x 軸と囲む部分の面積は

$$\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx=\left[\frac{x^3}{6e}\right]_0^{\sqrt{e}}-\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{6}+\frac{\sqrt{e}}{2}-1=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1. \qquad \cdots(答)$$

第6問

箱の中に，1から9までの番号を1つずつかいた9枚のカードがある。それらをよくまぜて，その中から1枚ずつ続けて全部を取り出し，取り出した順に新しく1から9までの番号をつける。このとき，新しくつけられる番号が前もってつけられている番号に一致するカードが，ちょうど5枚できる確率を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：確率

考え方

場合の数は順列である．n 個の数と対応する数がすべて異なる置換を全換置換という．条件をみたすものは5枚同じ番号を付けられているから，残り4個の全換置換が個数の求められればよい．全換置換の個数の求め方はいろいろあるが，すべての置換の中から条件をみたさないものの個数を除いてゆく方法をとる．

【解答】

すべての場合の数は $9!$ 通りである．

同じ番号をつけられたカードは5枚ある，その組み合わせは ${}_9C_5$ 通り．

残りの4枚のカードの番号のつけ方は全部で $4!=24$ 通り．

そのうちちょうど4枚が同じ番号であるものは1通り．

ちょうど3枚が同じ番号になることはない．

ちょうど2枚が同じ番号になるのは ${}_4C_2=6$ 通り．

ちょうど1枚が同じ番号になるのは ${}_4C_3\times2=8$ 通り．

よって，残りの4枚のカードのすべての番号が異なる場合の数は

$$24-1-0-6-8=9.$$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_9C_5\times9}{9!}=\frac{1}{320}. \quad \cdots(答)$$

(注)　4個の全換置換を考えるとき次の方法がある．1の番号が2に変ったとき $1\to2$ と書きこのとき2が3に変ったとき $1\to2\to3$ のように順次→をつなげてゆくとどこかで→はもとの1に戻ってくる．したがって，全換置換においてはいくつかの円順列ができる．

4個の場合4つで1つの円順列を作る場合が $3!=6$ 通りあり，2組の互換を作る場合が $\frac{1}{2}{}_4C_2=3$ 通りある．したがって，全部で $6+3=9$ 通りある．

1968 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

中心が (0, $\boxed{\text{a}}$) で，点 (3, 0) を通る円

$$x^2+y^2-8y+\boxed{\text{b}}=0$$

がある。この円と，円

$$x^2+y^2+\boxed{\text{c}}\,x-6y+23=0$$

との交点を通る直線は，点 ($\boxed{\text{d}}$, 0) と (2, −8) を通る。

分　野

数学 I ：円の方程式

【解答】

2 つの円の「交点を通る直線」とは交線（つまり 2 交点を通る直線）のことと解釈した．

$\boxed{\text{b}}=b$, $\boxed{\text{c}}=c$ とおく．

$$x^2+(y-4)^2=16-b$$

とかけるから，中心は (0, $\boxed{4}$).　　…a

(3, 0) を通るから，$b=\boxed{-9}$.　　…b

$$\begin{array}{rr} & x^2+y^2 \qquad -8y-9 \;=0 \\ -\,) & x^2+y^2+cx-6y+23=0 \\ \hline & -cx-2y-32=0 \end{array}$$

から，交線は $cx+2y+32=0$.

この交線が (2, −8) を通るから，$c=\boxed{-8}$.　　…c

$y=0$ とすることで，点 ($\boxed{4}$, 0) を通る．　　…d

(注)　第 1 の円は中心が (0, 4)，半径が 5，第 2 の円は中心が (4, 3)，半径が $\sqrt{2}$．よって中心間距離は $\sqrt{17}$．したがって，

$$5-\sqrt{2}<\sqrt{17}<5+\sqrt{2}$$

が成り立ち，この 2 円は確かに 2 点で交わっていることがわかる．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数字を下の図の番号から選び答えよ。ただし，図には y 軸の位置は記入してない。

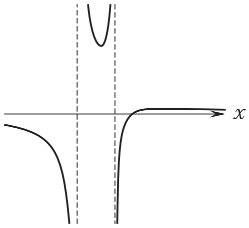


図 1

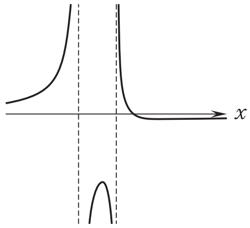


図 2

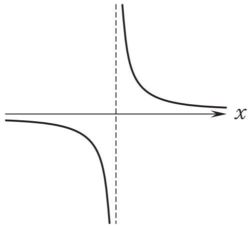


図 3

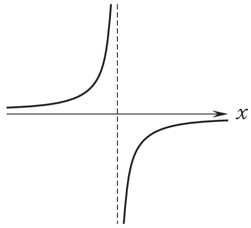


図 4

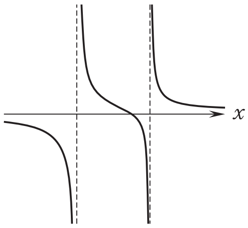


図 5

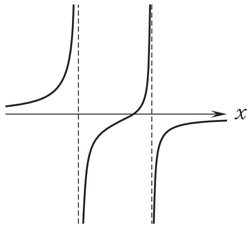


図 6

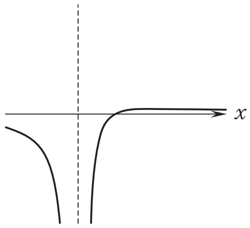


図 7

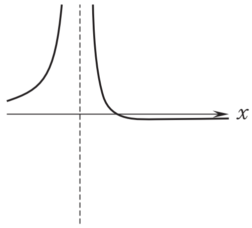


図 8

p を定数とするとき，関数 $y=\dfrac{x-1}{x^2+(1-p)x-p}$ のグラフは

(1) $p=-1$ のときは図 $\boxed{\text{e}}$ である。

(2) $-1<p<1$ のときは図 $\boxed{\text{f}}$ である。

(3) $p=1$ のときは図 $\boxed{\text{g}}$ である。

(4) $1<p$ のときは図 $\boxed{\text{h}}$ である。

分野

数学 I ：分数関数

【解答】

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+(1-p)x-p}$ とおくと，$f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-p)}$.

(1) $p=-1$ のとき，$f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)^2}$.

$f(x)$ は $x>1$ で正，$y=f(x)$ のグラフは $x=-1$ を漸近線としてもつ．よって，図 $\boxed{7}$ である． …e

(2) $-1<p<1$ のとき，$f(x)$ は $-1<x<p$，$1<x$ で正，$y=f(x)$ のグラフは $x=-1$，$x=p$ を漸近線としてもつ．x 軸との交点は 2 つの漸近線の右側にある．よって，図 $\boxed{1}$ である． …f

(3) $p=1$ のとき，$f(x)=\dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x+1}$.

$f(x)$ は $-1<x$ で正，$y=f(x)$ のグラフは $x=-1$ を漸近線としてもつ．よって，図 $\boxed{3}$ である． …g

(注) 厳密には $x=1$ で $f(x)$ は定義されないから $y=f(x)$ のグラフは $y=\dfrac{1}{x+1}$ のグラフから 1 点 $\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を除外したものである．

(4) $1<p$ のとき，$f(x)$ は $-1<x<1$，$p<x$ で正，$y=f(x)$ のグラフは $x=-1$，$x=p$ を漸近線と

してもつ．x 軸との交点は2つの漸近線の間にある．よって，図 $\boxed{5}$ である． …h

（注） $p<-1$ のときも図1のようなグラフになる．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

4次式

$$P(x)=x^4+\boxed{\text{i}}x^3+\boxed{\text{j}}x^2+\boxed{\text{k}}x+\boxed{\text{l}}$$

は $x=-1,\ 3$ で極小，$x=1$ で極大となり，$P(x)=0$ は負の2重根をもつ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

問題文の「2重根」は「2重解」の当時の表記である．

$P'(x)$ は x^3 の係数が4の3次関数であり，$x=-1,\ 1,\ 3$ で0になる．

$$P'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)=4x^3-12x^2-4x+12.$$

よって，

$$P(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+C.$$

$P(x)=0$ の負の重解は負の範囲で極値を与える x と等しいから，$x=-1$．よって，$P(-1)=0$．

よって，

$$P(-1)=-9+C=0$$

より，$C=9$．

よって，

$$P(x)=x^4+\boxed{-4}x^3+\boxed{-2}x^2+\boxed{12}x+\boxed{9}.$$ …i，j，k，l

（注） $P(x)=(x+1)^2(x-3)^2$．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

x が $-3\leqq x\leqq 3$ なる範囲をうごくときの

$$y=x^2-2\alpha x+4\alpha+5$$

の最小値は，α の値を与えることによって定まるから，その最小値を $f(\alpha)$ とかく。このとき $f(\alpha)>0$ となるような α の範囲は $\boxed{\text{m}}<\alpha<\boxed{\text{n}}$ である。また $f(\alpha)$ は $\alpha=\boxed{\text{o}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{p}}$ をとる。

分　野

数学Ⅰ：2次関数

【解答】

$g(x)=x^2-2\alpha x+4\alpha+5$ とおくと，$g(x)=(x-\alpha)^2-\alpha^2+4\alpha+5$．

(i) $\alpha<-3$ のとき，$-3\leqq x\leqq 3$ における $g(x)$ の最小値は $g(-3)=14+10\alpha=f(\alpha)$．

$f(\alpha)>0$ とすると，$\alpha>-\dfrac{7}{5}$．　$\alpha<-3$ のときには $f(\alpha)>0$ は成り立たない．

(ii)　$-3 \leqq \alpha \leqq 3$ のとき，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $g(x)$ の最小値は $g(\alpha)=-\alpha^2+4\alpha+5=f(\alpha)$.

$f(\alpha)>0$ とすると，$-\alpha^2+4\alpha+5=-(\alpha-5)(\alpha+1)>0$．よって，$-1<\alpha<5$．$-3 \leqq \alpha \leqq 3$ のとき．$-1<\alpha \leqq 3$.

(iii)　$\alpha>3$ のとき，$-3 \leqq x \leqq 3$ における $g(x)$ の最小値は $g(3)=14-2\alpha$.

$f(\alpha)>0$ とすると，$\alpha<7$．$\alpha>3$ のとき，$3<\alpha<7$.

(i)，(ii)，(iii) より，$f(\alpha)>0$ となる α の範囲は，$\boxed{-1}<\alpha<\boxed{7}$．　…m，n

$\alpha<-3$ のとき $f(\alpha)$ は増加し，$-3 \leqq \alpha \leqq 3$ のとき，$f(\alpha)=-(\alpha-2)^2+9$．$\alpha>3$ のとき $f(\alpha)$ は減少する.

以上から，$f(\alpha)$ は $\alpha=\boxed{2}$ のとき最大値 $\boxed{9}$ をとる．　…o，p

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉を下の 1，2，3，4 から選び，その記号 1，2，3，4 で答えよ。

$|a+b|>a+b$ であるために，$ab<0$ であることが $\boxed{\text{q}}$

$|a-b|>a-b$ であるために，$a<b$ であることが $\boxed{\text{r}}$

$|a|+|b|>|a+b|$ であるために，$ab \neq 0$ であることが $\boxed{\text{s}}$

$|a-b|>|a|-|b|$ であるために，$a \neq b$ であることが $\boxed{\text{t}}$

1．必要でも十分でもない。

2．必要であるが十分でない。

3．必要ではないが十分である。

4．必要かつ十分である。

分　野

数学 I：必要条件・十分条件

【解答】

$|a+b|>a+b$ は $a+b<0$ と同値．$ab<0$ でも $a=2$，$b=-1$ ならば $a+b<0$ でなく，$a+b<0$ でも $a=b=-1$ のとき，$ab<0$ でない．したがって，$|a+b|>a+b$ であるために，$ab<0$ は $\boxed{\text{必要でも十分でもない}}$.　…q=1.

$|a-b|>a-b$ は $a-b<0$ と同値．したがって，$a<b$ と同値．したがって，$|a-b|>a-b$ であるために，$a<b$ は $\boxed{\text{必要かつ十分である}}$.　…r=4.

$|a|+|b|>|a+b|$ は $ab<0$ と同値．$ab \neq 0$ でも $a=2$，$b=1$ ならば $ab<0$ でない．$ab<0$ のとき，$ab \neq 0$ である．したがって，$|a|+|b|>|a+b|$ であるために，$ab \neq 0$ は $\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$.　…s=2.

$|a-b|>|a|-|b|$ は $|a-b|+|b|>|(a-b)+b|$ と同値で，$(a-b)b<0$ と同値.

$a \neq b$ でも $a=2$，$b=1$ ならば $(a-b)b<0$ でない．$(a-b)b<0$ のとき，$a \neq b$ である．したがって，$|a-b|>|a|-|b|$ であるために，$a \neq b$ は $\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$.　…$t=2$.

1968 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

x が範囲 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ をうごくとき，$\sin^6 x + \cos^6 x$ は $x = \boxed{\text{a}}\,\pi$ で最大値 $\boxed{\text{b}}$ をとり，$x = \boxed{\text{c}}\,\pi$ で最小値 $\boxed{\text{d}}$ をとる。

分　野

数学ⅡB：三角関数，半角公式

【解答】

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}(1+3\cos^2 2x).$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 \leqq 2x < \pi$．∴　$0 \leqq \cos^2 2x \leqq 1$.

よって，$\cos^2 2x = 1$ のとき，すなわち $x = \boxed{0}\,\pi$ のとき，最大値 $\boxed{1}$ をとる．　…a，b

また，$\cos^2 2x = 0$ のとき，すなわち $x = \boxed{\dfrac{1}{4}}\,\pi$ のとき，最小値 $\boxed{\dfrac{1}{4}}$ をとる．　…c，d

（注）　$\sin^6 x + \cos^6 x$ はこのほか

$$3\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 3\sin^4 x - 3\sin^2 x + 1 = 3\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

などいろいろな変形の仕方がある．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

次の各方程式のグラフを $-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$ の範囲でえがいたものが，下の図 1 から図 12 までのどれかであるとすると，方程式(1)，(2)，(3)，(4)のグラフを表わす図の番号はそれぞれ $\boxed{\text{ e }}$，$\boxed{\text{ f }}$，$\boxed{\text{ g }}$，$\boxed{\text{ h }}$ である。

(1)　$\log_{10}x+\log_{10}y=0$

(2)　$\log_{10}(x+y-3)+\log_{10}(x+y)=1$

(3)　$\sin\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi y}{6}\right)=0$

(4)　$2\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi y}{3}\right)=1$

（下の各図において，点線で囲まれた正方形はいずれも $|x|\leqq 3$，$|y|\leqq 3$ の範囲を表わすものとする）

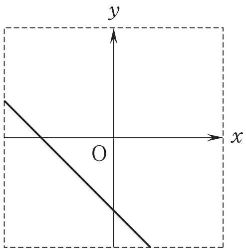


図 1

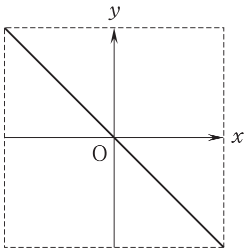


図 2

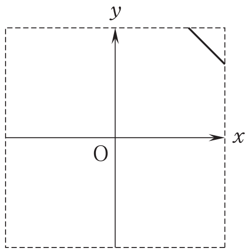


図 3

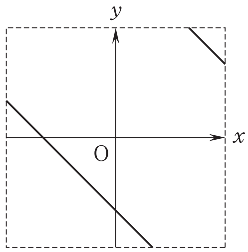


図 4

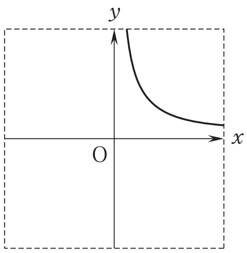


図 5

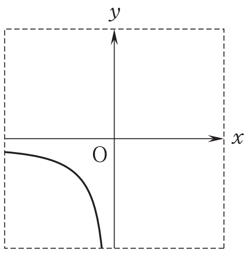


図 6

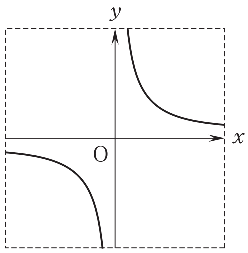


図 7

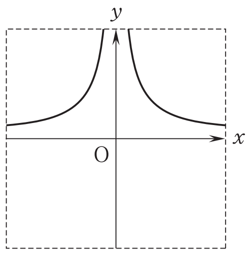


図 8

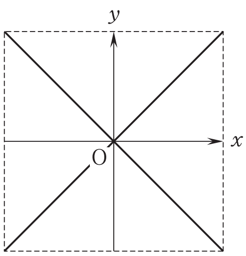


図 9

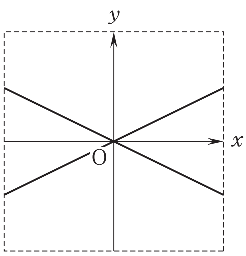


図 10

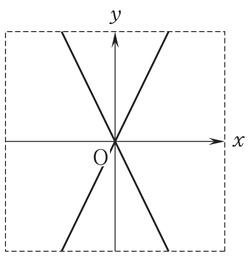


図 11

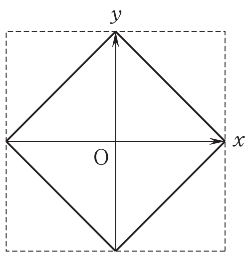


図 12

分　野

数学Ⅰ：対数関数，**数学ⅡB**：三角関数，和積公式

【解答】

(1)　真数条件から $x>0$，$y>0$.

また，与式から $\log_{10}xy=\log_{10}1$．よって，$xy=1$.

よって，(1)のグラフは図 $\boxed{\text{ 5 }}$．　…e

(2)　真数条件から $x+y-3>0$，$x+y>0$．よって，$x+y>3$.

また，与式から $\log_{10}(x+y-3)(x+y)=\log_{10}10$．よって，

$(x+y-3)(x+y)=10.\quad \therefore\quad (x+y)^2-3(x+y)-10=0.\quad \therefore\quad (x+y-5)(x+y+2)=0.$

$x+y>3$ より，$x+y=5$．$-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$ の範囲では $2\leqq x\leqq 3$.

よって，(2) のグラフは図 $\boxed{\ 3\ }$． …f

(3)　和積公式から

$$2\sin\left(\frac{x+y}{12}\pi\right)\cos\left(\frac{x-y}{12}\pi\right)=0.$$

$\sin\left(\dfrac{x+y}{12}\pi\right)=0$ のとき，

$$\frac{x+y}{12}\pi=n\pi\quad (n\text{ は整数}).\quad \therefore\quad x+y=12n.$$

$-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$ の範囲では，$x+y=0$ $(-3\leqq x\leqq 3)$.

$\cos\left(\dfrac{x-y}{12}\pi\right)=0$ のとき，

$$\frac{x-y}{12}\pi=\frac{\pi}{2}+n\pi\quad (n\text{ は整数}).\quad \therefore\quad x-y=6+12n.$$

$-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$ の範囲では，$(x,\ y)=(3,\ -3)$，$(-3,\ 3)$.

よって，(3) のグラフは図 $\boxed{\ 2\ }$． …g

(4)　倍角公式から

$$\cos\left(\frac{y\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{x\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{2x\pi}{3}\right).$$

$$\therefore\quad \frac{y\pi}{3}=\pm\frac{2x\pi}{3}+2n\pi\quad (n\text{ は整数}).\quad \therefore\quad y=\pm 2x+6n.$$

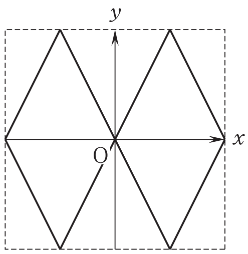
$-3\leqq x\leqq 3$，$-3\leqq y\leqq 3$ の範囲では，

$$y=\pm 2x\quad \left(-\frac{3}{2}\leqq x\leqq \frac{3}{2}\right),$$

$$y=\pm 2(x-3)\quad \left(\frac{3}{2}\leqq x\leqq 3\right),\quad y=\pm 2(x+3)\quad \left(-3\leqq x\leqq -\frac{3}{2}\right).$$

よって，(4) のグラフは図 1 〜図 12 の中には存在しない．

（注 1）　(4) のグラフは下図．



（注 2）　聖文社によると「11」または「なし」が正解として採用された．

確かに図 11 は (4) のグラフの一部である．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

頂点の1つが $(0, \sqrt{3})$ で直線 $y=0$ の上に頂点A，直線 $y=2x$ の上に頂点Bをもつ正三角形が2つある。B点の x 座標は，小さい正三角形に対しては

$$\boxed{\ \text{i}\ }+\boxed{\ \text{j}\ }\sqrt{3},$$

大きい正三角形に対しては

$$\boxed{\ \text{k}\ }+\boxed{\ \text{l}\ }\sqrt{3}$$

である。

分　野

数学Ⅰ：平面座標

【解答】

点 $(0, \sqrt{3})$ をCとする．Aの x 座標を s とする．

BはCAの垂直二等分線 $y-\sqrt{3}=\dfrac{s}{\sqrt{3}}x-\dfrac{s^2+3}{2\sqrt{3}}$ 上にある．

Bはこの直線とCを中心とする半径 $\mathrm{CA}=\sqrt{s^2+3}$ の円 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=s^2+3$ 上にある．

$$\therefore\quad x^2+\left(\frac{s}{\sqrt{3}}x-\frac{s^2+3}{2\sqrt{3}}\right)^2=s^2+3.$$

$$\therefore\quad x^2+\frac{s^2}{3}x^2-(s^2+3)\frac{s}{3}x+\frac{(s^2+3)^2}{12}=s^2+3.$$

$$\therefore\quad x^2-sx+\frac{s^2-9}{4}=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{s\pm 3}{2}.\quad \text{（以下複号同順）}$$

$$y=\frac{s}{\sqrt{3}}x-\frac{s^2+3}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{(1\pm s)\sqrt{3}}{2}.$$

s を消去すると，$y=\pm\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}$.

Bは $y=2x$ 上にあるから，

$$2x=\pm\sqrt{3}\,x-\sqrt{3}.\quad \therefore\quad x=-\sqrt{3}\,(2\pm\sqrt{3})=\mp 3-2\sqrt{3}.$$

$\mathrm{CB}^2=x^2+(2x-\sqrt{3})^2=5x^2-4\sqrt{3}\,x+3.$

CB^2 は $x=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ で最小になる2次関数だから，$x=3-2\sqrt{3}$ のときの方が $x=-3-2\sqrt{3}$ のときより，CB^2 が小さい．

よって，B点の x 座標は，小さい正三角形に対しては

$$\boxed{\ 3\ }+\boxed{\ -2\ }\sqrt{3}, \qquad \cdots\text{i, j}$$

大きい正三角形に対しては

$$\boxed{\ -3\ }+\boxed{\ -2\ }\sqrt{3}. \qquad \cdots\text{k, l}$$

【別解】

複素数平面で考える．

$\mathrm{C}(\sqrt{3}\,i)$，$\mathrm{A}(s)$，$\mathrm{B}((1+2i)t)$（s，t は実数）とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を $\pm 60^\circ$ 回転すると $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ に一致するから以下複号同順で，

$$\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i)(s-\sqrt{3}\,i)=(1+2i)t-\sqrt{3}\,i.$$

よって，

$$s\pm3=2t.\quad \pm\sqrt{3}\,s-\sqrt{3}=4t-2\sqrt{3}.$$

$$\pm\sqrt{3}\,s+\sqrt{3}=2(s\pm3).\quad \therefore\quad s=\frac{\sqrt{3}\mp6}{2\mp\sqrt{3}}=-4\sqrt{3}\mp9.$$

$$\therefore\quad t=\frac{s\pm3}{2}=-2\sqrt{3}\mp3.$$

$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=s^2+3$ だから s^2 が小さい方が小さい正三角形.

B 点の x 座標 t は，小さい正三角形に対しては

$$\boxed{3}+\boxed{-2}\sqrt{3},\qquad \cdots\text{i, j}$$

大きい正三角形に対しては

$$\boxed{-3}+\boxed{-2}\sqrt{3}.\qquad \cdots\text{k, l}$$

（注） 行列を使っても同様.

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

x に関する方程式 $|2-(x+|x|)|=\alpha(x-3)-1$ について，下記の (1)，(2)，(3)，(4)，(5) が正しいようにするには，$a=\boxed{\text{m}}$，$b=\boxed{\text{n}}$，$c=\boxed{\text{o}}$，$d=\boxed{\text{p}}$ とすればよい。

(1) $-\infty<\alpha<-1$ ならば上の方程式の実根の数は 1 個である。
(2) $-1<\alpha<a$ ならば上の方程式の実根の数は d 個である。
(3) $a<\alpha<b$ ならば上の方程式の実根の数は 1 個である。
(4) $b<\alpha<c$ ならば上の方程式は実根をもたない。
(5) $c<\alpha<\infty$ ならば上の方程式の実根の数は 1 個である。

分　野

数学Ⅰ：絶対値を含む関数

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である.

$$f(x)=|2-(x+|x|)|-\{\alpha(x-3)-1\}=\begin{cases}-\alpha x+3\alpha+3 & (x<0),\\ -(2+\alpha)x+3\alpha+3 & (0\leqq x\leqq1),\\ (2-\alpha)x+3\alpha-1 & (x>1)\end{cases}\quad \text{とおく.}$$

$$f(0)=3\alpha+3,\quad f(1)=2\alpha+1.$$

$y=f(x)$ のグラフは折れ線であり，各折れ線部分の傾きの符号，折れ目の y 座標の符号の変化に注意して場合分けする.

(1) $-\infty<\alpha<-1$ のとき，

(i) $-\infty<\alpha<-2$ ならば，

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-$	↗	$-$	↗	∞

(ii) $-2<\alpha<-1$ ならば，

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-$	↘	$-$	↗	∞

ともに，実数解の個数は1である．

(2)　$-1<\alpha<\boxed{-\frac{1}{2}}$ のとき，　…m

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+$	↘	$-$	↗	∞

よって，実数解の個数は $\boxed{3}$ である．　…p

(3)　$-\frac{1}{2}<\alpha<\boxed{0}$ のとき，　…n

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+$	↘	$+$	↗	∞

よって，実数解の個数は1である．

(4)　$0<\alpha<\boxed{2}$ のとき，　…o

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	∞	↘	$+$	↘	$+$	↗	∞

よって，実数解は存在しない．

(5)　$2<\alpha<\infty$ のとき，

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f(x)$	∞	↘	$+$	↘	$+$	↘	$-\infty$

よって，実数解の個数は1である．

（注1）　(1)は問われていないので調べる必要はない．

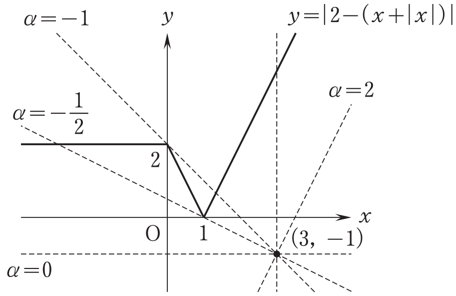
（注2）　厳密には境界で実数解の個数が変ることを確認しなければならないから，$\boxed{\text{m}}$ は(3)を，$\boxed{\text{n}}$ は(4)を，$\boxed{\text{o}}$ は(5)をそれぞれ確認してからでないと定まらない．

また，

$$\alpha=-1,\ -\frac{1}{2}\ \text{のとき，実数解の個数は}\,2,$$

$$\alpha=-2,\ 0,\ 2\ \text{のとき，実数解は存在しない．}$$

（注3）　次のような方法もある．



$y=|2-(x+|x|)|$ のグラフと，$y=\alpha(x-3)-1$ のグラフを重ねて，交点の個数で判断する．ここで，$y=\alpha(x-3)-1$ は $(3,\ -1)$ を通り，傾きが α の直線である．

直線 $y=\alpha(x-3)-1$ の傾き α を変化させて，折れ線 $y=|2-(x+|x|)|$ との交点の個数が実数解の個数である．

実数解の個数を表にすると

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$\boxed{0}$	$\cdots$	$\boxed{2}$	$\cdots$
解の個数	1	2	$\boxed{3}$	2	1	0	0	0	1

…m，n，o

…p

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉を下の 1，2，3，4 から選び，その記号 1，2，3，4 で答えよ。ただし，A，B，C は平面上の点集合であるとし，また C に含まれない点全体の集合を C' で表わすものとする。

(1) $A\cap B\subset A\cup B$ であることは，$A=B$ であるために $\boxed{\text{q}}$

(2) すべての C に対して $A\cap C\supset B\cap C$ であることは $A\supset B$ であるために $\boxed{\text{r}}$

(3) $A\cup C\supset B\cup C$ となる C があることは，$A\supset B$ であるために $\boxed{\text{s}}$

(4) $A\subset C$，$B\subset C'$ となる C があることは，A と B とが交わらないために $\boxed{\text{t}}$

1．必要でも十分でもない。
2．必要であるが十分でない。
3．必要ではないが十分である。
4．必要かつ十分である。

分　野

数学Ⅰ：集合と論理，必要条件・十分条件

【解答】

(1) $A=B$ なら $A\cup B=A\cap B$ だから $A\cap B\subset A\cup B$ が成り立つ．

また，$A\cap B\subset A\cup B$ のとき，$A\cap B'\neq\emptyset$ または $A'\cap B\neq\emptyset$ とすると $A\neq B$ である．

よって，$A\cap B\subset A\cup B$ であることは，$A=B$ であるために $\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$．…q=2.

(2) $A\supset B$ のとき，$A\cap C\supset B\cap C$ は明らか．

また，すべての C の中には全体集合 U も含まれる．$C=U$ のとき，$A\cap U\supset B\cap U$ は $A\supset B$ に他ならない．

よって，すべての C に対して $A\cap C\supset B\cap C$ であることは $A\supset B$ であるために $\boxed{\text{必要かつ十分である}}$．…r=4.

(3) $A\supset B$ のとき，$A\cup C\supset B\cup C$ は明らか．

$A\cup C\supset B\cup C$ となる C が存在しても，$A'\cap B\cap C\neq\emptyset$ ならば，$x\in A'\cap B\cap C$ をみたす要素 x は $A\cup C$，$B\cup C$，B の要素であるが A の要素ではない．したがって，$A\supset B$ ではない．

よって，$A\cup C\supset B\cup C$ となる C があることは，$A\supset B$ であるために $\boxed{\text{必要であるが十分でない}}$．
…s=2.

(4) $A\subset C$，$B\subset C'$ のとき，C と C' が交わらないから，それぞれの一部である A と B は交わらない．

A と B が交わらないとき，$(A\cup B)'$ を 2 つに分け，E，F とし，$C=A\cup E$ とする．

このとき，$C'=B\cup F$ ある．このとき，$A\subset C$，$B\subset C'$ であるから，条件をみたす C は存在する．

よって，$A\subset C$，$B\subset C'$ となる C があることは，A と B とが交わらないために $\boxed{\text{必要かつ十分である}}$．…t=4.

(注) (4) の C は $C=A$ または $C=B'$ でよい．

1968 年　2 次試験（文科）

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の内部に点 P をとって，∠APB，∠BPC，∠CPD，∠DPA がいずれも $\frac{3}{4}\pi$ をこえないようにするとき，点 P のうごきうる範囲の面積を求めよ。ただし，C は A ととなりあわない頂点とする。

分　野

数学 I ：平面図形，円周角

考え方

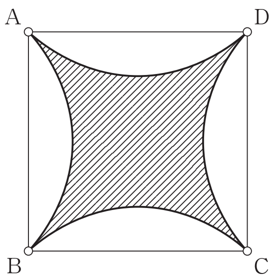
2 定点を定角に見込む点の軌跡は円弧である．（円周角の定理の逆）この円弧の内側では見込む角が大きく，外側では円弧が小さい．

【解答】

$\angle APB=\frac{3}{4}\pi$ となる点 P の軌跡は A，B を通る円弧．中心は AB について正方形と反対側で，OA＝OB で $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$ となる点 O である．

$\angle APB \leqq \frac{3}{4}\pi$ となる点は上の円弧の外側．つまり正方形の内側．

同様に $\angle BPC \leqq \frac{3}{4}\pi$，$\angle CPD \leqq \frac{3}{4}\pi$，$\angle DPA \leqq \frac{3}{4}\pi$ もみたす範囲を図示すると下図斜線部，境界を含む，ただし，正方形の頂点は除く．



求める部分は正方形から 4 つの弓形を引いた部分．弓形は扇形から三角形を引いたもの．扇形は半径が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で中心角が $\frac{\pi}{2}$．三角形は等辺の長さが $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の直角二等辺三角形である．

よって，求める面積は

$$1-4\times\left\{\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=2-\frac{\pi}{2}. \quad \cdots(答)$$

第 2 問

正方形 ABCD を底面とし，V を頂点とする正四角錐（すい）において，底面と斜面のなす二面角が 45° のとき，となりあう 2 つの斜面のなす二面角を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：立体図形

考え方

ベクトルまたは初等幾何で求める．

【解答1】

底面の各辺に平行に x 軸，y 軸，鉛直上方に z 軸をとると，斜面に垂直な単位ベクトルは水平面と $45°$ をなすから $\frac{1}{\sqrt{2}}(\pm1,\ 0,\ 1)$，$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ \pm1,\ 1)$ である．

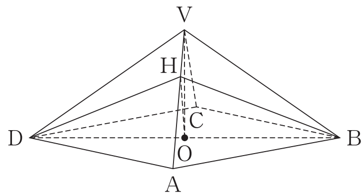
隣り合う2面の法線ベクトルを $\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 0,\ 1)$，$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)$ とし，そのなす角を θ とすると，

$$\cos\theta=\vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{1}{2}.$$

よって，$\theta=60°$．

2面のなす角はその補角．よって $120°$．　…(答)

【解答2】



底面の1辺の長さを $2a$ とすると，V を通り底面に垂直で，正方形の辺に平行な断面が直角二等辺三角形になるから，四面体の高さは a．

よって，$\mathrm{VA}=\mathrm{VB}=\sqrt{(\sqrt{2}\,a)^2+a^2}=\sqrt{3}\,a$，$\mathrm{AB}=2a$．

B から，VA へ下した垂線の足を H とする．

AB を底辺とする三角形 VAB の高さは $\sqrt{(\sqrt{3}\,a)^2-a^2}=\sqrt{2}\,a$．

よって，三角形 VAB の面積は $\sqrt{2}\,a^2$．

よって，$\mathrm{BH}=\frac{2\sqrt{2}\,a^2}{\mathrm{VA}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$．

対称性から $\mathrm{DH}=\mathrm{BH}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$，$\mathrm{BD}=2\sqrt{2}\,a$．

BD の中点を O とすると，

$$\sin\angle\mathrm{BHO}=\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{BH}}=\frac{\sqrt{2}\,a}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって，$\angle\mathrm{BHO}=60°$．よって $\angle\mathrm{BHD}=2\angle\mathrm{BHO}=120°$．

$\mathrm{BH}\perp\mathrm{AV}$，$\mathrm{DH}\perp\mathrm{AV}$ だから，$\angle\mathrm{BHD}$ が面 VAB と面 VAD のなす角．よって，$120°$．　…(答)

第3問

α，β は与えられた実数とする。x の2次式

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

の係数 a，b，c が $a+b+c=0$ なる関係式を満たしながら動くとき，座標 $(f(\alpha),\ f(\beta))$ をもつ点の全体は，平面上のどんな集合になるか。

分　野

数学Ⅰ：点の存在範囲

考え方

α，β が定数で，a，b，c が変化することを考える．$a+b+c=0$ だから，2 変数が変化する．

$f(\alpha)$，$f(\beta)$ は独立に変化するように見えるが，独立でない場合もある．$(a,\ b)$ を $X=f(\alpha)$，$Y=f(\beta)$ で表すことができれば，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ は独立である．

また，$f(x)$ は 2 次式だから $a\neq0$ であることにも注意．

【解答】

$a+b+c=0$ から $f(x)=a(x^2-1)+b(x-1)$．

(i) $\alpha=\beta=1$ のとき，

$f(\alpha)=f(\beta)=0$．

よって，$(f(\alpha),\ f(\beta))=(0,\ 0)$．

(ii) $\alpha=1$，$\beta\neq1$ のとき，

$f(\alpha)=0$．

$\beta\neq1$ から $f(\beta)=a(\beta^2-1)+b(\beta-1)$ はすべての値をとる．

したがって，$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は直線 $x=0$ を描く．

(iii) $\alpha\neq1$，$\beta=1$ のとき，(ii) と同様に，$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は直線 $y=0$ を描く．

(iv) $\alpha=\beta\neq1$ のとき，

$f(\alpha)=f(\beta)$．

$f(\alpha)$ はすべての値をとる．

したがって，$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は直線 $y=x$ を描く．

(v) $\alpha\neq1$，$\beta\neq1$，$\alpha\neq\beta$ のとき，

$$f(\alpha)=(\alpha^2-1)a+(\alpha-1)b=X,\quad f(\beta)=(\beta^2-1)a+(\beta-1)b=Y$$

とおくと，

$$a=\frac{(\beta-1)X-(\alpha-1)Y}{(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha-\beta)},\quad b=\frac{-(\beta^2-1)X+(\alpha^2-1)Y}{(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha-\beta)},$$

ただし，$a\neq0$ だから，$(\beta-1)X-(\alpha-1)Y\neq0$．

直線 $(\beta-1)x-(\alpha-1)y=0$ 上にない任意の点 $(X,\ Y)$ に対して $(a,\ b)$ $(a\neq0)$ が存在する．

したがって，$(f(\alpha),\ f(\beta))$ は平面全体から直線 $(\beta-1)x-(\alpha-1)y=0$ を除いた範囲を描く．

まとめて，$(f(\alpha),\ f(\beta))$ 全体は

$$\begin{cases}\text{点}\ (0,\ 0) & (\alpha=\beta=1\ \text{のとき}),\\ \text{直線}\ x=0 & (\alpha=1,\ \beta\neq1\ \text{のとき}),\\ \text{直線}\ y=0 & (\alpha\neq1,\ \beta=1\ \text{のとき}),\\ \text{直線}\ y=x & (\alpha=\beta\neq1\ \text{のとき}),\\ \text{直線}\ (\beta-1)x-(\alpha-1)y=0\ \text{を除いた範囲} & (\alpha\neq1,\ \beta\neq1,\ \alpha\neq\beta\ \text{のとき}).\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

第 4 問

次の条件を満たす 3 次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

(i) 多項式 $g(x)$ の次数が 2 をこえないならば，つねに

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx=0$$

(ii) $\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,dx=1$

(iii) $f(1)>0$

分　野

数学ⅡB：整式の積分

考え方

$g(x)$ が任意だから，$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ ならばよい．

積分区間が $[-1,\ 1]$ だから奇関数，偶関数の関係を利用して積分すると要領がよい．

【解答】

$g(x)$ の次数が 2 を越えないとき，$g(x) = px^2 + qx + r$ とおくと，(i) より

$$\int_{-1}^{1} f(x)(px^2+qx+r)\,dx = p\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx + q\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx + r\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

p，q，r は任意だから

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.$$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと，

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)\,dx = 2\int_{0}^{1} (bx^4 + dx^2)\,dx = \frac{2}{5}b + \frac{2}{3}d = 0.\quad 3b + 5d = 0. \quad \cdots①$$

$$\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)\,dx = 2\int_{0}^{1} (ax^4 + cx^2)\,dx = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c = 0.\quad 3a + 5c = 0. \quad \cdots②$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,dx = 2\int_{0}^{1} (bx^2 + d)\,dx = \frac{2}{3}b + 2d = 0.\quad b + 3d = 0. \quad \cdots③$$

①，③ より $b = d = 0$．② より，$c = -\frac{3}{5}a$．

$$\therefore\quad f(x) = a\left(x^3 - \frac{3}{5}x\right). \quad \cdots④$$

(ii) より，

$$\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2\,dx = a^2\int_{-1}^{1} \left(x^3 - \frac{3}{5}x\right)^2 dx = 2a^2\int_{0}^{1} \left(x^6 - \frac{6}{5}x^4 + \frac{9}{25}x^2\right) dx$$

$$= 2a^2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right) = \frac{8}{7\times 25}a^2 = 1.$$

$$\therefore\quad a^2 = \frac{7\times 25}{8}. \quad \cdots⑤$$

(iii)，④ より $f(1) = \frac{2}{5}a > 0$．よって，$a > 0$．

⑤ より

$$a = \frac{5\sqrt{14}}{4}.$$

よって，

$$f(x) = \frac{5\sqrt{14}}{4}x^3 - \frac{3\sqrt{14}}{4}x. \quad \cdots(答)$$

第5問

平面上の点(a, b)の，直線 $2x-y=p$ に関する対称点をとり，次にこれを原点を中心として正の向きに90°回転し，さらに直線 $x+2y=q$ に関する対称点をとると，はじめの点(a, b)に一致する。このとき，p，qを用いてa，bを表わせ。

分 野

数学I：図形の移動

考え方

2直線について対称な点同士が原点を中心に90°の位置にあることに注目．

【解答】

(a, b)と $2x-y=p$ について対称な点を(X, Y)，(a, b)と $x+2y=q$ について対称な点を(Z, W)とおく．

$$2\left(\frac{X+a}{2}\right)-\left(\frac{Y+b}{2}\right)=p. \quad \therefore \quad 2X-Y=2p-2a+b. \qquad \cdots①$$

$$\frac{Y-b}{X-a}\cdot 2=-1. \quad \therefore \quad X+2Y=a+2b. \qquad \cdots②$$

①，②から，

$$X=\frac{4}{5}p-\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b. \qquad \cdots③$$

$$Y=-\frac{2}{5}p+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b. \qquad \cdots④$$

$$\left(\frac{Z+a}{2}\right)+2\left(\frac{W+b}{2}\right)=q. \quad \therefore \quad Z+2W=2q-a-2b. \qquad \cdots⑤$$

$$\frac{W-b}{Z-a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1. \quad \therefore \quad 2Z-W=2a-b. \qquad \cdots⑥$$

⑤，⑥から，

$$Z=\frac{2}{5}q+\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b. \qquad \cdots⑦$$

$$W=\frac{4}{5}q-\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b. \qquad \cdots⑧$$

点(X, Y)を原点を中心にして正の向きに90°回転すると，(Z, W)に一致するから，
$(Z, W)=(-Y, X)$.

③，④，⑦，⑧から，

$$\therefore \quad \frac{2}{5}q+\frac{3}{5}a-\frac{4}{5}b=-\left(-\frac{2}{5}p+\frac{4}{5}a+\frac{3}{5}b\right), \quad \frac{4}{5}q-\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}b=\frac{4}{5}p-\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b.$$

$$\therefore \quad 7a-b=2p-2q, \quad a+7b=-4p+4q.$$

$$\therefore \quad a=\frac{1}{5}p-\frac{1}{5}q, \quad b=-\frac{3}{5}p+\frac{3}{5}q. \qquad \cdots(答)$$

（注） 点(a, b)を直線 $2x-y=p$ に関して対称移動し，原点について90°回転し，直線 $x+2y=q$ に関して対称移動した点を(a', b')とすると，$\begin{cases} a'=-b-\dfrac{2}{5}p+\dfrac{2}{5}q, \\ b'=a-\dfrac{4}{5}p+\dfrac{4}{5}q \end{cases}$ となる．

点(a, b)から点(a', b')への移動は，今求めた点$\left(\frac{1}{5}p-\frac{1}{5}q, -\frac{3}{5}p+\frac{3}{5}q\right)$を中心とする$+90^\circ$回転である．

1968 年　2 次試験（理科）

第 1 問

平面上の点 $(x,\ y)$ で

$$x^2-5x<y<\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)-\frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{\pi x}{5}\right)$$

を満たす範囲が，直線 $y=\alpha x$ によって面積の等しい 2 つの部分に分けられるように，α の値を定めよ。

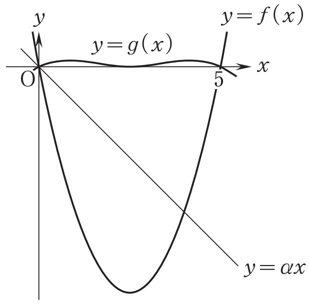
分　野

数学 II B：整式の積分，　**数学 I**：三角関数

考え方

$x^2-5x=\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)$ となる x を求めることからはじめる．交点が求められたらその囲む部分の面積を求め，その二等分を考える．

【解答】



$f(x)=x^2-5x$，$g(x)=\dfrac{\pi}{5}\sin\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)-\dfrac{3}{5}\sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)$ とおく．

$f(0)=g(0)=0$，$f(5)=g(5)=0$.

$t=\sin\left(\dfrac{\pi}{5}x\right)$ とおくと，$0\leqq x\leqq 5$ のとき，$0\leqq t\leqq 1$.

$$g(x)=\frac{\pi}{5}t-\frac{3}{5}t^2=-\frac{3}{5}\left(t-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{\pi^2}{60}.$$

よって，$0<x<5$ のとき，$0<g(x)\leqq\dfrac{\pi^2}{60}$，$f(x)<0$.

$-5<x<0$，$5<x<10$ のとき $-1\leqq t<0$，$g(x)<0$，$f(x)>0$.

$x\leqq -5$，$x\geqq 10$ のとき，$g(x)\leqq\dfrac{\pi^2}{60}$，$f(x)\geqq 50$.

以上から，$f(x)=g(x)$ となるのは $x=0,\ 5$ のみ.

$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$-\int_0^5(x^5-5x)\,dx=\frac{125}{6}.$$

$0<x<5$ において，$y=g(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^5\left\{\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)-\frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right\}dx.$$

$$\int_0^5\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)dx=\frac{5}{\pi}\int_0^{\pi}\sin u\,du=\frac{10}{\pi}.$$

$$\int_0^5\sin^2\left(\frac{\pi}{5}x\right)dx=\frac{5}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2u)\,du=\frac{5}{2}.$$

$$\therefore\quad\int_0^5\left\{\frac{\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi}{5}x\right)-\frac{3}{5}\sin^2\left(\frac{\pi}{5}x\right)\right\}dx=\frac{\pi}{5}\,\frac{10}{\pi}-\frac{3}{5}\,\frac{5}{2}=\frac{1}{2}.$$

よって，条件をみたす範囲の面積は $\dfrac{125}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{64}{3}$.

この面積の $\dfrac{1}{2}$ は $\dfrac{32}{3}$.

$y=f(x)$ ($\leqq 0$) と x 軸とで囲む部分の面積が，$y=g(x)$ ($\geqq 0$) と x 軸とで囲む部分の面積より大きいから $\alpha<0$ を考えればよい.

$y=x^2-5x$ と $y=\alpha x$ の交点の x 座標は 0，$5+\alpha$.

これらで囲まれる部分の面積は

$$\int_0^{5+\alpha}\{\alpha x-(x^2-5x)\}\,dx=\frac{1}{6}(5+\alpha)^3=\frac{32}{3}.\quad \therefore\quad (5+\alpha)^3=64.\quad \therefore\quad 5+\alpha=4.$$

$$\therefore\quad \alpha=-1.$$ …(答)

第 2 問

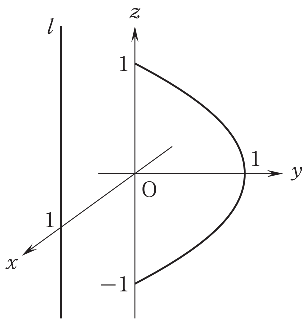
（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 4 問

$(x,\ y,\ z)$ を空間の直交座標とし，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とする。yz-平面内にあって $y=1-z^2$ で表わされる曲線の $-1\leqq z\leqq 1$ なる部分を，直線 l のまわりに回転してできる曲面と，平面 $z=1$ および $z=-1$ とによって囲まれた部分の体積を求めよ。



分　野

数学ⅡB：整式の積分，体積，**数学Ⅰ**：空間図形

考え方

平面 $z=t$ における曲線と直線 l の切り口を考えて断面を考える.

【解答】

曲線 $x=0$，$y=1-z^2$ ($-1\leqq z\leqq 1$) を C とする.

平面 $z=t$ ($-1\leqq t\leqq 1$) と曲線 C の交点は $(0,\ 1-t^2,\ t)$.

平面 $z=t$ と直線 l の交点は $(1,\ 0,\ t)$.

よって，C を l の回りに回転してできる曲面の $z=t$ における断面は $(1,\ 0,\ t)$ を中心とし，

$(0,\ 1-t^2,\ t)$ を通る円．

その半径は $\sqrt{1^2+(1-t^2)^2}$ の円．その面積は $\{1^2+(1-t^2)^2\}\pi=(t^4-2t^2+2)\pi$．

よって，求める体積は

$$\int_{-1}^{1}(t^4-2t^2+2)\pi\,dt=2\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{46}{15}\pi. \quad \cdots(\text{答})$$

第 5 問

整数を係数とする次数 3 の多項式 $P(x)$ で，次の条件を満たすものを求めよ。

(1) $P(x)$ のグラフは原点に関して対称である。

(2) $P(x)=0$ は重根をもたない。

(3) $P(x)$ は極大値も極小値ももたない。

(4) $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$ は整数である。

(5) $0<P(1)<6$ である。

分　野

数学Ⅰ：多項式，**数学ⅡB**：整式の微分

考え方

与えられた条件から式を立ててゆくことにより係数の条件は絞り込まれる．

【解答】

問題文の「重根」は「重解」の当時の表記である．

(1) から $P(x)$ は奇関数である．したがって，$P(x)=ax^3+bx$ $(a\neq 0)$ とかける．

$P(x)=x(ax^2+b)$ と (2) より重解をもたないことから，$b\neq 0$．

(3) から，$P'(x)=0$ は異なる実数解をもたない．

$P'(x)=3ax^2+b=0$ の判別式は，$-12ab\leqq 0$．$ab\neq 0$ より，

$$ab>0. \quad \cdots①$$

(4) から，$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a}{8}+\dfrac{b}{2}$ は整数． $\cdots②$

(5) から，

$$0<a+b<6. \quad \cdots③$$

a，b は整数で，①，③ から a，b は正の整数．$1\leqq a\leqq 5$，$1\leqq b\leqq 5$．

② から $\dfrac{a}{4}+b$ は整数．よって，a は 4 の倍数．したがって，$a=4$．

③ から，$1\leqq b<2$．よって，$b=1$．

このとき，$\dfrac{a}{8}+\dfrac{b}{2}=1$ で ② をみたす．

よって，

$$P(x)=4x^3+x. \quad \cdots(\text{答})$$

第6問

次の問い(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1) α が $0<\alpha<1$ を満たす有理数ならば，区間 $0\leqq x\leqq 1$ の上で不等式 $1+\dfrac{\alpha}{2}x\leqq(1+x)^{\alpha}$ が成り立つことを示せ。

(2) 2^{200} のけた数はいくつか。またその最上位の数は何か。その理由を述べよ。

注1．たとえば $2^{10}=1024$ のけた数は4，最上位の数は1である。なおこの数が 10^3 に近いことに注意せよ。

注2．$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$ であるが，この数値を証明に用いてはならない。

(3) $0.300<\log_{10}2<0.302$ であることを示せ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，**数学Ⅰ**：指数・対数

考え方

$\log_{10}2\fallingdotseq 0.3010$ は直接使えないが，$\log_{10}2^{200}\fallingdotseq 200\times 0.3010=60.20$ から 2^{200} が61桁で，$0=\log_{10}1<0.20<0.3010\fallingdotseq\log_{10}2$ から最上位数が1であることが予想される．

【解答】

(1) $f(x)=(1+x)^{\alpha}-\left(1+\dfrac{\alpha}{2}x\right)$ とおくと，

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\frac{\alpha}{2},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}.$$

$0<\alpha<1$，$0\leqq x\leqq 1$ より，$f''(x)<0$．よって，$f'(x)$ は減少．

$f'(1)=\alpha 2^{\alpha-1}-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}(2^{\alpha}-1)$．$\alpha>0$ より，$f'(1)>0$．

よって $f'(x)>0$．よって，$f(x)$ は増加する．

$f(0)=0$ より $f(x)\geqq 0$．

$$\therefore\quad 1+\frac{\alpha}{2}x\leqq(1+x)^{\alpha}.$$

（証明終り）

(2) $2^{10}=1024$ より $2^{200}=1024^{20}>1000^{20}=10^{60}$．

次に，$2\times 10^{60}>2^{200}=1024^{20}=\left(1+\dfrac{24}{1000}\right)^{20}\times 10^{60}$ を証明する．

(1)で $x=1$，$\alpha=\dfrac{1}{20}$ とおくと，

$$1+\frac{1}{40}\leqq(1+1)^{\frac{1}{20}}.$$

$$\therefore\quad 2\geqq\left(1+\frac{1}{40}\right)^{20}>\left(1+\frac{24}{1000}\right)^{20}=\left(1+\frac{3}{125}\right)^{20}.$$

$$\therefore\quad 2\times 10^{60}>\left(1+\frac{24}{1000}\right)^{20}\times 10^{60}=2^{200}.$$

$$\therefore\quad 10^{60}<2^{200}<2\times 10^{60}$$

だから，2^{200} は10進法で表すと61桁の数で，最上位の数は1である．　…(答)

(3) (2)より，$\log_{10}10^{60}<\log_{10}2^{200}<\log_{10}(2\times 10^{60})$．

$$\therefore\quad 60<200\log_{10}2<60+\log_{10}2.$$

$$\therefore\quad \frac{60}{200}=0.3<\log_{10}2<\frac{60}{199}<0.302.$$

$$\therefore\quad 0.300<\log_{10}2<0.302.$$

（証明終り）

3.2　東大紛争と入試の中止（1969 年）

1968 年医学部の問題に端を発した東大紛争は瞬く間に広がり，学部封鎖，バリケードストライキに発展した．翌 1969 年 1 月には安田講堂に立てこもる学生を機動隊が強制的に排除する事態になった．1969 年には入試，卒業式も中止になった．

入試中止翌年の 1970 年入試は，一次試験でこれまで英数国同時の試験を行っていたのが各教科別々に行われたり，二次試験で文科 3 問 80 分，理科 4 問 100 分に短縮される改革が行われたが，この形式は 1 年だけであった．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1970）

一次試験には 1970 年まで必ず択一式の問題が 1 題はあったが，この年以後あまり出題されなくなった．

この年から 1974 年頃までの東大の問題は易しい問題が多かった．

1970 年　1 次理科問題Ⅳは線形演算子の固有値問題．何かネタがあるかもしれない．

このころ　あんなこと・こんなこと

日米安保条約が 1960 年に改定された際，10 年後に見直しをするという規定があったため，1970 年にむけて安保条約について再議論がなされた．また，ベトナム戦争の激化も暗い影を落としていた．1960 年の安保闘争がかなり偶発的であったのに対して，1970 年の安保闘争（実際は 1969 年にピーク）時計仕掛けの観がある．

三島由紀夫が自衛隊市ヶ谷駐屯地で割腹自殺したのも 1970 年．

そんな中で企画された大阪万博（1970 年）は，アジア大会，オリンピック，万博と続く日本におけるフェスティバル運動（イベントによって投資拡大，景気上昇を意図する運動）の最後となるものだと思える．2020 年東京オリンピックにも同様な意図があるかもしれないが，一応これら，戦後復興期の一連の運動とは別と考えてよいのではないか．

1969 年

1969 年，東京大学の入学試験は中止となりましたので，この年の入試問題はありません。

1970 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

すべての実数 x に対して $x^2-2ax+1 \geqq \frac{1}{2}(x-1)^2$ が成り立つためには，実数 a が

$\boxed{\text{a}} \leqq a \leqq \boxed{\text{b}}$ を満足することが必要かつ十分である。

上の不等式がすべての実数 x に対して成り立ち，かつ x のある正の値に対して等号が成り立つのは $a=\boxed{\text{c}}$ の場合であって，その x の値は $\boxed{\text{d}}$ である。

分　野

数学 I ：2 次関数

【解答】

与不等式は

$$x^2-2(2a-1)x+1 \geqq 0$$

のように変形される．この式の左辺の判別式を D とすると，

$$\frac{1}{4}D=(2a-1)^2-1=4a^2-4a=4a(a-1) \leqq 0.$$

$$\therefore \quad \boxed{0} \leqq a \leqq \boxed{1}.$$ …a，b

この不等式がすべての実数で成り立ち，ある実数で等号が成り立つのは $D=0$ のとき，$a=0$，1．等号が成り立つのは $a=0$ のとき $x=-1$，$a=1$ のとき $x=1$．よって，ある正の値で成り立つのは $a=\boxed{1}$ の場合で，そのときの x は $\boxed{1}$． …c，d

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

m を任意の実数とするとき，x，y の方程式

$$y=mx^2-(2m+\boxed{\text{e}})x-\boxed{\text{f}}(m-1)$$

の表わす曲線は，すべて相異なる 2 点 (3, 0)，($\boxed{\text{g}}$，$\boxed{\text{h}}$) を通る。

分　野

数学 I ：定点通過

【解答】

$\boxed{\text{e}}=e$，$\boxed{\text{f}}=f$，$\boxed{\text{g}}=g$，$\boxed{\text{h}}=h$ とおく．

$$y=m(x^2-2x-f)-ex+f.$$

(3, 0) を通るから，$0=m(3-f)-3e+f$．これが任意の m について成り立つから，$f=\boxed{3}$，$e=\boxed{1}$． …f，e

よって，

$$y=m(x^2-2x-3)-x+3=m(x-3)(x+1)-x+3.$$

よって，$x=-1$ のとき $y=4$．よって，($\boxed{-1}$，$\boxed{4}$) をつねに通る． …g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a を実数とし，x についての方程式

$$x(x+2)(x+4)+a=0$$

を考える。これが 3 個の相異なる実根をもつためには，$\boxed{\text{i}}\sqrt{3}<a<\boxed{\text{j}}\sqrt{3}$ であることが必要かつ十分である。また $a=\boxed{\text{k}}$ のとき，3 根のうち 2 根が純虚数 $\pm\sqrt{\boxed{\text{l}}}\,i$ となる。

分 野

数学ⅡB：整式の微分，**数学Ⅰ**：純虚数

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

与方程式を $a=-x(x+2)(x+4)$ とする．$-x(x+2)(x+4)=f(x)$ とおく．

$$f'(x)=-(x+2)(x+4)-x(x+4)-x(x+2)=-3x^2-12x-8.$$

$f'(x)=0$ となる x は $x=\dfrac{-6\pm2\sqrt{3}}{3}$.

$$f(x)=-x^3-6x^2-8x=-\left(x^2+4x+\frac{8}{3}\right)(x+2)+\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}.$$

よって，

$$f\left(\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{3}\right)=\pm\frac{16\sqrt{3}}{9}.$$

よって，$f(x)=a$ が 3 個の相異なる実数解をもつ条件は

$$\boxed{-\frac{16}{9}}\sqrt{3}<a<\boxed{\frac{16}{9}}\sqrt{3}. \qquad \cdots\text{i, j}$$

2 つの純虚数解 $\pm\sqrt{l}\,i$ と実数解 α をもつとすると，

$$x(x+2)(x+4)+a=(x-\alpha)(x^2+l).$$

係数を比較して

$$6=-\alpha,\quad 8=l,\quad a=-\alpha l.$$

$$\therefore\quad a=\boxed{48}. \qquad \cdots\text{k}$$

純虚数解は $\pm\sqrt{\boxed{8}}\,i$. $\cdots$l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

自然数 n の異なる正の約数のすべての積を $f(n)$ で表わす。ただし，n 自身も n の約数とみる。いま a，b，c，d を 1 または -1 として，等式

$$12=f(12)^a f(6)^b f(4)^c f(2)^d$$

を成り立たせるには

$$a=\boxed{\text{m}},\quad b=\boxed{\text{n}},\quad c=\boxed{\text{o}},\quad d=\boxed{\text{p}}$$

とすればよい。

分 野

数学Ⅰ：整数

【解答】

$f(12)=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot12=2^6\cdot3^3,\quad f(6)=1\cdot2\cdot3\cdot6=2^2\cdot3^2,\quad f(4)=1\cdot2\cdot4=2^3,\quad f(2)=1\cdot2=2.$

$$f(12)^a f(6)^b f(4)^c f(2)^d=2^{6a+2b+3c+d}3^{3a+2b}=12=2^2 3.$$

$$\therefore\quad 6a+2b+3c+d=2,\quad 3a+2b=1.$$

第 2 式から

$$a=\boxed{1},\quad b=\boxed{-1}.$$ …m，n

$\therefore\quad 2+3c+d=0$．よって，

$$c=\boxed{-1},\quad d=\boxed{1}.$$ …o，p

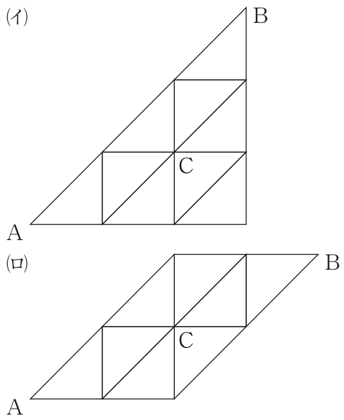
V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

右図の(イ)，(ロ)について，点 A から出発して点 B に到達する行き方は全部で幾通りあるかを考える。ただし，道は必ず左から右へ，または下から上へ進み，斜めの道は左下から右上へ進むものとする。このとき

(1)　点 C を通ってゆく行き方は，(イ)については $\boxed{\text{q}}$ 通り，(ロ)については $\boxed{\text{r}}$ 通りある。

(2)　点 C を通っても通らなくてもよいとすれば，(イ)については $\boxed{\text{s}}$ 通り，(ロ)については $\boxed{\text{t}}$ 通りの行き方がある。



分　野

数学ⅡB：個数

【解答】

(1)　A から C へ行く行き方は(イ)も(ロ)も斜めの道を通る行き方が 2 通り，斜めの道を使わない行き方が 2 通りで合計 4 通り．

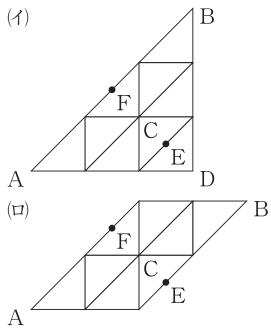
C から B へ行く行き方は(イ)と(ロ)の道は異なるが，どちらも斜めの道を通る行き方が 2 通り，斜めの道を使わない行き方が 2 通りで合計 4 通り．

したがって，(イ)については $4\times4=\boxed{16}$ 通り．…q

(ロ)についても $4\times4=\boxed{16}$ 通り．…r

(2)　(イ)について，右図のように，D，E，F をとる．A から D に行く行き方は 1 通り，D から B に行く行き方は 1 通り，A から E に行く行き方は 1 通り，E から B に行く行き方は 1 通り，A から F に行く行き方は 2 通り，F から B に行く行き方は 2 通りある．よって A から B に行く行き方は $16+1+1+2\times2=\boxed{22}$ 通り．…s

(ロ)について，右図のように，E，F をとる．A から E に行く行き方は 1 通り，E から B に行く行き方は 2 通り，A から F に行く行き方は 2 通り，F から B に行く行き方は 1 通りある．よって A から B に行く行き方は $16+1\times2+2\times1=\boxed{20}$ 通り．…t



1970 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

次の条件(イ), (ロ)を満足する方程式 $ax^2-2bx+c=0$ の全体を考える。

(イ)　a, b, c はいずれも正の整数である。

(ロ)　根はすべて実数であって区間 $0<x<1$ の中にある。

このとき次のことが成り立つ。

(1)　a と b の大小については，次の中で番号 $\boxed{\text{a}}$ のものが正しい。

1　つねに $a>b$　　2　つねに $a<b$　　3　1, 2 のいずれでもない

(2)　b と c の大小については，次の中で番号 $\boxed{\text{b}}$ のものが正しい。

1　つねに $b>c$　　2　つねに $b<c$　　3　1, 2 のいずれでもない

(3)　c と a の大小については，次の中で番号 $\boxed{\text{c}}$ のものが正しい。

1　つねに $c>a$　　2　つねに $c<a$　　3　1, 2 のいずれでもない

(4)　a のとり得る最小の数は $\boxed{\text{d}}$ である。

分 野

数学 I：2 次方程式の理論，整数

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

$a>0$ だから，$B=\dfrac{b}{a}$，$C=\dfrac{c}{a}$ とおくと，与方程式は $x^2-2Bx+C=0$.

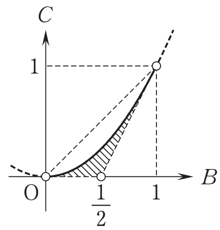
$f(x)=x^2-2Bx+C$ とおく．$y=f(x)$ は下に凸.

実数解をもつから，判別式を D とすると，$\dfrac{1}{4}D=B^2-C\geqq 0$.　…①

$y=f(x)$ の軸は $x=B$. ∴　$0<B<1$.　…②

$f(0)=C>0$，$f(1)=1-2B+C>0$.　…③

①，②，③ を BC 平面に図示すると右図.



(1)　$B<1$ すなわち $\dfrac{b}{a}<1$ より，$\boxed{\text{つねに } a>b}$.　…a=1

(2)　$C<B$ すなわち $\dfrac{c}{a}<\dfrac{b}{a}$ より，$\boxed{\text{つねに } b>c}$.　…b=1

(3)　$C<1$ すなわち $\dfrac{c}{a}<1$ より，$\boxed{\text{つねに } c<a}$.　…c=2

(4)　$a=1$, 2, 3 のとき，条件をみたす (B, C) は存在しない.

$a=4$ のとき，$B=\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{1}{4}$ なら，①，②，③ をみたす．よって，$b=2$，$c=1$.

よって，a の最小値は $\boxed{4}$.　…d

Ⅱ

次の $\boxed{\phantom{\text{e}}}$ にあてはまる数は何か。

複素数 z を表わす平面上で，方程式

$$z\overline{z}+3i(z-\overline{z})+5=0$$

は点 $\boxed{\text{e}}+\boxed{\text{f}}\,i$ を中心とする半径 $\boxed{\text{g}}$ の円を表わす。それは $|z+i|=\boxed{\text{h}}\,|z-2i|$ を満足する点 z の軌跡である。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を意味する。

分　野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

与式を整理すると，

$$(z-3i)(\overline{z}+3i)=4.\quad |z-3i|^2=4.$$

となるから，z は $\boxed{0}+\boxed{3}\,i$ を中心とする半径 $\boxed{2}$ の円を表す．　…e，f，g

$h=\boxed{\text{h}}$ とすると，$|z+i|=h|z-2i|$．$(h\geqq 0)$

$$(z+i)(\overline{z}-i)=h^2(z-2i)(\overline{z}+2i).\quad (1-h^2)z\overline{z}-(1+2h^2)(z-\overline{z})i+1-4h^2=0.$$

これが与式に一致するから，

$$-\frac{1+2h^2}{1-h^2}=3,\quad \frac{1-4h^2}{1-h^2}=5.$$

よって，$h^2=4$．$h\geqq 0$ から

$$h=\boxed{2}.$$
…h

（注）$|z+i|=h|z-2i|$ は 2 点 $-i$，$2i$ からの距離の比が $h:1$ である点の軌跡であり，$h\neq 1$ のときアポロニウスの円になる．

後半で，h を求めるだけが目的なら，与円周上の点，例えば $z=i$ を代入するだけでよい．

Ⅲ

次の $\boxed{\phantom{\text{i}}}$ にあてはまる数は何か。

放物線 $y=(x-3)^2$ に接し，x 軸，y 軸のいずれともその正の部分で交わる直線を考える。このような直線の中で，x 軸，y 軸とその直線とがつくる三角形の面積を最も大きくするものは

$$y=\boxed{\text{i}}\,x+\boxed{\text{j}}$$

である。またそのとき，その三角形の面積は $\boxed{\text{k}}$ であり，この面積は放物線と x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積の $\boxed{\text{l}}$ 倍にあたる。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

【解答】

接点を $(t,\ (t-3)^2)$ とする．$y'=2(x-3)$．

接線の方程式は

$$y=2(t-3)(x-t)+(t-3)^2=(t-3)(2x-t-3).$$

x 切片は $\dfrac{t+3}{2}$，y 切片は $-(t-3)(t+3)$．

x 軸，y 軸の正の部分で交わるのは $-3<t<3$．

よって，三角形の面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\frac{1}{2}\,\frac{t+3}{2}(3-t)(t+3)=\frac{1}{4}(3-t)(t+3)^2.$$

$$S'(t)=\frac{1}{4}\{2(t+3)(3-t)-(t+3)^2\}=\frac{3}{4}(t+3)(1-t).$$

t	(-3)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	↗		↘	(0)

$S(t)$ が最大になるのは，$t=1$ のときで，そのとき接線は

$$y=\boxed{-4}\,x+\boxed{8}\,.$$ …i，j

そのときの三角形の面積は $S(1)=\boxed{8}$. …k

放物線と x 軸，y 軸とで囲まれた部分の面積は

$$\int_0^3 (x-3)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^3=9.$$

よって，$S(1)$ はこの $\boxed{\dfrac{8}{9}}$ 倍である. …l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

定数 λ を適当に選んで，次の条件(イ)と(ロ)を満足する多項式 $P(x)$ が存在するようにしたい。

(イ) $P(x)$ はその次数が 4 より大きくなく，かつ恒等的には 0 とならない。

(ロ) x のすべての値に対して

$$(x^2+1)P''(x)=\lambda P(x)$$

が成り立つ。ただし，$P''(x)$ は $P(x)$ の第 2 次導関数を表わす。

そのような λ の値は 4 個あるが，それらを λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 とし，$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\lambda_4$ とすれば

$$\lambda_1=\boxed{\text{i}},\quad \lambda_2=\boxed{\text{j}},\quad \lambda_3=\boxed{\text{k}},\quad \lambda_4=\boxed{\text{l}}$$

分　野

数学ⅡB：整式の微分，2 次導関数　**数学Ⅰ**：恒等式

【解答】

$P(x)$ は 4 次以下であるから，$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおくと，

$$(x^2+1)(12ax^2+6bx+2c)=\lambda(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e).$$

$$\therefore\quad 12a=\lambda a,\quad 6b=\lambda b,\quad 12a+2c=\lambda c,\quad 6b=\lambda d,\quad 2c=\lambda e.$$

$a\neq0$ のとき，$\lambda=12$，$b=0$，$c=\dfrac{6}{5}a$，$d=0$，$e=\dfrac{1}{5}a$.

$a=0$ のとき，$b\neq0$ なら，$\lambda=6$，$c=0$，$d=b$，$e=0$.

$a=b=0$ のとき，$c\neq0$ なら，$\lambda=2$，$d=0$，$e=c$.

$a=b=c=0$ のとき，$d\neq0$ なら，$\lambda=0$，e は任意.

$a=b=c=d=0$ のとき，$e\neq0$ だから $\lambda=0$.

よって，

$$\lambda_1=\boxed{0},\quad \lambda_2=\boxed{2},\quad \lambda_3=\boxed{6},\quad \lambda_4=\boxed{12}.$$ …m，n，o，p

V

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

各項が 1，2，3 のどれかであるような項数 4 の数列 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ の全体を S とする。このとき

(1) S に属する数列は $\boxed{\text{q}}$ 個ある。

(2) S に属する数列 $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ で条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ を満足するものは $\boxed{\text{r}}$ 個ある。

(3) S に属する数列で 1，2，3 のすべてが現われるものは $\boxed{\text{s}}$ 個ある。

(4) S に属する数列でその項の和が 10 であるものは $\boxed{\text{t}}$ 個ある。

分 野

数学ⅡB：個数

【解答】

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 はそれぞれ，3 通りあるから，S に属する数列の個数は $3^4 = \boxed{81}$. …q

(2) $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ となる場合は，$\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ のうちに，1，2，3 がそれぞれ何個あるかによって，定まる．これは a_1，a_2，a_3，a_4 の両端と間の 5 箇所に仕切り 2 個を重複を許して挿入する場合と 1 対 1 に対応する．2 個の仕切りのうち左にある仕切りより左にある a_i は 1，2 つの仕切りの間の a_i は 2，右の仕切りより右側の a_i を 3 とする．

その個数は ${}_6\mathrm{C}_4 = \boxed{15}$. …r

(3) 1，2，3 を含む集合をそれぞれ A，B，C とする．全体集合を U，集合 X の補集合を $\overline{X}$ とする．集合 X の要素の個数を $n(X)$ で表す．

$$n(U)=81,\quad n(\overline{A})=n(\overline{B})=n(\overline{C})=2^4=16,$$

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{B}\cap\overline{C})=n(\overline{C}\cap\overline{A})=1^4=1,\quad n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=0.$$

$$\begin{aligned}n(A\cap B\cap C)&=n(U)-n(\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C})\\&=n(U)-n(\overline{A})-n(\overline{B})-n(\overline{C})+n(\overline{A}\cap\overline{B})+n(\overline{B}\cap\overline{C})+n(\overline{C}\cap\overline{A})-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=81-3\times16+3\times1-0=\boxed{36}.\end{aligned}$$ …s

(3) の **【別解】**

1，2，3 のすべてがある場合，どれかがもう 1 個ある．

たとえば，1，1，2，3 の順列の個数は $\dfrac{4!}{2!}=12$.

2，3 が 2 個ある場合も同様に 12 通りあるから．求める個数は

$$3\times12=\boxed{36}.$$ …s

（(3) の **【別解】** 終わり）

(4) 1 から 3 までの整数 4 個で和が 10 になるものを列記すると，

$$\{1,\ 3,\ 3,\ 3\},\quad \{2,\ 2,\ 3,\ 3\}.$$

これらの順列の個数はそれぞれ，

$$\frac{4!}{3!}=4,\quad \frac{4!}{2!2!}=6$$

通り．よって，求める個数は

$$4+6=\boxed{10}.$$ …t

1970 年　2 次試験（文科）

第 1 問

次の文を読んで後の設問に答えよ。

k を 2 から 10 までの任意の整数とするとき，正の整数はすべて $a_n\times k^n+\cdots+a_1\times k+a_0$ のようにかくことができる。ただし，a_0，a_1，$\cdots$，a_n を 0 から $k-1$ までの整数とする。したがって，上の式でかかれる数を $a_n\cdots a_1a_0$ のように，数字 a_0，a_1，$\cdots$，a_n の単なる配列で表わすことができる。10 進法というのは，k を 10 にとったときのことであるが，k を 2 にとればこれは 2 進法といわれる記数法になる。

設問 ⑴　10 進法で 365 とかかれる数を 2 進法でかけばどうなるか。

⑵　2 進法で 101101 とかかれる数と 1011 とかかれる数との積は 2 進法でどのようにかかれるか。

⑶　正の整数 x が 2 進法でかかれているとき，それを右から 3 けたずつ区切っていき，2 進法で各区切りの表わす数 y_0，y_1，$\cdots$，y_m を考える。もしこれらの和 $y_m+\cdots+y_1+y_0$ が 7 で割りきれるならば，x も 7 で割りきれることを証明せよ。

分　野

数学 I ：n 進法

考え方

2 進法，10 進法に関する問題．⑴は順次 2 で割って余りを出してゆけばよい．

⑵は 2 進法の足し算の繰り上がり計算が出来ればよい．

⑶は 3 桁ずつに区切れば結局 8 進法の計算になる．

【解答】

⑴　$365=2\times182+1=2^2\times91+1=2^3\times45+2^2+1=2^4\times22+2^3+2^2+1$

$=2^5\times11+2^3+2^2+1=2^6\times5+2^5+2^3+2^2+1=2^7\times2+2^6+2^5+2^3+2^2+1$

$=2^8+2^6+2^5+2^3+2^2+1.$

よって，365 を 2 進法で表すと 101101101.　…(答)

⑵　$101101\times1011=101101000+1011010+101101.$

$$\begin{array}{rr} & 101101000 \\ & 1011010 \\ +) & 101101 \\ \hline & 111101111 \end{array}$$

$\therefore$　111101111.　…(答)

(参考)　2 進法で 101101，1011，111101111 と表される数はそれぞれ，10 進法で 45，11，495 である．

⑶　3 桁ずつ区切った数は

$$x=y_m\times2^{3m}+y_{m-1}\times2^{3(m-1)}+\cdots+y_1\times2^3+y_0$$

である．ただし，$y_k=a_{3k+2}2^2+a_{3k+1}2+a_{3k}$．$0\leqq y_k\leqq7$．

$$x-(y_m+y_{m-1}+\cdots+y_1+y_0)=y_m(2^{3m}-1)+y_{m-1}(2^{3(m-1)}-1)+\cdots+y_1(2^3-1).$$

$2^{3k}-1=(2^3-1)(2^{3(k-1)}+2^{3(k-2)}+\cdots+2^3+1)=7\times$(整数).

よって，$2^{3k}-1(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ は 7 で割り切れる．

したがって，$x-(y_m+y_{m-1}+\cdots+y_1+y_0)$ は 7 で割り切れる．

したがって，$y_m+y_{m-1}+\cdots+y_1+y_0$ が 7 で割り切れるなら x も 7 で割り切れる．　(証明終り)

(注)　2 進法で表された数を 3 桁ずつ区切ると，

$$x=y_m\times 8^m+y_{m-1}\times 8^{m-1}+y_{m-2}\times 8^{m-2}+\cdots+y_1\times 8+y_0\quad (0\leqq y_k\leqq 7,\ y_m\neq 0)$$

のように表されるから，そのまま 8 進法に翻訳される．

一般に n 進法で表された数を k 桁ずつ区切ると，そのまま n^k 進法に翻訳される．

また，n 進法で表された数から各桁の数の和を引くと $n-1$ で割り切れる．

第 2 問

2 点 A(0, 1)，B(0, 11) が与えられている。いま x 軸上の正の部分に点 P$(x,\ 0)$ をとって ∠APB の大きさを 30° 以上にしたい。x をどのような範囲にとればよいか。

分　野

数学ⅡB：三角関数，加法定理

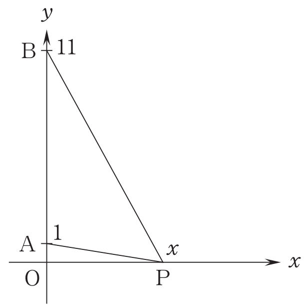
考え方

直線の傾きは tan で表せるから，tan の加法定理を用いる．

【解答】

原点を O とする，$\tan\angle\mathrm{APO}=\dfrac{1}{x}$，$\tan\angle\mathrm{BPO}=\dfrac{11}{x}$.

よって，



$$\tan\angle\mathrm{APB}=\tan(\angle\mathrm{BPO}-\angle\mathrm{APO})=\frac{\tan\angle\mathrm{BPO}-\tan\angle\mathrm{APO}}{1+\tan\angle\mathrm{BPO}\tan\angle\mathrm{APO}}$$

$$=\frac{\dfrac{11}{x}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{11}{x}\dfrac{1}{x}}=\frac{10x}{x^2+11}.$$

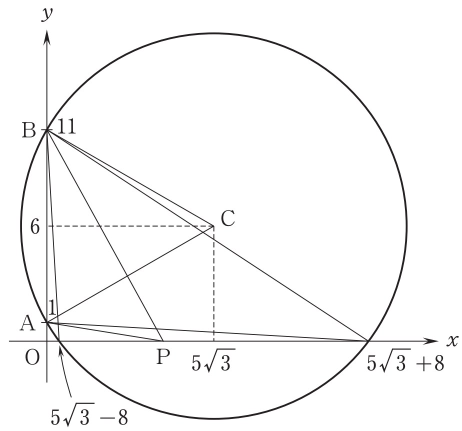
∠APB は鋭角で，∠APB≧30° だから $\tan\angle\mathrm{APB}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore\quad \frac{10x}{x^2+11}\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}.\quad \therefore\quad x^2-10\sqrt{3}\,x+11\leqq 0.$$

$$\therefore\quad 5\sqrt{3}-8\leqq x\leqq 5\sqrt{3}+8.$$

…(答)

【別解】



∠APB が 30° である点の軌跡は円を描く．その円は A，B を通り ∠ACB＝60° の点 C を中心とする円で，三角形 ABC は正三角形だから半径は AB＝10 に等しく C$(5\sqrt{3},\ 6)$ である．

∠APB が 30° 以上であるためには P は

$$(x-5\sqrt{3})^2+(y-6)^2 \leqq 10^2 \quad y=0$$

の範囲にあるから，

$$5\sqrt{3}-8 \leqq x \leqq 5\sqrt{3}+8. \qquad \cdots(答)$$

（注） この問題に類似した問題が **1960 年　数学Ⅱ　第 2 問，1972 年　共通　第 1 問**で出題されている．

第 3 問

25 m 隔てて 2 地点 P，Q がある。いま，A，B 2 人がそれぞれ P，Q に立ち，同時に向かいあって走り出す。走り出してから t 秒後の A，B の速度を，P から Q に向かう方向を正の向きとして，それぞれ u m/秒，v m/秒とすれば，u は一定で $v=\frac{3}{4}t^2-3t$ である。

このとき，B が Q にかえるまでに A が B に出会うかまたは追いつくためには，u が少なくともどれほどの大きさでなければならないか。

分 野

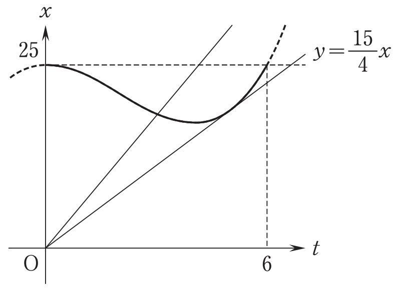
数学ⅡB：速度・加速度

考え方

P を原点とし，Q 方向に P からの距離を x m とし，tx 平面上に B の運動を曲線で描き，原点を通る接線を求める．

【解答】

P を原点とし，Q 方向に P からの距離を x m とし，tx 座標をとる．Q の座標は $x=25$.



A の位置は $x=ut$，B の位置は

$$x=25+\int_0^t\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)ds=25+\frac{t^3}{4}-\frac{3}{2}t^2.$$

これを $f(t)$ とおく．

$f(t)=25$ となるのは $t=0$，$t=6$．B が Q にかえるのは $t=6$ のとき．

tx 平面において，$(s,\ f(s))$ において接する $x=f(t)$ の接線は

$$x=\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)(t-s)+25+\frac{s^3}{4}-\frac{3}{2}s^2=\left(\frac{3}{4}s^2-3s\right)t+25-\frac{s^3}{2}+\frac{3}{2}s^2.$$

原点を通るとき，

$$25-\frac{s^3}{2}+\frac{3}{2}s^2=0.$$

$$\therefore \quad s^3-3s^2-50=0. \quad (s-5)(s^2+2s+10)=0.$$

よって，$s=5$ $(0<s<6)$．よって，接線の方程式は

$$x=\frac{15}{4}t.$$

よって，$u \geqq \frac{15}{4}$ のとき，$x=ut$ と $x=f(t)$ は $0<t<6$ の範囲で共有点をもつ．

したがって，u は少なくとも，$\frac{15}{4}$ 以上でなければならない． $\cdots$(答)

1970 年　2 次試験（理科）

第 1 問

i を虚数単位とし $a=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおく。また n はすべての自然数にわたって動くとする。

このとき

(1)　a^n は何個の異なる値をとりうるか。

(2)　$$\frac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}$$

の値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：ド・モアブルの定理

考え方

$a^6=1$ であるから，n を 6 で割った余りで分類する．

$n=6m+5$ のとき $\{a^n,\ a^{2n},\ a^{3n},\ a^{4n},\ a^{5n}\}=\{a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5\}$ であることに注意．

【解答】

(1)　ド・モアブルの定理から

$$a^n=\cos\frac{n\pi}{3}+i\sin\frac{n\pi}{3}$$

であるから，m を負でない整数として，n の値によって，

$$a^n=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\quad(n=6m+1),\quad -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\quad(n=6m+2),\quad -1\quad(n=6m+3),\\ -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\quad(n=6m+4),\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\quad(n=6m+5),\quad 1\quad(n=6m+6)\end{cases}$$

の 6 通りの値をとる．　…(答)

(2)　$A_n=\dfrac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}$ とおく．

(i)　$n=6m+1$（m は負でない整数）のとき，$a^n=a$.

$\therefore\quad (1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})=(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)$.

よって，$A_n=1$.

(ii)　$n=6m+2$（m は負でない整数）のとき，$a^n=a^2$．$1-a^{3n}=1-a^6=0$ なので分子は 0．よって，$A_n=0$.

(iii)　$n=6m+3$（m は負でない整数）のとき，$a^n=a^3$．$1-a^{2n}=1-a^6=0$ なので分子は 0．よって，$A_n=0$.

(iv)　$n=6m+4$（m は負でない整数）のとき，$a^n=a^4$．$1-a^{3n}=1-a^{12}=0$ なので分子は 0．よって，$A_n=0$.

(v)　$n=6m+5$（m は負でない整数）のとき，$a^n=a^5$，$a^{2n}=a^{10}=a^4$，$a^{3n}=a^{15}=a^3$，$a^{4n}=a^{20}=a^2$，$a^{5n}=a^{25}=a$．よって，

$$(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})=(1-a^5)(1-a^4)(1-a^3)(1-a^2)(1-a).$$

よって，$A_n=1$.

(vi)　$n=6m+6$（m は負でない整数）のとき，$1-a^n=0$ なので分子は 0．よって，$A_n=0$.

以上より，m が負でない整数のとき，

$$\frac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)}=\begin{cases}0 & (n=6m+2,\ 6m+3,\ 6m+4,\ 6m+6),\\ 1 & (n=6m+1,\ 6m+5).\end{cases}\quad\cdots(答)$$

（参考）（分母）$=(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$=6.$

第 2 問

x 軸上原点から出発し，貨幣を投げて表がでたら右へ 1 だけ進み，裏がでたら左へ 1 だけ進むことにする。

(1) これを 4 回くり返したとき $x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4$ の各点にいる確率を求めよ。

(2) 一般にこれを n 回くり返したとき $x=n-2$ にいる確率と $x=n-4$ にいる確率とを求めよ。

分 野

数学Ⅲ：確率

考え方

独立試行の定理を用いる．

【解答】

(1) 表が k 回出たとすると，裏は $4-k$ 回出る．そのとき，x の座標は $k-(4-k)=2k-4$．よって，x は偶数．よって，$x=\pm1,\ \pm3$ となる確率は 0.

x が偶数のとき，$k=\dfrac{x+4}{2}$．その確率は ${}_4C_{\frac{x+4}{2}}\dfrac{1}{2^4}$.

よって，$x=0$ の確率は ${}_4C_2\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{8}$．$x=\pm2$ の確率は ${}_4C_1\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4}$．$x=\pm4$ の確率は ${}_4C_0\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{16}$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
確率	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{16}$

…(答)

(2) 表が k 回出たとすると，裏は $n-k$ 回出る．そのとき，x の座標は $k-(n-k)=2k-n$.

$x=n-2$ のとき，表が $n-1$ 回，裏が 1 回出る．その確率は，${}_nC_1\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$. …(答)

$x=n-4$ のとき，表が $n-2$ 回，裏が 2 回出る．その確率は，${}_nC_2\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{n(n-1)}{2^{n+1}}$. …(答)

（注）$x=n-2k$（$0\leqq k\leqq n$，k は整数）のとき確率は $\dfrac{{}_nC_k}{2^n}$.

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第４問

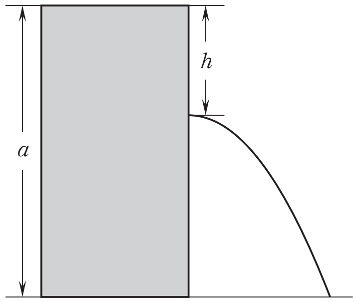
図のように鉛直な側面をもった水槽が水平な床の上におかれており，水面の高さは床から a cm である。いま側面に小さな穴をあけて水を水平方向に噴出させる。

⑴　穴の位置を水面から h cm にするとき，噴流は床の上のどの点に落ちるか。

⑵　噴流が穴の真下の床上の点から最も遠くに落ちるためには，穴の位置をどこにすればよいか。

⑶　穴の位置を一鉛直線上いろいろに変えるときの，噴流の通過する範囲を求めよ。

ただし，噴出した水は水平方向には等速度運動をし，鉛直方向には加速度 g cm/秒^2 の等加速度運動をする。また水面から h cm の深さの穴から噴出する水の初速度は $\sqrt{2gh}$ cm/秒 である。



分　野

数学ⅡB：速度・加速度

考え方

床に落ちるまでの時間は高さによって決まる．その時間分水平方向に水は進む．

【解答】

⑴　時刻 0 に側面の $a-h$ の高さの点を飛び出した水滴が t 秒後の高さは $a-h-\frac{1}{2}gt^2$．地面につくまでの時間は，$t=\sqrt{\frac{2(a-h)}{g}}$．

水平方向の初速は $\sqrt{2gh}$ だから，地面に達したときの位置は，

$$\sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2(a-h)}{g}}=2\sqrt{h(a-h)}\ \text{cm}.$$ …(答)

⑵　到達位置は

$$2\sqrt{h(a-h)}=\sqrt{a^2-(2h-a)^2}$$

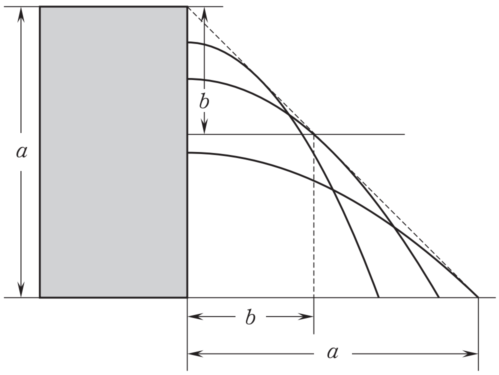
と，書けるから $h=\frac{a}{2}$ cm のとき，最も遠くに落ちる．すなわち，穴を壁の中点にとればよい．…(答)

⑶　水面から a cm の位置にある床に水が落ちる範囲は穴の真下から a cm の点までの範囲である．

床の位置が水面から b cm の位置にあるときは水が落ちる床の範囲は穴の真下（壁）から b cm の点までの範囲である．

よって，噴流が通過する範囲は壁の頂上と，床面で壁の真下から a cm の点を結ぶ線分より下側の範囲である．

…(答)



（注１）　床の位置を変えても初速 $\sqrt{2gh}$ は h によってのみ定まり，水の深さ a にはよらない．したがって，噴流が描く曲線は h が同じなら噴出口から下は同じ曲線になる．

したがって，床に平行で水面の下 b cm の位置ある平面を水が通過する範囲は壁から b cm の点までの範囲である．

（注２） $x=\sqrt{2ght}$，$y=a-h-\dfrac{1}{2}gt^2$ から t を消去すると $y=a-h-\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2}{2h}$.

相加平均・相乗平均の関係から $y=a-h-\dfrac{x^2}{4h}\leqq a-x$.

3.3　東大紛争後（1971 年）

紛争後の東大入試は 1970 年を例外として，新しい体制に移行した．一次試験は文理とも英数国で 120 分．数学は 4 問となり，二次試験は文科が 100 分 4 問となり，従来の 120 分 5 問より時間，量ともに減少した．理科は従来通り 150 分 6 問であった．二次試験は今日までこの枠組みを維持している．

東大だけでなくこのころから多くの国公立大学では入試科目の見直しが行われ，従来国公立は五教科七科目（英数国，理社各 2 科目）が主流だったのが，学部系統毎に対応が変化していった．むしろ東大は変化が少なかったといえる．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1971〜1975）

1971 年　共通第 2 問．漸化式から数列の極限を求め不等式の証明．今の理系生でどの位解けるだろうか？

1971 年　共通第 4 問．e^x の近似多項式の性質．

1972 年　文科第 2 問．ベクトルの問題．実はリー群の根基を求める問題．

1972 年　文科第 3 問．複素数平面で，z^2 の表す図形を求める問題．

1974 年　共通第 2 問．放物線上に両端をもつ線分の中点の y 座標の最小値．文科では微分が使えない．相加相乗平均で処理か．

1974 年　理科第 3 問．投影図の問題．「一般数学」以外では唯一．

このころ　あんなこと・こんなこと

安田講堂攻防戦の後，学生運動は下火になっていった．

その上，よど号事件（1970 年），連合赤軍事件（1971 年），テルアビブ空港事件（1972 年）などにより更に政治離れの傾向は深まった．

佐藤長期政権のあと日本列島改造計画を引っ提げて田中内閣（1972 年）が誕生した．

そんな中，1975 年ベトナム戦争がベトナム軍のサイゴン占領によって終結．

プロ野球では川上哲治監督が率い，王・長嶋を擁する巨人が 9 年連続日本一を達成した（1965〜1973 年）．翌年長嶋引退（1974 年）．

音楽界ではニューミュージック（1972 年）と呼ばれる旧来のフォークソングよりメッセージ性が薄くなった音楽が流行した．「人間なんて」（1971 年），「傘がない」（1972 年），「神田川」（1973 年）．なんとはなく，学園紛争後の敗北感，あるいはその時代に対する批判的なメッセージといったものが感じられる．

このころの河合塾

私は 1971 年に河合塾にアルバイトに来たのが最初なのでそれ以前の河合塾のことはよく知らない．

1972 年　それまでの中部模試を全国版にして全国統一模試を開始．

1973 年　東大入試オープン開始．

1971 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か。

複素数

$$z=\boxed{\text{a}}+2i,\quad w=5+\boxed{\text{b}}\,i$$

に対して

$$z+w=\boxed{\text{c}}+6i,\quad zw=7+\boxed{\text{d}}\,i$$

となる。

分　野

数学 I ：複素数

【解答】

$\boxed{\text{a}}=a$, $\boxed{\text{b}}=b$, $\boxed{\text{c}}=c$, $\boxed{\text{d}}=d$ とおくと，

$$z=a+2i,\quad w=5+bi,\quad z+w=c+6i,\quad zw=7+di.$$

$$z+w=(a+5)+(2+b)i=c+6i,\quad zw=(5a-2b)+(10+ab)i=7+di.$$

$$\therefore\quad a+5=c,\quad 2+b=6,\quad 5a-2b=7,\quad 10+ab=d.$$

よって，

$$a=\boxed{3},\quad b=\boxed{4},\quad c=\boxed{8},\quad d=\boxed{22}.$$ …a，b，c，d

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a，b は実数で，2 次方程式

$$(1)\quad x^2+ax+b=0\quad と\quad (2)\quad ax^2+bx+1=0$$

とが実根 λ を共通にもてば

$$\lambda=\boxed{\text{e}}\ かつ\ a+b=\boxed{\text{f}}$$

である。また，(1) と (2) とが実数でない根を共通にもてば

$$a=\boxed{\text{g}}\ かつ\ b=\boxed{\text{h}}$$

である。

分　野

数学 I ：共通解

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

(1) から，$ax+b=-x^2$．(2) から

$$ax^2+bx+1=(ax+b)x+1=-x^3+1=0.$$

$x=\lambda$ が実数解のとき，$\lambda^3=1$.

$$\lambda=\boxed{1}.$$ …e

$x=1$ を (1) に代入して，$1+a+b=0$,

$$a+b=\boxed{-1}.$$ …f

実数でない共通解をもてば，$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$ から $x^2+x+1=0$．係数が実数であるか

ら2つの解は一致する．方程式は $x^2+x+1=0$ だから，

$$a=\boxed{1},\quad b=\boxed{1}.$$ …g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

曲線 $y=x^3-6x^2+3$ の上で y が極大となる点の座標は $(\boxed{\text{i}},\ \boxed{\text{j}})$ である。また，この曲線上で y が極小となる点を通る曲線の接線の方程式は $y=\boxed{\text{k}}$ で，この接線と曲線とで囲まれる図形の面積は $\boxed{\text{l}}$ である。

分 野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

【解答】

$f(x)=x^3-6x^2+3$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4).$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(0)=3$ より極大点は $(\boxed{0},\ \boxed{3})$． …i，j

$f(4)=64-96+3=-29$．よって，この点で $y=f(x)$ に接する，x 軸に平行な接線は

$$y=\boxed{-29}.$$ …k

この接線と曲線の交点の x 座標は

$$x^3-6x^2+3=-29.\quad x^3-6x^2+32=(x-4)^2(x+2)=0$$

の解．$x=-2,\ 4$．

この接線と曲線とで囲まれる図形の面積は

$$\int_{-2}^{4}\{x^3-6x^2+3-(-29)\}\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-6\cdot\frac{x^3}{3}+32x\right]_{-2}^{4}=\boxed{108}.$$ …l

（注） y が極小になる点 $(4,\ -29)$ を通る接線は $y=-29$ の他，$y=-9x+7$（接点は $(1,\ -2)$）がある．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

4つの条件

$$x \geqq 4, \quad y \geqq 5, \quad x+2y \leqq 24, \quad 2x+y \leqq 27$$

をみたす点 (x, y) の集合を D とする。直線

$$3x+4y=k$$

上の少なくとも1点が D に含まれるとき，k のとりうる最小値は $\boxed{\text{m}}$，最大値は $\boxed{\text{n}}$ である。したがって，上の4つの条件のもとに $3x+4y$ が最大になるのは $x=\boxed{\text{o}}$，$y=\boxed{\text{p}}$ のときである。

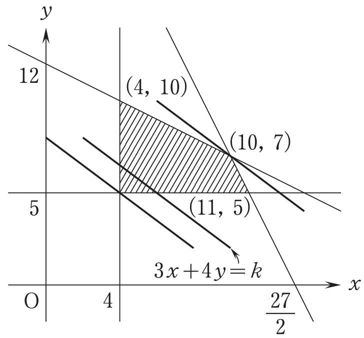
分野

数学Ⅰ　不等式と領域

【解答】

$x=4$，$y=5$ の交点は $(4, 5)$，$x=4$，$x+2y=24$ の交点は $(4, 10)$，$x+2y=24$，$2x+y=27$ の交点は $(10, 7)$，$2x+y=27$，$y=5$ の交点は $(11, 5)$．

よって，D を図示すると右図の斜線部，境界を含む．



直線 $3x+4y=k$ の傾き $-\dfrac{3}{4}$ は $x+2y=24$ の傾き $-\dfrac{1}{2}$ より小さく，$2x+y=27$ の傾き -2 より大きい．

$3x+4y=k$ が D と共有点をもつ k が最小になるのは点 $(4, 5)$ で，最小値は $\boxed{32}$ である．　…m

$3x+4y=k$ が D と共有点をもつ k が最大になるのは点 $(10, 7)$ で，最大値は $\boxed{58}$ である．　…n

最大になるのは $x=\boxed{10}$，$y=\boxed{7}$ のとき．　…o，p

1971 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

2 つの曲線

$$y=ax^3+bx\ (a>0),\quad y=cx^2+dx$$

上に点 (1, 5) があり，その点で 2 つの曲線が共通の接線をもつ。また，この 2 つの曲線で囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{6}$ であるという。このとき，

$$a=\boxed{\text{a}},\quad b=\boxed{\text{b}},\quad c=\boxed{\text{c}},\quad d=\boxed{\text{d}}$$

である。

分　野

数学 II B：整式の微分，整式の積分

【解答】

2 曲線がともに点 (1, 5) を通るから

$$5=a+b,\quad 5=c+d. \qquad \cdots①$$

この点で接線を共有するから，$x=1$ で，$3ax^2+b=2cx+d$．つまり，

$$3a+b=2c+d. \qquad \cdots②$$

①，② から，

$$b=5-a,\quad c=2a,\quad d=5-2a. \qquad \cdots③$$

$$\{ax^3+(5-a)x\}-\{2ax^2+(5-2a)x\}=ax^3-2ax^2+ax=a(x-1)^2x.$$

2 曲線は原点を通るからその囲む部分の面積は

$$\int_0^1 a(x-1)^2x\,dx=a\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{a}{12}=\frac{1}{6}.$$

これと，③ から

$$a=\boxed{2},\quad b=\boxed{3},\quad c=\boxed{4},\quad d=\boxed{1}. \qquad \cdots\text{a, b, c, d}$$

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

数直線上を正の方向に運動する 2 つの点 A，B がある。時刻 t が 0 のときには A の座標は 0（原点)，B の座標は 1 であった。また，A の座標が x となる時刻は $t=x+\sqrt{x}$（ただし，$x\geqq0$）であり，B の座標が x となる時刻は $t=x-\sqrt{x}$（ただし，$x\geqq1$）であるという。

時刻 $t=2$ のときに A の座標は $\boxed{\text{e}}$ であり，B の座標は $\boxed{\text{f}}$ である。また，A と B との間の距離が s となる時刻は

$$t=\boxed{\text{g}}\,s^2+\boxed{\text{h}}$$

である（ただし，$s\geqq1$）。

分　野

数学 I：無理関数，2 次方程式

【解答】

Aの x 座標に対して $t-x=\sqrt{x}\geqq 0$，Bの x 座標に対して $x-t=\sqrt{x}\geqq 0$.

t に対して，ともに $(x-t)^2=x$ の解で，大きい方の解がBの x 座標（$\geqq t$）で，小さい方の解がAの x 座標（$\leqq t$）.

$t=2$ のとき，$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0$.

Aの x 座標は $\boxed{1}$，Bの x 座標は $\boxed{4}$.　…e，f

一般には

$$x^2-(2t+1)x+t^2=0.\quad x=\frac{2t+1\pm\sqrt{(2t+1)^2-4t^2}}{2}.$$

よって，2点間の距離を s とすると，

$$s=\sqrt{(2t+1)^2-4t^2}=\sqrt{4t+1}.\quad \therefore\quad t=\boxed{\frac{1}{4}}s^2+\boxed{-\frac{1}{4}}.$$　…g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

与えられた三角形の外部の1点からその三角形の周上の点にいたる距離の最小値をその点と三角形との距離とよぶことにする。この三角形の3辺の長さの和を9，面積を3とするとき，この三角形からの距離が4となる点の軌跡としてえられる曲線の長さは

$$\boxed{\text{i}}\pi+\boxed{\text{j}}$$

であり，この曲線によって囲まれた図形の面積は

$$\boxed{\text{k}}\pi+\boxed{\text{l}}$$

である。

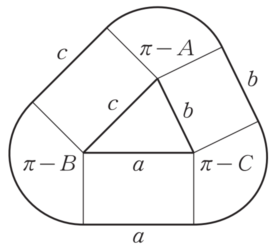
分　野

数学Ⅰ：平面図形，面積

【解答】

三角形からの距離が4である点の軌跡は3辺と同じ長さの線分と，中心角がそれぞれ $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ の円弧．3辺の和が9で，円弧の和は半径4の円の周 8π に等しい．よって，軌跡の長さは

$$\boxed{8}\pi+\boxed{9}.$$　…i，j



三角形からの距離が4である点の軌跡で囲まれた図形は辺と同じ長さの辺と長さ4の辺をもつ3つの長方形と，中心角がそれぞれ $\pi-A$，$\pi-B$，$\pi-C$ で半径が4の3つの扇形と，もとの三角形からなる．

3つの長方形の面積の和は 9×4，3つの扇形の面積の和は半径4の円の面積に等しく，$4^2\pi=16\pi$，もとの三角形の面積は3だから，求める面積は

$$36+16\pi+3=\boxed{16}\pi+\boxed{39}.$$　…k，l

（注）　三角形の内接円の半径は $\dfrac{2\times\text{面積}}{3\text{辺の和}}=\dfrac{2}{3}<4$ なので三角形の内側に軌跡が存在することはない．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

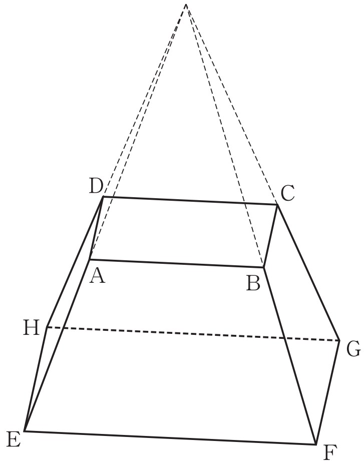
図のような四角すい台 ABCD-EFGH において，上底面 ABCD および下底面 EFGH は長方形であり，4 個の側面 ABFE，BCGF，CDHG，DAEH は等脚台形である。AB=12，AD=9，AE=13，EF=20 とすると，

(1) FG の長さは $\boxed{\text{m}}$

(2) AG の長さは $\sqrt{\boxed{\text{n}}}$

(3) 四角すい台の体積は $\boxed{\text{o}}$

(4) 辺 AD と辺 FG とを含む平面でこの四角すい台を切るとき，切り口の面積は $\boxed{\text{p}}$ 。



分　野

数学Ⅰ：立体図形

【解答】

(1) EA，FB の延長の交点を V とする．

AB∥EF，BC∥FG より，△VAB∽△VEF，△VBC∽△VFG.

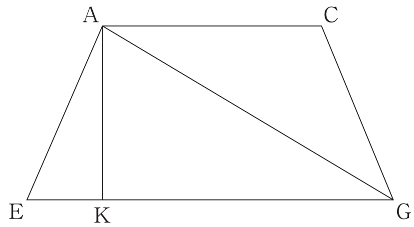
AB：EF=12：20=3：5 だから，VB：VF=3：5．よって，△VBC と △VFG の相似比も 3：5.

BC=AD=9 だから $\text{FG}=\dfrac{5}{3}\times\text{BC}=\boxed{15}$. …m

(2) 対称性から 4 点 A，E，G，C は同一平面上にある．

$\text{AC}=\sqrt{\text{AB}^2+\text{BC}^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15$，$\text{EG}=\dfrac{5}{3}\text{AC}=25$.

A から EG に下した垂線の足を K とすると，AEGC は等脚台形だから，



$$\text{EK}=\frac{\text{EG}-\text{AC}}{2}=5.\quad \text{AK}=\sqrt{\text{AE}^2-\text{EK}^2}=12.$$

よって，

$$\text{AG}=\sqrt{\text{AK}^2+\text{GK}^2}=\sqrt{12^2+(25-5)^2}=\sqrt{\boxed{544}}.$$ …n

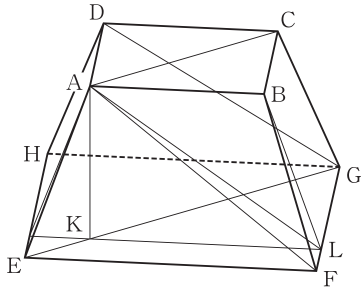
(3) 対称性から面 VEG は底面に垂直．よって，AK=12 は上底面と下底面の距離．

△VAC∽△VEG で相似比は 3：5 だから，V と AC の距離を h とすると，$h：h+12=3：5$.
よって，$h=18$.

よって，

四角錐台の体積=四角錐 V-EFGH−四角錐 V-ABCD

$$=\frac{1}{3}\times 15\times 20\times(18+12)-\frac{1}{3}\times 9\times 12\times 18=\boxed{2352}. \qquad \cdots o$$



(4) A から FG へ下した垂線の足を L とする．A から下底面に下した垂線の足は K である．

AB を含み下底面に垂直な断面をとると

$$KL=AB+\frac{EF-AB}{2}=16.$$

$$\therefore\quad AL=\sqrt{AK^2+KL^2}=20.$$

$$\therefore\quad 台形 DAFG=\frac{1}{2}(AD+FG)\times AL$$

$$=\frac{1}{2}(9+15)\times 20=\boxed{240}. \qquad \cdots p$$

1971 年　2 次試験（文科）

第 1 問

変数 t が 0 から π まで動くとき

$$x=2\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right),\quad y=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)$$

によってあらわされる点 $(x,\ y)$ と原点 $(0,\ 0)$ との間の距離の最大値，最小値およびそれらをとる t の値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：三角関数，合成公式

考え方

原点と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗は定数項と，$\sin 2t$，$\cos 2t$ の式で表せる．これを合成すればよい．

【解答】

原点と点 $(x,\ y)$ の距離の 2 乗は

$$\begin{aligned}
x^2+y^2&=4\cos^2\left(t-\frac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\\
&=2\left\{1+\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\right\}+\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(2t+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\\
&=\frac{5}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2t+\frac{3}{4}\cos 2t=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\\
&=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

$0\leqq t\leqq\pi$ から，$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2t+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{6}+2\pi$.

x^2+y^2 の最大値は $\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$，最小値は $\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$.

よって，点 $(x,\ y)$ と原点の距離の最大値は 2，最小値は 1.　…(答)

最大値をとるとき，$2t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$．よって，$t=\dfrac{\pi}{6}$.　…(答)

また，最小値をとるとき，$2t+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$．よって，$t=\dfrac{2}{3}\pi$.　…(答)

（注）　点 $(x,\ y)$ の軌跡は x 軸上に長軸，y 軸上に短軸がある楕円のうち直線 $y=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}x$ の下側，両端を含む.

$$\begin{cases} x=2\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right),\\ y=-\sin\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\end{cases}\quad (0\leqq t\leqq\pi).$$

第2問

正の数 x を与えて，

$$2a_1=x,\quad 2a_2=a_1^2+1,\quad \cdots,\quad 2a_{n+1}=a_n^2+1,\quad \cdots$$

のように数列 $\{a_n\}$ を定めるとき，

(1) $x\neq 2$ ならば，

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots$$

となることを証明せよ。

(2) $x<2$ ならば，$a_n<1$ となることを証明せよ。このとき，正の数 ε を $1-\dfrac{x}{2}$ より小となるようにとって，a_1，a_2，…，a_n までが $1-\varepsilon$ 以下となったとすれば，個数 n について次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2-x>n\varepsilon^2$$

分　野

数学ⅡB：数列

考え方

(1)は $a_{n+1}>a_n$ を証明する．

(2)前半は $a_n<1$ ならば $a_{n+1}<1$ を証明する．

後半は $a_{k+1}-a_k$ について不等式を立てて考える．

【解答】

(1)
$$2(a_{n+1}-a_n)=a_n^2+1-2a_n=(a_n-1)^2\geqq 0. \qquad \cdots①$$

a_1 は与条件から正の数，a_2，a_3，… は漸化式から正の数．

$a_n=1$ とすると $2a_n=2=a_{n-1}^2+1$ より，$a_{n-1}^2=1$．$a_{n-1}>0$ より，$a_{n-1}=1$．

したがって，$a_n=1$ となる項が存在すると，$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=\dfrac{x}{2}=1$.

よって，$x\neq 2$ のとき，$a_n=1$ となる項は存在しない．

$$\therefore\quad 2(a_{n+1}-a_n)=a_n^2+1-2a_n=(a_n-1)^2>0. \quad \therefore\quad a_{n+1}>a_n.$$

これがすべての自然数 n について成り立つから

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots. \qquad (証明終り)$$

(2) $0<a_n<1$ のとき，

$$2(1-a_{n+1})=2-(a_n^2+1)=1-a_n^2>0.$$
$$\therefore\quad a_{n+1}<1.$$

$2a_1=x<2$ のとき，$a_1<1$ だから，$a_2<1$，$a_3<1$，…，$a_n<1$.　（証明終り）

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n\leqq 1-\varepsilon$$

とする．

$1\leqq k\leqq n$ のとき，$\varepsilon\leqq 1-a_k$．① より，

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2}(1-a_k)^2\geqq\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

$$\therefore\quad a_{n+1}-a_1=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\geqq\frac{n}{2}\varepsilon^2.$$

一方，$a_1=\dfrac{x}{2}$，$a_{n+1}<1$.

$$a_{n+1}-a_1<1-\frac{x}{2}.$$

$$\therefore\quad 2-x>n\varepsilon^2. \qquad (証明終り)$$

第3問

与えられた実数係数の整式 $f(x)$ について

$$\int_0^1 f(x)\,dx=2,\quad \int_0^1 xf(x)\,dx=3$$

となるとする。そのとき，

$$\int_0^1 \{f(x)-ax-b\}^2\,dx$$

の値を最小にする実数 a および b の値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の積分

考え方

$\int_0^1 \{f(x)-ax-b\}^2\,dx$ は，a，b の2次式として表される．

【解答】

$\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx=A$ とおくと，

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \{f(x)-ax-b\}^2\,dx\\
&=\int_0^1 \{f(x)\}^2\,dx-2a\int_0^1 xf(x)\,dx-2b\int_0^1 f(x)\,dx+a^2\int_0^1 x^2\,dx+2ab\int_0^1 x\,dx+b^2\int_0^1 dx\\
&=A-6a-4b+\frac{a^2}{3}+ab+b^2\\
&=\left(b+\frac{a}{2}-2\right)^2+\frac{a^2}{12}-4a+A-4=\left(b+\frac{a}{2}-2\right)^2+\frac{1}{12}(a-24)^2-52+A.
\end{aligned}$$

よって，これが最小になるのは $b+\frac{a}{2}-2=a-24=0$ のとき．

$$\therefore\quad a=24,\quad b=-10.$$

…(答)

第4問

x の整式

$$f_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

について

$$f_n{}'(x)=f_{n-1}(x)\quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを証明せよ。

方程式

$$f_n(x)=0$$

は，n が奇数ならばただ1つの実根をもち，n が偶数ならば実根をもたないことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，数学的帰納法

考え方

前半は微分すればすぐに示せる．

後半は奇数，偶数に分けて数学的帰納法を用いる．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ とかくことができる（ただし，$x^0=1$ とする）．$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して，

$$f_n{}'(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{kx^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}=f_{n-1}(x).$$

（証明終り）

$$\begin{cases} n\text{ が奇数なら方程式 } f_n(x)=0 \text{ はただ1つの実数解をもち，} f_n(x) \text{ は単調増加であり，} \\ n\text{ が偶数なら方程式 } f_n(x)=0 \text{ は実数解をもたないこと} \end{cases} \quad \cdots(*)$$

とする．これを数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=1$（奇数）のとき，$f_1(x)=1+x=0$ はただ1つの実数解 $x=-1$ をもち，$f_1(x)$ は単調増加である．したがって，(*) が成り立つ．

(II-a)　$n=k$（奇数）のとき，(*) が成り立つとする．すなわち，$f_k(x)=0$ はただ1つの実数解 α をもち，$f_k(x)$ は単調増加であるとする．

$f_k(x)$ の最高位 x^k の係数 $\frac{1}{k!}$ は正で，k は奇数だから，$\lim_{x\to\pm\infty}f_k(x)=\pm\infty$．（複号同順）

$f_{k+1}{}'(x)=f_k(x)=0$ の解は $x=\alpha$ のみであり，$f_k(x)$ は連続関数だから

x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	$+\infty$
$f_{k+1}{}'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f_{k+1}(x)$	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

$$f_{k+1}(\alpha)=f_k(\alpha)+\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}=\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}.$$

$f_k(0)=1\neq 0$，$k+1$ は偶数だから，$\alpha\neq 0$ で，$\frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}>0$.

よって $f_{k+1}(x)\geqq f_{k+1}(\alpha)>0$ よって，$f_{k+1}(x)=0$ は実数解をもたない．

よって，$n=k+1$（偶数）のとき (*) をみたす．

(II-b)　$n=k$（偶数）のとき，(*) が成り立つとする．すなわち，$f_k(x)=0$ は実数解をもたないとする．

$f_k(x)$ の最高位 x^k の係数 $\frac{1}{k!}$ は正だから，$f_k(x)>0$.

$f_{k+1}{}'(x)=f_k(x)>0$ だから $f_{k+1}(x)$ は単調に増加する．

$f_{k+1}(x)$ の最高位 x^{k+1} の係数 $\frac{1}{(k+1)!}$ は正で，$k+1$ は奇数だから，$\lim_{x\to\pm\infty}f_{k+1}(x)=\pm\infty$.

よって，$f_{k+1}(x)=0$ はただ1つの実数解をもつ．

よって，$n=k+1$（奇数）のとき (*) をみたす．

以上から，(*) はすべての自然数 n について成り立つ．　（証明終り）

1971 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 5 問

n を正の整数とし，

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n}k,\ \sin\frac{2\pi}{n}k\right)$$

を座標とする点を Q_k であらわす。このとき，n 個の点

$$\mathrm{Q}_0,\ \mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2,\ \cdots,\ \mathrm{Q}_{n-1}$$

によって円周 $x^2+y^2=1$ は n 等分される。

平面上の点 P の座標を $(a,\ b)$ とし，

$$s_n=\frac{1}{n}\left(\overline{\mathrm{PQ}_0}^2+\overline{\mathrm{PQ}_1}^2+\cdots+\overline{\mathrm{PQ}_{n-1}}^2\right)$$

とするとき，

$$\lambda_{\mathrm{P}}=\lim_{n\to\infty}s_n$$

の値を a，b を用いてあらわせ。また，P がどこにあれば λ_{P} の値は最小となるか。

分　野

数学ⅡB：ベクトル，内積，数列の極限

考え方

$\overline{\mathrm{PQ}_k}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}|^2$ として計算．$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\vec{0}$ であることに注意．

【解答】

原点を O とする．

$\overline{\mathrm{PQ}_k}^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}|^2$.

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}|^2=\cos^2\frac{2\pi}{n}k+\sin^2\frac{2\pi}{n}k=1.$$

対称性から $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\vec{0}$.

$$s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\mathrm{PQ}_k}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}|^2\}=\frac{1}{n}\{n|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+n\}=a^2+b^2+1.$$

$$\therefore\quad \lambda_{\mathrm{P}}=\lim_{n\to\infty}s_n=a^2+b^2+1.$$ …(答)

λ_{P} を最小にする $(a,\ b)$ は $(0,\ 0)$．すなわち，P が原点にあるとき，λ_{P} は最小になる． …(答)

（注） $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\vec{0}$ を計算によって示す．

$$2\sin\frac{\pi}{n}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\left(2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}k,\ 2\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}k\right)$$
$$=\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi-\sin\frac{2k-1}{n}\pi,\ \cos\frac{2k-1}{n}\pi-\cos\frac{2k+1}{n}\pi\right).$$

$$2\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi-\sin\frac{2k-1}{n}\pi,\ \cos\frac{2k-1}{n}\pi-\cos\frac{2k+1}{n}\pi\right)$$
$$=\left(\sin\frac{1}{n}\pi-\sin\frac{-1}{n}\pi,\ \cos\frac{-1}{n}\pi-\cos\frac{1}{n}\pi\right)$$
$$+\left(\sin\frac{3}{n}\pi-\sin\frac{1}{n}\pi,\ \cos\frac{1}{n}\pi-\cos\frac{3}{n}\pi\right)$$
$$+\left(\sin\frac{5}{n}\pi-\sin\frac{3}{n}\pi,\ \cos\frac{3}{n}\pi-\cos\frac{5}{n}\pi\right)$$
$$+\cdots+\left(\sin\frac{2n-1}{n}\pi-\sin\frac{2n-3}{n}\pi,\ \cos\frac{2n-3}{n}\pi-\cos\frac{2n-1}{n}\pi\right)$$
$$=\left(\sin\frac{2n-1}{n}\pi-\sin\frac{-1}{n}\pi,\ \cos\frac{-1}{n}\pi-\cos\frac{2n-1}{n}\pi\right)$$
$$=\left(\sin\left(2\pi-\frac{1}{n}\pi\right)-\sin\frac{-1}{n}\pi,\ \cos\frac{-1}{n}\pi-\cos\left(2\pi-\frac{1}{n}\pi\right)\right)=(0,\ 0).$$

$2\sin\dfrac{\pi}{n}\neq 0$ だから，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_k}=\vec{0}$.

第 6 問

3 人で‘ジャンケン’をして勝者をきめることにする。たとえば，1 人が‘紙’を出し，他の 2 人が‘石’を出せば，ただ 1 回でちょうど 1 人の勝者がきまることになる。3 人で‘ジャンケン’をして，負けた人は次の回に参加しないことにして，ちょうど 1 人の勝者がきまるまで，‘ジャンケン’をくり返すことにする。このとき，k 回目に，はじめてちょうど 1 人の勝者がきまる確率を求めよ。

分 野

数学Ⅲ：確率，**数学ⅡB**：数列，漸化式

考え方

k 回目にはじめて勝者がきまる確率を p_k，$k+1$ 回目に 3 人で‘ジャンケン’をする確率を q_k，$k+1$

回目に2人で‘ジャンケン’をする確率を r_k として漸化式を立ててそれを解く．

【解答】

3人とも‘石’，‘紙’，‘はさみ’をそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すとし，負けた人は次回以後参加しないとして解答する．

3人で‘ジャンケン’をするとき，1人の勝者が決まる場合は勝者が3通り，勝ち手が3通りあるから，その確率は $\frac{3^2}{3^3}=\frac{1}{3}$．

2人の勝者が決まる確率も $\frac{1}{3}$．あいこの確率も $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$．

2人で‘ジャンケン’をするとき，1人の勝者が決まる場合は勝者が2通り，勝ち手が3通りあるから，その確率は $\frac{2\times3}{3^2}=\frac{2}{3}$．

あいこの確率は $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$．

k 回目にはじめて勝者がきまる確率を p_k，$k+1$ 回目に3人で‘ジャンケン’をする確率を q_k，$k+1$ 回目に2人で‘ジャンケン’をする確率を r_k とすると，

$p_1=\frac{1}{3}$，$q_1=\frac{1}{3}$，$r_1=\frac{1}{3}$．

$$\begin{cases} p_{k+1}=\frac{1}{3}q_k+\frac{2}{3}r_k, & \cdots① \\ q_{k+1}=\frac{1}{3}q_k, & \cdots② \\ r_{k+1}=\frac{1}{3}q_k+\frac{1}{3}r_k. & \cdots③ \end{cases}$$

② より，$\{q_k\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列．よって，$q_k=\frac{1}{3^k}$．

よって，③ より，$r_{k+1}=\frac{1}{3^{k+1}}+\frac{1}{3}r_k$．

両辺を 3^{k+1} 倍して，$3^k r_k=R_k$ とおくと，$R_{k+1}=1+R_k$．

よって，$\{R_k\}$ は公差1の等差数列．$R_1=1$ より，$R_k=k$，$r_k=\frac{k}{3^k}$．

① より，$k\geqq2$ のとき，

$$p_k=\frac{1}{3}q_{k-1}+\frac{2}{3}r_{k-1}=\frac{1}{3^k}+\frac{2(k-1)}{3^k}=\frac{2k-1}{3^k}.$$

$k=1$ の場合も含めて，

$$p_k=\frac{2k-1}{3^k}. \qquad \cdots(\text{答})$$

1972 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

68 人の人に，A，B，C の 3 都市への旅行の経験を調査したところ，全員が，A，B，C のうち少なくとも 1 つへは行ったことがあった。また，B と C の両方，C と A の両方，A と B の両方へ行ったことのある人の数は，それぞれ 21 人，19 人，25 人であり，B と C の少なくとも一方，C と A の少なくとも一方，A と B の少なくとも一方へ行ったことのある人の数は，それぞれ 59 人，56 人，60 人であった。このとき，A，B，C へ行ったことのある人の数は，それぞれ

$$\boxed{\ \text{a}\ }\text{人，}\ \boxed{\ \text{b}\ }\text{人，}\ \boxed{\ \text{c}\ }\text{人}$$

であり，A，B，C の全部へ行ったことのある人の数は $\boxed{\ \text{d}\ }$ 人である。

分　野

数学 I ：集合と個数

【解答】

全員が，A，B，C のうち少なくとも 1 つへ行ったことがあり，B と C の少なくとも一方，C と A の少なくとも一方，A と B の少なくとも一方へ行ったことのある人の数がそれぞれ，59 人，56 人，60 人であるから，A，B，C に 1 つにのみ行ったことのある人の数はそれぞれ

$$68-59=9\ \text{人，}\quad 68-56=12\ \text{人，}\quad 68-60=8\ \text{人}$$

である．

したがって，2 つ以上に行ったことがある人は

$$68-9-12-8=39\ \text{人}$$

である．

A，B，C の全部へ行ったことのある人の数を x とすると，

$$21+19+25-39=2x.\quad x=13.$$

よって，A，B，C へ行ったことのある人の数は，それぞれ

$$9+19+25-13=\boxed{40}\ \text{人，}\quad 12+21+25-13=\boxed{45}\ \text{人，}\quad 8+21+19-13=\boxed{35}\ \text{人}$$

…a，b，c

であり，A，B，C の全部へ行ったことのある人の数は

$$\boxed{13}\ \text{人}$$

…d

である．

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か。

複素数平面上の正方形 ABCD がある。その 4 頂点 A，B，C，D を表わす複素数をそれぞれ α，β，γ，δ とする。

$$\alpha=i,\quad \gamma=10+25i,\quad |\beta|>|\delta|$$

ならば，

$$\beta=\boxed{\ \text{e}\ }+\boxed{\ \text{f}\ }i,\quad \delta=\boxed{\ \text{g}\ }+\boxed{\ \text{h}\ }i$$

である。

分　野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

正方形の中心は AC の中点．これを $\mathrm{M}(\mu)$ とする．

$$\mu=\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)=5+13i.$$

B，D は A を M を中心に $\pm\frac{\pi}{2}$ だけ回転した点．$\alpha-\mu=-5-12i$ から，それらは

$\mu+i(\alpha-\mu)=5+13i+i(-5-12i)=17+8i,\quad \mu-i(\alpha-\mu)=5+13i-i(-5-12i)=-7+18i.$

$(17^2+8^2)-(7^2+18^2)=-20<0$，$|\beta|>|\delta|$ から，

$$\beta=\boxed{-7}+\boxed{18}\,i,\quad \delta=\boxed{17}+\boxed{8}\,i.$$ …e，f，g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

3 本の直線 $x=0$，$y=0$ および $x+2y=\pi$ で囲まれた三角形の周上での $\sin x\cos 2y+\cos(x+2y)$ の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{i}}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{j}}$ である。また，最小値を与える点の x 座標は $\boxed{\text{k}}\,\pi$，y 座標は $\boxed{\text{l}}\,\pi$ である。

分　野

数学ⅡB：三角関数，合成公式

【解答】

三角形の 3 頂点は $(0,\ 0)$，$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，$(\pi,\ 0)$．

$f(x,\ y)=\sin x\cos 2y+\cos(x+2y)$ とする．

$x=0$ のとき，$f(0,\ y)=\cos 2y$．$0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$．よって，$-1\leqq f(0,\ y)\leqq 1$．

$y=0$ のとき，$f(x,\ 0)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$．$0\leqq x\leqq\pi$．

よって，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$．$-1\leqq f(x,\ 0)\leqq\sqrt{2}$．

$x+2y=\pi$ のとき，$f(\pi-2y,\ y)=\sin(\pi-2y)\cos 2y+\cos\pi=\frac{1}{2}\sin 4y-1$．$0\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$．

よって，$-\frac{3}{2}\leqq f(\pi-2y,\ y)\leqq-\frac{1}{2}$．

よって，$f(x,\ y)$ は最大値 $\sqrt{\boxed{2}}$ をとり，最小値 $\boxed{-\frac{3}{2}}$ をとる． …i，j

最小値をとるのは，$(x,\ y)=\left(\boxed{\frac{1}{4}}\,\pi,\ \boxed{\frac{3}{8}}\,\pi\right)$ のときである． …k，l

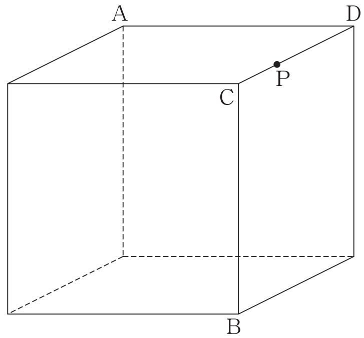
（注 1）　最大値をとるのは $(x,\ y)=\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$ のとき．

（注 2）　範囲を三角形板 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+2y\leqq\pi$ としても最大値，最小値，それらを与える $(x,\ y)$ は変らない．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

図の立方体の1辺の長さは1である。点Pが辺CD上をCからDまで動くとき，△ABPの面積 S は CP= $\boxed{\text{m}}$ において最小値 $\sqrt{\boxed{\text{n}}}$ をとる。また S の最大値 $\sqrt{\boxed{\text{o}}}$ を与える点は線分CD上に $\boxed{\text{p}}$ 個ある。



分 野

数学Ⅰ：立体図形

【解答】

Bを原点とし，BCが z 軸，CDに平行に x 軸をとり，DAに平行に y 軸をとると，A(1, 1, 1), C(0, 0, 1)，D(1, 0, 1)，CP$=x$ とすると，P$(x, 0, 1)$.

PからABへ下した垂線の足をHとする．Hの座標は (t, t, t) とおける．

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=(t-x,\ t,\ t-1)$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(t-x)+t+(t-1)=3t-x-1=0.\quad \therefore\quad t=\frac{x+1}{3}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PH}}=\left(\frac{1-2x}{3},\ \frac{x+1}{3},\ \frac{x-2}{3}\right).$$

$$\therefore\quad \mathrm{PH}=\sqrt{\left(\frac{1-2x}{3}\right)^2+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6x^2-6x+6}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

$0\leqq x\leqq 1$ より，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqq\mathrm{PH}\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．△ABPの面積 $S=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PH}$ から S は CP$=\boxed{\dfrac{1}{2}}$ において最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\boxed{\dfrac{3}{8}}}$ をとる． …m，n

また S の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{\boxed{\dfrac{1}{2}}}$．最大値を与える点Pは，$x=0$，1 の点（つまりC，D）だから，最大値を与える点は線分CD上に $\boxed{2}$ 個ある． …o，p

（注） 立方体の中心とCDの中点を結ぶ線分が，ABとCDの共通垂線であることを既知とするとはやい．

1972 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

放物線 $y=\boxed{\text{a}}x^2-\dfrac{3}{2}x$ は，直線 $y=\boxed{\text{b}}x$ との交点 $\left(\boxed{\text{c}},\ \dfrac{1}{2}\right)$ において，接線 $y=2x+\boxed{\text{d}}$ をもつ。

分野

数学 I ：2 次関数

【解答】

$\boxed{\text{a}}$，$\boxed{\text{b}}$，$\boxed{\text{c}}$，$\boxed{\text{d}}$ にあてはまる数をそれぞれ a，b，c，d とおく．

$y=ax^2-\dfrac{3}{2}x$ と $y=bx$ の交点の 1 つは原点であるが，$\left(c,\ \dfrac{1}{2}\right)$ は原点ではない．

したがって，c は $ax-\dfrac{3}{2}=b$ の解．

$$ac=\frac{3}{2}+b. \qquad \cdots①$$

$\left(c,\ \dfrac{1}{2}\right)$ は 2 直線 $y=bx$，直線 $y=2x+d$ 上にあるから，

$$\frac{1}{2}=bc. \qquad \cdots②$$

$$\frac{1}{2}=2c+d. \qquad \cdots③$$

また，この点における放物線の接線の傾きが 2 だから

$$2=2ac-\frac{3}{2}. \qquad \cdots④$$

① を ④ に代入して，

$$2=(3+2b)-\frac{3}{2}. \quad \therefore \quad b=\frac{1}{4}.$$

② より，$c=2$.

① より，$2a=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$. $\therefore$ $a=\dfrac{7}{8}$.

③ より，$\dfrac{1}{2}=4+d$. $\therefore$ $d=-\dfrac{7}{2}$.

以上より

$$a=\boxed{\frac{7}{8}},\quad b=\boxed{\frac{1}{4}},\quad c=\boxed{2},\quad d=\boxed{-\frac{7}{2}}. \qquad \cdots \text{a, b, c, d}$$

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

2 点 P，Q は時刻 $t=0$ にそれぞれ点 $(1,\ 9)$，$(-2,\ 0)$ を出発して等速直線運動をする。P の速度ベクトルの x 成分は 2，y 成分は 1 であり，Q の速度の大きさは 5 である。P，Q が出発後にある点で出会うとすると，Q の速度ベクトルの x 成分は $\boxed{\ \text{e}\ }$，y 成分は $\boxed{\ \text{f}\ }$ であり，そのとき出会う点は $(\boxed{\ \text{g}\ },\ \boxed{\ \text{h}\ })$ である。

分　野

数学ⅡB：ベクトル

【解答】

時刻 t における P の位置は $(1+2t,\ 9+t)$ であり，Q と $Q_0(-2,\ 0)$ との距離は $5t$ である．

時刻 t において，P と Q が出会うとすると，

$$(1+2t+2)^2+(9+t)^2=(5t)^2. \quad \therefore \quad 2t^2-3t-9=0.$$

$$\therefore \quad (2t+3)(t-3)=0. \quad \therefore \quad t=-\frac{3}{2},\ 3.$$

$t>0$ だから，$t=3$.

出会った点は $Q_1(\boxed{\ 7\ },\ \boxed{\ 12\ })$.　…g，h

Q の速度ベクトルは

$$\frac{1}{t}\overrightarrow{Q_0Q_1}=\frac{1}{3}(7+2,\ 12-0)=(\boxed{\ 3\ },\ \boxed{\ 4\ }).$$　…e，f

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる整数は何か。

空間に図のような立方体 ABCD-EFGH とその対角線 AG に垂直な平面 α とがある。立方体の辺 AE と平面 α とのなす鋭角を θ とすると，

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\boxed{\ \text{i}\ }}}{\boxed{\ \text{j}\ }}$$

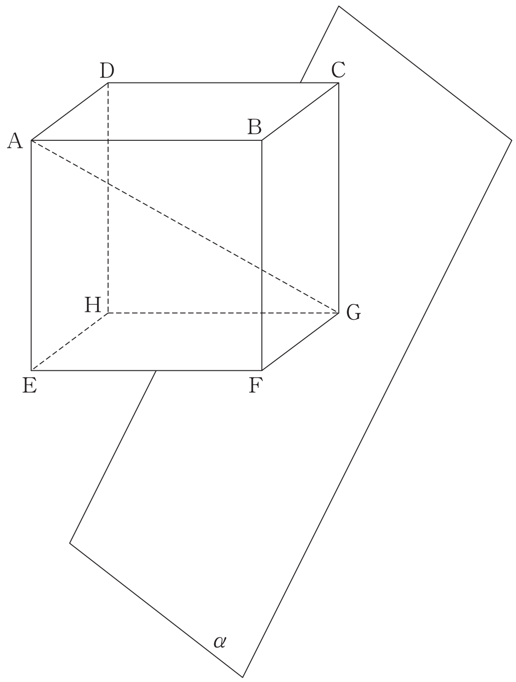
である。

AG に平行な光線によって平面 α 上にできるこの立方体の影は正六角形になる。立方体の 1 辺の長さが 3 のとき，その影の面積は

$$\boxed{\ \text{k}\ }\sqrt{\boxed{\ \text{l}\ }}$$

である。

ただし，根号 $\sqrt{}$ の中には 1 桁の正の整数を入れること。



分 野

数学Ⅰ：空間図形

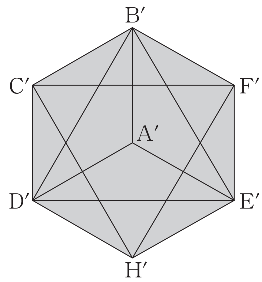
【解答】

$\triangle$AGE において，$\angle$AEG は直角，1 辺の長さを a とすると，AE$=a$，AG$=\sqrt{3}\,a$，GE$=\sqrt{2}\,a$. よって，$\sin\angle\text{GAE} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

AG$\perp\alpha$ だから，α と AE のなす角 θ は $\angle$GAE の余角.

$$\therefore\quad \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\boxed{\ 6\ }}}{\boxed{\ 3\ }}. \qquad \cdots\text{i，j}$$

光線による頂点 A，B，C，D，E，F，H の影を A′，B′，C′，D′，E′，F′，H′ とおくと，AG⊥△BDE，AG⊥△CFH だから △BDE≡△B′D′E′，△CFH≡△C′F′H′ で，△B′D′E′，△C′F′H′ は A′ を中心とする正三角形.



$a=3$ のとき，立方体の影の正六角形 B′C′D′H′E′F′ において，

$$B'D'=D'E'=E'B'=C'H'=H'F'=F'C'=3\sqrt{2}.$$

したがって，正六角形 B′C′D′H′E′F′ の面積は正三角形 B′D′E′ の面積の 2 倍で，

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(3\sqrt{2})^2=\boxed{9}\sqrt{\boxed{3}}.$$

…k，l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

10 個の関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_{10}(x)$ は任意の実数 x に対して，

$$f_{j+1}(x)=\frac{1}{2}\{f_j(x+1)+f_j(x-1)\},\quad (j=1,\ \cdots,\ 9)$$

なる関係をみたしている。このとき

(1) もし，$f_1(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$ ならば

$$\frac{1}{\sqrt{3}}f_5(1)=\frac{1}{\boxed{\text{m}}}$$

となる。

(2) また，19 個の係数 c_9，c_8，…，c_1，c_0，c_{-1}，…，c_{-9} を適当に選べば，任意の関数 $f_1(x)$ に対して

$$f_{10}(x)=c_9f_1(x+9)+c_8f_1(x+8)+\cdots+c_{-9}f_1(x-9)$$

がすべての x に対してなりたつ。これらの係数のうち，c_0，c_1，c_9 に対して

$$2^9c_0=\boxed{\text{n}},\quad 2^9c_1=\boxed{\text{o}},\quad 2^9c_9=\boxed{\text{p}}$$

となる。

分 野

数学ⅡB：三角関数，和積公式，二項係数

【解答】

(1) 和積公式から

$$f_2(x)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}(x+1)+\sin\frac{\pi}{3}(x-1)\right)=\sin\frac{\pi}{3}x\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}x=\frac{1}{2}f_1(x).$$

$$f_j(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}f_1(x) \qquad \cdots(*)$$

と推定.

(Ⅰ) $j=1$ のとき明らかに (*) が成り立つ.

(Ⅱ) $j=k$ のとき (*) が成り立つとすると，$f_k(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}f_1(x)$．このとき，

$$f_{k+1}(x)=\frac{1}{2}\{f_k(x+1)+f_k(x-1)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}f_1(x+1)+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}f_1(x-1)\right\}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\frac{1}{2}\{f_1(x+1)+f_1(x-1)\}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}f_2(x)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}f_1(x).$$

よって，$j=k+1$ のとき(*)は成り立つ．

よって，すべての j について(*)はなりたつ．

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{3}}f_5(1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2^5}=\boxed{\frac{1}{32}}. \qquad \cdots\mathrm{m}$$

(2) $f_j(x)=\dfrac{1}{2^{j-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1}{}_{j-1}\mathrm{C}_k f_1(x+j-2k-1)$ $\cdots$(**)

と推定．

(i) $j=1$ のとき $\dfrac{1}{2^{j-1}}\displaystyle\sum_{k=0}^{j-1}{}_{j-1}\mathrm{C}_k f_1(x+j-2k-1)=f_1(x)$．よって，(**) は成り立つ．

(ii) $j=m$ のとき，(**) が成り立つとすると，

$$f_{m+1}(x)=\frac{1}{2}\{f_m(x+1)+f_m(x-1)\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_k f_1(x+m-2k)+\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_k f_1(x+m-2k-2)\right\}$$
$$=\frac{1}{2^m}\left\{f_1(x+m)+\sum_{k=1}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_k f_1(x+m-2k)+\sum_{k=1}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1} f_1(x+m-2k)+f_1(x-m)\right\}$$
$$=\frac{1}{2^m}\left\{f_1(x+m)+\sum_{k=1}^{m-1}{}_{m}\mathrm{C}_k f_1(x+m-2k)+f_1(x-m)\right\}$$
$$=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}{}_{m}\mathrm{C}_k f_1(x+m-2k).$$

よって，$j=m+1$ のときも，(**) は成り立つ．

よって，すべての j について (**) は成り立つ．

$$\therefore\quad f_{10}(x)=\frac{1}{2^9}\sum_{k=0}^{9}{}_{9}\mathrm{C}_k f_1(x-2k+9).$$

$f_1(x+\text{偶数})$ の係数は 0．$\therefore$ $2^9c_0=\boxed{0}$． $\cdots$n

$k=4$ のとき，$f_1(x-2k+9)=f_1(x+1)$．$\therefore$ $2^9c_1={}_9\mathrm{C}_4=\boxed{126}$． $\cdots$o

$k=0$ のとき，$f_1(x-2k+9)=f_1(x+9)$．$\therefore$ $2^9c_9={}_9\mathrm{C}_0=\boxed{1}$． $\cdots$p

1972 年　2 次試験（文科）

第 1 問

空間に座標系が定められていて，z 軸上に 2 点 A(0, 0, 6)，B(0, 0, 20) が与えられている。xy 平面上の点 P(x, y, 0) で，$0 \leqq x \leqq 15$，$0 \leqq y \leqq 15$，$\angle \mathrm{APB} \geqq 30^\circ$ を満たすものの全体が作る図形の面積を求めよ。

分　野

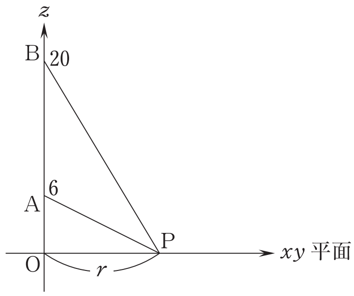
数学 II B：三角関数，加法定理

考え方

z 軸を含む断面で考えれば OP の長さの範囲が求められる．

【解答】

原点を O とし，OP $= r$ とおく．ABP を含む平面上で考える．



$\tan\angle \mathrm{OPA} = \dfrac{6}{r}$，$\tan\angle \mathrm{OPB} = \dfrac{20}{r}$．

よって，

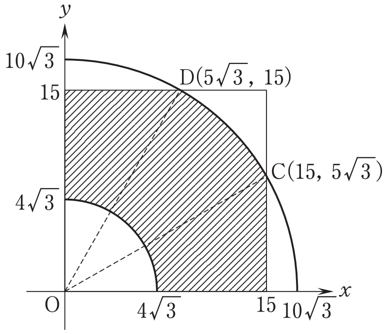
$$\tan\angle \mathrm{APB} = \tan(\angle \mathrm{OPB} - \angle \mathrm{OPA}) = \frac{\dfrac{20}{r} - \dfrac{6}{r}}{1 + \dfrac{6}{r}\dfrac{20}{r}} = \frac{14r}{r^2+120}.$$

$\angle \mathrm{APB} \geqq 30^\circ$ から

$$\frac{14r}{r^2+120} \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \therefore \quad r^2 - 14\sqrt{3}\,r + 120 \leqq 0. \quad \therefore \quad (r - 4\sqrt{3})(r - 10\sqrt{3}) \leqq 0.$$

$$\therefore \quad 4\sqrt{3} \leqq r \leqq 10\sqrt{3}. \quad 48 \leqq x^2 + y^2 \leqq 300.$$

よって，P の存在範囲は xy 平面上で，O を中心とする半径 $10\sqrt{3}$ の円と $4\sqrt{3}$ の円の間の部分のうち，$0 \leqq x \leqq 15$，$0 \leqq y \leqq 15$ の部分．これを図示すると，右図．



$x = 15$，$y \geqq 0$ と $x^2 + y^2 = 300$ の交点を C$(15, 5\sqrt{3})$ とし，$x \geqq 0$，$y = 15$ と $x^2 + y^2 = 300$ の交点を D$(5\sqrt{3}, 15)$ とする．

OC，OD と x 軸正方向のなす角がそれぞれ $\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{3}$ であることに注意．

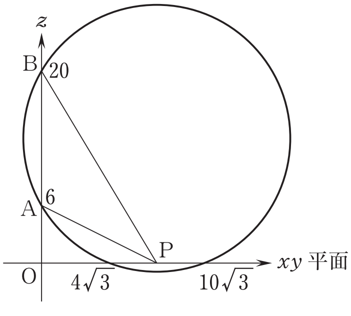
求める面積は

$$2 \times \frac{1}{2} \times 15 \times 5\sqrt{3} + \frac{1}{2}(10\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}(4\sqrt{3})^2\pi$$

$$= 75\sqrt{3} + 13\pi. \qquad \cdots(答)$$

（注）　前半は **1970 年文科　第 2 問**と同趣旨，同様に円周角が 30° になる円を描いて，r の範囲を求めてもよい．

また，**1960 年数学 II　第 2 問**で広場から棒を見込む角度が 45° 以上で出題されている．



第2問

平面上の三角形ABCにおいて，頂点Aを通り辺AB，ACに垂直な直線をそれぞれh，kとする。Bのkに関する対称点をB′，Cのhに関する対称点をC′とする。ベクトル $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{b'}=\overrightarrow{AB'}$，$\vec{c'}=\overrightarrow{AC'}$ の間に

$$\vec{b'}=\vec{b}+\vec{c},\quad \vec{c'}=m\vec{b}+\vec{c}\ (m\text{は正の整数}),\quad |\vec{b}|=1$$

がなりたつとき，m，$\angle BAC$および$|\vec{c}|$を求めよ。ただし$|\vec{a}|$はベクトル$\vec{a}$の長さをあらわす。また $0<\angle BAC<\pi$ とする。

分　野

数学ⅡB：ベクトル，内積，整数，三角関数

考え方

$\angle BAC=\theta$とし，BからACへ下した垂線の足をHとすると，AHの大きさは$|AB\cos\theta|$で，$\overrightarrow{AH}$の向きはθが鋭角なら$\overrightarrow{AC}$と同じで，鈍角なら$\overrightarrow{AC}$の逆向き．よって，

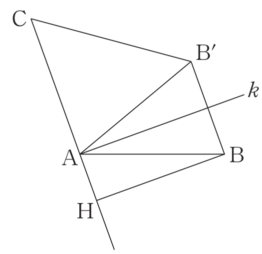
$$\overrightarrow{AH}=|\overrightarrow{AB}|\cos\theta\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC}.$$

Bから，kに下した垂線の足をKとすると，$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AH}$，$k$についてBと対称な点B′について，$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}$.

【解答】

BからACに下した垂線の足をHとすると，$\overrightarrow{AH}=|\vec{b}|\cos\angle BAC\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$.

$$\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=\vec{b}-2\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}\vec{c}.$$



$\vec{b'}=\vec{b}+\vec{c}$ だから，

$$1=-2\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2}.\qquad\cdots①$$

同様に，$\vec{c'}=m\vec{b}+\vec{c}$ から，

$$m=-2\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}.\qquad\cdots②$$

$|\vec{b}|=1$，①，②から，

$$-2\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2=m.$$

$$\cos\angle BAC=\frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=\frac{\frac{m}{-2}}{\sqrt{m}}=-\frac{\sqrt{m}}{2}.$$

$-1<\cos\angle BAC<1$ から $0<m<4$.

(i) $m=1$ のとき，$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{2}$. $\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$，$|\vec{c}|=1$.

(ii) $m=2$ のとき，$\cos\angle BAC=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\angle BAC=\dfrac{3}{4}\pi$，$|\vec{c}|=\sqrt{2}$.

(iii) $m=3$ のとき，$\cos\angle BAC=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\angle BAC=\dfrac{5}{6}\pi$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

$$\therefore\ (m,\ \angle BAC,\ |\vec{c}|)=\left(1,\ \frac{2}{3}\pi,\ 1\right),\ \left(2,\ \frac{3}{4}\pi,\ \sqrt{2}\right),\ \left(3,\ \frac{5}{6}\pi,\ \sqrt{3}\right).\qquad\cdots(答)$$

第3問

複素数 z，w の間に $w=z^2$ なる関係があり，複素平面において点 z は4点 $1+i$，$2+i$，$2+2i$，$1+2i$ を頂点とする正方形の内部を動くものとする。このとき，複素平面において，点 w の動く範囲の面積を求めよ。ただし，i は虚数単位をあらわす。

分　野

数学ⅡB：複素数平面，整式の積分

考え方

$z=x+yi$ $(1<x<2,\ 1<y<2)$ のとき，$w=u+vi=z^2$ の u，v を x，y で表す．x，y の一方を固定したとき，u，v で表せれば，u，v の存在範囲が求められる．

【解答】

$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，z が $1+i$，$2+i$，$2+2i$，$1+2i$ を頂点とする正方形の内部を動くから，$1<x<2$，$1<y<2$．

$w=u+vi$（u，v は実数）とおくと，$w=z^2$ から

$$u+vi=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi. \quad \therefore \quad u=x^2-y^2, \quad v=2xy.$$

x を固定して，u を v で表すと，$u=x^2-\dfrac{v^2}{4x^2}$ となる．v を固定したとき，u は x に対して増加する．したがって，$1<x<2$ より，

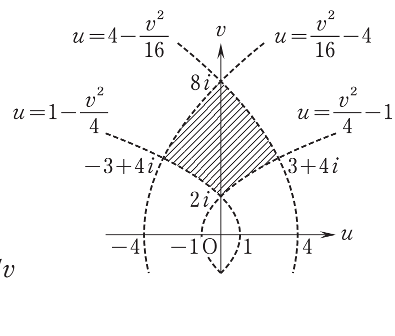
$$1-\frac{v^2}{4}<u<4-\frac{v^2}{16}. \quad \cdots①$$

y を固定して，u を v で表すと，$u=\dfrac{v^2}{4y^2}-y^2$ となる．v を固定したとき，u は y に対して減少する．したがって，$1<y<2$ より，

$$\frac{v^2}{16}-4<u<\frac{v^2}{4}-1. \quad \cdots②$$

したがって，①，② をみたす $w=u+vi$ に対して，$w=(x+yi)^2$，$1<x<2$，$1<y<2$ をみたす x，y が存在する．

$z=1+i$，$2+i$，$2+2i$，$1+2i$ のとき，$w=2i$，$3+4i$，$8i$，$-3+4i$ であることに注意して，w の動く範囲を図示すると右図斜線部，境界を含まない．



その面積を S とすると

$$S=2\int_2^4\left(\frac{v^2}{4}-1\right)dv+2\int_4^8\left(4-\frac{v^2}{16}\right)dv$$
$$=2\left[\frac{v^3}{12}-v\right]_2^4+2\left[4v-\frac{v^3}{48}\right]_4^8$$
$$=\frac{56}{3}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注）「複素平面」とは現行課程（2012年～）における「複素数平面」のことである．当時の課程の入試は1966年から始まっていたのだが，東大入試の問題文に現れたのはこの問題が最初である．

どちらが正しいかと聞かれることがあるが，「正しい」があるとすれば，教科書に書かれているものということになる．当時は「複素平面」が正しく，現在は「複素数平面」が正しいということにしかならない．この他，ガウス（Gauß）平面，アルガン（Argand）平面，ウェッセル（Wessel）平面などとも呼ばれる．

第４問

たがいに外接する定円 C，C′ が共通接線 l の同じ側にあるとする。図のように

C，C′，l に接する円を C_1，

C，C_1，l に接する円を C_2，

…………………………

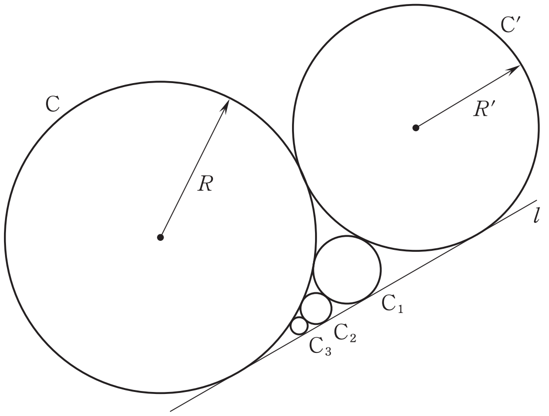
C，C_{n-1}，l に接する円を C_n，

…………………………

とする。このとき円 C_n の半径を r_n として，極限値

$$\lim_{n\to\infty} n^2 r_n$$

を，円 C の半径 R と円 C′ の半径 R' とを用いてあらわせ。



分　野

数学Ⅰ：平面図形，**数学ⅡB**：数列，数列の極限

考え方

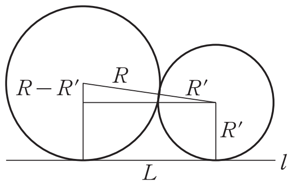
相接する２円が直線に接しているとき，２接点間の距離を２円の半径で表してそれを応用する．

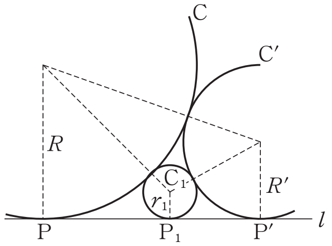
【解答】

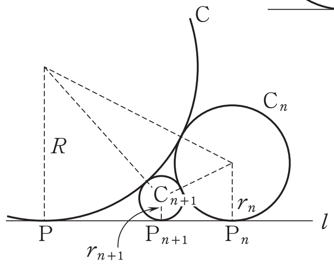
互いに外接する２円の半径を R，R' とし，この２円がともに１直線に接するとき，その２接点間の距離を L とすると，

$$L^2=(R+R')^2-(R-R')^2=4RR'$$

となるから，$L=2\sqrt{RR'}$ である．この関係は一般に成り立つ．







問題の円 C，C′，C_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と l の接点をそれぞれ P，P′，P_n とすると，

$$PP'=2\sqrt{RR'},\quad PP_n=2\sqrt{Rr_n},\quad P'P_1=2\sqrt{R'r_1},\quad P_nP_{n+1}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}.$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{RR'}=2\sqrt{Rr_1}+2\sqrt{R'r_1},\quad 2\sqrt{Rr_n}=2\sqrt{Rr_{n+1}}+2\sqrt{r_nr_{n+1}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{R'}},\quad \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r_n}}.$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{R}}+\dfrac{1}{\sqrt{R'}}$，公差 $\dfrac{1}{\sqrt{R}}$ の等差数列．

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{R'}}+\frac{n}{\sqrt{R}}.\quad \therefore\quad r_n=\left(\frac{\sqrt{RR'}}{\sqrt{R}+n\sqrt{R'}}\right)^2.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}n^2r_n=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{\sqrt{RR'}}{\sqrt{R}+n\sqrt{R'}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{RR'}}{\dfrac{\sqrt{R}}{n}+\sqrt{R'}}\right)^2=R. \qquad \cdots(答)$$

1972 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

k を実数の定数，$f(x)=x^2(x+8)$，$g(x)=(x^2-1)(x+4)$ とするとき，x に関する方程式

$$f(x)-kg(x)=0$$

の相異なる実根の個数を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

$f(x)-kg(x)=0$ の解は $y=F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ と $y=k$ の交点の x 座標である．このことを使う．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

$g(x)=0$ のとき，$f(x)\neq 0$ であるから，$f(x)-kg(x)\neq 0$．$g(x)\neq 0$ のときのみを考えればよい．

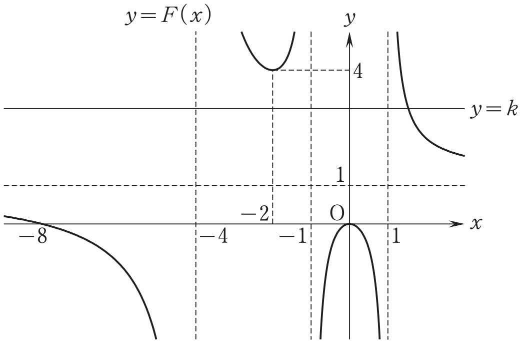
$F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}$ とおく．

$$F'(x)=\frac{\{2x(x+8)+x^2\}(x^2-1)(x+4)-x^2(x+8)\{2x(x+4)+(x^2-1)\}}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

$$=-\frac{2x(2x^3+x^2+10x+32)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}=-\frac{2x(x+2)(2x^2-3x+16)}{(x^2-1)^2(x+4)^2}.$$

$2x^2-3x+16=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{119}{8}>0$．$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}F(x)=1$，$F(-2)=4$，$F(0)=0$ から

x	$-\infty$	$\cdots$	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$F'(x)$	(0)	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	$\times$	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	(0)
$F(x)$	(1)	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	(1)



よって，$F(x)=k$ の解，つまり $f(x)-kg(x)=0$ の実数解の個数は次の表の様である．

k	…	0	…	1	…	4	…
解の個数	3	2	1	0	1	2	3

…(答)

第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 5 問

$h(x)$ は $-\infty<x<\infty$ で 2 回微分可能なある関数で，$f(x)$ がどのような 1 次関数であっても，

$$u(x)=\int_0^x h(t)f(t)\,dt+h(x)\int_x^1 f(t)\,dt$$

とおけば，

(1)　$\dfrac{d^2u}{dx^2}=f(x)$

および

(2)　$u(0)=0$

がなりたつ。このとき，$h(x)$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：関数方程式

考え方

任意の 1 次関数 $f(x)$ について成り立つということは，$f(x)=ax+b$ として，任意の a，b について成り立つということであり，結果的には $f(x)=x$，$f(x)=1$（1 次関数ではないが）で成り立つということである．

【解答】

与式を x で微分すると

$$u'(x)=h(x)f(x)+h'(x)\int_x^1 f(t)\,dt-h(x)f(x)=h'(x)\int_x^1 f(t)\,dt.$$

$$u''(x)=h''(x)\int_x^1 f(t)\,dt-h'(x)f(x)=f(x).$$

$f(x)=ax+b$ とおくと $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt=\left[\frac{a}{2}t^2+bt\right]_x^1=\frac{a}{2}+b-\frac{a}{2}x^2-bx.$

$$h''(x)\left(\frac{a}{2}+b-\frac{a}{2}x^2-bx\right)-h'(x)(ax+b)=ax+b.$$

任意の a，b について成り立つから，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}h''(x)(1-x^2)-h'(x)x=x, & \cdots ① \\ h''(x)(1-x)-h'(x)=1. & \cdots ②\end{cases}$$

①，② から $h''(x)$ を消去すると，

$$\frac{1}{2}(h'(x)+1)(1+x)-h'(x)x=x. \quad \therefore \quad (1-x)h'(x)=x-1.$$

$h'(x)$ は微分可能だから連続．よって，$x=1$ も含めて，

$$h'(x)=-1. \qquad \cdots ③$$

また，$u(0)=0$ から，任意の $f(x)$ について，

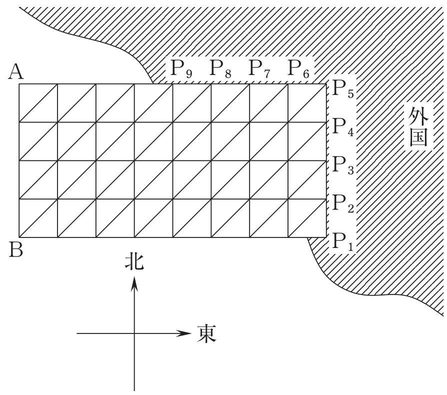
$$u(0)=h(0)\int_0^1 f(t)\,dt=0.$$

よって，$h(0)=0$．これと，③ から $h(x)=-x$．このとき，①，② もみたす．

$$h(x)=-x. \qquad \cdots(答)$$

第６問

図の長方形 ABP_1P_5 はある国境の町をあらわし，各線分は道路をあらわす。図の地点 P_1，P_2，…，P_9 には外国への通路が開かれている。いま，ある犯人がBから外国に向って逃走しようとしているが，この犯人は P_j $(1\leqq j\leqq 9)$ 以外の各交差点（Bを含む）において $\frac{1}{2}$ ずつで真東または北東に進路をえらぶ。この犯人を捕えるために３人の警官を P_j $(1\leqq j\leqq 9)$ のうちの適当な３地点に配置しようとする。どの３点に配置すれば，犯人を捕える確率 p が最大となるか。また，そのときの p の最大値を小数第２位まで求めよ。ただし，犯人は警官に出会わないで国境の地点に達すれば，無事に逃げおおせるものとする。



分　野

数学Ⅲ：確率

考え方

P_j を犯人が通過する確率を求め，大きい順に見て，3 番目までを取り出せばよい．

【解答】

犯人が P_k に到達する確率を p_k とする．

$1 \leqq k \leqq 4$ のとき，犯人が B から P_k まで行くには 8 回の移動で，東に $9-k$ 回北東に $k-1$ 回移動する．したがって，

$$p_k = \frac{{}_8\mathrm{C}_{k-1}}{2^8}.$$

また，$5 \leqq k \leqq 9$ のとき，犯人が B から P_k まで行くには $13-k$ 回の移動で，東に $9-k$ 回北東に 4 回移動する．ただし，$13-k$ 回目は必ず北東に向って移動する．したがって，

$$p_k = \frac{{}_{12-k}\mathrm{C}_3}{2^{13-k}}.$$

したがって，

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_k	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{35}{256}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

$$\frac{7}{32} > \frac{5}{32} = \frac{5}{32} > \frac{35}{256} > \frac{1}{8} > \frac{7}{64} > \frac{1}{16} > \frac{1}{32} > \frac{1}{256}.$$

確率の大きい順に 3 つを選ぶと，

$$p_4 = \frac{7}{32}, \quad p_6 = p_7 = \frac{5}{32}.$$

したがって，犯人を捕らえる確率 p が最大になるのは，P_4，P_6，P_7 に警官を配置する場合である．

…(答)

そのとき，

$$p = \frac{7}{32} + \frac{5}{32} + \frac{5}{32} = \frac{17}{32} = 0.53\cdots. \qquad \cdots(答)$$

(注)　正確には $p = 0.53125$.

1973 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

複素平面上で複素数

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{2},\quad z_2=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i),\quad z_3=\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$$

によって表される点をそれぞれ P_1，P_2，P_3 とする。また

$$\alpha=\frac{2+2\sqrt{3}\,i}{3}$$

として，複素数 αz_1，αz_2，αz_3 によって表わされる点をそれぞれ Q_1，Q_2，Q_3 とする。このとき，

$$\angle P_1P_2P_3=\boxed{\ \text{a}\ }\pi,$$

$$\triangle P_1P_2P_3\text{ の面積}=\boxed{\ \text{b}\ },$$

$$\triangle Q_1Q_2Q_3\text{ の面積}=\boxed{\ \text{c}\ }$$

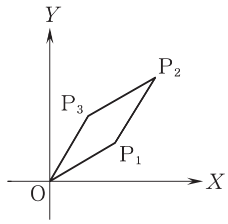
である。また原点を O とすると，有向線分 $\overrightarrow{OQ_2}$ と実軸の正方向との間の角は $\boxed{\ \text{d}\ }\pi$ である。ただし角はいずれも 0 以上かつ π 以下の値となるようにせよ。

分　野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

$$z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},\ z_3=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},\ z_2=z_1+z_3$$



だから，四角形 $OP_1P_2P_3$ は 1 辺の長さが 1 の菱形で，$\angle P_1OP_3=\frac{\pi}{6}$．よって，

$$\angle P_1P_2P_3=\boxed{\frac{1}{6}}\pi,\quad \triangle P_1P_2P_3\text{ の面積}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\boxed{\frac{1}{4}}. \qquad \cdots\text{a, b}$$

$$\alpha=\frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

だから，

$$\triangle Q_1Q_2Q_3\text{の面積}=\left(\frac{4}{3}\right)^2(\triangle P_1P_2P_3\text{ の面積})=\boxed{\frac{4}{9}}. \qquad \cdots\text{c}$$

$\overrightarrow{OP_2}$ と実軸の正方向との間の角は $\frac{\pi}{4}$ で α の偏角が $\frac{\pi}{3}$ だから，$\overrightarrow{OQ_2}$ と実軸の正方向との間の角は

$$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\boxed{\frac{7}{12}}\pi. \qquad \cdots\text{d}$$

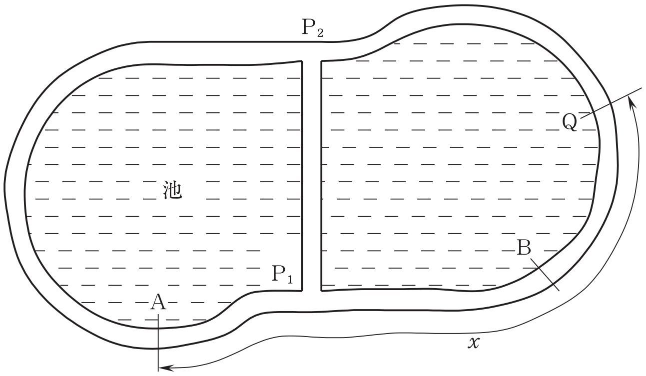
Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

図に示すように，池のまわりに 1 周 200 m の道があり，2 点 P_1，P_2 の間に長さ 40 m の橋がかかっている。P_1 から P_2 に池の周囲を通って行くときは，どちらをまわっても同じ距離である。P_1 から周にそって左側 20 m のところに点 A，右側 30 m のところに点 B がある。A から池を左に見ながら周にそって距離 x m 進んだところにある点を Q とする $(0\leqq x<200)$。Q から A への最短径路の

長さとBへの最短径路の長さとの和を $f(x)$ とする。

$f(x)$ のグラフが x 軸に平行になる区間は $\boxed{\text{e}}$ か所で，$f(x)$ が最大値 $\boxed{\text{f}}$ をとるような x の範囲は $\boxed{\text{g}} \leqq x \leqq \boxed{\text{h}}$ である。



分　野

数学 I：最大・最小

【解答】

$f(x)$ の単位はmであるとして解答する.

左右の池を橋を渡って一周すると $100+40=140$ m.

P_1 から右の池を左回りにまわる距離と，橋を渡って右回りに回る距離が等しい点は P_1 から 70 m の点，つまり $x=90$ の点.

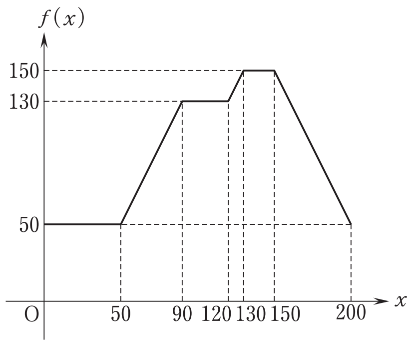
Aから左の池を橋を渡って左回りにまわる距離と，右回りに回る距離が等しい点はAから 70 m の点，つまり $x=130$ の点.

Bから右の池を左回りにまわる距離と，橋を渡って右回りに回る距離が等しい点はBから 70 m の点，つまり P_2，すなわち $x=120$ の点.

P_1 から左の池を橋を渡って左回りにまわる距離と，右回りに回る距離が等しい点は P_1 から 70 m の点，つまり $x=150$ の点.

QA の最短距離は $\begin{cases} x & (0 \leqq x < 90), \\ 180-x & (90 \leqq x < 120), \\ x-60 & (120 \leqq x < 130), \\ 200-x & (130 \leqq x < 200). \end{cases}$　QB の最短距離は $\begin{cases} 50-x & (0 \leqq x < 50), \\ x-50 & (50 \leqq x < 150), \\ 250-x & (150 \leqq x < 200). \end{cases}$

$$\therefore \quad f(x)=\begin{cases} 50 & (0 \leqq x < 50), \\ 2x-50 & (50 \leqq x < 90), \\ 130 & (90 \leqq x < 120), \\ 2x-110 & (120 \leqq x < 130), \\ 150 & (130 \leqq x < 150), \\ 450-2x & (150 \leqq x < 200). \end{cases}$$



$f(x)$ のグラフが x 軸に平行になる区間は $\boxed{3}$ か所である.

…e

$f(x)$ が最大値 $\boxed{150}$ をとるような x の範囲は $\boxed{130} \leqq x \leqq \boxed{150}$ である.　…f，g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$f(x)=\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a} \quad (a \text{ は定数})$$

とする。

(1) $a=\boxed{\text{ i }}$ のとき，$\lim_{x\to1}f(x)$ は存在しない。

(2) $a=\boxed{\text{ j }}$ のとき，$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{2}$ である。

(3) $a=\boxed{\text{ k }}$ のとき，$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$ は正の数であり，そのとき $\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\boxed{\text{ l }}$ である。

分　野

数学Ⅰ：分数関数，**数学ⅡB**：関数の極限

【解答】

$$f(x)=\frac{2ax^2-(a-2)x-1}{ax^2-(a^2-1)x-a}=\frac{(2x-1)(ax+1)}{(ax+1)(x-a)}=\frac{2x-1}{x-a}.$$

(1) $a=\boxed{1}$ とすると $x\to1$ のとき $f(x)$ の分母$\to0$ で，分子は 0 でないので $\lim_{x\to1}f(x)$ は存在しない.　…i

(2) $a\neq1$ のとき，$\lim_{x\to1}f(x)=\frac{1}{1-a}$.

$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{2}$ となるのは $a=\boxed{-1}$ のとき.　…j

(3) $a\neq\frac{1}{2}$ のとき，$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=0$.

$a=\frac{1}{2}$ のとき，$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}=2$.

以上より，$a=\boxed{\frac{1}{2}}$ のとき，$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)$ は正の数 $\boxed{2}$.　…k，l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$\text{放物線 } p_1 : y=x^2$$

および

$$\text{放物線 } p_2 : y=2x^2$$

を考える。

p_2 上の１点 $(a,\ 2a^2)$ におけるこの放物線の接線が放物線 p_1 によって切り取られてできる線分の中点の座標は $(\boxed{\text{m}}\,a,\ \boxed{\text{n}}\,a^2)$ である。また，この線分と放物線 p_1 とが囲む部分の面積は $\boxed{\text{o}}\sqrt{2}|a|^{\boxed{\text{p}}}$ である。

分 野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

【解答】

点 $(a,\ 2a^2)$ における p_2 の放物線の接線は $(2x^2)'=4x$ から，

$$y=4a(x-a)+2a^2=4ax-2a^2.$$

p_1 との交点の x 座標は

$$x^2=4ax-2a^2 \text{ つまり } x^2-4ax+2a^2=0$$

の２解．これらを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha+\beta=4a,\quad \alpha\beta=2a^2.$$

中点の x 座標は

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\boxed{2}\,a. \qquad \cdots\text{m}$$

中点の y 座標は

$$\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=\frac{1}{2}\{(4a)^2-2(2a^2)\}=\boxed{6}\,a^2. \qquad \cdots\text{n}$$

$\alpha=2a-\sqrt{2}|a|$，$\beta=2a+\sqrt{2}|a|$ だから，この線分と放物線 p_1 とが囲む部分の面積は

$$\int_\alpha^\beta\{(4ax-2a^2)-x^2\}\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2}|a|)^3=\boxed{\frac{8}{3}}\sqrt{2}|a|^{\boxed{3}}. \qquad \cdots\text{o，p}$$

1973 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=2 \quad x,\ y,\ z：\text{正の整数}$$

を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ のうちで，$y=2$ となるものは $\boxed{\text{a}}$ 個あり，$y=3$ となるものは $\boxed{\text{b}}$ 個あり，$y=4$ となるものは $\boxed{\text{c}}$ 個ある。そのほか，$y=\boxed{\text{d}}$ となるものが 2 個あり，これらですべての場合がつくされている。

分　野

数学 I ：整数

【解答】

$y=2$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$．$xz-2x-2z=0$．$(x-2)(z-2)=4$．

$$\therefore\ (x-2,\ z-2)=(4,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 4).$$

点 $(x,\ y,\ z)$ は $(6,\ 2,\ 3)$，$(4,\ 2,\ 4)$，$(3,\ 2,\ 6)$ の $\boxed{3}$ 個ある． …a

$y=3$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=1$．$xz-x-z=0$．$(x-1)(z-1)=1$．

$$\therefore\ (x-1,\ z-1)=(1,\ 1).$$

点 $(x,\ y,\ z)$ は $(2,\ 3,\ 2)$ の $\boxed{1}$ 個ある． …b

$y=4$ のとき，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{5}{4}$．$5xz-4x-4z=0$．$(5x-4)(5z-4)=16$．

$$\therefore\ (5x-4,\ 5z-4)=(1,\ 16),\ (2,\ 8),\ (4,\ 4),\ (8,\ 2),\ (16,\ 1).$$

x，z は整数であるから，点 $(x,\ y,\ z)$ は $(1,\ 4,\ 4)$，$(4,\ 4,\ 1)$ の $\boxed{2}$ 個ある． …c

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=2-\dfrac{3}{y}>0$ から $y>\dfrac{3}{2}$ より $y\geqq 2$．

$y\geqq 5$ で，$x\leqq z$ のとき，$\dfrac{2}{x}\geqq\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=2-\dfrac{3}{y}\geqq 2-\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{5}$．$x\leqq\dfrac{10}{7}$．

よって，$x=1$．このとき，$\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=1$．$3z+y=yz$．$(y-3)(z-1)=3$．

$$\therefore\ (y-3,\ z-1)=(1,\ 3),\ (3,\ 1).\quad (y,\ z)=(4,\ 4),\ (6,\ 2)$$

$y>4$ であるのは，$x>z$ も含めると，点 $(x,\ y,\ z)$ は $(1,\ 6,\ 2)$，$(2,\ 6,\ 1)$．

以上から $y=2,\ 3,\ 4$ 以外は $y=\boxed{6}$ となるものが 2 個あり，これらですべての場合がつくされている． …d

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる有理数は何か。

複素平面上に正六角形 ABCDEF がある。その頂点 A，B，C，D を表わす複素数をそれぞれ α，β，γ，δ とするとき，

$$\alpha=0,\quad \beta=4-3i$$

であり，δ の実部（実数部分ともいう）が正であるならば，

$$\gamma=(\boxed{\text{e}}+\boxed{\text{f}}\sqrt{3})+(\boxed{\text{g}}+\boxed{\text{h}}\sqrt{3})i$$

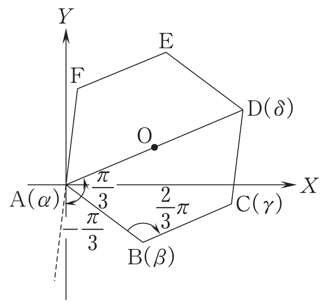
である。

分 野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

正六角形 ABCDEF の中心 O は B を A を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点であり，D は A から AO を 2 倍に延ばした点にある．



よって，

$$\delta=2\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\beta=(1\pm\sqrt{3}\,i)(4-3i)$$

δ の実部は $4\pm3\sqrt{3}$．これが正だから，

$$\delta=(1+\sqrt{3}\,i)(4-3i)=4+3\sqrt{3}+(4\sqrt{3}-3)i.$$

したがって，C は B を中心に A を $-\dfrac{2}{3}\pi$ 回転した点である．

$$\therefore\quad \gamma=\beta+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)(\alpha-\beta)=4-3i+\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)(-4+3i)$$

$$=\left(\boxed{6}+\boxed{\frac{3}{2}}\sqrt{3}\right)+\left(\boxed{-\frac{9}{2}}+\boxed{2}\sqrt{3}\right)i.\qquad \cdots\text{e, f, g, h}$$

（注） $\gamma=\beta+\dfrac{\delta}{2}$ でもよい．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

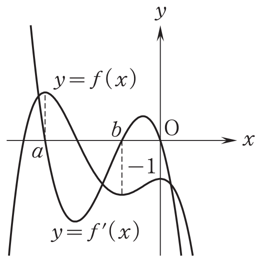
4 次関数 $y=f(x)$ がある。この関数のグラフは x 軸と 2 回交わる。また，この関数は，x の 2 つの値 a および 0 で極大となり，$a<0$，$f(0)=-1$ である。このとき，方程式 $f(x)=0$ は $\boxed{\text{i}}$ 個の負根をもつ。また，導関数 $y=f'(x)$ の定数項は $\boxed{\text{j}}$ であり，そのグラフは x 軸と $\boxed{\text{k}}$ 回交わる。さらに，$x<0$ の範囲で，$y=f(x)$ のグラフと $y=f'(x)$ のグラフとは $\boxed{\text{l}}$ 回交わる。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

問題文の「負根」は「負の解」の当時の表記である．



$y=f(x)$ の極大値が 2 つあるから x^4 の係数は負で，極大値の一方 $f(0)=-1<0$ で，x 軸と 2 回交わるから $f(a)>0$．

$y=f(x)$ の極小値を与える x を b とすると，$a<b<0$．

$f(x)=0$ は $x<a$，$a<x<b$ (<0) の範囲に 1 個ずつ解があるから，負の解は $\boxed{2}$ 個ある．　…i

$f(x)$ は $x=0$ のとき極値をもつから，$f'(x)$ の定数項 $f'(0)=\boxed{0}$．…j

$y=f(x)$ は 3 つの極値をもつから，$f'(a)=f'(b)=f'(0)=0$．よって，3 次関数 $y=f'(x)$ は x 軸と $\boxed{3}$ 回交わる．　…k

$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ のグラフは右上図のようになるから $x<0$ の範囲で，$\boxed{2}$ 回交わる．　…l

（注）　穴埋め問題なので，上の程度の推論で交わる点の個数 $\boxed{\text{l}}=\boxed{2}$ と結論してよい．$x<0$ の範囲で 2 回交わることは，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\{f(x)-f'(x)\}=-\infty$，$f(a)>f'(a)=0$，$f(b)<f'(b)=0$ からわかる．

$x<0$ において，これ以外に交わらないことの証明．

$y=f(x)$ は 2 つの変曲点をもつ．その x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$a<\alpha<b<\beta<0$．

$f(x)-f'(x)$ を $g(x)$ とおくと，$g(x)$ は x^4 の係数が負の 4 次関数．$g'(x)=f'(x)-f''(x)$．

x	$-\infty$	$\cdots$	a	$\cdots$	α	$\cdots$	b	$\cdots$	β	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+$	↘		↘	$-$	↗	$-$	↗	-1	↘	$-\infty$
$f'(x)$	∞	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\infty$
$g'(x)$	∞	$+$	$+$		$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$		$-\infty$

$g'(x)=0$ は x^3 の係数が負の 3 次関数で，$a<x<\alpha$，$b<x<\beta$，$0<x$ の範囲にそれぞれ 1 個の解がある．それらを p，q，r $(p<q<r)$ とおくと，

x	$-\infty$	$\cdots$	a	$\cdots$	p	$\cdots$	b	$\cdots$	q	$\cdots$	0	$\cdots$	r	$\cdots$	∞
$g'(x)$	∞	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+$	↗	$+$	↘	$-$	↘	$-$	↗	$-$	↗		↘	$-\infty$

したがって，$x<0$ の範囲で $f(x)=f'(x)$ つまり $g(x)=0$ となるのは，$x<a$ と $p<x<b$ の区間の各 1 点だけである．したがって，$x<0$ の範囲で $y=f(x)$ と $y=f'(x)$ はちょうど 2 回交わる．

Ⅳ

下記の(1)〜(4)のそれぞれについて，命題Cが成り立つために

命題A，Bのいずれもが十分条件であるならば　1

命題Aは十分条件であるが，命題Bは十分条件でないならば　2

命題Bは十分条件であるが，命題Aは十分条件でないならば　3

命題A，Bそれぞれは十分条件ではないが，AとBの両方が成り立つという命題が十分条件であるならば　4

以上のどの場合でもないならば　5

と答えよ。

(1) 複素数α，βに関して

A：$\alpha^2+\beta^2=0$　　B：$\alpha\beta=0$　　C：$\alpha=\beta=0$　　$\boxed{\text{m}}$

(2) 実数a，bに関して

A：$a+b>0$　　B：$ab>0$　　C：$a>0$ かつ $b>0$　　$\boxed{\text{n}}$

(3) 実数a，bに関して

A：$a+b>2$,　　B：$ab>1$,　　C：$a>1$ かつ $b>1$　　$\boxed{\text{o}}$

(4) 実数a，bに関して

A：$x(a-b)+x^2\geqq 0$ がすべての実数xに対して成り立つ

B：$|a-b|\leqq x$ がすべての正の数xに対して成り立つ

C：$a=b$　　$\boxed{\text{p}}$

分野

数学Ⅰ：必要条件・十分条件

【解答】

命題Xの否定を$\overline{\text{X}}$とかく．

(1) Aは$\beta=\pm\alpha i$であり，Bは$\alpha=0$または$\beta=0$である．したがって，A，BともCであるための十分条件ではない．(Aかつ$\overline{\text{C}}$の例：$\alpha=1$，$\beta=i$；Bかつ$\overline{\text{C}}$の例：$\alpha=1$，$\beta=0$)

しかし，AかつBは$\alpha=\beta=0$を表すからAかつBはCであるための十分条件である．

$\therefore$ $\boxed{4}$　…m

(2) A，BともCであるための十分条件ではない．

(Aかつ$\overline{\text{C}}$の例：$a=2$，$b=-1$；Bかつ$\overline{\text{C}}$の例：$a=-1$，$b=-1$)

しかし，AかつBは$a>0$，$b>0$を表すからAかつBはCであるための十分条件である．

$\therefore$ $\boxed{4}$　…n

(3) A，BともCであるための十分条件ではない．

また，AかつBは$ab>1$，$a>0$，$b>0$を表すからAかつBはCであるための十分条件でない．

(AかつBかつ$\overline{\text{C}}$の例：$a=2$，$b=\dfrac{2}{3}$)

$\therefore$ $\boxed{5}$　…o

(4) A，Bはともに$a=b$と同値である．したがって，A，BともCであるための十分条件である．

$\therefore$ $\boxed{1}$　…p

(注) (1)〜(4)のいずれにおいてもAおよびBはCが成り立つための必要条件である．

1973 年　2 次試験（文科）

第 1 問

平面上に１辺の長さが１の正方形 S がある。この平面上で S を平行移動して得られる正方形で，点Ｐを中心にもつものを $T(\mathrm{P})$ とする。このとき，共通部分 $S\cap T(\mathrm{P})$ の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるような点Ｐの存在範囲を図示せよ。

分　野

数学Ⅰ：平面図形

考え方

正方形 S の中心を原点とする座標をとって考える．対称性から第一象限に $T(\mathrm{P})$ の中心Ｐがあるときを考えればよい．

【解答】

正方形 S の中心を原点，座標軸は正方形の辺に平行にとると，S の範囲は $-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$ である．

Ｐの座標を $(p,\ q)$ とすると，$T(\mathrm{P})$ の範囲は $p-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq p+\dfrac{1}{2}$，$q-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq q+\dfrac{1}{2}$ である．

対称性からＰが第一象限かその境界にある場合を調べる．

$p\geqq0$，$q\geqq0$ のとき $S\cap T(\mathrm{P})$ の範囲は $p-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，$q-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$ である．

したがってその面積は $(1-p)(1-q)$ であるからこれが $\dfrac{1}{2}$ 以上となるとき，

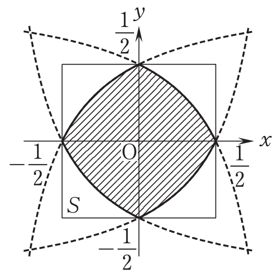
$$(1-p)(1-q)\geqq\frac{1}{2},\quad p\geqq0,\quad q\geqq0.$$

第一象限以外の場合も含めると点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲は

$$(1-x)(1-y)\geqq\frac{1}{2},\quad (1+x)(1-y)\geqq\frac{1}{2},$$

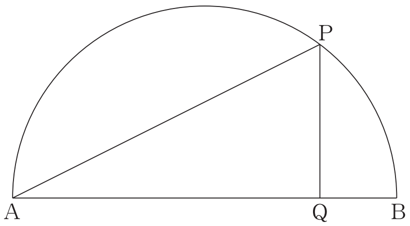
$$(1+x)(1+y)\geqq\frac{1}{2},\quad (1-x)(1+y)\geqq\frac{1}{2}.$$

図示すると右図斜線部．境界を含む．



第2問

図において $AB=2a$ とする。ABを直径とする半円周上にPがあるとする。PからABに下した垂線の足をQとする。△APQをABのまわりに回転してできる立体の体積の最大値を求めよ。



分　野

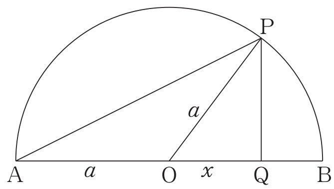
数学ⅡB：整式の微分

考え方

できあがる立体は円錐である．変数を適当に選んで体積を求め微分法により最大値を求める．

【解答】

△APQをABのまわりに回転してできる図形は底面の半径がPQで高さがAQの円錐．



半円の中心をO，$AQ=a+x$ $(-a<x<a)$ とおくと，$OQ=|x|$，$PQ=\sqrt{a^2-x^2}$.

よって回転体の体積は

$$\frac{1}{3}\pi PQ^2\cdot AQ=\frac{\pi}{3}(a^2-x^2)(a+x)=\frac{\pi}{3}(a-x)(x+a)^2.$$

$f(x)=(a-x)(x+a)^2$ とおくと，$f'(x)=-(x+a)^2+2(a-x)(x+a)=(a-3x)(x+a)$.

x	$(-a)$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	(a)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，回転体の体積は $x=\frac{a}{3}$ のとき最大になり，その最大値は

$$\frac{\pi}{3}\left(a-\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+a\right)^2=\frac{32}{81}a^3\pi. \quad \cdots(答)$$

(注)　$f(x)$ は展開してから微分しても大して変わらないが，当時は文系でも積の微分公式を学習していたのであえて変えていません．

第 3 問

四角錐 V-ABCD があって，その底面 ABCD は正方形であり，また 4 辺 VA，VB，VC，VD の長さはすべて相等しい。この四角錐の頂点 V から底面に下した垂線 VH の長さは 6 であり，底面の 1 辺の長さは $4\sqrt{3}$ である。VH 上に VK=4 なる点 K をとり，点 K と底面の 1 辺 AB とを含む平面で，この四角錐を 2 つの部分に分けるとき，頂点 V を含む部分の体積を求めよ。

分 野

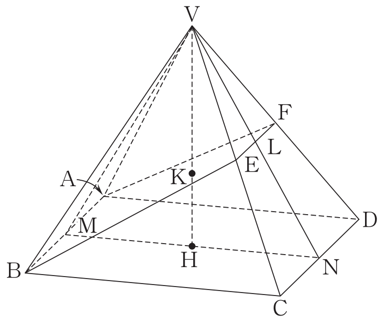
数学 I：立体図形

考え方

VH を含み，底面に垂直な断面をとって考える．

【解答】

AB，CD の中点をそれぞれ M，N とする．また，AB と K を含む断面と VC，VD との交点をそれぞれ E，F とする．



VH=6 で MN=BC=$4\sqrt{3}$ だから，三角形 VMN は 1 辺の長さが $4\sqrt{3}$ の正三角形．

VH=6 で VK=4 だから VK：KH=2：1．よって，K は三角形 VMN の重心．

MK と VN の交点を L とすると，K が重心だから L は VN の中点．

よって，VL：VN=1：2．△VEF∽△VCD だから，

$EF=\frac{1}{2}CD=2\sqrt{3}$．

また，ML=VH=6．ML⊥VL．$VL=\frac{1}{2}VN=2\sqrt{3}$．

よって，

$$四角錐\ V\text{-}ABEF=\frac{1}{3}台形\ ABEF\times VL=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(AB+EF)\times ML\times VL$$

$$=\frac{1}{6}(4\sqrt{3}+2\sqrt{3})6\times2\sqrt{3}=36.$$ …(答)

第 4 問

区間 $1 \leqq x \leqq 3$ においてつぎのように定義された関数 $f(x)$ がある。

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (1 \leqq x \leqq 2), \\ x-1 & (2 \leqq x \leqq 3) \end{cases}$$

いま実数 a に対して，区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における関数 $f(x)-ax$ の最大値から最小値を引いた値を $V(a)$ とおく。このときつぎの問に答えよ。

(1) a がすべての実数にわたって動くとき，$V(a)$ の最小値を求めよ。

(2) $V(a)$ の最小値を与えるような a の値を求めよ。

分 野

数学 I ：最大・最小

考え方

$f(x)-ax$ は $1 \leqq x \leqq 2$，$2 \leqq x \leqq 3$ においてそれぞれたかだか 1 次式であるから，最大最小になるのは $x=1, 2, 3$ のとき．

【解答】

(1) $f(x)-ax=\begin{cases} -ax+1 & (1 \leqq x \leqq 2), \\ (1-a)x-1 & (2 \leqq x \leqq 3). \end{cases}$

(i) $a<0$ のとき，$f(x)-ax$ は増加．最大値は $f(3)-3a=2-3a$，最小値は $f(1)-a=1-a$．よって，

$$V(a)=(2-3a)-(1-a)=1-2a.$$

(ii) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき，$f(x)-ax$ は $1 \leqq x \leqq 2$ で減少，$2 \leqq x \leqq 3$ で増加．

$f(x)-ax$ の最小値は $f(2)-2a=1-2a$.

$$\{f(3)-3a\}-\{f(1)-a\}=(2-3a)-(1-a)=1-2a.$$

(ii-a) $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき，$f(x)-ax$ の最大値は $f(3)-3a=2-3a$.

$$V(a)=(2-3a)-(1-2a)=1-a.$$

(ii-b) $\frac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき，$f(x)-ax$ の最大値は $f(1)-a=1-a$.

$$V(a)=(1-a)-(1-2a)=a.$$

(iii) $a>1$ のとき，$f(x)-ax$ は減少．最大値は $f(1)-a=1-a$．最小値は $f(3)-3a=2-3a$，よって，

$$V(a)=(1-a)-(2-3a)=-1+2a.$$

よって，

$$V(a)=\begin{cases} 1-2a & (a<0), \\ 1-a & \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}\right), \\ a & \left(\frac{1}{2}<a \leqq 1\right), \\ -1+2a & (a>1). \end{cases}$$

よって，$V(a)$ は $a<\frac{1}{2}$ のとき減少し，$a>\frac{1}{2}$ のとき増加する．

よって，$V(a)$ の最小値は

$$V\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}. \quad \cdots(答)$$

(2) 最小値を与えるのは $a=\frac{1}{2}$. …(答)

1973 年　2 次試験（理科）

第 1 問

S を中心 O，半径 a の球面とし，N を S 上の 1 点とする。点 O において線分 ON と $\frac{\pi}{3}$ の角度で交わる 1 つの平面の上で，点 P が点 O を中心とする等速円運動をしている。その角速度は毎秒 $\frac{\pi}{12}$ であり，また $\overline{\mathrm{OP}}=4a$ である。点 N から点 P を観測するとき，P は見えはじめてから何秒間見えつづけるか。またPが見えはじめた時点から見えなくなる時点までの，$\overline{\mathrm{NP}}$ の最大値および最小値を求めよ。ただし球面 S は不透明であるものとする。

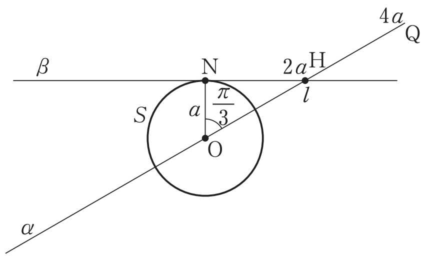
分　野

数学 I：空間図形

考え方

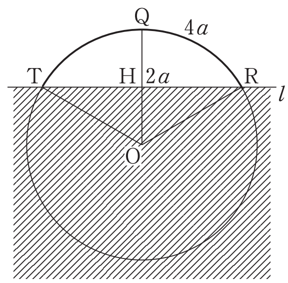
O，N を含み，P が運動する平面に垂直な平面上で考え，次に P が運動する平面上で考える．

【解答】



P が運動する平面を α とする，ON を含み，α に垂直な断面をとる．また，N における接平面を β とする．ON と α のなす角が $\frac{\pi}{3}$ で S の半径 ON$=a$ だから，円の中心 O と α，β の交線 l の距離は $2a$ である．

次に α 上で考える．P は O を中心とする半径 $4a$ の α 上の円周上を動く．N が見える範囲は N を通り，ON に垂直な平面 β について，O と反対側の範囲である．



α 上では α，β の交線 l について，O と反対側の範囲である．O と l の距離は $2a$ で P の軌跡の円の半径は $4a$ である．

O から l へ下した垂線の足を H とし，N から P が見えはじめるときの P の位置を R，見えなくなるときの P の位置を T とすると，OH$=2a$，OR$=4a$，OT$=4a$ だから $\angle$ROH$=\angle$TOH$=\frac{\pi}{3}$ で，$\angle$ROT$=\frac{2}{3}\pi$.

P の運動は角速度毎秒 $\frac{\pi}{12}$ だから，$\frac{2}{3}\pi$ の範囲を通過する時間は

$\frac{2}{3}\pi\div\frac{\pi}{12}=8$ 秒である．　…(答)

$\overline{\mathrm{NP}}$ の距離の大小は N から α へ下した垂線の足と P の距離の大小と一致する．

P が N から最も遠くなるのは P が R または T にあるときである．NR は平面 β 上にあり，NH$=\sqrt{3}\,a$，HR$=2\sqrt{3}\,a$，$\angle$NHR$=\frac{\pi}{2}$．よって，

$$\mathrm{NR}^2=\mathrm{NH}^2+\mathrm{HR}^2=3a^2+12a^2=15a^2.$$

よって，$\overline{\mathrm{NP}}$ の最大値は $\sqrt{15}\,a$.　…(答)

P が N から最も近くなるのは P が $\overset{\frown}{\mathrm{RT}}$ の中点 Q にあるときである．N は平面 β 上にあり，Q は平面 α 上にあり，

NH$=\sqrt{3}\,a$，HQ$=2a$，$\angle$NHQ$=\frac{5}{6}\pi$.

$$\mathrm{NQ}^2=\mathrm{NH}^2+\mathrm{HQ}^2-2\mathrm{NH}\cdot\mathrm{HQ}\cos\frac{5}{6}\pi=3a^2+4a^2+6a^2=13a^2.$$

よって，$\overline{\mathrm{NP}}$ の最小値は $\sqrt{13}\,a$.　　…(答)

第 2 問

x_1，x_2，…，x_n はおのおの 0，1，2 のどれかの値をとる。

$$f_1=\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad f_2=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}$$

のとき

$$f_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,k}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を f_1 と f_2 とを用いて表わせ。

分　野

数学ⅡB：数列

考え方

x_1，x_2，x_3，…，x_n のうち 1 であるもの，2 であるものの個数をそれぞれ p，q とすると，p，q は f_1，f_2 で表すことができる．

【解答】

x_1，x_2，x_3，…，x_n のうち 1 であるものが p 個，2 であるものが q 個あるとする．

このとき，

$$f_1=p+2q,\quad f_2=p+4q$$

である．したがって，

$$p=2f_1-f_2,\quad q=\frac{f_2-f_1}{2}.$$

よって，

$$f_k=p+2^kq=(2f_1-f_2)+(f_2-f_1)2^{k-1}=-(2^{k-1}-2)f_1+(2^{k-1}-1)f_2.$$　　…(答)

第 3 問

（文科　第 4 問と同じ）

第4問

平面上に1辺の長さが1の正方形Sがある。この平面上でSを平行移動して得られる正方形で，点Pを中心にもつものを $T(\mathrm{P})$ とする。このとき，共通部分 $S\cap T(\mathrm{P})$ の面積が $\frac{1}{2}$ 以上となるような点Pの存在範囲を図示せよ。また，この範囲の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：平面図形，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

正方形Sの中心を原点とする座標をとって考える．対称性から第一象限に $T(\mathrm{P})$ の中心Pがあるときを考えればよい．

【解答】

正方形Sの中心を原点，座標軸は正方形の辺に平行にとると，Sの範囲は $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}$ である．

Pの座標を$(p,\ q)$とすると，$T(\mathrm{P})$ の範囲は $p-\frac{1}{2}\leqq x\leqq p+\frac{1}{2}$，$q-\frac{1}{2}\leqq y\leqq q+\frac{1}{2}$ である．

対称性からPが第一象限かその境界にある場合を調べる．

$p\geqq0$，$q\geqq0$ のとき $S\cap T(\mathrm{P})$ の範囲は $p-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$，$q-\frac{1}{2}\leqq y\leqq\frac{1}{2}$ である．

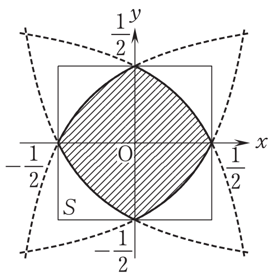
したがってその面積は $(1-p)(1-q)$ であるからこれが $\frac{1}{2}$ 以上となるとき，

$$(1-p)(1-q)\geqq\frac{1}{2},\quad p\geqq0,\quad q\geqq0.$$

第一象限以外の場合も含めると点$\mathrm{P}(p,\ q)$の存在範囲は

$$(1-x)(1-y)\geqq\frac{1}{2},\quad (1+x)(1-y)\geqq\frac{1}{2},$$

$$(1+x)(1+y)\geqq\frac{1}{2},\quad (1-x)(1+y)\geqq\frac{1}{2}.$$



図示すると右図斜線部．境界を含む．

第一象限部分の面積は

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2(x-1)}\right)dx=\left[x+\frac{1}{2}\log(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log2.$$

よって，求める面積は

$$4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log2\right)=2-2\log2.$$ …(答)

第 5 問

t は 1 より大きい実数とする。xy 平面上において，不等式

(イ)　$0<x$

(ロ)　$\dfrac{t}{(1+t^2)x} \leqq y \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$

を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体のつくる図形の面積を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。$f(t)$ の導関数 $f'(t)$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，微分法

考え方

まず，$\dfrac{t}{(1+t^2)x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ となる x の範囲を求める．

一般に $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とおくと，$F'(x)=f(x)$ であるから，$\displaystyle\int_{\frac{1}{t}}^{t} f(x)\,dx = F(t)-F\left(\frac{1}{t}\right)$.

よって，$\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{\frac{1}{t}}^{t} f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\left\{F(t)-F\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = F'(t)-\left(\frac{1}{t}\right)'F'\left(\frac{1}{t}\right)$.

この関係を使うか，$f(t)$ を求めてそれを微分する．

【解答】

$$\frac{1}{1+x^2}-\frac{t}{(1+t^2)x}=\frac{(1+t^2)x-t(1+x^2)}{(1+t^2)x(1+x^2)}=\frac{(x-t)(1-tx)}{(1+t^2)x(1+x^2)}.$$

$t>1$ だから，$\dfrac{t}{(1+t^2)x} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ となるのは $\dfrac{1}{t} \leqq x \leqq t$.

よって，求める面積は

$$f(t)=\int_{\frac{1}{t}}^{t}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{t}{(1+t^2)x}\right)dx=\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{1+x^2}\,dx-\frac{t}{1+t^2}\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{x}\,dx.$$

$$\begin{aligned}
f'(t)&=\frac{1}{1+t^2}-\left(\frac{1}{t}\right)'\frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}-\left\{\frac{t}{(1+t^2)}\right\}'\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{x}\,dx-\frac{t}{1+t^2}\left\{\frac{1}{t}-\left(\frac{1}{t}\right)'\frac{1}{\frac{1}{t}}\right\}\\
&=\frac{1}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}2\log t-\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+t^2}\\
&=\frac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}\log t. \qquad \cdots(答)
\end{aligned}$$

【別計算】

$\displaystyle f(t)=\int_{\frac{1}{t}}^{t}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{t}{(1+t^2)x}\right)dx$ を計算する．

$t=\tan\theta$，$x=\tan u$ とおくと，$t>1$ から $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\theta}du=2\theta-\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{\frac{1}{t}}^{t}\frac{1}{x}\,dx=\log t-\log\frac{1}{t}=2\log t.$$

$$\therefore\quad f(t)=2\theta-\frac{\pi}{2}-\frac{2t}{1+t^2}\log t.$$

$t=\tan\theta$ から $\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+t^2$.

よって，$\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{1+t^2}$.

$$f'(t)=2\frac{d\theta}{dt}-\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\log t-\frac{2}{1+t^2}=\frac{2(t^2-1)}{(1+t^2)^2}\log t. \qquad \cdots(\text{答})$$

第6問

x のある2次関数のグラフが，原点において直線 $y=x$ に接するという。このグラフ上の点 $(u,\ v)$ における接線の傾きを u，v で表わせ。ただし $(u,\ v)$ は原点ではないとする。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

考え方

与えられた関数を $y=f(x)$ とすると，原点を通り，接線の傾きが1であることから $f(x)$ は1文字で表される．その文字も u，v で表される．

【解答】

与えられた関数を $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，$f(0)=0$ から $c=0$，$f'(x)=2ax+b$，$f'(0)=1$ から $b=1$．よって，$f(x)=ax^2+x$.

$(u,\ v)$ は $y=f(x)$ 上にあるから，$f(u)=au^2+u=v$.

$u\neq 0$ から $a=\dfrac{v-u}{u^2}$.

接線の傾きは

$$f'(u)=2au+1=2\frac{v-u}{u^2}u+1=2\frac{v}{u}-1. \qquad \cdots(\text{答})$$

1974 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

三角形 ABC において，BC＝2，CA＝3，AB＝4 ならば，

$$\cos A=\boxed{\ a\ }\cos B=\boxed{\ b\ }\cos C$$
$$\tan A=\boxed{\ c\ }\tan B=\boxed{\ d\ }\tan C$$

分　野

数学ⅡB：三角比

【解答】

$BC=a=2$，$CA=b=3$，$AB=c=4$ とおくと，余弦定理より，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{7}{8}.$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{4^2+2^2-3^2}{2\cdot4\cdot2}=\frac{11}{16}.$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot2\cdot3}=-\frac{1}{4}.$$
$$\therefore\quad \cos A=\boxed{\frac{14}{11}}\cos B=\boxed{-\frac{7}{2}}\cos C. \qquad \cdots\text{a, b}$$

また，正弦定理より，

$$\frac{\sin A}{2}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{4}.\quad\therefore\quad \sin A=\frac{2}{3}\sin B=\frac{1}{2}\sin C.$$
$$\therefore\quad \tan A=\boxed{\frac{11}{21}}\tan B=\boxed{-\frac{1}{7}}\tan C. \qquad \cdots\text{c, d}$$

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

直線 $y=-2x+4$ 上の点 P と放物線 $y=1-x^2$ 上の点 Q との距離が最小になるように P，Q をえらべば，P の座標は（$\boxed{\ e\ }$，$\boxed{\ f\ }$）であり，Q の座標は（$\boxed{\ g\ }$，$\boxed{\ h\ }$）である。

分　野

数学Ⅰ：点と直線の距離

【解答】

直線 $l：y=-2x+4$ と放物線 $C：y=1-x^2$ は交わらないから，l 上の点 P と C 上の点 Q の距離が最小になるとき，線分 PQ は l に垂直で，点 Q における C の接線にも垂直でなければならない．したがって，点 Q における C の接線は l に平行である．

$(1-x^2)'=-2x$．$y=1-x^2$ 上で接線の傾きが -2 である点は $(1,\ 0)$．

この点における法線は $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$．

$y=-2x+4$ との交点は，$-2x+4=\dfrac{1}{2}(x-1)$ から，$\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$．

よって，

$$\mathrm{P}\left(\boxed{\frac{9}{5}},\ \boxed{\frac{2}{5}}\right),\quad \mathrm{Q}(\boxed{1},\ \boxed{0}).$$ …e，f，g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

空間の二つのベクトル $\boldsymbol{a}=(1,\ -1,\ 0)$ と $\boldsymbol{b}=(1,\ 1,\ 4)$ とに直交し，長さが1で，その x 成分が正となるベクトル $\boldsymbol{c}$ は，

$$\boldsymbol{c}=(\boxed{\mathrm{i}},\ \boxed{\mathrm{j}},\ \boxed{\mathrm{k}})$$

である。また，ベクトル $\boldsymbol{d}=(4,\ 2,\ 3)$ が

$$\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$$

と表わされるとすると，$\gamma=\boxed{\mathrm{l}}$ である。

分　野

数学ⅡB：ベクトル，内積

【解答】

$\boldsymbol{c}=(x,\ y,\ z)$ とおくと，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x-y=0,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=x+y+4z=0.$$
$$\therefore\quad x=y=-2z.$$

$x>0$，$x^2+y^2+z^2=9z^2=1$ より，$x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=-\dfrac{1}{3}$.

$$\boldsymbol{c}=\left(\boxed{\frac{2}{3}},\ \boxed{\frac{2}{3}},\ \boxed{-\frac{1}{3}}\right).$$ …i，j，k

また，

$$\boldsymbol{d}=(4,\ 2,\ 3)=\left(\alpha+\beta+\frac{2}{3}\gamma,\ -\alpha+\beta+\frac{2}{3}\gamma,\ 4\beta-\frac{1}{3}\gamma\right)$$

から，

$$\alpha=1,\quad \beta=1,\quad \gamma=\boxed{3}.$$ …l

（注）　この問題ではベクトルが $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ のように太字で表現されています．当時の教科書でもベクトルは現在と同様に $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ が使われていたので，受験生は戸惑ったかもしれません．

Ⅳ

次の$\boxed{}$にあてはまる数は何か。ただし，$\boxed{\text{m}}$，$\boxed{\text{n}}$については，問題の最後に書いてある六つの命題の中から，あてはまるものの番号を選べ。

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$ のとき，連立方程式

$$ax+by=2,$$
$$cx-dy=1$$

の解を$(x,\ y)$とする。

b，c，dを固定し，aを増加させれば$\boxed{\text{m}}$。また，a，b，dを固定し，cを増加させれば$\boxed{\text{n}}$。

さらに，hを0と1との間の数として，a，b，c，dが

$$1-h<a<1+h,$$
$$1-h<b<1+h,$$
$$2-h<c<2+h,$$
$$1-h<d<1+h$$

の範囲にあるときの解xの存在範囲を $L<x<M$ とすると，hが0に近づくときの$\dfrac{M-1}{h}$の極限は$\boxed{\text{o}}$，$\dfrac{1-L}{h}$の極限は$\boxed{\text{p}}$である。

命題 1　x，yはともに増加する
　　 2　xは増加し，yは減少する
　　 3　xは減少し，yは増加する
　　 4　x，yはともに減少する
　　 5　xは増加するが，yは変化しない
　　 6　xは減少するが，yは変化しない

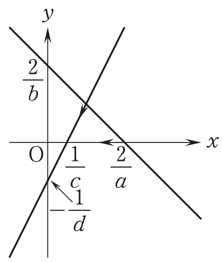
分 野

数学Ⅰ：連立方程式，**数学ⅡB**：関数の極限

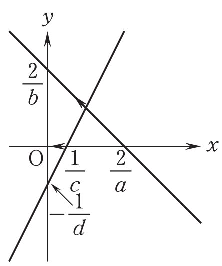
【解答】

直線 $l：ax+by=2$ はx切片$\dfrac{2}{a}$，y切片が正の直線.

直線 $m：cx-dy=1$ はx切片$\dfrac{1}{c}$が正で，y切片が負の直線.



b，c，dを固定し，aを増加させるとき，傾きが正の直線mが固定され，lはy切片が固定のままx切片が減少する．したがって，交点はmにそって左下に移動する．つまり，$\boxed{x，y\text{はともに減少する}}$．　…m=4



a，b，dを固定し，cを増加させるとき，傾きが負の直線lが固定され，mはy切片が固定のままx切片が減少する．したがって，交点はlにそって左上に移動する．つまり，$\boxed{x\text{は減少し，}y\text{は増加する}}$．　…n=3

同様に考えると，交点のx座標はa，b，cが小さく，dが大きいほど大きく，a，b，cが大きく，dが小さいほど小さい.

与連立方程式の解のうちxは，$x=\dfrac{2d+b}{ad+bc}$.

$1-h<a<1+h$，$1-h<b<1+h$，$2-h<c<2+h$，$1-h<d<1+h$ だから$x\to M$になるのは

$$a\to1-h,\quad b\to1-h,\quad c\to2-h,\quad d\to1+h$$

のときで，$x \to L$ になるのは

$$a \to 1+h, \quad b \to 1+h, \quad c \to 2+h, \quad d \to 1-h$$

のとき．

$a=1+k$，$b=1+k$，$c=2+k$，$d=1-k$ とおくと，

$$x=\frac{2(1-k)+1+k}{(1+k)(1-k)+(1+k)(2+k)}=\frac{3-k}{3+3k}.$$

$$x-1=\frac{-4k}{3+3k}.$$

$k \to -h$ のとき，$x \to M$，$k \to h$ のとき，$x \to L$ だから，

$$M-1=\frac{4h}{3-3h}. \quad \frac{M-1}{h}=\frac{4}{3-3h}.$$

$$1-L=\frac{4h}{3+3h}. \quad \frac{1-L}{h}=\frac{4}{3+3h}.$$

$$\therefore \quad \lim_{h \to +0}\frac{M-1}{h}=\boxed{\frac{4}{3}}, \quad \lim_{h \to +0}\frac{1-L}{h}=\boxed{\frac{4}{3}}.$$ …o，p

（注） 前半については

$$x=\frac{2d+b}{ad+bc}, \quad y=\frac{cx-1}{d}=\frac{-ax+2}{b}$$

から直接読み取れる．

1974 年　1 次試験（理科）

Ⅰ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

三点 A(1, 1)，B(5, 3)，C(4, 5) を頂点とする三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{a}}$ であり，直線 $x=1+\sqrt{\boxed{\text{b}}}$ はこの面積を二等分する。また，三角形 ABC の重心の座標は ($\boxed{\text{c}}$, $\boxed{\text{d}}$) である。

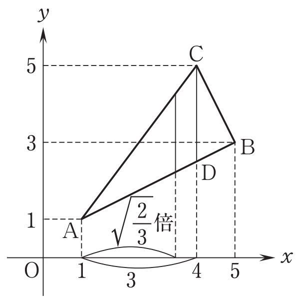
分　野

数学Ⅰ：平面座標

【解答】

$\overrightarrow{AB}=(4,\ 2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,\ 4)$．よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}|3\times2-4\times4|=\boxed{\ 5\ }. \qquad \cdots a$$



$x=4$ と AB：$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ の交点 D は $\left(4,\ \frac{5}{2}\right)$.

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\frac{5}{2}\cdot3=\frac{15}{4}$.

したがって，$\triangle ABC$ の $\frac{3}{4}$ 倍，二等分された三角形の面積はその $\frac{2}{3}$ 倍．したがって，三角形 ABC の面積を二等分する y 軸に平行な直線の方程式は $x=1+3\times\sqrt{\frac{2}{3}}=1+\sqrt{\boxed{\ 6\ }}$.　　$\cdots$b

三角形 ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{1+5+4}{3},\ \frac{1+3+5}{3}\right)=\left(\boxed{\frac{10}{3}},\ \boxed{\ 3\ }\right). \qquad \cdots c,\ d$$

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

三つの方程式

(1)　$x^3+x+5p=0$,

(2)　$x^3+x^2+qx-3p^2=0$,

(3)　$x^2-2x+q=0$

において，p，q は実数で，$p>0$ とする。

もし (1)，(2)，(3) のすべてに共通な根が存在するならば，

$$p=\boxed{\text{e}},\quad q=\boxed{\text{f}}$$

であり，その根以外の (1) の根は $\boxed{\text{g}}\pm\boxed{\text{h}}\,i$ である。

分　野

数学Ⅰ：共通解

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

(2)−(3)x から，$3x^2-3p^2=0$．∴　$x=\pm p$．

$x=p$ のとき，(1) より，$p^3+6p=0$．p は実数で $p>0$ だからこれをみたすことはない．

$x=-p$ のとき，(1) より，$-p^3+4p=0$．p は実数で $p>0$ だから，$p=2$．

よって，$x=-2$．(3) より，$4+4+q=0$．

$$p=\boxed{\ 2\ },\quad q=\boxed{\ -8\ }.$$ …e，f

このとき，(1) は

$$x^3+x+10=(x+2)(x^2-2x+5)=0$$

となり，$x=-2$ 以外の解は

$$x=\boxed{\ 1\ }\pm\boxed{\ 2\ }i.$$ …g，h

(注)　このとき，

(1)　$x^3+x+10=(x+2)(x^2-2x+5)=0$,

(2)　$x^3+x^2-8x-12=(x+2)^2(x-3)=0$,

(3)　$x^2-2x-8=(x+2)(x-4)=0$.

Ⅲ

次の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数は何か。

自然数 $n=2, 3, 4, \cdots$ を与えたとき，$x(x+2)\left(x^2+x-\dfrac{1}{n}\right)\leqq 0$ をみたす実数 x 全体の集合を A_n，$x^4-x^2+\dfrac{1}{9n^2}\leqq 0$ をみたす実数 x 全体の集合を B_n とする。A_n は二個の，たがいに交わらない閉区間から成る。B_n は $\boxed{\ \mathrm{i}\ }$ 個の，$A_n\cup B_n$ は $\boxed{\ \mathrm{j}\ }$ 個の，$A_n\cap B_n$ は $\boxed{\ \mathrm{k}\ }$ 個の，たがいに交わらない閉区間から成る。また，A_n を構成する二つの閉区間の長さの和は，$n\to\infty$ のとき，$\boxed{\ \mathrm{l}\ }$ に収束する。

分　野

数学Ⅰ：不等式，**数学ⅡB**：数列の極限

【解答】

$f_n(x)=x^2+x-\dfrac{1}{n}$ とおくと，$f_n(0)=f_n(-1)=-\dfrac{1}{n}<0$，$f_n(-2)=f_n(1)=2-\dfrac{1}{n}>0$ より，$f_n(x)=0$ は 2 個の実数解をもつ．それらを α，β ($\alpha<\beta$) とすると，

$$-2<\alpha<-1,\quad 0<\beta<1.$$

$g_n(x)=x^4-x^2+\dfrac{1}{9n^2}$ とおくと，$g_n(0)=g_n(\pm1)=\dfrac{1}{9n^2}>0$．$g_n(x)=0$ を x^2 の方程式とみたときの判別式 D は $n\geqq 2$ のとき，$1-\dfrac{4}{9n^2}>0$．また，x^2 の関数としてみたとき，$y=g_n(x)$ の軸：$x^2=\dfrac{1}{2}$ は正の範囲にあるから，x^2 の方程式 $g_n(x)=0$ は異なる 2 個の正の解をもつ．したがって，$g_n(x)=0$ は 4 つの異なる実数解 $\pm\gamma$，$\pm\delta$ ($0<\gamma<\delta$) をもつ．

また，$0<\gamma^2<\dfrac{1}{2}$ に注意すると，$\dfrac{1}{2}<\delta^2<1$．

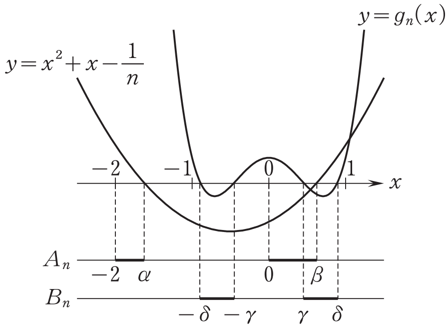
このとき，B_n は $[-\delta, -\gamma]$，$[\gamma, \delta]$ の $\boxed{\ 2\ }$ 個の，たがいに交わらない閉区間から成る． …i

$$\left(x^2+x-\frac{1}{n}\right)\left(x^2-x+\frac{1}{n}\right)=x^4-x^2+\frac{2}{n}x-\frac{1}{n^2}$$

より，

$$g_n(x)=\left(x^2-x+\frac{1}{n}\right)f_n(x)-\frac{2}{n}x+\frac{10}{9n^2}.$$

$$g_n(\beta)=-\frac{2}{n}\beta+\frac{10}{9n^2}.$$



β は $f_n(x)=0$ の大きい方の解．$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{2}$.

$$g_n(\beta)=-\frac{-1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{n}+\frac{10}{9n^2}=-\frac{4}{n^2\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}+\frac{10}{9n^2}\leqq-\frac{4}{n^2(1+\sqrt{5})}+\frac{4}{3.6n^2}<0.$$

よって，

$$-2<\alpha<-1<-\delta<-\gamma<0<\gamma<\beta<\delta<1.$$

$A_n\cup B_n$ は $[-2,\alpha]$，$[-\delta,-\gamma]$，$[0,\delta]$ の $\boxed{3}$ 個の，たがいに交わらない閉区間から成り，$A_n\cap B_n$ は $[\gamma,\beta]$ の $\boxed{1}$ 個の，閉区間から成る． …j，k

A_n を構成する 2 つの閉区間の長さの和は $\{\alpha-(-2)\}+(\beta-0)=\beta+\alpha+2$.

解と係数の関係から，$\alpha+\beta=-1$.

よって，求める閉区間の長さの和は $-1+2=\boxed{1}$.（一定値，収束する） …l

（注） 問題文を読むと，n による場合分けはなさそうである．

$n=2$ とすると，$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$，$\gamma^2=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{6}=\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}\right)^2$，$\delta^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\right)^2$，

$\gamma=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}}$，$\delta=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}$.

これらから，

$$-2<\alpha<-\delta<-\gamma<0<\gamma<\beta<\delta$$

が常に成り立つであろうと考えることができる．

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

複素平面上で，複素数 α は二点 $1+i$ と $1-i$ とを結ぶ線分上を動き，複素数 β は原点を中心とする半径１の円周上を動くものとする。

(1) $\alpha+\beta$ が複素平面上を動く範囲の面積は $\boxed{\text{m}}+\boxed{\text{n}}\pi$ である。

(2) $\alpha\beta$ が複素平面上を動く範囲の面積は $\boxed{\text{o}}\pi$ である。

(3) α^2 が複素平面上で描く曲線と虚数軸とで囲まれた範囲の面積は $\boxed{\text{p}}$ である。

分 野

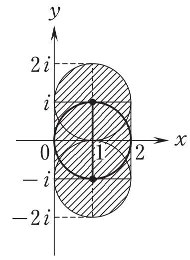
数学ⅡB：複素数平面，整式の積分

【解答】

(1) α を固定したとき，β は単位円を描くから，$\alpha+\beta$ は α を中心とする半径１の円を描く．

α は長さ２の線分を動く．

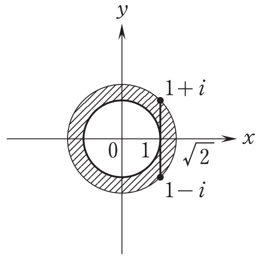
長さ２は半径の２倍なので，$\alpha+\beta$ の動く範囲は１辺の長さ２の正方形と半径１の２つの半円からなる．その面積は $\boxed{4}+\boxed{1}\pi$ である．　…m，n



(2) α を固定して，β を動かすと，$\alpha\beta$ は α を原点の回りに１回転する．

$1\leqq|\alpha|\leqq\sqrt{2}$ だから，$\alpha\beta$ が動く範囲は半径 $\sqrt{2}$ の円と半径１円の間の部分．

その面積は $2\pi-\pi=\boxed{1}\pi$ である．　…o



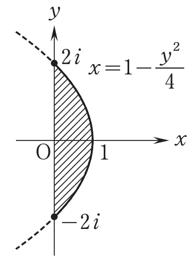
(3) $\alpha=1+ti\ (-1\leqq t\leqq 1)$．$\alpha^2=1-t^2+2ti$．$x=1-t^2$，$y=2t$ とおくと，

$x=1-\dfrac{y^2}{4}\ (-2\leqq y\leqq 2)$．

したがって，求める範囲の面積は

$$\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)dy=\boxed{\frac{8}{3}}.$$

…p



1974 年　2 次試験（文科）

第 1 問

自然数 n，p に対し，n^p を十進法で書いたときの 1 の位の数を $f_p(n)$ で表わす。ただし，自然数とは，1，2，3，… のことである。

(1)　n が自然数の全体を動くとき，$f_2(n)$ の取る値を全部求めよ。

(2)　あらゆる自然数 n に対して，$f_5(n)=f_1(n)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　n が自然数の全体を動くとき，$f_{100}(n)$ の取る値を全部求めよ。

分　野

数学 I ：整数

考え方

2 つの自然数 a，b について ab の 1 の位の数は，a，b の 1 の位の数の積の 1 の位の数である.

【解答】

(1)　n_1 と n_2 の 1 の位の数が同じなら $f_p(n_1)=f_p(n_2)$ であるから，$n=0, 1, 2, \cdots, 9$ について調べればよい.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_2(n)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

よって，$f_2(n)$ の取る値は

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 6,\ 5. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5n(n^2-1)$.

n が自然数のとき，$n(n+1)$ は連続する整数の積だから偶数である．また，$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ は 5 個の連続する整数の積だから 5 の倍数である.

したがって，n^5-n は 10 の倍数である．したがって，n^5 と n の 1 の位の数は等しい.

つまり $f_5(n)=f_1(n)$.　(証明終り)

(3)　(2) より，n^5 と n の 1 の位の数が等しいから，$n^{p+4}=n^5\cdot n^{p-1}$ と $n^p=n\cdot n^{p-1}$ $(p\geqq 1)$ の 1 の位の数は等しい．同様に，n^{4m+p} と n^p の 1 の位の数は等しい．つまり $f_{4m+p}(n)=f_p(n)$.

よって，$f_{100}(n)=f_4(n)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_4(n)$	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

よって，$f_{100}(n)$ の取る値は

$$0,\ 1,\ 6,\ 5. \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

長さ l の線分が，その両端を放物線 $y=x^2$ の上にのせて動く。この線分の中点 M が x 軸にもっとも近い場合の M の座標を求めよ。ただし，$l \geqq 1$ とする。

分　野

数学Ⅰ：解と係数の関係，相加平均・相乗平均の関係，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

2 点の x 座標を，α，β とおき，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ を l，M の x 座標で表し，それらで M の y 座標も表す.

【解答】

$y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ をとる．PQ の長さが l だから，

$$l^2=(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2. \qquad \cdots①$$

M の座標を $(X,\ Y)$ とすると，

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad Y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}. \qquad \cdots②$$

② の第 1 式から，$\alpha+\beta=2X$.

① から，

$$l^2=(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}=\{(2X)^2-4\alpha\beta\}\{1+(2X)^2\}.$$

$$\therefore \quad \alpha\beta=X^2-\frac{l^2}{4(1+4X^2)}.$$

② の第 2 式から，

$$Y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=2X^2-\left\{X^2-\frac{l^2}{4(1+4X^2)}\right\}=X^2+\frac{l^2}{4(1+4X^2)}.$$

$X^2=t$ とおくと，

$$Y=t+\frac{l^2}{4(1+4t)}. \quad \therefore \quad \frac{dY}{dt}=1-\frac{l^2}{(1+4t)^2}.$$

$\dfrac{dY}{dt}=0$ となるのは $t=\dfrac{l-1}{4}$ のとき.

$l \geqq 1$ より，$t \geqq 0$ で $\dfrac{dY}{dt}=0$ となることがある．このとき，Y は最小になり，M は x 軸に最も近くなる.

$$X=\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}, \quad Y=\frac{2l-1}{4}.$$

よって，求める座標は

$$\mathrm{M}\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2},\ \frac{2l-1}{4}\right). \qquad \cdots(答)$$

（注１）　$Y=\dfrac{4X^2+1}{4}+\dfrac{l^2}{4(1+4X^2)}-\dfrac{1}{4} \geqq 2\sqrt{\dfrac{4X^2+1}{4}\cdot\dfrac{l^2}{4(1+4X^2)}}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{2l-1}{4}$

（相加平均・相乗平均の関係）

等号は $4X^2+1=l$ すなわち，$X=\pm\dfrac{\sqrt{l-1}}{2}$ のときに成り立つ.

この当時でも分数関数の微分は文系の範囲外なので，文科はこちらが本解答かもしれない.

（注２）　$l<1$ のとき M が x 軸に最も近くなるのは $X=0$ のとき．もし l に制限がなかったら場合分けが必要になる問題である.

第3問

半径 a の球から，鉛直で球の中心を通る軸をもつ円柱状の部分をくり抜き，残った環状部分の高さが $2h$ になるようにする。この環状部分の体積を求めよ。ただし，$a>h$ とする。

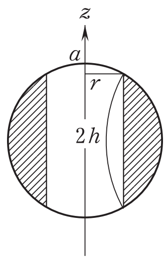
分 野

数学ⅡB：整式の積分，体積

考え方

円柱状の部分の半径を r とし，断面図を考えれば，$a^2=r^2+h^2$ であることがわかる．

【解答】



円柱状の部分の半径を r とし，球の中心を原点，円柱の軸を z 軸とすると，環状部分は xz 平面の円 $x^2+z^2=a^2$ と直線 $x=r$ とで囲まれた部分を z 軸のまわりに回転してできる立体である．$z=h$ のとき，$x=r$ だから $r^2+h^2=a^2$.

求める体積は

$$\pi\int_{-h}^{h}(a^2-z^2)\,dz-\pi r^2(2h)=2\pi\left(a^2h-\frac{h^3}{3}\right)-2\pi(a^2-h^2)h=\frac{4}{3}\pi h^3.\quad \cdots(\text{答})$$

（注） z 軸に垂直な断面は半径 $\sqrt{a^2-z^2}$ の円から半径 r の円をくり抜いた二重円だから，その面積は $\pi(a^2-z^2-r^2)=\pi(h^2-z^2)$.

よって，その体積は

$$\pi\int_{-h}^{h}(h^2-z^2)\,dz$$

となり，半径 h の球の体積と同じである．（断面積が等しい）

第４問

$\alpha>0$ とし，xy 平面上において，不等式

$$y \leqq \frac{-1}{\alpha^2}x^2+\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\frac{1}{\alpha}$$

をみたす点 $(x,\ y)$ 全体からなる集合を A とする。A と第一象限との共通部分を B とするとき，B の面積を α の関数として表わし，そのグラフを描け。

分　野

数学ⅡB：整式の積分

考え方

x 軸の交点を確認して積分する．

【解答】

放物線 $y=\dfrac{-1}{\alpha^2}x^2+\dfrac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\dfrac{1}{\alpha}$ を C とする．

$$\frac{-1}{\alpha^2}x^2+\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\frac{1}{\alpha}=\frac{-1}{\alpha^2}\{x^2-(2\alpha-1)x+\alpha^2-\alpha\}=\frac{-1}{\alpha^2}(x-\alpha)(x-\alpha+1)$$

から，C と x 軸の交点の x 座標は $\alpha-1$，α．

$\alpha>0$ だから，A と第一象限の共通部分は存在する．

(i)　$0<\alpha<1$ のとき，求める面積は

$$\int_0^{\alpha}\left(\frac{-1}{\alpha^2}x^2+\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\frac{1}{\alpha}\right)dx=\frac{-1}{\alpha^2}\,\frac{\alpha^3}{3}+\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}\,\frac{\alpha^2}{2}-\alpha+1=-\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{2}.$$

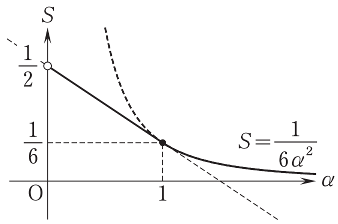
(ii)　$\alpha\geqq1$ のとき，求める面積は

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha}\left(\frac{-1}{\alpha^2}x^2+\frac{2\alpha-1}{\alpha^2}x-1+\frac{1}{\alpha}\right)dx=\frac{-1}{\alpha^2}\int_{\alpha-1}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\alpha+1)\,dx=\frac{1}{6\alpha^2}.$$

面積を S とすると，

$$S=\begin{cases}-\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{1}{2} & (0<\alpha<1),\\[2mm] \dfrac{1}{6\alpha^2} & (\alpha\geqq1).\end{cases}$$

図示すると下図太線部．



（注）　$\alpha\to+0$ のとき，積分区間が 0 になるのに，面積が有限であるところが面白い．

1974 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

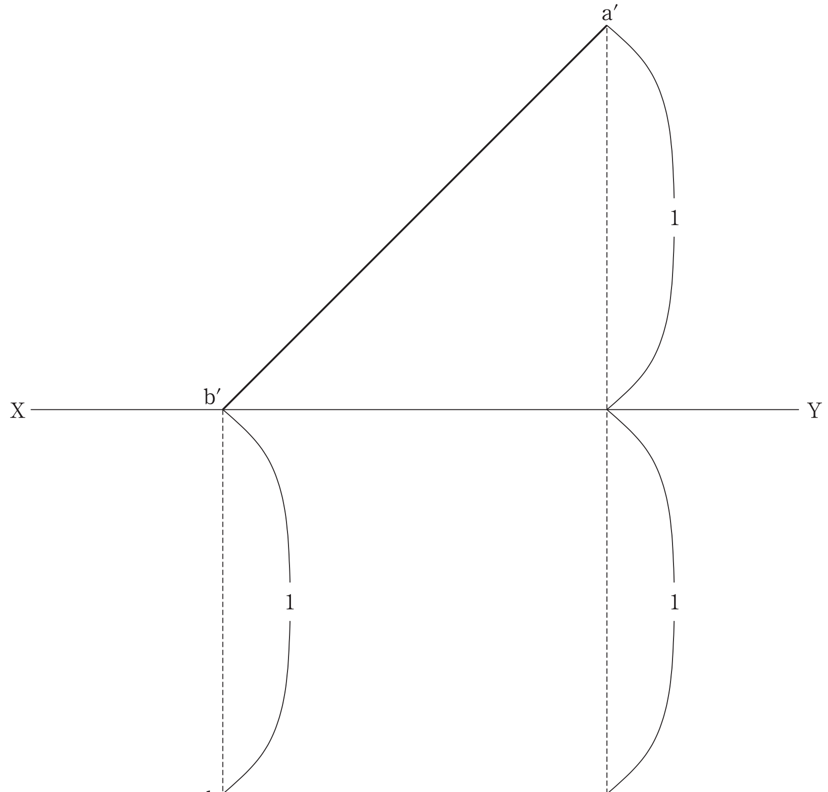
第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

下の図は線分 AB の投影図で，その各部の寸法は図に記入してある通りである。

この線分の上端 A を通り，AB となす角が 60°，平面面に対する傾きが 30° であるような直線の，平画面上の跡を C とする。点 B の平面図 b を原点とし，ba を x 軸，bb′ を y 軸として，点 C の座標を求めよ。



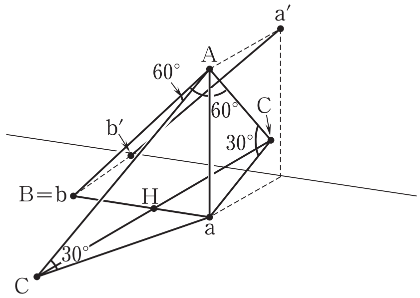
分　野

数学 I：投影図

考え方

直線の平画面上の跡とは平画面と直線の交点である．XY より上側が立面図，下側が平面図である．投影図について詳しくは（注）をみよ．

【解答】



$\mathrm{Aa}=1$，$\angle\mathrm{aCA}=30^\circ$ で $\angle\mathrm{AaC}=90^\circ$ だから，$\mathrm{aC}=\sqrt{3}$．$\mathrm{AC}=2$．

三角形 ABC において，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{AC}=2$ だから，

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A=6-2\sqrt{2}.$$

平画面上の三角形 aBC において，$\mathrm{aB}=1$，$\mathrm{aC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=\sqrt{6-2\sqrt{2}}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{aBC}=\frac{\mathrm{aB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{aC}^2}{2\mathrm{aB}\cdot\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{1+6-2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{6-2\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{6-2\sqrt{2}}}.$$

C から aB へ下した垂線の足を H とすると，

$$\mathrm{BH}=\mathrm{BC}\cos\angle\mathrm{aBC}=2-\sqrt{2}.$$
$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{BH}^2=(6-2\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^2=2\sqrt{2}.$$

C は aB の両側にとれるから，C の座標は

$$(2-\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2\sqrt{2}})=(2-\sqrt{2},\ \pm\sqrt[4]{8}).\qquad\cdots(答)$$

【別解】　ベクトル

A，B の座標は $\mathrm{A}(1,0,1)$，$\mathrm{B}(0,0,0)$，C の座標を $(x,y,0)$ とおく．

AB と AC のなす角が 60°，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,0,-1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-1,-y,-1)$ だから，

$$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{2-x}{\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2+1}}.$$

$$\therefore\quad 4(2-x)^2=2\{(x-1)^2+y^2+1\}.\quad\therefore\quad x^2-6x+6=y^2.\quad(2>x)\qquad\cdots①$$

また，xy 平面と AC のなす角が 30° だから，z 軸とのなす角は 120°．$\vec{n}=(0,0,1)$ とおいて，

$$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\vec{n}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+1}}.$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+y^2+1=4.\qquad\cdots②$$

①，② より，

$$(x-1)^2+(x^2-6x+6)-3=0.\quad\therefore\quad x^2-4x+2=0.$$

$x<2$ より，

$$\therefore\quad x=2-\sqrt{2}.$$

① より，

$$y^2=(x^2-4x+2)-2x+4=4-2(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2}.$$

よって，

$$\mathrm{C}(x,y)=(2-\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2\sqrt{2}}).\qquad\cdots(答)$$

（注）　投影図最後の出題．

平面上の XY を折り目として，平面を谷状に折り，下側部分が水平，上側部分が垂直になるようにおく．その手前に対象物（本問では線分 AB）があると考える．対象物を立画面（垂直画面）に投影し

たものを立面図，平画面（水平画面）に投影したものを平面図，という．また，実際の点をA，Bで表し，それらを平画面に投影した点をa，bで表し，立画面に投影した点をa′，b′で表す．

一般に投影図の描き方は2通りあり，この問題のように平面を谷折りにしてその手前に対象物をおき，対象物の投影図を背後の画面に作図したように描く方式を一角法，逆に，平面を透明な用紙のように考えこれを山折りにしてその向こうに対象物をおき，対象物の投影図を手前の画面に作図したように描く方式を三角法という．

一角法と三角法では立面図と平面図を描く位置が逆になる．一角法では平面図が下に立面図が上に描かれる．また，右側面図は左に描かれる．これに対して，三角法では平面図が上に，立面図が下に描かれ，右側面図は右に描かれる．

第4問

二つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が次の性質1），2），3），4）を持つものとする。

1） $f(x)$，$g(x)$ は $x=0$ において微分可能。

2） $f(0)=g(0)=0$。

3） 原点において，$y=f(x)$ および $y=g(x)$ のグラフに引いた接線はたがいに直交する。

4） 実数 a，b，c を適当にとると，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bf(x)}{cx+f(x)},\quad g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ax+bg(x)}{cx+g(x)}$$

が成り立つ。

このとき，a の値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=g'(0)$ である．

【解答】

3）より，$f'(0)g'(0)=-1$.

もし，$a=bc$ なら，$\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{bcx+bf(x)}{cx+f(x)}=b$，同様に $g'(0)=b$ となり，$f'(0)g'(0)=b^2=-1$ となり，b が実数であることに反する．よって，$a\neq bc$.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$，同様に $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=g'(0)$.

よって，4）より，

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{a+b\dfrac{f(x)}{x}}{c+\dfrac{f(x)}{x}},\quad g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{a+b\dfrac{g(x)}{x}}{c+\dfrac{g(x)}{x}}.$$

もし，$f'(0)=-c$ または $g'(0)=-c$ とすると，$a\neq bc$ から，この極限は収束せず，$f'(0)$，$g'(0)$ が存在することに矛盾．よって，$f'(0)+c\neq 0$，$g'(0)+c\neq 0$.

$$\therefore\quad f'(0)=\frac{a+bf'(0)}{c+f'(0)},\quad g'(0)=\frac{a+bg'(0)}{c+g'(0)}.$$

$$\{f'(0)\}^2+cf'(0)=bf'(0)+a,\quad \{f'(0)\}^2-(b-c)f'(0)-a=0.$$

同様に，

$$\{g'(0)\}^2-(b-c)g'(0)-a=0.$$

よって，$f'(0)$，$g'(0)$ は共に方程式

$$t^2-(b-c)t-a=0 \qquad \cdots①$$

の2解．

もし，$f'(0)=g'(0)$ とすると，$f'(0)g'(0)=-1=\{f'(0)\}^2$ となり，接線の傾きが実数であることに矛盾する．

よって，$f'(0)$，$g'(0)$ は ① の2解．解と係数の関係から

$$a=-f'(0)g'(0)=1. \qquad \cdots(答)$$

第5問

原点Oに中心をもつ半径2の固定された円板を A とする。半径1の円板 B をその中心Cが点 $(3,\ 0)$ に重なるように置くとき，点 $(4,\ 0)$ に重なる B の周上の点をMとする。B を，A の周囲に沿って滑らないようにころがして，OCが x 軸の正方向となす角が θ になったときの，Mの位置の座標を $(X,\ Y)$ とする。

θ が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くとして，次の問に答えよ。

(1)　X と Y とを θ の関数として表わせ。

(2)　Y の最大値を求めよ。

(3)　Mの描く曲線の弧の長さを求めよ。

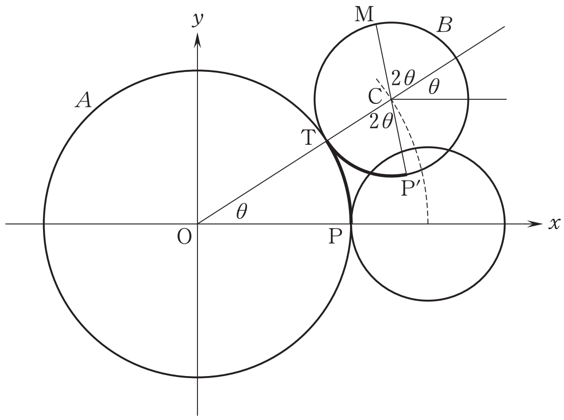
分　野

数学Ⅲ：微分法，曲線長

考え方

滑らないで転がるとき，最初の接点から現在の接点までの弧長は2つの円において等しい．

【解答】



(1)　最初の接点をP，$\angle\mathrm{POC}=\theta$ のときの接点をT，このとき，B の最初の接点Pの位置をP′とおく．

$\mathrm{OT}=2$，$\mathrm{CT}=1$，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TP'}}$ から，

$\mathrm{OT}\angle\mathrm{POT}=\mathrm{CT}\angle\mathrm{TCP'}$．よって，

$\angle\mathrm{TCP'}=2\theta$．$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ と x 軸のなす角は 3θ．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3(\cos\theta,\ \sin\theta)$，

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=(\cos3\theta,\ \sin3\theta)$．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CM}}\\&=(3\cos\theta+\cos3\theta,\ 3\sin\theta+\sin3\theta).\end{aligned}$$

よって，

$$X=3\cos\theta+\cos3\theta,\quad Y=3\sin\theta+\sin3\theta. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$\dfrac{dY}{d\theta}=3\cos\theta+3\cos3\theta.$

$\dfrac{dY}{d\theta}=0$ のとき，$\cos\theta=-\cos3\theta.$

$$\therefore\quad \theta=\pi-3\theta+2n\pi,\quad \theta=\pi+3\theta+2n\pi\quad (n\text{ は整数})$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2n+1}{4}\pi,\quad \theta=-\frac{2n+1}{2}\pi.$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dY}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
Y		↗		↘	

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき Y は最大となる．最大値は

$$Y=3\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3}{4}\pi=2\sqrt{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) $\dfrac{dX}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin3\theta.$

よって，曲線の弧の長さは

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dX}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dY}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\sin\theta-3\sin3\theta)^2+(3\cos\theta+3\cos3\theta)^2}\,d\theta$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos2\theta}\,d\theta$$

$$=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=6. \quad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

あるスポーツにおいて，A，B 二チームが試合をして，さきに三回勝った方を優勝とする。一回の試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q（$p+q=1$，$p>0$，$q>0$）とする。このとき，A が優勝する確率を P，B が優勝する確率を Q とし，また，優勝チームがきまるまでの試合数を N として，次の問に答えよ。

(1) $p>q$ のとき，$P-Q$ と $p-q$ とはどちらが大きいか。

(2) $P-p$ を最大にする p の値を求めよ。

(3) N の期待値を最大にする p の値およびそのときの N の期待値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：確率，期待値

考え方

計算が面倒だが丹念に計算すれば難しくない．

【解答】

(1) 3 回戦で A が優勝する確率は p^3，B が優勝する確率は q^3.

4 回戦で A が優勝する確率は ${}_3C_1p^3q=3p^3q$，B が優勝する確率は $3pq^3$.

5 回戦で A が優勝する確率は ${}_4C_2p^3q^2=6p^3q^2$，B が優勝する確率は $6p^2q^3$.

$$\therefore\quad P=p^3+3p^3q+6p^3q^2.\quad Q=q^3+3pq^3+6p^2q^3.$$

$$P-Q=p^3-q^3+3pq(p^2-q^2)+6p^2q^2(p-q)=(p-q)\{p^2+pq+q^2+3pq+6p^2q^2\}$$
$$=(p-q)(1+2pq+6p^2q^2).$$
$$\therefore\quad (P-Q)-(p-q)=(p-q)(2pq+6p^2q^2)=2pq(p-q)(1+3pq).$$

$0<q<p$ から，

$$P-Q>p-q. \qquad \cdots(答)$$

(2) $P+Q=p+q=1$ から，$P-Q=2P-1$，$p-q=2p-1$.

$$\therefore\quad P-Q-(p-q)=2(P-p)=2p(1-p)(2p-1)(1+3p-3p^2).$$
$$\therefore\quad P-p=p(1-p)(2p-1)(1+3p-3p^2).$$

これを $f(p)$ とおくと，

$$f'(p)=(1-p)(2p-1)(1+3p-3p^2)-p(2p-1)(1+3p-3p^2)$$
$$+2p(1-p)(1+3p-3p^2)-3p(1-p)(2p-1)^2$$
$$=30(p-p^2)^2-1.$$

$f'(p)=0$ となるのは，$p^2-p\pm\dfrac{1}{\sqrt{30}}=0$. つまり $p=\dfrac{1\pm\sqrt{1\pm\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}}{2}$（複号任意）のとき，

$0<p<1$ より，$p=\dfrac{1\pm\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}}{2}$. $\alpha=\dfrac{1-\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}}{2}$ とおく.

p	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	(1)
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$	(0)	↘		↗		↘	(0)

よって，

$$p=\beta=\frac{1+\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}}{2} \qquad \cdots(答)$$

のとき，$P-p$ は最大になる.

(2) の【別計算】

$$P-p=(p^2-p)(2p-1)\{3(p^2-p)-1\}=\frac{(2p-1)^2-1}{4}(2p-1)\left\{\frac{3}{4}(2p-1)^2-\frac{7}{4}\right\}.$$

$t=2p-1$ とおくと，

$$P-p=\frac{1}{16}(t^2-1)t(3t^2-7)=\frac{1}{16}(3t^5-10t^3+7t).$$

$f(t)=3t^5-10t^3+7t$ とおくと，$f'(t)=15t^4-30t^2+7$. $f'(t)=0$ のとき，$t^2=1\pm\dfrac{2\sqrt{30}}{15}$.

$0<p<1$ だから，$-1<t<1$. $f(t)$ は t の奇関数. $t_0=\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{30}}{15}}$ とおく.

t	(0)	$\cdots$	t_0	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，$P-p$ を最大にする p の値は

$$p=\frac{t_0+1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{2\sqrt{30}}{15}}\right). \qquad \cdots(答)$$

⑶　N の期待値を E とすると，

$$\begin{aligned}E&=3(p^3+q^3)+4\times3(p^3q+pq^3)+5\times6(p^3q^2+p^2q^3)\\&=3(p+q)(p^2-pq+q^2)+12pq(p^2+q^2)+30p^2q^2(p+q)\\&=3\{(p+q)^2-3pq\}+12pq\{(p+q)^2-2pq\}+30p^2q^2\\&=3(1-3pq)+12pq(1-2pq)+30p^2q^2\\&=3+3pq+6(pq)^2.\end{aligned}$$

E は pq の 2 次関数で，係数はすべて正で，$pq>0$ だから，pq の増加関数．

$$pq=p(1-p)=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

が最大のとき E は最大になる．

よって，E は $p=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値をとり，その最大値は …(答)

$$E=3+\frac{3}{4}+6\times\frac{1}{16}=\frac{33}{8}.$$ …(答)

(注)　⑴ は試合数が多い程両者の差が歴然とすることを表し，⑶ は両者の差が拮抗しているとき程試合数が多くなることを示している．

1975 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

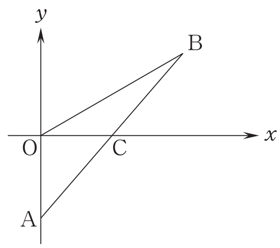
$\mathrm{O}x$，$\mathrm{O}y$ を直交座標軸とする平面上に長さ 2 の線分 AB があり，その中点を C とする。B は第一象限にあり，C，A はそれぞれ x 軸，y 軸の上にある。

このとき，$\overline{\mathrm{OB}}=\dfrac{3}{2}$ ならば B の座標は $\left(\sqrt{\boxed{\text{a}}},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\boxed{\text{b}}}\right)$ であり，OB と x 軸のなす角が 30° ならば B の座標は $\left(2\sqrt{\boxed{\text{c}}},\ \dfrac{2}{\sqrt{\boxed{\text{d}}}}\right)$ である。

分　野

数学 I：平面座標

【解答】



A(0, $-a$)，C(c, 0) とすると，B($2c$, a)．AB=2 から，

$$a^2+c^2=1. \quad \cdots ①$$

$\mathrm{OB}=\dfrac{3}{2}$ から，

$$4c^2+a^2=\frac{9}{4}.$$

これと，① から，$a^2=\dfrac{7}{12}$，$c^2=\dfrac{5}{12}$．B は第 1 象限にあるから，

$$\mathrm{B}\left(\sqrt{\boxed{\frac{5}{3}}},\ \frac{1}{2}\sqrt{\boxed{\frac{7}{3}}}\right). \quad \cdots \text{a, b}$$

また，OB と x 軸のなす角が 30° のとき，OB の傾きは $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2c}$．

よって，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$．① から，$a^2=\dfrac{4}{7}$．B は第 1 象限にあるから，$a=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$．

$$\mathrm{B}\left(2\sqrt{\boxed{\frac{3}{7}}},\ \frac{2}{\sqrt{\boxed{7}}}\right). \quad \cdots \text{c, d}$$

II

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

1 から 1000 までの整数のうちで，

(i) 9 と 15 のどちらの倍数でもあって 13 の倍数でないものは $\boxed{\text{e}}$ 個，

(ii) 11 と 13 のどちらの倍数でもあって 7 の倍数でないものは $\boxed{\text{f}}$ 個，

(iii) 13 の倍数であって 7，11 のどちらの倍数でもないものは $\boxed{\text{g}}$ 個，

(iv) 7，11，13 のどの倍数でもないものは $\boxed{\text{h}}$ 個ある。

分　野

数学 II B：個数，整数

【解答】

以下 1 から 1000 までの整数のうち，7，11，13，9，15 の倍数の集合を A，B，C，D，E とする．また，集合 X の要素の個数を $n(X)$ と表す．

2 整数 a，b の最小公倍数を $\mathrm{LCM}(a,\ b)$ とすると，1 から 1000 までの整数のうち，a，b のどちらの倍数でもあるものは $\left[\dfrac{1000}{\mathrm{LCM}(a,\ b)}\right]$ 個ある．ただし，$[x]$ は x を越えない最大の整数である．

(i) 1 から 1000 までの整数のうち，9 と 15 の倍数の個数は

$$n(D\cap E)=\left[\frac{1000}{\mathrm{LCM}(9,\ 15)}\right]=\left[\frac{1000}{45}\right]=22.$$

1 から 1000 までの整数のうち，9，15，13 の倍数の個数は

$$n(C\cap D\cap E)=\left[\frac{1000}{\mathrm{LCM}(13,\ 9,\ 15)}\right]=\left[\frac{1000}{585}\right]=1.$$

1 から 1000 までの整数のうち，9，15 の倍数で 13 の倍数でないものの個数は，

$$n(\overline{C}\cap D\cap E)=n(D\cap E)-n(C\cap D\cap E)=22-1=\boxed{21}\text{ 個}. \qquad \cdots\mathrm{e}$$

(ii) 1 から 1000 までの整数のうち，11 と 13 の倍数の個数は

$$n(B\cap C)=\left[\frac{1000}{\mathrm{LCM}(11,\ 13)}\right]=\left[\frac{1000}{143}\right]=6.$$

1 から 1000 までの整数のうち，11，13，7 の倍数の個数は

$$n(A\cap B\cap C)=\left[\frac{1000}{\mathrm{LCM}(7,\ 11,\ 13)}\right]=\left[\frac{1000}{1001}\right]=0.$$

1 から 1000 までの整数のうち，11，13 の倍数で 7 の倍数でないものの個数は，

$$n(\overline{A}\cap B\cap C)=n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)=6-0=\boxed{6}\text{ 個}. \qquad \cdots\mathrm{f}$$

(iii) 1 から 1000 までの整数のうち，13 の倍数であって 7，11 のどちらの倍数でもないものは $\overline{A}\cap\overline{B}\cap C$ の要素．

$$n(C)=\left[\frac{1000}{13}\right]=76,\quad n(A\cap C)=\left[\frac{1000}{7\times 13}\right]=10.$$

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)=n(C)-n(A\cap C)-n(\overline{A}\cap B\cap C)=76-10-6=\boxed{60}. \qquad \cdots\mathrm{g}$$

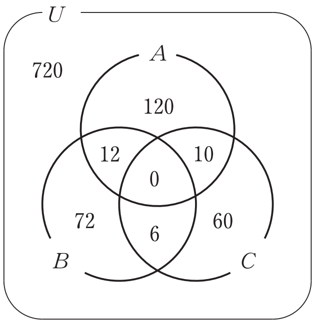
(iv) 7，11，13 のどの倍数でもないものの集合は $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{(A\cup B\cup C)}$．よって，全体集合を U とすると，

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=n(U)-n(A\cup B\cup C)=n(U)-n(A\cup B)-n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C).$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=\left[\frac{1000}{7}\right]+\left[\frac{1000}{11}\right]-\left[\frac{1000}{7\times 11}\right]=142+90-12=220.$$

$$n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=1000-220-60=\boxed{720}. \qquad \cdots\mathrm{h}$$

(注) A，B，C の要素の個数をベン図で表すと下図．



Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC と，$\angle D=90^\circ$，$\angle E=30^\circ$ の直角三角形 DEF があって，$\overline{BC}=\overline{DE}$ である。この 2 つの三角形を 1 つの平面上に置いて，B と D，C と E がそれぞれ重なり，A と F とが辺 BC に関して互いに反対側にあるようにする。

このとき辺 AB と線分 AF とのなす角を α，辺 BC と線分 AF とのなす角を β とすると

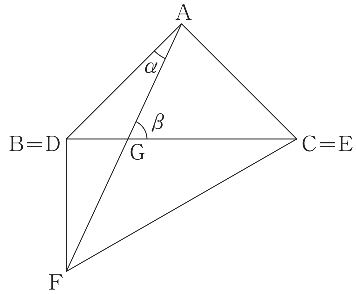
$$\sin\alpha=\sqrt{\boxed{\ \mathrm{i}\ }+\boxed{\ \mathrm{j}\ }\sqrt{3}},\quad \sin\beta=\sqrt{\boxed{\ \mathrm{k}\ }+\boxed{\ \mathrm{l}\ }\sqrt{3}}$$

である。

分野

数学ⅡB：三角比，三角関数，加法定理

【解答】



$BC=a$ とおくと，$AB=BC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，$BF=DF=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，

$CF=EF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}a$.

三角形 ABF について余弦定理から，

$$AF^2=AB^2+BF^2-2AB\cdot BF\cos(45^\circ+90^\circ)$$
$$=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{3}+2\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5+2\sqrt{3}}{6}a^2.$$

正弦定理から，

$$\frac{BF}{\sin\alpha}=\frac{AF}{\sin(45^\circ+90^\circ)}.$$

$$\sin\alpha=\frac{BF}{AF}\cos 45^\circ=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}}a}{\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}a}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}=\sqrt{\boxed{\frac{5}{13}}+\boxed{\frac{-2}{13}}\sqrt{3}}.\qquad \cdots\mathrm{i,\ j}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}.$$

BC と AF の交点を G とすると，三角形 ABG において外角と内対角の関係から，$\beta=\alpha+45^\circ$．よって，

$$\sin\beta=\sin(\alpha+45^\circ)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2(5+2\sqrt{3})}}=\sqrt{\boxed{\frac{11}{26}}+\boxed{\frac{3}{13}}\sqrt{3}}.\qquad \cdots\mathrm{k,\ l}$$

（注） 問題文からは β が $\alpha+45^\circ$ なのか $135^\circ-\alpha$ なのかわからない.
どちらであっても $\sin\beta$ の値は変らない.

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$f(x)=x^3-x^2-2x,\quad g(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt$$

とすれば，関数 $g(x)$ は $x=\boxed{\text{m}}$ において極大値 $\boxed{\text{n}}$ をとり，$x=\boxed{\text{o}}$ において極小値 $\boxed{\text{p}}$ をとる。

分 野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

【解答】

$$g(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(t^3-t^2-2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{x-1}^{x+1}$$

$$=\frac{4x^3+4x}{4}-\frac{1}{3}(3x^2+1)-2x=x^3-x^2-x-\frac{1}{3}.$$

$$g'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1).$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗		↘		↗

よって，関数 $g(x)$ は $x=\boxed{-\frac{1}{3}}$ において極大値 $g\left(-\frac{1}{3}\right)=\boxed{-\frac{4}{27}}$ をとり，$x=\boxed{1}$ において極小値 $\boxed{-\frac{4}{3}}$ をとる．　…m，n，o，p

（注）　微分と積分の関係から，

$$g'(x)=\frac{1}{2}\{f(x+1)-f(x-1)\}$$

である．

1975 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{\quad}$ にあてはまる数は何か。ただし $\boxed{\text{b}}$ の数は $\boxed{\text{c}}$ の数より小さいとする。

k が実数のとき，x に関する 2 次方程式

$$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$$

が 2 つの実根をもち，それらが開区間 $(0,\ 1)$ および開区間 $(1,\ 2)$ にそれぞれ 1 つずつあるための必要十分条件は

「$\boxed{\text{a}}<k<\boxed{\text{b}}$ または $\boxed{\text{c}}<k<\boxed{\text{d}}$」

である。

分　野

数学 I ：2 次方程式の理論

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の当時の表記である．

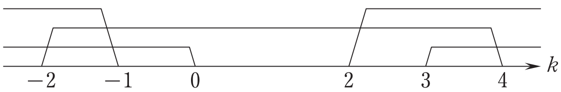
$f(x)=7x^2-(k+13)x+k^2-k-2$ とおく．

$f(x)=0$ が開区間 $(0,\ 1)$ および開区間 $(1,\ 2)$ に 1 個ずつ解がある条件は $f(0)>0$，$f(1)<0$，$f(2)>0$.

$$f(0)=k^2-k-2=(k+1)(k-2)>0.\quad \therefore\quad k<-1,\quad 2<k.$$

$$f(1)=7-(k+13)+k^2-k-2=k^2-2k-8=(k-4)(k+2)<0.\quad \therefore\quad -2<k<4.$$

$$f(2)=28-2(k+13)+k^2-k-2=k^2-3k=k(k-3)>0.\quad \therefore\quad k<0,\quad 3<k.$$



以上より，

$\boxed{-2}<k<\boxed{-1}$,　$\boxed{3}<k<\boxed{4}$.　　…a，b，c，d

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

n を正の整数，$\alpha_n=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とする。p，q が整数を表すとき，$p+q\alpha_n$ の形の複素数で表される点のうちで，原点を中心とする半径1の円周上にあるものの個数を A_n とすれば，$A_3=\boxed{\text{e}}$，$A_4=\boxed{\text{f}}$，$A_5=\boxed{\text{g}}$ である。また，$n=3$ のとき，それら A_3 個の点を頂点とする凸多角形の面積は $\sqrt{\boxed{\text{h}}}$ である。

分　野

数学ⅡB：複素数平面

【解答】

$p+q\alpha_n$ が原点を中心とする半径1の円周上にある条件は

$$|p+q\alpha_n|^2=p^2+pq(\alpha_n+\overline{\alpha_n})+q^2=p^2+q^2+2pq\cos\frac{2\pi}{n}=1. \qquad \cdots①$$

$p=0$ のとき，$q^2=1$，$q=0$ のとき，$p^2=1$.

よって，$(p,\ q)=(0,\ \pm1)$，$(\pm1,\ 0)$ の4点は n によらず円周上にある.

$pq\neq0$ のとき，① より，

$$\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{1-p^2-q^2}{2pq}.$$

よって，上の4点以外で整数の組 $(p,\ q)$ の点が円周上にあるためには $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ が有理数でなければならない.

$n=3$ のとき，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$ は有理数．$pq\neq0$ のとき，

$$\therefore\quad p^2+q^2-pq=1.\quad \left(p-\frac{q}{2}\right)^2+\frac{3}{4}q^2=1.$$

$$q^2\leqq\frac{4}{3}.$$

$pq\neq0$ より，

$$(p,\ q)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1).$$

$$\therefore\quad A_3=4+2=\boxed{6}. \qquad \cdots\text{e}$$

$n=4$ のとき，$\cos\dfrac{2\pi}{4}=0$．よって，$p^2+q^2=1$．$p\leqq1$ だが，$p=\pm1$ のとき，$q=0$ だから，$pq\neq0$ の解はない.

$$\therefore\quad A_4=\boxed{4}. \qquad \cdots\text{f}$$

$n=5$ のとき，$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ は無理数．よって，$pq\neq0$ のとき，① は成り立たない.

$$\therefore\quad A_5=\boxed{4}. \qquad \cdots\text{g}$$

$n=3$ のとき，$A_3=6$ 個の点は単位円に内接する正六角形をなす，その面積は

$$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{\boxed{\frac{27}{4}}}. \qquad \cdots\text{h}$$

（注）　$\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ で無理数.

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

2点P，Qが時刻 $t=0$ に平面上の座標原点を出発し，互いに直交する方向に等速直線運動をしている。点Pの速度ベクトルの x 成分は -4，y 成分は8であり，点Qの速度ベクトルの y 成分は3である。さらに，時刻 $t=2$ に点Rが同じく原点を出発して等速直線運動を始め，$t=3$ のときに線分PQの中点に達した。

このとき，点Rの速度ベクトルの x 成分は $\boxed{\ \text{i}\ }$，y 成分は $\boxed{\ \text{j}\ }$ である。これらの3点がさらに運動をつづけると，$t=\boxed{\ \text{k}\ }$ のときに∠PRQは直角になり，この時刻の2点P，Qの距離は $\boxed{\ \text{l}\ }\sqrt{5}$ となる。

分　野

数学ⅡB：ベクトル，内積，速度

【解答】

P，Qの速度ベクトルを $\vec{u}$，$\vec{v}$ とおき，$\vec{v}$ の x 成分を v とすると，

$$\vec{u}=(-4,\ 8),\quad \vec{v}=(v,\ 3).$$

P，Qの運動方向が直交するから $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4v+24=0$．$v=6$.

$t=3$ のとき，$P(-12,\ 24)$，$Q(18,\ 9)$．このときRはPQの中点 $\left(3,\ \dfrac{33}{2}\right)$ にある．

$t=2$ から $t=3$ の間に原点からこの点に移動するから，点Rの速度ベクトルの x 成分は $\boxed{3}$，y 成分は $\boxed{\dfrac{33}{2}}$． …i，j

時刻 t におけるP，Q，Rの座標は

$$P(-4t,\ 8t),\quad Q(6t,\ 3t),\quad R\left(3(t-2),\ \frac{33}{2}(t-2)\right).$$

$$\therefore\ \overrightarrow{RP}=\left(-4t-3(t-2),\ 8t-\frac{33}{2}(t-2)\right)=\left(-7t+6,\ -\frac{17}{2}t+33\right),$$

$$\overrightarrow{RQ}=\left(6t-3(t-2),\ 3t-\frac{33}{2}(t-2)\right)=\left(3t+6,\ -\frac{27}{2}t+33\right).$$

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(-7t+6)(3t+6)+\left(-\frac{17}{2}t+33\right)\left(-\frac{27}{2}t+33\right)$$

$$=\frac{375}{4}t^2-750t+1125=\frac{375}{4}(t^2-8t+12)=\frac{375}{4}(t-6)(t-2)=0.$$

$t>3$ だから，$t=\boxed{6}$． …k

このとき，$\overrightarrow{PQ}=6(\vec{v}-\vec{u})=6(6+4,\ 3-8)=30(2,\ -1)$.

よって，PQの距離は $\boxed{30}\sqrt{5}$． …l

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a を実数とする。x に関する 2 次方程式

$$(1+a)x^2+2x+1-a=0$$

において

(i) a がどのような値であっても，実数 $x=\boxed{\text{m}}$ は決して根とならない。

(ii) 2 根がともに整数となるような a の最大値は $\boxed{\text{n}}$，最小値は $\boxed{\text{o}}$ である。

(iii) 2 根がともに整数となるような a の値で $|a+1|\geqq\dfrac{1}{N}$ を満たすものの個数を $f(N)$ とするとき

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N)=\boxed{\text{p}}$$

である。

分 野

数学Ⅰ：2 次方程式，**数学Ⅲ**：関数の極限

【解答】

問題文の「根」は「解」の当時の表記である．

(i) $(1+a)x^2+2x+1-a=(x+1)\{x+1+a(x-1)\}=0.$

$x\neq1$ のとき，x は $a=-\dfrac{x+1}{x-1}$ のとき解となり，$x=1$ のとき，与式の左辺は 4 になり等式は成り立たない．したがって，$x=\boxed{1}$ は決して解にはならない． …m

(ii) 1 つの解は $x=-1$，もう 1 つの解が整数のとき，その解 x に対して，

$$a=-\frac{x+1}{x-1}=-1-\frac{2}{x-1}.$$

x が 1 でない整数であるから，$-2\leqq\dfrac{2}{x-1}\leqq2$．よって，$-3\leqq a\leqq1$．

よって，$x=0$ のとき，a は最大値 $\boxed{1}$ をとり，$x=2$ のとき a は最小値 $\boxed{-3}$ をとる． …n，o

(iii) 実数 N に対して，$|a+1|=\dfrac{2}{|x-1|}\geqq\dfrac{1}{N}$ のとき，$|x-1|\leqq2N$．これをみたす整数 x $(\neq1)$ の個数は，$2[2N]$．ただし，$[X]$ は X を越えない最大整数である．

よって，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}f(N)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}(2[2N])=\boxed{4}.$$ …p

1975 年　2 次試験（文科）

第 1 問

三角形 ABC において，$\mathrm{BC}=32$，$\mathrm{CA}=36$，$\mathrm{AB}=25$ とする。この三角形の 2 辺の上に両端をもつ線分 PQ によって，この三角形の面積を 2 等分する。そのような PQ の長さが最短になる場合の，P と Q の位置を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：三角比

考え方

P，Q がどの辺上にあるかで場合分けする．

P，Q が CA，CB 上にあるとき，面積公式から，$\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}$ の大きさがわかる．

余弦定理を使って PQ の最小値を求める．

【解答】

三角形 ABC において $\angle\mathrm{A}=A$，$\angle\mathrm{B}=B$，$\angle\mathrm{C}=C$ とかく．

BC，CA 上に P，Q があるとき，$\triangle\mathrm{PCQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}\sin C=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\sin C$.

$\therefore\quad \mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}=\dfrac{32\cdot 36}{2}=24^2$.

このとき，

$$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{CP}^2+\mathrm{CQ}^2-2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}\cos C=\mathrm{CP}^2+\mathrm{CQ}^2-\mathrm{CA}\cdot\mathrm{CB}\cos C$$

CA，BC，C は一定なので，$\mathrm{CP}^2+\mathrm{CQ}^2$ が最小のとき，PQ は最小になる．

$$\mathrm{CP}^2+\mathrm{CQ}^2=(\mathrm{CP}-\mathrm{CQ})^2+2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}\geqq 2\times 24^2.$$

よって，$\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=24$ のとき，PQ は最小になる．

CA，AB 上に P，Q があるとき，同様に $\mathrm{PA}=\mathrm{QA}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}$ のとき PQ は最小．

AB，BC 上に P，Q があるとき，同様に $\mathrm{PB}=\mathrm{QB}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$ のとき PQ は最小．

面積は $\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ で等しいから，頂角が小さいほど PQ は小さい．

$\mathrm{AB}<\mathrm{BC}<\mathrm{CA}$ より，角の大小は $C<A<B$.

よって，PQ が最小になるのは BC，CA 上に P，Q があり，$\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=24$ となるようにとったとき．

…(答)

（注 1）　二等辺三角形の面積が等しいとき，頂角が小さい程底辺が小さいことは，底辺を中点が一致するように重ね，頂点が同じ側にあるようにした図を考えれば明らか．

（注 2）　PQ の最小値を求める．$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおき，$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ とする．

$a>c$，$b>c$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{CP}^2+\mathrm{CQ}^2-2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}\cos C=(\mathrm{CP}-\mathrm{CQ})^2+2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}(1-\cos C)\\&\geqq 2\mathrm{CP}\cdot\mathrm{CQ}(1-\cos C)=ab\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\\&=\frac{1}{2}(2ab-a^2-b^2+c^2)=\frac{1}{2}(c-a+b)(c+a-b)=2(s-a)(s-b).\end{aligned}$$

よって，$a=32$，$b=36$，$c=25$，$s=\dfrac{93}{2}$ のとき，PQ の最小値は $\sqrt{2(s-a)(s-b)}=\dfrac{\sqrt{609}}{\sqrt{2}}$.

（注３） 上の計算では，最小値を与える P，Q が辺 CA，CB 上にあることを前提としている．もちろん，$a=32$，$b=36$，$c=25$ のときには $\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}=24$ で，a，b より小さいから P，Q は辺上にある．

一般の三角形 ABC においては，必ずしもそうではない．

P，Q が辺 CA，CB 上にある条件は $\sqrt{\dfrac{1}{2}ab}\leqq a$，$\sqrt{\dfrac{1}{2}ab}\leqq b \iff b\leqq 2a$，$a\leqq 2b$ である．

実際，例えば，$b>2a$ のとき，P，Q を辺 CA，CB 上にとって，$\triangle\mathrm{CPQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ となるようにしたとき，PQ の長さを最小にするのは P が CA の中点で，$\mathrm{Q}=\mathrm{B}$ のときである．

条件をゆるめて，P，Q が内角に隣り合う辺の延長上にある場合を含めた，PQ の最小値は

$$\sqrt{2(s-b)(s-c)},\quad \sqrt{2(s-a)(s-c)},\quad \sqrt{2(s-a)(s-b)}$$

である．P，Q を辺上に限ったとき，二等辺三角形が作れなければ PQ の最小値はこれより大きくなるはずである．

ただし，$\angle\mathrm{C}$ が最小角のとき，すなわち，$a\geqq c$，$b\geqq c$ とするとき，上の 3 つの最小値のうち，最小なのは最小角 C に隣り合う 2 辺 CA，CB 上に P，Q があるものである．このとき，もし $a>2b$ とすると $a>2b\geqq b+c$ となり三角形 ABC は成立しなくなる．$b>2a$ のときも同様．したがって，最小角 C に対しては辺 CA，CB 上に P，Q をとって，$\mathrm{CP}=\mathrm{CQ}$ で $\triangle\mathrm{CPQ}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{ABC}$ のようにすることが必ずできる．したがって，一般に三角形の周上に 2 点 P，Q をとって，面積を二等分する線分 PQ の長さを最小にするのは，P，Q が最小角をはさむ 2 辺の上にあって，その頂点と作る二等辺三角形になるようにしたときである．

第 2 問

k，l，m，n は負でない整数とする。0 でないすべての x に対して等式 $\dfrac{(x+1)^k}{x^l}-1=\dfrac{(x+1)^m}{x^n}$ を成り立たせるような k，l，m，n の組を求めよ。

分 野

数学 I：恒等式

考え方

適当な数，例えば $x=1$ を代入して，条件を絞り込む．

【解答】

$x=1$ のとき，$2^k-1=2^m$．よって，$2^k-2^m=(2^{k-m}-1)2^m=1$.

よって，$m=0$，$k-m=k=1$.

よって，$\dfrac{x+1}{x^l}-1=\dfrac{1}{x^n}$．$\therefore\quad x^{n+1}+x^n-x^{n+l}=x^l$.

$x=2$ のとき，$2^n\cdot 3=2^l(2^n+1)$．よって，$l=n=1$.

よって，もとの式に代入すると，

$$\frac{x+1}{x}-1=\frac{(x+1)^0}{x}.$$

$$\therefore\quad k=1,\quad l=1,\quad m=0,\quad n=1.$$ …（答）

（注） 厳密には「0 でないすべての x に対して」は成り立たない．$x=-1$ のとき，右辺の分子は 0^0 となり不定である．$x\neq-1$ では $(x+1)^0=1$ である．

問題文を「0，-1 でないすべての x に対して」とすれば問題なかった．

第 3 問

2 つの放物線 $y=x^2$ と $y=-(x-a)^2+b$ とによって囲まれる図形の面積が $\frac{1}{3}$ となるための必要十分条件を a，b を用いて表せ。

分　野

数学ⅡB：整式の積分

考え方

$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ を使う．

【解答】

C_1：$y=x^2$ と C_2：$y=-(x-a)^2+b$ の交点の x 座標を α，β（$\alpha<\beta$）とおく．

$$x^2+(x-a)^2-b=2x^2-2ax+a^2-b=0.$$

異なる 2 点で交わるから，$\frac{1}{4}D=a^2-2(a^2-b)=2b-a^2>0$.

解の公式から，$x=\frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$．よって，$\alpha=\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}$.

$$\therefore\quad \beta-\alpha=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}-\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}=\sqrt{2b-a^2}.$$

問題の面積を S とすると，

$$S=\int_\alpha^\beta\{-(x-a)^2+b-x^2\}\,dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}.$$

よって，$\beta-\alpha=\sqrt{2b-a^2}=1$．よって，必要十分条件は

$$2b-a^2=1.$$

…(答)

$\frac{1}{6}$ 公式（1975 年（文科））

1975 年の文科第 3 問は今見ると平凡な問題に見えると思われるが，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

が今のように普及していなかった時代の受験生にとっては難物だったらしい．

たしかに，

$$S=\int_{\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}}^{\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}}(-2x^2+2ax-a^2+b)\,dx$$

をまともに計算して出すのはかなりの計算力を要する．

ある受験校の先生にお伺いしたことなのだが，昔はこのような公式は教えなかったとのことである．

受験テクニックというと，何か特別なことと思われがちだが，原理に直接かかわらなくても，よく出題されやすい部分の見通しをよくしておくことも重要なテクニックなのだと思う．

第4問

xy 平面内の曲線 $x=f(y)$（$f(y)$ は正の値をとる関数とする）と直線 $y=2$ および x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる立体から，y 座標が2の y 軸上の点を中心とする半径1の球との共通部分をくりぬいた残りの立体を A とする。立体 A の $y\leqq t$ にあたる部分の体積 $V(t)$ が

$$V(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\pi(t^2+t) & (0\leqq t\leqq 1),\\ \pi\left(\dfrac{1}{3}t^3-\dfrac{3}{2}t^2+4t-\dfrac{3}{2}\right) & (1<t\leqq 2)\end{cases}$$

であるとき，関数 $f(y)$ $(0\leqq y\leqq 2)$ を定めて，A の xy 平面による断面の図形をえがけ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

考え方

$\dfrac{dV}{dt}$ が $y=t$ における A の断面積であることを利用する.

【解答】

$y=t$ における A の断面積を $S(t)$ とおくと，$V(t)=\displaystyle\int_0^t S(y)\,dy$ であるから $\dfrac{dV}{dt}=S(t)$ である.

$$S(t)=\frac{dV(t)}{dt}=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\pi(2t+1) & (0\leqq t\leqq 1),\\ \pi(t^2-3t+4) & (1<t\leqq 2)\end{cases}$$

である.

くりぬく球は $1\leqq y\leqq 2$ の範囲にある.

(i) $0\leqq y\leqq 1$ のとき，$S(y)=\pi\{f(y)\}^2$，$f(y)>0$ であるから，

$$\pi\{f(y)\}^2=\frac{2}{3}\pi(2y+1).\quad\therefore\quad f(y)=\sqrt{\frac{2}{3}(2y+1)}.$$

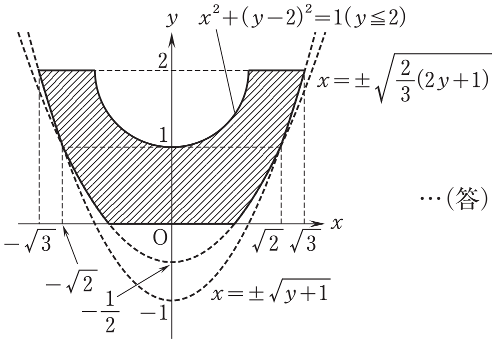
(ii) $1\leqq y\leqq 2$ のとき，$S(y)=\pi\{f(y)\}^2-\pi\{1-(y-2)^2\}$，$f(y)>0$ であるから，

$$\pi\{f(y)\}^2-\pi\{1-(y-2)^2\}=\pi(y^2-3y+4).\quad\therefore\quad f(y)=\sqrt{y+1}.$$

以上より，

$$f(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{3}(2y+1)} & (0\leqq y\leqq 1),\\ \sqrt{y+1} & (1\leqq y\leqq 2).\end{cases}$$

A の xy 平面における断面は右図斜線部.



…(答)

1975 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

直線 $x+y=4$ に第 1 象限において接する放物線 $y=-ax^2+bx$ がある。この放物線と x 軸の正の部分とで囲まれる図形の面積が最大となるときの a，b の値とその場合の面積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

考え方

b によって，a，接点の x 座標，囲まれる部分の面積を表すことができる．これによって，b のとりうる範囲，面積の増減を調べればよい．

【解答】

$x+y=4$ と $y=-ax^2+bx$ の接点の x 座標は $ax^2-(b+1)x+4=0$ の重解．

判別式 $(b+1)^2-16a=0$ より，$a=\dfrac{(b+1)^2}{16}$.

接点の x 座標は $\dfrac{b+1}{2a}=\dfrac{8}{b+1}$．第 1 象限において接するから，$0<\dfrac{8}{b+1}<4$ より，$1<b$.

x 軸との交点の x 座標は 0 と $\dfrac{b}{a}=\dfrac{16b}{(b+1)^2}$.

放物線と x 軸とで囲まれる図形の面積を $S(b)$ とすると，

$$S(b)=\int_0^{\frac{b}{a}}(-ax^2+bx)\,dx=\frac{a}{6}\left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{128b^3}{3(b+1)^4}=\frac{128}{3}b^3(b+1)^{-4}.$$

$$\frac{dS}{db}=\frac{128}{3}\{3b^2(b+1)^{-4}-4b^3(b+1)^{-5}\}=\frac{128b^2}{3(b+1)^5}(3-b).$$

b	(1)	$\cdots$	3	$\cdots$
$S'(b)$		$+$	0	$-$
$S(b)$		↗		↘

$$S(3)=\frac{9}{2}.$$

よって，$S(b)$ を最大にする a，b は $a=1$，$b=3$，最大値は $\dfrac{9}{2}$.　　…(答)

第4問

数列 $\{a_n\}$ の項が

$$a_1=\sqrt{2},\quad a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって与えられているものとする。このとき

$$a_n=2\sin\theta_n,\quad 0<\theta_n<\frac{\pi}{2}$$

を満たす θ_n を見いだせ。また $\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。

分　野

数学ⅡB：数列，三角関数，半角公式，数列の極限

考え方

半角公式を使う．

【解答】

$a_1=2\sin\theta_1=\sqrt{2}$ から，$\sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$．$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$ から，$\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$．

$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ から，$2\sin\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\sin\theta_n}$．$\therefore\quad \sin^2\theta_{n+1}=\dfrac{1+\sin\theta_n}{2}$．

ここで，$\sin\theta_n=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_n\right)$ を使うと，

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{n+1}\right)=\frac{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta_n\right)}{2}.$$

半角公式から，

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta_{n+1}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_n}{2}\right).$$

$0<\theta_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta_{n+1}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta_n}{2}<\dfrac{\pi}{4}$．

よって，

$$\frac{\pi}{2}-\theta_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_n\right).$$

よって，$\left\{\dfrac{\pi}{2}-\theta_n\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列．

$$\frac{\pi}{2}-\theta_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad \theta_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}.\qquad \cdots(答)$$

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}.\qquad \cdots(答)$$

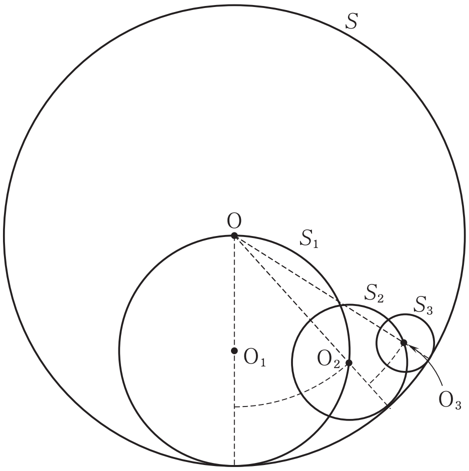
第5問

図のように球 S に内接する球の列 S_n，$n=1, 2, 3, \cdots$ がある。S の中心 O と S_n の中心 O_n はすべて同一平面上にあり，O_{n+1} は S_n の表面上にあって，この平面上において O_{n+2} と O_n は直線 OO_{n+1} に関して互いに反対側にある。

また S の半径は a，S_n の半径は $\dfrac{a}{2^n}$ である。このとき，

(i) S_n と S_{n+1} の共通部分の体積 v_n を求めよ。

(ii) $m=1, 2, 3, \cdots$ に対して，$V_m=\sum_{n=1}^{m} v_n$ とおくとき，$V=\lim_{m\to\infty} V_m$ を求めよ。



分　野

数学ⅡB：整式の積分，体積，数列，数列の極限

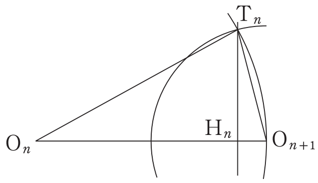
考え方

S_n と S_{n+1} の中心間距離は S_n の半径に等しいから，中心から，2 球の交わりの円を含む平面までの距離がわかる．

S_n と S_{n+1} の共通部分は S_1 と S_2 の共通部分と相似であり，$\{v_n\}$ は等比数列をなす．

【解答】

(i) S_{n+1} の半径 $\dfrac{a}{2^{n+1}}$ を r とおく．



S_n の半径と O_nO_{n+1} は $2r$.

S_n と S_{n+1} の交点の1つを T_n とすると，三角形 $O_nO_{n+1}T_n$ は $O_nO_{n+1}=O_nT_n=2r$ の二等辺三角形.

$$O_nT_n : O_{n+1}T_n=2:1.$$

$\angle T_nO_nO_{n+1}=\theta$ とおくと，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{4}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{7}{8}$.

T_n から，O_nO_{n+1} へ下した垂線の足を H_n とおくと，

$$O_nH_n=O_nT_n\cos\theta=\frac{7}{4}r,\quad O_{n+1}H_n=\frac{r}{4}.$$

$$v_n=\pi\int_{\frac{7}{4}r}^{2r}(4r^2-x^2)\,dx+\pi\int_{\frac{r}{4}}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$

$$=\pi\left[4r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{7}{4}r}^{2r}+\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{r}{4}}^{r}$$

$$=\pi\frac{13}{24}r^3=\frac{13}{3\cdot 2^{3n+6}}\pi a^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(ii) 数列 $\{v_n\}$ は公比 $\frac{1}{8}$ の等比数列である．

$$V_m=\sum_{n=1}^{m}v_n=\sum_{n=1}^{m}v_1\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\frac{v_1\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{8}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}v_1.$$

$$\therefore\quad V=\lim_{m\to\infty}V_m=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{8}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}v_1\right]=\frac{8}{7}v_1=\frac{8}{7}\frac{13}{3\cdot 2^9}\pi a^3=\frac{13}{1344}\pi a^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

赤球が 1 個と白球が 3 個入った容器 A と，ほかに赤球と白球の入った容器 B と C がある。いま A，B，C から無作為に 1 個ずつ合計 3 個の球を取り出し，これらからやはり無作為に 1 個をとって A にかえすという操作をくり返す。ただし容器 B から赤球が取り出される確率と白球が取り出される確率とは共に $\frac{1}{2}$ に保たれており，容器 C からはつねに赤球が取り出されるものとする。

(i) 上記の操作を n 回くり返したとき，容器 A に x 個の赤球が入っている確率を

$$P_n(x),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

で表せば，関係式

$$P_{n+1}(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1)$$

が成り立つことを証明せよ。ただし $x\leqq -1$ または $x\geqq 5$ のときは $P_n(x)=0$ と定める。

(ii) n 回目の操作を終えたとき A の中にある赤球の数の期待値 E_n を求めよ。

(iii) $\lim_{n\to\infty}E_n$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：確率，期待値，**数学ⅡB**：数列の極限

考え方

与えられた漸化式を解くのは難しいから，期待値 E_n の漸化式を立ててみる．

【解答】

(i) 容器 A に赤球が x 個入っている状態で 1 回の操作の後，容器 A に赤球が x 個入っているのは，最初に容器 A から赤球を取り出し，取り出された球の中から赤球をかえす場合か，最初に容器 A から白球を取り出し，取り出された球の中から白球をかえす場合である．

最初に赤球が取り出される確率は $\frac{x}{4}$．取り出された 3 個の球から 1 個の球を取り出したとき，それが赤球である確率は $\dfrac{1+\frac{1}{2}+1}{3}=\frac{5}{6}$．よって，その確率は $\frac{x}{4}\frac{5}{6}=\frac{5x}{24}$.

最初に白球が取り出される確率は $\frac{4-x}{4}$．取り出された 3 個の球から 1 個の球を取り出したとき，それが白球である確率は $\dfrac{1+\frac{1}{2}+0}{3}=\frac{1}{2}$．よって，その確率は $\frac{4-x}{4}\frac{1}{2}=\frac{4-x}{8}$.

よって，容器 A に赤球が x 個入っている状態から容器 A に赤球が x 個入っている状態になる確率は

$$\frac{5x}{24}+\frac{4-x}{8}=\frac{x+6}{12}.$$

容器 A に赤球が $x+1$ 個入っている状態で 1 回の操作の後，容器 A に赤球が x 個入っているのは，最初に容器 A から赤球を取り出し，取り出された球の中から白球をかえす場合である．最初に赤球が取り出される確率は $\dfrac{x+1}{4}$．取り出された 3 個の球から 1 個の球を取り出したとき，それが白球である確率は $\dfrac{0+\frac{1}{2}+0}{3}=\dfrac{1}{6}$．よって，その確率は $\dfrac{x+1}{4}\,\dfrac{1}{6}=\dfrac{1+x}{24}$.

容器 A に赤球が $x-1$ 個入っている状態で 1 回の操作の後，容器 A に赤球が x 個入っているのは，最初に容器 A から白球を取り出し，取り出された球の中から赤球をかえす場合である．最初に白球が取り出される確率は $1-\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{5-x}{4}$．取り出された 3 個の球から 1 個の球を取り出したとき，それが赤球である確率は $\dfrac{0+\frac{1}{2}+1}{3}=\dfrac{1}{2}$．よって，その確率は $\dfrac{5-x}{4}\,\dfrac{1}{2}=\dfrac{5-x}{8}$.

$$\therefore\quad P_{n+1}(x)=\frac{1}{12}(6+x)P_n(x)+\frac{1}{24}(1+x)P_n(x+1)+\frac{1}{8}(5-x)P_n(x-1).$$ （証明終り）

(ii) (i) から，

$$\begin{cases} P_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}P_n(0)+\dfrac{1}{24}P_n(1), \\ P_{n+1}(1)=\dfrac{1}{2}P_n(0)+\dfrac{7}{12}P_n(1)+\dfrac{1}{12}P_n(2), \\ P_{n+1}(2)=\dfrac{3}{8}P_n(1)+\dfrac{2}{3}P_n(2)+\dfrac{1}{8}P_n(3), \\ P_{n+1}(3)=\dfrac{1}{4}P_n(2)+\dfrac{3}{4}P_n(3)+\dfrac{1}{6}P_n(4), \\ P_{n+1}(4)=\dfrac{1}{8}P_n(3)+\dfrac{5}{6}P_n(4). \end{cases}$$

これらから，

$$\begin{aligned} E_{n+1}&=P_{n+1}(1)+2P_{n+1}(2)+3P_{n+1}(3)+4P_{n+1}(4) \\ &=\frac{1}{2}P_n(0)+\frac{7}{12}P_n(1)+\frac{1}{12}P_n(2)+2\left\{\frac{3}{8}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)+\frac{1}{8}P_n(3)\right\} \\ &\quad+3\left\{\frac{1}{4}P_n(2)+\frac{3}{4}P_n(3)+\frac{1}{6}P_n(4)\right\}+4\left\{\frac{1}{8}P_n(3)+\frac{5}{6}P_n(4)\right\} \\ &=\frac{1}{2}P_n(0)+\frac{4}{3}P_n(1)+\frac{13}{6}P_n(2)+3P_n(3)+\frac{23}{6}P_n(4) \\ &=\frac{1}{2}\{P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+P_n(3)+P_n(4)\}+\frac{5}{6}\{P_n(1)+2P_n(2)+3P_n(3)+4P_n(4)\} \\ &=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}E_n. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad E_{n+1}-3=\frac{5}{6}(E_n-3).$$

$E_0=1$ から，$E_n-3=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n(1-3)$.

$$\therefore\quad E_n=3-2\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$ …(答)

(iii)
$$\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}\left\{3-2\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=3. \qquad \cdots(答)$$

（注１）
$$\begin{aligned}E_{n+1}(x)&=\sum_{x=0}^{4}xP_{n+1}(x)\\&=\sum_{x=0}^{4}\left\{x\frac{6+x}{12}P_n(x)+x\frac{1+x}{24}P_n(x+1)+x\frac{5-x}{8}P_n(x-1)\right\}\\&=\sum_{x=0}^{4}\frac{x(6+x)}{12}P_n(x)+\sum_{x=0}^{4}\frac{x(1+x)}{24}P_n(x+1)+\sum_{x=0}^{4}\frac{x(5-x)}{8}P_n(x-1)\\&=\sum_{x=0}^{4}\frac{x(6+x)}{12}P_n(x)+\sum_{x=1}^{5}\frac{(x-1)x}{24}P_n(x)+\sum_{x=-1}^{3}\frac{(x+1)(4-x)}{8}P_n(x)\\&=\sum_{x=0}^{4}\frac{20x+12}{24}P_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{5}{6}E_n.\end{aligned}$$

係数が x の１次式で，x の係数の和が０なら，期待値の x^2 の係数は消え，E_{n+1} は E_n の１次式になる．

（注２） １回の試行でＡから取り出された球は $\frac{2}{3}$ の確率で，ＢまたはＣから取り出された球と入れ替わる．したがって，この試行を繰り返すとＡの中にはＢまたはＣから取り出された球だけになる．一方，１回の試行でＢまたはＣから取り出される球のうち，$\frac{3}{4}$ は赤球で，$\frac{1}{4}$ は白球である．無限回の試行の後Ａに入っている赤球の個数の期待値が $4\times\frac{3}{4}=3$ になるのは当然だといえる．

用語の変遷と指導要領

戦後の大改革の１つに国語改革がある．教育改革より先行して，1946 年（昭和 21 年）に当用漢字表が公表され漢字制限が実施された．1948 年（昭和 23 年）に教育漢字が制定されそれ以後新漢字による教育がなされた．実社会ではどうだったのであろうか，私の手元にある新聞の縮刷版では 1955 年（昭和 30 年）位までに徐々に新漢字に変っていて，ある日すべて旧漢字が廃止されて，すべて新漢字に置き換わったというようなことはない．事実私は相撲の記事で旧漢字を憶えた記憶がある．

漢字制限と同時に横書きの場合左から右へ書くようになった．ただし，理系の書物は戦前から左から右へ書いていたようである．数式との関係を考えれば当然のことだと思われる．阿佐ヶ谷の駅の近くに「やかんとふたわ」と書かれた看板のあるお店があった．仮名を憶えたての私は「やかん」と「ふた」を売っているお店だと思っていたのだが，このお店は「綿・布団・蚊帳」を売っている店だった．

実際の漢字改革が入試にどのように反映されたのかは当時の旺文社『入試問題正解』から判断する限り，1949 年（昭和 24 年）ころにはすでにほとんど新漢字に変っている．詳細にみると 1949 年でも「與える」のような旧漢字が含まれているがほぼ当用漢字が使われている．

入試問題に使用されている用語は指導要領の変遷にしたがっている．これまでの指導要領の改訂は８次にわたっているが，最初の指導要領は単純な表だけで実際的な内容があるのは第１次改訂（入試では '51 年）からである．したがって，教育課程と用字の関係がわかるのは第２次改訂（入試では '59 年）からである．

このときに変ったのは「共軛」を「共役」に，「抛物線」を「放物線」に，「截片」を「切片」など同音の漢字に置き換える措置が中心であった．これは国語審議会が '56 年に同音の流用を許容するとしたことによると思われる．この他多面体の「辺」を「稜」ともいっていたのが「辺」に統一された．

第３次改訂（入試では '66 年から）では「函数」が「関数」に変った点が注目される．これも同音漢字の流用であるがその前の改訂では反対があったのか改訂されなかった．「函数」の函は black box の意味があるほか function の中国的音訳 hán（ファン）から来ているとも言われる．学術用語の中には中国的音訳を経て日本語になったものも少なくない．geometry の訳「幾何」も中国読みだと jǐhé（チファ）となり音訳に近いことがわかる．

また，第３次改訂ではそれまで三角比の定理を「正弦法則」「余弦法則」といっていたのを現行のように「正弦定理」「余弦定理」に改めた．

また，四辺形と四角形，n 辺形と n 角形が併存していたものを四角形，n 角形に統一した．

第４次改訂（入試では '76 年から）ではそれまで２次方程式の２解を「２根」といっていたものが「２解」に改められた．それまでは「根の公式」「根の判別」「実根」「重根」「虚根」「根と係数の関係」などといわれてたものについて，すべて根が解に置き換えられた．ただし，「実根」「虚根」は「実数解」「虚数解」に置き換えられた．また２実根のうち大きい方を「大根」小さい方を「小根」などという表現も使われていた，「大根」は野菜の名前から連想される足の形と絡んで笑いを誘う材料だった．

第５次改訂（入試では '85 年から）ではそれまで「ゆえに」を表す記号「∴」が姿を消したことと，「ピタゴラスの定理」が消え「三平方の定理」に統一されたことが注目される．

第６次改訂（入試では '97 年から）では第３次改訂以後「だ円」の表記がされていたが「楕円」に戻された．「楕」は当用漢字，常用漢字の範囲外だが規制がゆるんだ結果だと考えられる．

第８次改訂（入試では '15 年から）では「垂線の足」という表現がなくなり「垂線をおろしその交点」のような表現に改められた．

最初は用語の統一という主旨が強かったが次第に細部についての規制のようになってきているように思えることが気になる．

第4章

1976~1984(昭和51~昭和59)年

数学の現代化と行列の登場,
共通一次試験の登場

4.1　第 4 次指導要領改訂（1976 年）

第 4 次指導要領改訂は小学校で 1968 年から準備され，高校では 1973 年から実施され，入試には 1976 年から実施された．

東大入試に関る教科名は「数学Ⅰ」,「数学ⅡＢ」,「数学Ⅲ」と変らなかった．

この改訂は「教育の現代化」というスローガンが掲げられ，新たに，行列・一次変換が登場してきた．

また，集合や写像などの導入もこのときの特徴である．

また，確率が「数Ⅰ」になりそれまで理系の教材という扱いであったものが文理共通教材になった．

一方，∞ への極限が「数Ⅲ」にまわり，文系では扱わなくなった．

分数方程式不等式，無理方程式不等式の扱いが教科書からなくなった．しかし，今日（2020）でも実質分数方程式不等式，無理方程式不等式になる入試問題は出題されているように思える．

今回の改訂は大幅だったので，東大では移行措置が 2 年にわたり，あらかじめ新課程で受験するか，旧課程で受験するかを登録させ，新旧別問題で実施された．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1976〜1978）

初年度（1976）は 1 次，2 次とも新課程入試には行列一次変換の問題が出題された．

1978 年の共通第 1 問は祭太鼓の巴のような領域の面積を求める問題であった．その前年が東大百年祭だったのでその奉祝なのか．

1977 年，1978 年も行列の問題が文理とも出題された．当時としては斬新な印象を与えた．

このころ　あんなこと・こんなこと

就任当初人気のあった田中内閣も金脈問題で 1974 年末に辞任した．その後 1976 年にロッキード事件が発覚し総理の犯罪として大きな汚職事件に発達した．

このころサラリーマン金融のテレビコマーシャルが流れるようになり，サラ金問題や自殺が続発した．

プロ野球では巨人軍の王貞治選手が 1977 年 9 月 3 日後楽園球場で，ハンク・アーロンのもつメジャーリーグの当時の通算ホームラン記録 755 号を抜いて通算 756 号本塁打を打った．この年国民栄誉賞が創設され，王選手はその最初の受賞者となった．王選手はその後引退（1980 年）までに記録を 868 本までに伸ばしている．

ピンクレディーがブームになった（1977 年），キャンディーズが解散（1978 年）．思い出す曲は「ダンシングクィーン」(1977 年),「サタデーナイト・フィーバー」(1978 年)．

このころの河合塾

1977 年　東京進出，駒場校開校．

1976 年　1 次試験（文科）・新課程用

この年の 1 次試験の問題は新課程，旧課程別の問題で，問題文の冒頭に〔**新課程の問題**〕または〔**旧課程の問題**〕と明記されている．受験者は予め届け出た課程の問題を解くことになる．共通問題も別問題として掲載されている．

I

a，b を実数とする。放物線

$$y=x^2$$

と円

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$$

とは点 $(1,\ 1)$ を通り，この点において共通の接線をもつとする。そのとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$$a=\boxed{ア}-2\sqrt{\boxed{イ}}$$

$$b=\sqrt{\boxed{ウ}}-\boxed{エ}>0$$

分　野

数学 I ：図形と方程式

【解答】

$y'=2x$ だから，$C:(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ は $(1,\ 1)$ を通り，傾き 2 の接線をもつ．

$(1,\ 1)$ を通るから，

$$(1-a)^2+(1-b)^2=a^2.\quad \therefore\quad a=\frac{(1-b)^2}{2}+\frac{1}{2}.$$

接線の傾きが 2 だから，接点 $(1,\ 1)$ と中心 $(a,\ b)$ を通る直線の傾きは $-\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{b-1}{a-1}=-\frac{1}{2}.\quad \therefore\quad a-1=-2(b-1).\quad \therefore\quad \frac{(1-b)^2}{2}+\frac{1}{2}-1=-2(b-1).$$

$$(b-1)^2+4(b-1)-1=0.\quad \therefore\quad b=-1\pm\sqrt{5}.$$

$b>0$ より，$b=-1+\sqrt{5}$.

$$\therefore\quad a=\boxed{5}-2\sqrt{\boxed{5}},\quad b=\sqrt{\boxed{5}}-\boxed{1}.$$ …ア，イ，ウ，エ

Ⅱ

四角形 ABCD において $AB=\frac{3}{2}$，$BC=2$，$CD=\frac{12}{5}$，$DA=\frac{7}{10}$，$AC=\frac{5}{2}$ である。対角線 AC，BD の交点を O とするとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$OA=\boxed{オ}$

$OB=\boxed{カ}$

$OC=\boxed{キ}$

$OD=\boxed{ク}$

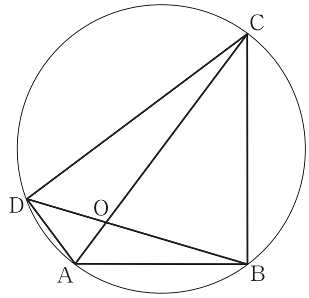
分野

数学Ⅰ：三角比，三角関数

【解答】

$$AB^2+BC^2=\frac{3^2+4^2}{2^2}=\frac{5^2}{2^2}=AC^2.$$

$$CD^2+DA^2=\frac{24^2+7^2}{10^2}=\frac{25^2}{10^2}=AC^2.$$



したがって，$\angle ABC$，$\angle CDA$ は直角で，四角形 ABCD は AC を直径とする円に内接する．

$\triangle OAB$ と $\triangle ODC$ において，

$\angle AOB=\angle DOC$（対頂角），　$\angle OAB=\angle ODC$（円周角）

から，$\triangle OAB \backsim \triangle ODC$.

$$OA:OD=OB:OC=AB:DC=\frac{3}{2}:\frac{12}{5}=5:8.$$

同様に $\triangle OAD \backsim \triangle OBC$ で，

$$OA:OB=OD:OC=AD:BC=\frac{7}{10}:2=7:20.$$

よって，

$$AC=OA+OC=\frac{7}{20}OB+\frac{8}{5}OB=\frac{39}{20}OB=\frac{5}{2}.$$

よって，$OB=\frac{50}{39}$，$OA=\frac{7}{20}OB=\frac{35}{78}$，$OC=\frac{8}{5}OB=\frac{80}{39}$，$OD=\frac{8}{5}OA=\frac{28}{39}$.

よって，

$$OA=\boxed{\frac{35}{78}},\quad OB=\boxed{\frac{50}{39}},\quad OC=\boxed{\frac{80}{39}},\quad OD=\boxed{\frac{28}{39}}.$$ …オ，カ，キ，ク

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

大，中，小 3 つのさいころを同時に投げて，出た目をそれぞれ x，y，z とする。

(1) x，y，z が直角三角形の 3 辺の長さになる確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

(2) x，y，z が二等辺三角形の 3 辺の長さになる確率は $\boxed{\text{コ}}$ である。

(3) $\dfrac{\pi}{x}$，$\dfrac{\pi}{y}$，$\dfrac{\pi}{z}$ が直角三角形の 3 頂角の大きさになる確率は $\boxed{\text{サ}}$ である。

(4) $\dfrac{\pi}{x}$，$\dfrac{\pi}{y}$，$\dfrac{\pi}{z}$ が二等辺三角形の 3 頂角の大きさになる確率は $\boxed{\text{シ}}$ である。

分　野

数学Ⅰ：確率

【解答】

さいころの目の出方の総数は 6^3 通り．

(1) 3 辺の長さが 6 以下の整数である直角三角形の 3 辺は，$\{3,\ 4,\ 5\}$ の三角形だけである．その場合の数は $3!$ 通り．

求める確率は

$$\frac{3!}{6^3}=\boxed{\frac{1}{36}}. \qquad \cdots\text{ケ}$$

(2) 等辺の長さが $x=y$ のとき，対辺の長さ z は $0<z<2x$．$z\leqq 6$．$x=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して z はそれぞれ，1，3，5，6，6，6 通り．そのうち正三角形はそれぞれ 1 通り，正三角形でない二等辺三角形は，$0+2+4+5+5+5=21$ 通り．

$(x,\ y,\ z)$ の組は

$$21\times 3+6=23\times 3 \text{ 通り}.$$

求める確率は

$$\frac{23\times 3}{6^3}=\boxed{\frac{23}{72}}. \qquad \cdots\text{コ}$$

(3) $x=2$ なら，$\dfrac{\pi}{x}$ が直角である．残りの角の和は $\dfrac{\pi}{y}+\dfrac{\pi}{z}=\dfrac{\pi}{2}$.

よって，$2y+2z=yz$．$(y-2)(z-2)=4$．$y\leqq z$ なら $(y,\ z)=(3,\ 6),\ (4,\ 4)$.

よって，$\{x,\ y,\ z\}=\{2,\ 3,\ 6\},\ \{2,\ 4,\ 4\}$.

よって，$(x,\ y,\ z)$ の組は $6+3=9$ 通り．

求める確率は

$$\frac{9}{6^3}=\boxed{\frac{1}{24}}. \qquad \cdots\text{サ}$$

(4) $x=y$ のとき，$\dfrac{2}{x}\pi+\dfrac{\pi}{z}=\pi$．よって，$xz-x-2z=0$，$(x-2)(z-1)=2$.

よって，$(x,\ z)=(4,\ 2),\ (3,\ 3)$.

よって，$\{x,\ y,\ z\}=\{4,\ 4,\ 2\},\ \{3,\ 3,\ 3\}$.

よって，$(x,\ y,\ z)$ の組は $3+1=4$ 通り．

求める確率は

$$\frac{4}{6^3}=\boxed{\frac{1}{54}}. \qquad \cdots\text{シ}$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

行列 $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおいて，点 $(x,\ y)$ を点 $(x',\ y')$ に移す平面の 1 次変換が定まる。

いま，$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。行列 A^2-A および行列 $3A^{-1}$ が定める変換により点 P(1, 1) はそれぞれ

点 Q($\boxed{ス}$, 0) および点 R($\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$)

に移る。またベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角を $\alpha\pi$ $(0<\alpha<1)$ とするとき $\alpha=$ $\boxed{タ}$ である。

分　野

数学ⅡB：一次変換

【解答】

$$A^2-A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\quad 3A^{-1}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(A^2-A)\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3A^{-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

よって，Q($\boxed{4}$, 0)，R($\boxed{0}$, $\boxed{3}$).　…ス，セ，ソ

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-1,\ 2)$. よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-5$.

$$\cos\alpha\pi=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}=\frac{-5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，$\alpha=\boxed{\dfrac{3}{4}}$.　…タ

1976 年　1 次試験（文科）・旧課程用

V

（文科・新課程用・Ⅰと同じ）（アイウエ → チツテト）

VI

（文科・新課程用・Ⅱと同じ）（オカキク → ナニヌネ）

VII

複素数 a，b について

$$a+b=3+4i,$$
$$a^2+b^2=(2+2i)a+(4+6i)b+5-14i$$

が成り立つとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる実数は何か。

$$a=\boxed{\text{ノ}}+\boxed{\text{ハ}}\,i$$
$$b=\boxed{\text{ヒ}}+\boxed{\text{フ}}\,i$$

分 野

（旧課程）数学Ⅰ：複素数

【解答】

$b=3+4i-a$ より，

$$a^2+(3+4i-a)^2=(2+2i)a+(4+6i)(3+4i-a)+5-14i. \quad \therefore \quad a^2-2(1+i)a+2i=0.$$

$(a-1-i)^2=a^2-2(1+i)a+2i=0$ から，

$$a=\boxed{1}+\boxed{1}\,i, \quad b=3+4i-(1+i)=\boxed{2}+\boxed{3}\,i.$$ …ノ，ハ，ヒ，フ

Ⅷ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

平面の次頁図のように合同な正三角形の網目に分割されている。下図に示された点 O，P，Q の座標がそれぞれ

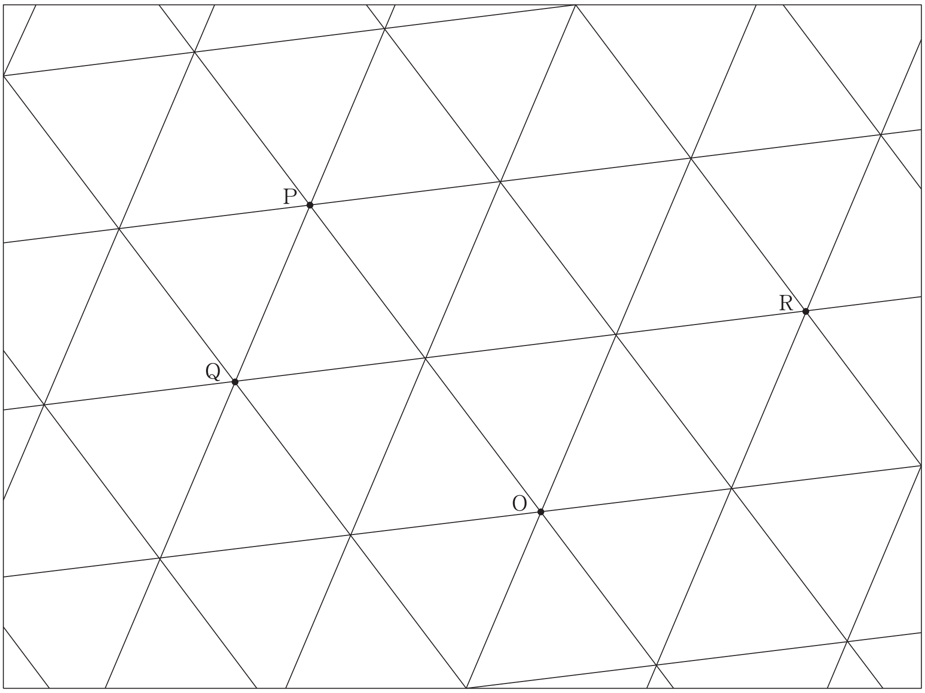
$$\mathrm{O}=(0,\ 0),\quad \mathrm{P}=(a,\ b),\quad \mathrm{Q}=(c,\ d)$$

ならば，点 R の座標は

$$\mathrm{R}=(\boxed{\text{ヘ}}\,a+\boxed{\text{ホ}}\,c,\ \boxed{\text{マ}}\,b+\boxed{\text{ミ}}\,d)$$

である。

ただし，O を原点とする座標軸をどのようにとっても上のことがらは成り立つものとする。



分　野

（旧課程）数学ⅡB：ベクトル

【解答】

線分 OP の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}.$$

よって，

$$\mathrm{R}=\left(\boxed{\frac{3}{2}}\,a+\boxed{-2}\,c,\ \boxed{\frac{3}{2}}\,b+\boxed{-2}\,d\right).$$ …ヘ，ホ，マ，ミ

【別解】　複素数で

O を原点とする複素数平面で考える．P，Q，R を表す複素数をそれぞれ p，q，r とすると，r は p を $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 倍して原点を中心に $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点，また，q は r を原点を中心として $\dfrac{2}{3}\pi$ 回転した点．

$$r=-\frac{\sqrt{3}}{2}ip,\quad q=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r.$$

よって，$q=-\dfrac{1}{2}r+\dfrac{3}{4}p$．よって，

$$r=\frac{3}{2}p-2q.$$

以下**【解答】**と同様.

1976 年　1 次試験（理科）・新課程用

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

空間における動点 P は点 A$=(3,\ 0,\ 0)$ と点 B$=(3,\ 5,\ 5)$ を両端とする線分上を動き，動点 Q は原点を中心とし xy 平面内にある半径 10 の円周上を動く。

この条件のもとで，線分 PQ の長さが最小になるのは

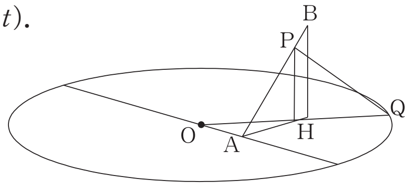
$$\mathrm{P}=(3,\ \boxed{ア},\ \boxed{イ}),\quad \mathrm{Q}=(\boxed{ウ},\ \boxed{エ},\ 0)$$

のときである。

分　野

数学ⅡB：空間図形

【解答】



点 P が線分 AB を $t:1-t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ に分けるとき，$\mathrm{P}(3,\ 5t,\ 5t)$.

P から xy 平面に下した垂線の足を H とすると，$\mathrm{H}(3,\ 5t,\ 0)$.

Q が円周上を動くとき，PQ が最小になるのは，Q が半直線 OH 上にあるときで，そのとき，OH$=u$ とおくと，

$u^2=3^2+(5t)^2$．$3\leqq u\leqq\sqrt{34}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\mathrm{PH}^2+\mathrm{HQ}^2=(5t)^2+\left(10-\sqrt{3^2+(5t)^2}\right)^2\\&=u^2-9+(10-u)^2=2u^2-20u+91=2(u-5)^2+41.\end{aligned}$$

よって，$u=5$ のとき PQ は最小になる．このとき，$t=\dfrac{4}{5}$．したがって，

$$\mathrm{P}(3,\ \boxed{4},\ \boxed{4}).$$ …ア，イ

$\mathrm{H}(3,\ 4,\ 0)$ で，OH$=5$，OQ$=10$ だから，

$$\mathrm{Q}(\boxed{6},\ \boxed{8},\ 0).$$ …ウ，エ

Ⅱ

さいころを 3 回投げて，出た目を順に a，b，c とする。この a，b，c を用いて行列

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -1 & c\end{pmatrix}$$

を定め，

$$\vec{u}=A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{v}=A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

とおくとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

(i) $|\vec{u}|>5$ となる確率は $\boxed{オ}$ である。

(ii) $|\vec{v}|=5$ となる確率は $\boxed{カ}$ である。

(iii) $|\vec{v}|>5$ となる確率は $\boxed{キ}$ である。

(iv) $\vec{u}$ と $\vec{v}$ とが垂直となる確率は $\boxed{ク}$ である。

分　野

数学ⅡB：行列，　**数学Ⅰ**：確率

【解答】

$$\vec{u}=\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{v}=\begin{pmatrix} a & b \\ -1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}.$$

(i) $|\vec{u}|>5 \iff a^2+1>25 \iff a^2>24 \iff a \geqq 5.$

よって，$|\vec{u}|>5$ となる確率は $\boxed{\dfrac{1}{3}}$. …オ

(ii) $|\vec{v}|=5 \iff b^2+c^2=25.$

これをみたす $(b,\ c)$ の組は $(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$.

よって，$|\vec{v}|=5$ となる確率は $\dfrac{2}{6^2}=\boxed{\dfrac{1}{18}}$. …カ

(iii) $|\vec{v}|>5$ となるのは $b \geqq 5$ または $c \geqq 5$ の $6^2-4^2=20$ 通りと，$(b,\ c)=(4,\ 4)$ の1通りの21通り.

よって，$|\vec{v}|>5$ となる確率は $\dfrac{21}{6^2}=\boxed{\dfrac{7}{12}}$. …キ

(iv) $\vec{u}\cdot\vec{v}=ab-c=0.$

よって，$ab=c$ となるのは，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 2,\ 2)$，$(2,\ 1,\ 2)$，$(1,\ 3,\ 3)$，$(3,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 4,\ 4)$，$(2,\ 2,\ 4)$，
$(4,\ 1,\ 4)$，$(1,\ 5,\ 5)$，$(5,\ 1,\ 5)$，$(1,\ 6,\ 6)$，$(2,\ 3,\ 6)$，$(3,\ 2,\ 6)$，$(6,\ 1,\ 6)$

の14通り.

$\vec{u}$ と $\vec{v}$ とが垂直となる確率は $\dfrac{14}{6^3}=\boxed{\dfrac{7}{108}}$. …ク

Ⅲ

x の関数

$$f(x)=a(x^2+2x+4)^2+3a(x^2+2x+4)+b$$

は最小値37をもち，$f(-2)=57$ であるという。

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$a=\boxed{\text{ケ}}$，　$b=\boxed{\text{コ}}$

$f(\boxed{\text{サ}})=37$，　$f(1)=\boxed{\text{シ}}$

分野

数学Ⅰ：2次関数

【解答】

$t=x^2+2x+4$ とおくと，$t=(x+1)^2+3 \geqq 3.$

$x=-2$ のとき，$t=4$ で，$f(-2)=16a+12a+b=28a+b=57$. よって，$b=57-28a$.

$$f(x)=at^2+3at+57-28a=a\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}a+57-28a.$$

最小があるから $a>0$. $t \geqq 3$ だから，$t=3$ のとき，すなわち，$x=-1$ のとき $f(x)$ は最小になり，最小値は $57-10a=37$. よって，

$a=\boxed{2}$，　$b=\boxed{1}$，　$f(\boxed{-1})=37$. …ケ，コ，サ

$x=1$ のとき，$t=7$. よって，

$f(1)=2\times7^2+6\times7+1=\boxed{141}$. …シ

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

xy 平面において，任意の点を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ正の向きに回転し，次に x 軸方向に4，y 軸方向に $-\sqrt{3}$ だけ平行移動する変換 F は，点

$$\left(\boxed{\text{ス}},\ \sqrt{\boxed{\text{セ}}}\right)$$

のまわりのある回転と一致する。

また合成写像 $F\circ F$ は，任意の点を原点のまわりに $\dfrac{2\pi}{3}$ だけ正の向きに回転し，次に x 軸方向に $\boxed{\text{ソ}}$，y 軸方向に $\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$ だけ平行移動する変換である。

分　野

数学ⅡB：一次変換

【解答】

最初の点を $(x,\ y)$ とする．この点を F によって移される点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}. \qquad \cdots①$$

もし，点 $(p,\ q)$ が回転の中心なら，F によって，$(p,\ q)$ は $(p,\ q)$ に移される．

$$\therefore\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \cdots②$$

$$\therefore\ \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

①−② より，

$$\begin{pmatrix} X-p \\ Y-q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}.$$

よって，中心は

$$(p,\ q)=\left(\frac{7}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\boxed{\frac{7}{2}},\ \sqrt{\boxed{\frac{27}{4}}}\right), \qquad \cdots\text{ス，セ}$$

回転角は $\dfrac{\pi}{3}$.

$F\circ F$ によって，点 $(x,\ y)$ が移される点を $(x',\ y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}\right\}+\begin{pmatrix} 4 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}15\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

よって，合成変換 $F\circ F$ は $(x',\ y')$ は点 $(x,\ y)$ を原点のまわりに $\frac{2\pi}{3}$ だけ回転して，次に x 軸方向に $\boxed{\frac{15}{2}}$，y 軸方向に $\sqrt{\boxed{\frac{3}{4}}}$ だけ平行移動する変換である． …ソ，タ

（注） 点 $\left(\frac{15}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は原点を点 $\left(\frac{7}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ のまわりに $\frac{2}{3}\pi$ 回転した点，つまり $F\circ F$ で移動した点である．

1976年　1次試験（理科）・旧課程用

V

（理科・新課程用・Ⅰと同じ）（アイウエ → チツテト）

Ⅵ

実数 a に関する下記の条件(i)〜(iv)のおのおのについて，

常に成り立つならば	1
決して成り立たないならば	2
$a \geqq 0$ と同値ならば	3
$a > 0$ と同値ならば	4
以上のいずれでもないならば	5

と答えよ。

(i)　任意の正の数 x について　$a+x>0$　$\boxed{\text{ナ}}$

(ii)　任意の正の数 x について　$a-x>0$　$\boxed{\text{ニ}}$

(iii)　ある正の数 x について　$a+x>0$　$\boxed{\text{ヌ}}$

(iv)　ある正の数 x について　$a-x>0$　$\boxed{\text{ネ}}$

分　野

（旧課程）数学Ⅰ：集合と論理

【解答】

(i)　任意の正の数 x について，$x>-a$ となるのは $a \geqq 0$．$\boxed{3}$．　…ナ

(ii)　任意の正の数 x について，$x<a$ となることは，決してない．$\boxed{2}$．　…ニ

(iii)　ある正の数 x について，$x>-a$ となるのは任意の a である。$\boxed{1}$．　…ヌ

(iv)　ある正の数 x について，$x<a$ となるのは $a>0$．$\boxed{4}$．　…ネ

VII

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

関数

$$f(x)=2x^3-3x^2-6x+2$$

は $x=\alpha$，$x=\beta$（$\alpha<\beta$）で極値をとるものとし，曲線 $y=f(x)$ の上の2点 $A=(\alpha,\ f(\alpha))$，$B=(\beta,\ f(\beta))$ を通る直線を l とする。

このとき，l の方程式は

$$y=\boxed{\text{ノ}}\,x+\boxed{\text{ハ}}$$

であり，曲線 $y=f(x)$ と直線 l との交点は A，B および点

$$(\boxed{\text{ヒ}},\ \boxed{\text{フ}})$$

である。

分 野

（旧課程）数学ⅡB：整式の微分，**（旧課程）数学Ⅰ**：2次方程式

【解答】

$f'(x)=6x^2-6x-6$．$f'(x)=0$ の解が α，β だから，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-1.$$

傾きは，

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(2\alpha^3-3\alpha^2-6\alpha+2)-(2\beta^3-3\beta^2-6\beta+2)}{\alpha-\beta}=2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)-6$$
$$=2\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}-3(\alpha+\beta)-6=2\{1^2-(-1)\}-3\times1-6=-5.$$

よって，

$$l:\ y=-5(x-\alpha)+f(\alpha).$$
$$f(\alpha)+5\alpha=2\alpha^3-3\alpha^2-\alpha+2=(\alpha^2-\alpha-1)(2\alpha-1)+1=1$$

から，

$$l:\ y=\boxed{-5}\,x+\boxed{1}. \qquad \cdots\text{ノ，ハ}$$
$$f(x)-(-5x+1)=(x^2-x-1)(2x-1)=0$$

の解は，$x=\alpha,\ \beta,\ \dfrac{1}{2}$.

よって，A，B 以外の交点は

$$\left(\boxed{\dfrac{1}{2}},\ \boxed{-\dfrac{3}{2}}\right). \qquad \cdots\text{ヒ，フ}$$

（注） 3次関数のグラフが変曲点について点対称であることを既知とすれば，$f''(x)=12x-6=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$．これからヒ，フが先に埋まり，$\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=-5$ が出れば，変曲点を通ることから直ちに，ノ，ハが埋まる．

Ⅷ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

AB=2，BC=3 であるような三角形 ABC の内部に点 D をとって，三角形 ADC の内角 ∠D が三角形 ABC の内角 ∠B の補角に等しく，かつ CD=2 としたい。

このような点 D をとることが可能であるような ∠B の範囲は

$$\boxed{\text{へ}} < \cos(\angle \mathrm{B}) < \boxed{\text{ホ}}$$

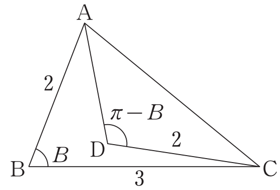
で与えられる。

また三角形 ABC と三角形 ADC の面積の差は，∠B= $\boxed{\text{マ}}$ のとき最大になり，その最大値は $\boxed{\text{ミ}}$ である。

分　野

（旧課程）数学ⅡB：三角比

【解答】



∠B=B とおくと，∠D=$\pi-B$．正弦定理から $\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin(\pi-B)}$

なので，三角形 ABC と三角形 ACD の外接円の半径は等しい．

また正弦定理から，$2R=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin\angle\mathrm{CAD}}$.

AB=CD=2 だから，sin∠ACB=sin∠CAD.

D は三角形 ABC の内部にあるから $B<\pi-B$.

よって ∠ADC=$\pi-B$ は鈍角.

よって，∠CAD は鋭角．また，AB<BC だから，∠ACB も鋭角.

よって，∠ACB=∠CAD．これを C とおく.

D が三角形 ABC の内部にある条件は ∠DAC<∠BAC，∠ACD<∠ACB.

AB=2，BC=3 から ∠ACB<∠BAC，∠ACB=∠DAC=C．よって，∠DAC<∠BAC は成り立つ.

∠ACD<∠ACB=∠DAC から，AD<CD.

AC=x，AD=y とおくと，余弦定理から

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B. \quad \therefore \quad x^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos B=13-12\cos B.$$

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{DC}^2-2\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos(\pi-B). \quad x^2=2^2+y^2+2\cdot2y\cos B=4+y^2+4y\cos B.$$

$$\therefore \quad 13-12\cos B=4+y^2+4y\cos B. \quad \therefore \quad 9-y^2=4(3+y)\cos B. \quad \therefore \quad \cos B=\frac{3-y}{4}.$$

一方，AD<CD より，$0<y<2$．よって，

$$\boxed{\frac{1}{4}}<\cos B<\boxed{\frac{3}{4}}. \qquad \cdots\text{へ，ホ}$$

面積の差は

$$\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}2\cdot3\sin B-\frac{1}{2}2y\sin B=(3-y)\sin B=4\sin B\cos B=2\sin 2B.$$

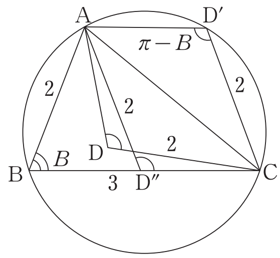
これが最大になるのは $2B=\dfrac{\pi}{2}$．つまり，

$$B=\angle\mathrm{B}=\boxed{\frac{1}{4}}\pi \qquad \cdots\text{マ}$$

のときで，その最大値は

$$\boxed{2}. \qquad \cdots\text{ミ}$$

【別解】 初等幾何的方法



辺 AC について，D と対称な点を D′ とおくと，$\angle B+\angle D'=\pi$ だから，四角形 ABCD′ は円に内接し，$AB=CD=CD'$ だから円周角 $\angle ACB=\angle CAD'$．よって，錯角が等しいことから $BC /\!/ AD'$．したがって，四角形 ABCD′ は等脚台形．

D が三角形 ABC の内部にある条件は，$\angle CAD<\angle CAB$，$\angle ACD<\angle ACB$．

$\angle CAD=\angle CAD'=\angle ACB$ で，三角形の辺の大小 $AB<BC$ から $\angle CAD<\angle CAB$ は成り立つ．

$\angle ACD=\angle ACD'<\angle ACB=\angle CAD'$ から，三角形 ACD′ の辺の大小 $AD'<CD'=2$ が定まる．

$AB=2$，$BC=3$ の等脚台形 ABCD′ の角 ∠B の大小は AD′ の大小と一致し，$0<AD'<2$ である．

$AD'=0$ つまり $A=D'$ のとき，等脚台形 ABCD′ は $AB=AC=2$，$BC=3$ の二等辺三角形になる．

このとき，$\cos\angle B=\dfrac{\frac{3}{2}}{2}=\dfrac{3}{4}$．

また，$AD'=2$ のとき，$\cos\angle B=\dfrac{\frac{3-2}{2}}{2}=\dfrac{1}{4}$ だから，

$$\boxed{\frac{1}{4}}<\cos\angle B<\boxed{\frac{3}{4}}. \qquad \cdots\text{へ，ホ}$$

また，BC 上に，$AD=CD''$ となるように点 D″ をとると，$\angle CAD=\angle ACB=\angle ACD''$ で，AC を共有することから，$\triangle ACD\equiv\triangle CAD''$．

したがって，$\triangle ABC-\triangle ADC=\triangle ABC-\triangle AD''C=\triangle ABD''$．

三角形 ABD″ は $AB=AD''=2$ の二等辺三角形．その面積は $\dfrac{1}{2}AB^2\sin\angle BAD''$．

したがって，$\angle BAD''=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，つまり，

$$\angle B=\boxed{\frac{1}{4}}\pi \qquad \cdots\text{マ}$$

のとき，三角形 BAD″ の面積，つまり三角形 ABC と三角形 ADC の面積の差は最大値 $\boxed{2}$ をとる．

…ミ

1976 年　2 次試験

（この年の問題について）

この年および翌年の 2 次試験の問題は新課程，旧課程別の問題で，問題文の冒頭に〔**新課程の問題**〕，〔**旧課程の問題**〕のいずれかが明記されている．

新旧別問題のときは**第 $\boldsymbol{n}$ 問**の下に以下の**注意**があり，同一頁に新旧両問が記載されていた．

注意　下の問題のうち，あらかじめ届けでた課程の問題について答えよ．

1976 年　2 次試験（文科）

第 1 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

負でない実数 r，l に対して，xy 平面上の曲線

$$y=\begin{cases} x^2 & (0\leqq x\leqq r), \\ r^2 & (r\leqq x\leqq l+r), \\ (x-l-2r)^2 & (l+r\leqq x\leqq l+2r) \end{cases}$$

を考え，これを x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を V とする。r^2 と l の和が正の定数 c になるように r と l を変化させるとき，V の最大値を与えるような r と l の値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の積分，体積，**数学Ⅰ**：2 次方程式

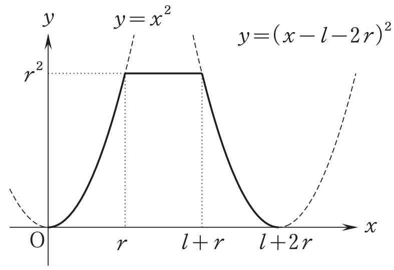
考え方

立体を 3 つの部分に分けて積分する．図を描いて対称性を把握する．

微分をして増減を調べる．計算は面倒だが丹念に計算．

【解答】

V は与曲線と x 軸が囲む領域を x 軸の回りに回転したときに通過する領域の体積と考えて解答する．



V のうち，$0\leqq x\leqq r$ の部分の体積を V_1，$r\leqq x\leqq l+r$ の部分の体積を V_2，$l+r\leqq x\leqq l+2r$ の部分の体積を V_3 とする．

V_2 は半径が r^2 高さが l の円柱の体積だから，$V_2=\pi r^4 l$.

V_3 は対称性から V_1 に等しい．

$$V_1=\pi\int_0^r x^4\,dx=\frac{\pi}{5}r^5.$$

$$\therefore\quad V=\pi r^4 l+\frac{2}{5}\pi r^5.$$

$c=r^2+l$ だから，

$$V=\pi r^4(c-r^2)+\frac{2}{5}\pi r^5=\frac{\pi}{5}(-5r^6+2r^5+5cr^4).\quad (0\leqq r\leqq\sqrt{c})$$

$$\frac{dV}{dr}=\frac{\pi}{5}(-30r^5+10r^4+20cr^3)=-2\pi(3r^2-r-2c)r^3.$$

$3r^2-r-2c=0$ の 2 解のうち，1 つは負で，1 つは正である．正の解を α とすると，

r	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$\dfrac{dV}{dr}$	0	$+$	0	$-$
V	0	↗		↘

$r=\sqrt{c}$ のとき，$\dfrac{dV}{dr}=-2\pi(\sqrt{c}-1)c^2$.

したがって，

(i)　$0<c\leqq 1$ のとき，$\sqrt{c}\leqq\alpha$．最大値を与えるのは

$$r=\sqrt{c},\quad l=0.$$

(ii)　$c>1$ のとき，$\sqrt{c}>\alpha$．最大値を与えるのは

$$r=\alpha=\frac{1+\sqrt{1+24c}}{6},\quad l=c-\frac{2+24c+2\sqrt{1+24c}}{36}=\frac{6c-1-\sqrt{1+24c}}{18}.$$

求める r，l は

$$(r,\ l)=\begin{cases}(\sqrt{c},\ 0) & (0<c\leqq 1),\\ \left(\dfrac{1+\sqrt{1+24c}}{6},\ \dfrac{6c-1-\sqrt{1+24c}}{18}\right) & (c>1).\end{cases}\qquad \cdots(答)$$

(注)「曲線を回転してできる回転体の体積」を字義通り解釈すれば体積は 0 のはずである.

第 2 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

時刻 $t=0$ に原点を出発し，xy 平面上で次の条件 (i)，(ii) に従っていろいろに運動する動点 P がある。

(i)　$t=0$ における P の速度を表わすベクトルの成分は $(1,\sqrt{3})$ である。

(ii)　$0<t<1$ において，P は何回か（1 回以上有限回）直角に左折するが，そのときを除けば P は一定の速さ 2 で直進する。（ただし，左折するのに要する時間は 0 とする）

このとき，時刻 $t=1$ において P が到達する点を Q として，Q の存在しうる範囲を図示せよ。

分　野

数学 I：不等式と領域

考え方

P の速度ベクトルは $\pm(1,\sqrt{3})$，$\pm(-\sqrt{3},\ 1)$ のいずれかであるから，それぞれの方向に向かう時間の範囲から P の動く範囲が決まる.

概形をまずつかむ. 次にそれが正しいことを証明する.

【解答】

P の最初の速度は $(1,\sqrt{3})$ で 1 回左折する毎に速度ベクトルは $(-\sqrt{3},\ 1)$，$(-1,\ -\sqrt{3})$，$(\sqrt{3},\ -1)$ と変化し，4 回左折するともとの速度 $(1,\sqrt{3})$ に戻る.

$0<t<1$ において速度ベクトルが $(1,\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},\ 1)$，$(-1,\ -\sqrt{3})$，$(\sqrt{3},\ -1)$ である時間の和をそれぞれ，p，q，r，s とすると，$t=1$ における P の到達点 Q について，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=p(1,\sqrt{3})+q(-\sqrt{3},\ 1)+r(-1,\ -\sqrt{3})+s(\sqrt{3},\ -1)=(p-r)(1,\sqrt{3})+(q-s)(-\sqrt{3},\ 1)$.

ただし，時刻 $0<t<1$ に 1 回以上左折するから，

$$p+q+r+s=1,\quad p>0,\quad q>0,\quad r\geqq 0,\quad s\geqq 0.\qquad \cdots ①$$

したがって，

$$-1<p+q-r-s=2(p+q)-1\leqq 1,\quad -1<p-q-r+s=2(p+s)-1<1.$$

$p+q-r-s=1$ になるのは，$r=s=0$ のとき，つまり 1 回だけ左折したとき.

$p-q-r+s=1-2(q+s)=1$ とすると，$q=0$ でなければならず，$p+q-r-s=2(p+q)-1=-1$ とすると，$p=q=0$ でなければならず，$p-q-r+s=2(p+s)-1=-1$ とすると，$p=0$ でなければならないからいずれもない.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $u=p-r$，$v=q-s$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u(1,\sqrt{3})+v(-\sqrt{3},\ 1)\quad (-1<u+v\leqq 1,\ -1<u-v<1).\qquad \cdots ②$$

をみたす.

逆に Q が ② をみたすとき，$p-r=u$，$q-s=v$ とおくと，$p+q+r+s=1$ から，

$$q=\frac{u+v+1}{2}-p,\quad r=p-u,\quad s=\frac{u-v+1}{2}-p.$$

$-1<u+v\leqq 1$，$-1<u-v<1$ から，

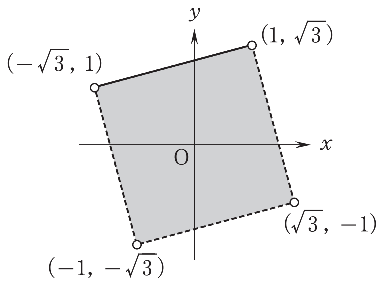
$$0<\frac{u+v+1}{2},\quad u\leqq\frac{u-v+1}{2},\quad 0<\frac{u-v+1}{2},\quad u<\frac{u+v+1}{2}.$$

よって，

$$0<p<\frac{u+v+1}{2},\quad u\leqq p\leqq\frac{u-v+1}{2}$$

をみたす p が存在し，① をみたす p，q，r，s が存在する．

以上より，Q の存在範囲は ② の範囲で，4 点 $(1,\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},1)$，$(-1,-\sqrt{3})$，$(\sqrt{3},-1)$ を頂点とする正方形の内部と，$(1,\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},1)$ を両端とする線分（両端を除く）．図示すると下図網掛部，境界は実線部を含み，破線部および白丸を除く．



（注） 直観的には $(1,\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3},1)$ 方向またはその逆方向への移動距離 u，v に関する問題で，1 回だけ曲がるときは $u+v=1$ であるが，2 回以上曲がるときは，無駄な動きがあるため $|u|+|v|<1$ となる．瞬間的に 2 回曲がることを考えれば，$|u|+|v|=1$ にいくらでも近づけることができる．

第 3 問

〔新課程の問題〕

点 $\mathrm{P}(x,y)$ は xy 平面上の円

$$C:(x-5)^2+(y-5)^2=r^2\quad(r>0)$$

の上を動く動点である。このとき点 P の点 A(9, 0) に関する対称点を Q とし，また点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点を R とする。

点 P が円 C の上を動くときの線分 QR の長さの最小値 $f(r)$ と最大値 $g(r)$ とを求めよ。また $f(r)$ が 0 となるような r の値を求めよ。

分 野

数学 I：図形の移動

考え方

QR の距離は P の座標で表される．その図形的な意味を考えると最大値，最小値は見えてくる．

【解答】

点 P の座標を (x,y) とすると，点 P の点 A(9, 0) に関する対称点 Q の座標は $(18-x,-y)$．点 P を原点 O のまわりに正の向きに $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した点 R の座標は $(-y,x)$．

$$\therefore\quad \mathrm{QR}^2=(18-x+y)^2+(x+y)^2=2x^2+2y^2-36x+36y+324=2(x-9)^2+2(y+9)^2.$$

よって，B(9, −9) とすると，$\mathrm{QR}=\sqrt{2}\,\mathrm{PB}$．したがって，P が B に最も近いとき QR は最小になり，最も遠いとき，QR は最大になる．

C の中心 $(5,\ 5)$ を C とすると，$\mathrm{BC}=\sqrt{(5-9)^2+(5+9)^2}=2\sqrt{53}$ であるから BP の最小値は $|2\sqrt{53}-r|$ であり，最大値は $2\sqrt{53}+r$ である．したがって，

$$f(r)=\sqrt{2}\,|2\sqrt{53}-r|,\quad g(r)=\sqrt{2}\,(2\sqrt{53}+r).\qquad\cdots(\text{答})$$

また，$f(r)=0$ となるのは C を中心とする半径 r の円が B を通るとき．すなわち $r=\mathrm{BC}=2\sqrt{53}$ のとき．　…(答)

【別解 1】

$\mathrm{QR}^2=2x^2+2y^2-36x+36y+324$ まで**【解答】**と同じ．

$$(x-5)^2+(y-5)^2=x^2+y^2-10x-10y+50=r^2$$

より，

$$\mathrm{QR}^2=2(10x+10y-50+r^2)-36x+36y+324=8\left(-2x+7y+28+\frac{r^2}{4}\right).$$

l : $-2x+7y+28+\dfrac{r^2}{4}=k$ とおくと，QR^2 は $8k$．P は C(5, 5) を中心とする円を描くから，k のとりうる値の範囲は直線 l が円 C と共有点をもつ k の範囲．よって，

$$\frac{\left|53+\dfrac{r^2}{4}-k\right|}{\sqrt{53}}\leqq r.\quad -\sqrt{53}\,r\leqq 53+\frac{r^2}{4}-k\leqq\sqrt{53}\,r.$$

$$\therefore\quad 53-\sqrt{53}\,r+\frac{r^2}{4}\leqq k\leqq 53+\sqrt{53}\,r+\frac{r^2}{4}.$$

$$53\pm\sqrt{53}\,r+\frac{r^2}{4}=\left(\sqrt{53}\pm\frac{r}{2}\right)^2.$$

$$\sqrt{2}\,|2\sqrt{53}-r|\leqq\mathrm{QR}=2\sqrt{2k}\leqq\sqrt{2}\,(2\sqrt{53}+r).$$

$$\therefore\quad f(r)=\sqrt{2}\,|2\sqrt{53}-r|,\quad g(r)=\sqrt{2}\,(2\sqrt{53}+r).\qquad\cdots(\text{答})$$

$f(r)=0$ となるのは $r=2\sqrt{53}$ のとき．

【別解 2】

P の座標は $(5+r\cos\theta,\ 5+r\sin\theta)$ とおけて，Q の座標は $(18-5-r\cos\theta,\ -5-r\sin\theta)$，R の座標は $(-5-r\sin\theta,\ 5+r\cos\theta)$ とおける．

$$\mathrm{QR}^2=\{18-r(\cos\theta-\sin\theta)\}^2+\{10+r(\cos\theta+\sin\theta)\}^2=2\{r^2+4(7r\sin\theta-2r\cos\theta)+212\}.$$

合成公式から，$7\sin\theta-2\cos\theta=\sqrt{53}\sin(\theta+\alpha)$ となり，

$$-\sqrt{53}\leqq 7\sin\theta-2\cos\theta\leqq\sqrt{53}.$$

$$\therefore\quad 2(r^2-4\sqrt{53}+212)=2(r-2\sqrt{53})^2\leqq\mathrm{QR}^2\leqq 2(r^2+4\sqrt{53}+212)=2(r+2\sqrt{53})^2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{2}\,|r-2\sqrt{53}|\leqq\mathrm{QR}\leqq\sqrt{2}\,(r+2\sqrt{53}).$$

$$\therefore\quad f(r)=\sqrt{2}\,|r-2\sqrt{53}|,\quad g(r)=\sqrt{2}\,(r+2\sqrt{53}).\qquad\cdots(\text{答})$$

$f(r)=0$ となるのは $r=2\sqrt{53}$ のとき．

第3問

〔旧課程の問題〕

xy 平面上に3つの円 A，B，C があって，それぞれ

$$A: x^2+y^2=9,$$
$$B: (x-4)^2+(y-3)^2=4,$$
$$C: (x-5)^2+(y+3)^2=1$$

で表わされる。この平面上の点Pから円 A，B，C に接線がひけるとき，Pからそれらの接点までの距離をそれぞれ $\alpha(\mathrm{P})$，$\beta(\mathrm{P})$，$\gamma(\mathrm{P})$ とする。このとき

$$\alpha(P)^2+\beta(P)^2+\gamma(P)^2=99$$

となる点Pの全体が作る曲線を図示し，その長さを求めよ。

分　野

（旧課程）数学Ⅰ：円の方程式

考え方

接線がひける条件はPが円外にあること．

Pと接点と中心が作る三角形は接点が直角の直角三角形．これを使って $\alpha(\mathrm{P})$，$\beta(\mathrm{P})$，$\gamma(\mathrm{P})$ が求められる．

【解答】

Pの座標を (x, y) とすると，3円 A，B，C に接線が引ける条件はPが3円 A，B，C の外部にあること．すなわち，

$$x^2+y^2>9,\quad (x-4)^2+(y-3)^2>4,\quad (x-5)^2+(y+3)^2>1. \qquad \cdots ①$$

3円 A，B，C の中心をそれぞれO，B，Cとし，Pから A，B，C へ引いた接線の接点（の1つ）をそれぞれS，T，Uとすると $\angle\mathrm{PSO}$，$\angle\mathrm{PTB}$，$\angle\mathrm{PUC}$ は直角だから，

$$\alpha(\mathrm{P})^2=\mathrm{PS}^2=\mathrm{OP}^2-\mathrm{OS}^2=x^2+y^2-9,$$
$$\beta(\mathrm{P})^2=\mathrm{PT}^2=\mathrm{BP}^2-\mathrm{BT}^2=(x-4)^2+(y-3)^2-4,$$
$$\gamma(\mathrm{P})^2=\mathrm{PU}^2=\mathrm{CP}^2-\mathrm{CU}^2=(x-5)^2+(y+3)^2-1.$$

$$\therefore\quad \alpha(\mathrm{P})^2+\beta(\mathrm{P})^2+\gamma(\mathrm{P})^2=(x^2+y^2-9)+\{(x-4)^2+(y-3)^2-4\}+\{(x-5)^2+(y+3)^2-1\}$$
$$=3(x^2+y^2-6x+15)=3\{(x-3)^2+y^2+6\}=99$$

から，

$$(x-3)^2+y^2=27.$$

したがって，Pは円 $D:(x-3)^2+y^2=27$ 上にある．

Pは円 D のうち，3円 A，B，C の外部になければならない（①）．円 D の中心 $(3, 0)$ をDとおくと，

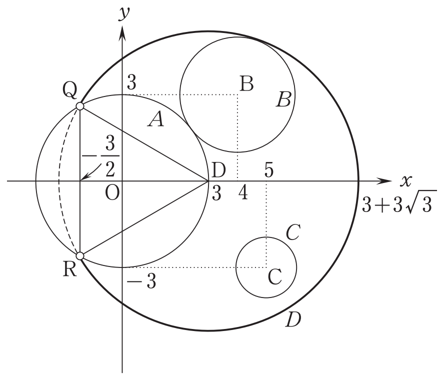
$$\mathrm{OD}^2=9,\quad \mathrm{BD}^2=10,\quad \mathrm{CD}^2=13.$$
$$\therefore\quad \mathrm{BD}+2=\sqrt{10}+2<3\sqrt{3},\quad \mathrm{CD}+1=\sqrt{13}+1<3\sqrt{3}$$

から，2円 B，C は円 D の内部にある．

A と D の交点は，$x^2-6x+y^2-18=-6x-9=0$ より，$x=-\dfrac{3}{2}$ 上にある．それらの座標は $\left(-\dfrac{3}{2}, \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$．これらをQ，Rとすると，$\mathrm{QR}=3\sqrt{3}$ で D の半径に等しい．したがって，三角形DQRは正三角形．

点P全体が作る曲線は右図太線部，白丸は除く．

（B は D の内部にある．）



その曲線の長さは

$$\frac{5}{6}\times2\pi\times3\sqrt{3}=5\sqrt{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

〔新課程の問題〕

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ とかく。

実数 a, b に対し

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とおく。いま $xI+yA$（x, y は実数）の形に表される行列全体からなる集合を R とし，R から O を除いた集合を G とする。

(i) R に属する任意の2つの行列の積は R に属することを示せ。

(ii) G に属する任意の行列が逆行列をもつとき，点 (a, b) はどのような範囲にあるか。これを図示せよ。

分　野

数学ⅡB：行列

考え方

素直に計算すれば容易.

逆行列をもつ条件は xy の2次同次式で表される．方程式の判別式を使うか，平方完成をすればよい.

【解答】

(i) R に属する任意の2つの行列 $xI+yA$, $x'I+y'A$ について,

$$(xI+yA)(x'I+y'A) = xx'I + (xy'+yx')A + yy'A^2,$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & ab \\ b & a+b^2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = aI + bA.$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad (xI+yA)(x'I+y'A) &= xx'I + (xy'+yx')A + yy'(aI+bA) \\ &= (xx'+ayy')I + (xy'+yx'+byy')A \in R. \end{aligned}$$

よって，R に属する任意の2つの行列の積は R に属する.　　（証明終り）

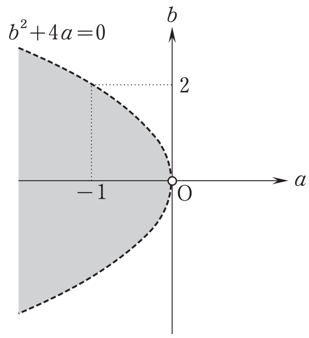
(ii) G に属する任意の行列 $xI+yA = \begin{pmatrix} x & ya \\ y & x+yb \end{pmatrix}$ が逆行列をもつ条件は行列式

$$D = x(x+yb) - (ya)y = x^2 + bxy - ay^2 = \left(x + \frac{b}{2}y\right)^2 - \left(a + \frac{b^2}{4}\right)y^2 \neq 0. \quad \cdots ①$$

（ii－a）　$y=0$ のとき，$x \neq 0$ だから $D = x^2 > 0$．① は常に成り立つ.

（ii－b）　$y \neq 0$ のとき，常に ① が成り立つ条件は $a + \dfrac{b^2}{4} < 0$.

よって，常に ① が成り立つ条件は $4a + b^2 < 0$．図示すると右図網掛部．境界は含まない.



（注）　当時の教科書にも「行列式」という用語はないが，事柄を明らかにするために，行列式という用語を用いた．この部分がなくても解答の意味は通じる.

第4問

〔旧課程の問題〕

a を整数とする。整式 $f(x)=x^5-ax-1$ が整数を係数とする2つの（正の次数の）整式の積に表わされるような a を求めよ。

またそのような a について $f(x)$ を上のような積に分解せよ。

分　野

（旧課程）数学Ⅰ：整式，因数分解

考え方

2つの整式に因数分解されたとき，少なくとも一方の次数は $\dfrac{5}{2}$ より小さいから，その次数は1または2.

因数の最高次の係数は1と考えてよく，定数項は ±1 である.

【解答】

$f(x)=x^5-ax-1$ とおく．2つの整式の一方は1次または2次．2つの因数の最高次の係数を1とすると，定数項は -1 の約数 ±1

(i) $f(x)$ が $x-1$ で割り切れるとき，因数定理より，

$$f(1)=1-a-1=0.\quad \therefore\quad a=0.$$

(ii) $f(x)$ が $x+1$ で割り切れるとき，因数定理より，

$$f(-1)=-1+a-1=0.\quad \therefore\quad a=2.$$

(iii) $f(x)$ が x^2+bx+1 で割り切れるとき，3次以上の係数を考慮すると，

$$f(x)=x^5-ax-1=(x^2+bx+1)\{x^3-bx^2+(b^2-1)x-1\}.$$

x^2，x の係数を比較して，$b^3-2b-1=0$，$-a=b^2-b-1$.

$b^3-2b-1=(b+1)(b^2-b-1)=0$ で b は整数だから，$b=-1$，$a=-1$.

(iv) $f(x)$ が x^2+bx-1 で割り切れるとき，3次以上の係数を考慮すると，

$$f(x)=x^5-ax-1=(x^2+bx-1)\{x^3-bx^2+(b^2+1)x+1\}.$$

x^2，x の係数を比較して，$b^3+2b+1=0$，$-a=-b^2+b-1$.

これをみたす整数 b は存在しない.

以上から，

$$a=-1,\ 0,\ 2. \qquad \cdots(答)$$

$$\begin{cases} a=-1 \text{ のとき，} & f(x)=(x^2-x+1)(x^3+x^2-1), \\ a=0 \text{ のとき，} & f(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1), \\ a=2 \text{ のとき，} & f(x)=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x-1). \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

1976 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

$0<t<1$ であるような t のおのおのの値に対して，x の関数

$$f(x)=\frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

(i)　区間 $0<x<1$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値 α は t に関係して定まる数である。t が 0 から 1 に向かって動くとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ はどのように動くかを図示せよ。

(ii)　区間 $0<x\leqq t$ において $f(x)$ の最小値を与える x の値を β とする。t が 0 から 1 に向かって動くとき，点 $(\beta,\ f(\beta))$ はどのように動くかを図示せよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

$f(x)$ を微分して増減を調べる．$0<x<1$，$0<t<1$ において，$f'(x)$ の正負は分子の 2 次関数だけで決まる．あとは丹念に計算．

【解答】

$$f'(x)=\frac{x(1-tx)-(x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2}=\frac{t(x^2+2tx-1)}{x^2(1-tx)^2}.$$

$g(x)=x^2+2tx-1$ とおく．

(i)　$g(0)=-1<0$，$g(1)=2t>0$ で，t，$x^2(1-tx)^2$ は正だから，$0<x<1$ において，$f'(x)=0$ となる x はただ 1 つで，その x で $f(x)$ は極小かつ最小になる．したがって，α は $g(x)=0$ の $0<x<1$ における解である．

$$\therefore\quad \alpha=-t+\sqrt{t^2+1}=\frac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}.$$

$0<t<1$ において，α は減少し，$\sqrt{2}-1<\alpha<1$.

$\alpha^2+2t\alpha-1=0$ より，$t=\dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}$.

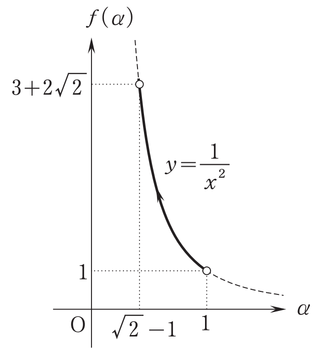
最小値は

$$f(\alpha)=\frac{\alpha+t}{\alpha(1-t\alpha)}=\frac{\alpha+\dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}}{\alpha\left(1-\dfrac{1-\alpha^2}{2\alpha}\alpha\right)}=\frac{1}{\alpha^2}.$$

よって，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ の軌跡は

$$f(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}\quad(\sqrt{2}-1<\alpha<1).$$

図示すると右図太線部，両端を含まない．



(ii) $g(t)=3t^2-1$.

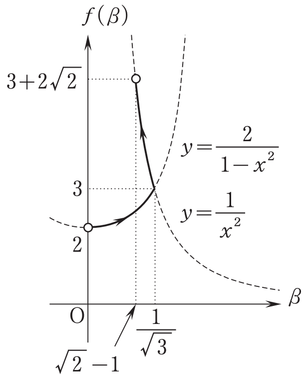
(ii-a) $0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$t<\alpha$．$f(x)$ は $0<x\leqq t$ で単調に減少し，$x=t$ で最小になる．$\beta=t$ で，最小値は $f(t)=\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{1-\beta^2}$．$\beta$，$f(\beta)$ は単調に増加し $0<\beta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii-b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq t<1$ のとき，$\alpha\leqq t$ だから，$f(x)$ は $x=\alpha$ で最小になる．したがって，$\beta=\alpha$，$f(\beta)=f(\alpha)=\dfrac{1}{\beta^2}$．$\beta$ は単調に減少し，$\sqrt{2}-1<\beta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

以上から，点 $(\beta,\ f(\beta))$ の軌跡は

$$\begin{cases} f(\beta)=\dfrac{2}{1-\beta^2} & \left(0<\beta<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ f(\beta)=\dfrac{1}{\beta^2} & \left(\sqrt{2}-1<\beta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{cases}$$

図示すると右図太線部，両端を含まない．



第 4 問

〔新課程の問題〕，〔旧課程の問題〕

（文科　第 3 問の新・旧課程の問題とそれぞれ同じ）

第 5 問

〔新課程の問題〕

z 軸を軸とする半径 1 の円柱の側面で，xy 平面より上（z 軸の正の方向）にあり，平面 $x-\sqrt{3}\,y+z=1$ より下（z 軸の負の方向）にある部分を D とする。D の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

円柱の表面は $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$ で表わされる．

与えられた範囲を θ, z で表して積分する.

【解答】

円柱の表面は $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ z)$ で表わされる.

θ は半径 1 の円周上で $(1,\ 0)$ からの弧長を表すことに注意.

xy 平面より上の部分は, $z \geqq 0$.

$x-\sqrt{3}\,y+z=1$ より下の部分は $z \leqq 1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=1+2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

D の側面を θz 平面の $0 \leqq \theta < 2\pi$ 部分と考え, そのうち, 2 平面の間にある部分は

$$0 \leqq z \leqq 1+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$$

で表される.

$1+2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right) \geqq 0$, すなわち, $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right) \geqq -\dfrac{1}{2}$ となる部分は $-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{7}{6}\pi$, つまり, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{4}{3}\pi$.

よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4}{3}\pi}\left\{1+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right\}d\theta \\ &= \left[\theta-2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

…(答)

第 5 問

〔旧課程の問題〕

点 P は xy 平面の原点 O を時刻 $t=0$ に出発して, x 軸上を正の向きに動く。時刻 t において

x 軸, 曲線 $y=\dfrac{x^2+1}{x+1}$, y 軸, P を通って y 軸に平行な直線

で囲まれた図形の面積を S とする。

P が点 $(x,\ 0)$ を通過するときの S の変化率 $\dfrac{dS}{dt}$ は x^2+1 に等しいという。このとき S を t の式で表わせ。ただし P の座標は時刻 t の微分可能な関数とする。

分　野

(旧課程) 数学Ⅲ：微分方程式

考え方

S は x の関数として表される. $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ を使うと, t の関数 x の微分方程式がたつ.

【解答】

時刻 t における点 P の x 座標を $x(t)$ とする.

このとき,

$$S=\int_0^x \frac{X^2+1}{X+1}dX.$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{x^2+1}{x+1}\frac{dx}{dt}=x^2+1.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x+1}\frac{dx}{dt}=1.\quad \int\frac{dx}{x+1}=t+C.\quad \log(x+1)=t+C.$$

$t=0$ のとき，$x=0$ だから $C=0$．よって，$t=\log(x+1)$．$x=e^t-1$．

$$S=\int_0^x\frac{(X+1)^2-2(X+1)+2}{X+1}dX=\int_0^x\left\{(X+1)-2+\frac{2}{X+1}\right\}dX$$

$$=\left[\frac{(X+1)^2}{2}-2X+2\log(X+1)\right]_0^x=\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\log(x+1)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{e^{2t}}{2}-2(e^t-1)+2t-\frac{1}{2}=\frac{e^{2t}}{2}-2e^t+2t+\frac{3}{2}.$$ …(答)

第 6 問

〔新課程の問題〕

（文科　第 4 問と同じ）

第 6 問

〔旧課程の問題〕

a，b，c，d を実数として

$$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

とおく。

(i) 方程式 $f(x)=0$ が 4 個の相異なる実根をもつとき，実数 k に対して，方程式

$$f(x)+kf'(x)=0$$

の実根の個数を求めよ。

(ii) 2 つの方程式 $f(x)=0$，$f''(x)=0$ が 2 個の相異なる実根を共有するとき，曲線 $y=f(x)$ は y 軸に平行なある直線に関して対称であることを示せ。

分　野

（旧課程）数学ⅡB：整式の微分，整式の積分，**（旧課程）数学Ⅰ**：共通解

考え方

(i) は $f'(x)=0$ の解における $f(x)+kf'(x)$ の正負を考える．

(ii) は $f''(x)=0$ は 2 次方程式でその 2 解を x_0-t，x_0+t とおいて整理．2 回積分すると $f(x)$ が得られる．

【解答】

問題文の「実根」は「実数解」の旧課程の表記である．

(i) $f(x)=0$ が 4 つの実数解を α，β，γ，δ（$\alpha<\beta<\gamma<\delta$）とする．

平均値の定理から，$f'(x)=0$ の解は $\alpha<x<\beta$，$\beta<x<\gamma$，$\gamma<x<\delta$ の範囲にそれぞれ，少なくとも 1 個ずつ存在する．

$f'(x)=0$ は 3 次方程式だからたかだか 3 個の解をもつ．$f'(x)=0$ の 3 つの解は実数で，これらを p，q，r（$p<q<r$）とすると，$\alpha<p<\beta<q<\gamma<r<\delta$．

このとき，$f(p)<0$，$f(q)>0$，$f(r)<0$．また，$f'(p)=f'(q)=f'(r)=0$．

$\therefore\quad f(p)+kf'(p)=f(p)<0,\quad f(q)+kf'(q)=f(q)>0,\quad f(r)+kf'(r)=f(r)<0.$

$f(x)+kf'(x)$ の最高次は $f(x)$ の最高次と同じだから，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)+kf'(x)\}=+\infty$．

よって，$f(x)+kf'(x)=0$ の解は $x<p$，$p<x<q$，$q<x<r$，$r<x$ にそれぞれ1つずつ解をもつ．よって，$f(x)+kf'(x)=0$ の実数解の個数は4個．…(答)

(i)の**【別解】**

$f(x)=0$ の4つの解を α，β，γ，δ ($\alpha<\beta<\gamma<\delta$) とおくと，

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

$$f'(x)=(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)+(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\delta)+(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

$k=0$ のとき，$f(x)+kf'(x)=f(x)=0$ は4実数解をもつ．

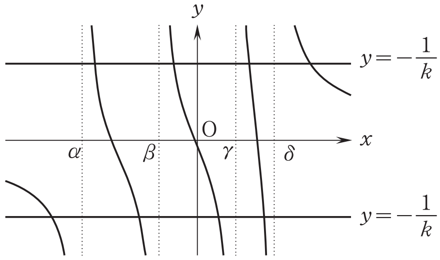
$k\neq 0$ のとき，$f(x)=0$ は重解をもたないから $f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma)f'(\delta)\neq 0$．

よって，α，β，γ，δ は $f(x)+kf'(x)=0$ の解ではない．$f(x)\neq 0$ のとき，

$$-\frac{1}{k}=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}.$$

$F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ とおくと，$F(x)=-\dfrac{1}{k}$ は $f(x)+kf'(x)=0$ と共通解をもつ．$\dfrac{1}{x-A}$ は $x\neq A$ で単調減少だから，$F(x)$ は $x\neq\alpha$，β，γ，δ で単調減少．

$\displaystyle\lim_{x\to A\pm 0}\frac{1}{x-A}=\pm\infty$．



$y=F(x)$ のグラフは右図．$y=-\dfrac{1}{k}$ との交点の個数は $k(\neq 0)$ によらず4個．

よって，$f(x)+kf'(x)=0$ の実数解の個数は4個．…(答)

(ii) $f(x)=0$，$f''(x)=0$ の共通解を x_0-t，x_0+t ($t>0$) とする．

$f(x)$ の x^4 の係数は1，$f'(x)$ の x^3 の係数は4，$f''(x)$ の x^2 の係数は12．よって，

$$f''(x)=12(x-x_0+t)(x-x_0-t)=12(x-x_0)^2-12t^2.$$

$$f'(x)=\int f''(x)\,dx=4(x-x_0)^3-12t^2(x-x_0)+C.$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=(x-x_0)^4-6t^2(x-x_0)^2+C(x-x_0)+D.$$

ただし，C，D は適当な実数．

$x_0\pm t$ は $f(x)=0$ の解だから，以下の式は複号に対して共に成り立つ．

$$f(x_0\pm t)=t^4-6t^4\pm Ct+D=0.$$

よって，

$$t^4-6t^4+D=0,\quad Ct=0.$$

$t>0$ より，$C=0$．

よって，

$$f(x)=(x-x_0)^4-6t^2(x-x_0)^2+D.$$

よって，$f(x_0+h)=f(x_0-h)=h^4-6t^2h^2+D$ よって，$y=f(x)$ は y 軸に平行な直線 $x=x_0$ に関して対称である．（証明終り）

(ii)の**【別解】** $f''(x)=12x^2+6ax+2b=0$ の2つの実数解を α，β とおくと，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}a,\quad \alpha\beta=\frac{1}{6}b. \quad \cdots①$$

一方 $f(\alpha)=f(\beta)=0$ から，

$$\alpha^4+a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha+d=\beta^4+a\beta^3+b\beta^2+c\beta+d=0$$

から，

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3+a(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+b(\alpha+\beta)+c=0.$$

① より，

$$\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3-2(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+6\alpha\beta(\alpha+\beta)+c=0.$$

$$c=\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2). \quad \cdots②$$

ここで，一般に

$$\begin{aligned}f(x_0+t)-f(x_0-t)&=\{(x_0+t)^4+a(x_0+t)^3+b(x_0+t)^2+c(x_0+t)+d\}\\&\quad-\{(x_0-t)^4+a(x_0-t)^3+b(x_0-t)^2+c(x_0-t)+d\}\\&=8tx_0{}^3+8t^3x_0+2a(3tx_0{}^2+t^3)+4btx_0+2ct.\end{aligned}$$

ここで，$x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とおき，①，② から a，b，c を α，β で表して整理すると，

$$\begin{aligned}f(x_0+t)-f(x_0-t)&=(\alpha+\beta)^3t+4(\alpha+\beta)t^3-(\alpha+\beta)\{3(\alpha+\beta)^2t+4t^3\}+12\alpha\beta(\alpha+\beta)t\\&\quad+2(\alpha+\beta)(\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2)t=0.\end{aligned}$$

t によらず $f(x_0+t)-f(x_0-t)=0$ となる．

よって，$y=f(x)$ は y 軸に平行な直線 $x=x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ について対称である．　（証明終り）

(ii) の【別解 2】

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x^2+px+q)$，$f''(\alpha)=f''(\beta)=0$ とする．

$$f'(x)=(2x-\alpha-\beta)(x^2+px+q)+(x-\alpha)(x-\beta)(2x+p).$$

$$f''(x)=2(x^2+px+q)+2(2x-\alpha-\beta)(2x+p)+2(x-\alpha)(x-\beta).$$

$$f''(\alpha)=2(\alpha^2+p\alpha+q)+2(\alpha-\beta)(2\alpha+p)=0,$$

$$f''(\beta)=2(\beta^2+p\beta+q)+2(\beta-\alpha)(2\beta+p)=0.$$

$$f''(\alpha)-f''(\beta)=6(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)+p\}=0.$$

$\alpha\neq\beta$ より，$p=-(\alpha+\beta)$．

よって，

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-\alpha)(x-\beta)\{x^2-(\alpha+\beta)x+q\}\\&=\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right\}\left\{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+q\right\}.\end{aligned}$$

よって，$y=f(x)$ は y 軸に平行な直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ について対称．　（証明終り）

（注）　$f(x)=\left\{\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\right\}\left\{\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}(\alpha-\beta)^2\right\}$.

(ii)の【別解 1】，【別解 2】の d，q は

$$d=-\alpha\beta(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2),\ q=-(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)$$

である．

1977 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

m を実数の定数とし，xy 平面上の 2 直線

$$l_1:mx-y=0,\quad l_2:x+my-m-2=0$$

を考える。どのような m に対しても，直線 l_1 と直線 l_2 との交点 P は一定の円

$$C:(x-\boxed{\mathrm{a}})^2+(y-\boxed{\mathrm{b}})^2=\boxed{\mathrm{c}}$$

の上にある。

そこで，直線 l_1 と円 C との交点を P，Q_1 とし，直線 l_2 と円 C との交点を P，Q_2 とする。m が実数全体を動くとき，$\triangle PQ_1Q_2$ の面積がとる最大値は $\boxed{\mathrm{d}}$ である。

分　野

数学 I ：図形と方程式，軌跡

【解答】

l_1 は原点を通り傾き m の直線，$l_2:(x-2)+m(y-1)=0$ は定点 $(2,\ 1)$ を通り，$m \neq 0$ のとき傾き $-\dfrac{1}{m}$ の直線．$m=0$ のときを含めて，$l_1 \perp l_2$.

よって，交点 P は 2 点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 1)$ を直径の両端とする円

$$(x-\boxed{1})^2+\left(y-\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2=\boxed{\frac{5}{4}}\qquad \cdots\text{a, b, c}$$

上にある．

$(0,\ 0)$，$(2,\ 1)$ は上の円周上にあるから，l_1，l_2 と C の交点は P とそれぞれ $Q_1(0,\ 0)$，$Q_2(2,\ 1)$ である．

P と直線 Q_1Q_2 の距離の最大値は半径 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$Q_1Q_2=\sqrt{5}$ から $\triangle PQ_1Q_2$ の面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\boxed{\frac{5}{4}}.\qquad \cdots\text{d}$$

（注 1） 円の方程式は計算によって次のように求めることができる．$x \neq 0$ のとき，l_1 の式から $m=\dfrac{y}{x}$.

l_2 の式に代入して $x+\dfrac{y^2}{x}-\dfrac{y}{x}-2=0$．よって，

$$x^2+y^2-y-2x=0.\quad \therefore\quad (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}.$$

$x=0$ のとき，$y=0$ これも含めて $P(x,\ y)$ は円

$$(x-\boxed{1})^2+\left(y-\boxed{\frac{1}{2}}\right)^2=\boxed{\frac{5}{4}}\qquad \cdots\text{a, b, c}$$

上にある．

（注 2） P の軌跡は円 C から $(0,\ 1)$ を除いた図形である．

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

xy 平面における原点のまわりのある回転により，直線 $l：3x+y+1=0$ は次の 3 直線 l_1，l_2，l_3 のうちのどれかに重なる。

$$l_1：3x+1=0,$$
$$l_2：6x-3y+2=0,$$
$$l_3：13x-9y+5=0$$

この性質をもつ回転は，任意の点 $(x,\ y)$ を，関係

$$x'=\boxed{\text{e}}\,x+\boxed{\text{f}}\,y,$$
$$y'=\boxed{\text{g}}\,x+\boxed{\text{h}}\,y$$

によって定まる点 $(x',\ y')$ に移す。

分　野

数学Ⅰ：図形の移動，点と直線の距離

【解答】

原点と l，l_1，l_2，l_3 との距離をそれぞれ d，d_1，d_2，d_3 とすると，

$$d=\frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad d_1=\frac{1}{3},\quad d_2=\frac{2}{\sqrt{6^2+3^2}}=\frac{2}{3\sqrt{5}},\quad d_3=\frac{5}{\sqrt{13^2+9^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$d=d_3$ より，原点中心の回転で l が重なるのは l_3.

回転角を θ とすると，回転行列は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. l 上の点 $(t,\ -3t-1)$ の像を $(x',\ y')$ とすると，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\ -3t-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\cos\theta+(3t+1)\sin\theta\\ t\sin\theta+(-3t-1)\cos\theta\end{pmatrix}.$$

点 $(x',\ y')$ が常に l_3 上にあるから，

$$13\{t\cos\theta+(3t+1)\sin\theta\}-9\{t\sin\theta+(-3t-1)\cos\theta\}+5=0.$$
$$(4\cos\theta+3\sin\theta)10t+13\sin\theta+9\cos\theta+5=0.$$

任意の t で成り立つから，

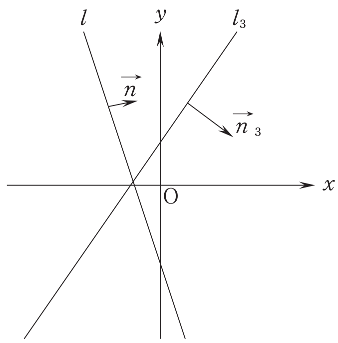
$$4\cos\theta+3\sin\theta=0,\quad 13\sin\theta+9\cos\theta+5=0.$$

よって，

$$\cos\theta=\frac{3}{5},\quad \sin\theta=-\frac{4}{5}.$$

よって，

$$x'=\boxed{\frac{3}{5}}\,x+\boxed{\frac{4}{5}}\,y,\quad \cdots\text{e, f}$$
$$y'=\boxed{-\frac{4}{5}}\,x+\boxed{\frac{3}{5}}\,y.\quad \cdots\text{g, h}$$



（注）l の法線ベクトルを $\vec{n}=(3,\ 1)$，l_3 の法線ベクトルを，$\vec{n_3}=(13,\ -9)$ とすると，$\vec{n}$ から $\vec{n_3}$ への回転角が θ.

$\cos\theta=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{n_3}}{|\vec{n}||\vec{n_3}|}$，回転方向は図を描いて判断．ただし，法線ベクトル $\vec{n}$，$\vec{n_3}$ の向きは直線から見て，共に原点側か，共に反対側かでなければならない．（右図は共に原点側）

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

1 辺の長さが 1 の正 4 面体を A とする。また A の各面の外心を頂点とする 4 面体を B とする。

このとき，B の全表面積は $\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{i}}}}$ で，A の全表面積の $\dfrac{1}{\boxed{\text{j}}}$ 倍である。また B の体積は $\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{k}}}}$ で，A の体積の $\dfrac{1}{\boxed{\text{l}}}$ 倍である。

分 野

数学ⅡB：立体図形

【解答】

A の 4 頂点を O，P，Q，R とし，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とすると，

$$|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|=1,\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{q}\cdot\vec{r}=\vec{r}\cdot\vec{p}=\frac{1}{2}.$$

△PQR，△QRO，△ROP，△OPQ の外心を O′，P′，Q′，R′ とすると，各面は正三角形なのでその外心は重心でもある．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\frac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}),\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{1}{3}(\vec{q}+\vec{r}).$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{O'P'}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}-\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=-\frac{1}{3}\vec{p}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

同様に，

$$\overrightarrow{\mathrm{O'Q'}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{O'R'}}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}.$$

よって，B は 1 辺の長さが $\dfrac{1}{3}$ の正四面体．その全表面積は

$$4\times\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{\boxed{27}}}. \qquad \cdots\text{i}$$

A と B の相似比が $1:\dfrac{1}{3}$ だから，B の全表面積は A の全表面積の

$$\frac{1}{3^2}=\frac{1}{\boxed{9}}\ \text{倍}. \qquad \cdots\text{j}$$

また，△P′Q′R′ の面積は $\dfrac{1}{12\sqrt{3}}$ で，その重心を G とすると，$\overrightarrow{\mathrm{O'G}}=-\dfrac{1}{9}(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r})$.

$$|\overrightarrow{\mathrm{O'G}}|=\frac{\sqrt{1^2+1^2+1^2+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}}}{9}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$ だから，B の体積は

$$\frac{1}{3}\,\frac{1}{12\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{2\cdot3^4\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{\boxed{52488}}} \qquad \cdots\text{k}$$

で，相似比から，A の体積の

$$\frac{1}{3^3}=\frac{1}{\boxed{27}}\ \text{倍}. \qquad \cdots\text{l}$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a，b を実数の定数とし，x の 3 次関数

$$f(x)=x^3+ax^2+bx$$

が，$x=\alpha$ で極大値をとり，$x=\beta>0$ で極小値 0 をとるとする。

このとき，次のことが成り立つ。

(1) $\beta=\boxed{\text{m}}\alpha$

(2) $f(\alpha)=f(\gamma)$，$\alpha\neq\gamma$ ならば $\gamma=\boxed{\text{n}}\alpha$

(3) $f(\alpha)=4$ ならば $a=\boxed{\text{o}}$，$b=\boxed{\text{p}}$

分 野

数学ⅡB：整式の微分

【解答】

(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b=3(x-\alpha)(x-\beta)$ とかけるから，

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{3},\quad \alpha\beta=\frac{b}{3}. \qquad \cdots①$$

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2+3\alpha\beta x.$$

$f(\beta)=0$ から，

$$f(\beta)=\beta^3-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\beta^2+3\alpha\beta^2=\frac{3}{2}\alpha\beta^2-\frac{1}{2}\beta^3=\frac{1}{2}(3\alpha-\beta)\beta^2=0.$$

$\beta>0$ より，

$$\beta=\boxed{3}\alpha. \qquad \cdots\text{m}$$

(2) $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(\alpha+3\alpha)x^2+3\alpha\cdot3\alpha x=x^3-6\alpha x^2+9\alpha^2x=x(x-3\alpha)^2.$

$$f(\alpha)=4\alpha^3.\quad f(\gamma)-f(\alpha)=\gamma^3-6\alpha\gamma^2+9\alpha^2\gamma-4\alpha^3=(\gamma-\alpha)^2(\gamma-4\alpha)=0.$$

$\alpha\neq\gamma$ より，

$$\gamma=\boxed{4}\alpha. \qquad \cdots\text{n}$$

(3) $f(\alpha)=4\alpha^3=4$ から，$\alpha=1$．$\beta=3$.

① から，

$$a=-\frac{3}{2}(\alpha+\beta)=\boxed{-6},\quad b=3\alpha\beta=\boxed{9}. \qquad \cdots\text{o, p}$$

1977 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

xy 平面上の曲線

$$C:\ y=x^2$$

の上に 2 個の動点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ があり，点 A において直線 AB が曲線 C の接線と直交するものとする。

このとき，点 B において直線 AB が曲線 C の接線となす鋭角を θ とすれば，次のことが成り立つ。

(1)　$a=1$ ならば，$b=\boxed{\mathrm{a}}$，$\tan\theta=\boxed{\mathrm{b}}$

(2)　$b=\pm\sqrt{\boxed{c}}$ のとき $|b|$ は最小になり，そのとき

$$\tan\theta=\sqrt{\boxed{\mathrm{d}}}$$

分　野

数学 II B：整式の微分，三角関数，加法定理

【解答】

(1)　A における接線の傾きは $2a$．法線の方程式は $a\neq0$ のとき，$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2$．

$a=0$ のときも含めて，$2ay=-x+a+2a^3$．

B がこの上にあるから，$2ab^2=-b+a+2a^3$．$(b-a)(2ab+2a^2+1)=0$．

$b\neq a$ から，$a\neq0$，$b=-a-\dfrac{1}{2a}$．B における接線の傾きは $2b=-2a-\dfrac{1}{a}$．

AB と B における接線のなす鋭角 θ について，AB および B における接線の傾きは $-\dfrac{1}{2a}$，$2b$ だから，tan の加法定理を使って，

$$\tan\theta=\left|\frac{2b+\dfrac{1}{2a}}{1-2b\dfrac{1}{2a}}\right|=\left|\frac{-2a-\dfrac{1}{2a}}{1+\left(2a+\dfrac{1}{a}\right)\dfrac{1}{2a}}\right|=|a|.$$

$a=1$ のとき，

$$b=-1-\frac{1}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}},\quad \tan\theta=\boxed{1}.$$ …a，b

(2)　相加平均・相乗平均の関係から，$|b|=\left||a|+\dfrac{1}{2|a|}\right|\geqq2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$．等号は $a=\dfrac{\pm1}{\sqrt{2}}$ のとき．

よって，$|b|$ が最小になるのは $b=\pm\sqrt{\boxed{2}}$ のときで，そのとき $\tan\theta=\sqrt{\boxed{\dfrac{1}{2}}}$．　…c，d

Ⅱ

2 組の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が次の関係を満足している。

$$a_n=5a_{n-1}-6b_{n-1},$$
$$b_n=3a_{n-1}-4b_{n-1}$$

ベクトル $(a_n,\ b_n)$ を考えるとき，次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

(1) $(a_1,\ b_1)=(\boxed{\text{e}},\ 1)$ のとき，
$$(a_2,\ b_2)=2(a_1,\ b_1)$$

(2) $(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$ のとき，
$$(a_n,\ b_n)=(\boxed{\text{f}})^{n-1}(a_1,\ b_1)$$

(3) $(a_1,\ b_1)=(1,\ 0)$ のとき，
$$(a_{10},\ b_{10})=(\boxed{\text{g}},\ \boxed{\text{h}})$$

分　野

数学ⅡB：数列

【解答】

(1) $b_1=1$ のとき，$a_2=5a_1-6=2a_1$，$b_2=3a_1-4=2$ から，
$$(a_1,\ b_1)=(\boxed{2},\ 1).$$ …e

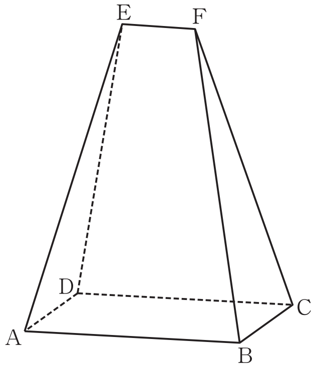
(2) $(a_1,\ b_1)=(1,\ 1)$ のとき，$(a_2,\ b_2)=(-1,\ -1)=-(1,\ 1)$.
一般に $a_n=b_n$ のとき，$(a_{n+1},\ a_{n+1})=-(a_n,\ a_n)$.
よって，$(a_n,\ b_n)=(\boxed{-1})^{n-1}(a_1,\ b_1)$. …f

(3) $(a_1,\ b_1)=(1,\ 0)$ のとき，
$$(1,\ 0)=k_1(2,\ 1)+l_1(1,\ 1)$$
とおくと，$k_1=1$，$l_1=-1$.
$$(a_n,\ b_n)=k_n(2,\ 1)+l_n(1,\ 1)$$
とおくと，
$$\begin{cases} a_n=2k_n+l_n=5(2k_{n-1}+l_{n-1})-6(k_{n-1}+l_{n-1})=4k_{n-1}-l_{n-1}, \\ b_n=k_n+l_n=3(2k_{n-1}+l_{n-1})-4(k_{n-1}+l_{n-1})=2k_{n-1}-l_{n-1}. \end{cases}$$
よって，$k_n=2k_{n-1}$，$l_n=-l_{n-1}$. $k_n=2^{n-1}$，$l_n=(-1)^n$.
よって，
$$(a_{10},\ b_{10})=k_{10}(2,\ 1)+l_{10}(1,\ 1)=2^9(2,\ 1)+(-1)^{10}(1,\ 1)=(\boxed{1025},\ \boxed{513}).$$ …g，h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

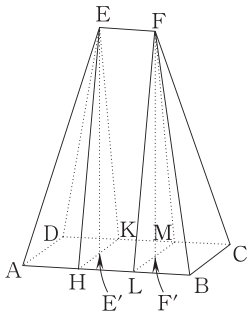
図のような立体図形を考える。3 辺 AB，DC，EF は互いに平行であり，底面 ABCD は長方形である。また AB$=9$，BC$=8$，EF$=3$，EA$=$ED$=$FB$=$FC$=13$ とする。このとき，この立体の体積は $\boxed{\ \mathrm{i}\ }$ であり，4 角形 ABFE の対角線 AF の長さは $\boxed{\ \mathrm{j}\ }$ であり，この 4 角形の面積は $\sqrt{\boxed{\ \mathrm{k}\ }}$ である。また $\angle\mathrm{AFC}=\alpha$ とすると，$\cos\alpha=\boxed{\ \mathrm{l}\ }$ である。



分 野

数学ⅡB：立体図形

【解答】



E，F から，平面 ABCD へ下した垂線の足を E′，F′ とする．E′ から AB，DC へ下した垂線の足をそれぞれ，H，K とし，F′ から AB，DC へ下した垂線の足をそれぞれ，L，M とする．

$\mathrm{E'H}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{AB}-\mathrm{EF})=3$ より，

$$\mathrm{AE'}=\sqrt{\mathrm{E'H}^2+\mathrm{AH}^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

よって，高さ $\mathrm{EE'}=\sqrt{\mathrm{AE}^2-\mathrm{AE'}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12.$

この立体の体積は

四角錐 E-AHKD＋三角柱 EHK-FLM＋四角錐 F-LBCM

$$=\frac{1}{3}\times3\times8\times12+\frac{1}{2}\times8\times12\times3+\frac{1}{3}\times3\times8\times12=\boxed{336}. \qquad \cdots\mathrm{i}$$

$$\mathrm{AF}=\sqrt{\mathrm{AL}^2+\mathrm{LF'}^2+\mathrm{FF'}^2}=\sqrt{6^2+4^2+12^2}=\boxed{14}. \qquad \cdots\mathrm{j}$$

また，台形 ABEF の高さ $\mathrm{EH}=\sqrt{\mathrm{EE'}^2+\mathrm{E'H}^2}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10}.$

よって，台形ABEFの面積$=\dfrac{1}{2}(\mathrm{EF}+\mathrm{AB})\mathrm{EH}=\dfrac{1}{2}(3+9)4\sqrt{10}=24\sqrt{10}=\sqrt{\boxed{5760}}$. $\cdots\mathrm{k}$

三角形 AFC において，AF$=14$，FC$=13$，$\mathrm{AC}=\sqrt{9^2+8^2}=\sqrt{145}.$

余弦定理から

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{AF}^2+\mathrm{CF}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{CF}}=\frac{14^2+13^2-145}{2\cdot14\cdot13}=\boxed{\frac{55}{91}}. \qquad \cdots\mathrm{l}$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

xy 平面上に動点P，Qがある。時刻 t における点Pの座標は

$$\left(\frac{4}{3}-2t^2,\ t-t^3\right)$$

である。点Qは，時刻0に点Pと同じ位置から出発して，ベクトル $(-1,\ m)$ の方向に直進し，時刻 t におけるその速さは $5t$ である。さらに，点Qは時刻 $a>0$ のとき点Pとふたたび出会うものとする。

このようなことが起こる m，a は2通りある。それらを m_1，a_1 および m_2，a_2 で表すとき，$m_1<m_2$ ならば

$$m_1=\boxed{\text{m}},\quad a_1=\boxed{\text{n}};\ m_2=\boxed{\text{o}},\quad a_2=\boxed{\text{p}}$$

である。

分　野

数学ⅡB：整式の積分，速度・加速度

【解答】

Qの進む方向の単位ベクトルは $\dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}(-1,\ m)$．時刻0に $\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$ を出発し，速さ $5t$ で直進するから，移動距離は $\displaystyle\int_0^t(5t)\,dt=\frac{5}{2}t^2$.

時刻 t におけるQの位置は $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{5t^2}{2\sqrt{1+m^2}},\ \dfrac{5mt^2}{2\sqrt{1+m^2}}\right)$.

時刻 a でPとQが出会うから，

$$\frac{4}{3}-2a^2=\frac{4}{3}-\frac{5a^2}{2\sqrt{1+m^2}},\quad a-a^3=\frac{5ma^2}{2\sqrt{1+m^2}}.$$

$a>0$ だから，

$$2=\frac{5}{2\sqrt{1+m^2}},\quad 1-a^2=\frac{5ma}{2\sqrt{1+m^2}}. \qquad \cdots①$$

①の第1式から，$m=\pm\dfrac{3}{4}$.

よって，

$$m_1=\boxed{-\frac{3}{4}}. \qquad \cdots\text{m}$$

このとき，①の第2式から，

$$a^2-\frac{3}{2}a-1=0.\quad a=2,\ -\frac{1}{2}.$$

$a>0$ から，

$$a_1=\boxed{2}. \qquad \cdots\text{n}$$

また，

$$m_2=\boxed{\frac{3}{4}}. \qquad \cdots\text{o}$$

このとき，①の第2式から，

$$a^2+\frac{3}{2}a-1=0.\quad a=-2,\ \frac{1}{2}.$$

$a>0$ から，

$$a_2=\boxed{\frac{1}{2}}. \qquad \cdots\text{p}$$

1977 年　2 次試験（文科）

第 1 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

k を実数の定数とするとき，x の関数

$$f(x)=|x^3-3kx|$$

が $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表わす。

k の実数全体を動くとき，$M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

考え方

$f(x)$ は偶関数なので，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考えればよい．

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲における $f(x)$ の最大値は $0 \leqq x \leqq 1$ 内における極大値か両端の値 $f(0)$ または $f(1)$.

$f(x) \geqq 0$，$f(0)=0$ だから $f(0)$ は考えなくてもよい．

あとは丹念に場合分けをすること．

【解答】

$f(x)$ は偶関数なので，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値は，$0 \leqq x \leqq 1$ における最大値である．

$g(x)=x^3-3kx$ とおくと，$g'(x)=3x^2-3k$.

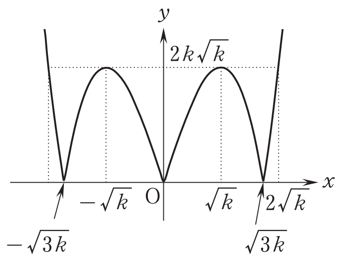
（i）$k \leqq 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ で，$f(x)=x^3-3kx=g(x)$．$f(x)$ は単調に増加する．よって，

$$M(k)=f(1)=1-3k. \quad \cdots①$$

（ii）$k>0$ のとき，$x=\sqrt{k}$ で，$g'(x)=0$.

$f(x)=0$ となるのは $x=\sqrt{3k}$ のとき．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{k}$	$\cdots$	$\sqrt{3k}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
		↘		↗		↗
$f(x)$	0	↗		↘	0	↗



（ii-a）$0<\sqrt{3k}<1$ のとき，つまり，$0<k<\dfrac{1}{3}$ のとき，

最大値は $f(\sqrt{k})=2k\sqrt{k}$ または $f(1)=|1-3k|=1-3k$.

$$f(\sqrt{k})-f(1)=2k\sqrt{k}-1+3k=2(\sqrt{k})^3+3(\sqrt{k})^2-1=(\sqrt{k}+1)^2(2\sqrt{k}-1).$$

（ii-a-ア）$0<k \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき，$f(\sqrt{k}) \leqq f(1)$.

$$\therefore \quad M(k)=f(1)=1-3k. \quad \cdots②$$

（ii-a-イ）$\dfrac{1}{4}<k<\dfrac{1}{3}$ のとき，$f(\sqrt{k})>f(1)$.

$$\therefore \quad M(k)=f(\sqrt{k})=2k\sqrt{k}. \quad \cdots③$$

（ii-b）$\sqrt{k}<1 \leqq \sqrt{3k}$ のとき，つまり，$\dfrac{1}{3} \leqq k<1$ のとき，

$$M(k)=f(\sqrt{k})=2k\sqrt{k}. \quad \cdots④$$

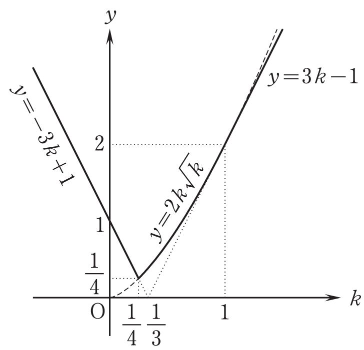
（ii-c）$1 \leqq \sqrt{k}$ のとき，つまり，$1 \leqq k$ のとき，

$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ で単調増加.

$$M(k)=f(1)=3k-1. \qquad \cdots⑤$$

①，②，③，④，⑤ をまとめて，

$$M(k)=\begin{cases} 1-3k & \left(k \leqq \dfrac{1}{4}\right), \\ 2k\sqrt{k} & \left(\dfrac{1}{4}<k<1\right), \\ 3k-1 & (1 \leqq k). \end{cases}$$



$k \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき，$M(k)$ は減少し，$k>\dfrac{1}{4}$ のとき，$M(k)$ は増加する.

よって，$M(k)$ が最小となるのは $k=\dfrac{1}{4}$ のときで，最小値は

$M\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}.$ $\cdots$(答)

第2問

〔新課程の問題〕

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=J$ と書く。

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 t に対し，

$$A(I-tJ)=I+tJ$$

という関係が成り立つとき，a，b，c，d を t の式で表わせ。

また t が実数全体を動くとき，関係

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で定まる点 $(x,\ y)$ が動いてできる図形を求め，これを図示せよ。

分 野

数学ⅡB：行列，軌跡

考え方

$A=(I+tJ)(I-tJ)^{-1}$ で求められる．x，y を t で表してから t を消去するのは少し難しい．$t=\tan\theta$ とおくと難なく消去できる．分母に $1+t^2$ がある分数式ではこの方法は有効である．

【解答】

$$I-tJ=\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}. \quad \therefore \quad (I-tJ)^{-1}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$A=(I+tJ)(I-tJ)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix} 1-t^2 & -2t \\ 2t & 1-t^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

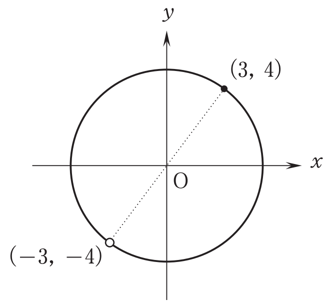
$$\therefore \quad a=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad b=\frac{-2t}{1+t^2}, \quad c=\frac{2t}{1+t^2}, \quad d=\frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad \cdots(答)$$

$t=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,$$
$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta.$$

よって，

$$A=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}.$$



$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$(x,\ y)$ は $(3,\ 4)$ を $2\theta\ (-\pi<2\theta<\pi)$ 回転した点．よって，$(x,\ y)$ が動いてできる図形は原点を中心とし，半径が $\sqrt{3^2+4^2}=5$ の円のうち，$(-3,\ -4)$ を除いたもの．

$$x^2+y^2=25\quad (x,\ y)\neq(-3,\ -4).\qquad\cdots(答)$$

後半の部分の【別解】

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=(I+tJ)(I-tJ)^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}(I+tJ)^2\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=(I-tJ)^{-1}(I+tJ)\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad (I-tJ)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(I+tJ)\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}.\quad \begin{pmatrix}x+ty\\ -tx+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4t\\ 3t+4\end{pmatrix}.\quad \begin{cases}(y+4)t=-x+3,\\ (x+3)t=y-4.\end{cases}\qquad\cdots①$$

$y\neq-4$ のとき，$t=\dfrac{-x+3}{y+4}$．$\therefore\quad (x+3)\dfrac{-x+3}{y+4}=y-4$．

$$\therefore\quad x^2+y^2=25.$$

$y=-4$ のとき，$x=3$．（$(x,\ y)=(-3,\ -4)$ では ① をみたさない．）

よって，

$$x^2+y^2=25\quad (x,\ y)\neq(-3,\ -4).\qquad\cdots(答)$$

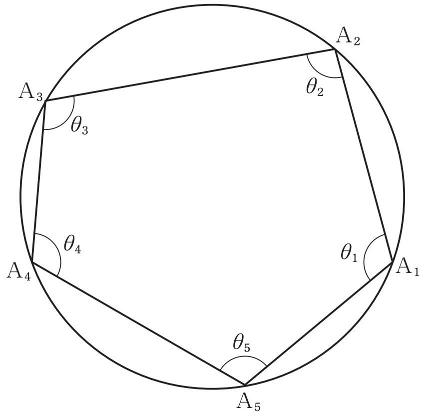
第2問

〔旧課程の問題〕

θ_1，θ_2，θ_3，θ_4，θ_5 を正の数とする。図のように円に内接する5角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ で，$1\leqq i\leqq 5$ に対して角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するためには，

$$\begin{aligned}\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5&=3\pi,\\ \theta_1+\theta_3&>\pi,\\ \theta_2+\theta_4&>\pi,\\ \theta_3+\theta_5&>\pi,\\ \theta_1+\theta_4&>\pi,\\ \theta_2+\theta_5&>\pi\end{aligned}$$

が同時に成り立つことが必要かつ十分であることを証明せよ。



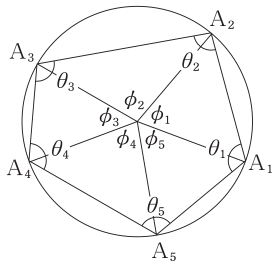
分　野

（旧課程）数学Ⅰ：平面図形，三角関数，不等式

考え方

θ_i を中心角で表し，中心角の条件を考える．

【解答】



与円の中心をOとし，$\angle A_iOA_{i+1}=\phi_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ とする．ただし，$A_5=A_0$，$A_6=A_1$ とする．$\angle OA_iA_{i+1}=\dfrac{\pi-\phi_i}{2}$ だから，

$\theta_i=\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}=\dfrac{2\pi-\phi_{i-1}-\phi_i}{2}$.

よって，$\phi_{i-1}+\phi_i=2\pi-2\theta_i$.

$$\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5=2\pi$$

だから，

$$\phi_1=2\pi-(2\pi-2\theta_3)-(2\pi-2\theta_5)=2\theta_3+2\theta_5-2\pi.$$

同様に，

$$\phi_2=2\theta_4+2\theta_1-2\pi,\quad \phi_3=2\theta_5+2\theta_2-2\pi,\quad \phi_4=2\theta_1+2\theta_3-2\pi,\quad \phi_5=2\theta_2+2\theta_4-2\pi.$$

円に内接する凸五角形が存在するための ϕ_i についての条件は

$$\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5=2\pi \text{ と } \phi_i>0 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$$

である．

$$\phi_1+\phi_2+\phi_3+\phi_4+\phi_5=2\pi \iff 4(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5)-10\pi=2\pi$$
$$\iff \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=3\pi.$$

また，

$$\phi_1>0,\quad \phi_2>0,\quad \phi_3>0,\quad \phi_4>0,\quad \phi_5>0$$
$$\iff \theta_3+\theta_5>\pi,\quad \theta_4+\theta_1>\pi,\quad \theta_5+\theta_2>\pi,\quad \theta_1+\theta_3>\pi,\quad \theta_2+\theta_4>\pi.$$

よって，与条件はすべてみたされる．

したがって，円に内接する五角形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ で，$1\leqq i\leqq 5$ に対して角 A_i の大きさが θ_i となるものが存在するための必要十分条件は与条件である．　（証明終り）

第3問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

xy 平面上に，不等式で表わされる3つの領域

$$A:\quad x \geqq 0$$
$$B:\quad y \geqq 0$$
$$C:\sqrt{3}\,x+y \leqq \sqrt{3}$$

をとる。いま任意の点Pに対し，Pを中心として A，B，C のどれか少くとも1つに含まれる円を考える。このような円の半径の最大値は点Pによって定まるから，これを $r(\mathrm{P})$ で表わすことにする。

ⅰ） 点Pが $A\cap C$ から $(A\cap C)\cap B$ を除いた部分を動くとき，$r(\mathrm{P})$ の動く範囲を求めよ。

ⅱ） 点Pが平面全体を動くとき，$r(\mathrm{P})$ の動く範囲を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：不等式と領域

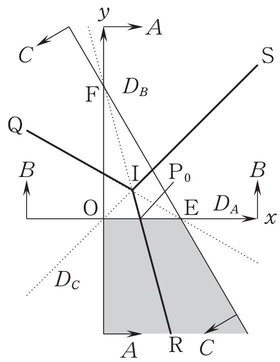
考え方

「A，B，C のどれか少くとも1つに含まれる円の半径の最大値」は A，B，C のうち中心Pが含まれる領域のPから境界までの距離の最大値である．なお，本問において，Pが A，B，C のいずれにも含まれないことはない．

【解答】

3点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ \sqrt{3})$ をそれぞれO，E，Fとし，A，B，C の境界 $x=0$（y 軸），$y=0$（x 軸），$\sqrt{3}\,x+y=\sqrt{3}$ をそれぞれ l_A，l_B，l_C とする．

ⅰ） $A\cap C$ から $(A\cap C)\cap B$ を除いた部分つまり $A\cap C\cap\overline{B}$ は $x\geqq 0$，$y<0$，$\sqrt{3}\,x+y\leqq\sqrt{3}$．の部分．すなわち，図の網掛部である．



この範囲でPは A と C に含まれるから，A または C に含まれる円の半径の最大値はPから l_A（y 軸）または直線 l_C までの距離のうち大きい方（等しいときはその値）．

∠OFE の二等分線を FR，FR と x 軸の交点を $\mathrm{P_0}$ とすると，$\mathrm{P_0}$ の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2},\ 0\right)=(2\sqrt{3}-3,\ 0)$．$\mathrm{P_0}$ と l_A（y 軸）との距離と，l_C との距離はともに $2\sqrt{3}-3$ である．

$A\cap C\cap\overline{B}$ のうち，FR よりE側にPがあるとき，$r(\mathrm{P})$ はPと l_A（y 軸）との距離である．このとき，$r(\mathrm{P})>2\sqrt{3}-3$．

また，$A\cap C\cap\overline{B}$ のうち，FR よりO側にPがあるとき，$r(\mathrm{P})$ はPと l_C との距離である．このとき，$r(\mathrm{P})>2\sqrt{3}-3$．

また，図より，$r(\mathrm{P})$ はいくらでも大きい値をとることは明らか．よって，

$$r(\mathrm{P})>2\sqrt{3}-3.$$ …(答)

ⅱ） ∠OEF の二等分線を EQ，∠EOF の二等分線を OS，三角形 OEF の内心をIとする．

$r(\mathrm{P})$ がPと l_A の距離であるのは，A 内で，Pと l_A の距離が l_B，l_C との距離より大きいか，または等しい範囲である．その範囲を D_A とすると，D_A は ∠SIR の内側．

同様に，$r(\mathrm{P})$ がPと l_B の距離である範囲 D_B は ∠QIS の内側，$r(\mathrm{P})$ がPと l_C の距離である範囲 D_C は ∠RIQ の内側である．

D_A で l_A に最も近い点，D_B で l_B に最も近い点，D_C で l_C に最も近い点はすべてIである．Iと3直線 l_A，l_B，l_C の距離はすべて等しく，三角形 OEF の内接円の半径 $r(\mathrm{I})$ である．三角形 OEF の面積は $\dfrac{1}{2}1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．よって，

$$r(\mathrm{I})=\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

よって，$r(\mathrm{P})$ のとりうる値の範囲は

$$r(\mathrm{P})\geqq\frac{\sqrt{3}-1}{2}. \quad \cdots(答)$$

第 4 問

〔新課程の問題〕

座標の定められた空間において，直線 l は 2 点 $(1,\ 1,\ 0)$，$(2,\ 1,\ 1)$ を通り，直線 m は 2 点 $(1,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 3,\ 2)$ を通る。

ⅰ）l を含み m に平行な平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ の形に表わせ。

ⅱ）点 $(2,\ 0,\ 1)$ を通り l，m の両方と交わる直線を n とする。l と n の交点および m と n の交点を求めよ。

分　野

数学ⅡB：空間座標

考え方

l を含む平面は l と平行．l，m と平行な平面の法線ベクトルは l，m の方向ベクトルと垂直．

【解答】

ⅰ）2 直線 l，m の方向ベクトルはそれぞれ，

$$\vec{l}=(2-1,\ 1-1,\ 1-0)=(1,\ 0,\ 1),\quad \vec{m}=(1-1,\ 3-1,\ 2-1)=(0,\ 2,\ 1).$$

平面 π：$ax+by+cz+d=0$ の法線ベクトルを $\vec{a}$ とすると，$\vec{a}=(a,\ b,\ c)$.

$\pi /\!/ l$，$\pi /\!/ m$ のとき，

$$\vec{a}\cdot\vec{l}=a+c=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{m}=2b+c=0.$$

よって，$c=-2b$，$a=2b$．よって，$\vec{a}=(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ -2)$ とおくことができる．

π：$2x+y-2z+d=0$ で l 上の点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通るから，$d=-3$.

よって，求める平面の方程式は

$$2x+y-2z-3=0. \quad \cdots(答)$$

ⅱ）l，n の交点を P，m，n の交点を Q とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)(1,\ 1,\ 0)+t(2,\ 1,\ 1)=(1+t,\ 1,\ t),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)(1,\ 1,\ 1)+s(1,\ 3,\ 2)=(1,\ 1+2s,\ 1+s)$$

$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$ とすると，A，P，Q は一直線 n 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1+t,\ 1,\ -1+t)/\!/\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ 1+2s,\ s).$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると，$-1=k(-1+t)$，$1+2s=k$，$s=k(-1+t)$.

これを解くと，

$$s=-1,\quad t=2,\quad k=-1.$$

よって，l と n の交点 P の座標は $(3,\ 1,\ 2)$，m と n の交点 Q の座標は $(1,\ -1,\ 0)$. $\cdots$(答)

第4問

〔旧課程の問題〕

a を実数の定数とするとき，

$$a\cos 2\theta-4(a-2)\cos\theta-a+4=0$$

をみたす相異なる θ は，$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にいくつあるか。

分　野

(旧課程) 数学ⅡB：三角関数，倍角公式，**(旧課程) 数学Ⅰ**：2次方程式の理論

考え方

$t=\cos\theta$ とおき，与方程式を t の方程式とし，$-1\leqq\theta\leqq 1$ の範囲にある解の個数を考える．$t=\pm 1$ の解に対応する θ は1個，$-1<t<1$ の解に対する θ は2個あることに注意．

【解答】

$t=\cos\theta$ とおくと，$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2t^2-1$．よって，与方程式は

$$a(2t^2-1)-4(a-2)t-a+4=2\{at^2-2(a-2)t-a+2\}=0$$

と変形される．$f(t)=at^2-2(a-2)t-a+2$ とおく．

$f(1)=-2a+6$，$f(-1)=2a-2$．

(i) $f(1)f(-1)=-4(a-3)(a-1)<0$，つまり，$a<1$，$a>3$ のとき，

$f(t)=0$ はただ1つの解を $-1<t<1$ にもつ．したがって，与方程式をみたす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は2個ある．

(ii) $a=1$ のとき，$f(t)=t^2+2t+1=(t+1)^2$．

$f(t)=0$ をみたす t は $t=-1$ ただ1個．したがって，与方程式をみたす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は $\theta=\pi$ の1個である．

(iii) $a=3$ のとき，$f(t)=3t^2-2t-1=(t-1)(3t+1)$．

$f(t)=0$ をみたす t は $t=1$ と $t=-\dfrac{1}{3}$．したがって，与方程式をみたす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ は $\theta=0$ と $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ をみたす2個，合計3個である．

(iv) $1<a<3$ のとき，$f(1)>0$，$f(-1)>0$．

$y=f(t)$ は下に凸な放物線で，軸は $t=\dfrac{a-2}{a}=1-\dfrac{2}{a}$．$-1<1-\dfrac{2}{a}<\dfrac{1}{3}<1$．

$f(t)=0$ の判別式を D とおくと，

$$\frac{1}{4}D=(a-2)^2+a(a-2)=2(a-2)(a-1).$$

(iv-a) $1<a<2$ のとき，$D<0$．よって，$f(t)=0$ は実数解をもたない．

(iv-b) $a=2$ のとき，$f(t)=2t^2$．

$f(t)=0$ の解は $t=0$ のみ．よって，与方程式の解は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$ の2個．

(iv-c) $2<a<3$ のとき，$f(t)=0$ の解は $-1<t<1$ の範囲に2個．

よって，与方程式の解の個数は4個．

以上まとめて，解の個数は

a	$a<1$	$a=1$	$1<a<2$	$a=2$	$2<a<3$	$a=3$	$a>3$
解の個数	2	1	0	2	4	3	2

…(答)

1977 年　2 次試験（理科）

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

xy 平面上の，原点 O とは異なる 2 点 $A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$ に対し，

$$OA=a,\quad OB=b,\quad \angle AOB=\theta$$

とおく。

2 点 A，B の座標 a_1，a_2，b_1，b_2 が有理数であるとき，次の 3 条件はたがいに同値であることを証明せよ。

ⅰ）ab は有理数である。

ⅱ）$\cos\theta$ は有理数である。

ⅲ）$\sin\theta$ は有理数である。

分　野

数学Ⅰ：整数，三角関数

考え方

$\cos\theta$ を a_1，a_2，b_1，b_2 で表すには内積の関係を用い，$\sin\theta$ を a_1，a_2，b_1，b_2 で表すには △OAB の面積を用いる.

【解答】

A，B は原点と異なるから，$ab\neq 0$.

ベクトルで表すと，

$$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2),\quad \overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2).\quad |\overrightarrow{OA}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}=a,\quad |\overrightarrow{OB}|=\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}=b.$$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{ab}. \qquad \cdots①$$

O，A，B が一直線上にないとき，$\triangle OAB=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|=\frac{1}{2}ab\sin\theta$.

O，A，B が一直線上にあるとき，$\theta=\angle AOB=0$ または π．よって，$\sin\theta=0$．また，$a_1:a_2=b_1:b_2$．よって，$a_1b_2-a_2b_1=0$.

よって，常に

$$\sin\theta=\frac{|a_1b_2-a_2b_1|}{ab} \qquad \cdots②$$

が成り立つ.

a_1，a_2，b_1，b_2 は有理数だから ab（$\neq 0$）が有理数ならば，②，① より，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は有理数.

ⅰ)⇒ⅱ)，ⅲ).

$\cos\theta$ が 0 でない有理数のとき，① から $ab=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\cos\theta}$ は有理数.

$\cos\theta=0$ のとき，$\sin\theta=1$．② から $ab=|a_1b_2-a_1b_2|$ は有理数.

よって，ⅱ)⇒ⅰ)．

$\sin\theta$ が 0 でない有理数のとき，② から $ab=\dfrac{|a_1b_2-a_2b_1|}{\sin\theta}$ は有理数.

$\sin\theta=0$ のとき，$\cos\theta=\pm1$. ① から $ab=\pm(a_1b_1+a_2b_2)$ は有理数.

よって，ⅲ)⇒ⅰ)．

以上より，ⅰ)，ⅱ)，ⅲ) は同値である.

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

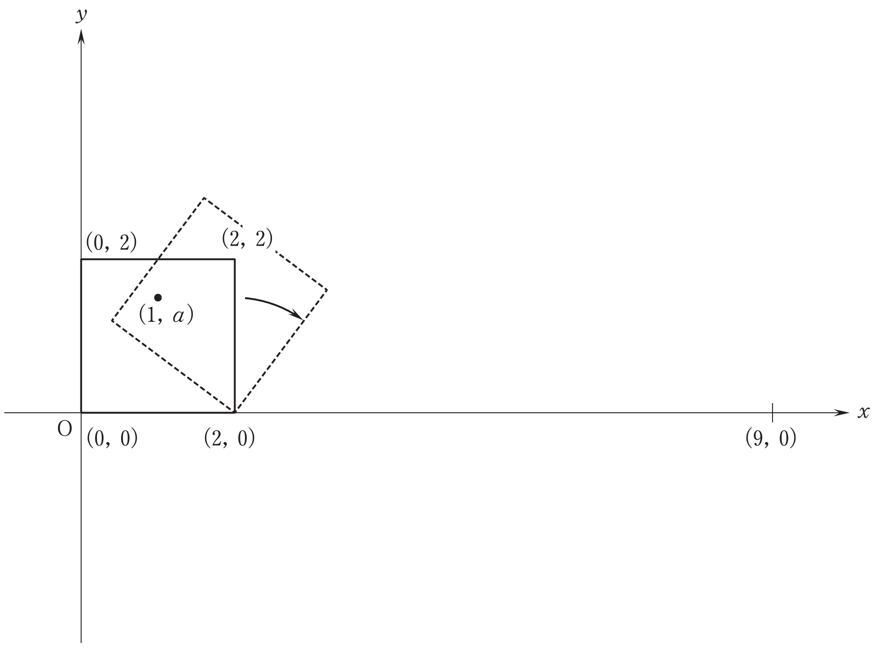
第 4 問

〔新課程・旧課程　共通の問題〕

正方形 S の頂点 A_1，A_2，A_3，A_4 がそれぞれ xy 平面上の点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(0,\ 2)$ の位置にあるとき，点 $(1,\ a)$ の位置にある正方形 S 内の点を P とする。ただし，$0\leqq a\leqq 2$ とする。

正方形 S が上の位置から出発し，第一象限内において x 軸上をその正の向きに滑らずにころがって行くとき，点 P が動いてできる曲線を C とする。3 直線 $x=1$，$x=9$，$y=0$ と曲線 C とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考え，その体積を $V(a)$ で表わす。

$V(a)$ を a の式で表わせ。a が $0\leqq a\leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(a)$ が最小となる a の値および $V(a)$ の最小値を求めよ。



分　野

数学ⅡB：整式の積分，体積

考え方

A_2，A_3，A_4，A_1 を中心とする 4 回の 90° 回転で P は $(9,\ a)$ まで移動する．丁寧に図を描いて計算する．

回転の中心を原点とする座標で考えたり，対称性を考えるなど工夫するとよい．

【解答】

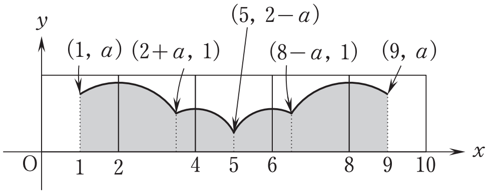
最初の回転は A_2 が $(2,\ 0)$ にあり，この点を中心に，$\overrightarrow{A_2P}=(-1,\ a)$ となる位置から，$\overrightarrow{A_2P}=(a,\ 1)$ となる位置まで移動する．

次の回転は A_3 が $(4,\ 0)$ にあり，この点を中心に，$\overrightarrow{A_3P}=(a-2,\ 1)$ となる位置から，$\overrightarrow{A_3P}=(1,\ -a+2)$ となる位置まで移動する．

3 回目の回転は A_4 が $(6,\ 0)$ にあり，この点を中心に，$\overrightarrow{A_4P}=(-1,\ -a+2)$ となる位置から，$\overrightarrow{A_4P}=(-a+2,\ 1)$ となる位置まで移動する．

4 回目の回転は A_1 が $(8,\ 0)$ にあり，この点を中心に，$\overrightarrow{A_1P}=(-a,\ 1)$ となる位置から，$\overrightarrow{A_1P}=(1,\ a)$ となる位置まで移動する．

P の最終到達点は $(8+1,\ a)=(9,\ a)$ である．



各回転について，回転中心を原点とする座標をとって，積分する．3 回目，4 回目に回転したとき，P が描く曲線はそれぞれ 2 回目，1 回目に回転したとき P が描く曲線と，y 軸対称である．

$$\begin{aligned}\therefore\quad V(a)&=\pi\int_1^{2+a}\{1+a^2-(x-2)^2\}\,dx+\pi\int_{2+a}^{5}\{(a-2)^2+1-(x-4)^2\}\,dx\\&\quad+\pi\int_5^{8-a}\{(a-2)^2+1-(x-6)^2\}\,dx+\pi\int_{8-a}^{9}(1+a^2-(x-8)^2)\,dx\\&=2\pi\int_{-1}^{a}(1+a^2-x^2)\,dx+2\pi\int_{a-2}^{1}\{(a-2)^2+1-x^2\}\,dx\\&=2\pi\left\{(1+a^2)(a+1)-\frac{a^3+1}{3}+\{(a-2)^2+1\}(3-a)-\frac{1-(a-2)^3}{3}\right\}\\&=\frac{4}{3}\pi(9a^2-18a+19).\end{aligned}$$

…(答)

よって，

$$V(a)=\frac{4}{3}\pi\{9(a-1)^2+10\}\geqq\frac{40}{3}\pi.$$

$V(a)$ が最小になるのは $a=1$ のときで，その最小値は $\dfrac{40}{3}\pi$．…(答)

第 5 問

〔新課程の問題〕，〔旧課程の問題〕

（文科　第 2 問の新・旧課程の問題とそれぞれ同じ）

第6問

〔新課程の問題〕

（文科　第4問と同じ）

第6問

〔旧課程の問題〕

a の正の定数とし，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で関数

$$f(x) = -\cos x - \frac{a}{4}\cos 2x$$

を考える。

i ） $f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

ii ） a の値の変化に応じて，$f(x)$ のグラフの変曲点の個数はどのように変化するか。また，この個数の変化に応じて，$f(x)$ のグラフの凹凸はどのように変化するか。

分　野

（旧課程）数学Ⅲ：微分法

考え方

i ）だけなら $t=\cos x$ とおいて解くことができる．しかし，その t の関数を t で2回微分しても $y=f(x)$ の変曲点は求められない．

i ）の【解答】

$$f'(x) = \sin x + \frac{a}{2}\sin 2x = \sin x + a\sin x\cos x = \sin x(1 + a\cos x).$$

(a)　$0 < a \leqq 1$ のとき，$1 + a\cos x \geqq 1 - a \geqq 0$.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘	

$x=\pi$ のとき，最大値 $f(\pi) = 1 - \dfrac{a}{4}$ をとり，$x=0$，$x=2\pi$ のとき，最小値

$f(0) = f(2\pi) = -1 - \dfrac{a}{4}$ をとる．

(b)　$a > 1$ のとき，$\cos x = -\dfrac{1}{a}$ となる $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ の角を α とすると，$1 + a\cos x$ は $x=\alpha$，$2\pi - \alpha$ で0になる．

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$2\pi-\alpha$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗		↘		↗		↘	

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \dfrac{2}{a^2} - 1$．よって，$f(\alpha) = f(2\pi - \alpha) = \dfrac{1}{2a} + \dfrac{a}{4}$.

$f(0) = f(2\pi) = -1 - \dfrac{a}{4}$．$f(\pi) = 1 - \dfrac{a}{4}$

$x=\alpha$，$2\pi-\alpha$ のとき，最大値 $f(\alpha)=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{4}$ をとり，$x=0$，$x=2\pi$ のとき，最小値

$f(0)=f(2\pi)=-1-\dfrac{a}{4}$ をとる．

以上より

$$f(x) \text{ の最大値は } \begin{cases} 1-\dfrac{a}{4} & (0<a\leqq 1 \text{ のとき }), \\ \dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{4} & (a>1 \text{ のとき }), \end{cases}$$ …(答)

$f(x)$ の最小値は $-1-\dfrac{a}{4}$． …(答)

ｉ）の【別解】

$t=\cos x$ とおくと，

$$f(x)=-\cos x-\frac{a}{4}(2\cos^2 x-1)=-\frac{a}{2}t^2-t+\frac{a}{4}=-\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{2a}+\frac{a}{4}.$$

t の動く範囲は $-1\leqq t\leqq 1$．$F(t)=-\dfrac{a}{2}t^2-t+\dfrac{a}{4}$ とおくと，$f(x)$ の最大値，最小値は $-1\leqq t\leqq 1$ における $F(t)$ の最大値，最小値．

(a) $-\dfrac{1}{a}\leqq -1$ のとき，すなわち，$0<a\leqq 1$ のとき，

$F(t)$ の最大値は $F(-1)=1-\dfrac{a}{4}$．最小値は $F(1)=-1-\dfrac{a}{4}$．

(b) $-1<-\dfrac{1}{a}<0$ のとき，すなわち，$a>1$ のとき，$F(t)$ の最大値は $F\left(-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{4}$．

最小値は $F(1)=-1-\dfrac{a}{4}$．

以下省略．

ⅱ）の【解答】 $f''(x)=\cos x+a\cos 2x=2a\cos^2 x+\cos x-a$．

$t=\cos x$ とおき，$g(t)=2at^2+t-a$ とおく．

$g(1)=a+1$，$g(-1)=a-1$．

(ア) $g(1)g(-1)=(a+1)(a-1)<0$ のとき，すなわち，$0<a<1$ のとき，$-1<t<1$ の範囲で $g(t)=0$ となる t が存在する．その t を t_0 とし，$\cos x=t_0$ をみたす $0<x<\pi$ の角を β とすると，$t_0=\cos\beta=\cos(2\pi-\beta)$．

x	0	…	β	…	$2\pi-\beta$	…	2π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	変曲点	$\cap$	変曲点	$\cup$	

変曲点は 2 個．

(イ) $a=1$ のとき，$g(t)=2t^2+t-1=(t+1)(2t-1)$．

$x=\pi$，$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で $f''(x)=g(t)=0$ となる．

x	0	…	$\dfrac{\pi}{3}$	…	π	…	$\dfrac{5}{3}\pi$	…	2π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	変曲点	$\cap$		$\cap$	変曲点	$\cup$	

変曲点は 2 個．

(ウ) $a>1$ のとき，$g(1)>0$，$g(-1)>0$.

$y=g(t)$ は下に凸な放物線．軸は $x=-\dfrac{1}{4a}$ で $-1<t<1$ の範囲にある．

$g(t)=0$ の判別式は $1+8a^2>0$.

よって，$g(t)$ は $-1<t<1$ の区間の異なる2つの値で0になる．それらに対応する x はそれぞれ2つずつある．また，それぞれで $g(t)$ の符号が変化する．4つの x を x_1，x_2，x_3，x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ とすると，$x_1+x_4=x_2+x_3=2\pi$.

x	0	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$	x_4	$\cdots$	2π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\cup$	変曲点	$\cap$	変曲点	$\cup$	変曲点	$\cap$	変曲点	$\cup$	

変曲点は4個.

よって，$0<a\leqq 1$ のとき，変曲点は2個，$a>1$ のとき，変曲点は4個ある． …(答)

凹凸は $x=0$ の近傍で下に凸で，以後変曲点において凹凸が変化して最終的に $x=2\pi$ で下に凸になる．

$0<a\leqq 1$ のときは $x=0$ と $x=\pi$，$x=\pi$ と $x=2\pi$ 間にそれぞれ1個の変曲点ががあり，$x=\pi$ では上に凸である．

$a>1$ のときは $x=0$ と $x=\pi$，$x=\pi$ と $x=2\pi$ 間にそれぞれ2個の変曲点ががあり，$x=\pi$ では下に凸である． …(答)

1978 年 ［附記］
1955 年から 1978 年の 1 次試験について

1 次試験注意書きについて

1955 年から 1978 年まで東大は 1 次試験を課し 1 次選抜を行っていた．解答用紙および問題冊子に注意書きが載っていた．その内容を最後の年である昭和 53 年速報冊子から引用する．

⑴ 東大 1 次試験は全問客観式で，解答用紙は以下のようなものであった．左欄の「文系」と解答の数字は手書きで記入された 1978（昭和 53）年 文科の正解である．

答案用紙　文系

	問題番号	設問	解答欄				
数学	I	a	3				
		b	1				
		c	—	1			
		d	3				
	II	e	4	8	0		
		f	2	4	0	0	
		g	1	4	4	0	
		h	5	7	6		
	III	i	2				
		j	3				
		k	—	2			
		l	—	1			
	IV	m	3				
		n	0				
		o	—	2			
		p	1	2			

注　意

1. 記入は太線の枠内のみに限る。
2. 解答には下の字体を用い明瞭に記入せよ。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3. 数学の解答欄には，次の例のように記入せよ。

例　設問 a，b，c，d の答が，それぞれ 10，-10，$\frac{23}{4}$，$-\frac{23}{4}$ の場合

設問	解答欄				
a	1	0			
b	—	1	0		
c	2	3	／	4	
d	—	2	3	／	4

すなわち，各設問の解答欄に，左端の枠からはじめて，一つの枠に数字または記号を一つずつ記入していく。そのとき途中の枠をあけないようにし，また残りの枠はあけておく。

なお分数記号／は，数字の 1 とまぎらわしくないように，枠の左下隅と右上隅とを対角線ではっきりと結べ。

⑵ また，文理の第 1 問の冒頭には次の〔**注意**〕があった．

〔**注意**〕 1　数は普通の記数法に従い，負の数には符号－をつけなければならないが，正の数には符号＋をつけないこと。

2　答が整数でない有理数となる場合には，必ずそれを $\frac{a}{b}$ または $-\frac{a}{b}$ $(a>0,\ b>0)$ の形の既約分数になおすこと。

3　答の記入の仕方については，答案用紙に書いてある注意に従うこと。

これ以前の年度の，解答用紙，文類，理類の問題の冒頭にも同様な注意書きがある．以前の年度については多少の変更があるがいちいちとりあげないことにする．

1978 年　1 次試験（文科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

$x>0$ とする。行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ と } J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ が}$$

$$AJ=JA \text{ および } A^2=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \text{ をみたすとき，}$$

$$x=\boxed{a},\quad y=\boxed{b},\quad z=\boxed{c},\quad w=\boxed{d}$$

である。

分　野

数学 II B：行列

【解答】

$$AJ-JA=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -y-z & x-w \\ x-w & y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって，$y+z=x-w=0$．$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

$$\therefore\quad A^2=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & x^2-y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad x^2-y^2=8,\quad xy=3.\quad \therefore\quad x^4-8x^2-9=(x^2-9)(x^2+1)=0.$$

$x>0$ より，

$$x=\boxed{3},\quad y=\boxed{1},\quad z=\boxed{-1},\quad w=\boxed{3}.$$ …a，b，c，d

II

男子 5 人と女子 2 人がいる。このとき次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

(1)　2 人の女子が隣り合わないように，この 7 人が円周上に並ぶ並び方は $\boxed{\mathrm{e}}$ 通りである。

(2)　両端に男子がいるように，この 7 人が横に一列に並ぶ並び方は $\boxed{\mathrm{f}}$ 通りである。

(3)　(2) の並び方のうちで，女子の両隣りに男子がいる並び方は $\boxed{\mathrm{g}}$ 通りである。

(4)　(3) の並び方のうちで，特定の男女一組が隣り合う並び方は $\boxed{\mathrm{h}}$ 通りである。

分　野

数学 I：個数

【解答】

(1)　男子 5 人が円周上に並ぶ並び方は $(5-1)!=24$ 通りある．
このとき，2 人の男子の間 5 箇所に 2 人の女子を入れる入れ方は ${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通り．
よって求める並び方の個数は $24\times20=\boxed{480}$ 通り．…e

(2)　両端の男子の決め方は ${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通り．残りの 5 人の決め方の個数は $5!=120$ 通り．よって求める並

び方の個数は $20\times120=\boxed{2400}$ 通り． …f

(3) 男子5人の並び方の個数は $5!=120$ 通り．2人の男子の間4箇所に2人の女子を入れる入れ方は ${}_4P_2=12$ 通り．

よって求める並び方の個数は $120\times12=\boxed{1440}$ 通り． …g

(4) 特定の男子が端にいるような男子の並び方は $2\times4!=48$ 通り．このとき，特定の女子はその隣に並び，もう1人の女子は残りの男子の間3箇所のいずれかに並ぶ．このとき条件をみたす並び方は $48\times3=144$ 通り．

特定の男子が端にいないような男子の並び方は $4!\times3=72$ 通り．このとき，特定の女子は特定男子の隣2箇所に並び，もう1人の女子は残りの男子の間3箇所のいずれかに並ぶ．このとき条件をみたす並び方は $72\times2\times3=432$ 通り．

よって，求める並び方の個数は $144+432=\boxed{576}$ 通り． …h

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a，b を整数とし，直線

$$y=ax+b \qquad \cdots(1)$$

と三つの放物線

$$y=x^2+3 \qquad \cdots(2)$$

$$y=x^2+6x+7 \qquad \cdots(3)$$

$$y=x^2+4x+5 \qquad \cdots(4)$$

を考える。直線(1)と放物線(2)，(3)，(4)との共有点の個数が，それぞれ，2個，1個，0個であるとすれば，$a=\boxed{\text{i}}$，$b=\boxed{\text{j}}$ である。またこのとき，(1)と(3)の共有点の座標は $(\boxed{\text{k}}, \boxed{\text{l}})$ である。

分 野

数学Ⅰ：2次関数

【解答】

(1)，(2)が異なる2点で交わるから，$ax+b=x^2+3$，$x^2-ax+3-b=0$ は異なる2実解をもつ．よって

$$a^2-4(3-b)>0. \qquad \cdots①$$

(1)，(3)が接するから，$ax+b=x^2+6x+7$．$x^2+(6-a)x+7-b=0$．

$$(6-a)^2-4(7-b)=0. \quad b=7-\frac{(a-6)^2}{4}. \qquad \cdots②$$

(1)，(4)が交わらないから，$ax+b=x^2+4x+5$．

$x^2+(4-a)x+5-b=0$ は実数解をもたないから，

$$(4-a)^2-4(5-b)<0. \qquad \cdots③$$

② から a は偶数．$a=2c$ とおくと，$b=7-(c-3)^2=-c^2+6c-2$． …④

① から，$c^2-3+(-c^2+6c-2)=6c-5>0$．

③ から，$(2-c)^2-5+(-c^2+6c-2)=2c-3<0$．

よって，$\frac{5}{6}<c<\frac{3}{2}$．$c$ は整数だから，$c=1$．④ より，

$$a=\boxed{2}, \quad b=\boxed{3}. \qquad \cdots\text{i, j}$$

このとき，(1)，(3)の接点の

$$x\text{座標は } -\frac{6-2}{2}=\boxed{-2}, \quad y\text{座標は } 2(-2)+3=\boxed{-1}. \qquad \cdots\text{k, l}$$

Ⅳ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

ある町で環状道路に沿って，順番に第1小学校から第5小学校まであり，各小学校には顕微鏡がそれぞれ，15，7，11，3，14台あったが，今度各校の台数が等しくなるように，何台かずつ隣の小学校へ移した。このとき移動する顕微鏡の総台数が最小になるようにしたという。このとき，

第1小学校から第2小学校へは $\boxed{\text{m}}$ 台移り

第2小学校から第3小学校へは $\boxed{\text{n}}$ 台移り

第5小学校から第1小学校へは $\boxed{\text{o}}$ 台移った。

また移動した顕微鏡の総台数は $\boxed{\text{p}}$ 台である。

ただし，例えば甲から乙へ -3 台移ったということは，乙から甲へ3台移ったことを意味するものとする。

分　野

数学Ⅰ：個数

【解答】

顕微鏡の総台数は $15+7+11+3+14=50$．したがって，各校の台数が等しくなるようにするには各小学校の顕微鏡の台数を10台ずつにすればよい．

第1小学校から第2小学校へ m 台，第2小学校から第3小学校へ n 台，第3小学校から第4小学校へ p 台，第4小学校から第5小学校へ q 台，第5小学校から第1小学校へ r 台移動するとする．

このとき，各小学校へ移動する台数について，

$$r-m=-5, \quad m-n=3, \quad n-p=-1, \quad p-q=7, \quad q-r=-4.$$

$$\therefore \quad n=m-3, \quad p=n+1=m-2, \quad q=p-7=m-9, \quad r=m-5.$$

移動する総台数を M とすると，

$$M=|m|+|n|+|p|+|q|+|r|=|m|+|m-3|+|m-2|+|m-9|+|m-5|.$$

$m\leqq 3$ のとき，M は減少し，$m\geqq 3$ のとき M は増加するから，M が最小になるのは $m=3$ のとき．

そのとき，

$$m=\boxed{3}, \quad n=\boxed{0}, \quad r=\boxed{-2}. \qquad \cdots\text{m, n, o}$$

移動台数は

$$M=3+0+1+6+2=\boxed{12}. \qquad \cdots\text{p}$$

1978 年　1 次試験（理科）

I

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

点 $(x,\ y)$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定まる点 $(x',\ y')$ に移す一次変換は，直線 $y=lx$ の上の各点をその点自身に移し，直線 $y=mx$ の上の各点を，原点に関しそれと対称な点に移す。

このとき，

$$l=\boxed{\ \text{a}\ },\quad m=\boxed{\ \text{b}\ },\quad p=\boxed{\ \text{c}\ },\quad q=\boxed{\ \text{d}\ }$$

である。

分　野

数学ⅡB：一次変換

【解答】

直線 $y=lx$ 上の点 $(t,\ lt)$ をその点自身に移すから，

$$\begin{pmatrix} t \\ lt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ lt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-l)t \\ (p+ql)t \end{pmatrix}.$$

任意の t について成り立つから，

$$2-l=1,\quad p+ql=l.\quad \therefore\quad l=1,\quad p+q=1. \qquad \cdots①$$

直線 $y=mx$ 上の点 $(t,\ mt)$ を原点に関して対称な点 $(-t,\ -mt)$ に移すから，

$$\begin{pmatrix} -t \\ -mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ p & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-m)t \\ (p+qm)t \end{pmatrix}.$$

任意の t について成り立つから，

$$2-m=-1,\quad p+qm=-m.\quad \therefore\quad m=3,\quad p+3q=-3. \qquad \cdots②$$

①，② から，

$$l=\boxed{\ 1\ },\quad m=\boxed{\ 3\ },\quad p=\boxed{\ 3\ },\quad q=\boxed{\ -2\ }. \qquad \cdots\text{a, b, c, d}$$

Ⅱ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a，b は定数で，$a\neq 0$ とする。いま関数

$$f(x)=\frac{x}{ax+b}$$

が次の条件 (1)，(2) をみたすとする。

(1)　$f(2)=1$

(2)　$f(x)=x$ となる x はただ一つである。

このとき，$a=\boxed{\ \text{e}\ }$，$b=\boxed{\ \text{f}\ }$ である。また，$x_1>0$ に対して

$$x_n=f(x_{n-1})\quad (n>1)$$

によって，数列 $\{x_n\}$ を定めるとき，

$$\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{\boxed{\text{g}}}{x_n} \quad (n>1)$$

が成り立つ。とくに $x_1=1$ とすれば $x_{10}=\boxed{\text{h}}$ である。

分 野

数学Ⅰ：分数関数，**数学ⅡB**：数列

【解答】

$f(2)=1$ より，$\dfrac{2}{2a+b}=1$．$b=2-2a$．

$f(x)=x$ より，

$$\frac{x}{ax+2-2a}=x. \qquad \cdots(*)$$

$$x(ax+1-2a)=0. \qquad \cdots①$$

$a\neq0$ より，① は2次方程式．よって，① をみたす x がただ1つであるのは ① が重解をもつとき．よって，

$$a=\boxed{\frac{1}{2}},\quad b=2-2a=\boxed{1}. \qquad \cdots\text{e, f}$$

$x_n=f(x_{n-1})=\dfrac{x_{n-1}}{\frac{1}{2}x_{n-1}+1}=\dfrac{2x_{n-1}}{x_{n-1}+2}$.

$$\frac{1}{x_n}=\frac{x_{n-1}+2}{2x_{n-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{x_{n-1}}.$$

$\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x_n}$ より，

$$\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x_n}\right)=\frac{\boxed{2}}{x_n}. \qquad \cdots\text{g}$$

$\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$ より，$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列．

$$\therefore \quad \frac{1}{x_{10}}=\frac{1}{x_1}+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}.$$

$$\therefore \quad x_{10}=\boxed{\frac{2}{11}}. \qquad \cdots\text{h}$$

（注） 実は $f(x)=x$ の解がただ1つである場合はもうひとつある．$b=0$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{a}$ より $f(x)=x$ の解は $x=\dfrac{1}{a}$ のみである．このとき，$f(2)=1$ から $a=1$ である．

この場合 $x_n=1$ となるので，恐らく出題の意図とは異なるが，

$$a=\boxed{1},\quad b=\boxed{0},\quad \frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{\boxed{2}}{x_n},\quad x_{10}=\boxed{1}. \quad \cdots\text{e, f, g, h}$$

でも矛盾がない．

【解答】のどこでこのような解があることが見逃されたのであろうか．

実は ① をみたす x がただ1つであるのは重解の場合だけではなかった．① の2解のうち一方が(*)の分母を0にするとき，その解は不適になり，① の解は1個になるのである．$b=0$ の解はそれに相当する．

Ⅲ

次の $\boxed{}$ にあてはまる数は何か。

a を正の実数とする。空間における四点 O$=(0,\ 0,\ 0)$，A$=(6,\ 0,\ 0)$，B$=(3,\ 5,\ 0)$，C$=(3,\ 2,\ a)$ を通る球面の中心を P とする。

このとき，$a=3$ ならば，P$=(\boxed{\text{i}},\ \boxed{\text{j}},\ \boxed{\text{k}})$ である。

また，P が四面体 OABC の内部またはその四つの面のいずれかに含まれるように，a が変化するとき，a のとる値の最小値は $\sqrt{\boxed{\text{l}}}$ である。

分 野

数学ⅡB：空間座標

【解答】

三角形 OAB は xy 平面上の二等辺三角形.

P は O，A から等距離にあるから，その x 座標は $\boxed{3}$.　…i

y 座標を y とおくと $\mathrm{P_0}(3,\ y,\ 0)$ は三角形 OAB の外心.

外接円の半径を r とすると，$\mathrm{P_0O}=\mathrm{P_0B}=r$ から，

$$r^2=(5-y)^2=3^2+y^2.\quad y=\boxed{\frac{8}{5}}.$$ …j

C$(3,\ 2,\ 3)$ のとき，$\mathrm{P}\left(3,\ \frac{8}{5},\ z\right)$，球面の半径を R とおくと，PO$=PC=R$ から，

$$R^2=3^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2+z^2=\left(\frac{8}{5}-2\right)^2+(z-3)^2.\quad z=\boxed{-\frac{2}{5}}$$ …k

$a=3$ に限らないとき，

$$R^2=3^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2+z^2=\left(\frac{8}{5}-2\right)^2+(z-a)^2$$

より，$z=\dfrac{a}{2}-\dfrac{57}{10a}$. z は a の増加関数.

$a>0$ で a を小さくすると，P の z 座標は小さくなる.

P が四面体 OABC の周または内部にあるように a が変化するとき，a が最小になるのは，中心 P が xy 平面上にあるとき.

このとき，$\dfrac{a}{2}-\dfrac{57}{10a}=0$. よって，

$$a^2=\frac{57}{5},\quad a=\sqrt{\boxed{\frac{57}{5}}}.$$ …l

Ⅳ

次の$\boxed{}$にあてはまる数は何か。

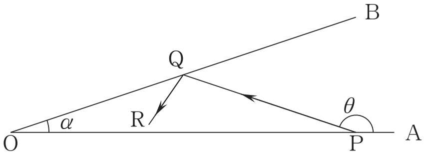
角 $\alpha°$ で交わる二つの半直線OA，OBがある。今OA，OBは壁になっているものとし，OA上の一点Pから，図のように角 $\theta°$（$0<\theta<180$）で小球を発射する。小球の大きさは無視できるものとし，小球は壁以外の所では直進するものとする。また壁で反射するときは，例えば図において $\angle$PQB$=\angle$OQR となるように反射するものとする。そしてある角 $\theta°$ に対して小球は壁で一回以上何回か反射し，最後にOBに平行に進むものとする。このとき

⑴ $\alpha°=15°$ ならば，このような発射角 $\theta°$ は $\boxed{\text{m}}$ 通りあり，そのうち最も大きいものは $\boxed{\text{n}}$ °である。

⑵ $\alpha°=50°$ ならば，このような発射角 $\theta°$ はただ一通りしかなく，$\boxed{\text{o}}$ °である。またこのとき線分OPの長さを1とすれば，小球がPから壁との最後の衝突点までに進んだ距離は

$$2\cos\boxed{\text{p}}°$$

である。ただし $\boxed{\text{p}}$ に書く数 x は，$0<x<180$ をみたすものとする。

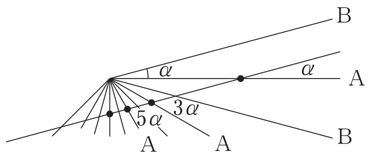


分　野

数学Ⅰ：平面図形

【解答】

与図をOA，OBについて繰り返し対称移動した図を考えると，その図の中では小球は直進する．最終的にOBと平行に進む側から逆にたどってゆくと，もとのOAとなす角は $\alpha°$ で2回折り返したOAとなす角は $3\alpha°$ であり，4回折り返したOAとなす角は $5\alpha°$ であり，….



したがって，OAと $(2n+1)\alpha°$ の角で発射すると，壁で $2n$ 回反射する．ただし，$(2n+1)\alpha°<180°$ でなければならない．

⑴ $\alpha°=15°$ のとき，$(2n+1)15<180$．∴ $n\leqq 5$．

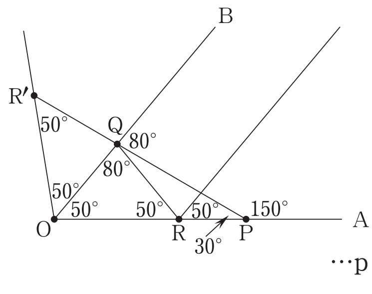
よって，$\boxed{5}$ 通りあり，最大の角は $11\times15°=\boxed{165}$ ° である．　…m，n

⑵ $\alpha°=50°$ のとき，$3\times50=150<180$，$5\times50=250>180$ であるから，$\theta°=\boxed{150}$ °．　…o

このとき，Pから150°の角度で発射された小球はOB，OAにそれぞれQ，Rで反射してOBと平行に進む．OBについて，Rと対称な点をR′とすると，小球が進む距離はPR′の長さである，三角形OPR′において，$\angle$OPR′$=180°-150°=30°$．

$\angle$POR′$=2\times50°=100°$．　$\angle$PR′O$=180°-30°-100°=50°$．

正弦定理から，



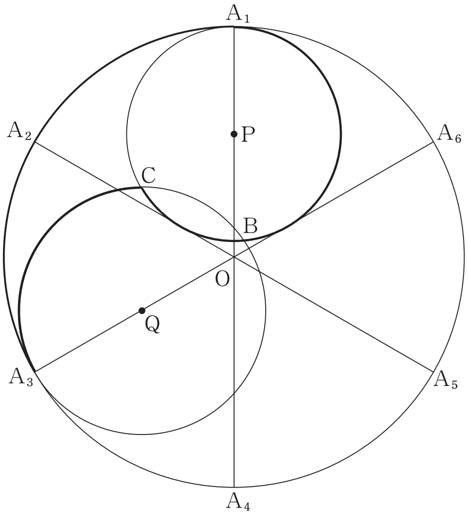
$$\frac{\text{PR}'}{\sin100°}=\frac{\text{OP}}{\sin50°}.\quad \therefore\quad \text{PR}'=\frac{\sin100°}{\sin50°}=2\cos\boxed{50}°.$$　…p

1978年　2次試験（文科）

第一問

半径1の円Oの周を6等分する点を図のように順次 A_1，A_2，…，A_6 とする。弧 $A_2A_1A_6$ および半径 OA_2，OA_6 に接する円の中心をPとし，この円Pの周と線分OPの交点をBとする。線分 OA_3 上に $OQ=PA_1$ をみたすように点Qを定める。Qを中心とし QA_3 を半径とする円周と円Pの交点のうちで，直径 A_1B に関し点 A_2 と同じ側にあるものをCとする。

このとき四辺形OPCQは平行四辺形であることを証明せよ。また弧 $A_1A_2A_3$，弧 A_3C，弧 CBA_1 によって囲まれた領域（図の太線で囲まれた部分）の面積を求めよ。



分　野

数学 I：平面図形，面積

考え方

円と円が接する条件，扇形，三角形，平行四辺形の面積，30°，60°と三角形の性質を使う．

四角形OPCQが平行四辺形であることがポイント．

【解答】

まず，OPCQが平行四辺形であることを示す．

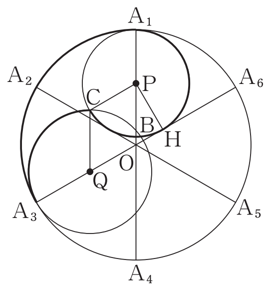
$OQ=PA_1$．よって，$OQ=PC$．また，$OA_1=OA_3$，$PA_1=OQ$ より，$OP=QA_3$．よって，$OP=QC$．よって，OPCQの対辺はともに等しい．よって，OPCQは平行四辺形である．（証明終り）

求める面積は

扇形 OA_1A_3 − 扇形 QCA_3 − 平行四辺形 OPCQ ＋ 扇形 PCA_1．

$OA_1=OA_3=1$，$\angle A_1OA_3=120°$．

ただし，扇形の弧はいずれも太線で描かれている部分である．



よって，扇形 OA_1A_3 の面積は $\dfrac{\pi}{3}$．

Pを中心とする円の半径を r，Pから OA_6 へ下した垂線の足をHとすると，$\angle HOP=60°$ だから，$PH=r$，$OP=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r$．

よって，$OA_1=\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)r=1$．∴　$r=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$．

$QA_3=QC=1-r=2(2-\sqrt{3})$ で $\angle CQA_3=120°$.

よって，扇形 QCA_3 の面積は $\dfrac{4}{3}(2-\sqrt{3})^2\pi=\dfrac{4}{3}(7-4\sqrt{3})\pi$.

$OP=2(2-\sqrt{3})$，$OQ=2\sqrt{3}-3$，$\angle POQ=120°$.

よって，平行四辺形 OPCQ の面積は $2(2-\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=21-12\sqrt{3}$.

$PC=PA_1=2\sqrt{3}-3$ で $\angle CPA_1=240°$.

よって，扇形 $PCA_1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{3}-3)^2\pi=(14-8\sqrt{3})\pi$.

よって，求める面積は

$$\frac{\pi}{3}-\frac{4}{3}(7-4\sqrt{3})\pi-(21-12\sqrt{3})+(14-8\sqrt{3})\pi=\frac{\pi}{3}(15-8\sqrt{3})-21+12\sqrt{3}. \quad \cdots(\text{答})$$

第二問

二つの放物線

$$y=x^2-2x+2 \quad \cdots(1)$$

$$y=-x^2+ax+b \quad \cdots(2)$$

は，それらの交点の一つ P で，接線が互いに直交しているものとする。このとき，放物線(2)は，a，b の値に無関係な一定の点 Q を通ることを証明し，Q の座標を求めよ。

分 野

数学ⅡB：平面座標，整式の微分

考え方

交点の座標は 2 次方程式で表される．その 2 解の値において，接線の傾きの積が -1 である．

【解答】

(1)，(2) の交点の x 座標は

$$x^2-2x+2=-x^2+ax+b. \quad 2x^2-(2+a)x+2-b=0 \quad \cdots①$$

の解．① が異なる 2 点で交わるから，

$$(2+a)^2-8(2-b)>0. \quad \cdots②$$

(1)，(2) の $x=\alpha$ における接線の傾きはそれぞれ $2\alpha-2$，$-2\alpha+a$.

それらの接線が直交するから，

$$(2\alpha-2)(-2\alpha+a)=-1. \quad 4\alpha^2-(4+2a)\alpha+2a-1=0.$$

α は ① の解であるから，$2\alpha^2-(2+a)\alpha+2-b=0$．よって，$\alpha$ の 2 次の項を消すと 1 次の項も同時に消失.

$$2a-1=2(2-b). \quad \therefore \quad 2a+2b-5=0.$$

よって，$b=-a+\dfrac{5}{2}$.

このとき，他の交点でも接線は直交する.

放物線(2)の方程式は

$$y=-x^2+ax-a+\frac{5}{2}=-x^2+\frac{5}{2}+a(x-1).$$

よって，$x=1$ のとき，$y=-1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{2}$．よって，$a$ の値によらず，定点 $Q\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$ を通る.

（証明終り）（答）

（注）　Q は(1)より上にあるから，(1)，(2)は常に交わる．したがって，②は常に成り立つ．

第三問

x の関数 $f(x)=(x^2-4)(x^2-9)$ の，$t \leqq x \leqq t+1$ という範囲における最大値を $g(t)$ とする。t が $-3 \leqq t \leqq 3$ の範囲を動くとき，関数 $s=g(t)$ を求め，そのグラフを描け。

分　野

数学ⅡB：整式の微分

考え方

区間内の最大値は，区間内の極大点または両端である．つまり，$t<x<t+1$ 内に極大点があればそれと，$f(t)$，$f(t+1)$ を比較してその中で最大のものを求める．

【解答】

$f'(x)=2x(x^2-9)+2x(x^2-4)=2x(2x^2-13)$ から，

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{13}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{13}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

よって，$y=f(x)$ が極大になるのは，$x=0$ のみ．

区間内に極大点があるのは $t<0<t+1$，つまり，$-1<t<0$．このとき，$t \leqq x \leqq t+1$ には他に極値は存在しないから，$f(x)$ の最大値は $f(0)=36$．

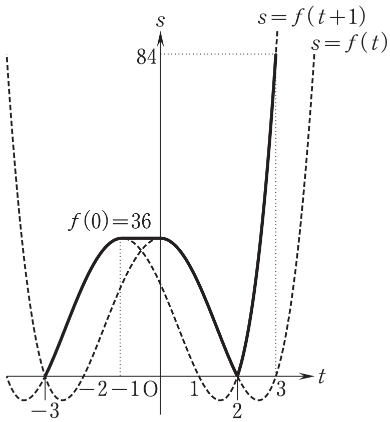
$t \leqq -1$，$t \geqq 0$ のとき，$f(x)$ の最大値は $f(t)=(t^2-4)(t^2-9)$ または $f(t+1)=\{(t+1)^2-4\}\{(t+1)^2-9\}$．

$$\begin{aligned}f(t+1)-f(t)&=\{(t+1)^2-4\}\{(t+1)^2-9\}-(t^2-4)(t^2-9)=(t+1)^4-t^4-13\{(t+1)^2-t^2\}\\&=(2t+1)\{(t+1)^2+t^2-13\}=2(2t+1)(t+3)(t-2).\end{aligned}$$

よって，$-3 \leqq t \leqq 3$ のとき，

$$g(t)=\begin{cases}f(t+1)=\{(t+1)^2-4\}\{(t+1)^2-9\} & (-3 \leqq t \leqq -1,\ 2<t \leqq 3),\\ f(0)=36 & (-1<t<0),\\ f(t)=(t^2-4)(t^2-9) & (0 \leqq t \leqq 2).\end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

$s=g(t)$ のグラフは下図．



第四問

xy 平面で点 P$(-3,\ 6)$ を通り，曲線

$$y=x^3-5x^2+x+9 \qquad \cdots(1)$$

に接する直線のうち，接点の x 座標が $x \geqq 0$ をみたすものを PQ，PR とする。ただしこれらの直線は点 Q，R において曲線(1)に接するものとする。このとき曲線(1)の点 Q から点 R までの部分と，線分 PQ，線分 PR で囲まれた領域の面積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分

考え方

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ で接する接線の方程式は $y=f'(t)(x-t)+f(t)$. これが P を通ることから接線の方程式は定まる.

【解答】

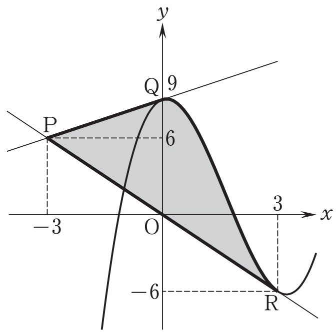
$f(x)=x^3-5x^2+x+9$ とおくと，$f'(x)=3x^2-10x+1$.

よって，点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y=(3t^2-10t+1)(x-t)+t^3-5t^2+t+9$$
$$=(3t^2-10t+1)x-2t^3+5t^2+9.$$

この接線が点 P$(-3,\ 6)$ を通るとき，

$$6=-(3t^2-10t+1)3-2t^3+5t^2+9=-2t^3-4t^2+30t+6.$$
$$\therefore \quad (t+5)(t-3)t=0.$$



接点の x 座標 t が $x \geqq 0$ の範囲にあるから，$t=0$，$t=3$.

$x=0$ における接点を Q，$x=3$ における接点を R とする.

直線 PQ の方程式は $y=x+9$，直線 PR の方程式は $y=-2x$.

原点を O とすると，求める面積を S とすると，

$$S=\triangle \mathrm{OPQ}+\int_0^3 \{(x^3-5x^2+x+9)+2x\}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\times 3\times 9+\left[\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+9x\right]_0^3$$
$$=\frac{117}{4}. \qquad \cdots(答)$$

1978 年　2 次試験（理科）

第一問

（文科　第一問と同じ）

第二問

（文科　第三問と同じ）

第三問

C を放物線 $y=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}$ とする。C 上の点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}\right)$ を通り，Q における C の接線と垂直な直線を，Q における C の法線という。

(1)　xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ で P を通る C の法線が一本だけ引けるようなものの存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ。

(2)　(1) で求めた範囲と放物線の内部（不等式 $y>\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}$ の定める範囲）の共通部分の面積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は $f'(t)\neq 0$ のとき，
$y=-\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$．$f'(t)=0$ のときは $x=t$ である．

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る法線の本数は，x，y を固定したときの法線の方程式を，t の方程式とみて，その解の個数が法線の本数になる．

【解答】

(1)　$f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}$ とおく．$f'(x)=3x$．

$t\neq 0$ のとき，法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{3t}(x-t)+\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}.$$

$t=0$ のときも含めて，

$$3ty=-x+\frac{9}{2}t^3.$$

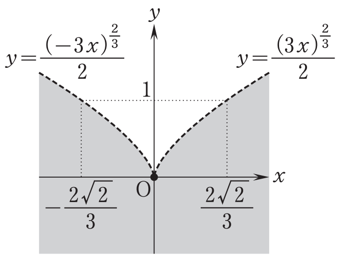
x，y を固定すると，この方程式は t の 3 次方程式として，

$$\frac{9}{2}t^3-3yt-x=0.$$

$g(t)=\dfrac{9}{2}t^3-3yt-x$ とおくと，$g'(t)=\dfrac{27}{2}t^2-3y$.

$y \leqq 0$ のとき，$g'(t) \geqq 0$ だから $g(t)=0$ の解は 1 個だけである.

$y>0$ のとき，$g'(t)=0$ となるのは $t=\pm\dfrac{\sqrt{2y}}{3}$.



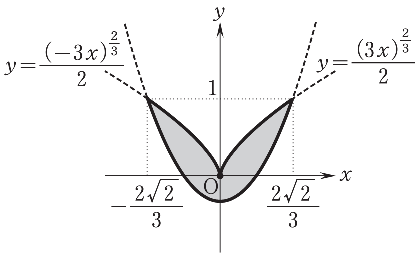
解が 1 つである条件は

$$g\left(\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)g\left(-\frac{\sqrt{2y}}{3}\right)=x^2-\frac{8y^3}{9}>0.$$

したがって，$g(t)=0$ がただ 1 つの解をもつためには

$y \leqq 0$ または $(3x)^2>(2y)^3>0$. …(答)

求める領域は右図の網掛部，境界は除く．ただし原点は含む.



(2) $(3x)^2=(2y)^3$，C：$y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ から，

$$4y^3-3y-1=(y-1)(2y+1)^2=0.$$

$y \geqq 0$ より，領域の境界と C の交点は，$\left(\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ 1\right)$.

求める領域は y 軸について対称である．求める面積は

$$2\int_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\left\{\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}x^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3}\right)\right\}dx=2\left[\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}\,\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x\right]_0^{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{88\sqrt{2}}{135}. \quad \cdots(答)$$

第四問

行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ に対し，次の問に答えよ。

任意の整数 $n>0$ に対して，A^n を数学的帰納法を用いて求めよ。また与えられた $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ に対し

$$A^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおくとき，極限

$$u=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}},\quad v=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}}$$

を求めよ。ただし，$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ とする。

分　野

数学ⅡB：行列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

A^2，A^3，… を書き出せば容易に，A^n を予想できる.

【解答】

$$A^2=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^2} & 5\left(\dfrac{1}{3}+3\right)\\ 0 & 3^2\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^3} & 5\left(\dfrac{1}{3^2}+1+3^2\right)\\ 0 & 3^3\end{pmatrix}.$$

よって，$A^n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^n} & q_n\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$．ただし，

$$q_n=5\left(\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-3}}+\frac{1}{3^{n-5}}+\cdots+3^{n-1}\right)=\frac{5}{3^{n-1}}\,\frac{3^{2n}-1}{3^2-1}=\frac{15}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)$$

と推測される．すなわち，

$$A^n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\qquad\cdots(*)$$

これを数学的帰納法で証明する．

(I) $n=1$ のとき，(*) は与式から明らかに成り立つ．

(II) $n=k$ のとき，(*) が成り立つとする．このとき，$A^k=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^k} & \dfrac{15}{8}\left(3^k-\dfrac{1}{3^k}\right)\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$．

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^k} & \dfrac{15}{8}\left(3^k-\dfrac{1}{3^k}\right)\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix},$$

1-2 成分は $\dfrac{5}{3^k}+\dfrac{15}{8}\left(3^{k+1}-\dfrac{3}{3^k}\right)=\dfrac{15}{8}\cdot 3^{k+1}+\dfrac{15}{8}\left(\dfrac{8}{3^{k+1}}-\dfrac{9}{3^{k+1}}\right)=\dfrac{15}{8}\left(3^{k+1}-\dfrac{1}{3^{k+1}}\right)$．

$$\therefore\quad A^{k+1}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^{k+1}} & \dfrac{15}{8}\left(3^{k+1}-\dfrac{1}{3^{k+1}}\right)\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}.$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ．

よって，すべての自然数 n について

$$A^n=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}.\qquad\cdots(答)$$

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{3^n}+\dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)b\\ 3^nb\end{pmatrix}.$$

(i) $b\neq 0$ のとき，

$$u=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a}{3^n}+\dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)b}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{3^n}+\dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)b\right)^2+(3^nb)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a}{3^{2n}}+\dfrac{15}{8}\left(1-\dfrac{1}{3^{2n}}\right)b}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{3^{2n}}+\dfrac{15}{8}\left(1-\dfrac{1}{3^{2n}}\right)b\right)^2+b^2}}$$

$$=\frac{15}{17}\cdot\frac{b}{|b|}.$$

$$v=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n b}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{3^n}+\dfrac{15}{8}\left(3^n-\dfrac{1}{3^n}\right)b\right)^2+(3^n b)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{3^{2n}}+\dfrac{15}{8}\left(1-\dfrac{1}{3^{2n}}\right)b\right)^2+b^2}}$$

$$=\frac{8}{17}\cdot\frac{b}{|b|}.$$

(ii) $b=0$ のとき，$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{a}{3^n}\\ 0\end{pmatrix}$.

$$u=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+{b_n}^2}}=\frac{a}{|a|},\quad v=0.$$

以上より，

$$(u,\ v)=\begin{cases}\left(\dfrac{15}{17},\ \dfrac{8}{17}\right) & (b>0\ \text{のとき}),\\ (1,\ 0) & (b=0,\ a>0\ \text{のとき}),\\ (-1,\ 0) & (b=0,\ a<0\ \text{のとき}),\\ \left(-\dfrac{15}{17},\ -\dfrac{8}{17}\right) & (b<0\ \text{のとき}).\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

（注）「数学的帰納法を用いて求めよ」という表現には違和感を覚える．A^n をベーコンの帰納法によって推測し，それを数学的帰納法によって証明するのである．

なおここでいう「ベーコンの帰納法」とは哲学者フランシス・ベーコンが「ノヴム・オルガヌム」で学問の進め方として演繹法と帰納法という 2 つの方法があることを示したその帰納法のことをいっている．演繹法とは一般的原理から論理的に結論を導き出す方法で，帰納法とは実験や経験から一般的原理を導き出す方法をいう．数学的帰納法はその意味では極めて“演繹的な”方法である．

この問題の**【解答】**で A^n を推測する部分が「ベーコンの帰納法」であり，それを証明する部分に用いられているのが演繹的な数学的帰納法である．

A^n が最終的に求められたのは確かに数学的帰納法で証明されてからであるが，私には「A^n を数学的帰納法を用いて求めよ」といわれると，推測する部分までが数学的帰納法に属するようで気持ちがよくない．「A^n を推測し，それを数学的帰納法により証明せよ」とでもしたいところである．

第五問

三角形 ABC において，各辺の長さを，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ と記す。いま辺 BC を n 等分する点を P_1，P_2，…，P_{n-1} とし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{C}$ とする。このとき極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{AP_1}^2+\mathrm{AP_2}^2+\cdots+\mathrm{AP}_n{}^2)$$

を求め，これを a，b，c で表わせ。

分　野

数学Ⅰ：三角比，**数学Ⅲ**：数列の極限

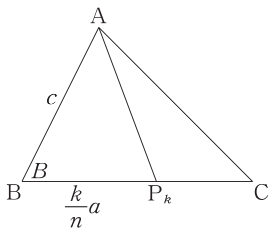
考え方

余弦定理で $\mathrm{AP}_n{}^2$ を計算すれば，容易に極限を求めることができる．

【解答】

三角形 ABC について余弦定理より，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

BC を n 等分する点が P_1，P_2，P_3，…，P_{n-1} だから，$\mathrm{BP}_k=\dfrac{k}{n}a$.



$$\begin{aligned}\mathrm{AP}_k{}^2&=\left(\frac{k}{n}a\right)^2+c^2-2\frac{k}{n}ac\cos B\\&=\frac{k^2}{n^2}a^2+c^2-\frac{k}{n}(a^2+c^2-b^2)\\&=\frac{k^2a^2+c^2n^2-kn(a^2+c^2-b^2)}{n^2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP}_k{}^2&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2+c^2n^2-kn(a^2+c^2-b^2)}{n^2}\\&=\frac{1}{n}\,\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)a^2+c^2n^3-\frac{1}{2}n^2(n+1)(a^2+c^2-b^2)}{n^2}\\&=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)a^2+c^2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)(a^2+c^2-b^2).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP}_k{}^2=\frac{1}{3}a^2+c^2-\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2)=-\frac{1}{6}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2.\qquad\cdots(答)$$

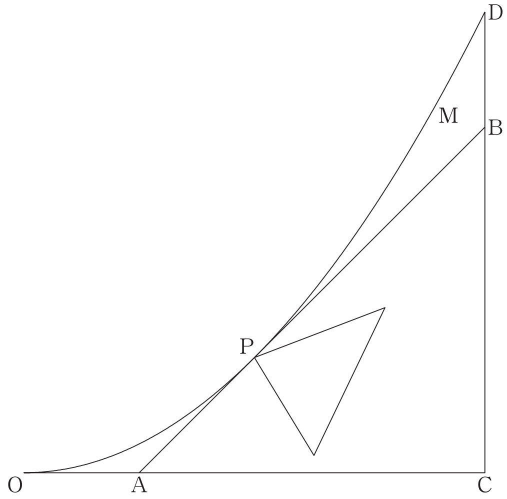
第六問

xy 平面において放物線 $y=x^2$ の，$0<x<1$ に対応する部分をＬとする。(すなわち $L=\{(x,\ x^2)\,|\,0<x<1\}$ である。) 点 $P(x,\ x^2)$ におけるＬの接線が直線 $y=0$，直線 $x=1$ と交わる点をそれぞれ A，B とする。また座標が $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ である三点を，それぞれ O，C，D とする。以下つねに $0<x<1$ という範囲で考えるものとする。

(1) △PAC，△PCB の面積をそれぞれ $g(x)$，$h(x)$ とするとき，$g(x)\leqq h(x)$ となる x の範囲を求めよ。

(2) 線分 OC および線分 CD と放物線の一部Ｌで囲まれた範囲を M とする。ただし M はその周である線分 OC，CD およびＬを含むものとする。いまＬ上の点 $P(x,\ x^2)$ を頂点とし，M に含まれるような三角形のうちで，最大の面積を持つものの面積を $f(x)$ とする。関数 $f(x)$ を求め，そのグラフを描け。また $f(x)$ の極値を求めよ。

ただし $I=\{x\,|\,0<x<1\}$ の点 a で，関数 f が極小値（または極大値）をとるとは，a に近い I のすべての点 x に対して $f(a)\leqq f(x)$（または $f(a)\geqq f(b)$）となることをいう。極大値と極小値をあわせて，極値という。



分　野

数学Ⅰ：平面図形，**数学ⅡB**：整式の微分

考え方

初等幾何的に考える．また場合分けがあるかどうか考えること．

【解答】

(1) 混同を避けるために座標平面を改めて XY 平面とする．$P(x,\ x^2)$ を通るＬの接線は，

$$Y=2x(X-x)+x^2=2xX-x^2.$$

よって，A の座標は $\left(\dfrac{x}{2},\ 0\right)$，B の座標は $(1,\ 2x-x^2)$.

よって，

$$\triangle PAC=g(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)x^2=\frac{1}{4}x^2(2-x),$$

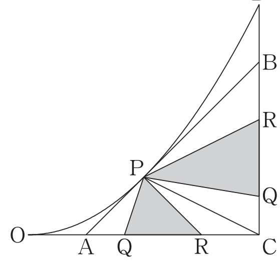
$$\triangle PCB=h(x)=\frac{1}{2}(2x-x^2)(1-x)=\frac{1}{2}x(1-x)(2-x).$$

$$h(x)-g(x)=\frac{1}{2}x(1-x)(2-x)-\frac{1}{4}x^2(2-x)=\frac{1}{4}x(2-x)(2-3x).$$

$0<x<1$ の範囲で $g(x) \leqq h(x)$ となる x の範囲は

$$0<x \leqq \frac{2}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 領域Mに含まれ，Pを頂点とする三角形の頂点をPから反時計回りに，P，Q，Rとする．三角形PQRがMに含まれるならば，頂点Q，Rは線分ABよりC側になければならない．△PQRの面積が最大になるには2頂点Q，Rは線分ACまたはBC上になければならない．なぜなら，頂点がMの内部にあるとき，PQ，PRを延長して，Q，RがMの周上にある三角形を作るとより面積が大きい三角形を作ることができる．以下Q，RがACまたはBC上にある三角形PQRを考える．



(i) 2頂点Q，Rがともに辺AC上にあるとき，

$$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{PAC} = g(x) = \frac{1}{4}x^2(2-x).$$

(ii) 2頂点Q，Rがともに辺BC上にあるとき，

$$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{PCB} = h(x) = \frac{1}{4}x(1-x)(2-x).$$

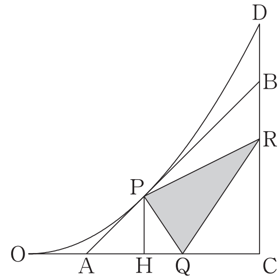
(iii) 頂点QがAC上，頂点RがBC上にあるとき，PからACに下した垂線の足をHとする．

(iii-a) Qが線分AH上にあるとき，

$$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{PQC} \leqq \triangle \mathrm{PAC} = g(x).$$

(iii-b) Qが線分CH上にあるとき，

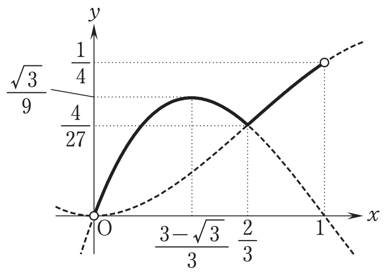
$$\triangle \mathrm{PQR} \leqq \triangle \mathrm{PQB} \leqq \triangle \mathrm{PCB} = h(x).$$



以上より，△PQRの最大値 $f(x)$ は $g(x)$ または $h(x)$．(1)より，

$$f(x)=\begin{cases} h(x)=\dfrac{1}{2}x(1-x)(2-x) & \left(0<x \leqq \dfrac{2}{3}\right), \\ g(x)=\dfrac{1}{4}x^2(2-x) & \left(\dfrac{2}{3}<x<1\right). \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

$y=f(x)$ のグラフは右図．



$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(3x^2-6x+2) & \left(0<x<\dfrac{2}{3}\right), \\ \dfrac{1}{4}(4x-3x^2) & \left(\dfrac{2}{3}<x<1\right). \end{cases}$$

$0<x<1$ から，$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ のとき，極大値

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

をとる．

また，$x=\dfrac{2}{3}$ で $f(x)$ は連続で微分不可能だが，減少から増加に変るから，極小値

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}$$

をとる．

まとめて，$f(x)$ は

$$\begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3} \text{ のとき極大値 } \dfrac{\sqrt{3}}{9}, \\ x=\dfrac{2}{3} \text{ のとき極小値 } \dfrac{4}{27} \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

をとる．

4.2　共通一次試験と東大一次試験の廃止（1979 年）

1979 年には国立大学の入試改革が行われ，共通一次試験が導入された．それまで国立大学と公立大学の大半の入学試験は 3 月上旬に行われる一期と，3 月下旬に行われる二期に分かれて実施されていた．そして，一期に入試が行われる大学を一期校，二期に入試が行われる大学を二期校といった．多くの一期校は旧制大学（戦後滑り込みで大学に昇格した大学も含む）であり，多くの二期校は旧制高等学校，師範学校，専門学校であった大学が多く，第 1 志望は一期校，滑り止めは二期校という受験のしかたをした受験生が多かった．そのため一期校というだけで優秀な大学という固定概念ができてしまった．

そうした弊害をなくすために「大学共通第 1 次学力試験」，通称「共通一次試験」が導入された．共通一次試験は 1 月中旬に行われ，国公立大学の入試は 3 月上旬に一斉に行われるようになった．

その結果 1 人の受験生は国公立大学は 1 校しか受験できなくなった．また競争率は二期校で 10 倍を超す大学がざらにあった（実際は一期校に合格して受験しない志願者も含めた倍率）のが，安全志向になり軒並みダウンし，旧帝大系でも 3 倍前後になった．1 倍強の大学も多かった．中には 1 倍を割り込む大学もあった．そのためかえって大学のランク付けが明確になった．

東大では 1978 年まで行われてきた一次試験が廃止され，二次試験だけになった．

東大入試は 1981 年ごろから急激に難しくなっていった．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1979〜1984）

1979 年は一次試験が廃止された年であった．この年の東大の二次試験は文理共通問題が 3 題もあり，一次試験がなくなった上に共通問題が多かったために全部で問題数が 7 題という少なさであった．批判があったのか，翌年から共通問題は多くて 2 題，ほぼ 1 題という構成が続いている．

1979 年　共通第 2 問は円錐と球が接している立体の体積に関する問題．当時回転体の体積に関する問題は毎年のように出題されていた．これ以後少なくなる．

1980 年　文科第 1 問．円に井桁の図形の面積に関する問題．初等幾何的な問題がこの頃も引き続き出題されていた．

1982 年　文科の問題は難問が多いセットだった．1 問も解けなくても合格した人が続出した．この頃から東大の入試問題は難化したように思える．共通一次とのギャップを意識し出したのかもしれない．

1982 年　理科第 1 問は固有値，固有ベクトルを意識しないと難しい問題であった．

1983 年　理科第 6 問は回転放物面を斜めに切ってできる立体の体積を求める問題．大半の受験生が回転軸に垂直に切って途中で断念していた．

このころ　あんなこと・こんなこと

中曽根内閣登場（1982 年），それ以前成立のイギリス サッチャー政権（1979 年），アメリカ レーガン政権（1981 年）とともに新自由主義的政策をとる．その中，国鉄の民営化（1987 年）が行われた．

NEC からパーソナルコンピューター PC-8000 シリーズ発売（1979 年）．

フォークランド紛争（1982 年）

西武ライオンズが 1982 年から 1992 年までの 11 年の間，8 年日本一になる黄金時代を築く．

NEC PC9800 シリーズ発売（1982 年）．Apple Macintosh 発売（1984 年）．

思い出す曲「愛はかげろう」（1980 年），山口百恵引退（1980 年），「赤いスイートピー」（1982 年），「セカンドラブ」（1982 年）．

このころの河合塾

1979 年　広島校開校．

1980 年　福岡校開校．

1982 年　千駄ヶ谷校開校．

1984 年　大阪校開校．

1979 年　文科

第一問

xy 平面上の 4 点 A(0, 0)，B(1, 0)，C(1, 1)，D(0, 1) を頂点とする正方形を Q とする。実数 t に対して一次変換

$$U_t=\begin{pmatrix}1+t & t+t^2\\ 0 & 1+t\end{pmatrix},\quad V_t=\begin{pmatrix}1+t & 0\\ t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}$$

を考え，Q が U_t によって写された図形と，Q が V_t によって写された図形との共通部分の面積を $S(t)$ とする。t が $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，t の関数 $S(t)$ のグラフの概形を描き，$S(t)$ のこの範囲での最大値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：一次変換，整式の微分，**数学Ⅰ**：平面図形

考え方

正方形は一次変換によって，平行四辺形に写される．正方形の各頂点は平行四辺形の各頂点に写される．これを図示して考える．

【解答】

Q は正方形板であるとして解答する．

U_t で表される一次変換により B，C，D が写される点をそれぞれ $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{C_1}$，$\mathrm{D_1}$ とする．A は原点であるから A に写される．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB_1}}=U_t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1+t & t+t^2\\ 0 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\0\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC_1}}=U_t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1+t & t+t^2\\ 0 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t+t^2\\1+t\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD_1}}=U_t\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}1+t & t+t^2\\ 0 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t+t^2\\1+t\end{pmatrix}.$$

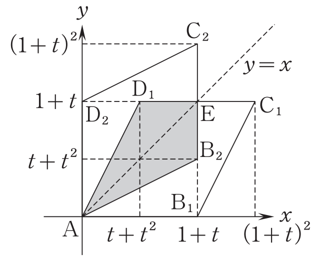
V_t で表される一次変換により B，C，D が写される点をそれぞれ $\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{D_2}$ とする．A は原点であるから A に写される．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB_2}}=V_t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}1+t & 0\\ t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\t+t^2\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC_2}}=V_t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}1+t & 0\\ t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+t\\1+2t+t^2\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD_2}}=V_t\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}1+t & 0\\ t+t^2 & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1+t\end{pmatrix}.$$

よって，A(0, 0)，$\mathrm{B_1}(1+t,\ 0)$，$\mathrm{C_1}((1+t)^2,\ 1+t)$，$\mathrm{D_1}(t+t^2,\ 1+t)$．$\mathrm{B_2}(1+t,\ t+t^2)$，$\mathrm{C_2}(1+t,\ (1+t)^2)$，$\mathrm{D_2}(0,\ 1+t)$．



$\mathrm{B_1}$ と $\mathrm{D_2}$，$\mathrm{C_1}$ と $\mathrm{C_2}$，$\mathrm{D_1}$ と $\mathrm{B_2}$ は $y=x$ について線対称な位置にある．$\mathrm{C_1D_1}$，$\mathrm{C_2B_2}$ の交点を E とすると $\mathrm{E}(1+t,\ 1+t)$．

2 つの平行四辺形は $\mathrm{AB_2}$ の傾き t が 1 以下のときに点 A 以外の共通部分が存在し，1 より大きいときは共通部分は点 A のみになる．

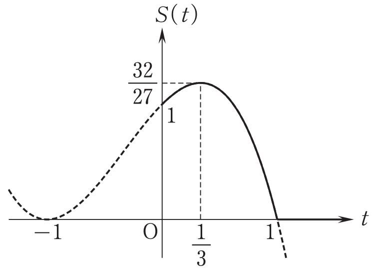
$0\leqq t\leqq 1$ のとき，2 つの平行四辺形の共通部分は右図の四角形 $\mathrm{AB_2ED_1}$ である．

その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\square \mathrm{AB_1ED_2}-\triangle \mathrm{AB_1B_2}-\triangle \mathrm{AD_1D_2}=(1+t)^2-\frac{1}{2}(1+t)(t+t^2)-\frac{1}{2}(1+t)(t+t^2)=(1+t)^2(1-t).$$

$$S'(t)=2(1+t)(1-t)-(1+t)^2=(1+t)(1-3t).$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗		↘	



また，$t>1$ では $S(t)=0$.

$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{2}{3}=\frac{32}{27}.$$

$S(t)$ のグラフは右図太線部である.

よって，$S(t)$ は $t=\frac{1}{3}$ のとき，最大値 $\frac{32}{27}$ をとる. …(答)

（注） 問題では正方形板 $Q：0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1$ の像を問うているのだから，厳密にいえば，Q に含まれるそれぞれの点の像全体が作る集合 Q' を求めるべきであろう.

Q に含まれる点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad (0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$$

とおき，その一次変換を表す行列を U とかき，移された点を ′ をつけて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{A'P'}}=U\overrightarrow{\mathrm{AP}}=xU\overrightarrow{\mathrm{AB}}+yU\overrightarrow{\mathrm{AD}}=x\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}+y\overrightarrow{\mathrm{A'D'}}\quad (0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1)$$

となり，Q' すなわち P の像 P′ が作る図形は，正方形の頂点 A，B，C，D の像 A′，B′，C′，D′ を頂点とする平行四辺形であることがわかる.

一般に逆変換のある一次変換によって，線分はその両端の像を両端とする線分に，多角形は各頂点の像を頂点とする多角形に移される.

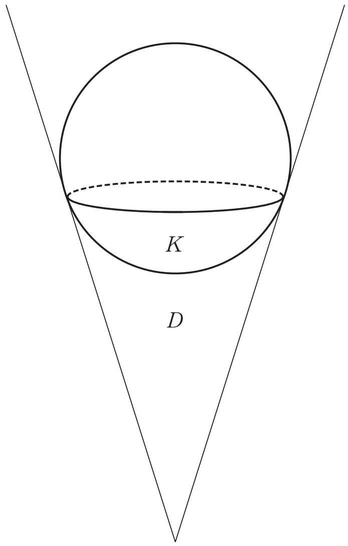
【解答】ではそのことを前提として，正方形の各頂点の移動だけをみた.

第二問

図のように，半径 1 の球が，ある円錐の内部にはめこまれる形で接しているとする。球と円錐面が接する点の全体は円をなすが，その円を含む平面を α とする。円錐の頂点を P とし，α に関して P と同じ側にある球の部分を K とする。また，α に関して P と同じ側にある球面の部分および円錐面の部分で囲まれる立体を D とする。

いま，D の体積が球の体積の半分に等しいという。そのときの K の体積を求めよ。

図 1



分 野

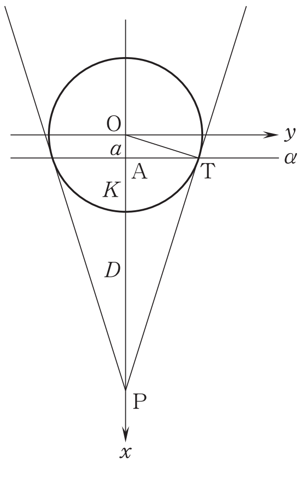
数学ⅡB：整式の積分，体積

考え方

球の中心と P を通る直線を含む断面で考える．適当な変数で K や D の体積を表す．与条件からその変数の値を求める．

変数は球の中心と平面 α の距離，球の中心と P との距離，円錐の半頂角でもよい．

【解答】



球の中心を O とし，OP を含む 1 つの断面をとり，この平面上で，O を原点として，OP を x 軸，OP に垂直に y 軸をとる．また，x 軸と平面 α の交点を A，$\mathrm{OA}=a$ とし，この断面上で円錐と球の接点のうち，$y>0$ にある点を T とする．

$\dfrac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OT}}$ から，$\mathrm{OP}=\dfrac{1}{a}$.

K の体積を $V(K)$，D の体積を $V(D)$ とする．$V(K)+V(D)$ は円錐の体積で底面の円の半径は $\mathrm{AT}=\sqrt{1-a^2}$，高さは $\mathrm{AP}=\dfrac{1}{a}-a$.

よって，

$$V(K)+V(D)=\frac{\pi}{3}(1-a^2)\left(\frac{1}{a}-a\right)=\frac{\pi}{3a}(1-a^2)^2.$$

一方 K の体積は

$$V(K)=\pi\int_a^1(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_a^1=\pi\left\{\frac{2}{3}-a+\frac{a^3}{3}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}(2-3a+a^3)=\frac{\pi}{3}(1-a)^2(2+a).$$

よって，

$$V(D)=\frac{\pi}{3a}(1-a^2)^2-\frac{\pi}{3}(1-a)^2(2+a)=\frac{\pi}{3a}(1-a)^2.$$

与条件から，$V(D)$ は球の体積 $\frac{4}{3}\pi$ の半分である．よって，

$$\frac{\pi}{3a}(1-a)^2=\frac{2}{3}\pi.\quad \therefore\quad a^2-4a+1=0.$$

$0<a<1$ より，$a=2-\sqrt{3}$．

よって，

$$V(K)=\frac{\pi}{3}(a^3-3a+2)=\frac{\pi}{3}\{(a^2-4a+1)(a+4)+12a-2\}$$
$$=\frac{\pi}{3}\{12(2-\sqrt{3})-2\}=\frac{2}{3}(11-6\sqrt{3})\pi.$$

…(答)

（注） 球の中心 O と P との距離を b，円錐の半頂角を θ とすると，

$$b=\frac{1}{a},\quad a=\sin\theta$$

となる．したがって，これらの変数を選んでも同様な計算になる．

第三問

ある硬貨を投げるとき，表と裏がおのおの確率 $\frac{1}{2}$ で出るものとする。この硬貨を 8 回くり返して投げ，n 回目に表が出れば $X_n=1$，裏が出れば $X_n=-1$ とし，

$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n\quad(1\leqq n\leqq 8)$$

とおく。このとき次の確率を求めよ。

(1) $S_2\neq 0$ かつ $S_8=2$ となる確率。

(2) $S_4=0$ かつ $S_8=2$ となる確率。

分 野

数学 I：確率

考え方

独立試行（反復試行）の公式 ${}_n\mathrm{C}_k p^k(1-p)^{n-k}$ を使う．

【解答】

(1) $S_8=2$ となるのは 8 回の試行のうち，表が 5 回裏が 3 回出た場合である．

その確率は ${}_8\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{32}$．

$S_2=0$ かつ $S_8=2$ となるのは最初の 2 回の試行のうち，表が 1 回裏が 1 回出て，残りの 6 回のうち，4 回表が出て，2 回裏が出た場合である．その確率は ${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^2{}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{128}$．

$S_2\neq 0$ かつ $S_8=2$ となるのは $S_8=2$ となる場合のうち，$S_2=0$ かつ $S_8=2$ となる場合を除いたものであるから，その確率は

$$\frac{7}{32}-\frac{15}{128}=\frac{13}{128}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$S_4=0$ かつ $S_8=2$ となるのは最初の4回の試行のうち，表が2回裏が2回出て，残りの4回のうち，3回表が出て，1回裏が出た場合である．その確率は

$$_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{32}. \qquad \cdots(答)$$

第四問

a を正の整数とし，数列 $\{u_n\}$ を次のように定める。

$$u_1=2,\quad u_2=a^2+2,$$
$$u_n=au_{n-2}-u_{n-1},\quad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

このとき，数列 $\{u_n\}$ の項に4の倍数が現れないために，a のみたすべき必要十分条件を求めよ。

分　野

数学ⅡB：数列，漸化式，**数学Ⅰ**：整数

考え方

u_n を4で割った余りは a，u_{n-2}，u_{n-1} をそれぞれ4で割った余りで決まる．したがって，a を4で割った余りについて分類して考える．

【解答】

a を4で割った余りで分類．

(i)　a が4で割り切れるとき，

$a_1=2$，$a_2=a^2+2$ を4で割った余りは2.

また，au_{n-2} は4で割り切れる．u_{n-1} を4で割った余りが2なら，$u_n=au_{n-2}-u_{n-1}$ を4で割った余りは2である．

したがって，u_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ はすべて4で割って2余る数であり，数列 $\{u_n\}$ の項に4の倍数は現れない．

(ii)　a が4で割って1余る数のとき，

u_1 を4で割った余りは2.

a^2 を4で割った余りは1だから，$u_2=a^2+2$ を4で割った余りは3.

$u_3=au_1-u_2$ を4で割った余りは $2-3$ を4で割った余り3に等しい．

$u_4=au_2-u_3$ を4で割った余りは $3-3$ を4で割った余り0に等しい．

したがって，数列 $\{u_n\}$ の項に4の倍数 u_4 が現れる．

(iii)　a が4で割って2余る数のとき，

u_1 を4で割った余りは2．a^2 は4で割り切れるから，

$u_1=2$，$u_2=a^2+2$ を4で割った余りは2.

また，au_{n-2} は u_{n-2} が偶数なら，4で割り切れる．

したがって，u_{n-2}，u_{n-1} を4で割った余りが2なら，$au_{n-2}-u_{n-1}$ を4で割った余りは2である．

したがって，帰納的に u_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ はすべて4で割って2余る数であり，数列 $\{u_n\}$ の項に4の倍数は現れない．

(iv)　a が4で割って3余る数のとき，

u_1 を4で割った余りは2.

a^2 を4で割った余りは1だから，$u_2=a^2+2$ を4で割った余りは3.

$u_3=au_1-u_2$ を 4 で割った余りは $2-3$ を 4 で割った余り 3 に等しい．

$u_4=au_2-u_3$ を 4 で割った余りは $1-3$ を 4 で割った余り 2 に等しい．

$u_5=au_3-u_4$ を 4 で割った余りは $1-2$ を 4 で割った余り 3 に等しい．

以下，u_{n-2}，u_{n-1} を 4 で割った余りがそれぞれ 2，3 のとき，u_n を 4 で割った余りは 3,

u_{n-2}，u_{n-1} を 4 で割った余りがそれぞれ 3，3 のとき，u_n を 4 で割った余りは 2,

u_{n-2}，u_{n-1} を 4 で割った余りがそれぞれ 3，2 のとき，u_n を 4 で割った余りは 3,

となり，4 で割った余りが 2，3，3 を繰り返す．したがって，数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数は現れない．

以上より，$\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないのは a を 4 で割った余りが 1 でないときである．　…(答)

（注１）　合同式を使うと簡潔に書ける．

2 整数 m，n を 4 で割った余りが等しいとき，$m\equiv n$ と書く．

$k\equiv l$，$m\equiv n$ のとき次が成り立つ．

$$k+m\equiv l+n,\quad k-m\equiv l-n,\quad km\equiv ln.$$

(i)　$a\equiv 0$ のとき，

$$u_1\equiv 2,\quad u_2\equiv 2,\quad u_n\equiv -u_{n-1}.$$

$u_{n-1}\equiv 2$ なら，$u_n\equiv -2\equiv 2$．∴　$u_1\equiv u_2\equiv u_3\equiv\cdots\equiv 2$.

(ii)　$a\equiv 1$ のとき，

$$u_1\equiv 2,\quad u_2\equiv 1^2+2\equiv 3,\quad u_n\equiv u_{n-2}-u_{n-1}.$$

$$u_3\equiv u_1-u_2\equiv 2-3\equiv 3,\quad u_4\equiv u_2-u_3\equiv 3-3\equiv 0.$$

(iii)　$a\equiv 2$ のとき，

$$u_1\equiv 2,\quad u_2\equiv 2^2+2\equiv 2,\quad u_n\equiv 2u_{n-2}-u_{n-1}.$$

$$u_3\equiv 2u_1-u_2\equiv 2^2-2\equiv 2,$$

$u_{n-2}\equiv u_{n-1}\equiv 2$ のとき，$u_n\equiv 2u_{n-2}-u_{n-1}\equiv 2^2-2\equiv 2$．∴　$u_1\equiv u_2\equiv u_3\equiv\cdots\equiv 2$.

(iv)　$a\equiv 3$ のとき，

$$u_1\equiv 2,\quad u_2\equiv 3^2+2\equiv 3,\quad u_n\equiv -u_{n-2}-u_{n-1}.$$

$$u_n+u_{n-1}+u_{n-2}\equiv 0.\quad\therefore\quad u_n\equiv u_{n-3}.$$

よって，

$$u_{3m+1}\equiv 2,\quad u_{3m+2}\equiv u_{3m}\equiv 3.$$

（注２）　この問題では $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現われない条件を求めていたので $a\equiv 1$ の場合について $n=4$ までしか求めなかった．一般には $a\equiv 1$ のとき，

$$u_{6m+1}\equiv 2,\ u_{6m+2}\equiv u_{6m+3}\equiv 3,\ u_{6m+4}\equiv 0,\ u_{6m+5}\equiv 3,\ u_{6m}\equiv 1.$$

1979 年　理科

第一問

（文科　第一問と同じ）

第二問

（文科　第二問と同じ）

第三問

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P をとり，円の内部または周上に 2 点 Q，R を $\triangle$PQR が一辺の長さ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の正三角形になるようにとる。このとき，

$$OQ^2+OR^2$$

の最大値および最小値を求めよ。

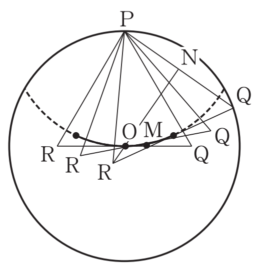
分　野

数学Ⅰ：平面図形，**数学ⅡB**：三角関数，合成公式

考え方

点 P を固定して，Q，R を動かすとき，Q，R が円内または周上にあるとき，QR の中点 M の軌跡を考える．このとき，OQ^2+OR^2 は OM で表すことができる．

【解答 1】　パップスの定理（中線定理）



辺 QR の中点を M とすると，$PQ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ から $PM=1$，$QM=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

パップスの定理から

$$OQ^2+OR^2=2(OM^2+QM^2)=2OM^2+\frac{2}{3}.$$

M は P を中心とし，O を通る円周上を動くから，M が O に最も近いのは M=O のときであり，最も遠いのは Q または R が円周上にあるとき.

M=O のとき $OQ^2+OR^2=\dfrac{2}{3}$.

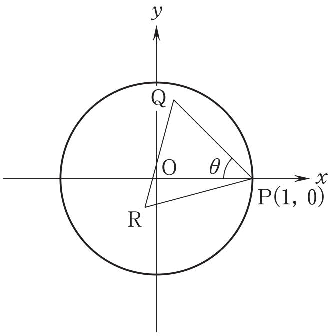
Q が円周上にあるとき，PQ の中点を N とすると，$PN=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．$ON=\sqrt{OP^2-PN^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$OR=RN-ON=1-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

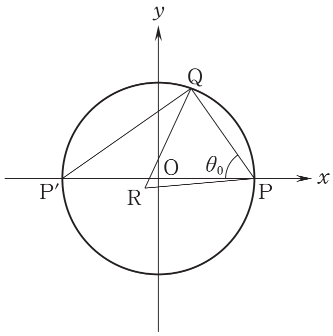
$$OQ^2+OR^2=1^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=1+1-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

以上より，OQ^2+OR^2 の最大値は $\dfrac{8-2\sqrt{6}}{3}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$.　…(答)

【解答２】 座標計算による



（図１）



（図２）

O を原点とし，P(1, 0) となるように座標をとり，$\angle \mathrm{OPQ}=\theta$ とおくと，$\angle \mathrm{OPR}=\dfrac{\pi}{3}-\theta$.

Q が円周上にあるとき，$\angle \mathrm{OPQ}=\theta_0$ とおくと，$\dfrac{\pi}{3}-\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0$.

Q が円周上にあるとき，P′(−1, 0) とすると，$\cos\theta_0=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{P'P}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

2 点 Q，R の座標は

$$\mathrm{Q}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta,\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right),$$
$$\mathrm{R}\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right),\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right).$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2&=\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right)^2+\frac{4}{3}\sin^2\theta+\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)^2+\frac{4}{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\\
&=\frac{14}{3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\cos\theta+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right)=\frac{14}{3}-4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)\\
&=\frac{14}{3}-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

$\theta_0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}-\theta_0$ から，

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}=\frac{14}{3}-4\leqq\frac{14}{3}-4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)&=\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2\leqq\frac{14}{3}-4\cos\left(\theta_0-\frac{\pi}{6}\right)\\
&=\frac{14}{3}-4\left(\cos\theta_0\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta_0\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{14}{3}-4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{OQ}^2+\mathrm{OR}^2$ の最大値は $\dfrac{8-2\sqrt{6}}{3}$，最小値は $\dfrac{2}{3}$. …(答)

第四問

（文科　第四問と同じ）

第五問

t を正の数とし，次の条件 (A)，(B) によって定まる x の 3 次式を $f(x)$ とする。

(A)　曲線

$$y=f(x) \tag{1}$$

は直線

$$y=x \tag{2}$$

の上の 2 点 $\mathrm{P}(-t,\ -t)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る。

(B)　$$f'(0)=0,\quad f''(0)=2$$

さて，曲線 (1) と直線 (2) との交点のうちで，x 座標が最大のものを Q とし，曲線 (1) の点 O から点 Q までの部分と，線分 OQ とで囲まれた領域の面積を $S(t)$ とする。このとき，$\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分，**数学Ⅲ**：関数の極限

考え方

条件 (A) から $y=x$ と $f(x)$ の交点の x 座標は $-t$，0 があるが，$f(x)$ は 3 次だから交点はもう 1 つある．その x 座標と $f(x)$ の x^3 の係数を定めれば $f(x)$ は定まる．

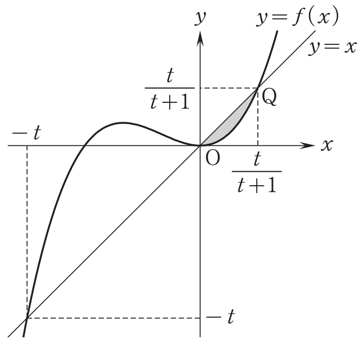
これに (B) の条件を加えれば $f(x)$ が決まる．

【解答】

$f(x)$ は 3 次で，条件 (A) から $y=f(x)$ と $y=x$ との交点の x 座標は $-t$ と 0 があるが，他にもう 1 つある．その交点の x 座標を α，$f(x)$ の x^3 の係数を a とおくと，

$$f(x)-x=ax(x+t)(x-\alpha)$$

とかける．



条件 (B) で $f'(0)=0$，$f''(0)=2$ から，

$$f'(x)-1=a(x+t)(x-\alpha)+ax(x-\alpha)+ax(x+t).$$

$$\therefore\quad f'(0)=1-at\alpha=0. \qquad \cdots①$$

$$f''(x)=2a\{x+(x+t)+(x-\alpha)\}.\quad \therefore\quad f''(0)=2a(t-\alpha)=2. \qquad \cdots②$$

①，② より，$t-\alpha=t\alpha$，$t>0$ より，

$$\alpha=\frac{t}{t+1},\quad a=\frac{t+1}{t^2}.$$

よって，

$$f(x)-x=\frac{t+1}{t^2}x(x+t)\left(x-\frac{t}{t+1}\right).$$

したがって，Q の x 座標は $\alpha=\dfrac{t}{t+1}$.

よって，

$$S(t)=\int_0^{\frac{t}{t+1}}(x-f(x))\,dx=-\frac{t+1}{t^2}\int_0^{\frac{t}{t+1}}x(x+t)\left(x-\frac{t}{t+1}\right)dx$$

$$=-\frac{t+1}{t^2}\int_0^{\frac{t}{t+1}}\left(x^3+\frac{t^2}{t+1}x^2-\frac{t^2}{t+1}x\right)dx$$

$$=-\frac{t+1}{t^2}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{t}{t+1}\right)^4+\frac{t^2}{3(t+1)}\left(\frac{t}{t+1}\right)^3-\frac{t^2}{2(t+1)}\left(\frac{t}{t+1}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{t^2(2t+3)}{12(t+1)^3}.$$

$$\therefore\quad \lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{t}\right)}{12\left(1+\frac{1}{t}\right)^3}=\frac{1}{6}. \qquad \cdots(答)$$

（注１） $S(t)$ の計算は a，α，t で表して，

$$S(t)=-a\int_0^{\alpha}x(x+t)(x-\alpha)\,dx=-a\left(\frac{\alpha^4}{4}+\frac{t-\alpha}{3}\alpha^3-\frac{t\alpha}{2}\alpha^2\right)=\frac{a\alpha^4}{12}+\frac{at\alpha^3}{6}.$$

$at\alpha=1$，$\lim_{t\to\infty}\alpha=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=1$ から，

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\alpha^3}{12t}+\frac{\alpha^2}{6}\right)=\frac{1}{6}.$$

このように表すこともできる．

（注２） $f(x)$ を整理すると，$f(x)=\frac{t+1}{t^2}x^3+x^2$

したがって，$t\to\infty$ のとき，$y=f(x)$ のグラフは限りなく $y=x^2$ のグラフに近づく．

$S(t)$ は $\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}$ に近づく．

第六問

a を正の定数とし，座標平面上に 3 点 $P_0(1,\ 0)$，$P_1(0,\ a)$，$P_2(0,\ 0)$ が与えられたとする。

　P_2 から P_0P_1 に垂線をおろし，それと P_0P_1 との交点を P_3 とする。

　P_3 から P_1P_2 に垂線をおろし，それと P_1P_2 との交点を P_4 とする。

以下同様にくり返し，一般に P_n が得られたとき，

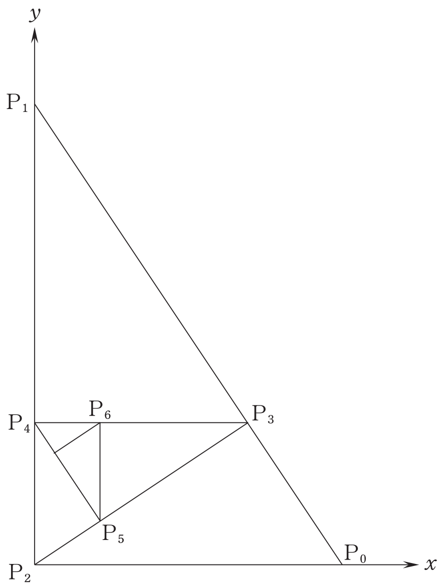
　P_n から $P_{n-2}P_{n-1}$ に垂線をおろし，それと $P_{n-2}P_{n-1}$ との交点を P_{n+1} とする。

このとき次の問に答えよ。

(1)　P_6 の座標を求めよ。

(2)　上の操作をつづけていくとき，P_0，P_1，P_2，…，P_n，… はどのような点に限りなく近づくか。

図 2



分　野

数学ⅡB：数列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

$\triangle P_0P_1P_2$，$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_2P_3P_4$，… の相似性と向きに着目．相似比が交互に変化するので 1 つおきまたは 3 つおきに比較する．1 つおきで向きは 90°，3 つおきで逆向きになる．

(1)の【解答】

$\angle P_0P_1P_2=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$．$P_1P_3=\cos\theta P_1P_2=\cos^2\theta P_1P_0=\dfrac{a^2}{a^2+1}P_1P_0$．

よって，P_3 は P_0P_1 を $1:a^2$ に内分する．同様に P_4 は P_1P_2 を $a^2:1$ に，P_5 は P_2P_3 を $1:a^2$ に，P_6 は P_3P_4 を $a^2:1$ に内分する．

よって，$P_0(1,\ 0)$，$P_1(0,\ a)$，$P_2(0,\ 0)$ から，

$$P_3\left(\frac{a^2}{a^2+1},\ \frac{a}{a^2+1}\right),\quad P_4\left(0,\ \frac{a}{a^2+1}\right),\quad P_5\left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2},\ \frac{a}{(a^2+1)^2}\right),$$

$$P_6\left(\frac{a^2}{(a^2+1)^2},\ \frac{a}{a^2+1}\right).\qquad\cdots(答)$$

(2)の【解答 2】　回転行列を利用

$$\triangle P_0P_1P_2 \backsim \triangle P_2P_1P_3 \backsim \triangle P_2P_3P_4 \backsim \cdots \backsim \triangle P_{2m}P_{2m+1}P_{2m+2} \backsim \triangle P_{2m+2}P_{2m+1}P_{2m+3}$$

$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ が交互に相似比になる．したがって，

$$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2} \backsim \triangle P_{n+2}P_{n+3}P_{n+4}.$$

相似比は $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{a}{a^2+1}$ で向きは $-90°$ 変る．$A=\dfrac{a}{a^2+1}R=\dfrac{a}{a^2+1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$A^2=-\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}E$（$E$ は 2 次の単位行列）．$\overrightarrow{P_{n+2}P_{n+4}}=A\overrightarrow{P_nP_{n+2}}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_2P_{4m+2}}&=\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_4P_6}+\overrightarrow{P_6P_8}+\cdots+\overrightarrow{P_{4m}P_{4m+2}}\\
&=(E+A+A^2+\cdots+A^{2m-1})\overrightarrow{P_2P_4}\\
&=(E+A^2+A^4+\cdots+A^{2m-2})(\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_4P_6})\\
&=\left(1+\frac{-a^2}{(a^2+1)^2}+\left(\frac{-a^2}{(a^2+1)^2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{a^2}{(a^2+1)^2}\right)^{m-1}\right)\overrightarrow{P_2P_6}\\
&=\frac{1-\left(\dfrac{-a^2}{(a^2+1)^2}\right)^m}{1+\dfrac{a^2}{(a^2+1)^2}}\frac{a}{(a^2+1)^2}\begin{pmatrix} a \\ a^2+1 \end{pmatrix}\\
&=\left\{1-\left(-\frac{a^2}{(a^2+1)^2}\right)^m\right\}\frac{a}{a^4+3a^2+1}\begin{pmatrix} a \\ a^2+1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\triangle P_0P_1P_2 \backsim \triangle P_{4m}P_{4m+1}P_{4m+2}$ から，

$$\overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m}}=A^{2m}\overrightarrow{P_2P_0}=\left(\frac{-a^2}{a^2+1}\right)^m\overrightarrow{P_2P_0},\quad \overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m+1}}=\left(\frac{-a^2}{a^2+1}\right)^m\overrightarrow{P_2P_1}$$

$$\overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m+3}}=\left(\frac{-a^2}{a^2+1}\right)^m\overrightarrow{P_2P_3}.$$

よって，

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4m}}&=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4m+1}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4m+2}}=\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4m+3}}\\
&=\frac{a}{a^4+3a^2+1}\begin{pmatrix} a \\ a^2+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，P_{4m+i}（$i=0,1,2,3$）は限りなく点

$$\left(\frac{a^2}{a^4+3a^2+1},\ \frac{a^3+a}{a^4+3a^2+1}\right)$$

に近づく．　　　　…(答)

(2)の【解答 2】　相似比を利用

(1) より，$\overrightarrow{P_2P_6}=\sin\theta\cos\theta(\sin\theta\cos\theta,\ 1)$.

$$\triangle P_0P_1P_2 \backsim \triangle P_2P_1P_3 \backsim \triangle P_2P_3P_4 \backsim \cdots \backsim \triangle P_{2m}P_{2m+1}P_{2m+2} \backsim \triangle P_{2m+2}P_{2m+1}P_{2m+3}$$

で，$\cos\theta$，$\sin\theta$ が交互に相似比になり，$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ と $\triangle P_{n+4}P_{n+5}P_{n+6}$ は逆向きになる．

$$\therefore\ \overrightarrow{P_{n+4}P_{n+8}}=-\sin^2\theta\cos^2\theta\overrightarrow{P_nP_{n+4}}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m+6}}=(-\sin^2\theta\cos^2\theta)^m\overrightarrow{P_2P_6}.$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_2P_{4m+2}}&=\{1-\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta\cos^4\theta+\cdots+(-\sin^2\theta\cos^2\theta)^{m-1}\}\overrightarrow{P_2P_6}\\
&=\frac{1-(-\sin^2\theta\cos^2\theta)^m}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}\sin\theta\cos\theta(\sin\theta\cos\theta,\ 1).
\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{m\to\infty}\overrightarrow{P_2P_{4m+2}}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin^2\theta\cos^2\theta}(\sin\theta\cos\theta,\ 1)=\frac{a(a^2+1)}{a^4+3a^2+1}\left(\frac{a}{a^2+1},\ 1\right)$$
$$=\left(\frac{a^2}{a^4+3a^2+1},\ \frac{a(a^2+1)}{a^4+3a^2+1}\right).$$

$i=2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，$|\overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m+i}}|<3|\overrightarrow{P_{4m+2}P_{4m+3}}|\to 0$.

よって，$n\to\infty$ のとき，

$$P_n\to\left(\frac{a^2}{a^4+3a^2+1},\ \frac{a(a^2+1)}{a^4+3a^2+1}\right). \qquad \cdots(答)$$

東大一次試験の終了（1978 年）

東大では 1955 年（昭和 30 年）から 1978 年（昭和 53 年）まで一次試験を課していた．基本的には英数国を同じ時間帯で解く試験であった．時間は最初の年が 180 分で以後 150 分，120 分と短くなっていった．

全問穴埋め式の客観テストで，数学は文理とも 5 題（150 分の時代）から 4 題（120 分の時代）であった．

時間を英数国 3 教科と問題数で割ると 1 題当り 10 分位でこなさないと間に合わなかった．

現代のようにマークシートなどがない時代だから採点は手作業であったはずである．各問題にはおおよそ 4 つの枠がありそれぞれに数字を記入してゆく形式だった．

解答欄には 1 つの枠に対して 5 つのマスがあり，左詰めで 5 つの数字または − または分数を表す／のいずれかを書き込む形式だった．

例えば $-\dfrac{2}{13}$ が答なら

−	2	／	1	3

と記入する形式だった．したがって，5 桁の以内の整数，4 桁以内の負の数，分母分子の桁数の和が 4 以下の分数，負の分数なら分母分子の桁の数の和が 3 以下のものしか答にできなかった．もちろん，無理数や数式を答とすることはできなかった．

それでも択一式にして該当する数字を記入させるなどの工夫された問題なども見られた．中にはグラフを択一式で求めさせる問題まであった．

当時は一期校，二期校に分かれていた時代で，一期校の試験が 3 月 3 日頃で，二期校が 3 月 23 日頃だった．2 段階選抜をするためには出来るだけ早く一次合格者を出し二次試験を行い，3 月中ごろには合格発表をしなければならなかった．当時一橋大でも 2 段階選抜をしていた．おそらく同様にあわただしかったと思う．

2 次試験は 3 月 8 日頃に行われていたから，かなり機械的に能率よく採点作業が進まないとならなかったと思われる．その為に編み出された手法がこのような形の客観テストだと思われる．恐らくその後の共通一次試験やセンター試験の参考になった試験だと思われる．

ただし，少なくとも初期の共通一次試験とは比べ物にならない位難しかった．形式は似ていたが内容は全く別物だった．

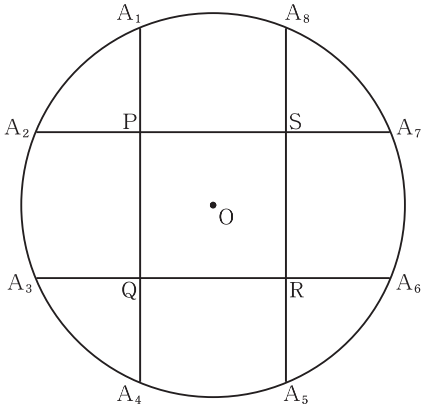
1979 年から共通一次試験が始まり東大入試は記述式だけになった．

1980 年　文科

第一問

図のように，半径 a の円 O の周を 8 等分する点を順に A_1，A_2，…，A_8 とし，弦 A_1A_4 と弦 A_2A_7，A_3A_6 との交点をそれぞれ P，Q とし，弦 A_5A_8 と弦 A_3A_6，A_2A_7 との交点をそれぞれ R，S とする。

このとき，正方形 PQRS の面積を求めよ。また，線分 A_1P，A_2P と弧 A_1A_2 とで囲まれる図形の面積を求めよ。



分　野

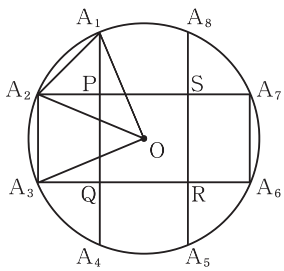
数学Ⅰ：平面図形，面積

考え方

$A_0=A_8$ として，$\angle A_iOA_{i+1}=\dfrac{\pi}{4}$ であることを利用.

後半は弓形と三角形に分ければよい.

【解答】



$\angle A_iOA_{i+1}=\dfrac{\pi}{4}$ であるから，正方形 PQRS の面積は余弦定理から，

$$PQ^2=A_2A_3{}^2=OA_2{}^2+OA_3{}^2-2OA_2\cdot OA_3\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=a^2+a^2-2a^2\frac{1}{\sqrt{2}}=(2-\sqrt{2})a^2. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\triangle A_1OA_2=\frac{1}{2}a^2\sin\frac{\pi}{4}=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{扇形 } OA_1A_2=\frac{1}{2}a^2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi a^2}{8}.$$

$$A_1A_2=A_2A_3=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a.$$

$$\triangle PA_1A_2=\frac{1}{2}\left(\frac{A_1A_2}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}a^2.$$

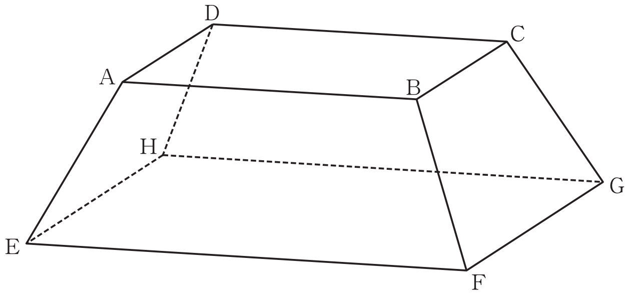
求める面積は

$$\frac{\pi}{8}a^2-\frac{a^2}{2\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{4}a^2=\frac{\pi}{8}a^2+\frac{1-\sqrt{2}}{2}a^2. \qquad \cdots(\text{答})$$

第二問

図のような立体 ABCD-EFGH がある。上底面 ABCD，下底面 EFGH はともに正方形であって，両底面はたがいに平行であり，4 つの側面 ABFE，BCGF，CDHG，DAEH は台形であって，AE＝BF＝CG＝DH である。また下底面の 1 辺の長さは 12，両底面の間の距離は 4 である。

上底面の 1 辺の長さが x のとき，側面 ABFE の面積を $S(x)$ とする。x が $2 \leqq x \leqq 10$ の範囲を動くときの $S(x)$ の最大値と最小値を求めよ。



分　野

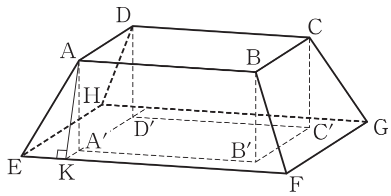
数学ⅡB：立体図形，整式の微分

考え方

上底面 ABCD を下底面 EFGH へ正射影して考える．あとは三平方の定理を使えばよい．

【解答】

下底面 EFGH へ上底面の頂点 A，B，C，D を正射影した点を A′，B′，C′，D′ とおくと，上底面と下底面が平行だから正方形 A′B′C′D′ は正方形 ABCD と合同で 1 辺の長さが x の正方形である．



D′A′ の延長と EF の交点を K とすると，対称性から，

$\mathrm{A'K}=\dfrac{12-x}{2}$.

$\mathrm{AA'}=4$ より，$\mathrm{AK}=\sqrt{\mathrm{AA'}^2+\mathrm{A'K}^2}=\sqrt{16+\dfrac{1}{4}(12-x)^2}$.

台形 ABFE は上底 $\mathrm{AB}=x$，下底 $\mathrm{EF}=12$，高さ $\mathrm{AK}=\sqrt{16+\dfrac{1}{4}(12-x)^2}$.

よって，

$$S(x)=\frac{12+x}{2}\sqrt{16+\frac{1}{4}(12-x)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(x+12)^2(x^2-24x+208)}.$$

$f(x)=(x+12)^2(x^2-24x+208)$ とおくと，

$f'(x)=2(x+12)(x^2-24x+208)+2(x+12)^2(x-12)=4(x+12)(x^2-12x+32)=4(x+12)(x-4)(x-8)$.

$2 \leqq x \leqq 10$ から

x	2	…	4	…	8	…	10
$f'(x)$		＋	0	－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↗	

$f(4)=16^2(16-96+208)=2^{15}=2^4\cdot 2048$,　$f(10)=22^2(100-240+208)=22^2\cdot 68=2^4\cdot 11^2\cdot 17=2^4\cdot 2057$ より，$f(4)<f(10)$.

$f(8)=20^2(64-192+208)=20^2\cdot 80=2^4\cdot 25\cdot 80=2^4\cdot 2000$,　$f(2)=14^2(4-48+208)=14^2\cdot 164=2^4\cdot 2009$

より，$f(8)<f(2)$.

よって，$S(x)=\dfrac{1}{4}\sqrt{f(x)}$ の

$$\text{最大値は } \frac{1}{4}\sqrt{f(10)}=11\sqrt{17},\quad \text{最小値は } \frac{1}{4}\sqrt{f(8)}=20\sqrt{5}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】 座標計算

下底面を xy 平面，その中心を原点とし，x 軸を $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ に平行に，y 軸を $\overrightarrow{\mathrm{HE}}$ に平行に，z 軸を上方にとると，頂点の座標は

$$\mathrm{E}(6,\ 6,\ 0),\quad \mathrm{F}(-6,\ 6,\ 0),\quad \mathrm{G}(-6,\ -6,\ 0),\quad \mathrm{H}(6,\ -6,\ 0),$$
$$\mathrm{A}\left(\frac{x}{2},\ \frac{x}{2},\ 4\right),\quad \mathrm{B}\left(-\frac{x}{2},\ \frac{x}{2},\ 4\right),\quad \mathrm{C}\left(-\frac{x}{2},\ -\frac{x}{2},\ 4\right),\quad \mathrm{D}\left(\frac{x}{2},\ -\frac{x}{2},\ 4\right)$$

と表される.

A から EF へ下した垂線の足を K とすると，その座標は $\mathrm{K}\left(\dfrac{x}{2},\ 6,\ 0\right)$.

側面 ABFE は上底 $\mathrm{AB}=x$，下底 $\mathrm{EF}=12$，高さ $\mathrm{AK}=\sqrt{\left(\dfrac{x}{2}-6\right)^2+4^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}(x-12)^2+16}$ の等脚台形である.

以下**【解答】**と同じ.

第三問

n，a，b，c，d は 0 または正の整数であって，

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6 \\ a+b+c+d\leqq n \\ a\geqq b\geqq c\geqq d \end{cases}$$

をみたすものとする。このような数の組 $(n,\ a,\ b,\ c,\ d)$ をすべて求めよ。

分　野

数学 I ：整数

考え方

条件式は 1 つの等式と 2 つの不等式からなる．等式を利用して 1 文字を消去する．形から先ず n を消去する.

【解答】

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2+d^2=n^2-6, & \cdots① \\ a+b+c+d\leqq n, & \cdots② \\ a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0 & \cdots③ \end{cases}$$

とおく.

②，③ より $(a+b+c+d)^2\leqq n^2$. ① より，

$$(a+b+c+d)^2\leqq a^2+b^2+c^2+d^2+6.\quad \therefore\quad ab+ac+ad+bc+bd+cd\leqq 3. \qquad \cdots④$$

③ より，$6d^2\leqq ab+ac+ad+bc+bd+cd\leqq 3$. よって，$d^2\leqq\dfrac{1}{2}$.

d は 0 または正の整数であるから，$d=0$.

④，③ より，

$$3c^2\leqq ab+ac+bc\leqq 3. \qquad \cdots⑤$$

よって，$c=0$，1.

(i)　$c=1$ のとき，⑤ より $ab+a+b=3$．a，b は 1 以上の整数だから，$a=b=1$．このとき，
$n^2=a^2+b^2+c^2+d^2+6=9$．∴　$n=3$.

$$\therefore\ (a,\ b,\ c,\ d,\ n)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3).$$

(ii)　$c=0$ のとき，⑤，③ より $b^2 \leqq ab \leqq 3$.

よって，$b=0$，1.

(ii-a)　$b=0$ のとき，① より，$a^2=n^2-6$.

$$\therefore\ n^2-a^2=(n+a)(n-a)=6.$$

n，a は整数だから $n+a$，$n-a$ はともに奇数かともに偶数．したがって，$(n+a)(n-a)$ は奇数か 4 の倍数．6 はそのいずれでもないから，これをみたす $(a,\ n)$ は存在しない．

(ii-b)　$b=1$ のとき，① より，$a^2+1=n^2-6$.

$$\therefore\ n^2-a^2=(n+a)(n-a)=7.$$

$n-a \leqq n+a$，$0 \leqq n+a$ だから $n+a=7$，$n-a=1$．∴　$(a,\ n)=(3,\ 4)$.

$$\therefore\ (a,\ b,\ c,\ d,\ n)=(3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4).$$

以上より，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 3),\ (3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 4).$$ …(答)

第四問

a，b は $a^2-b^2=-1$ をみたす定まった実数とし，$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix}$ とおく。実数の組 $(x,\ y)$ について，$Z=xI+yA$ とおき，このZ に対して $Z'=xI-yA$ とおく。また零行列を O で表す。

(1)　等式

$$ZZ'-Z-Z'-3I=O$$ …(*)

をみたすすべての Z に対する点 $(x,\ y)$ のつくる曲線を図示せよ。

(2)　$x^2+y^2 \neq 0$ のとき，Z の逆行列 Z^{-1} があって $uI+vA$ の形に表されることを示せ。また，等式(*)をみたすすべての Z に対する点 $(u,\ v)$ のつくる曲線を図示せよ。

分　野

数学ⅡB：行列

考え方

$AI=IA$ で，$A^2=-I$ であることに気がつけばあとは普通の文字計算のように扱うことができる．

【解答】

(1)　$A^2=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ -b & -a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2-b^2 & 0\\ 0 & a^2-b^2\end{pmatrix}=-I$，$AI=IA=A$.

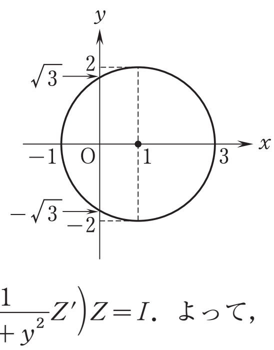
$$ZZ'=(xI+yA)(xI-yA)=x^2I^2-xy(IA-AI)-y^2A^2=(x^2+y^2)I.$$

$$Z+Z'=(xI+yA)+(xI-yA)=2xI.$$

$$ZZ'-Z-Z'-3I=(x^2+y^2-2x-3)I=O.$$

$I \neq O$ だから，$x^2+y^2-2x-3=0$．∴　$(x-1)^2+y^2=4$.

点 $(x,\ y)$ のつくる曲線は右図.



(2)　$x^2+y^2 \neq 0$ のとき，$ZZ'=(x^2+y^2)I$ より，$Z\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}Z'\right)=I$．また，$\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}Z'\right)Z=I$．よって，

Z^{-1} は存在して，

$$Z^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}Z'=\frac{x}{x^2+y^2}I-\frac{y}{x^2+y^2}A.$$

$Z^{-1}=uI+vA$ より，

$$\left(u-\frac{x}{x^2+y^2}\right)I+\left(v+\frac{y}{x^2+y^2}\right)A=O.$$

A は I の実数倍ではないので，$v+\dfrac{y}{x^2+y^2}\neq 0$ とすると矛盾する．したがって，

$$u=\frac{x}{x^2+y^2},\quad v=-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

$$u^2+v^2=\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

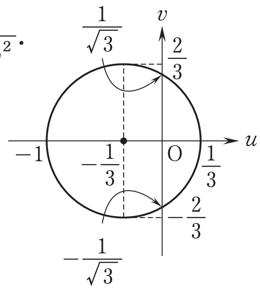
$$\therefore\quad x=u(x^2+y^2)=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=-v(x^2+y^2)=-\frac{v}{u^2+v^2}.$$

(1) の方程式に代入して，

$$\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{2u}{u^2+v^2}-3=0.\quad \therefore\quad 1-2u-3(u^2+v^2)=0.$$

$$\therefore\quad \left(u+\frac{1}{3}\right)^2+v^2=\frac{4}{9}.$$

点 $(u,\ v)$ のつくる曲線は右図．



(注)　I は単位行列で，$A^2=-I$ であり，I と A から作られる $aI+bA$ の形の行列どうしの積は交換可能，つまり

$$(aI+bA)(a'I+b'A)=(a'I+b'A)(aI+bA)$$

である．したがって，$aI+bA$ を複素数 $a+bi$ に対応して考えることができる．

この問題では Z，Z' をそれぞれ複素数 $z=x+yi$，$\overline{z}=x-yi$ に対応させると，(1) は複素数平面上で

$$z\overline{z}-z-\overline{z}-3=0$$

の軌跡を求めさせる問題になり，(2)は $w=\dfrac{1}{z}$ が存在し，それが複素数 $u+vi$ であることを示し，w の軌跡を求める問題になる．

ただし，この時期，複素数平面は高校の範囲外であった．

1980 年　理科

第一問

1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 BC，CA，AB 上に，それぞれ点 P，Q，R を

$$BP=CQ=AR<\frac{1}{2}$$

となるようにとり，線分 AP と線分 CR の交点を A′，線分 BQ と線分 AP の交点を B′，線分 CR と線分 BQ の交点を C′ とする。BP$=x$ として，次の問に答えよ。

(1)　BB′，PB′ を x を用いて表せ。

(2)　三角形 A′B′C′ の面積が三角形 ABC の面積の $\frac{1}{2}$ になるような x の値を求めよ。

分　野

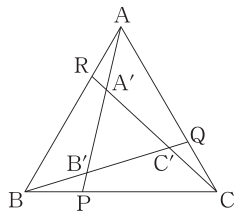
数学Ⅰ：平面図形，　**数学ⅡB**：ベクトル，内積

考え方

東大の図形問題では，ベクトル，三角関数，座標幾何などをつかってもできるが，初等幾何的に見ると，手間が省ける問題が多い．

この問題でもそれが言える．

【解答】　ベクトルによる解答



(1)　$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=1$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot1\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$.

P は BC を $x:1-x$ に内分する点だから，

$$\overrightarrow{AP}=(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}. \quad \cdots①$$

Q は CA を $x:1-x$ に内分する点だから，

$$\overrightarrow{AQ}=(1-x)\overrightarrow{AC}.$$

B′ は AP 上の点だから，

$$\overrightarrow{AB'}=s\overrightarrow{AP}=s(1-x)\overrightarrow{AB}+sx\overrightarrow{AC} \quad \cdots②$$

とかける．B′ は BQ 上の点だから，

$$\overrightarrow{AB'}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t(1-x)\overrightarrow{AC}. \quad \cdots③$$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ はいずれも $\vec{0}$ でなく平行でないから，②，③ より，

$$s(1-x)=1-t,\quad sx=t(1-x).\quad \therefore\quad t=\frac{x}{1-x+x^2},\quad s=\frac{1-x}{1-x+x^2}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{AB'}=\frac{(1-x)^2}{1-x+x^2}\overrightarrow{AB}+\frac{x(1-x)}{1-x+x^2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AB}=\frac{-x}{1-x+x^2}\overrightarrow{AB}+\frac{x(1-x)}{1-x+x^2}\overrightarrow{AC}=\frac{x}{1-x+x^2}\{(1-x)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\}.$$

$$|\overrightarrow{BB'}|^2=\left(\frac{x}{1-x+x^2}\right)^2\{(1-x)^2-(1-x)+1\}=\frac{x^2}{1-x+x^2}.$$

$$\overrightarrow{B'P}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB'}=\frac{(1-x)x^2}{1-x+x^2}\overrightarrow{AB}+\frac{x^3}{1-x+x^2}\overrightarrow{AC}=\frac{x^2}{1-x+x^2}\{(1-x)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}\}.$$

$$|\overrightarrow{B'P}|^2=\left(\frac{x^2}{1-x+x^2}\right)^2\{(1-x)^2+x(1-x)+x^2\}=\frac{x^4}{1-x+x^2}.$$

よって，

$$BB'=\frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}},\quad PB'=\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}.$$ …(答)

(2) ① より $|\overrightarrow{AP}|^2=(1-x)^2+(1-x)x+x^2=1-x+x^2$.

また，対称性から $AA'=BB'$.

$$A'B'=AP-AA'-B'P=\sqrt{1-x+x^2}-\frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}=\frac{1-2x}{\sqrt{1-x+x^2}}.$$

三角形 ABC および三角形 A′B′C′ は正三角形で面積比が $1:\frac{1}{2}$ だから辺の比 $AB:A'B'=1:\frac{1}{\sqrt{2}}$.

よって，

$$A'B'=\frac{1-2x}{\sqrt{1-x+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad 2(1-2x)^2=1-x+x^2.\quad\therefore\quad 7x^2-7x+1=0.$$

$$\therefore\quad x=\frac{7\pm\sqrt{21}}{14}.$$

$0<x<\frac{1}{2}$ より，

$$x=\frac{7-\sqrt{21}}{14}.$$ …(答)

【別解】 三角比および初等幾何による (1) の別解

(1) 三角形 ABP について余弦定理を用いて，

$$AP^2=AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos\angle ABP=1+x^2-x.$$

三角形 A′B′C′ が対称性から正三角形であることに注意すると，△ABP と △BB′P において，$\angle ABP=\angle BB'P=60°$ で，$\angle BPA=\angle BPB'$ だから $\triangle ABP \backsim \triangle BB'P$.

$$AB:BP:PA=BB':B'P:PB.\quad\therefore\quad 1:x:\sqrt{1-x+x^2}=BB':B'P:x.$$

$$\therefore\quad BB'=\frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}},\quad PB'=\frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}}.$$ …(答)

第二問

長さ 2 の線分 NS を直径とする球面 K がある。点 S において球面 K に接する平面の上で，S を中心とする半径 2 の四分円 $\left(\text{円周の}\ \frac{1}{4}\ \text{の長さをもつ円弧}\right)$ $\overset{\frown}{AB}$ と線分 AB をあわせて得られる曲線上を，点 P が一周する。このとき，線分 NP と球面 K との交点 Q の描く曲線の長さを求めよ。

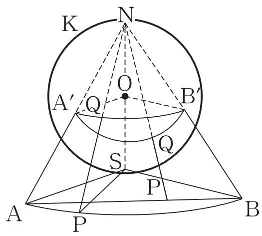
分 野

数学ⅡB：空間図形

考え方

四分円上に P があるときについては，NS と P を含む平面上で考えるとよく，線分 AB 上に P があるときは，AB と N を含む平面で考えるとよい.

【解答 1】　初等幾何によって



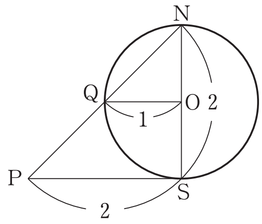
Kの中心をO，線分NA，NBとKの交点をそれぞれA′，B′とする．

(i)　Pが$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$上にあるとき，平面NSPにおいて，NS＝SP＝2で∠NSPは直角だから，三角形NSPは直角二等辺三角形．∠PNS＝∠QNS＝45°．よって，円周角と中心角の関係から ∠QOS＝90°．よって，OQ∥SP．

よって，△NOQ∽△NSP．相似比は1：2．

よって，PがSを中心とする半径2の四分円$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$を描くとき，QはOを中心とする半径1の四分円$\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$を描く．

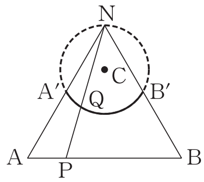
その長さは $\dfrac{1}{4}\cdot 2\pi=\dfrac{\pi}{2}$ である．



(ii)　Pが線分AB上を動くとき，線分NPは平面NAB上の線分であるから，Qは平面NABと球面Kの交円上の弧$\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$を描く．

平面NABとKの交円はN，A′，B′を通り，ON＝OA′＝OB′＝1で，∠NOA′＝∠NOB′＝∠A′OB′ は直角だから，NA′＝NB′＝A′B′＝$\sqrt{2}$．

したがって，交円は正三角形NA′B′の外接円．その半径は $R=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.



$\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$の中心角は120°だから，その長さは $\dfrac{1}{3}2\pi\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi$.

以上より，求める曲線の長さは

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi=\frac{9+4\sqrt{6}}{18}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

【解答 2】　座標計算によって

Sを座標原点，半直線SA，SB，SNをx軸，y軸，z軸の正方向になるように座標を設定する．このとき，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，N(0, 0, 2)．球面Kの方程式は

$$\mathrm{K}：x^2+y^2+(z-1)^2=1 \iff x^2+y^2+z^2-2z=0. \qquad \cdots①$$

(i)　Pが半径2の四分円上にあるとき，Pの座標は

$$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta,\ 0)\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

直線NPの方程式は

$$\frac{x}{2\cos\theta}=\frac{y}{2\sin\theta}=\frac{z-2}{-2}\quad (=t\ \text{とおく}).$$

NP上の点Q$(x,\ y,\ z)$の座標は

$$\mathrm{Q}(2t\cos\theta,\ 2t\sin\theta,\ 2-2t).$$

これが，K上にあるから，①に代入して，

$$(2t\cos\theta)^2+(2t\sin\theta)^2+(2-2t)^2-2(2-2t)=4t(2t-1)=0.$$

$t=0$ とすると，Q(0, 0, 2)となり，QはNと一致してしまうから不適．

よって，$t=\dfrac{1}{2}$．このとき，

$$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1)\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right).$$

よって，Qは平面 $z=1$ 上でOを中心とする半径1の四分円を描く．その長さは$\dfrac{\pi}{2}$.

(ii)　Pが線分AB上を動くとき，直線NPは平面NAB上の直線である．平面NABの方程式は

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1. \iff x+y+z=2. \qquad \cdots②$$

したがって，Qは平面②と球面Kの交円上にある．交円をCとする．

K の中心 $(0,\ 0,\ 1)$ と平面 ② の距離は

$$\frac{|0+0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

したがって，交円 C の半径は

$$\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

P が線分 AB 上を動くとき，Q は円 C の劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{A'B'}}$ 上を動く．

$\mathrm{A'B'}=\sqrt{2}$ から A′B′ の長さは半径の $\sqrt{3}$ 倍．

よって，円 C の中心を C とすると，$\angle\mathrm{A'CB'}=\dfrac{2}{3}\pi$.

よって，Q の描く曲線の長さは $\dfrac{2}{3}\pi\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi$.

よって，求める曲線の長さは

$$\frac{\pi}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi.$$

…(答)

第三問

α を実数，$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とし，正整数 n について

$$\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix}$$

とおく。

(1)　ある n について $q_n=0$ となるような α の値をすべて求めよ。

(2)　すべての n について $q_n\neq 0$ となるような α を考える。そのとき，$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ を α を用いて表し，また，a_1，a_2，…，a_n，… の値のうちで異なるものの個数を求めよ。

分　野

数学ⅡB：行列

考え方

$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ の型の行列は θ 回転を表す行列 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ の実数倍で表される．したがって，この型の行列は回転と原点中心の実数倍の合成変換を表す．この問題の行列は $\dfrac{\pi}{4}$ 回転と $\sqrt{2}$ 倍の実数倍の合成変換を表す．

【解答】

$$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{4} & -\sin\dfrac{\pi}{4}\\ \sin\dfrac{\pi}{4} & \cos\dfrac{\pi}{4}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^n=\sqrt{2}^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi \\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}$ と x 軸正方向のなす角を θ とおくと，$0<\theta<\pi$ で，$\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}=\sqrt{\alpha^2+1}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ とおける．ただし，$\alpha=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

$$\begin{pmatrix}p_n \\ q_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}=\sqrt{2}^n\sqrt{\alpha^2+1}\begin{pmatrix}\cos\frac{n}{4}\pi & -\sin\frac{n}{4}\pi \\ \sin\frac{n}{4}\pi & \cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\sqrt{2}^n\sqrt{\alpha^2+1}\begin{pmatrix}\cos\left(\theta+\frac{n}{4}\pi\right) \\ \sin\left(\theta+\frac{n}{4}\pi\right)\end{pmatrix}.$$

(1) $q_n=0$ のとき，$\sqrt{2}^n\sqrt{\alpha^2+1}\neq 0$ だから，$\sin\left(\theta+\dfrac{n}{4}\pi\right)=0$．このとき，$\theta+\dfrac{n}{4}\pi=k\pi$（$k$ は整数）とかける．よって，$0<\theta=\dfrac{4k-n}{4}\pi<\pi$．よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi$.

$\alpha=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ だから，

$$\alpha=1,\ 0,\ -1. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\alpha\neq 0$，± 1.

$$a_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{n}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{n}{4}\pi\right)}.$$

(i) $n=4m$（m は自然数）のとき，

$$a_n=\frac{\cos(\theta+m\pi)}{\sin(\theta+m\pi)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\alpha.$$

(ii) $n=4m+1$（m は 0 または自然数）のとき，

$$a_n=\frac{\cos\left(\theta+\frac{4m+1}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{4m+1}{4}\pi\right)}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}.$$

(iii) $n=4m+2$（m は 0 または自然数）のとき，

$$a_n=\frac{\cos\left(\theta+\frac{4m+2}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{4m+2}{4}\pi\right)}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{\alpha}.$$

(iv) $n=4m+3$（m は 0 または自然数）のとき，

$$a_n=\frac{\cos\left(\theta+\frac{4m+3}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{4m+3}{4}\pi\right)}=\frac{\cos\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}{\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{\alpha+1}{1-\alpha}.$$

これらは

$$\frac{1}{\tan\theta},\ \frac{1}{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)},\ \frac{1}{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)},\ \frac{1}{\tan\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)}$$

とかけて，$\tan\theta$ の周期は π で，その間に同じ値はとらないから，これらは互いに異なる．

以上より，a_n は4種類（答）で，m を負でない整数として，

$$\begin{cases} n=4m \text{ のとき，} \quad a_n=\alpha, \quad n=4m+1 \text{ のとき，} a_n=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}, \\ n=4m+2 \text{ のとき，} a_n=-\dfrac{1}{\alpha}, \quad n=4m+3 \text{ のとき，} a_n=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}. \end{cases}$$ …(答)

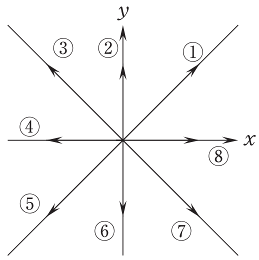
【別解】

$A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}$ だから，A を1回作用させるとベクトルは角 $\frac{\pi}{4}$ だけ回転し，大きさは $\sqrt{2}$ 倍になる．

⑴　$q_n=0$ とは $\begin{pmatrix}p_n \\ q_n\end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ を意味する．

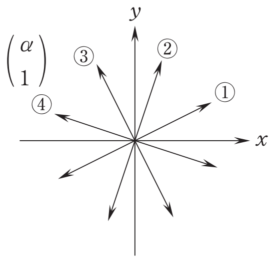
$\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}=(A^n)^{-1}\begin{pmatrix}p_n \\ q_n\end{pmatrix} /\!/ (A^n)^{-1}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ であるから $\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}$ を $-\frac{n}{4}\pi$ 回転すると平行になる向きでなければならない．（大きさは関係しない）

したがって，$\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}$ の向きは（図1）の①〜⑧のいずれかでなくてはならない．そのうち y 成分が 1 (>0) であるから，$\alpha=\pm1,\ 0$ …(答)



（図1）

⑵　大きさを無視して $\begin{pmatrix}p_n \\ q_n\end{pmatrix}$ の向きは（図2）のように $\frac{\pi}{4}$ ずつの角をなす8通りが考えられる．そのうち $\frac{p_n}{q_n}$ が異なるのは①〜④の4種類．



（図2）

①，②，③，④のどれか1つを $\begin{pmatrix}p_i \\ q_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}$ とすると，$\frac{p_i}{q_i}=\alpha$．

$\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha \\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-1 \\ \alpha+1\end{pmatrix}$ より $\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$．

$\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha-1 \\ \alpha+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 \\ 2\alpha\end{pmatrix}$ より $\frac{p_{i+2}}{q_{i+2}}=-\frac{1}{\alpha}$．

$\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 \\ \alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-1 \\ \alpha-1\end{pmatrix}$ より $\frac{p_{i+3}}{q_{i+3}}=-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$．

$\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha-1 \\ \alpha-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\alpha \\ -2\end{pmatrix}$ より $\frac{p_{i+4}}{q_{i+4}}=\alpha$．

$\begin{pmatrix}p_i \\ q_i\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}p_{i+4} \\ q_{i+4}\end{pmatrix}$ は逆向きだが $\frac{p_n}{q_n}$ は等しい．

よって，$\frac{p_n}{q_n}=\alpha,\ \frac{\alpha-1}{\alpha+1},\ -\frac{1}{\alpha},\ -\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$．これらは，互いに異なる．

以上より，a_n は4種類(答)で，m を負でない整数として，

$$\begin{cases} n=4m \text{ のとき，} \quad a_n=\alpha, \quad n=4m+1 \text{ のとき，} a_n=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}, \\ n=4m+2 \text{ のとき，} a_n=-\dfrac{1}{\alpha}, \quad n=4m+3 \text{ のとき，} a_n=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}. \end{cases}$$ …(答)

第四問

xy 平面上の動点Pの座標 $(x,\ y)$ は，時刻 t を用いて

$$\begin{cases} x=\sin t+\cos t \\ y=k\sin^2 t\cos^2 t \end{cases} \quad (-\infty<t<\infty)$$

と表されるものとする。ただし k は正の定数である。このとき原点とPとの間の距離の2乗の最大値および最小値を，k を用いて表せ。

分　野

数学ⅡB：三角関数，倍角公式，整式の微分

考え方

x^2，y^2 とも，$\sin 2t$ の式で表すことができる．このことを利用．

【解答】

$x^2=(\sin t+\cos t)^2=1+2\sin t\cos t=1+\sin 2t$，$y=\dfrac{k}{4}\sin^2 2t$.

$$x^2+y^2=1+\sin 2t+\frac{k^2}{16}\sin^4 2t.$$

$p=\sin 2t$，$x^2+y^2=g(p)$ とおくと，$-1\leqq p\leqq 1$ で，

$$g(p)=x^2+y^2=1+p+\frac{k^2}{16}p^4.$$

$$g'(p)=1+\frac{k^2}{4}p^3.$$

$g'(p)=0$ となるのは，$p=-\left(\dfrac{4}{k^2}\right)^{\frac{1}{3}}=-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$ のとき．

(i)　$0<k\leqq 2$ のとき，$-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\leqq -1$.

よって，$g'(p)=1+\dfrac{k^2}{4}p^3\geqq 0$．$g(p)$ は単調増加．

よって，$g(p)$ の最大値は $g(1)=2+\dfrac{k^2}{16}$．最小値は $g(-1)=\dfrac{k^2}{16}$.

(ii)　$k>2$ のとき，$-1<-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}<0$.

p	-1	$\cdots$	$-\left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$	$\cdots$	1
$g'(p)$		$-$	0	$+$	
$g(p)$		↘		↗	

$g(1)=2+\dfrac{k^2}{16}>g(-1)=\dfrac{k^2}{16}$.

$g\left(-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\right)=1-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{k^2}{16}\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{8}{3}}=1-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$.

よって，$g(p)$ の最大値は $g(1)=2+\dfrac{k^2}{16}$．最小値は $g\left(-\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}\right)=1-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}}$.

$$\therefore\quad \begin{cases} x^2+y^2 \text{ の最大値は } 2+\dfrac{k^2}{16}, \\ x^2+y^2 \text{ の最小値は} \begin{cases} \dfrac{k^2}{16} & (0<k\leqq 2), \\ 1-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{k}\right)^{\frac{2}{3}} & (k>2). \end{cases} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） Pの軌跡は$y=\dfrac{k}{4}(x^2-1)^2$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$

第五問

1辺の長さが1の正四面体 $A_0A_1A_2A_3$ がある。点Pはこの正四面体の辺上を毎秒1の速さで動き，各頂点に達したとき，そこから出る3辺のうちの1辺を $\dfrac{1}{3}$ ずつの確率で選んで進む。Pは時刻 $t=0$ において頂点 A_0 にあるとする。また n を0または正の整数とし，点Pが時刻 $t=n$ において頂点 A_i にある確率を $p_i(n)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ で表す。

(1) 数学的帰納法を用いて，$p_1(n)=p_2(n)=p_3(n)$ を証明せよ。

(2) $p_0(n)$ と $p_1(n)$ の値を求めよ。

分 野

数学Ⅰ：確率， **数学ⅡB**：数列，漸化式

考え方

$p_j(n)$ と $p_j(n+1)$ の関係式（漸化式）を考える．

【解答】

各頂点にいるとき，$\dfrac{1}{3}$ の確率でその頂点以外に移動するから，

$$\begin{cases} p_0(n+1)= \qquad\qquad \dfrac{1}{3}p_1(n)+\dfrac{1}{3}p_2(n)+\dfrac{1}{3}p_3(n), \\ p_1(n+1)=\dfrac{1}{3}p_0(n) \qquad\qquad +\dfrac{1}{3}p_2(n)+\dfrac{1}{3}p_3(n), \\ p_2(n+1)=\dfrac{1}{3}p_0(n)+\dfrac{1}{3}p_1(n)+ \qquad\qquad \dfrac{1}{3}p_3(n), \\ p_3(n+1)=\dfrac{1}{3}p_0(n)+\dfrac{1}{3}p_1(n)+\dfrac{1}{3}p_2(n). \end{cases} \qquad \cdots①$$

(1)
$$p_1(n)=p_2(n)=p_3(n) \qquad \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法で証明する．

(Ⅰ) $n=0$ のとき，$p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$ だから(*)は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき，(*)が成り立つとする．すなわち，$p_1(k)=p_2(k)=p_3(k)$ とする．

① より，

$$\begin{cases} p_1(k+1)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{1}{3}p_2(k)+\dfrac{1}{3}p_3(k)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{2}{3}p_1(k), \\ p_2(k+1)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{1}{3}p_1(k)+\dfrac{1}{3}p_3(k)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{2}{3}p_1(k), \\ p_3(k+1)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{1}{3}p_1(k)+\dfrac{1}{3}p_2(k)=\dfrac{1}{3}p_0(k)+\dfrac{2}{3}p_1(k). \end{cases}$$

よって，

$$p_1(k+1)=p_2(k+1)=p_3(k+1)=\frac{1}{3}p_0(k)+\frac{2}{3}p_1(k).$$

よって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

以上より，0 または正の整数 n について $p_1(n)=p_2(n)=p_3(n)$．　　（証明終り）

(2)　(1)と①から，

$$\begin{cases} p_0(n+1)=p_1(n), \\ p_1(n+1)=\dfrac{1}{3}p_0(n)+\dfrac{2}{3}p_1(n). \end{cases}$$

また，$p_0(n)+p_1(n)+p_2(n)+p_3(n)=p_0(n)+3p_1(n)=1$ だから，

$$p_0(n+1)=-\frac{1}{3}p_0(n)+\frac{1}{3}.$$

$$p_0(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_0(n)-\frac{1}{4}\right).$$

よって，数列 $\left\{p_0(n)-\dfrac{1}{4}\right\}$ は公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列．$p_0(0)=1$．

$$p_0(n)-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left(1-\frac{1}{4}\right).$$

$$\therefore\quad p_0(n)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}. \qquad \cdots(答)$$

$$p_1(n)=p_0(n+1)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \qquad \cdots(答)$$

第六問

xy 平面の第 1 象限にある点 A を頂点とし，原点 O と x 軸上の点 B を結ぶ線分 OB を底辺とする二等辺三角形（AO=AB）の面積を s とする。この三角形と不等式 $xy\leqq 1$ で表される領域との共通部分の面積を求め，これを s の関数として表せ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

A の座標を $(a,\ b)$ とすると，題意の共通部分の面積は ab によってのみ定まる．このことを確認する．

【解答】

A の座標を $(a,\ b)$ とすると，AO=AB であるから，B の座標は $(2a,\ 0)$ である．

また，△OAB の面積 $s=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\times a=ab$．

直線 OA の方程式は $y=\dfrac{b}{a}x$．曲線 $xy=1$ と $x>0$ の範囲にある交点の x 座標は $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$．

直線 AB の方程式は $y=-\dfrac{b}{a}x+2b$．

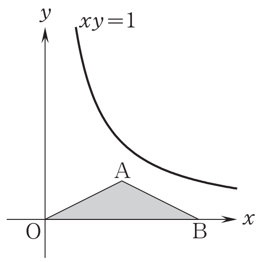
曲線 $xy=1$ との交点の x 座標は $-\dfrac{b}{a}x+2b=\dfrac{1}{x}$ つまり，

$$bx^2-2abx+a=0 \qquad \cdots①$$

の解．判別式を D とすると $\dfrac{1}{4}D=a^2b^2-ab$．

不等式 $xy\leqq 1$ で表される領域を S とする．

(i) $s=ab\leqq 1$ のとき，A は $xy=1$ より下にあり，$a\leqq\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，$D\leqq 0$.



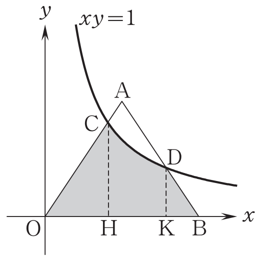
よって，線分 OA，AB は $xy\leqq 1$ の範囲にある．よって，△OAB と領域 S の共通部分は △OAB である．その面積は s.

(ii) $s=ab>1$ のとき，A は $y=\dfrac{1}{x}$ より上方にある．

このとき，① の解は $x=\dfrac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-ab}}{b}$.

$$\frac{ab-\sqrt{a^2b^2-ab}}{b}<a<\frac{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}{b},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}<a.$$

OA：$y=\dfrac{b}{a}x$ と $xy=1$ $(x>0)$ の交点を C とすると，C の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)$.



AB：$y=-\dfrac{b}{a}x+2b$ と $xy=1$ $(x>0)$ の交点を D とすると，

D の座標は $\left(\dfrac{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}{b},\ \dfrac{b}{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}\right)$.

C，D から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ H，K とすると，

$$\triangle\mathrm{OCH}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}.$$

$$\triangle\mathrm{DKB}=\frac{1}{2}\left(2a-\frac{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}{b}\right)\frac{b}{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}=\frac{1}{2}\frac{ab-\sqrt{a^2b^2-ab}}{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{s-\sqrt{s^2-s}}{s+\sqrt{s^2-s}}=\frac{1}{2}(2s-1-2\sqrt{s(s-1)}).$$

△OAB と領域 S の共通部分の面積は

$$\triangle\mathrm{OCH}+\int_{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}^{\frac{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}{b}}\frac{1}{x}\,dx+\triangle\mathrm{DKB}$$

$$=\frac{1}{2}+\log\left(\frac{ab+\sqrt{a^2b^2-ab}}{b}\right)-\log\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)+\frac{1}{2}(2s-1-2\sqrt{s(s-1)})$$

$$=\log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1})+s-\sqrt{s(s-1)}.$$

以上より，△OAB と領域 S の共通部分の面積は s のみの関数 $f(s)$ で表され，

$$f(s)=\begin{cases} s & (0<s\leqq 1),\\ \log(\sqrt{s}+\sqrt{s-1})+s-\sqrt{s(s-1)} & (s>1). \end{cases}$$ …(答)

(注) 共通部分の面積が s にしかよらない理由．実は $xy=1$ という曲線は行列 $F=\begin{pmatrix} t & 0\\ 0 & \frac{1}{t}\end{pmatrix}$ で表される一次変換すなわち，x 軸方向を t 倍にし，y 軸方向を $\dfrac{1}{t}$ 倍にする一次変換によって不変に保たれ，面積も不変である．$ab=s$（一定）のとき，A は曲線 $xy=s$ 上を移動する．$\mathrm{A_0}(a_0,\ b_0)(a_0b_0=s)$ を適当にとり，t を適当に選べば A を $\mathrm{A_0}$ に移すことができる．その変換で，曲線 $xy=1$ は不変であり，B に対応する点を $\mathrm{B_0}$ とすると，△OAB と $\triangle\mathrm{OA_0B_0}$ の面積は等しく，積分する範囲の面積も不変に保たれる．すなわち，問題で与えられた条件に従う点はこの変換によって対応する点に移動し，対応する部分の面積は不変に保たれる．したがって，$ab=s$ が一定である限り題意をみたす面積は不変になる．

1981 年　文科

第 1 問

$A=\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ とし，正の整数 n について

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

とおく。つぎに，a を実数とし，xy 平面上の点 $(x_n,\ y_n)$ と点 $(a,\ 0)$ との距離を d_n とする。このとき，

$$d_{n+1}>d_n$$

がすべての正の整数 n に対して成り立つような，a の値の範囲を求めよ。

分　野

数学ⅡB：行列

考え方

$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ の形の行列で表される一次変換は回転と相似拡大（縮小）の合成になる．したがって，n 乗は容易に求めることができる．したがって $(x_n,\ y_n)$ も容易に求められる．

次に $d_{n+1}{}^2-d_n{}^2$ を n で表し，これが正である条件を考える．

【解答】

$$A=2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}\pi & -\sin\frac{2}{3}\pi\\ \sin\frac{2}{3}\pi & \cos\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad A^n=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}n\pi & -\sin\frac{2}{3}n\pi\\ \sin\frac{2}{3}n\pi & \cos\frac{2}{3}n\pi\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}\cos\frac{2}{3}n\pi\\ \sin\frac{2}{3}n\pi\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad d_n{}^2=\left(2^n\cos\frac{2}{3}n\pi-a\right)^2+\left(2^n\sin\frac{2}{3}n\pi\right)^2=a^2-2^{n+1}a\cos\frac{2}{3}n\pi+2^{2n}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad d_{n+1}{}^2-d_n{}^2&=\left(a^2-2^{n+2}a\cos\frac{2}{3}(n+1)\pi+2^{2n+2}\right)-\left(a^2-2^{n+1}a\cos\frac{2}{3}n\pi+2^{2n}\right)\\ &=2^n\left\{3\cdot2^n-2a\left(2\cos\frac{2}{3}(n+1)\pi-\cos\frac{2}{3}n\pi\right)\right\}.\end{aligned}$$

すべての自然数 n についてこれが正であるような a の範囲が求めるもの．m を負でない整数とするとき，

$$2\cos\frac{2}{3}(n+1)\pi-\cos\frac{2}{3}n\pi=\begin{cases}2\cos\frac{4}{3}\pi-\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2} & (n=3m+1\ \text{のとき}),\\ 2\cos0-\cos\frac{4}{3}\pi=\frac{5}{2} & (n=3m+2\ \text{のとき}),\\ 2\cos\frac{2}{3}\pi-\cos0=-2 & (n=3m+3\ \text{のとき}).\end{cases}$$

よって，$d_{n+1}{}^2-d_n{}^2>0$ である条件は

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{3m+1}+a>0 & (n=3m+1 \text{ のとき}), \\ 3\cdot 2^{3m+2}-5a>0 & (n=3m+2 \text{ のとき}), \\ 3\cdot 2^{3m+3}+4a>0 & (n=3m+3 \text{ のとき}). \end{cases}$$

いずれも，$m=0$ のとき成り立てば $m>0$ のときも成り立つ.

$$\therefore \quad 6+a>0, \quad 12-5a>0, \quad 24+4a>0. \quad \therefore \quad -6<a<\frac{12}{5}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第2問

A が 100 円硬貨を 4 枚，B が 50 円硬貨を 3 枚投げ，硬貨の表が出た枚数の多い方を勝ちとし，同じ枚数のときは引き分けとする。硬貨の表，裏の出る確率はすべて $\frac{1}{2}$ であるものとする。

(1) A の勝つ確率，B の勝つ確率，引き分けの確率を求めよ。

(2) もし，勝った方が相手の投げた硬貨を全部もらえるとしたら，A と B とどちらが有利か。

分 野

数学Ⅰ：確率，期待値

考え方

独立試行の確率から，A が n 枚の硬貨の表を出す確率は ${}_4\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^4$，B が n 枚の硬貨の表を出す確率は ${}_3\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

【解答】

(1) A の投げた硬貨のうち n 枚が表である確率は ${}_4\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^4$，B の投げた硬貨のうち n 枚が表である確率は ${}_3\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

表にすると，

表の枚数 n	0	1	2	3	4
A が投げた	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
B が投げた	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

A が勝つ確率は

$$\frac{4}{16}\,\frac{1}{8}+\frac{6}{16}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)+\frac{4}{16}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}=\frac{4+24+28+8}{128}=\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

B が勝つ確率は

$$\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\frac{4}{16}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)+\frac{6}{16}\,\frac{1}{8}=\frac{7+16+6}{128}=\frac{29}{128}. \qquad \cdots(\text{答})$$

引き分けの確率は

$$\frac{1}{16}\,\frac{1}{8}+\frac{4}{16}\,\frac{3}{8}+\frac{6}{16}\,\frac{3}{8}+\frac{4}{16}\,\frac{1}{8}=\frac{1+12+18+4}{128}=\frac{35}{128}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) A が勝つ確率は $\frac{1}{2}$，獲得する金額は 150 円，B が勝つ確率は $\frac{29}{128}$，獲得する金額は 400 円.

したがってAが獲得する金額の期待値は $\dfrac{1}{2}\times150=75$ 円.

Bが獲得する金額の期待値は $\dfrac{29}{128}\times400=\dfrac{725}{8}=90.625$ 円.

したがって，Bの方が有利. …(答)

(注)　この問題では最初に投げた硬貨が誰の所有物であったのか不明である．所有者がないか第三者の所有とすれば，上のように獲得金額の期待値で比較すればよい．また，最初に投げた硬貨が投げた人の所有とすれば，とられた分をマイナスと考え，Aのもらう金額は 75−90.625=−15.625，Bのもらう金額は 15.625 円となる．いずれにしろ，Bが有利である．

第3問

2つの放物線

$$y=2x^2+1 \quad \cdots①$$

$$y=-x^2+c \quad \cdots②$$

の共通接線の方程式を求めよ。ただし c は定数で，$c<1$ をみたすものとする。

つぎに，

共通接線と放物線①で囲まれた部分の面積を S_1，

共通接線と放物線②で囲まれた部分の面積を S_2

としたとき，

$$\frac{S_1}{S_2}$$

の値を求めよ。

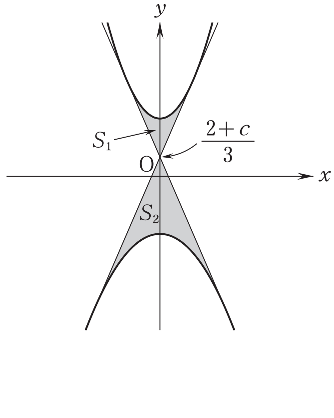
分　野

数学ⅡB：整式の微分，整式の積分，**数学Ⅰ**：相似

考え方

微分法と判別式の併用で共通接線は求められる.

【解答】



放物線①上の点 $(t,\ 2t^2+1)$ における①の接線の傾きは $4t$ だから，その方程式は

$$y=4t(x-t)+2t^2+1=4tx-2t^2+1.$$

この直線と②の交点の x 座標を求める方程式は

$$-x^2+c=4tx-2t^2+1.\quad x^2+4tx-2t^2+1-c=0.$$

接する条件は判別式を D として

$$\frac{1}{4}D=4t^2-(-2t^2+1-c)=6t^2-1+c=0.$$

$$\therefore\quad t=\pm\sqrt{\frac{1-c}{6}}.$$

よって，接線の方程式は

$$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{1-c}\,x+\frac{2+c}{3}. \quad \cdots(答)$$

$t_0=\sqrt{\dfrac{1-c}{6}}$ とおくと，① の 2 接線の接点の x 座標は $\pm t_0$．2 接線は y 軸について対称である．

$$S_1=\int_{-t_0}^{0}\{2x^2+1-(-4t_0x-2t_0{}^2+1)\}\,dx+\int_0^{t_0}\{2x^2+1-(4t_0x-2t_0{}^2+1)\}\,dx$$
$$=2\int_0^{t_0}2(x-t_0)^2\,dx=4\left[\frac{1}{3}(x-t_0)^3\right]_0^{t_0}=\frac{4}{3}t_0{}^3.$$

② の 2 接線の接点の x 座標は $\mp 2t_0$ で，2 接線は y 軸について対称である．

$$S_2=\int_{-2t_0}^{0}\{(4t_0x-2t_0{}^2+1)-(-x^2+c)\}\,dx+\int_0^{2t_0}\{(-4t_0x-2t_0{}^2+1)-(-x^2+c)\}\,dx$$
$$=2\int_0^{2t_0}(x-2t_0)^2\,dx=2\left[\frac{1}{3}(x-2t_0)^3\right]_0^{2t_0}=\frac{16}{3}t_0{}^3.$$

$$\therefore\quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}.$$ …(答)

後半の【別解】　相似性に注目

接線を求めるまで**【解答】**と同じ．

2 接線と y 軸の交点を $\mathrm{C}\left(0,\ \dfrac{2+c}{3}\right)$ とおく．

放物線 ① 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2t^2+1)$ と放物線 ② 上の点 $\mathrm{Q}(-2t,\ -4t^2+c)$ に対し，PQ を $1:2$ に内分する点は

$$\left(\frac{2\times t+(-2t)}{3},\ \frac{2\times(2t^2+1)+(-4t^2+c)}{3}\right)=\left(0,\ \frac{2+c}{3}\right)$$

となり C に一致する．したがって，2 つの放物線 ① と ② は C を相似中心とする相似の位置にあり，その相似比は $1:2$ である．

したがって，C を通る 2 接線と ①，② で囲まれた部分も C を相似中心とする相似図形である．したがって，その面積比は $1:4$ である．すなわち，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}.$$ …(答)

第4問

実数 α $\left(ただし\ 0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と，空間の点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 0)$ を与えて，つぎの4条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ を考える。

(イ) $z>0$

(ロ) 2点P，Aを通る直線と，Aを通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\dfrac{\pi}{4}$

(ハ) 2点P，Bを通る直線と，Bを通り z 軸と平行な直線のつくる角は $\dfrac{\pi}{4}$

(ニ) 2点P，Cを通る直線と，Cを通り z 軸と平行な直線のつくる角は α

このような点Pの個数を求めよ。また，Pが1個以上存在するとき，それぞれの場合について，z の値を，α を用いて表せ。

分　野

数学ⅡB：空間図形，二次曲線，双曲線

考え方

(ロ)，(ハ)をみたすPの存在範囲は円錐であり，2円錐の交点にPはある．

2円錐の頂角が等しいから，交点の軌跡はABの垂直二等分面（xz 平面）上にある双曲線である．

したがって，あとは xz 平面上の双曲線上の点Pと原点Cを通る直線と z 軸のなす角 α の関係を求めることになる．

【解答】

z 軸方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{e}=(0,\ 0,\ 1)$ とおく．

(イ)から $\overrightarrow{e}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$.

$$\frac{\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{e}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}=\frac{z}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y-1)^2=z^2. \qquad \cdots①$$

(ロ)から $\overrightarrow{e}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y+1,\ z)$ のなす角が $\dfrac{\pi}{4}$.

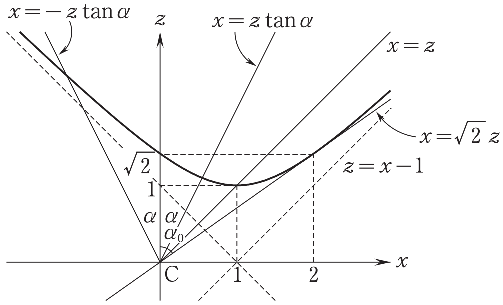
同様な計算により

$$\therefore\quad (x-1)^2+(y+1)^2=z^2. \qquad \cdots②$$

②－① より $4y=0$．よって，$y=0$．①に代入して

$$z^2-(x-1)^2=1. \qquad \cdots③$$

よって，Pは xz 平面上の双曲線上にある．



$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\overrightarrow{e}$ のなす角が α のとき，$x=\pm z\tan\alpha$

(i) $\alpha \neq 0$ のとき，$x=z\tan\alpha$ と $x=-z\tan\alpha$ は x 軸対称で，③も $z>0$ という制限をつけなければ x 軸対称である．したがって，条件をつけない③と $x=z\tan\alpha$ の交点の個数はそのまま，$x=\pm z\tan\alpha$ と③の交点のうち，$z>0$ のものの個数と一致する．

$x=z\tan\alpha$ を③に代入して，

$$z^2-(z\tan\alpha-1)^2=1. \quad \therefore\quad (1-\tan^2\alpha)z^2+2\tan\alpha z-2=0. \qquad \cdots④$$

(i-a) $\tan\alpha \neq 1$ のとき，④は2次方程式．

判別式を D とすると，

$$\frac{1}{4}D=\tan^2\theta+2(1-\tan^2\theta)=2-\tan^2\alpha.$$

$\tan\alpha=\sqrt{2}$ となる α を α_0 とすると，

④ の解の個数は $0<\alpha<\alpha_0$ のとき 2 個，$\alpha=\alpha_0$ のとき，1 個，$\alpha_0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき 0 個.

実数解があるとき，交点の z 座標は ④ の解の絶対値.

$$\left|\frac{-\tan\alpha\pm\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{1-\tan^2\alpha}\right|.$$

(i-b)　$\tan\alpha=1$ つまり，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，④ は 1 次方程式だから，解の個数は 1 個.

解は $z=1$.

(ii)　$\alpha=0$ のとき，$x=\pm z\tan\alpha$ は重なって，$x=0$. ③ に代入すると，$z^2=2$. $z>0$ の解は $z=\sqrt{2}$ の 1 個.

まとめて表にすると，

α の範囲	P の個数	z の値
$\alpha=0$	1	$\sqrt{2}$
$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$	2	$\dfrac{\sqrt{2-\tan^2\alpha}\pm\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$
$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$	1	1
$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\alpha_0$	2	$\dfrac{\tan\alpha\pm\sqrt{2-\tan^2\alpha}}{\tan^2\alpha-1}$
$\alpha=\alpha_0$	1	$\sqrt{2}$
$\alpha_0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$	0	

…(答)

ただし，α_0 は $\tan\alpha_0=\sqrt{2}$ となる角 $\left(0<\alpha_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(注)　$\tan\alpha\neq 0$ のとき，$z=\pm\dfrac{x}{\tan\alpha}$ として，③ に代入してもよい．この場合，x に対して $z>0$ となる z がただ 1 つ存在するから，そのまま，x の個数が P の個数になる.

この場合，$\tan\alpha=0$ の場合を別途扱うことになる.

1981 年　理科

第 1 問

$S=\{1, 2, \cdots, n\}$，ただし $n \geqq 2$，とする。2 つの要素から成る S の部分集合を k 個とり出し，そのうちのどの 2 つも交わりが空集合であるようにする方法は何通りあるか。

つぎに，この数（つまり何通りあるかを表す数）を $f(n, k)$ で表したとき，

$$f(n, k)=f(n, 1)$$

をみたすような n と k（ただし，$k \geqq 2$）をすべて求めよ。

分　野

数学 I：集合と個数

考え方

$f(n, k)$ を n と k の式として求めるのが 1 つの問題である．第 1 の部分集合の選び方が ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り，そのおのおのに対して第 2 の部分集合の選び方が ${}_{n-2}\mathrm{C}_2$ 通り，… と考えていき，最後に部分集合の順番を無視するため $k!$ で割るとよい．

$f(n, k)=f(n, 1)$ という式をどう処理するかという第 2 の問題は整数問題特有の難しさを含んでおり，上手に不等式評価を行う必要がある．

【解答】

k 個の部分集合の要素の個数の総和は $2k$ だから，$2k>n$ のときには条件をみたす部分集合の組を取り出すことはできない．よって，$f(n, k)=0$.

$2k \leqq n$ のとき，2 個ずつの要素を順に取り出す場合の数は

$$\begin{aligned}{}_n\mathrm{C}_2 \cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{n-4}\mathrm{C}_2 \cdots {}_{n-2k+2}\mathrm{C}_2 &= \frac{n!}{2!(n-2)!} \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \frac{(n-4)!}{2!(n-6)!} \cdots \frac{(n-2k+2)!}{2!(n-2k)!} \\ &= \frac{n!}{2^k(n-2k)!}.\end{aligned}$$

取り出された k 個の集合の順序をかえても同じだから，

$$f(n, k)=\frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}.$$

$$\therefore \quad f(n, k)=\begin{cases} 0 & (2k>n \text{ のとき }), \\ \dfrac{n!}{2^k(n-2k)!k!} & (2k \leqq n \text{ のとき }). \end{cases} \qquad \cdots (答)$$

$f(n, 1)=\dfrac{n!}{2^1(n-2)!1!}=\dfrac{n(n-1)}{2}$ $(\neq 0)$.

$2k \leqq n$ のとき，$f(n, k)=f(n, 1)$ より，

$$\frac{n!}{2^k(n-2k)!k!}=\frac{n(n-1)}{2}. \quad \therefore \quad (n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-2k+1)=2^{k-1}k!. \qquad \cdots ①$$

$n \geqq 2k$ より，

$$(n-2)(n-3)(n-4)\cdots(n-2k+1) \geqq (2k-2)(2k-3)(2k-4)\cdots 1=(2k-2)!.$$

$$\therefore \quad 2^{k-1}k!=k(2k-2)(2k-4)(2k-6)\cdots 2 \geqq (2k-2)!=(2k-2)(2k-3)(2k-4)\cdots 2\cdot 1.$$

$$\therefore \quad k \geqq (2k-3)(2k-5)(2k-7)\cdots 3\cdot 1 \geqq 2k-3. \quad \therefore \quad k \leqq 3.$$

$k=2$ のとき，① より $(n-2)(n-3)=4$. $\therefore$ $n^2-5n+2=0$. これをみたす正の整数 n は存在しない．

$k=3$ のとき，① より $(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)=2^2 3!=24$.

$$\therefore \quad (n^2-7n+10)(n^2-7n+12)=24. \quad (n^2-7n)^2+22(n^2-7n)+96=0.$$

$$(n^2-7n+6)(n^2-7n+16)=0. \quad (n-1)(n-6)(n^2-7n+16)=0.$$

n は 2 以上の自然数だから，$n=6$.

$$\therefore \quad n=6, \quad k=3. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問

半径 1 の円に内接する正 6 角形の頂点を A_1，A_2，…，A_6 とする。これらから，任意に（無作為に）えらんだ 3 点を頂点とする 3 角形の面積の期待値（平均値）を求めよ，ただし，2 つ以上が一致するような 3 点がえらばれたときは，三角形の面積は 0 と考える。

分　野

数学 I ：確率

考え方

この問題では何を等確率として 3 頂点を選ぶのかが曖昧である．解釈の仕方によって結果が異なってしまう．

2 つ以上が一致するような 3 点を選ぶ場合を考えているから，6 頂点から重複を許して選ぶと考えられる．

【解釈 1】　重複順列による【解答】

6 個の頂点 A_1，A_2，A_3，…，A_6 から 1 つの頂点を無作為に 3 回選んだとする．

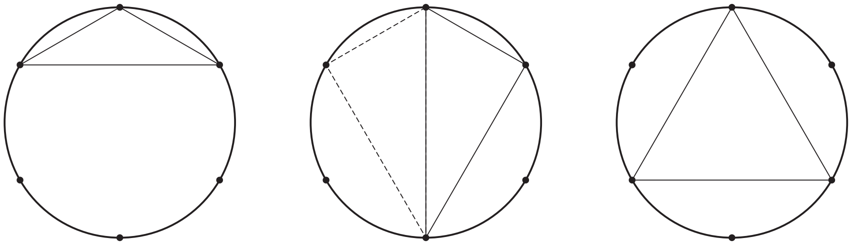
頂点の選び方の個数は $6^3=216$ 通り．

3 回選んだ点が相異なる 3 点である場合の数は

$${}_6P_3=6\times5\times4=120.$$

(i)　3 回のうち同じ頂点が選ばれる場合の数は $216-120=96$.

この場合，問題文より面積は 0.



(ii)　　(iii)　　(iv)

(ii)　隣り合う 3 つの頂点が選ばれる場合の数は $6\times3!=36$．その面積は

$$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

(iii)　直角三角形を作る 3 頂点が選ばれる場合．斜辺は外接円の直径．その選び方は 3 通り．斜辺に対する直角の頂点の選び方は 4 通り．場合の数は $3\times4\times3!=72$．その面積は

$$\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(iv)　正三角形を作る 3 頂点が選ばれる場合の数は $2\times3!=12$．その面積は

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

求める期待値は

$$\frac{1}{216}\left(96\times0+36\times\frac{\sqrt{3}}{4}+72\times\frac{\sqrt{3}}{2}+12\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【解釈 2】 重複組合せによる【解答】

6 個の頂点から重複を許して 3 つの頂点を無作為に選んだとする．

頂点の選び方の個数は ${}_6H_3={}_8C_3=56$ 通り．

選んだ点が相異なる 3 点である場合の数は ${}_6C_3=20$．

(i) 同じ頂点が選ばれる場合の数は $56-20=36$．

この場合問題文より面積は 0．

(ii) 隣り合う 3 つの頂点が選ばれる場合の数は 6．その面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

(iii) 直角三角形を作る 3 頂点が選ばれる場合の数は $3\times4=12$．その面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

(iv) 正三角形を作る 3 頂点が選ばれる場合の数は 2．その面積は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．

求める期待値は

$$\frac{1}{56}\left(20\times0+6\times\frac{\sqrt{3}}{4}+12\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{9\sqrt{3}}{56}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） 解釈はこの他にもあるかもしれない．本来は何を等確率とするかを問題文で明記すべきである．その意味でこの問題は欠陥問題といえる．

第 3 問

放物線 $y=x^2$ を C で表す。C 上の点 Q を通り，Q における C の接線に垂直な直線を，Q における C の法線という。

$0\leqq t\leqq1$ とし，つぎの 3 条件をみたす点 P を考える。

(イ) C 上の点 $Q(t,\ t^2)$ における C の法線の上にある。

(ロ) 領域 $y\geqq x^2$ に含まれる。

(ハ) P と Q の距離は $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ である。

t が 0 から 1 まで変化するとき，P のえがく曲線を C' とする。

このとき，C と C' とで囲まれた部分の面積を求めよ。

分 野

数学ⅡB：整式の微分，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は $f'(t)\neq0$ のとき，$y=-\dfrac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t)$ とかける．

傾き m の直線上の 2 点間の距離は $|x$ 座標の差$|\sqrt{1+m^2}$ で表される．

これらを使う．

【解答】

$(x^2)'=2x$ だから，$Q(t,\ t^2)(t\neq0)$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{2t}$ (<0)．法線の方程式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2. \qquad \cdots①$$

Pの座標を $(X,\ Y)$ とすると，PQの長さは

$$|t-X|\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2t}\right)^2}=|t-X|\frac{\sqrt{1+4t^2}}{2t}.$$

傾きが負だから，$t\geqq X$.

条件(ハ)より，これが $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ に等しい．

$$\therefore\quad t-t^2=\frac{t-X}{2t}. \quad \therefore\quad X=t-2t^2+2t^3.$$

① より，

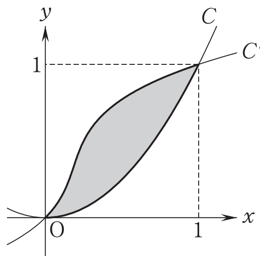
$$Y=-\frac{1}{2t}(X-t)+t^2=t.$$

$t=0$ のとき，PQ$=0$ だから，P$(0,\ 0)$．まとめて，

$$\therefore\quad X=t-2t^2+2t^3,\quad Y=t.$$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，これはたしかに，$Y\geqq X^2$ をみたしている．

$$\therefore\quad C' : x=y-2y^2+2y^3.$$



よって，求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^1\{\sqrt{y}-(y-2y^2+2y^3)\}\,dy=\left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}y^2+\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^4\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(注1)　$y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は $x-t+f'(t)(y-f(t))=0$ とも表すことができる．こうすると，$f'(t)=0$ の場合も含めて1つの方程式で表すことができる．

本問の場合，$x-t+2t(y-t^2)=0$ となり，$t=0$ のときも含めた法線の方程式となる．

$Y\geqq t^2$ から P$(X,\ Y)$ と Q$(t,\ t^2)$ の距離を y 座標の差で求めると，

PQ$=|Y-t^2|\sqrt{1+(2t)^2}=(Y-t^2)\sqrt{1+(2t)^2}$ となる．

これが $(t-t^2)\sqrt{1+4t^2}$ に等しいことから直ちに $Y=t$ が求められ，法線の方程式に代入すると $X=t-2t(t-t^2)=t-2t^2+2t^3$ が得られる．

(注2)　C' を求めたあと，たしかに $Y\geqq X^2$ をみたすことを確認したが，もう少し説明しよう．

このようにして求めた結果は $Y\geqq X^2$ をみたすことが自明のように思うかもしれない．しかし，$Y\geqq t^2$ と $Y\geqq X^2$ は異なる条件である．Pが $y\geqq x^2$ つまり，C より上にあるためには C 上の点Qにおける法線においてPはQより上側になければならない．したがって，$Y\geqq t^2$ である．しかし，$Y\geqq t^2$ であっても，Pが法線と C のQ以外のもう1つの交点より上にあると $Y\geqq X^2$ をみたさなくなる．したがって，$Y\geqq X^2$ も吟味しなければならない．

しかし，$X=t-2t^2+2t^3$ は $t\geqq 0$ のとき，$\dfrac{dX}{dt}=1-4t+6t^2=6\left(t-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}>0$ だから $X>0$．

したがって，線分QPは C とQ以外の点で交わることはない．

第4問

(文科　第4問と同じ)

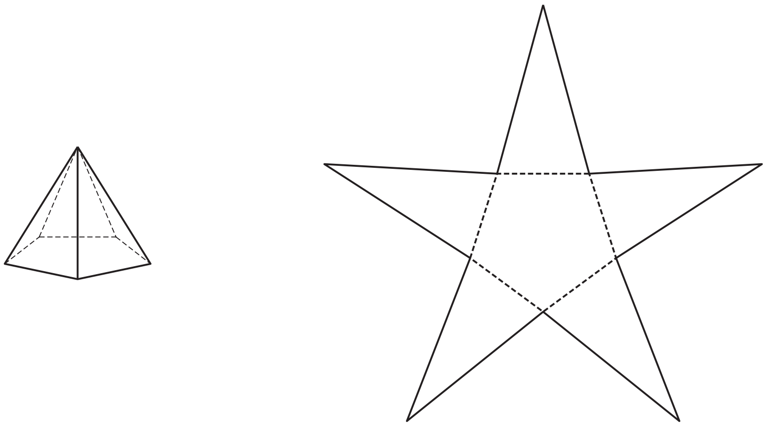
第５問

$n \geqq 3$ とし，正 n 角錐（すい）の表面を，底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える。正 n 角錐の頂点は，展開図においては，異なる n 個の点になっている。ここでは，これら n 個の点を通る円の半径が１であるような，正 n 角錐のみを考えることにする。

(1) 各 n に対して，このような正 n 角錐の体積の最大値 v_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n$ を求めよ。

注．図は，$n=5$ の場合の，正 n 角錐とその展開図の例である。



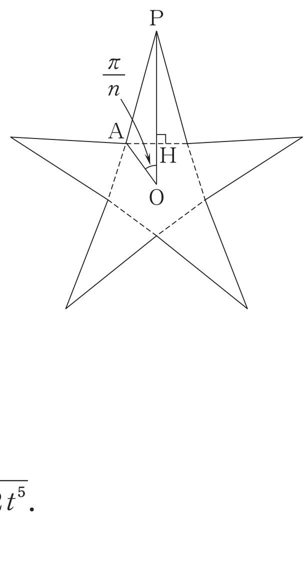
分　野

数学ⅡＢ：立体図形，整式の微分　**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

底面の内接円の半径を t とすると，底面積や高さは t の式で表すことができ，体積も t の式で表すことができる．これを t について微分して体積の最大値 v_n を求める．

【解答】



(1) 展開図における正 n 角錐の頂点の１つを P とし，底面の中心を O，

OP と交わる底面の辺の１端を A とすると，$\angle \mathrm{POA} = \dfrac{\pi}{n}$.

OP と辺の交点を H とする．

$\mathrm{OH} = t$ とおくと，$\mathrm{AH} = t\tan\dfrac{\pi}{n}$．よって底面積 S は

$$S = n\mathrm{AH}\cdot\mathrm{OH} = nt^2\tan\frac{\pi}{n}.$$

一方，$\mathrm{PH} = 1-t$．だから高さ h は

$$h = \sqrt{\mathrm{PH}^2 - \mathrm{OH}^2} = \sqrt{(1-t)^2 - t^2} = \sqrt{1-2t}.$$

ただし，$0 < t < \dfrac{1}{2}$.

よって，正 n 角錐の体積 $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{1}{3}Sh = \frac{n}{3}t^2\tan\frac{\pi}{n}\sqrt{1-2t} = \frac{n}{3}\tan\frac{\pi}{n}\sqrt{t^4-2t^5}.$$

$f(t) = t^4 - 2t^5$ とおくと，$f'(t) = 4t^3 - 10t^4 = -10t^3\left(t - \dfrac{2}{5}\right)$.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{5}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

$$v_n = V\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{n}{3}\tan\frac{\pi}{n}\,\frac{4}{25\sqrt{5}} = \frac{4n}{75\sqrt{5}}\tan\frac{\pi}{n}. \qquad \cdots(答)$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{75\sqrt{5}}\,\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{4\pi}{75\sqrt{5}}. \qquad \cdots(答)$$

（注） 結果は底面の半径が t，母線の長さが $1-t$ の円錐の体積の最大値に一致する．

第６問

a，b，c，d を実数の定数として，関数

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

を考える。

(1) 関数 $f(x)$ が３条件

(イ) $f(-1)=0$

(ロ) $f(1)=0$

(ハ) $|x| \leqq 1$ のとき $f(x) \geqq 1-|x|$

をみたすのは，定数 a，b，c，d がどのような条件をみたすときか。

(2) 条件(イ)，(ロ)，(ハ)をみたす関数 $f(x)$ のうちで，積分

$$\int_{-1}^{1}\{f'(x)-x\}^2\,dx$$

の値を最小にするものを求めよ。

分　野

数学ⅡＢ：整式の微分，整式の積分

考え方

条件(イ)，(ロ)から，$f(x)$ は $(x+1)(x-1)$ で割り切れる．

このことから，$f(x)=(x^2-1)(ax-d)=(1-|x|)(1+|x|)(d-ax)$ とかける．

このことから，条件(ハ)は $|x|<1$ で $d-ax \geqq \dfrac{1}{|x|+1}$.

直線 $y=-ax+d$ は曲線 $y=\dfrac{1}{|x|+1}$ の上方にある．

【解答】

(1) (イ)，(ロ)から，$f(-1)=-a+b-c+d=0$，$f(1)=a+b+c+d=0$．∴　$a+c=b+d=0$.

よって，$f(x)=ax^3+bx^2-ax-b=(x^2-1)(ax+b)$.

(ハ)から，$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)(ax+b) \geqq 1+x & (-1 \leqq x \leqq 0),\\ (x^2-1)(ax+b) \geqq 1-x & (0 \leqq x \leqq 1).\end{cases}$

$x=\pm 1$ のときは(ハ)をみたす．

$$\therefore\quad \begin{cases}(x-1)(ax+b) \geqq 1 & (-1<x \leqq 0),\\ (1+x)(ax+b) \leqq -1 & (0 \leqq x<1).\end{cases}$$

(i) $-1<x\leqq 0$ のとき，$g(x)=(x-1)(ax+b)-1$ とおくと，$g(x)$ はたかだか2次式だから，$g(-1)\geqq 0$，$g(0)\geqq 0$ なら，$g(1)=-1<0$ より，$-1<x\leqq 0$ で $g(x)\geqq 0$ である．よって，

$$2(a-b)-1\geqq 0,\quad -b-1\geqq 0.\quad \therefore\quad b\leqq a-\frac{1}{2},\quad b\leqq -1.$$

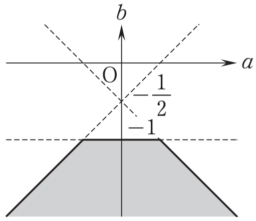
(ii) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$h(x)=(x+1)(ax+b)+1$ とおくと，
$h(1)\leqq 0$，$h(0)\leqq 0$ なら，$h(-1)=1>0$ より，$0\leqq x<1$ で $h(x)\leqq 0$ である．よって，

$$2(a+b)+1\leqq 0,\quad b+1\leqq 0.\quad \therefore\quad b\leqq -a-\frac{1}{2},\quad b\leqq -1.$$

以上まとめて，

$$c=-a,\quad d=-b,\quad b\leqq -1,\quad b\leqq -a-\frac{1}{2},\quad b\leqq a-\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) (1) で求めた $(a,\ b)$ の範囲は右図．



$f'(x)=3ax^2+2bx-a$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad \int_{-1}^{1}\{f'(x)-x\}^2\,dx&=\int_{-1}^{1}\{3ax^2+(2b-1)x-a\}^2\,dx\\&=2\int_0^1\{a^2(3x^2-1)^2+(2b-1)^2x^2\}\,dx\\&=2\left[a^2\left(\frac{9}{5}x^5-2x^3+x\right)+(2b-1)^2\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\&=\frac{8}{5}a^2+\frac{2}{3}(2b-1)^2.\end{aligned}$$

よって，これが最小になるのは，$a=0$，$b=-1$ のとき．そのとき，

$$\therefore\quad f(x)=-x^2+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】 2次式の吟味を回避して

(1) (イ)，(ロ) および因数定理から $f(x)$ は $(x-1)(x+1)=x^2-1$ で割り切れる．

$\therefore\quad f(x)=(x^2-1)(ax-d)=(1-|x|^2)(d-ax)=ax^3-dx^2-ax+d.\quad \therefore\quad b=-d,\ c=-a.$

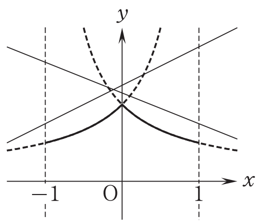
(ハ) から，$f(x)=(1-|x|^2)(d-ax)\geqq 1-|x|.\quad (|x|\leqq 1)$

$|x|=1$ のときは成り立つから

$$d-ax\geqq\frac{1}{1+|x|}. \qquad \cdots①$$

つまり，直線 $y=-ax+d$ は曲線 $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ の上方にある．

$y=\dfrac{1}{|x|+1}$ のグラフは y 軸対称で，$0\leqq x<1$ で下に凸である．



したがって，$x=0$，± 1 で ① が成り立てばよい．

$$\therefore\quad d\geqq 1,\quad d-a\geqq\frac{1}{2},\quad d+a\geqq\frac{1}{2}.$$

まとめて，

$$d\geqq 1,\quad d\geqq|a|+\frac{1}{2},\quad b=-d,\quad c=-a. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $f'(x)=3ax^2-2dx-a$.

$$\int_{-1}^{1}\{f'(x)-x\}^2\,dx=2a^2\int_0^1(3x^2-1)^2\,dx+2(2d+1)^2\int_0^1x^2\,dx.$$

$\displaystyle\int_0^1(3x^2-1)^2\,dx$，$\displaystyle\int_0^1x^2\,dx$ は正の定数であるから，a^2，$(2d+1)^2$ が最小のときこの積分は最小になる．$d\geqq 1$ のとき，a^2 が最小になるのは，$|a|\leqq d-\dfrac{1}{2}$ から $a=0$ のときで，そのとき，$(2d+1)^2$ が最小になるのは $d=1$ のとき．

$$f(x)=-x^2+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

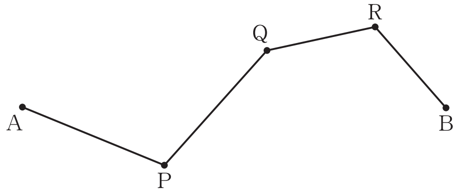
1982 年　文科

第 1 問

平面上に 2 定点 A，B があり，線分 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は $2(\sqrt{3}+1)$ である。この平面上を動く 3 点 P，Q，R があって，つねに

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2,\quad \overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\sqrt{2}$$

なる長さを保ちながら動いている。このとき，点 Q が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。



分　野

数学 I：平面図形，面積，三角比

考え方

3 点 A，P，Q について $\overline{\mathrm{AP}}$，$\overline{\mathrm{PQ}}$ が固定されているとき，$\overline{\mathrm{AQ}}$ の範囲は

$$|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{PQ}}|\leqq\overline{\mathrm{AQ}}\leqq\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}$$

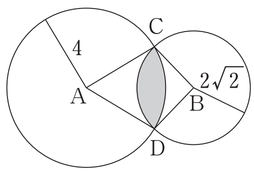
となる．

円弧で囲まれた領域の面積を求めるとき弓形の面積を出すと計算しやすい．弓形の面積は扇形の面積から三角形の面積を引くことによって求められる．

【解答】

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2$ より $0\leqq\overline{\mathrm{AQ}}\leqq\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}=4$．また $0\leqq\overline{\mathrm{AQ}}\leqq4$ のとき，$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2$ となる P が存在する．

同様に $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\sqrt{2}$ より $0\leqq\overline{\mathrm{BQ}}\leqq\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RB}}=2\sqrt{2}$．また $0\leqq\overline{\mathrm{BQ}}\leqq2\sqrt{2}$ のとき，$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RB}}=\sqrt{2}$ となる R が存在する．



以上より，Q は A を中心とする半径 4 の円 C_1 の周および内部，と B を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円 C_2 の周および内部の共通部分である．

よって点 Q の動く領域は右図の網掛部である．

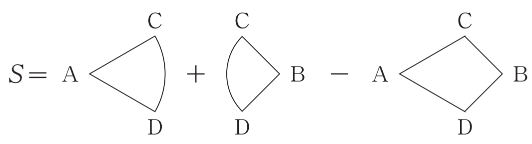
2 円 C_1，C_2 の周の交点を C，D とする．三角形 ABC について，$\mathrm{AB}=2(\sqrt{3}+1)$，$\mathrm{AC}=4$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{2}$ だから余弦定理から

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{\{2(\sqrt{3}+1)\}^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot2(\sqrt{3}+1)\cdot4}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\quad\therefore\quad\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{6}.$$

$$\cos\angle\mathrm{CBA}=\frac{\mathrm{BC}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AB}}=\frac{(2\sqrt{2})^2+\{2(\sqrt{3}+1)\}^2-4^2}{2\cdot(2\sqrt{2})\cdot2(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad\therefore\quad\angle\mathrm{CBA}=\frac{\pi}{4}.$$

また，$\mathrm{CD}=2\mathrm{AC}\sin\dfrac{\pi}{6}=4$.

したがって求める面積は



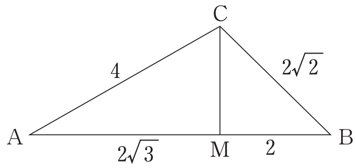
$$=\pi4^2\cdot\frac{1}{6}+\pi(2\sqrt{2})^2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}2(\sqrt{3}+1)\cdot4$$

$$=\frac{14}{3}\pi-4(\sqrt{3}+1). \quad \cdots(\text{答})$$

(注)　三角形ABCの角を求めるとき，次のような方法がある．3辺の長さが，$AB=2(\sqrt{3}+1)$，$AC=4$，$BC=2\sqrt{2}$ であるから，$AM=2\sqrt{3}$，$MB=2$ となる点をとり，ACが斜辺，AMが底辺の直角三角形と，BCが斜辺，MBが底辺の直角三角形を考えると，どちらも高さが2である．したがって，

$\angle CAM=\frac{\pi}{6}$，$\angle CBM=\frac{\pi}{4}$ で，$CM=2$ と定まる．

3辺の長さが決まれば三角形は決まる．しかもこの三角形の角はよく知られている角らしい．また，$2(\sqrt{3}+1)$ は分割してほしいと言っているように見える．このようなときには都合の良い点Mをとってつじつまがあえばよい．3辺が等しい三角形を見つければそれでよいからである．「この三角形はこのようにみることができるから」とでもいえばよいであろう．



第2問

xy 平面上の曲線 $y=x^2$ 上の3点を，x 座標の小さいものから順にA，B，Cとする。AとBとの x 座標の差は a（a は正の定数），BとCとの x 座標の差は1，という関係を保ちながら3点A，B，Cが動く。

$\angle CAB$ が最大になるときの，点Aの x 座標を a で表わせ。

また，$\angle CAB$ が最大になるときに，$\angle ABC$ が直角になるような a の値を求めよ。

分　野

数学I：平面座標，三角関数，加法定理

考え方

Aの x 座標を t とおき，A，B，Cの座標を t，a で表し，$\angle ABC$ が直角になる条件から $\tan\angle CAB$ を a で表す．

$\tan\angle CAB$ が最大になる a を求めればよい．

【解答】　tan∠CABで考える

Aの x 座標を t とおくと，A，B，Cの座標は

$$A(t,\ t^2),\quad B(t+a,\ t^2+2at+a^2),\quad C(t+(a+1),\ t^2+2(a+1)t+(a+1)^2).$$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ が x 軸正方向となす角をそれぞれ β，γ とおくと，

$$\tan\beta=\frac{t^2+2at+a^2-t^2}{t+a-t}=2t+a \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\tan\gamma=2t+a+1 \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}\right).$$

A，B，Cの x 座標は小さい方からこの順であるからBは線分ACの下側にある．

よって，$\beta<\gamma$．∴　$0<\gamma-\beta<\pi$．

$$\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\beta\tan\gamma}=\frac{(2t+a+1)-(2t+a)}{1+(2t+a)(2t+a+1)}$$
$$=\frac{1}{(2t+a)^2+(2t+a)+1}=\frac{1}{\left(2t+a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}>0.$$

よって $0<\gamma-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ である．したがって，$\tan(\gamma-\beta)$ の大小は $\gamma-\beta=\angle\mathrm{CAB}$ の大小と一致する．

$\tan(\gamma-\beta)$ は $t=-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}$ のときに最大となるから，このとき $\angle\mathrm{CAB}$ は最大になる．

すなわち，$\angle\mathrm{CAB}$ が最大になるときの，点 A の x 座標は $-\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}$.　…(答)

このとき，A，B，C の座標はそれぞれ

$$\mathrm{A}\left(-\frac{a}{2}-\frac{1}{4},\ \left(\frac{a}{2}+\frac{1}{4}\right)^2\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4},\ \left(\frac{a}{2}-\frac{1}{4}\right)^2\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4},\ \left(\frac{a}{2}+\frac{3}{4}\right)^2\right).$$

直線 AB，BC の傾きはそれぞれ，$-\dfrac{1}{2}$，$a+\dfrac{1}{2}$ だから，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{BC}$ の条件は

$$-1=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(a+\frac{1}{2}\right).$$
$$\therefore\quad a=\frac{3}{2}.$$
…(答)

（注１）　$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ を求める方法として，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ 2at+a^2)=a(1,\ 2t+a)$，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(a+1,\ 2(a+1)t+(a+1)^2)=(a+1)(1,\ 2t+a+1)$

から

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{1+(2t+a)(2t+a+1)}{\sqrt{1+(2t+a)^2}\sqrt{1+(2t+a+1)^2}}$$

としたり，

$$\sin\theta=\frac{2\triangle\mathrm{ABC}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}}=\frac{1}{\sqrt{1+(2t+a)^2}\sqrt{1+(2t+a+1)^2}}$$

として $\cos\theta$，$\sin\theta$ を t の関数としてその増減を調べる方法が考えられる．しかし，分数関数，無理関数の微分は文科系の受験者にとっては範囲外になるので難しい．

$$\frac{1}{1-\cos^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\{1+(2t+a)^2\}\{1+(2t+a+1)^2\}=f(t)$$

とすればこれを微分して

$$f'(t)=4\{(2t+a)^3+(2t+a+1)^3\}=4(4t+2a+1)\{(2t+a)^2+(2t+a)+1\}$$

として最小を与える t を求めることができるがかなりのテクニックを要する．

（注２）　問題文で「$\angle\mathrm{CAB}$」とあるがこれを符号をつけて考えると $\angle\mathrm{CAB}<0$ となってしまうので $\angle\mathrm{CAB}$ は $|\angle\mathrm{CAB}|$ の意味と解釈した．

第3問

a，b を整数として，x の4次方程式

$$x^4+ax^2+b=0$$

の4つの解を考える。

いま，4つの解の近似値

$$-3.45 \qquad -0.61 \qquad 0.54 \qquad 3.42$$

がわかっていて，これらの近似値の誤差の絶対値は0.05以下であるという。真の解を小数第2位まで正しく求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2次方程式の理論，近似値

考え方

与えられた x の4次式が x の偶関数であることから，4解は

$$-\alpha, \quad -\beta, \quad \beta, \quad \alpha$$

とおける．解と係数の関係から

$$\alpha^2+\beta^2=-a, \quad \alpha^2\beta^2=b$$

とおける．あとは，a，b が整数であることから a，b を求める．

【解答】

x^4+ax^2+b は x の偶関数だから α が解なら $-\alpha$ も解．$0<\alpha<\beta$ として，4つの解を $-\beta$，$-\alpha$，α，β とおくと，与条件から

$$-3.50\leqq-\beta\leqq-3.40, \quad -0.66\leqq-\alpha\leqq-0.56, \quad 0.49\leqq\alpha\leqq0.59, \quad 3.37\leqq\beta\leqq3.47$$

$$\therefore \quad 0.56\leqq\alpha\leqq0.59, \quad 3.40\leqq\beta\leqq3.47.$$

$$\therefore \quad 0.3<0.3136\leqq\alpha^2\leqq0.3481<0.4, \quad 11.5<11.56\leqq\beta^2\leqq12.0409<12.1. \qquad \cdots①$$

与方程式を x^2 の2次方程式として，解と係数の関係から

$$a=-(\alpha^2+\beta^2), \quad b=\alpha^2\beta^2.$$

① から

$$11.8<\alpha^2+\beta^2=-a<12.5, \quad 3.45<\alpha^2\beta^2=b<4.84.$$

a，b は整数だから

$$a=-12, \quad b=4.$$

よって，与方程式は

$$x^4-12x^2+4=0. \quad \therefore \quad x^2=6\pm4\sqrt{2}. \quad \therefore \quad x=\pm\sqrt{6\pm4\sqrt{2}}=\pm(2\pm\sqrt{2}).$$

$$\alpha=2-\sqrt{2}, \quad \beta=2+\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}=1.41\cdots$ であるから $\alpha=0.58\cdots$，$\beta=3.41\cdots$ である．したがって4解を小数第2位まで書くと，

$$-3.41, \quad -0.58, \quad 0.58, \quad 3.41. \qquad \cdots(答)$$

（注1） これらの結果は与えられた近似値の誤差が0.05以内なので，題意をみたす．

（注2）「小数第2位まで正しく求めよ」の意味は小数第2位で以下切り捨てると解釈した．四捨五入すると，$\alpha=0.59$ になる．

第4問

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とおく。xy 平面において，$(1, 1)$ を座標とする点 P_0 から始めて，点列 P_0，P_1，P_2，… を次のような手続きで作っていく。

P_n の座標を (x_n, y_n) とするとき，

(イ) $x_n+y_n \geqq \frac{1}{100}$ のときは，(x_{n+1}, y_{n+1}) を

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

のどちらかが成り立つように決める。

(ロ) $x_n+y_n<\frac{1}{100}$ のときは，(x_{n+1}, y_{n+1}) を

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$$

によって決める。

このようにするといろいろな点列ができるが，それらについてつぎの問に答えよ。

(1) P_2 として可能な点をすべて求め，図示せよ。

(2) x_n+y_n を n で表せ。

(3) P_{10} として可能な点は何個あるか。

分 野

数学ⅡB：一次変換，数列

考え方

$A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ についても $B\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$ についても x 成分と y 成分の和は等しい．したがって $\{x_n+y_n\}$ は(イ)でどちらを選択しても変わらない．

x_n+y_n が $\frac{1}{100}$ 以上である限り点 P_{n+1} の個数は P_n の 2 倍になる．

【解答】

$$A\overrightarrow{OP_n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x_n-\frac{1}{2}y_n\\ y_n\end{pmatrix},$$

$$B\overrightarrow{OP_n}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_n\\ -\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}y_n\end{pmatrix}$$

したがって，$A\overrightarrow{OP_n}$ と $B\overrightarrow{OP_n}$ の x 成分と，y 成分の和はともに $\frac{1}{2}(x_n+y_n)$ である．したがって(イ)のいずれの場合も，(ロ)の場合も

$$x_{n+1}+y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n). \qquad \cdots①$$

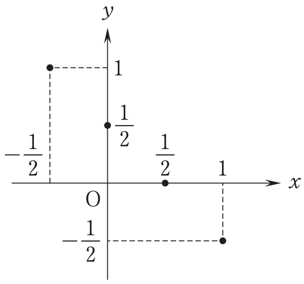
(1) $x_0+y_0=2\geqq\frac{1}{100}$ より $\overrightarrow{OP_1}$ として可能なベクトルは

$$A\overrightarrow{OP_0}=A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\quad B\overrightarrow{OP_0}=B\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$x_1+y_1=1\geqq\dfrac{1}{100}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ として可能なベクトルは

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\quad B\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$



可能な点は 4 点あり,

$$\left(-\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(0,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ 0\right),\ \left(1,\ -\frac{1}{2}\right).$$

図示すると右図. …(答)

(2) ① より, $\{x_n+y_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列. $\mathrm{P}_0(1,\ 1)$ から $x_0+y_0=2$. よって,

$$x_n+y_n=2^{1-n}.$$ …(答)

(3) $2^{1-n}\geqq\dfrac{1}{100}$ となるのは $n\leqq7$ のとき.

$0\leqq n\leqq8$ のとき, P_n として可能な点は直線 $x+y=2^{1-n}$ 上の $2^{1-n}-1\leqq x\leqq1$ に x の間隔 2^{1-n} で並ぶ.

P_n として可能な点は

$$(2^{1-n}-1,\ 1),\ (2\cdot2^{1-n}-1,\ 1-2^{1-n}),\ (3\cdot2^{n-1}-1,\ 1-2\cdot2^{1-n}),\ \cdots,\ (1,\ -1+2^{1-n})$$

つまり,

$$(k2^{1-n}-1,\ 1-(k-1)2^{1-n})\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n)$$ …(*)

であると考えられる. このことを数学的帰納法で証明する.

(I) $n=0$ のとき $k=1$ だけで, (*) でかける点は $(1,\ 1)$ だけだから題意と一致する.

(II) $n=m$ のとき P_m として可能な点は

$$(k2^{1-m}-1,\ 1-(k-1)2^{1-m})\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^m)$$

であると仮定する.

$$A\begin{pmatrix}k2^{1-m}-1\\1-(k-1)2^{1-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}&-\dfrac{1}{2}\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k2^{1-m}-1\\1-(k-1)2^{1-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2k-1)2^{-m}-1\\1-(2k-2)2^{-m}\end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix}k2^{1-m}-1\\1-(k-1)2^{1-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-\dfrac{1}{2}&\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k2^{1-m}-1\\1-(k-1)2^{1-m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2k)2^{-m}-1\\1-(2k-1)2^{-m}\end{pmatrix}.$$

よって P_{m+1} として可能な点は

$$((2k-1)2^{-m}-1,\ 1-(2k-2)2^{-m}),\quad((2k)2^{-m}-1,\ 1-(2k-1)2^{-m})\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^m)$$

つまり,

$$(k2^{1-(m+1)}-1,\ 1-(k-1)2^{1-(m+1)})\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^{m+1})$$

となる.

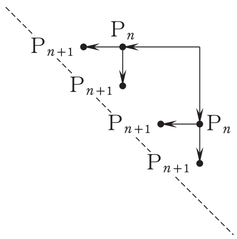
以上より, P_n として可能な点は

$$(k2^{1-n}-1,\ 1-(k-1)2^{1-n})\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n)$$

の 2^n 個. (証明終り)

$2^{n-1}\geqq\dfrac{1}{100}$ となるのは $n\leqq7$ だから, $n\leqq8$ のとき P_n として可能な点は 2^n 個. 以後は 1 通りに定まるから, P_{10} の個数は $2^8=256$ 個. …(答)

(注)　図形的には $\mathrm{P}_n (n \leqq 7)$ が A によって，移される点 P_{n+1} は P_n より 2^{-n} だけ x 軸負方向に移動した点で，B によって，移される点 P_{n+1} は P_n より 2^{-n} だけ y 軸負方向に移動した点であるから互いに重ならない．



日本語の数詞の不思議

日本語の数詞には２通りあります．「イチ，ニ，サン，…」のタイプと「ひ，ふ，み，…」のタイプがあります．前者は現代中国語で「イー，アル，サン，…」と言う中国数詞の恐らく唐代の発音から来ているものです．そして，後者が日本固有の数詞です．

さて，日本固有の数詞を何気なく使っていますが，数学的に面白い特徴があります．

順に「ひ」「ふ」「み」「よ」「いつ」「む」「なな」「や」「ここ」「とお」となります．古くは十を「そ」といったようです．

このうち，子音に着目して分類してみると，同じ子音を使っているのは

「ひ」と「ふ」，「み」と「む」，「よ」と「や」

だけです．そして，これらはすべて一方の２倍が他方になっています．

「いつ」の２倍が「とお」という見方もあるかと思いますが，十の古い数詞が「そ」であることを考えると，こちらは無理なように思えます．

また，残った２つが「なな」と「ここ」と２つ重ねているのも面白いです．

いずれにしろ，あまり気付かないで使っている数詞にこんなことがあるなんて驚きです．

1982 年　理科

第 1 問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ によって定まる xy 平面の 1 次変換を f とする。原点以外のある点 P が f によって P 自身にうつされるならば，原点を通らない直線 l であって，l のどの点も f によって l の点にうつされるようなものが存在することを証明せよ。

分野

数学ⅡB：一次変換

考え方

不動直線の方程式を $y=mx+n$ とおいて考える．

【解答】　成分計算で求める

l 上の任意の点が l 上の点にうつされるとき，l を不動直線とよぶ．

(i)　P が y 軸上にないとき

直線 OP の傾きを k とおくと，P$(\alpha,\ k\alpha)$ $(\alpha\neq 0)$ とおけて，$A\begin{pmatrix} \alpha \\ k\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ k\alpha \end{pmatrix}$ より，$A\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ となる．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix} a+kb \\ c+kd \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$．$a=1-kb$，$c=k(1-d)$．

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix} 1-kb & b \\ k(1-d) & d \end{pmatrix}. \qquad \cdots①$$

この行列は k と b，d によって定まることに注意．

(i-a)　まず，不動直線 l が y 軸と平行でないとして，$y=mx+n$ とし，これが題意に適する条件を考える．

原点を通らないから $n\neq 0$．l 上の点 $(t,\ mt+n)$ の像を考える．

$$A\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-kb & b \\ k(1-d) & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ mt+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-kb+mb)t+nb \\ (k-kd+md)t+nd \end{pmatrix}.$$

これが再び l 上にあるから，

$$(k-kd+md)t+nd=m\{(1-kb+mb)t+nb\}+n=m(1-kb+mb)t+mnb+n.$$

すべての t に対して l 上にあるから

$$k-kd+md=m(1-kb+mb),\quad nd=mnb+n.$$

$n\neq 0$ より，第 2 式から $d=mb+1$．このとき第 1 式は自明に成り立つ．

$b\neq 0$ なら $m=\dfrac{d-1}{b}$．よって，l：$y=\dfrac{d-1}{b}x+n$，ただし $n\neq 0$ が存在する．

したがって $b\neq 0$ のとき，k の値によらず，y 軸に平行でない不動直線が存在する．

(i-b)　不動直線 l が y 軸と平行であるとして，$x=n$ とし，これが題意に適する条件を考える．

原点を通らないから $n\neq 0$．l 上の点 $(n,\ t)$ の像を考える．

$$A\begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-kb & b \\ k(1-d) & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-kb)n+tb \\ (k-kd)n+td \end{pmatrix}.$$

これが再び l 上にあるから，

$$(1-kb)n+tb=n.$$

すべての t に対して l 上にあるから

$$(1-kb)n=n,\quad b=0.$$

第2式 $b=0$ から，第1式は自明に成り立つ．

よって，$b=0$ のとき k，d の値によらず，y 軸に平行で原点を通らない不動直線が存在する．

以上から $b\neq 0$ のとき y 軸に平行でない原点を通らない不動直線が存在し，$b=0$ のとき，y 軸に平行な原点を通らない不動直線が存在する．

(ii) P が y 軸上にあるとき

$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k\neq 0)$ とおけて，$A\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\k\end{pmatrix}$ より，$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ となる．

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ から $\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}a & 0\\c & 1\end{pmatrix}.$$

この行列は a，c によって定まることに注意．

(ii-a) まず，不動直線 l が y 軸と平行でないとして，$y=mx+n$ とし，これが題意に適する条件を考える．

原点を通らないから $n\neq 0$．l 上の点 $(t,\ mt+n)$ の像を考える．

$$A\begin{pmatrix}t\\mt+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\mt+n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at\\(c+m)t+n\end{pmatrix}.$$

これが再び l 上にあるから，

$$(c+m)t+n=mat+n.$$

すべての t に対して l 上にあるから

$$c+m=ma.$$

$a\neq 1$ なら $m=\dfrac{c}{a-1}$．よって，l：$y=\dfrac{c}{a-1}x+n$，ただし $n\neq 0$ が存在する．

したがって $a\neq 1$ のとき，y 軸に平行でない不動直線が存在する．

(ii-b) 不動直線 l が y 軸と平行であるとして，$x=n$ とし，これが題意に適する条件を考える．

原点を通らないから $n\neq 0$．l 上の点 $(n,\ t)$ の像を考える．

$$A\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\c & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}an\\cn+t\end{pmatrix}.$$

これが再び l 上にあるから，

$$an=n.\quad n\neq 0 \text{ から } a=1.$$

よって，$a=1$ のとき c の値によらず，y 軸に平行で原点を通らない不動直線が存在する．

以上から $a\neq 1$ のとき y 軸に平行でない原点を通らない不動直線が存在し，$a=1$ のとき，y 軸に平行な原点を通らない不動直線が存在する．

(i)，(ii) から常に原点を通らない不動直線が存在する．（証明終り）

【別解1】 固有値，固有ベクトルの知識を使って

$A\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ のとき $\overrightarrow{u}$ を行列 A の固有ベクトルといい，λ をその固有値という．

$A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\overrightarrow{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は行列 A の固有値1の固有ベクトルである．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{a}$ とおく．

$A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ に対して $ad-bc$ を A の行列式といい，$\det A$ と表す．$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ とするとき，$\det(A-xE)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ を A の固有方程式といい，その解は A の固有値である．

行列 A の固有方程式は2次方程式であり，A は固有値1をもつから，固有方程式は1ともう1つの解 α をもつ．

(i) $\alpha\neq 1$ のとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{b}$ とすると，$A\overrightarrow{b}=\alpha\overrightarrow{b}$．$\overrightarrow{b}\neq\overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{b}\parallel\overrightarrow{a}$ とすると $\overrightarrow{b}=k\overrightarrow{a}$ となり，

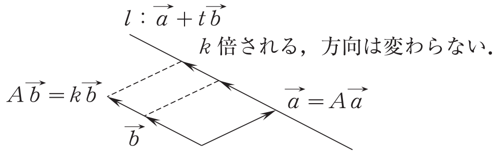
$$A\overrightarrow{b}=Ak\overrightarrow{a}=kA\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b},\quad A\overrightarrow{b}=\alpha\overrightarrow{b}.\quad\therefore\quad(\alpha-1)\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}.$$

これは $\alpha \neq 1$，$\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ に矛盾する．よって，$\overrightarrow{b} \not\parallel \overrightarrow{a}$．

このとき，$\overrightarrow{b}$ に平行で，P を通る直線を l とすると，$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OP}} \not\parallel \overrightarrow{b}$ から l は原点を通らない．

l 上の点の位置ベクトルは

$$l : \overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$$



と表される．この点を f で一次変換すると

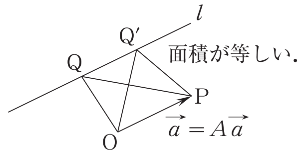
$$l' : A(\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b})=\overrightarrow{a}+t\alpha\overrightarrow{b}$$

となり，やはり P を通り，$\overrightarrow{b}$ に平行な直線 l（$\alpha \neq 0$ のとき）になるかまたは，l 上の 1 点 P に移される．したがって，原点を通らない不動直線 l が存在する．

(ii) $\alpha=1$ のとき，固有方程式 $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ は $x=1$ を重解としてもつ．解と係数の関係から，$ad-bc=1$．

OP 上にない点 Q をとり，$A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$ とする．

行列 A で表される一次変換によって三角形は面積が $|\det A|=|ad-bc|$ 倍の三角形に移され，$\det A>0$ なら三角形の頂点を順にたどる回転の向きは変らない．



Q は OP 上にないから OPQ は三角形をなす．$A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}$ だから三角形 OPQ は f により三角形 OPQ′ に移される．$\det A=1$ だから △OPQ′ の面積は △OPQ の面積の 1 倍つまり，△OPQ′＝△OPQ．また $\det A>0$ だから，三角形 OPQ の周上を O，P，Q の順にたどるときの回転の向きと，三角形 OPQ′ の周上を O，P，Q′ の順にたどるときの回転の向きは同じ向きである．

よって，OP を底辺とする 1 つの三角形 OPQ と OPQ′ において，Q と Q′ は OP の同じ側にあり，OP に対する高さは等しい．よって，Q，Q′ は OP に平行で，原点を通らない直線上にある．よって，この直線は f による原点を通らない不動直線である．

(i)，(ii) から原点以外の不動点が存在するとき，原点を通らない不動直線は存在する．（証明終り）

【別解 2】 転置行列をつかって

$B=\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して $\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$ を B の転置行列といい，${}^tB$ とかく．

このとき，$B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と $(s \quad t)\,{}^tB=(u \quad v)$ は同値であり，$\det B=\det({}^tB)$ が成り立つ．

$\det(A-xE)=\det({}^tA-xE)$ であるから A と ${}^tA$ の固有方程式は同じであり，固有値も等しい．

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ が P 自身にうつされるとき，$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ のとき，A は固有値 1 をもつ．したがって，

${}^tA$ も固有値 1 をもつ．よって，${}^tA\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$ となる $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix}$ が存在する．よって，$(p' \quad q')A=(p' \quad q')$．

原点を通らない直線 $l : p'x+q'y=1$ の方程式は $(p' \quad q')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$ と表される．

よって，

$$(p' \quad q')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(p' \quad q')A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1.$$

一方直線 $l : (p' \quad q')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1$ の上の点 $(x,\ y)$ の f の像を $(x',\ y')$ とすると，

$$(p' \quad q')\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(p' \quad q')A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(p' \quad q')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=1$$

となるから，$(x',\ y')$ は l 上の点である．

よって，原点を通らない直線 l で l 上の点が l 上へ移されるものが存在する．

（注） この問題文では l 上の点が l 上の 1 点に移される場合も，題意をみたす直線 l である．したがって，題意をみたす直線 l の像は必ずしも l 全体ではない．

第2問

正4面体 T と半径1の球面 S とがあって，T の6つの辺がすべて S に接しているという。T の1辺の長さを求めよ。

つぎに，T の外側にあって S の内側にある部分の体積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：空間図形，整式の積分，体積

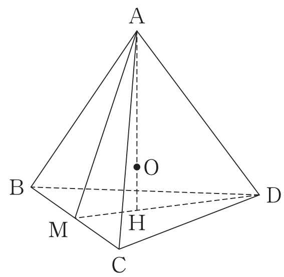
考え方

対称性から S の中心は正四面体の重心にある．正四面体 T の重心と1辺の距離が1ということである．また体積を求めるとき，重心と面の距離を求めればよい．

【解答】

T の頂点をA，B，C，Dとし，S の中心をOとする．対称性から S の中心Oは正四面体 T の重心にある．

T の1辺の長さを a，辺BCの中点をM，Aから面BCDへ下した垂線の足をHとする．



Hは三角形BCDの重心であるから，$\mathrm{MH}=\dfrac{1}{3}\mathrm{MD}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}a$.

$\mathrm{AH}=\sqrt{\mathrm{AM}^2-\mathrm{MH}^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

Oは T の重心だから $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}a$.

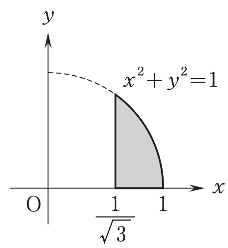
S が T の辺に接し，その接点は辺の中点だから $\mathrm{OM}=1$.

$\mathrm{OM}^2=\mathrm{MH}^2+\mathrm{OH}^2=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}a\right)^2+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{6}}a\right)^2=\dfrac{1}{8}a^2=1$.

$\therefore\quad a=2\sqrt{2}$.　…(答)

$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\cdot2\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ だから，Oと T の面の距離は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

よって，求める体積を V とすると，V は中心から $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の距離にある平面と球面によって囲まれた領域の体積の4倍である．



$$V=4\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\sqrt{1-x^2}^{\,2}\,dx=4\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$

$$=4\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{9\sqrt{3}}\right)=\frac{8}{9\sqrt{3}}(3\sqrt{3}-4)\pi.\quad\cdots(答)$$

（注）　四面体KLMNの頂点K，L，M，Nの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{k}$，$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ とおいたとき，位置ベクトルが $\dfrac{1}{4}(\vec{k}+\vec{l}+\vec{m}+\vec{n})$ で表される点を四面体KLMNの重心という．重心の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると，

$$\vec{g}=\frac{1}{4}\vec{k}+\frac{3}{4}\,\frac{\vec{l}+\vec{m}+\vec{n}}{3}$$

であるから，重心GはKと対面の三角形LMNの重心 H_k を結ぶ線分を3：1に内分する．

正四面体においては重心と各頂点の距離，上の四面体ではKG，LG，MG，NGの長さが等しいから，重心は正四面体の外接球の中心と一致する．また，正四面体では重心と内接球の中心も一致する．

本問の場合Oは正四面体の外接球の中心だから，重心でもある．HはAの対面の三角形BCDの重

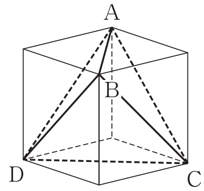
心だから，O は AH を 3：1 に内分し，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{4}\mathrm{AH}$ が成り立つ．

T の 1 辺の長さを求める部分の【別解】

正四面体は立方体の 6 つの面の対角線を辺として作ることができる．立方体の内接球は正四面体の各辺に接する．

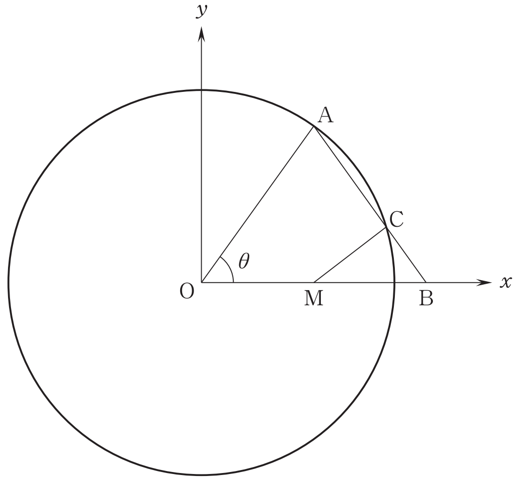
半径が 1 の球を内接する立方体の 1 辺は 2 で各面の正方形の対角線は $2\sqrt{2}$ であるからこれが T の 1 辺の長さである．

よって，T の 1 辺の長さは $2\sqrt{2}$．　…(答)



第 3 問

xy 平面において，点 A は原点 O を中心とする半径 1 の円周の第 1 象限にある部分を動き，点 B は x 軸上を動く。ただし，線分 AB の長さは 1 であり，線分 AB は両端 A，B 以外の点 C で円周と交わるものとする。



(1)　$\theta=\angle\mathrm{AOB}$ の取りうる値の範囲を求めよ。

(2)　BC の長さを θ で表わせ。

(3)　線分 OB の中点を M とするとき，線分 CM の長さの範囲を求めよ。

分　野

数学 I：三角関数，図形と方程式

考え方

座標を丹念に計算してゆけば解ける．

【解答 1】　座標計算

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\theta$，$\mathrm{OA}=1$ だから A の座標は $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ である．三角形 OAB は $\mathrm{OA}=\mathrm{AB}$ の二等辺三角形だから，B の座標は $(2\cos\theta,\ 0)$．

直線 AB の方程式は $y=-\tan\theta(x-2\cos\theta)$．

$x^2+y^2=1$ より

$$x^2+(-\tan\theta x+2\sin\theta)^2=1.$$
$$x^2-4\sin^2\theta\cos\theta x+\cos^2\theta(4\sin^2\theta-1)=0.$$
$$(x-\cos\theta)\{x-\cos\theta(4\sin^2\theta-1)\}=0.$$

$x=\cos\theta$ は A の x 座標であるから，C の x 座標は $\cos\theta(4\sin^2\theta-1)=\cos\theta(3-4\cos^2\theta)$.
C は線分 AB 上の点だから

$$\cos\theta<\cos\theta(3-4\cos^2\theta)<2\cos\theta.$$

$\cos\theta>0$ より，$\dfrac{1}{2}<\cos\theta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(2) C の座標は

$$\left(\cos\theta(3-4\cos^2\theta),\ \sqrt{1-\cos^2\theta(3-4\cos^2\theta)^2}\right).$$

$$BC^2=\cos^2\theta(1-4\cos^2\theta)^2+1-\cos^2\theta(3-4\cos^2\theta)^2=16\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=(4\cos^2\theta-1)^2.$$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad BC=4\cos^2\theta-1. \qquad \cdots(答)$$

(3) M の座標は $(\cos\theta,\ 0)$.

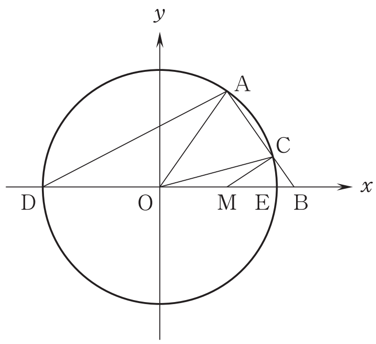
$$\begin{aligned}CM^2&=\cos^2\theta(2-4\cos^2\theta)^2+1-\cos^2\theta(3-4\cos^2\theta)^2=8\cos^4\theta-5\cos^2\theta+1\\&=8\left(\cos^2\theta-\frac{5}{16}\right)^2+\frac{7}{32}.\end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \frac{7}{32}\leqq CM^2<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\leqq CM<\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

【解答 2】 初等幾何



(1) $OA=AB(=1)$ から $\angle ABO=\angle AOB=\theta$.

$$\therefore\quad OB=2\cos\theta,\quad \angle OAB=\pi-2\theta.$$

線分 AB が両端 A，B 以外の円周と交わる条件は，B が円外にあって，$\angle OAB$ が鋭角であることである．

$$\therefore\quad 2\cos\theta>1,\quad \angle OAB=\pi-2\theta<\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(2) x 軸と円の交点の内 B から遠い方を D，近い方を E とする．
方べきの定理から

$$BE\cdot BD=BC\cdot BA.\quad BC=(2\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=4\cos^2-1. \qquad \cdots(答)$$

(3) 中線定理（パップスの定理）から

$$OC^2+BC^2=2(CM^2+OM^2).$$

$$\therefore\quad CM^2=\frac{1}{2}(OC^2+BC^2-2OM^2)=\frac{1}{2}\{1^2+(4\cos^2\theta-1)^2-2\cos^2\theta\}=8\cos^4\theta-5\cos^2\theta+1.$$

以下**【解答 1】**と同じ．

【解答 3】 三角比

(1) **【解答 2】**と同じ．

(2) $\angle OCA=\angle OAB=\pi-2\theta$.
$\angle OCB=2\theta$，$\angle OBC=\theta$ だから $\angle BOC=\pi-3\theta$.

三角形OBCについて正弦定理を用いて

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\mathrm{OC}}{\sin\theta}.\quad \therefore\quad \mathrm{BC}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}=\frac{3\sin\theta-4\sin^3\theta}{\sin\theta}=3-4\sin^2\theta. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) 三角形BCMについて余弦定理を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{CM}^2&=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BM}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BM}\cos\theta\\&=(3-4\sin^2\theta)^2+\cos^2\theta-2\cos\theta(3-4\sin^2\theta)\cos\theta\\&=(3-4\sin^2\theta)^2+(1-\sin^2\theta)-2(3-4\sin^2\theta)(1-\sin^2\theta)\\&=8\sin^4\theta-11\sin^2\theta+4\\&=8\left(\sin^2\theta-\frac{11}{16}\right)^2+\frac{7}{32}.\end{aligned}$$

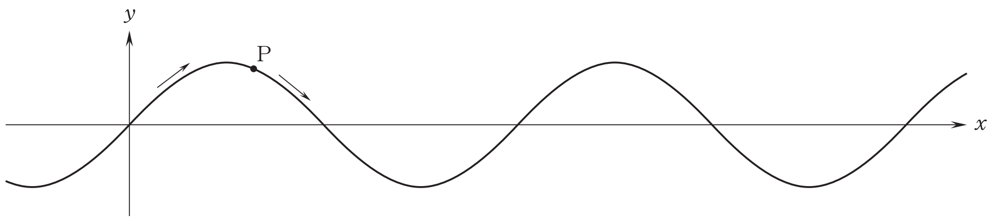
$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ から $\dfrac{1}{2}<\sin^2\theta<\dfrac{3}{4}$.

$$\therefore\quad \frac{7}{32}\leqq \mathrm{CM}^2<\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\leqq \mathrm{CM}<\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

xy 平面上の曲線 $y=\sin x$ に沿って，図のように左から右へすすむ動点Pがある。Pの速さが一定 V $(V>0)$ であるとき，Pの加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ の大きさの最大値を求めよ。ただし，Pの速さとはPの速度ベクトル $\vec{v}=(v_1,\ v_2)$ の大きさであり，また t を時間として $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{dv_1}{dt},\ \dfrac{dv_2}{dt}\right)$ である。



分　野

数学Ⅲ：微分法，速度・加速度

考え方

Pの x 座標を t の関数として表し，$y=\sin x(t)$ とし，さらに $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ とし，$|\vec{v}|=V$ となるように制限して，$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ を x で表す．その上で加速度ベクトル $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ の大きさを考える．

結果は当然のことながら y が極大，極小になる点で加速度は最大になる．

【解答】

x を t の関数として $x(t)$ とおく．

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dx}{dt},\ \cos x\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ -\sin x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\cos x\frac{d^2x}{dt^2}\right). \qquad \cdots①$$

$|\overrightarrow{v}|=V$ から

$$(1+\cos^2 x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=V^2. \qquad \cdots②$$

② を t で微分して，

$$-2\cos x\sin x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+2(1+\cos^2 x)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0.$$

P は座標平面上を左から右へ移動するから $\dfrac{dx}{dt}>0$．よって，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

② から

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{V^2}{1+\cos^2 x},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\sin x\cos x V^2}{(1+\cos^2 x)^2}.$$

① から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\alpha}&=\left(\frac{\sin x\cos x V^2}{(1+\cos^2 x)^2},\ -\frac{\sin x V^2}{1+\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos^2 x V^2}{(1+\cos^2 x)^2}\right)\\&=\left(\frac{\sin x\cos x V^2}{(1+\cos^2 x)^2},\ -\frac{\sin x V^2}{(1+\cos^2 x)^2}\right)=\frac{\sin x V^2}{(1+\cos^2 x)^2}(\cos x,\ -1).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad |\overrightarrow{\alpha}|^2=\frac{\sin^2 x V^4}{(1+\cos^2 x)^4}(1+\cos^2 x)=\frac{\sin^2 x V^4}{(1+\cos^2 x)^3}=\frac{(1-\cos^2 x)V^4}{(1+\cos^2 x)^3}.$$

分母は $\cos^2 x$ に対して増加し，分子は $\cos^2 x$ に対して減少し，$0\leqq\cos^2 x\leqq1$ だから，$|\overrightarrow{\alpha}|$ は $\cos^2 x=0$ のとき最大になり，その最大値は V^2 である． …(答)

第 5 問

xyz 空間において，不等式

$$0\leqq z\leqq 1+x+y-3(x-y)y,$$
$$0\leqq y\leqq 1,$$
$$y\leqq x\leqq y+1$$

のすべてを満足する x，y，z を座標にもつ点全体がつくる立体の体積を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の積分，体積

考え方

いずれかの座標軸に垂直な断面積を求めてそれを積分する．
座標軸の選び方は 3 通り考えられるが，y については 2 次式になるので，xz 平面に平行，すなわち y 軸に垂直な断面をとるとよい．

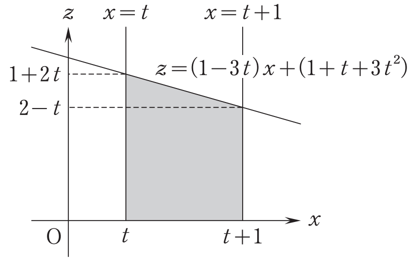
【解答】

y 軸に垂直な平面 $y=t$ による断面をとると，$0\leqq t\leqq1$ で

$$0\leqq z\leqq(1-3t)x+1+t+3t^2,\quad t\leqq x\leqq t+1$$

となる．

$t\leqq x\leqq t+1$ のとき，$0<(1-3t)x+1+t+3t^2$ であることに注意．この範囲を図示すると右図の台形となる．



4 頂点の (x, z) 座標は

$(t, 0)$，$(t, 1+2t)$，$(t+1, 2-t)$，$(t+1, 0)$.

断面積は

$$\frac{1}{2}\{(1+2t)+(2-t)\}\cdot\{(t+1)-t\}=\frac{1}{2}(3+t).$$

求める体積は

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(3+t)\,dt=\frac{1}{2}\left[3t+\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{7}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

サイコロが 1 の目を上面にして置いてある。向かいあった一組の面の中心を通る直線のまわりに 90° 回転する操作をくりかえすことにより，サイコロの置きかたを変えていく。ただし，各回ごとに，回転軸および回転する向きの選びかたは，それぞれ同様に確からしいとする。

第 n 回目の操作のあとに 1 の目が上面にある確率を p_n，側面のどこかにある確率を q_n，底面にある確率を r_n とする。

(1) p_1，q_1，r_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} で表わせ。

(3) $p=\lim_{n\to\infty} p_n$，$q=\lim_{n\to\infty} q_n$，$r=\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：確率，**数学ⅡB**：数列，漸化式，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

回転軸と回転する向きで 6 通りの回転がある．それぞれによって，1 の目がどう動くかを考えればよい．また $p_n+q_n+r_n=1$ を忘れないように．

【解答】

(1) 回転軸は 3 通りあり，それぞれ右回りと左回りがあるから全部で 6 通りの回転がある．

1 の目が上面にあるとき，鉛直な回転軸について回転すると 1 の目の位置は変わらない．回転向きが 2 通りあるからその確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

水平な回転軸について回転すると，どの軸についてどの向きに回転しても 1 の目は側面に移る．軸が 2 通りで，回転向きもそれぞれ 2 通りあるからその確率は $\frac{2}{3}$.

$$\therefore \quad p_1=\frac{1}{3}, \quad q_1=\frac{2}{3}, \quad r_1=0. \quad \cdots(\text{答})$$

(2)(i) 1 の目が側面にあるとき，

鉛直な回転軸で回転すると 1 の目は他の側面に移る．その確率は $\frac{1}{3}$.

水平で 1 の目のある面に垂直な回転軸について回転すると 1 の目は動かない．その確率は $\frac{1}{3}$.

水平で 1 の目のある面に平行な回転軸について回転すると回転の向きによって 1 の目は上面あるいは底面に移る．その確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$.

(ii) 1 の目が底面にあるとき，

鉛直な回転軸について回転すると 1 の目の位置は変わらない．その確率は $\frac{1}{3}$.

水平な回転軸について回転すると，どの軸についてどの向きに回転しても 1 の目は側面に移る．軸が 2 通りで，回転向きもそれぞれ 2 通りあるからその確率は $\frac{2}{3}$.

(1) と (i)，(ii) から

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{6}q_{n-1}, \\ q_n=\frac{2}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}, \\ r_n=\qquad\qquad \frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{3}r_{n-1}. \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) $p_n+q_n+r_n=1$ と (2) の第 2 式から，$q_n=\frac{2}{3}$.

第 1，3 式から

$$\begin{cases} p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{9}, \\ r_n=\frac{1}{3}r_{n-1}+\frac{1}{9}. \end{cases}$$

$$p_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}-\frac{1}{6}\right).$$

よって $\left\{p_n-\frac{1}{6}\right\}$ は公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である．

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3^{n-1}}\left(p_1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

同様に

$$r_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{3^{n-1}}\left(r_1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\left(0-\frac{1}{6}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

以上から

$$p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n},\quad q_n=\frac{2}{3},\quad r_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{6},\quad \lim_{n\to\infty}q_n=\frac{2}{3},\quad \lim_{n\to\infty}r_n=\frac{1}{6}. \qquad \cdots(\text{答})$$

1983 年　文科

第 1 問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が表す xy 平面の 1 次変換 f が，次の条件 (1)，(2) をみたすとする。

(1)　f は，任意の三角形をそれと相似な三角形にうつす。

(2)　f は，点 $(1,\ \sqrt{3})$ を点 $(-2,\ 2\sqrt{3})$ にうつす。

このような行列 A をすべて求めよ。

分 野

数学ⅡB：一次変換

考え方

任意の三角形がそれと相似な三角形に移されるなら，任意のベクトルの大きさは定数倍される．

【解答 1】　題意にしたがって

(1) で，任意の三角形をそれと相似な三角形に移す一次変換においては任意のベクトルはその大きさが定数倍のベクトルに移される．

任意のベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，その像を $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし，その定数を k (>0) とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix},$$

$$x'^2+y'^2=(ax+by)^2+(cx+dy)^2=(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)xy+(b^2+d^2)y^2=k^2(x^2+y^2).$$

これが任意の x，y について成り立つから

$$a^2+c^2=k^2,\quad ab+cd=0,\quad b^2+d^2=k^2. \qquad \cdots ①$$

① の第 1，3 式から

$$a=k\cos\theta,\quad c=k\sin\theta,\quad b=k\cos\phi,\quad d=k\sin\phi$$

となる θ $(0\leqq\theta<2\pi)$，ϕ $(0\leqq\phi<2\pi)$ が存在し，① の第 2 式から

$$k^2(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)=k^2\cos(\theta-\phi)=0.$$

$k\neq 0$ だから $\phi=\theta\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$（$n$ は適当な整数）.

以下，複号同順で，

$$b=k\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp k\sin\theta,\quad d=k\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm k\cos\theta.$$

$$\therefore\quad A=k\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\quad \text{または}\ A=k\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

一方 (2) から $A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2}{3}\pi \\ \sin\dfrac{2}{3}\pi \end{pmatrix}$. $\qquad \cdots ②$

$A=k\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき，

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} \cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta \\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta \end{pmatrix}=2k\begin{pmatrix} \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

② より，$k=2$，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$．∴　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$．よって，

$$A=2\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3}\\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

$A=k\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ のとき，

$$A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta\\ \sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta\end{pmatrix}=2k\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}.$$

② より，$k=2$，$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$．∴　$\theta=\pi$．よって，

$$A=2\begin{pmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ \sin\pi & -\cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

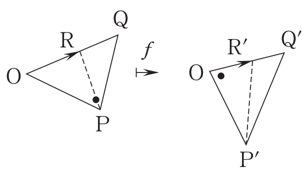
$$\therefore\quad A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$ …(答)

（注）　任意の三角形を相似な三角形へ移すとき，一次変換による対応と相似による対応が一致することを前提として証明した．つまり，三角形 OPQ と三角形 OP′Q′ が相似でも，O と O，P と P′，Q と Q′ が対応する場合の他，他の対応で相似な場合がある．上記解答ではそのような場合を考慮しなかった．

実際，三角形 OPQ と三角形 OP′Q′ が相似で，その対応関係が O と O′，P と P′，Q と Q′ でないようなことはない．

もしそのようなことがあれば，異なるベクトルが異なる大きさの比に変換されることがあることになる．そのような場合，相似でない三角形に移されることがあることを示す．

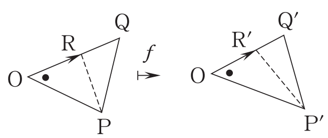
$A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$，$A\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ において三角形 OPQ と三角形 OP′Q′ が相似で，$\angle\mathrm{POQ}\neq\angle\mathrm{P'OQ'}$ とする．このとき 2 つの三角形は相似だから，$\angle\mathrm{P'OQ'}=\angle\mathrm{OPQ}$ または $\angle\mathrm{OQP}$ である．例えば，$\angle\mathrm{P'OQ'}=\angle\mathrm{OPQ}$ とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=l\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(l>0)$ となる点 R をとり，三角形 OPR のどの角も $\angle\mathrm{OPQ}$ に等しくないように l をとることができる．この三角形 OPR に対して $A\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR'}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OR'}}=A\overrightarrow{\mathrm{OR}}=lA\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}$ だから R′ は OQ′ 上にある．



$$\therefore\quad \angle\mathrm{P'OR'}=\angle\mathrm{P'OQ'}=\angle\mathrm{OPQ}.$$

ところが，三角形 OPR のどの角も $\angle\mathrm{OPQ}$ と一致しないので，三角形 OPR と三角形 OR′P′ は相似ではない．$\angle\mathrm{P'OQ'}=\angle\mathrm{OQP}$ のときも同様．

また，$\angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{P'OQ'}$ のとき，$\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}\neq\dfrac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}}$ で 2 つの三角形は相似だから，$\mathrm{OP}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OQ'}:\mathrm{OP'}$．$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=l\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ $(l>0)$ となる点 R をとると，$\mathrm{OR}=l\mathrm{OQ}$，$\mathrm{OR'}=l\mathrm{OQ'}$ となる．このとき，$l\neq1$ とすれば



$\mathrm{OP}:\dfrac{1}{l}\mathrm{OR}=\dfrac{1}{l}\mathrm{OR'}:\mathrm{OP'}$ だから $\mathrm{OP}:\mathrm{OR}=\mathrm{OR'}:\mathrm{OP'}$ でも，$\mathrm{OP}:\mathrm{OR}=\mathrm{OP'}:\mathrm{OR'}$ でもない．したがって，三角形 OPR と三角形 OR′P′ は相似ではない．

なお，原点を頂点としない三角形についてはその 1 頂点を原点に重なるように平行移動してできる三角形の一次変換を考えればよく，相似対応と一致しなければならないことがわかる．

したがって，任意の三角形が一次変換によって相似な三角形に移されるなら，対応するベクトルの大きさが定数倍される．

【解答 2】 特定の三角形に注目して

O を原点，I(1, 0)，K(0, 1) として直角二等辺三角形 OIK を考える．$f(\mathrm{O})=\mathrm{O}$，$f(\mathrm{I})=\mathrm{I}'$，$f(\mathrm{K})=\mathrm{K}'$ とおき，I′ の座標を $(k\cos\theta,\ k\sin\theta)$ $(k>0)$ とおく．このとき三角形 OI′K′ は直角二等辺三角形である．

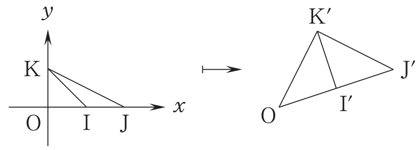
(i) ∠I′OK′ が直角のとき，三角形 I′OK′ は直角二等辺三角形なので K′ の座標は

$\left(k\cos\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right),\ k\sin\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=(\mp k\sin\theta,\ \pm k\cos\theta)$.

よって，

$$A=k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\ \text{または，}\ k\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

(ii) ∠OI′K′ が直角のとき，J(2, 0) をとると，三角形 OJK は直角二等辺三角形でないが，三角形 OI′K′ が直角二等辺三角形なら三角形 OJ′K′ も直角二等辺三角形になり，三角形 OJK と相似でなくなる．よって条件 (1) をみたさない．



(iii) ∠OK′I′ が直角のとき，(ii) と同様に相似な三角形に移されない三角形が存在する．よって条件 (1) をみたさない．

よって，

$$A=k\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\ \text{または，}\ k\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}.$$

このとき，任意の三角形はそれに相似な三角形に移される．

以下**【解答 1】**と同じ．

【解答 3】 特定の正三角形に注目して

O(0, 0)，P$(1,\ \sqrt{3})$，Q$(-1,\ \sqrt{3})$ とおくと三角形 OPQ は正三角形である．

$f(\mathrm{O})=\mathrm{O}$，$f(\mathrm{P})=\mathrm{P}'$，$f(\mathrm{Q})=\mathrm{Q}'$ とおく．(2) から P′$(-2,\ 2\sqrt{3})$．

(1) から三角形 OP′Q′ は正三角形である．$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ を O を中心に $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転した点が Q′ だから $(-4,\ 0)$ または $(2,\ 2\sqrt{3})$．

$$\therefore\quad A\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\sqrt{3}\end{pmatrix},\ \text{かつ}\ A\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 0\end{pmatrix}\ \text{または}\begin{pmatrix}2\\ 2\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad A\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2\sqrt{3} & 0\end{pmatrix},\ \text{または}\ A\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

それぞれに右から $\begin{pmatrix}1 & -1\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ をかけて，

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\ \text{または}\ A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

このとき，任意の三角形はそれに相似な三角形に移される．

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\ \text{または}\ A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$ …(答)

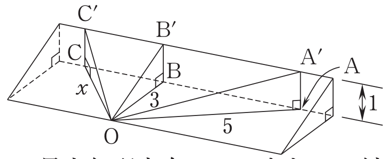
第２問

傾いた平面上で，もっとも急な方向の勾配（傾き）が $\dfrac{1}{3}$ であるという。いま南北方向の勾配を測ったところ $\dfrac{1}{5}$ であった。東西方向の勾配はどれだけか。

分　野

数学ⅡB：空間図形

考え方



右図のような図が描ければあとは初等幾何的に処理できる．ここで，OA が南北方向，OC が東西方向，OB が最大勾配方向である．

【解答１】　初等幾何

斜面上に原点 O をとり，水平面上で南北方向に OA，東西方向に OC，最大勾配方向に OB をとる．斜面上で O より 1 だけ高い位置の等高線 l は OB に垂直な直線であり，l を O を通る水平面に正射影した直線 m 上に A，B，C をとる．A，B，C の垂直上方の斜面上に A′，B′，C′ をとる．

OB′ の勾配が $\dfrac{\mathrm{BB'}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{3}$ で，BB′=1 だから，OB=3．OA′ の勾配が $\dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{1}{5}$ で，AA′=1 だから，OA=5．

OC$=x$ とおくと，CC′=1 だから，OC′ の勾配は $\dfrac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{x}$.

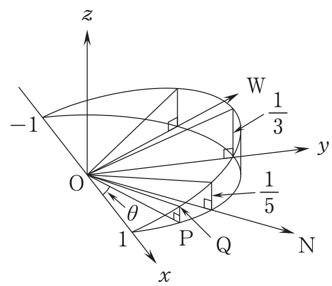
三角形 OBA は直角三角形だから $\mathrm{AB}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OB}^2}=4$.

∠AOC は直角だから，△OAB ∽ △COB．$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}=\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OC}}$ だから $\dfrac{4}{5}=\dfrac{3}{x}$．$x=\dfrac{15}{4}$.

よって，東西方向の傾きは $\dfrac{1}{x}=\dfrac{4}{15}$.　…(答)

【解答２】　座標をおく

図のように xy 平面に単位円を描き，与えられた斜面の方程式を $z=\dfrac{1}{3}y$ とおく．



図で $\angle x\mathrm{OP}=\theta$ とおくと，

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0).$$

Q は $z=\dfrac{1}{3}y$ 上にあるから，

$$\mathrm{Q}\left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ \frac{1}{3}\sin\theta\right).$$

南北方向を表す角を $\theta=\alpha$ とすると，

$$\frac{1}{3}\sin\alpha=\frac{1}{5},\quad \therefore\quad \sin\alpha=\frac{3}{5}.$$

東西方向の θ は $\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ だから，その勾配は

$$\frac{1}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\cos\alpha=\frac{4}{15}.\quad \cdots(答)$$

【解答３】　ベクトル

東西方向を x 軸，南北方向を y 軸とする空間座標を考える．斜面の方程式を $ax+by+z=0$ とすると，斜面の法線ベクトルは $\vec{n}=(a,\ b,\ 1)$.

斜面と水平面のなす角を θ とおくと，最大勾配が $\dfrac{1}{3}$ だから $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$．$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

斜面と水平面のなす角は $\overrightarrow{n}$ と $\overrightarrow{u}=(0,\ 0,\ 1)$ のなす角であるから，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{10}}. \qquad \cdots①$$

一方，南北方向の切り口は $by+z=0$．その傾きは $|b|$ であり，条件から $\dfrac{1}{5}$ であるから $|b|=\dfrac{1}{5}$.

① より，

$$a^2=\frac{10}{9}-1-\frac{1}{5^2}=\frac{16}{9\cdot25}=\left(\frac{4}{15}\right)^2.$$

東西方向の傾きは

$$|a|=\frac{4}{15}. \qquad \cdots(答)$$

第3問

xy 平面上で，曲線

$$C:y=x^3+ax^2+bx+c$$

上の点Pにおける接線 l が，Pと異なる点Qで C と交わるとする。l と C で囲まれた部分の面積と，Qにおける接線 m と C で囲まれた部分の面積の比を求め，これが一定であることを示せ。

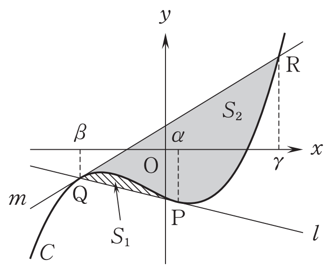
分　野

数学ⅡB：整式の積分

考え方

面積を交点，接点の x 座標で表すと整理しやすい．

【解答】



C と m 交点でQと異なる点をRとし，P，Q，Rの x 座標を α，β，γ とする．

l，m の方程式を $l:y=px+q$，$m:y=p'x+q'$ とおくと，

$$f(x)-(px+q)=(x-\alpha)^2(x-\beta),$$
$$f(x)-(p'x+q')=(x-\beta)^2(x-\gamma).$$

x^2 の係数を比較すると

$$2\alpha+\beta=2\beta+\gamma=-a. \qquad \cdots①$$

l と C で囲まれた部分の面積を S_1，m と C で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_1=\left|\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^\beta\right|=\frac{(\beta-\alpha)^4}{12}.$$

同様に，

$$S_2=\frac{(\beta-\gamma)^4}{12}.$$

① より，$2(\beta-\alpha)=\beta-\gamma$.

$$S_1:S_2=(\beta-\alpha)^4:(\beta-\gamma)^4=1:2^4=1:16. \qquad \cdots(答)$$

確かに $f(x)$ にもPにもよらず $S_1:S_2$ は一定である．（証明終り）

第４問

直線上に，赤と白の旗をもった何人かの人が，番号 $0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ をつけて並んでいる。番号 0 の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為にあげるものとし，他の番号 j の人は，番号 $j-1$ の人のあげた旗の色を見て，確率 p で同じ色，確率 $1-p$ で異なる色の旗をあげるものとする。

このとき，番号 0 の人と番号 n の人が同じ色の旗をあげる確率 P_n を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：確率，**数学ⅡB**：数列

考え方

漸化式を立ててもよいし，直接求めてもよい．

【解答１】　$\{P_n\}$ の漸化式を立てて

番号 $n+1$ の人が番号 0 の人と同じ色の旗をあげるのは，番号 n の人が同じ色の旗をあげていて，番号 $n+1$ の人がそれと同じ色の旗をあげる場合の確率と，番号 n の人が異なる色の旗をあげていて，番号 $n+1$ の人がそれと異なる色の旗をあげる場合の確率の和である．したがって，

$$P_{n+1}=pP_n+(1-p)(1-P_n)=(2p-1)P_n+1-p.$$

また，$P_0=1$.

$$P_{n+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(P_n-\frac{1}{2}\right).$$

よって $\left\{P_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は公比 $2p-1$ の等比数列，$P_0-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ だから

$$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2p-1)^n.$$

$$\therefore\quad P_n=\frac{1}{2}\{1-(2p-1)^n\}. \qquad \cdots(答)$$

【解答２】　直接計算

番号 0 の人と番号 n の人が同じ色の旗をあげるのは，番号 $1\sim n$ の人の中に，直前の人を異なる色の旗をあげる人が偶数人いるときである．

その確率は

$$P_n=p^n+{}_nC_2p^{n-2}(1-p)^2+{}_nC_4p^{n-4}(1-p)^4+\cdots$$

である．

さて，

$$\begin{aligned}\{p+(1-p)\}^n&=p^n+{}_nC_1p^{n-1}(1-p)+{}_nC_2p^{n-2}(1-p)^2\\&\quad+{}_nC_3p^{n-3}(1-p)^3+{}_nC_4p^{n-4}(1-p)^4+\cdots\\&=1,\\\{p-(1-p)\}^n&=p^n-{}_nC_1p^{n-1}(1-p)+{}_nC_2p^{n-2}(1-p)^2\\&\quad-{}_nC_3p^{n-3}(1-p)^3+{}_nC_4p^{n-4}(1-p)^4-+\cdots\\&=(2p-1)^n.\end{aligned}$$

よって，

$$P_n=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^n\}. \qquad \cdots(答)$$

1983 年　理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

数列 $\{a_n\}$ において，$a_1=1$ であり，$n \geqq 2$ に対して a_n は，次の条件 (1)，(2) をみたす自然数のうち最小のものであるという。

(1)　a_n は a_1，…，a_{n-1} のどの項とも異なる。

(2)　a_1，…，a_{n-1} のうちから重複なくどのように項を取り出しても，それらの和が a_n に等しくなることはない。

このとき，a_n を n で表し，その理由を述べよ。

分　野

数学ⅡB：数列，数学的帰納法，整数

考え方

題意をしっかり把握する．実験的に推測する．それを数学的帰納法で証明する．

$n=2$ のとき，$a_2=2$.

$n=3$ のとき，$\{a_1,\ a_2\}=\{1,\ 2\}$ から作れる和は $\{1,\ 2,\ 3\}$ よって，$a_3=4$.

$a_n=2^{n-1}$ と推定.

【解答】

「$a_n=2^{n-1}$ で，a_1，a_2，a_3，…，a_n のうちから重複なく項を取り出してできる和は 1，2，3，…，2^n-1 である.」　…(＊)

とする．(＊) を数学的帰納法で証明する．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき，$a_1=1$ で a_1 だけから重複なく作れる和は 1 だけだから (＊) は成り立つ.

(Ⅱ)　$n=k$ のとき (＊) が成り立つとする．つまり，$a_k=2^{k-1}$ で，a_1，a_2，a_3，…，a_k のうちから重複なく項を取り出してできる和は 1，2，3，…，2^k-1 であるとする.

(1) から $a_{k+1}=2^k$ である.

a_1，a_2，a_3，…，a_k，a_{k+1} のうちから重複なく項を取り出してできる和のうち，a_{k+1} を含まない和は 1，2，3，…，2^k-1 であり，a_{k+1} を含む和は 2^k，2^k+1，2^k+2，…，$2^k+2^k-1=2^{k+1}-1$ であるから，和の全体は 1，2，3，…，$2^{k+1}-1$ である.

よって $n=k+1$ のときも (＊) は成り立つ.

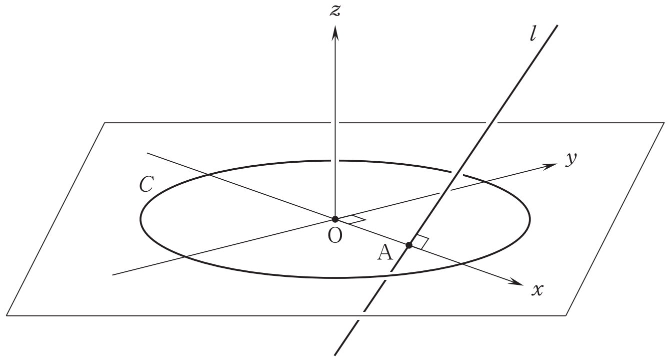
以上より，

$$a_n=2^{n-1}. \qquad \cdots（答）$$

（注）　2 進法で n 桁以内の数の個数が 2^n-1 であることを考えれば当然である.

第3問

平面上に点Oを中心とする半径1の円 C がある。また，この平面上のOと異なる点Aを通って直線OAと垂直な空間直線 l があり，平面とのなす角 $45°$ である。このとき，円 C と直線 l の間の最短距離を，2点O，A間の距離 a で表せ。



分　野

数学ⅡB：空間図形，ベクトル，内積

考え方

円周上の点を媒介変数で表して，l へ垂線を下ろして垂線の長さを求める．

【解答】 C 上の動点から l へ垂線を下ろして

C 上の動点を $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ と表し，Pから l へ下ろした垂線の足をHとする．

$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，l に平行なベクトルは $\vec{l}=(0,\ 1,\ 1)$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{l}=(a,\ t,\ t).$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\vec{l}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{l}=0(a-\cos\theta)+(t-\sin\theta)+t=2t-\sin\theta=0.$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{2}\sin\theta.\quad\therefore\quad \mathrm{H}\left(a,\ \frac{1}{2}\sin\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \mathrm{PH}^2&=(a-\cos\theta)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\\&=a^2-2a\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta=a^2-2a\cos\theta+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\theta\\&=\frac{1}{2}(\cos\theta-2a)^2-a^2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(i) $0<2a\leqq1$ つまり，$0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき，

PHは $\cos\theta=2a$ のとき最小になり，その最小値は $\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}$.

(ii) $a>\frac{1}{2}$ のとき，

PHは $\cos\theta=1$ のとき最小になり，その最小値は $|a-1|$.

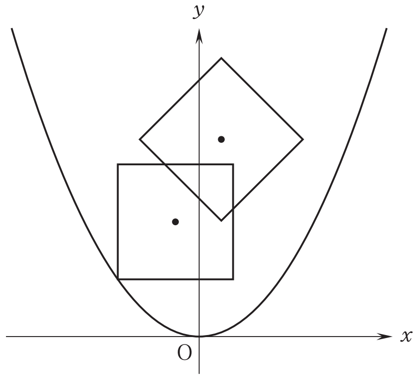
よって，円 C と直線 l の間の最短距離は

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{2}-a^2} & \left(0<a\leqq\frac{1}{2}\ \text{のとき}\right),\\ |a-1| & \left(a>\frac{1}{2}\ \text{のとき}\right).\end{cases}\qquad\cdots(答)$$

第 4 問

xy 平面上の $y \geqq x^2$ で表される領域を D とする。D に含まれる 1 辺の長さ t の正方形で，各辺が座標軸と平行または 45° の角をなすものをすべて考える。

このとき，これらの正方形の中心の y 座標の最小値を t の関数として表し，そのグラフをかけ。



分　野

数学 I ：図形と方程式

考え方

対称性から正方形の中心は y 軸上にあると考えてよい．

あとは丹念に場合分けする．

【解答】

対称性から正方形の中心は y 軸上にあると考えてよい．

(i)　正方形の辺が座標軸に平行なとき，中心の y 座標が最小になるのは 2 つの頂点が $y=x^2$ 上にあるとき．このとき，その頂点は $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ と $\left(-\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{4}\right)$．中心は $\left(0,\ \dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}\right)$．

y 座標の最小値は $\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}$．

(ii)　正方形の辺が座標軸と 45° をなすとき，

原点を通り x 軸と 45° をなす直線が放物線と交わる点は (1, 1)．

原点と (1, 1) に頂点がある正方形の 1 辺の長さは $\sqrt{2}$．

(ii-a)　$0<t \leqq \sqrt{2}$ のとき，頂点が原点にあるとき中心の y 座標は最小になり $\dfrac{t}{\sqrt{2}}$．

(ii-b)　$\sqrt{2}<t$ のとき，2 頂点が $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$ にあるとき中心は $\left(0,\ \dfrac{t^2}{2}\right)$ となる．

中心の y 座標の最小値は $\dfrac{t^2}{2}$．

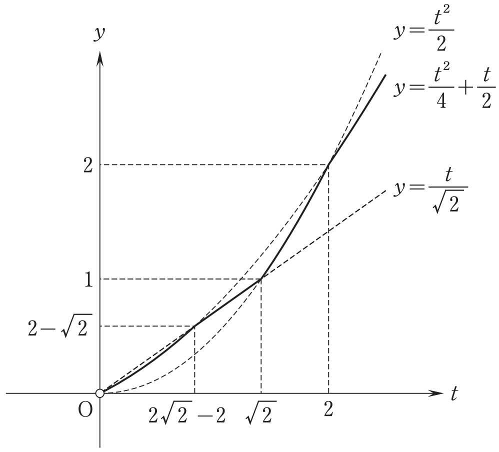
$$\left(\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}\right)-\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{t}{4}(t-2\sqrt{2}+2).$$

$$\left(\frac{t^2}{4}+\frac{t}{2}\right)-\frac{t^2}{2}=-\frac{t}{4}(t-2).$$

よって，

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2} & (0<t\leqq 2\sqrt{2}-2 \text{ のとき}), \\ \dfrac{t}{\sqrt{2}} & (2\sqrt{2}-2<t\leqq\sqrt{2} \text{ のとき}), \\ \dfrac{t^2}{2} & (\sqrt{2}<t\leqq 2 \text{ のとき}), \\ \dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2} & (t>2 \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

図示すると下図太線部.



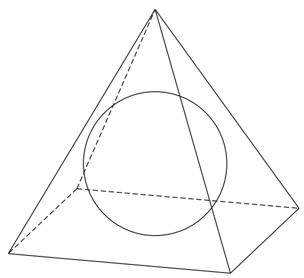
第5問

正四角錐 V に内接する球を S とする。V をいろいろ変えるとき，比

$$R=\frac{S\text{ の表面積}}{V\text{ の表面積}}$$

のとりうる値のうち，最大のものを求めよ。

ここで正四角錐とは，底面が正方形で，底面の中心と頂点を結ぶ直線が底面に垂直であるような角錐のこととする。



分　野

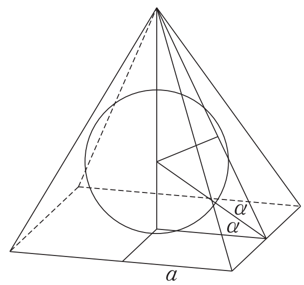
数学ⅡB：空間図形

考え方

媒介変数のとり方はいろいろある．相似形において比は変わらないから，大きさを決める変数を 1 つ固定してもよい．

微分法を用いる問題のように見えるが，置き換えると 2 次関数になり，微分するまでもない．

【解答】



正四角錐の底面の一辺の長さを $2a$，底面と側面のなす角を 2α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\right)$ とする．

S の半径は $a\tan\alpha$．

側面の二等辺三角形の高さは $\dfrac{a}{\cos 2\alpha}$．

このとき，

$$(S\text{ の表面積})=4\pi a^2\tan^2\alpha.$$

$$(V\text{ の表面積})=4a^2+4\frac{a^2}{\cos 2\alpha}.$$

$$\therefore\quad R=\frac{\pi\tan^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\cos 2\alpha}}=\frac{\pi t^2}{1+\dfrac{1+t^2}{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}t^2(1-t^2)=\frac{\pi}{2}\left\{-\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}\leqq\frac{\pi}{8}.$$

ただし，$t=\tan\alpha$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<1$．

等号は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときに成り立つ．

よって，R の最大値は $\dfrac{\pi}{8}$．　…(答)

第 6 問

放物線 $y=\dfrac{3}{4}-x^2$ を y 軸のまわりに回転して得られる曲面 K を，原点を通り回転軸と 45° の角をなす平面 H で切る。曲面 K と平面 H で囲まれた立体の体積を求めよ。

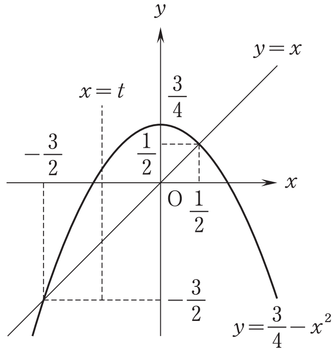
分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，**数学ⅡB**：空間図形

考え方

回転体の方程式を x，y，z で表し，x 軸または z 軸に垂直な断面積を求める．y 軸に垂直な断面をとると積分が難しくなる．

【解答 1】　x 軸に垂直な平面で切って



曲面 K の方程式を x，y，z で表すと（(注 1）参照)，

$$y=\frac{3}{4}-x^2-z^2.\qquad\cdots①$$

平面 H の方程式は

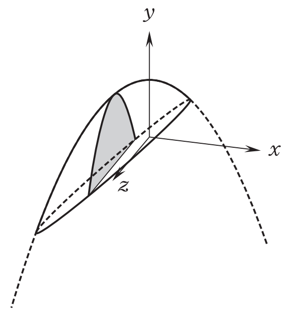
$$y=x.\qquad\cdots②$$

$x=t$ による断面は $t\leqq y\leqq\dfrac{3}{4}-t^2-z^2$．

K と H の交点の z 座標は $z^2+t^2+t-\dfrac{3}{4}=0$ より，

$$z=\pm\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}=\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)}.$$

t の範囲は $-\dfrac{3}{2} \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$.



$x=t$ による断面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}}\left(-z^2-t^2-t+\frac{3}{4}\right)dz$$
$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}\right)^3$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}^{\,3}.$$

求める体積 V は

$$V=\frac{4}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{3}{4}-t-t^2}^{\,3}\,dt=\frac{4}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}^{\,3}\,dt.$$

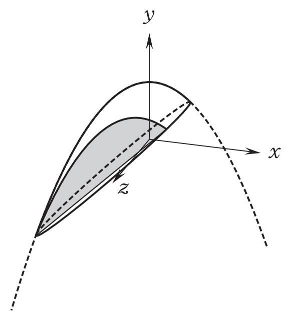
$t+\dfrac{1}{2}=\sin\theta$ とおくと, $\sqrt{1-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2}=\cos\theta$, $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$,

t	$-\frac{3}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$
θ	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$V=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$
$$=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{3}\left[3\theta+2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

…(答)

【解答 2】 z 軸に垂直な平面で切って



曲面 K, 平面 H の方程式 ①, ② は**【解答 1】**と同じ.

$z=t$ による断面は $x \leqq y \leqq \dfrac{3}{4}-x^2-t^2$.

K と H の交点の x 座標は $x^2+x+t^2-\dfrac{3}{4}=0$ より,

$x=\dfrac{-1\pm 2\sqrt{1-t^2}}{2}$. t の範囲は $-1 \leqq t \leqq 1$.

$z=t$ による断面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=\int_{\frac{-1-2\sqrt{1-t^2}}{2}}^{\frac{-1+2\sqrt{1-t^2}}{2}}\left(-x^2-x-t^2+\frac{3}{4}\right)dx=\frac{1}{6}(2\sqrt{1-t^2})^3=\frac{4}{3}\sqrt{1-t^2}^{\,3}.$$

求める体積 V は

$$V=\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}^{\,3}\,dt.$$

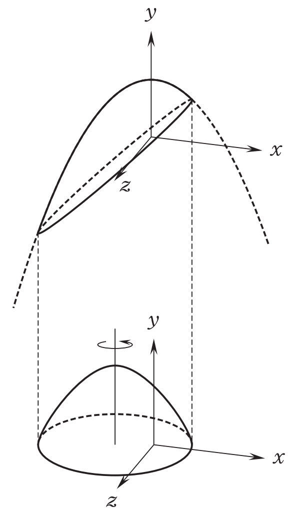
$t=\sin\theta$ とおくと, $\sqrt{1-t^2}=\cos\theta$, $\dfrac{dt}{d\theta}=\cos\theta$,

t	$-1 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$$V=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}.$$

…(答)

【解答 3】 y 座標の差を x, z で表して



$(x,\ z)$ に対する y 座標は $K:y=\frac{3}{4}-x^2-z^2$, $H:y=x$ である．K と H にはさまれた部分の長さは $\frac{3}{4}-x^2-x-z^2=1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-z^2$.

したがって，求める立体の体積は曲面 $K':1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-z^2$ と xz 平面の囲む領域の体積と等しい．K' は xy 平面上の曲線 $y=1-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ を直線 $x=\frac{1}{2}$ のまわりに 1 回転して得られる曲面である．平行移動すると求める体積は $y=1-x^2$ を y 軸のまわりに 1 回転してできる曲面と xz 平面の囲む領域の体積に等しい．

$$\therefore\quad V=\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1(1-y)\,dy=\frac{\pi}{2}. \qquad \cdots(答)$$

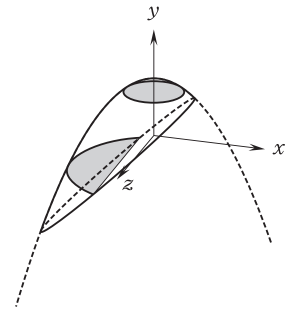
（注 1） 曲面 K の方程式を求めることは本来は高校の範囲外である．

K の方程式が ① で表されることは，次のようにして求めることができる．xy 平面で $y=t$ の点における x 座標は $x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}-t}$．したがって，$y=t$ における K の断面は y 軸中心，半径 $\sqrt{\frac{3}{4}-t}$ の円 $x^2+z^2=\frac{3}{4}-t$ である．したがって，K の方程式は t を y とした

$$y=\frac{3}{4}-x^2-z^2$$

である．結果的に x^2 を x^2+z^2 で置き換えた方程式である．

（注 2） y 軸に垂直な平面 $y=t$ で切った断面は $\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{4}{3}$ では円



$x^2+z^2=\frac{3}{4}-t$.

$-\frac{3}{2}\leqq t<\frac{1}{2}$ では円の一部となる．

その断面積を $S(t)$ とすると

$$\begin{cases}\pi\left(\frac{3}{4}-t\right) & \left(\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{3}{4}\ のとき\right),\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{\frac{3}{4}-t}}^{t}\sqrt{\frac{3}{4}-t-x^2}\,dx & \left(-\frac{3}{2}\leqq t<\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

となる．$-\frac{3}{2}\leqq t<\frac{1}{2}$ での積分は高校の範囲外になってしまう．

1984 年　文科

第 1 問

t を実数の定数として，関数 $f(x)=(x^2-3x+2)(x-t)$ を考える。いま $f'(x)=0$ の 2 個の解を α，β $(\alpha<\beta)$ と書くことにすれば，これらは t の関数とみなすことができる。

t の関数

$$|t-\alpha|+|t-\beta|$$

の $1\leqq t\leqq 3$ の範囲における最大値および最小値を求めよ。

分　野

数学ⅡB：整式の微分，**数学Ⅰ**：2 次方程式の理論

考え方

2 次方程式 $f'(x)=0$ の解と係数の関係から，t と α，β の大小を判定する．

【解答】

$$f(x)=x^3-(t+3)x^2+(3t+2)x-2t.\quad f'(x)=3x^2-2(t+3)x+(3t+2)=3(x-\alpha)(x-\beta).$$

$$f'(t)=3t^2-2(t+3)t+(3t+2)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=3(t-\alpha)(t-\beta).$$

(i)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき，$f'(t)\leqq 0$ だから，$\alpha\leqq t\leqq\beta$.

$$\therefore\quad |t-\alpha|+|t-\beta|=t-\alpha+\beta-t=\beta-\alpha.$$

$f'(x)=0$ を解くと，

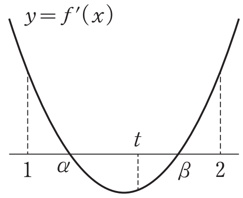
$$x=\frac{t+3\pm\sqrt{(t+3)^2-3(3t+2)}}{3}=\frac{t+3\pm\sqrt{t^2-3t+3}}{3}.$$

$$\therefore\quad \beta-\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{t^2-3t+3}=\frac{2}{3}\sqrt{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

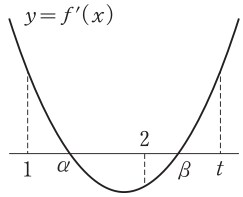
よって，$1\leqq t\leqq 2$ のとき

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqq|t-\alpha|+|t-\beta|\leqq\frac{2}{3}.$$

(i)



(ii)



(ii)　$2<t\leqq 3$ のとき，$f'(t)>0$.

$f'(x)=0$ の解と係数の関係から，$\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}(t+3)$.

$\therefore\quad \dfrac{\alpha+\beta}{2}-t=\dfrac{3-2t}{3}<0$. よって，$\alpha<\beta<t$.

$$\therefore\quad |t-\alpha|+|t-\beta|=2t-\alpha-\beta=\frac{2}{3}(2t-3).$$

よって，$2<t\leqq 3$ のとき

$$\frac{2}{3}<|t-\alpha|+|t-\beta|\leqq 2.$$

以上より $|t-\alpha|+|t-\beta|$ は

$$\begin{cases} t=\dfrac{3}{2}\ \text{のとき}\quad \text{最小値}\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ \text{をとり，} \\ t=3\ \text{のとき}\quad \text{最大値}\ 2\ \text{をとる．} \end{cases}$$

…(答)

第2問

xy 平面上に，海を隔てて2国 A，B がある。

A の領土は不等式

$$x^2+(y-7)^2\leqq 4$$

で表される領域であり，B の領土は不等式

$$y\leqq 0$$

で表される領域であるという。

いま A の領海を次の3条件(1)，(2)，(3)を満たす点P全体の集合と定める

(1) Pは A，B いずれの領土にも含まれない。

(2) Pと A の領土との間の最短距離は4より小さい。

(3) Pと A の領土との間の最短距離は，Pと B の領土との間の最短距離より小さい。

A の領海の面積を求めよ。

分 野

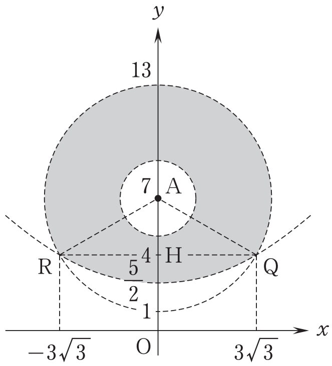
数学Ⅰ：不等式と領域，平面図形，**数学ⅡB**：整式の積分

考え方

(1)，(2)，(3)を不等式で表して図示すればよい．

とくに(3)は直線と円からの距離が等しい点の軌跡が境界になる．

【解答】 条件をきちんと計算して



Pの座標を $(x,\ y)$ とおく．

条件(1)より，$x^2+(y-7)^2>4$，$y>0$. …①

条件(2)より，$x^2+(y-7)^2<(2+4)^2=6^2$. …②

条件(3)より，$\sqrt{x^2+(y-7)^2}-2<y$. …③

③より $y+2>0$ かつ，$(y+2)^2>x^2+(y-7)^2$.

$$\therefore\quad y>\frac{x^2}{18}+\frac{5}{2}. \quad \cdots④$$

①，②，④より A 国の領海は図の網掛部，境界を含まない．

②の境界と④の境界の交点は $(\pm 3\sqrt{3},\ 4)$.

$\mathrm{A}(0,\ 7)$，$\mathrm{Q}(3\sqrt{3},\ 4)$，$\mathrm{R}(-3\sqrt{3},\ 4)$，$\mathrm{H}(0,\ 4)$ とおく．

$\mathrm{AH}=3$，$\mathrm{AQ}=\mathrm{AR}=6$，$\mathrm{HQ}=\mathrm{HR}=3\sqrt{3}$ だから $\angle\mathrm{HAQ}=\angle\mathrm{HAR}=60°$.

$\triangle\mathrm{AQR}=\dfrac{1}{2}\cdot 6^2\sin 120°=9\sqrt{3}$.

折れ線QARより上側の扇形 $\mathrm{AQR}=\dfrac{2}{3}\pi 6^2=24\pi$.

A 国の面積は 4π.

QRより下側の領海の部分の面積は

$$\int_{-3\sqrt{3}}^{3\sqrt{3}}\left(4-\frac{1}{18}x^2-\frac{5}{2}\right)dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{18}(6\sqrt{3})^3=6\sqrt{3}.$$

A 国の領海の面積は

$$24\pi+9\sqrt{3}-4\pi+6\sqrt{3}=20\pi+15\sqrt{3}. \quad \cdots(答)$$

(注) 2国の領海の境界は点 $\mathrm{A}(0,\ 7)$ を焦点とし，$y=0$ から2だけ下の直線 $y=-2$ が準線の放物線である．

第3問

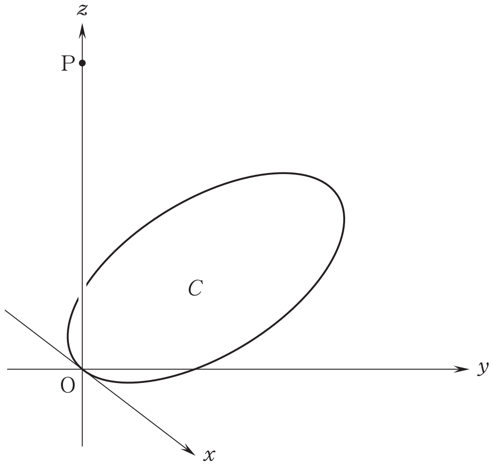
空間内の点の集合

$$\{(x,\ y,\ z)\,|\,0 \leqq y,\ 0 \leqq z\}$$

に含まれ，原点Oにおいてx軸に接し，xy平面と45°の傾きをなす，半径1の円板Cがある。座標が$(0,\ 0,\ 2\sqrt{2})$の位置にある点光源Pにより，xy平面上に投ぜられた円板Cの影をSとする。

ｉ） Sの輪郭を表すxy平面上の曲線の方程式を求めよ。

ⅱ） 円板Cと影Sの間にはさまれ，光の届かない部分のつくる立体の体積を求めよ。



分　野

数学ⅡB：空間図形

考え方

円板Cの中心C_1の座標を求める．円板を含む平面上でC_1からの距離が1の点が円板Cの周上の点．xy平面上のSの周とPを結ぶ直線が円板の周上を通過する条件を求める．

また，円板の周上の点Rを媒介変数で表してPRとxy平面の交点の軌跡の方程式を求めればよい．

初等幾何でもできる．

また影の部分の体積は2つの錐体の体積の差として表される．

ｉ）の【解答1】　影Sの輪郭上の点と点Pを結ぶ直線が円板Cを含む平面と交わる点を求めて

円板Cを含む平面は $y=z$. …①

Cの中心をC_1とすると，$OC_1=1$. Cは原点においてx軸に接するからC_1は $x=0$ 上にある．

よってC_1の座標は$\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Sの輪郭上の点Qの座標を$(X,\ Y,\ 0)$とする．$P(0,\ 0,\ 2\sqrt{2})$だから直線PQの方程式は

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}.\ \text{（ただし分母が0のときは分子も0とする）} \quad \cdots②$$

①と②から $\dfrac{x}{X}=\dfrac{y}{Y}=\dfrac{y-2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$. ①，②の交点Rの座標は

$$\left(\frac{2\sqrt{2}\,X}{Y+2\sqrt{2}},\ \frac{2\sqrt{2}\,Y}{Y+2\sqrt{2}},\ \frac{2\sqrt{2}\,Y}{Y+2\sqrt{2}}\right).$$

C_1とRの距離が1だから

$$\left(\frac{2\sqrt{2}\,X}{Y+2\sqrt{2}}\right)^2+2\left(\frac{2\sqrt{2}\,Y}{Y+2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1.$$

整理して，$X^2+Y^2-2\sqrt{2}\,Y=0$. 求める方程式は

$$x^2+y^2-2\sqrt{2}\,y=0. \qquad \cdots(答)$$

（注１） 軌跡を求めるには，今求めた方程式をみたすすべての点に対して円板の周上の点Rが存在することも確かめる必要がある．本問の場合そこまで求めていない．実際には逆が成り立ち軌跡は円 $x^2+(y-\sqrt{2})^2=2$.

ｉ）の【解答２】 C の周上の点を媒介変数で表して

C の中心は $C_1\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

平面 $y=z$ に平行で互いに垂直な２つの単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)$ をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+\cos\theta\,\overrightarrow{e_1}+\sin\theta\,\overrightarrow{e_2}$$

とかける．Rの座標は

$$\mathrm{R}\left(\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin\theta),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin\theta)\right).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\cos\theta,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin\theta),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sin\theta)-2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta+1,\ \sin\theta-3).$$

直線PRの方程式は

$$\frac{x}{\sqrt{2}\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta+1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sin\theta-3}.$$

$(x,\ y,\ z)=(X,\ Y,\ 0)$ を通るから，

$$\frac{X}{\sqrt{2}\cos\theta}=\frac{Y}{\sin\theta+1}=\frac{-2\sqrt{2}}{\sin\theta-3}.$$

$$X=\frac{4\cos\theta}{3-\sin\theta},\quad Y=\frac{2\sqrt{2}(1+\sin\theta)}{3-\sin\theta}.$$

これから，

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}\,X}{Y+2\sqrt{2}},\quad \sin\theta=\frac{3Y-2\sqrt{2}}{Y+2\sqrt{2}}.$$

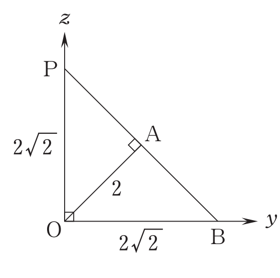
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入して，

$$\frac{8X^2}{(Y+2\sqrt{2})^2}+\frac{(3Y-2\sqrt{2})^2}{(Y+2\sqrt{2})^2}=1.$$

整理して $X^2+Y^2-2\sqrt{2}\,Y=0$．求める方程式は

$$x^2+y^2-2\sqrt{2}\,y=0. \qquad \cdots(答)$$

ｉ）の【解答３】 方べきの定理



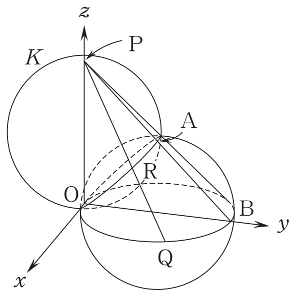
円板 C 上の点Oを一端とする直径の他端をAとすると，$\mathrm{A}(0,\ \sqrt{2},\ \sqrt{2})$．PAと y 軸との交点をBとすると，$\mathrm{B}(0,\ 2\sqrt{2},\ 0)$．円板 C の周の円も C とよぶことにする．

$\angle\mathrm{AOP}=45^\circ$，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OP}=2\sqrt{2}$ から三角形OPAは直角二等辺三角形．

円 C とPを含む球面を K とする．$\angle\mathrm{PAO}$ は直角だから，OPは K の直径．

円 C 上の動点Rをとり，PRと xy 平面の交点をQとすると，OPは K の直径だから $\angle\mathrm{PRO}$ も直角．$\triangle\mathrm{OPR}$ と $\triangle\mathrm{QPO}$ において $\angle\mathrm{P}$ を共有するから，$\triangle\mathrm{OPR}\backsim\triangle\mathrm{QPO}$.

よって OP : PR＝QP : PO. ∴ $OP^2=PR\cdot PQ$（＝一定）.



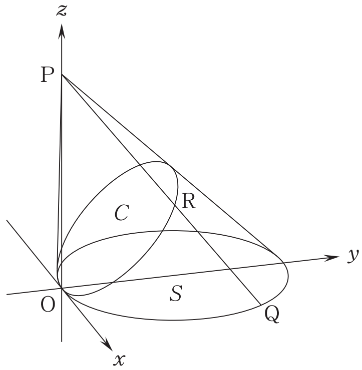
方べきの定理から O, R, Q は円 C を含む一定の球面上にある．この球と xy 平面との交わりは OB を直径とする円である．

よって，影 S の周の方程式は

$$x^2+y(y-2\sqrt{2})=0. \qquad \cdots（答）$$

（ｉ）の解答終り）

ii）の【解答】



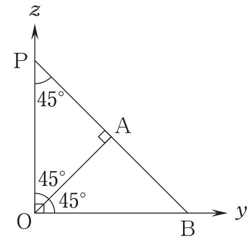
円板 C の面積は π で P と平面 $y=z$ の距離は $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$．よって，$C$ を底面として P を頂点とする斜円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\pi\times 2=\dfrac{2}{3}\pi$.

底面 S の範囲は $x^2+(y-\sqrt{2})^2\leqq 2$ であるから S の面積は 2π. P と xy 平面との距離は $2\sqrt{2}$ だから，S を底面として P を頂点とする斜円錐の体積は $\dfrac{1}{3}\cdot 2\pi\times 2\sqrt{2}=\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\,\pi$.

C の影の部分は S を底面とする斜円錐から C を底面とする斜円錐を除いた部分．その体積は

$$\frac{4}{3}\sqrt{2}\,\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi. \qquad \cdots（答）$$

（注２） $OP=2\sqrt{2}$，$OA=2$ から $PA=2$ だから x 軸方向から見ると図のようになる．したがって $\triangle OAP \backsim \triangle BOP$ で相似比は $\sqrt{2}$ である．したがって２つの斜円錐も相似比 $\sqrt{2}$ で相似である．したがって，



（C を底面とする斜円錐の体積）:（S を底面とする斜円錐の体積）

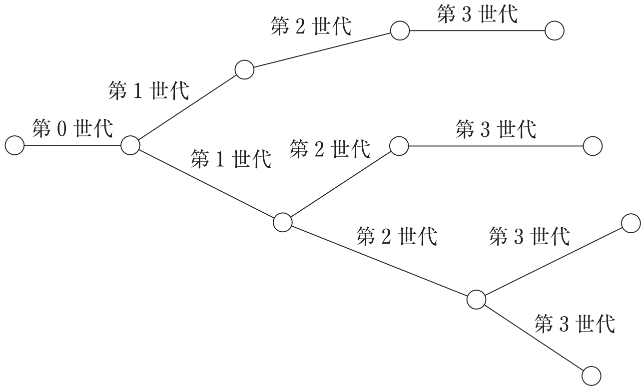
$$=1^3 : (\sqrt{2})^3=1 : 2\sqrt{2}.$$

第 4 問

各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある。

いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を，$P_n(m)$ とかくことにしよう。

n を自然数とするとき，$P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を求めよ。



分　野

数学Ⅰ：確率，**数学ⅡB**：数列

考え方

$P_n(1)=p^n$ は自明．

$P_n(2)$ を出すには第 $(k-1)$ 世代まで個体が 1 個で，第 k 世代から個体が 2 個になり以後増えない場合を考えればよい．

$P_n(3)$ も同様に考えられる．

また，漸化式を立ててもよい．

【解答 1】 $P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を順次計算して

(i) $P_n(1)$ は第 n 世代までに個体が増加しない確率だから，$P_n(1)=p^n$. …(答)

(ii) $P_n(2)$ を求める．

第 $(k-1)$ 世代まで個体の数が 1 で，第 k 世代から第 n 世代まで個体の数が 2 である確率は

$$p^{k-1}(1-p)(p^2)^{n-k}=p^{2n-k-1}(1-p).$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，

$$\begin{aligned}P_n(2)&=\sum_{k=1}^{n}p^{2n-k-1}(1-p)=p^{n-1}(1-p)\sum_{k=1}^{n}p^{n-k}\\&=p^{n-1}(1-p)(p^{n-1}+p^{n-2}+p^{n-3}+\cdots+p+1)=p^{n-1}(1-p^n).\end{aligned}$$ …(答)

(iii) $P_n(3)$ を求める．

第 $(l-1)$ 世代のとき個体の数が 2 で，第 l 世代から第 n 世代まで個体の数が 3 である確率は

$$p^{l-2}(1-p^{l-1})\{2p(1-p)\}(p^3)^{n-l}=2(p^{3n-2l-1}-p^{3n-l-2})(1-p).$$

よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}P_n(3)&=\sum_{l=2}^{n}2(p^{3n-2l-1}-p^{3n-l-2})(1-p)=2p^{n-1}(1-p)\sum_{l=2}^{n}p^{2n-2l}-2p^{2n-2}(1-p)\sum_{l=2}^{n}p^{n-l}\\&=2p^{n-1}(1-p)(p^{2n-4}+p^{2n-6}+p^{2n-8}+\cdots+p^2+1)-2p^{2n-2}(1-p)(p^{n-2}+p^{n-3}+p^{n-4}+\cdots+p+1)\\&=2p^{n-1}\frac{1-p^{2n-2}}{1+p}-2p^{2n-2}(1-p^{n-1})=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}.\end{aligned}$$

$n=1$ のとき，$P_1(3)=0$ である．

まとめて，

$$P_n(3)=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p} \qquad \cdots(\text{答})$$

（注）　ただし，$p=0$ のときも $p^0=1$ と考える．また，このようにとると，$p=0$ のときも含めて，

$$P_1(3)=0,\ P_1(2)=1-p$$

となり，合理的に理解できる．

【解答 2】　漸化式を立てて考える

個体が 1 個の場合次世代では確率 p で 1 個，確率 $(1-p)$ で 2 個，個体が 2 個の場合次世代では確率 p^2 で 2 個，確率 $2p(1-p)$ で 3 個，…，個体が 3 個の場合次世代では確率 p^3 で 3 個，….

よって，$\{P_n(1)\}$，$\{P_n(2)\}$，$\{P_n(3)\}$ について次の漸化式が成り立つ．

$$\begin{cases} P_{n+1}(1)=pP_n(1) & \cdots① \\ P_{n+1}(2)=(1-p)P_n(1)+p^2P_n(2) & \cdots② \\ P_{n+1}(3)=2p(1-p)P_n(2)+p^3P_n(3) & \cdots③ \end{cases}$$

また，$P_0(1)=1$，$P_0(2)=P_0(3)=0$.

(i)　① より $P_n(1)=p^nP_0(1)=p^n$. $\cdots$(答)

(ii)　② と(i)の結果から

$$P_{n+1}(2)=p^2P_n(2)+p^n(1-p).$$

$p\neq 0$ のとき，両辺を p^{2n+2} で割る．

$$\frac{P_{n+1}(2)}{p^{2(n+1)}}=\frac{P_n(2)}{p^{2n}}+\frac{1-p}{p^{n+2}}.$$

$$\therefore\quad \frac{P_{n+1}(2)}{p^{2(n+1)}}-\frac{1}{p^{n+2}}=\frac{P_n(2)}{p^{2n}}-\frac{1}{p^{n+1}}=\frac{P_{n-1}(2)}{p^{2(n-1)}}-\frac{1}{p^n}=\cdots=P_0(2)-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p}.$$

$$\therefore\quad P_n(2)=p^{n-1}-p^{2n-1}=p^{n-1}(1-p^n).$$

$p=0$ のときもあわせて

$$P_n(2)=\begin{cases} p^{n-1}(1-p^n) & (0<p\leqq 1 \text{ のとき}), \\ 1\ (n=1),\ 0\ (n=0,\ n\geqq 2) & (p=0 \text{ のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(iii)　$p\neq 0$ のとき，③ と(ii)の結果から

$$P_{n+1}(3)=2p^n(1-p)(1-p^n)+p^3P_n(3).$$

両辺を p^{3n+3} で割って

$$\frac{P_{n+1}(3)}{p^{3(n+1)}}=\frac{P_n(3)}{p^{3n}}+\frac{2(1-p)(1-p^n)}{p^{2n+3}}=\frac{P_n(3)}{p^{3n}}+\frac{2(1-p)}{p^{2n+3}}-\frac{2(1-p)}{p^{n+3}}.$$

数列 $\left\{\dfrac{P_n(3)}{p^{3n}}\right\}$ の階差数列が $\left\{\dfrac{2(1-p)}{p^{2n+3}}-\dfrac{2(1-p)}{p^{n+3}}\right\}$ だから

$$\begin{aligned}\frac{P_n(3)}{p^{3n}}&=P_0(3)+\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{2(1-p)}{p^{2k+3}}-\frac{2(1-p)}{p^{k+3}}\right\}\\ &=\frac{2(1-p)}{p^3}\frac{\dfrac{1}{p^{2n}}-1}{\dfrac{1}{p^2}-1}-\frac{2(1-p)}{p^3}\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{\dfrac{1}{p}-1}\\ &=\frac{2(1-p^{2n})}{p^{2n+1}(1+p)}-\frac{2(1-p^n)}{p^{n+2}}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad P_n(3)=\frac{2p^{n-1}(1-p^{2n})}{1+p}-2p^{2n-2}(1-p^n)=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}.$$

$p=0$ のときもあわせて

$$P_n(3)=\begin{cases} \dfrac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p} & (0<p\leqq 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (p=0 \text{ のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

1984 年　理科

第 1 問

（文科　第 3 問と同じ）

第 2 問

xy 平面において，直線 $x=0$ を L とし，曲線 $y=\log x$ を C とする。さらに，L 上，または C 上，または L と C との間にはさまれた部分にある点全体の集合を A とする。

A に含まれ，直線 L に接し，かつ曲線 C と点 $(t, \log t)$ $(0<t)$ において共通の接線をもつ円の中心を P_t とする。

P_t の x 座標，y 座標を t の関数として

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

と表したとき，次の極限値はどのような数となるか。

i）$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{g(t)}$　　　ii）$\displaystyle\lim_{t\to +\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$

分　野

数学Ⅲ：関数の極限，微分法，**数学Ⅰ**：平面図形

考え方

接点から法線を立て，接点との距離が x 座標に等しい点を求めれば，$f(t)$，$g(t)$ を求めることができる．

$f(t)$，$g(t)$ が求められれば極限を求めることは難しくない．

結果は直観と一致している．グラフをよく考えると，ほとんど計算なしに結果を得ることができる．

【解答】　$f(t)$，$g(t)$ を計算して

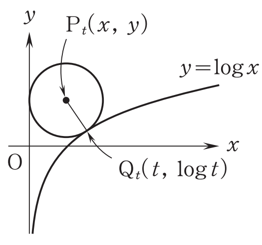
$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ だから $Q_t(t, \log t)$ における C の法線の方程式は

$$y=-t(x-t)+\log t. \quad \cdots①$$

$P_t(f(t), g(t))$ は ① 上にあり，かつ C の上側にあり，① の傾きは負だから，$f(t)<t$．よって，

$$Q_tP_t=\sqrt{t^2+1}\{t-f(t)\}.$$

また，P_t と y 軸の距離は $f(t)$ に等しいから



$$f(t)=\sqrt{t^2+1}\{t-f(t)\}.\quad \therefore\quad f(t)=\frac{t\sqrt{t^2+1}}{1+\sqrt{t^2+1}}. \quad \cdots②$$

② を ① に代入して

$$g(t)=\frac{t^2}{1+\sqrt{t^2+1}}+\log t. \quad \cdots③$$

②，③ から

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{t\sqrt{t^2+1}}{t^2+(1+\sqrt{t^2+1})\log t}.$$

i) $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{t\sqrt{t^2+1}}{t^2+(1+\sqrt{t^2+1})\log t}=0.$ …(答)

ii) $$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\sqrt{t^2+1}}{t^2+(1+\sqrt{t^2+1})\log t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{1+\left(\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\right)\frac{\log t}{t}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+0}}{1+(0+\sqrt{1+0})0}=1.$$ …(答)

なぜなら $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0.$

(注) ii) を求めるとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ を使ったが，これをここで証明しなくても減点されないだろう．

証明は以下のようである．

$t=e^u$ とおくと

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=\lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}.$$

$u>0$ のとき

$$e^u>1+u+\frac{u^2}{2}>\frac{u^2}{2}.\quad \therefore\quad 0<\frac{u}{e^u}<\frac{2}{u}.\quad \lim_{u\to\infty}\frac{2}{u}=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{u\to\infty}\frac{u}{e^u}=\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0.$$ (証明終り)

【別解 1】 図形的直観による方法（結果を予見する考え方）

i) $\displaystyle\frac{d}{dt}\log t=\frac{1}{t}$．$(t,\ \log t)$ における法線の傾きは $-t$ (<0) であるから $0<f(t)<t.$

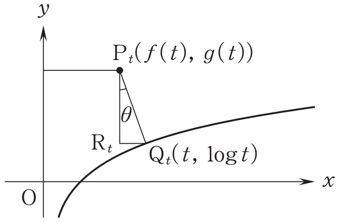
$g(t)$ は法線 $y=-t(x-t)+\log t$ の y 切片 $t^2+\log t$ より小さい．t が 0 に十分近いとき，$g(t)<\log t+t^2<0.$

$$\therefore\quad 0<\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|<\left|\frac{t}{\log t+t^2}\right|.$$

$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{t}{\log t+t^2}=0$，ハサミウチの原理により，

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{g(t)}=0.$$ …(答)

ii) $Q_t(t,\ \log t)$，$R_t(f(t),\ \log t)$，$\angle R_tP_tQ_t=\theta$ とおく．$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$，



$P_tQ_t=f(t)$ から，

$$g(t)=\log t+f(t)\cos\theta=\log t+f(t)\times\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

ここで，$f(t)>\dfrac{t}{2}$ を考慮して，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{f(t)}=\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{\log t}{f(t)}+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right\}.$$

$\dfrac{\log t}{\frac{t}{2}}\to 0$，$\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\to 1$ $(t\to\infty)$ であるから

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{f(t)}=1\iff\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1.$$ …(答)

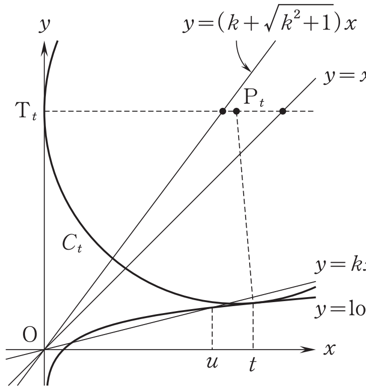
ii）の【別解２】

$y=\log x$ 上で $0<u<t$ となる点 $(u, \log u)$ と原点を通る直線の傾き $\dfrac{\log u}{u}=k$ とおく．

u が十分に大きいとき，$y=kx$ と $y=\log x$ は２点で交わり，２点のうち x 座標が大きい方が u となる．

$u<t$ だから，$0<\log t<kt$ となる．

したがって，P_t を中心とし，y 軸，C と接する円を C_t とすると，C_t は，$y=kx$ と交わり，x 軸とは交わらない．C_t と y 軸の接点を T_t とするとき，$y=kx$ に接し，y 軸と T_t で接する円の中心を，x 軸に接し，y 軸と T_t で接する円の中心と比較することにより，点 $\mathrm{P}_t(f(t), g(t))$ は x 軸，y 軸のなす角の二等分線より上（左），y 軸と $y=kx$ のなす角の二等分線より下（右）にある．



y 軸と $y=kx$ の二等分線の傾きは $k+\sqrt{k^2+1}$ である．

原点と点 $(f(t), g(t))$ を通る直線の傾きは $\dfrac{g(t)}{f(t)}$ だから，

$$\frac{1}{k+\sqrt{k^2+1}}<\frac{f(t)}{g(t)}<1.$$

$u\to\infty$ のとき，$k=\dfrac{\log u}{u}\to 0$．よって，$\dfrac{1}{k+\sqrt{k^2+1}}\to 1$．

よって，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1. \qquad \cdots(答)$$

第３問

２以上の自然数 k に対して

$$f_k(x)=x^k-kx+k-1$$

とおく。このとき，次のことを証明せよ。

i）n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるためには，$g(x)$ が定数 $a_2, \cdots, a_n$ を用いて

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

ii）n 次多項式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるためには，$g(x)$ が関係式

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$$

をみたす定数 $a_2, \cdots, a_n$ を用いて

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$$

の形に表されることが必要十分である。

分　野

数学Ⅰ：整式の割り算，**数学ⅡB**：整式の微分，数学的帰納法

考え方

$g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるための必要十分条件は $g(1)=g'(1)=0$ である．$g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるための必要十分条件は $g(1)=g'(1)=g''(1)=0$ である．このことを使って証明する．

【解答】

x の整式 $F(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるための必要十分条件は $F(1)=F'(1)=0$ である．$F(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるための必要十分条件は $F(1)=F'(1)=F''(1)=0$ である．このことを既知として ｉ)，ⅱ）の証明する．

ｉ） $f_k(x)=x^k-kx+k-1$，$f_k'(x)=kx^{k-1}-k$，$f_k''(x)=k(k-1)x^{k-2}$．

よって，

$$f_k(1)=0,\quad f_k'(1)=0,\quad f_k''(1)=k(k-1).$$

したがって，$f_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる．したがって，$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れる．

逆に $(x-1)^2$ で割り切れる n 次の整式 $G_n(x)$ は

$$G_n(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x) \qquad \cdots(*)$$

の形で表されることを数学的帰納法で証明する．ただし $n\geqq 2$ とする．

(Ⅰ) $n=2$ のとき，$G_2(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとすると，$G_2(x)=a_2(x-1)^2$ とかける．
$f_2(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$ だから $G_2(x)=a_2f_2(x)$ であり，(*)と表される．

(Ⅱ) $n=m$ のとき，m 次以下の整式 $G_m(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，(*)が成り立つとすると，$G_m(x)=\sum_{k=2}^{m}a_kf_k(x)$ の形で表される．

$m+1$ 次式 $G_{m+1}(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとするとき，$G_{m+1}(x)$ の x^{m+1} の係数を a_{m+1} とし，$G_{m+1}(x)=a_{m+1}x^{m+1}+a_m'x^m+\cdots+a_0'$ とすると，

$G_{m+1}(x)-a_{m+1}f_{m+1}(x)=(a_{m+1}x^{m+1}+a_m'x^m+\cdots+a_0')-a_{m+1}\{x^{m+1}-(m+1)x+m\}$

は m 次式で，$G_{m+1}(x)$，$f_{m+1}(x)$ は共に $(x-1)^2$ で割り切れるから，左辺は $(x-1)^2$ で割り切れる m 次以下の整式である．よって，

$$G_{m+1}(x)-a_{m+1}f_{m+1}(x)=\sum_{k=2}^{m}a_kf_k(x)$$

とかける．したがって，

$$G_{m+1}(x)=\sum_{k=2}^{m+1}a_kf_k(x)$$

の形で表すことができる．

以上から任意の 2 以上の整数 n について(*)が成り立つ．よって，整式 $g(x)$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき，$g(x)$ は $\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ の形で表される．　（証明終り）

ⅱ） $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れる必要十分条件は $g(1)=g'(1)=g''(1)=0$．

x の n 次式 $g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるとき，当然 $(x-1)^2$ で割り切れるから ｉ）より

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$$

とかける．このとき，

$$g''(1)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k''(1)=\sum_{k=2}^{n}a_kk(k-1)=0.$$

逆に，$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$，$\sum_{k=2}^{n}a_kk(k-1)=0$ のとき，

$$g(1)=g'(1)=g''(1)=0.$$

よって，$g(x)$ は $(x-1)^3$ で割り切れる．

以上から，$g(x)$ が $(x-1)^3$ で割り切れるための必要十分条件は

$$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x) \text{ かつ } \sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k=0$$

である．（証明終り）

（注） $F(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる条件は，$F(a)=F'(a)=0$，$(x-a)^3$ で割り切れる条件は，$F(a)=F'(a)=F''(a)=0$ である．このことは次のように示せる．

$F(x)$ を $(x-a)^3$ で割った商を $Q(x)$，余りを $p(x-a)^2+q(x-a)+r$ とおくと，

$$F(x)=(x-a)^3Q(x)+p(x-a)^2+q(x-a)+r.$$

よって，

$$F'(x)=(x-a)^2\{3Q(x)+(x-a)Q'(x)\}+2p(x-a)+q,$$

$$F''(x)=(x-a)\{6Q(x)+6(x-a)Q'(x)+(x-a)^2Q''(x)\}+2p.$$

$$\therefore \quad F(a)=r, \quad F'(a)=q, \quad F''(a)=2p.$$

$F(x)$ が $(x-a)^2$ で割り切れる条件は $q=r=0$．よって，$F(a)=F'(a)=0$．

$F(x)$ が $(x-a)^3$ で割り切れる条件は $p=q=r=0$．よって，$F(a)=F'(a)=F''(a)=0$．

同様に $F(x)$ が $(x-a)^n$ で割り切れる条件は

$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0.$$

ただし，$F^{(n)}(x)$ は $F(x)$ の n 次導関数である．

第4問

空間内に，3点

$$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{Q}\left(1,\ -\frac{1}{2},\ 0\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

を頂点とする正3角形の板 S がある。

S を z 軸のまわりに1回転させたとき，S が通過する点全体のつくる立体の体積を求めよ。

分野

数学ⅡB：空間図形，整式の積分，体積

考え方

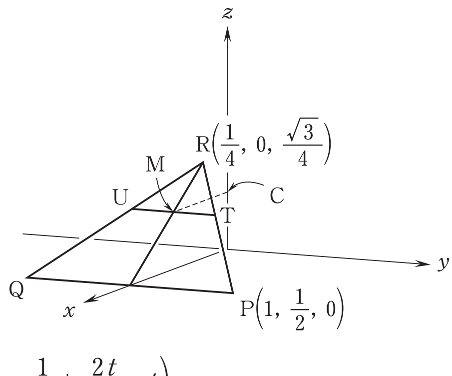
回転軸（z軸）に垂直な平面 $z=t$ で S を切った切り口は線分になる．回転軸と $z=t$ との交点 $(0,\ 0,\ t)$ からその線分までの距離の最大値と最小値を求め切り口の面積を出し，それを積分する．

【解答】 平面 $z=t$ による断面を考える

直線PR，QRの方程式は

$$\mathrm{PR}:\frac{x-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{4}},$$

$$\mathrm{QR}:\frac{x-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{4}}.$$



$z=t$ との交点をそれぞれT，Uとおくと，

$$\mathrm{T}\left(1-\sqrt{3}\,t,\ \frac{1}{2}-\frac{2t}{\sqrt{3}},\ t\right),\quad \mathrm{U}\left(1-\sqrt{3}\,t,\ -\frac{1}{2}+\frac{2t}{\sqrt{3}},\ t\right).$$

$z=t$ と z 軸の交点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ t)$ から線分 TU までの距離が最大なのは T および U，最小なのは TU の中点 $\mathrm{M}(1-\sqrt{3}\,t,\ 0,\ t)$.

$$\mathrm{CT}^2=\mathrm{CU}^2=(1-\sqrt{3}\,t)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$\mathrm{CM}=1-\sqrt{3}\,t.$$

求める立体の切り口は半径 CT の円板から半径 CM の円板を除いた部分．その面積は

$$\pi\mathrm{CT}^2-\pi\mathrm{CM}^2=\pi\left\{(1-\sqrt{3}\,t)^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}-\pi(1-\sqrt{3}\,t)^2=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

求める体積は

$$\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2dt=\frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2dt=\frac{4}{3}\pi\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{48}.\qquad\cdots(答)$$

第 5 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 6 問

xy 平面において，不等式 $x^2\leqq y$ の表す領域を D とし，不等式 $(x-4)^2\leqq y$ の表す領域を E とする。

このとき，次の条件 (*) を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 全体の集合を求め，これを図示せよ。

(*) $\mathrm{P}(a,\ b)$ に関して D と対称な領域を U とするとき，

$$D\cap U\neq\emptyset,\quad E\cap U\neq\emptyset,\quad D\cap E\cap U=\emptyset$$

が同時に成り立つ。

ただし $\emptyset$ は空集合を表すものとする。

分　野

数学 I ：不等式と領域

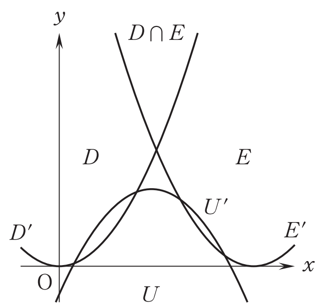
考え方

D，E の境界は下に凸な放物線で U の境界は上に凸な放物線.

$D\cap U\neq\emptyset$ は D と U の境界は共有点をもつことを意味し，$E\cap U\neq\emptyset$ も E と U の境界は共有点をもつことを意味する.

$D\cap E\cap U=\emptyset$ についてはこれらの共有点の位置関係を考える.

【解答】



$\mathrm{P}(a,\ b)$ について $y\geqq x^2$ と点対称な領域は $2b-y\geqq(2a-x)^2$ つまり $y\leqq-(x-2a)^2+2b$. これが U を表す不等式である.

D，E，U の境界を表す曲線を D'，E'，U' とすると，

$$D':y=x^2,\quad E':y=(x-4)^2,\quad U':y=-(x-2a)^2+2b.$$

D'，E' は下に凸な放物線で，U' は上に凸な放物線.

$D\cap U\neq\emptyset$ より，D' と U' は共有点をもつ．よって，

$$x^2=-(x-2a)^2+2b.\ つまり\ x^2-2ax+2a^2-b=0\qquad\cdots①$$

は実数解をもつ．

$$\therefore\quad a^2-(2a^2-b)=-a^2+b\geqq 0.\quad \therefore\quad b\geqq a^2. \qquad \cdots②$$

$E\cap U\neq\emptyset$ より，E' と U' は共有点をもつ．よって，

$$(x-4)^2=-(x-2a)^2+2b.\ \text{つまり}\ x^2-2(a+2)x+8+2a^2-b=0 \qquad \cdots③$$

は実数解をもつ．

$$\therefore\quad (a+2)^2-(8+2a^2-b)=-a^2+4a-4+b\geqq 0.\quad \therefore\quad b\geqq(a-2)^2. \qquad \cdots④$$

$D\cap E\cap U=\emptyset$ だから，D'，U' の交点および E'，U' の交点は $D\cap E$ 部分にはない．

D' と E' の交点の x 座標は 2 だから，① の解は $x<2$ の範囲にあり，③ の解は $x>2$ の範囲にある．

$f(x)=x^2-2ax+2a^2-b$，$g(x)=x^2-2(a+2)x+8+2a^2-b$ とおくと，

① の解が $x<2$ にある条件は ② の他，

$$a<2,\quad f(2)=2a^2-4a+4-b>0.$$

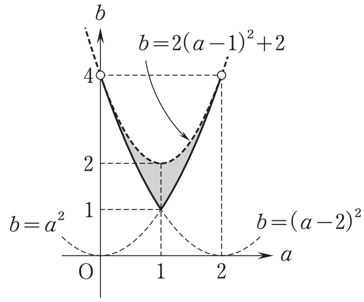
③ の解が $x>2$ にある条件は ④ の他，

$$a+2>2,\quad g(2)=2a^2-4a+4-b>0.$$

以上から

$$\begin{cases} b\geqq a^2, \\ b\geqq(a-2)^2, \\ 0<a<2, \\ b<2a^2-4a+4=2(a-1)^2+2. \end{cases}$$

これらをみたす $(a,\ b)$ を図示すると右図網掛部，境界は実線部を含み，破線部および白丸を除く．



別解があることはよくないこと？

大学の入試問題について評価するプロジェクトに関ったことがあります．評価基準は他教科と共通なシートに書き込む形態でした．そのなかに「問題に不備はないか，別解はないか」というような項目がありました．

数学に長年関ってきた私には「不備」とういネガティブな項目と「別解」というポジティブな項目が併記されていることには強い違和感を感じました．数学では別解がある問題は「よい問題」と理解されています．少なくとも私はそう理解しています．しかし，ここでは別解がある問題は「よくない問題」のように扱われています．

どうも他の教科では問題に別の解釈が可能な問題を「別解がある問題」と言っているようです．東大数学でも例えば 1981 年理科第 2 問のように同じ問題文から異なる解釈が可能な問題もありました．しかし，このような問題において異なる解釈から生じる異なる解答を「別解」とは言いません．上記の問題の**【解答】**で，私は**【解釈 1】**,**【解釈 2】**としました．勿論解釈が異なれば結論も異なります．このような問題を数学では「不備」と言います．

数学でいう「別解」は同じ結論を出すための異なる手法を意味し，決して問題の別解釈を意味しません．

数学の解法にはいろいろな方法があることが多いです．図形問題などでは初等幾何的な方法，座標幾何的な方法，ベクトルを用いる方法など同じ問題でも異なる手段や考え方で解けることが多いです．このように別解がある問題を解くと，異なる手法の相互関係がよくわかり物事が“立体的に”理解ができるようになるので私は「よい問題」だと思っています．

ときどき「数学は結論が 1 つだから面白くない」という人もいます．こういう人は結論しか意味がないと思っている人だと思います．その立場に立つと，別解などはあり得ないことになります．また「最も良い解答はどれですか，1 つに絞ってください」などという人がいます．いくつも解答を並べられると訳がわからなくなるのかもしれません．こういう人の中には，1 つの解法だけ“憶えて”おけば数学の学力がアップすると考える人がいると思います．しかし，同じ問題に再び出会うことはそれほど多くないように思います．また，入試の現場で解答の他別解を書く余裕などないはずですし，意味がないことです．そう考えると上で言っている主張にも一理あるように見えます．

確かに，色々な解法の中には上手下手はあります．解答へより近道な解法と遠回りな解法があります．近道でも気づきにくいこともあります．一度解いてから気付く解法もあります．知識を要する解法もあります．教えるときにはより近道に近い解法を教えますが，気づきやすい方法や，知識を要しない解法を優先します．数学が得意でない生徒を相手にしているときは私もこのような 1 つの解法だけを懇切丁寧に教えるようにしています．

でも，一番よい方法はあなたが今気づいている方法あるいはそれに近い方法を完遂することだと思います．その上で，より良い方法を考えることだと思います．

他人がやった方法をうわべだけマネするのは最も悪い勉強方法だと思います．少しでも考えながら理解しようと努めるべきです．考えない人にとってはどのような解答も勉強にはならないはずです．

数学の面白さは 1 つの問題に色々な解法があることだと思います．「数学の本質はその自由さにある」とは数学者ゲオルク・カントールの言葉です．

この本でも別解を多く載せています．それは 1 つの問題をいろいろな角度から見ることが大切だと考えるからです．

東京大学　数学入試問題 72 年　上巻
[1949〜2020 年入試全問題]

上巻・下巻・CD-ROM 三冊セット価格
外箱に表示してあります（分売不可）
発　行　2020 年 9 月 10 日
著　者　大原　仁
発行者　両角恭洋

発行所　株式会社　河合出版
［東　京］　〒 151-0053
東京都渋谷区代々木 1-21-10
TEL　03-5354-8241
FAX　03-5354-8781
［名古屋］　〒 461-0004
名古屋市東区葵 3-24-2
TEL　052-930-6310
FAX　052-936-6335

印刷所　名鉄局印刷株式会社
製本所　三省堂印刷株式会社

〈上巻 664pp.〉
ISBN978-4-7772-2344-2

装丁　三部八十彦

東京大学数学入試問題一覧表（1949〜1984 年）

上巻収録の 36 年分を降順に並べてあります．年度欄の年度をクリックするとその年度の問題解答が表示されます．
科目は当時の科目を表しています
指導要領変更の年の科目は**太字**にしてあります．
移行年度の問題の科目で旧課程別出題の場合は科目に旧をつけてあります．
移行年度の問題の科目は共通出題問題の場合は旧課程分野に［　］をつけてあります．科目名が変らない場合は［　］なしにしています．

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1984	文	1	整式の微分，2 次方程式の理論	数ⅡB・数Ⅰ	3 次式 $f(x)$．$f'(x)$ の 2 解 α，β に対し $\lvert t-\alpha\rvert+\lvert t-\beta\rvert$ の最大値および最小値を求める	標準
		2	不等式と領域，平面図形，整式の積分	数Ⅰ・数ⅡB	円で表された国 A と $y\leqq 0$ で表された国 B．A 国の領海の面積	標準
		3	空間図形	数ⅡB	点光源から斜め円板の影において，影の部分の立体領域の体積を求める	やや難
		4	確率，数列	数Ⅰ・数ⅡB	1 個体から 1 個または 2 個の子孫を作る細胞の n 世代後に個体数が 1，2，3 である確率	やや難
	理	1	**文科第 3 問**と同じ			やや難
		2	関数の極限，微分法，平面図形	数Ⅲ・数Ⅰ	$y=\log x$ と y 軸に接する円の中心の $\dfrac{x}{y}$ の極限．$t\to 0$，$t\to\infty$	標準
		3	整式の割り算，整式の微分，数学的帰納法	数Ⅰ・数ⅡB	$f_k(x)=x^k-kx+k-1$．$g(x)=\sum_{k=2}^{n}a_kf_k(x)$ が $(x-1)^2$，$(x-1)^3$ で割り切れる条件	やや難
		4	空間図形，整式の積分，体積	数ⅡB	空間の三角形板を z 軸回転して通過する部分の立体の体積	標準
		5	**文科第 4 問**と同じ			やや難
		6	不等式と領域	数Ⅰ	3 つの放物線を境界とする領域 D，E，U について，$D\cap U\neq\emptyset$，$E\cap U\neq\emptyset$，$D\cap E\cap U=\emptyset$ となる条件	やや難
1983	文	1	一次変換	数ⅡB	相似変換によって，$(1,\sqrt{3})\to(-2,2\sqrt{3})$ となる行列 A を求める	標準
		2	空間図形	数ⅡB	最も急な勾配が $\dfrac{1}{3}$，南北方向の勾配が $\dfrac{1}{5}$．東西の勾配を求める	やや難
		3	整式の積分	数ⅡB	3 次関数 $f(x)$ の，接線とその交点における接線と囲む面積の比	標準
		4	確率，数列	数Ⅰ	赤白の旗を確率 p で隣に合わせてあげる．n 人目が同じ旗を揚げる確率	標準
	理	1	**文科第 1 問**と同じ			標準
		2	数列，数学的帰納法，整数	数ⅡB・数Ⅰ	a_n は a_1，$\cdots$，a_{n-1} から重複なく取り出した数の和のいずれとも異なる．そのような最小の自然数 a_n	やや難
		3	空間図形，ベクトル，内積	数ⅡB	平面上の円とその平面と 45° をなす直線上の点の距離の最小値	標準
		4	図形と方程式	数Ⅰ	放物線内の正方形の中心の y 座標の最小値（正方形の辺は座標軸と平行か 45°）	標準
		5	空間図形	数ⅡB	正四角錐と内接球の表面積比の最大値	標準
		6	積分法，体積，空間図形	数Ⅲ・数ⅡB	回転放物面と斜め平面の囲む部分の体積	やや難
1982	文	1	平面図形，面積，三角比	数Ⅰ	折れ線 APQRB の中間点 Q の存在範囲	やや難
		2	平面座標，三角関数，加法定理	数Ⅰ	放物線上の x 座標の差が一定の 3 点のなす角の最大値	やや難
		3	2 次方程式の理論，近似値	数Ⅰ	整数係数の複 2 次方程式の 4 解の近似値からもとの解を求める	難
		4	一次変換，数列	数ⅡB	$\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$ または $B\overrightarrow{x_n}$ で決まる点列の個数	やや難
	理	1	一次変換	数ⅡB	原点以外の不動点があれば原点を通らない不動直線があることの証明	やや難
		2	空間図形，整式の積分，体積	数ⅡB	単位球に辺で接する正四面体の辺長．球の四面体外の体積	標準
		3	三角関数，図形と方程式	数Ⅰ	単位円周上の A と二等辺三角形 AOB についての問題	標準
		4	微分法，速度・加速度	数Ⅲ	$y=\sin x$ 上を等速運動する点 P の加速度の最大値	標準
		5	整式の積分，体積	数ⅡB	6 つの不等式で表される空間図形の体積	標準
		6	確率，数列，漸化式，数列の極限	数Ⅰ・数ⅡB・数Ⅲ	サイコロを 3 軸のどれかに対して 90° 回転する．1 が上の確率 p_n とその極限値	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1981	文	1	行列	数ⅡB	$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$．$(a,\ 0)$ と $(x_n,\ y_n)$ の距離が単調増加となる a の範囲	やや難
		2	確率，期待値	数Ⅰ	硬貨を投げ表の枚数が多いほうが相手の硬貨もらう．どちらが有利か	標準
		3	相似，整式の微分，整式の積分	数Ⅰ・数ⅡB	2つの放物線の共通接線と放物線の囲む部分の面積比	標準
		4	空間図形，二次曲線，双曲線	数ⅡB	空間の双曲線上の点P．OPと z 軸のなす角が α となるPの個数を求める	やや難
	理	1	集合と個数	数Ⅰ	n 個から2個ずつ k 組取り出す場合の数 $f(n,\ k)=f(n,\ 1)$ となる $n,\ k$	やや難
		2	確率	数Ⅰ	正六角形の頂点から重複を許して三角形を作る面積の期待値（題意曖昧）	標準
		3	整式の微分，積分法	数ⅡB・数Ⅲ	$y=x^2$ の法線上の点Pの軌跡と $y=x^2$ の囲む面積	やや難
		4	文科第4問と同じ			やや難
		5	立体図形，整式の微分，数列の極限	数ⅡB・数Ⅲ	展開図が半径1の円に内接する正 n 角錐の体積の最大値の極限	標準
		6	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	3次関数 $f(x)$ で $f(\pm1)=0,\ f\geqq1-\|x\|(\|x\|\leqq1)$ をみたすもののうち $\int_{-1}^{1}\{f'(x)-x\}^2dx$ を最小にするもの	やや難
1980	文	1	平面図形，面積	数Ⅰ	円を八等分してできる井桁．中央正方形と他の面積	標準
		2	立体図形，整式の微分	数ⅡB	正四角錐台の体積の最大・最小．数値計算が面倒	標準
		3	整数	数Ⅰ	4つの不等式と1つの等式をみたす非負整数 $n,\ a,\ b,\ c,\ d$ を求める	やや難
		4	行列	数ⅡB	$A^2=-I$ となる行列．実質的に複素平面上の軌跡の問題	標準
	理	1	平面図形，ベクトル，内積	数Ⅰ	正三角形の頂点と対辺の内分点を結ぶ線分でできる正三角形の面積が $\frac{1}{2}$ になるような内分比	標準
		2	空間図形	数ⅡB	球面と円錐面の交線の長さと，球面と平面との交線の長さの和	標準
		3	行列	数ⅡB	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ のとき，$\frac{p_n}{q_n}$ のとる値の個数	標準
		4	三角関数，倍角公式，整式の微分	数ⅡB	$(\sin t+\cos t,\ k\sin^2 t\cos^2 t)$ と原点との距離の2乗の最大・最小	標準
		5	確率，数列，漸化式	数Ⅰ・数ⅡB	四面体の頂点から隣の頂点へ等確率で移動．n 回の試行による確率	やや易
		6	積分法	数Ⅲ	底辺が x 軸上にある二等辺三角形と双曲線 $xy=1$ で囲まれた部分の面積	やや難
1979	文	1	一次変換，整式の微分，平面図形	数ⅡB・数Ⅰ	2つの変換で単位正方形が移される領域の共通部分の面積の最大値	標準
		2	整式の積分，体積	数ⅡB	円錐と球の共通部分の体積．コーンアイスクリームのような形	標準
		3	確率	数Ⅰ	硬貨を繰り返し投げたときの「表の回数と裏の回数の差」についての確率	標準
		4	数列，漸化式，整数	数ⅡB・数Ⅰ	3項間漸化式 $u_n=au_{n-2}-u_{n-1}$．u_n に4の倍数が現れない条件	やや難
	理	1	文科第1問と同じ			標準
		2	文科第2問と同じ			標準
		3	平面図形，三角関数，合成公式	数Ⅰ・数ⅡB	円周上に頂点がある正三角形について OQ^2+OR^2 の最大・最小	標準
		4	文科第4問と同じ			やや難
		5	整式の微分，整式の積分，関数の極限	数ⅡB・数Ⅲ	$(-t,\ -t)$，$(0,\ 0)$ を通り，$f'(0)=0,\ f''(0)=2$ となる3次関数．$y=f(x)$ と $y=x$ が囲む面積の極限	標準
		6	数列，数列の極限	数ⅡB・数Ⅲ	直角三角形に頂点から対辺へ順次垂線をおろした極限	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1978	1次文	1	行列	数ⅡB	$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$，$AJ=JA$，$A^2=8I+6J$．$x$，$y$，$z$，$w$ は何か	標準
		2	個数	数Ⅰ	男子5人，女子2人が一列に並ぶ並び方の数．4問	標準
		3	2次関数	数Ⅰ	直線と3放物線の交点の個数が与えられているときの直線の方程式	標準
		4	個数	数Ⅰ	小学校の顕微鏡の移動．移動を最小にする方法	標準
	1次理	1	一次変換	数ⅡB	$y=lx$ 上の点をそれ自身に，$y=mx$ 上の点を原点対称な点に移す一次変換を求める	標準
		2	分数関数，数列	数Ⅰ・数ⅡB	$f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$，$f(2)=1$，$f(x)=x$ がただ1つである a，b を求める	標準
		3	空間座標	数ⅡB	空間の4点O，A，B，Cを通る球の中心．四面体OABC内に中心がある条件	やや難
		4	平面図形	数Ⅰ	中心角 α の2面間に一方の面から θ をなす方向へ打ち出した小球の反射の問題	標準
	2次文	1	平面図形，面積	数Ⅰ	東大百年記念巴の問題．面積を求める	やや難
		2	平面座標，整式の微分	数Ⅰ	直交する2放物線．一方を固定すると他方は定点を通る．その定点を求める	標準
		3	整式の微分	数ⅡB	$f(x)=(x^2-4)(x^2-9)$．$t \leqq x \leqq t+1$ における最大値の関数	標準
		4	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	3次関数 $y=f(x)(x \geqq 0)$ にPから2接線．これらと $y=f(x)$ の囲む面積を求める	標準
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			やや難
		2	2次文科第3問と同じ			標準
		3	整式の微分，積分法	数ⅡB	$y=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ の法線が1本となる点の範囲と $y \geqq \dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}$ の範囲の共通部分の面積	やや難
		4	行列，数列の極限	数ⅡB・数Ⅲ	三角行列の n 乗．$A^n\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ に平行な単位ベクトルの極限	標準
		5	三角比，数列の極限	数Ⅰ・数Ⅲ	三角形ABCのBCを n 等分点を $\mathrm{P}_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ とする $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{AP}_k{}^2\right)$ を求める	標準
		6	平面図形，整式の微分	数Ⅰ・数ⅡB	$y=x^2$，$y=0$，$x=1$ で囲む部分に含まれる $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を頂点とする最大面積の三角形．その面積の極値	やや難

年度	文理	番号	範囲	科目	内容	難易
1977	1次文	1	図形と方程式，軌跡	数Ⅰ	2直線の交点の軌跡が円の上にある	やや難
		2	図形の移動，点と直線の距離	数Ⅰ	l を原点の周りに回転して与えられたどれかの直線に移る．回転行列を求める	標準
		3	立体図形	数ⅡB	正四面体各面の外心を頂点とする四面体の表面積・体積	標準
		4	整式の微分	数ⅡB	原点を通り α で極大，β で極小値0をとるとき，$f(\alpha)=f(\gamma)$ となる γ と3次関数を求める	標準
	1次理	1	整式の微分，三角関数，加法定理	数ⅡB	$y=x^2$ のAにおける法線と曲線の交点B，Bにおける接線となす角 θ の $\tan\theta$	標準
		2	数列	数ⅡB	連立漸化式，固有ベクトルを求め一般項を求める	やや難
		3	立体図形	数ⅡB	屋根型の体積，対角線，側面積，角度を求める	標準
		4	整式の積分，速度・加速度	数ⅡB	速度変化のある2点の運動，再び出会う向きと時間	標準
	新2次文	1	整式の微分	数ⅡB	$f(x)=\|x^3-3kx\|\,(-1\leqq x\leqq 1)$ の最大値の最小値	標準
		2	行列，軌跡	数ⅡB	$A(I-tJ)=(I+tJ)$，$A\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ の軌跡	やや難
		3	不等式と領域	数Ⅰ	3領域 A，B，C のどれかに含まれる円の半径の最大値 $r(\mathrm{P})$ の範囲	やや難
		4	空間座標	数ⅡB	空間で直線 l を含み m に平行な平面，Aを通り，l，m と交わる直線	やや難
	旧2次文	1	新2次文科第1問と同じ	旧数ⅡB		標準
		2	平面図形，三角関数，不等式	旧数Ⅰ	円に内接する五角形が存在する条件が与式で必要十分条件である証明	やや難
		3	新2次文科第3問と同じ	旧数Ⅰ		やや難
		4	三角関数，倍角公式，2次方程式の理論	旧数ⅡB・旧数Ⅰ	$a\cos 2\theta-4(a-2)\cos\theta-a+4=0$ の解の個数	標準
	新2次理	1	新2次文科第1問と同じ			標準
		2	整数，三角関数	数Ⅰ	A，B有理点．$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ について，ab，$\cos\theta$，$\sin\theta$ が有理数であることがすべて同値の証明	やや難
		3	新2次文科第3問と同じ			やや難
		4	整式の積分，体積	数ⅡB	x 軸上を正方形を転がすとき1点の軌跡のつくる回転体の体積を求める	標準
		5	新2次文科第2問と同じ			やや難
		6	新2次文科第4問と同じ			標準
	旧2次理	1	新2次文科第1問と同じ			標準
		2	新2次理科第2問と同じ	旧数Ⅰ		やや難
		3	新2次文科第3問と同じ			やや難
		4	新理科第4問と同じ	旧数ⅡB		標準
		5	旧文科第2問と同じ			やや難
		6	微分法	旧数Ⅲ	$-\cos x-\dfrac{a}{4}\cos 2x$ の最大・最小，変曲点の個数の変化	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1976	新１次文	1	図形と方程式	数Ｉ	$y=x^2$ と $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$ が $(1,1)$ で接するとき a，b を求める	標準
		2	三角比，三角関数	数Ｉ	4 辺と対角線が与えられた四角形．対角線の交点 O．OA，OB，OC，OD を求める	やや難
		3	確率	数Ｉ	3 つのさいころの目 x，y，z が直角三角形，二等辺三角形の辺長，$\dfrac{\pi}{角}$ の三角形になる確率	標準
		4	一次変換	数ⅡＢ	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$．$A^2-A$，$3A^{-1}$ による $P(1,1)$ の像，Q，R の座標．∠QPR を求める	標準
	旧１次文	5	新１次文科Ｉと同じ	旧数Ｉ		標準
		6	新１次文科Ⅱと同じ	旧数ⅡＢ・旧数Ｉ		やや難
		7	複素数	旧数Ｉ	複素数 a，b についての連立 2 次方程式から a，b を求める	標準
		8	ベクトル	旧数ⅡＢ	正三角形が敷きつめられた平面上に画かれた O，P，Q から図の R の座標を求める	標準
	新１次理	1	空間図形	数ⅡＢ	空間の線分上の点 P と円周上の点 Q の距離が最小になる点 P，Q の座標を求める	標準
		2	行列，確率	数ⅡＢ・数Ｉ	さいころを投げて出た目を成分とする行列による変換	標準
		3	2 次関数	数Ｉ	$f(x)=at^2+3at+b$，$t=x^2+2x+4$．$f(x)$ の最小値が 37，$f(-2)=57$ のとき a，b を求める	標準
		4	一次変換	数ⅡＢ	回転と平行移動の合成がある点のまわりの回転になる．その中心の座標．この変換を F とするとき $F\circ F$ を表す	やや難
	旧１次理	5	新１次理科Ｉと同じ	旧数Ｉ		標準
		6	集合と論理	旧数Ｉ	「ある」または「任意」の正数 x に対して $a+x>0$ についてまたは $a-x>0$ について常に成り立つかどうかの判定	やや難
		7	整式の微分，2 次方程式	旧数ⅡＢ・旧数Ｉ	3 次関数の極大点，極小点を通る直線，その直線ともとの関数のグラフとの交点	標準
		8	三角比	旧数ⅡＢ	等脚台形を対角線で折り返したとき頂点が三角形内にある条件	標準
	新２次文	1	整式の積分，体積，2 次方程式	数ⅡＢ・数Ｉ	2 放物線と線分の作る領域を回転してできる回転体の体積	やや難
		2	不等式と領域	数Ｉ	動点が直進または左折をくり返して $t=1$ に到達する領域	やや難
		3	図形の移動	数Ｉ	円周上の点 P を A について対称移動した点を Q とし，P を O のまわりに 90° 回転した点を R とするとき，QR の長さの最大・最小	標準
		4	行列	数ⅡＢ	$xI+yA\,(\neq O)$ が常に逆行列をもつ条件	やや難
	旧２次文	1	新２次文科第１問と同じ	旧数ⅡＢ・旧数Ｉ		やや難
		2	新２次文科第２問と同じ	旧数Ｉ		やや難
		3	円の方程式	旧数Ｉ	3 円に接線が引ける $PT_1{}^2+PT_2{}^2+PT_3{}^2=99$ となる P の存在範囲の図示	やや難
		4	整式，因数分解	旧数Ｉ	x^5-ax-1 が整数係数で因数分解可能な a を求める	標準
	新２次理	1	新２次文科第１問と同じ			標準
		2	新２次文科第２問と同じ			やや難
		3	微分法	数Ⅲ	$f(x)=\dfrac{x+t}{x(1-tx)}$ の $0<x<1$ および $0<x\leqq t$ における最小点の軌跡	やや難
		4	新２次文科第３問と同じ			標準
		5	積分法	数Ⅲ	円柱を斜めに切った側面の面積	やや易
		6	新２次文科第４問と同じ			やや難
	旧２次理	1	新２次文科第１問と同じ			標準
		2	新２次文科第２問と同じ			やや難
		3	新２次理科第３問と同じ	旧数Ⅲ		やや難
		4	旧２次文科第３問と同じ			やや難
		5	微分方程式	旧数Ⅲ	x が t の関数で S，$\dfrac{dS}{dt}$ が x で与えられるとき S を t で表す	やや難
		6	整式の微分，整式の積分，共通解	旧数ⅡＢ・旧数Ｉ	4 次 $f(x)=0$ と $f''(x)=0$ が共通解を 2 個もつなら $y=f(x)$ は線対称であることの証明	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1975	1次文	1	平面座標	数Ⅰ	y 軸上の点 A，第 1 象限の点 B，AB の中点 C が x 軸上のとき，OB の長さまたは，$\angle \mathrm{BO}x$ から B をそれぞれ求める	やや易
		2	個数，整数	数ⅡB・数Ⅰ	1000 以下で，9，15，7，11，13 の倍数かどうかの包除関係と個数．4 問	標準
		3	三角比，三角関数，加法定理	数ⅡB	三角定規を並べてできる四角形の対角線のなす角の正弦	標準
		4	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	3 次関数 $f(x)$ に対して $g(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$ とする．$g(x)$ の極大・極小	標準
	1次理	1	2 次方程式の理論	数Ⅰ	区間 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$ に解がある 2 次方程式の係数の条件	やや易
		2	複素数平面	数ⅡB	1 と $\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ を基とし単位円周上にある複素整数	標準
		3	ベクトル，内積，速度	数ⅡB	等速直線運動をする 3 点の位置関係	標準
		4	2 次方程式，関数の極限	数Ⅰ・数Ⅲ	2 次方程式が整数解をもつ条件と個数	やや難
	2次文	1	三角比	数ⅡB	三角形の面積を二等分する線分で長さが最小のものを求める	標準
		2	恒等式	数Ⅰ	分数恒等式 $\frac{(x+1)^k}{x^l}-1=\frac{(x+1)^m}{x^n}$	やや難
		3	整式の積分	数ⅡB	$y=x^2$ と $y=-(x-a)^2+b$ の囲む図形の面積が $\frac{1}{3}$ である必要十分条件	標準
		4	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	$x=f(y)$ を y 軸回転してできる立体の $0\leqq y\leqq t$ の範囲の体積から境界の曲線を求める	やや難
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			標準
		2	2次文科第2問と同じ			やや難
		3	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	$y=-ax^2+bx$ が $x+y=4$ に接するとき放物線と x 軸が囲む面積を最大にする	標準
		4	数列，三角関数，半角公式，数列の極限	数ⅡB	$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，$a_n=2\sin\theta_n$ をみたす θ_n と $\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求める	標準
		5	整式の積分，体積，数列，数列の極限	数ⅡB	半径が $\frac{a}{2^n}$ の球列 S_n．O_{n+1} は S_n 上にある．$S_n\cap S_{n+1}$ の体積の和の極限を求める	やや難
		6	確率．期待値，数列の極限	数Ⅲ・数ⅡB	3 つの容器 A，B，C から球を取り出しそこから 1 個を A に戻すことをくり返す．A 中の赤球の個数の期待値の極限	やや難
1974	1次文	1	三角比	数ⅡB	3 辺が与えられた三角形 ABC の $\cos\mathrm{A}:\cos\mathrm{B}:\cos\mathrm{C}$，$\tan\mathrm{A}:\tan\mathrm{B}:\tan\mathrm{C}$	易
		2	点と直線の距離	数Ⅰ	直線上の P と放物線上の Q の距離が最小になる P，Q	易
		3	ベクトル，内積	数ⅡB	空間の 2 ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{c}$，定ベクトル $\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表す	やや易
		4	連立方程式，関数の極限	数Ⅰ・数ⅡB	連立方程式の係数を変化させたときの解の増減・極限	やや難
	1次理	1	平面座標	数Ⅰ	座標で与えられた三角形の面積，2 等分する直線，重心	易
		2	共通解	数Ⅰ	2 次，3 次，3 次の方程式が共通解をもつ．	標準
		3	不等式，数列の極限	数Ⅰ・数ⅡB	n で表される 2 つの不等式をみたす領域を A_n，B_n とするときその和集合，共通部分，極限	やや難
		4	複素数平面，整式の積分	数ⅡB	α は線分上，β は円周上を動く．$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ が動く範囲 α^2 の軌跡と虚数軸の囲む領域の面積	やや難
	2次文	1	整数	数Ⅰ	n^2 の 1 位数，n^5 と n の 1 位数が一致することの証明，n^{100} の 1 位数	標準
		2	解と係数の関係，相加平均・相乗平均の関係，微分法	数Ⅰ・数Ⅲ	放物線上に端点がある定長線分の中点の y 座標の最小値	やや難
		3	整式の積分，体積	数ⅡB	球を円柱でくり抜いた立体の体積	やや易
		4	整式の積分	数ⅡB	α によって変化する放物線の下側，第 1 象限の部分の面積．そのグラフ	標準
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			標準
		2	2次文科第2問と同じ			標準
		3	投影図	数Ⅰ	投影図から与直線の跡（平画面と直線の交点）の座標を求める	標準
		4	微分法	数Ⅲ	原点において直交する 2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ について条件式が与えられているとき分数式の係数を求める	やや難
		5	微分法，曲線長	数Ⅲ	外擺線（サイクロイド）（2：1）ただし x 軸上で外円の接点の反対側の点からスタート．軌跡の Y の最大値，弧長	やや難
		6	確率，期待値	数Ⅲ	先に 3 勝した方が優勝．試合数の期待値の最大値．優勝確率と個々の試合に勝つ確率の差が最大になる条件	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1973	1 次文	1	複素数平面	数ⅡB	複素平面上の角，面積，複素数を α 倍した面積	標準
		2	最大・最小	数Ⅰ	池の周りを通り 2 点までの最短距離の和が最大になる x の範囲	標準
		3	分数関数，関数の極限	数Ⅰ・数ⅡB	分数関数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-a}$ の極限値からの a の値を求める．3 問	やや難
		4	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	頂点共有 2 放物線の一方の接線と他方の交点の中点	標準
	1 次理	1	整数	数Ⅰ	$\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{1}{z}=2$ をみたす正整数 x，y，z	標準
		2	複素数平面	数ⅡB	複素平面上の正六角形，頂点の複素数を求める	標準
		3	整式の微分	数ⅡB	いろいろな条件を与えられた 4 次関数 $f(x)$ を求める	標準
		4	必要条件・十分条件	数Ⅰ	必要条件，十分条件の検証 4 問	やや難
	2 次文	1	平面図形	数Ⅰ	2 つの正方形の共通部分の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以上となる中心の存在範囲	標準
		2	整式の微分	数ⅡB	球に内接する円錐の体積の最大値	標準
		3	立体図形	数Ⅰ	正四角錐を斜めに切ってできる四角錐の体積	標準
		4	最大・最小	数Ⅰ	折れ線関数 $f(x)$，$f(x)-ax$ の最大値と最小値の差の最小値	やや難
	2 次理	1	空間図形	数Ⅰ	球面上の点から円軌道を運動している点が見え続ける時間	やや難
		2	数列	数ⅡB	0，1，2 のどれかからなる和 $\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2$ で $\sum_{i=1}^{n}{x_i}^k$ を表す	標準
		3	**2 次文科第 4 問**と同じ			やや難
		4	平面図形，積分法	数Ⅰ・数Ⅲ	**文科第 1 問**で求めた図形の面積を求める	標準
		5	積分法，微分法	数Ⅲ	不等式 $0<x$，$\dfrac{t}{(1+t^2)x}\leqq y\leqq\dfrac{1}{1+x^2}$ で与えられた図形の面積の微分	やや難
		6	整式の微分	数ⅡB	原点で $y=x$ に接する放物線の点 $(u,\ v)$ における接線の傾き	標準
1972	1 次文	1	集合と個数	数Ⅰ	A，B，C の 3 都市へ行ったことのある人数	やや易
		2	複素数平面	数ⅡB	対角線上の 2 つの複素数から正方形をなす残り 2 複素数を求める	標準
		3	三角関数，合成公式	数ⅡB	xy 平面の与三角形の周上で $\sin x\cos 2y+\cos(x+2y)$ の最大・最小	やや難
		4	立体図形	数Ⅰ	立方体の対角線 AB，AB を含まない辺上に P．△ABP の最大・最小	やや難
	1 次理	1	2 次関数	数Ⅰ	放物線と直線の交点における接線の方程式とその係数を求める	標準
		2	ベクトル	数ⅡB	等速直線運動をする 2 点が出会う．速度ベクトル，出会う点	標準
		3	空間図形	数Ⅰ	立方体の対角線に垂直な平面．1 辺と平面のなす角．立方体の正射影の面積	やや難
		4	三角関数，和積公式，二項係数	数ⅡB	$f_{j+1}(x)=\dfrac{1}{2}\left\{f_j(x-1)+f_j(x+1)\right\}$．$f_{10}(x)$ を $f(x+k)$ で表す	やや難
	2 次文	1	三角関数，加法定理	数ⅡB	柱上の 2 点を見込む角 $\angle\mathrm{APB}\geqq 30^\circ$ 平面上の範囲	標準
		2	ベクトル，内積，整数，三角関数	数ⅡB	ベクトル内積と整数．実はリー群のルート	標準
		3	複素数平面，整式の積分	数ⅡB	複素平面上で正方形領域の 2 乗でできる領域の面積	標準
		4	平面図形，数列，数列の極限	数Ⅰ・数ⅡB	直線と定円に接する円列 C_n の半径を r_n とするとき．n^2r_n の極限	やや難
	2 次理	1	**2 次文科第 1 問**と同じ			標準
		2	**2 次文科第 2 問**と同じ			標準
		3	微分法	数Ⅲ	$f(x)=x^2(x+8)$，$g(x)=(x^2-1)(x+4)$ のとき $f(x)-kg(x)=0$ の解の個数	標準
		4	**2 次文科第 4 問**と同じ			やや難
		5	関数方程式	数Ⅲ	任意の 1 次関数 $f(x)$ について $\dfrac{d^2}{dx^2}u(x)=f(x)$，$u(0)=0$ のとき $u(x)=\int_0^x h(t)f(t)\,dt-h(x)\int_x^1 f(t)\,dt$ をみたす $h(x)$	やや難
		6	確率	数Ⅲ	犯人が街路にそって逃亡する．国境に警官を 3 人配置する．犯人を捕える確率を最大にする配置	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1971	1 次文	1	複素数	数Ⅰ	z，$z+w$ の実部，w，zw の虚部が与えられている	標準
		2	共通解	数Ⅰ	$x^2+ax+b=0$ と $ax^2+bx+1=0$ が実数または実数でない共通解をもつ a，b の条件を求める	標準
		3	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	3 次関数の極大点および，極小点における接線と囲む図形の面積	標準
		4	不等式と領域	数Ⅰ	4 つの 1 次不等式で表される領域，線形計画法	標準
	1 次理	1	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	3 次関数と 2 次関数が $x=0$，1 を共有し，$x=1$ で共通接線をもつ	標準
		2	無理関数，2 次方程式	数Ⅰ	$t=x\pm\sqrt{x}$ で動く 2 点 A，B の位置，距離	やや難
		3	平面図形，面積	数Ⅰ	三角形から距離 4 の点の軌跡，囲む面積	やや易
		4	立体図形	数Ⅰ	四角錐台．辺，線分の長さ，体積，断面積を求める	標準
	2 次文	1	三角関数，合成公式	数ⅡB	x，y が cos の式で与えられた点の原点からの距離の最大最小	標準
		2	数列	数ⅡB	$2a_{n+1}={a_n}^2+1$，$a_n<1-\varepsilon$ なら $1-2a_1>n\varepsilon^2$ 証明	やや難
		3	整式の積分	数ⅡB	$\int_0^1 f(x)\,dx=2$，$\int_0^1 xf(x)\,dx=3$ のとき $\int_0^1\{f-ax-b\}^2dx$ を最小にする a，b	やや難
		4	整式の微分，数学的帰納法	数ⅡB	$f_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ について $f_n(x)=0$ の解の存在，個数	やや難
	2 次理	1	**2 次文科第 1 問**と同じ			標準
		2	**2 次文科第 2 問**と同じ			やや難
		3	**2 次文科第 3 問**と同じ			標準
		4	**2 次文科第 4 問**と同じ			標準
		5	ベクトル，内積，数列の極限	数ⅡB	円周上に等間隔に Q_k をとる．$s_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}{PQ_k}^2$ の極限	やや難
		6	確率，数列，漸化式	数Ⅲ・数ⅡB	3 人でジャンケン．勝者が決まるまで続ける．k 回目に勝者がきまる確率	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1970	1 次文	1	2 次関数	数Ⅰ	$x^2-2ax+1\geqq\frac{1}{2}(x-1)^2$ がつねに成り立つ条件	標準
		2	定点通過	数Ⅰ	2 次関数 $y=mx^2-(2m+a)x-b(m-1)$ が常に通る点	標準
		3	整式の微分，純虚数	数ⅡB・数Ⅰ	3 次方程式 $x(x+2)(x+4)+a=0$ が異なる 3 実解，純虚数解をもつ条件	標準
		4	整数	数Ⅰ	n のすべての約数の積を $f(n)$ とするとき $12=f(12)^a f(6)^b f(4)^c f(2)^d$ となる a，b，c，d を求める	やや難
		5	個数	数ⅡB	斜めのある街路コースの個数．2 つのコース	標準
	1 次理	1	2 次方程式の理論，整数	数Ⅰ	a，b，c は正整数．$ax^2-2bx+c=0$ が $0<x<1$ に 2 解をもつ．a，b，c の条件，a の最小値	標準
		2	複素数平面	数ⅡB	複素数による円の方程式，アポロニウスの円	やや難
		3	整式の微分，整式の積分	数ⅡB	$y=(x-3)^2$ に接する直線．両軸と囲む三角形の面積の最大値	標準
		4	整式の微分，2 次導関数，恒等式	数ⅡB・数Ⅰ	$(x^2+1)P''(x)=\lambda P(x)$ をみたす 4 次以下の多項式 $P(x)$	やや難
		5	個数	数ⅡB	1，2，3 からなる 4 項の数列の個数，広義単調増加，上へ，項の和が 10 のそれぞれの個数	やや難
	2 次文	1	n 進法	数Ⅰ	10 進法と 2 進法の相互変換．2^3 進法の桁の数の和が 7 で割り切れる条件	やや難
		2	三角関数，加法定理	数ⅡB	y 軸上の 2 点を見込む角が 30° 以上になる x 軸上の範囲	標準
		3	速度・加速度	数ⅡB	2 人の運動．出会うか追いつく条件	標準
	2 次理	1	ド・モアブルの定理	数ⅡB	$a=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ のとき $\prod_{k=1}^{5}\frac{1-a^{kn}}{1-a^k}$ の値	やや難
		2	確率	数Ⅲ	貨幣を投げてランダムウォーク．n 回で $x=n-2$，$x=n-4$ に至る確率	標準
		3	**2 次文科第 3 問**と同じ			標準
		4	速度・加速度	数ⅡB	水槽の横に穴をあけ水を噴出させる水の通過範囲	標準

1969	実施なし

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1968	1次文	1	円の方程式	数Ⅰ	与条件をみたす2円と交点を通る直線	標準
		2	分数関数	数Ⅰ	$y=\dfrac{1\text{次}}{2\text{次}}$ の関数のグラフを選択する4問	やや難
		3	整式の微分	数ⅡB	4次関数 $P(x)$ が -1，3で極小1で極大，$P(x)=0$ は負の重解をもつ．$P(x)$ の決定	標準
		4	2次関数	数Ⅰ	$y=x^2-2ax+4\alpha+5$ の $[-3,\ 3]$ における最小値が最大となる α の値	標準
		5	必要条件・十分条件	数Ⅰ	$\lvert a+b\rvert>a+b$，$\lvert a-b\rvert>a-b$，$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert>\lvert a+b\rvert$，$\lvert a-b\rvert>\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$ について必要条件，十分条件．4問	やや難
	1次理	1	三角関数，半角公式	数ⅡB	$\sin^6 x+\cos^6 x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大・最小とそのときの x	標準
		2	三角関数，和積公式・対数関数	数ⅡB・数Ⅰ	与えられた式のグラフを選択する問題．4問	やや難
		3	平面座標	数Ⅰ	$(0,\ \sqrt{3})$ と x 軸上，$y=2x$ 上に頂点がある正三角形	やや難
		4	絶対値を含む関数	数Ⅰ	$\lvert 2-(x+\lvert x\rvert)\rvert=\alpha(x-3)-1$ の解の個数．α によって場合分け	やや難
		5	集合と論理，必要条件・十分条件	数Ⅰ	集合 A，B，C の包除関係と必要条件，十分条件．4問	標準
	2次文	1	平面図形，円周角	数Ⅰ	正方形ABCD，$\angle\mathrm{APB}\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ などをみたす範囲の面積	標準
		2	立体図形	数Ⅰ	底面と斜面のなす角が45°の正四角錐の隣り合う斜面のなす角	やや難
		3	点の存在範囲	数Ⅰ	$f(1)=0$ なる2次式で α，β が与えられたとき点 $(f(\alpha),\ f(\beta))$ の存在範囲	やや難
		4	整式の積分	数ⅡB	3次ルジャンドル多項式	標準
		5	図形の移動	数Ⅰ	対称移動と回転の合成に対してもとの点と一致する点	標準
	2次理	1	整式の積分，三角関数	数ⅡB，数Ⅰ	放物線と三角関数で囲まれた図形の面積を二等分する直線	やや難
		2	2次文科第2問と同じ			やや難
		3	2次文科第3問と同じ			やや難
		4	空間図形，整式の積分，体積	数Ⅰ・数ⅡB	yz 平面上の放物線 $y=1-z^2(-1\leqq z\leqq 1)$ を直線 $(x=1,\ y=0)$ の周りに回転した立体の体積	やや難
		5	多項式，整式の微分	数Ⅰ・数ⅡB	与えられた5条件をみたす3次多項式を求める	標準
		6	微分法，指数・対数	数Ⅰ・数Ⅲ	$0.3<\log_{10}2<0.302$ の証明	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1967	1次文	1	必要条件・十分条件，不等式	数Ⅰ	$a<b$ であるために，a，b との大小についての不等式をみたす x の存在，不等式を常にみたすことについて必要条件，十分条件．4問	標準
		2	2次関数	数Ⅰ	$x=1$ について対称な2放物線	やや易
		3	整式の微分	数ⅡB	4次関数の最小値．4次方程式の解，最小解に最も近い整数	標準
		4	三角関数，倍角公式，図形と方程式	数ⅡB・数Ⅰ	x，y が角 α，β で表されるとき点 $(x,\ y)$ の存在範囲を表す図形．4問	標準
		5	速度・加速度	数ⅡB	角速度，角加速度の問題．回転にブレーキをかけ静止するまでの時間，回転角	標準
	1次理	1	連立方程式	数Ⅰ	連立方程式と変換と逆変換の関係，解の関係	標準
		2	複素数平面	数ⅡB	複素平面上の円と原点の距離を最大・最小にする複素数	標準
		3	二項定理	数ⅡB	$(0.99)^{10}$ の小数第4位までを計算	やや難
		4	整式の微分	数ⅡB	放物線の2接線の交点	標準
		5	不等式と領域，極座標	数Ⅰ・数ⅡB	領域の移動，回転，反転，極座標．4問	やや難
	2次文	1	整式の微分	数ⅡB	$ax^{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}>x$ の証明．相加相乗なども可	やや難
		2	不等式と領域	数Ⅰ	Pから3円に接線を引き $\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{PS}}^2+\overline{\mathrm{PT}}^2<36$ となる範囲	標準
		3	空間図形，速度	数Ⅰ	自動車から飛行機を見る．向きと角度から高さを求める	標準
		4	直線の方程式，面積	数Ⅰ	直角二等辺三角形の面積を二等分する直線	やや難
		5	楕円	数ⅡB	楕円 $\dfrac{x^2}{a}+ay^2=1$ の存在範囲	標準
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			やや難
		2	微分法，三角関数	数Ⅲ・数Ⅰ	2つの正方形の共通部分の面積の最大値，一方は停止，他方の中心は円周上	標準
		3	2次文科第3問と同じ			標準
		4	座標変換，積分法	数ⅡB・数Ⅲ	$x^2-xy+y^2=3$ のグラフ，第1象限の面積	やや難
		5	微分法，積分法	数Ⅲ	$y=ax^2$，$y=\log x$ が接するとき，これらと x 軸とで囲む面積	やや易
		6	確率	数Ⅲ	9枚のカードの番号付け替え，丁度5枚同じ番号になる確率	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1966	1次文	1	連立方程式	数Ⅰ［数Ⅰ代数］	a を係数に含む x，y，z の連立1次方程式	標準
		2	二次曲線，楕円	数ⅡB［数Ⅱ］	$y=k$ で円と楕円を切った線分の長さが等しい	標準
		3	立体図形	数Ⅰ［数Ⅰ幾何］	四面体の中点を結ぶ直線の位置関係	やや易
		4	図形と方程式	数Ⅰ［数Ⅱ］	4点の座標から円の方程式，点の座標を求める	標準
		5	恒等式，関数の合成	数Ⅰ［数Ⅰ代数］	$f(f(x))=4x^2f(x)$ をみたす2次式	標準
	1次理	1	関数の合成	数Ⅰ［数Ⅰ代数］	6つの関数 x，$\frac{1}{x}$，$1-x$，$\frac{1}{1-x}$，$\frac{x}{x-1}$，$\frac{x-1}{x}$ の合成関係	やや難
		2	2次関数，図形の移動，軌跡	数Ⅰ・数ⅡB ［数Ⅰ代数・数Ⅱ］	放物線と $y=l$ の交点の作る線分を中点の周りに60°回転してできる放物線	標準
		3	立体図形	数Ⅰ［数Ⅰ幾何］	直方体の面の対角線の長さと角度から3辺の長さ，三角形までの距離を求める．	標準
		4	不等式と領域，集合と論理	数Ⅰ［数Ⅱ］	領域の包除関係．4問．択一	やや難
		5	整式の微分	数ⅡB［数Ⅱ］	3次関数．極値からもとの関数を求める	標準
	新2次文	1	不等式，文章題	数Ⅰ	鉄道の運賃	標準
		2	直線の方程式	数Ⅰ	一次変換による不動直線	やや難
		3	図形と方程式	数Ⅰ	三角形の内心の座標	標準
		4	平面図形，面積，整式の微分	数Ⅰ・数ⅡB	定円Oの周上に中心Aをもつ円AとOA，円Aと円Oとの交点が作る四角形の面積の最大値	標準
		5	空間図形	数Ⅰ	球面と xy 平面，z 軸で切り取られる図形	やや易
	旧2次文	1	新2次文科第1問と同じ	旧数Ⅰ代数		標準
		2	新2次文科第2問と同じ	旧数Ⅰ代数		やや難
		3	新2次文科第3問と同じ	旧数Ⅰ幾何		標準
		4	新2次文科第4問と同じ	旧数Ⅰ幾何・旧数Ⅱ		標準
		5	平面図形，関数の極限	旧数Ⅰ幾何・旧数Ⅱ	円Oの半径OAとそれに垂直な弦，接線との交点に関する極限	標準
	新2次理	1	新文科第1問と同じ			標準
		2	新文科第2問と同じ			やや難
		3	複素数平面，数列	数Ⅱ	2倍して120°回転してできる螺旋	やや難
		4	三角関数	数Ⅰ	三角方程式の最大解に最も近い整数	やや難
		5	曲線長	数Ⅲ	対数螺旋を運動する点の道のり	標準
		6	確率	数Ⅲ	1から9までの数字から4つを選んで並べて作る4桁の数が1966より小となる確率	標準
	旧2次理	1	新2次文科第1問と同じ			標準
		2	新2次文科第2問と同じ			やや難
		3	新2次理科第3問と同じ	旧数Ⅲ		やや難
		4	新2次理科第4問と同じ	旧数Ⅲ		やや難
		5	整式の積分，分数関数	旧数Ⅲ・旧数Ⅱ	$\int_0^1(3ax+2)(2x+b)\,dx=0$ をみたす $a+b$ のとり得る範囲	標準
		6	図形と方程式，図形の移動	旧数Ⅱ	放物線を2回線対称移動（x 軸に平行，軸と45°）	標準
1965	1次文	1	図形の移動，楕円	数Ⅱ	$2x^2+3y^2=1$ と $x+y=1$ について対称な楕円の方程式を求める	標準
		2	図形と方程式	数Ⅱ	交わる2直線と円の交点の個数	やや難
		3	対数不等式，不等式の証明	数Ⅰ代数	対数不等式 $\log_{10}\frac{x+y}{m} \geqq \frac{\log_{10}x+\log_{10}y}{2}$ が成り立つ m の範囲	やや難
		4	いろいろな関数	数Ⅰ代数	$f(x)=\mathrm{Max}\{\lvert x-3\rvert,\ -x^2+8x-11\}$ について区間による最大値，最小値	やや難
		5	個数	数Ⅰ代数	3×3 の9個の枠に数字を入れてゆく．縦横の和が与えられているときの入れ方の個数	やや難
	1次理	1	図形の移動	数Ⅱ	直線を平行移動対称移動で重ねる	標準
		2	連立方程式	数Ⅰ代数	4元連立1次方程式が自明でない解をもつ条件	標準
		3	微分法	数Ⅱ	分数関数の極大点を通る直線ともとの関数の交点	標準
		4	対数不等式	数Ⅱ	$\log_2\left\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\right\}<\log_4\left\{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2(2x-3)^2\right\}$ が成り立つ範囲	標準
		5	不等式の証明，命題と論証	数Ⅰ代数，数Ⅱ	x，y，α，β，$\alpha x+\beta y$ の正または0について，「すべて」，「ある」の議論．4問	標準
	2次文	1	集合と個数	数Ⅰ代数	3種類の新聞の購読者の割合	標準
		2	空間図形	数Ⅰ幾何	山頂の高さと仰角	やや難
		3	微分法，平面図形	数Ⅱ・数Ⅰ幾何	$xy=1$ の接線と $x=1$，$x=2$，$y=0$ が作る台形の面積の最大値	標準
		4	平面図形，2次関数	数Ⅰ幾何・数Ⅰ代数	半円に3頂点がその周上にある洋凧形の面積の最大値	標準
		5	平面図形，面積	数Ⅰ幾何	円板と正三角形（周）に両端をもつ線分の中点の存在範囲	やや難
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			標準
		2	2次文科第2問と同じ			やや難
		3	2次文科第3問と同じ			標準
		4	2次文科第4問と同じ			標準
		5	微分法，三角関数，3倍角の公式	数Ⅲ・数Ⅱ	$y=3\sin2x+\cos3x$ の $3x+y=0$ に平行な接線	標準
		6	整式の積分，体積	数Ⅲ	半円と2線分で囲まれた図形を回転してえられる立体の体積	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1964	1次文	1	整式の微分	数Ⅱ	$f(x)=x^3+6x^2-15x+1$ の極大・極小，$f(x)=a$ が3実解をもつ条件	やや易
		2	三角比	数Ⅰ幾何	三角形の角，対辺，面積から2辺と内接円の半径を求める	標準
		3	直線の方程式，三角関数	数Ⅱ，数Ⅰ幾何	六角形の各辺の傾きが与えられているとき各角度を求める	やや難
		4	関数の極限	数Ⅱ	$f(x)$ は整式，$f(0)$，$\dfrac{f(x)}{x+a}$ の $x\to\infty$，$x\to2$ における極限から $f(x)$，a を求める	やや難
		5	命題，不等式と領域	数Ⅱ	x，y についての不等式で与えられた命題が成り立つ最大値，最小値を求める．3問	やや難
	1次理	1	絶対値を含む関数	数Ⅰ代数	$f(x)=\lvert x-1\rvert+\lvert x-a\rvert+\lvert x-2\rvert$ の最小値	やや難
		2	平面座標	数Ⅱ	原点が重心の三角形ABC．60°回転，外心，面積を求める	標準
		3	三角関数，倍角公式	数Ⅱ	$2\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos x$ の最大値，最小値を求める．	標準
		4	三角比	数Ⅰ幾何	2つの動半直線AX，BYの交点P_t．AP_tを$\angle BAP_t$で表す	やや難
		5	必要条件・十分条件，整数	数Ⅰ幾何・数Ⅰ代数	x，y 整数；$x>1$，$y>1$；$x^2+y^2=0$ について必要条件，十分条件．4問	標準
	2次文	1	連立方程式	数Ⅱ	3元連立方程式，実は3次方程式の解と係数	標準
		2	2次関数，内分，軌跡	数Ⅰ代数・数Ⅱ・数Ⅰ幾何	2つの放物線の相似の位置，相似中心，相似比を求める	やや難
		3	立体図形	数Ⅰ幾何	正四角錐の切断面の面積	標準
		4	平面図形，面積	数Ⅰ幾何	四辺形の頂点を $A_i(i=1,2,3,4)$，A_i，P_i の中点を $P_{i+1}(P_5=P_1)$ とするとき，四辺形$P_1P_2P_3P_4$の面積	やや難
		5	関数の極限	数Ⅱ	$f(x)$ の y 切片A，Pにおける接線の y 切片Qについて $\dfrac{AQ^2}{AP^2}$ の0，∞極限	やや難
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			標準
		2	2次文科第2問と同じ			やや難
		3	2次文科第3問と同じ			標準
		4	2次文科第4問と同じ			やや難
		5	微分法	数Ⅲ	$xy=1$ の第1象限上の定点Pと第3象限上の動点Qの距離の最小値．QPと x 軸のなす角は30°	やや難
		6	2次関数，整式の積分	数Ⅰ代数，数Ⅲ	$f(0)=0$，$f(1)=4$ の3次関数，$x\geqq0$ で $f(x)\geqq0$ のとき，$\int_0^1 f(x)\,dx$ の最大・最小	標準
1963	1次文	1	恒等式	数Ⅰ代数	恒等式 $ax^2+b(x+y+3z)=c\{x^2+2(y+3z)\}+2(y+z)+d(2x+z)$	やや易
		2	平面座標	数Ⅱ	定点A，Bと直線上の動点Pについて中線定理の利用 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ の最小値	標準
		3	平面座標	数Ⅱ	三角形ABCについて，A，重心G，外心Oの座標からB，Cの座標を求める	やや難
		4	整式の微分	数Ⅱ	3次関数の接線の傾きが最小のとき接点$(2,-10)$．その接線は原点を通る．	標準
		5	必要条件・十分条件，三角比，不等式	数Ⅰ幾何・数Ⅰ代数	鋭角三角形の成立条件について必要条件，十分条件．4問	標準
	1次理	1	恒等式	数Ⅰ代数	恒等式 $6x^3+ax^2-8x+b=(x-1)(cx+1)(3x+d)$	やや易
		2	図形の移動，三角比	数Ⅰ幾何	2点A，Bの周りの回転の合成	やや難
		3	三角関数	数Ⅰ幾何	2つのサイクロイドの間の距離の最大・最小	やや難
		4	対数関数，整式の微分	数Ⅱ	$\log_2 y=(\log_2 x)^3$ のとき $\dfrac{x^3}{y}$ の最大・最小	標準
		5	必要条件・十分条件，方程式	数Ⅰ幾何，数Ⅰ代数	命題「適当な実数 x について任意の実数 y に対して $ax=by$ となる」について，「適当な」と「任意の」を変えた命題の比較．必要条件，十分条件．4問	やや難
	2次文	1	立体図形	数Ⅰ幾何	直方体の面の対角線の長さから辺の長さを求める	標準
		2	平面図形，面積	数Ⅰ幾何	定点と直線上に端点をもつ折れ線の折れ目の存在範囲	標準
		3	分数関数，分数方程式	数Ⅱ	$f(x)=\dfrac{4x-2}{5-x}$，$y=f(x)-x$ のグラフ，$f(x)-x$ の範囲，$f(x)>x$ の解	やや難
		4	立体図形，整式の微分	数Ⅰ幾何・数Ⅱ	正四面体に内接する三角柱の体積の最大値	標準
		5	速度・加速度	数Ⅱ	放物運動．原点と$(10,0)$を通る．初速の角度 α を変えるとき初速を最小にする条件	標準
	2次理	1	2次文科第1問と同じ			標準
		2	2次文科第2問と同じ			標準
		3	平面図形，数列，数列の極限	数Ⅰ幾何・数Ⅲ	対角線の交点を通り底辺と平行な線分の列．三角形の面積の和の極限	やや難
		4	2次文科第4問と同じ			標準
		5	平面図形，整式の積分	数Ⅰ幾何・数Ⅲ	正方形を折れ線が面積を二等分しながら動く	標準
		6	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ・数Ⅲ	$y=x^n$ 上の3点を通る放物線が $y=x^n$ と囲む2つの部分の面積が等しいような n の値	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1962	1次文	1	三角方程式	数Ⅰ幾	$a+b=a\sin x+b\cos x=a\sin^2 x+b\cos^2 x=1$ から a，b，x を求める（$0°<x<180°$）	標準
		2	絶対不等式，高次関数，対数関数	数Ⅰ代数	いろいろな $f(x)$ について $x\geqq 0$ で $f(x)>0$ または $f(x)<0$ が常に成り立つかどうか．4問	標準
		3	2次方程式	数Ⅰ代数	3つの2次方程式のうち1つだけが虚根をもつ条件	標準
		4	対数	数Ⅰ代数	球の表面積 S と体積 V について $\log S$ を $\log V$ で表す	標準
		5	円の方程式，図形の移動	数Ⅱ	円の平行移動	やや易
		6	整式の微分	数Ⅱ	$f(x)=x^3+ax^2+b$ は $x=2$ で極小値1をとる．a，b と極大値を与える x を求める	標準
	1次理	1	平面図形，面積	数Ⅰ幾何	長方形と二重円の共通部分の面積	標準
		2	図形と方程式	数Ⅱ	直線が円にする接点について一部明らかにされている	標準
		3	直線の方程式	数Ⅱ	A(3, 0)，B(0, 2)，C(2, 4)．直線AB上の点Pの x 座標とCPと x 軸，y 軸の交点の x 座標の関係	標準
		4	三角方程式，3倍角の公式	数Ⅱ	$\sin 3x-\sin x=\cos 3x+\cos x$ をみたす x を求める	標準
		5	平面図形，図形の移動	数Ⅱ	3直線の方程式で与えられた三角形の平行移動	標準
		6	関数の極限	数Ⅱ	$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ の $x\to 3$，$x\to\infty$，$x\to -1-0$ の極限	標準
	2次文	1	2次方程式の理論，対数	数Ⅰ代数	係数に $\log_a b$，$\log_b a$ をもつ2次方程式の解	標準
		2	三角関数，平面図形	数Ⅰ幾何	直角二等辺三角形と斜辺に垂直な平行線．プリズムによる光線の軌跡	標準
		3	平面図形，面積	数Ⅰ幾何	1点を共有し等間隔に述べられた等半径の6つの円が作る図形の面積	やや易
		4	三角関数，加法定理・軌跡	数Ⅱ	長方形を角内ですべらすときの長方形の1頂点の軌跡	やや難
		5	解と係数の関係，整式の微分	数Ⅱ	直方体の辺の和，表面積から1辺の長さのとりうる範囲，体積の最大値を求める	標準
	2次理	1	**2次文科第1問**と同じ			標準
		2	**2次文科第2問**と同じ			標準
		3	三角関数，合成公式	数Ⅱ	傾いた直線上に両端がある折れ線の移動による重心の最低点	やや難
		4	無限級数	数Ⅲ	無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2^{n-1}}}{1-r^{2^n}}$ の和を求める	やや難
		5	**2次文科第5問**と同じ			標準
		6	微分法，積分法	数Ⅲ	正弦曲線 $y=6\sin\dfrac{x}{6}$ の $x=2\pi$，$x=6\pi$ における接線と曲線が囲む部分の面積	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1961	1次文	1	直線の方程式	数Ⅱ	$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{5}$ のとき $(a,\ 0)$，$(0,\ b)$ を通る直線が必ず通る点	やや難
		2	図形と方程式	数Ⅱ	点Aを原点を中心に45°回転してBになったとき三角形OABの外接円の中心	標準
		3	三角関数，和積公式	数Ⅱ	$\cos 7\theta-\cos 3\theta$ の正，負，0となる θ の個数を求める	標準
		4	指数，対数	数Ⅰ代数	常用対数による数の大小判定．3数のうち最大数を求める．4問	標準
		5	微分法，分数方程式	数Ⅱ	$f(x)=x+a+\dfrac{b}{x}$ の決定，分数方程式，最小値．	標準
	1次理	1	整式の微分	数Ⅱ	未知周期関数．部分的に3次関数と一致することからその係数を求める	標準
		2	指数，対数	数Ⅱ	指数から $0<x<1$ における大小判定．4問	標準
		3	三角方程式，連立方程式	数Ⅰ幾何	$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の連立方程式から k を定める．$\begin{pmatrix} 11 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}$ の固有値問題	標準
		4	平面座標，速度	数Ⅱ	運動する2円の共通部分の面積の最大値	標準
		5	立体図形	数Ⅰ幾何	正四面体の諸要素を求める．各面の重心を頂点とする正四面体との体積比	標準
	2次文	1	三角比	数Ⅰ幾何	等速直線運動する3点が作る三角形の面積についての問題	標準
		2	4次関数，整式の微分	数Ⅰ代数・数Ⅱ	未知4次関数の5つの値から $f'(0)$ を求める	やや難
		3	立体図形，三角関数，2次関数，微分法	数Ⅱ・数Ⅰ代数	半球に外接する円錐で表面積を最小にするもの	やや難
		4	平面図形，面積比	数Ⅰ幾何	三角形を対辺を $1:2$ に分ける線分で分割して面積比を求める	標準
		5	関数の極限	数Ⅱ	$f(x)=\sqrt{x^2+1}$ について $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{2h^2}$ を求める	やや難
	2次理	1	**2次文科第1問**と同じ			標準
		2	**2次文科第2問**と同じ			やや難
		3	**2次文科第3問**と同じ			標準
		4	**2次文科第4問**と同じ			標準
		5	積分法	数Ⅲ	パラメータで与えられた曲線（軸が傾いた放物線）が囲む図形の面積	やや難
		6	微分法，積分法	数Ⅲ	$f(x)=a\sin x+b\cos x+c\sin 2x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $6\sqrt{2}$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx=5\pi$．$a$，$b$，$c$ と $f(x)$ の最小値を求める	やや難

年度	文理	番号	範囲	科目	内容	難易
1960	1次文	1	直線の方程式	数Ⅱ	3直線でできる三角形が △ABC の中点を頂点とするとき A，B，C を求める	標準
		2	連立方程式	数Ⅰ代数	1直線上にない3点において $ax+(a+b)y+(a+b+c)=1$ をみたすとき a，b，c を求める	やや易
		3	円の方程式	数Ⅱ	x 軸と直線に接し接点の x 座標が与えられている円の中心座標	標準
		4	因数定理	数Ⅱ	x^3+Ax^2+Bx+2 が x^2+ax+b，x^2+bx+a で割り切れるとき A，B，a，b を求める	やや難
		5	2次関数，三角関数，対数関数	数Ⅰ代数・数Ⅰ幾何	2つの関数の大小判定．4問	標準
	1次理	1	分数関数，値域	数Ⅱ	分数で範囲が与えられた2つの分数関数のそれぞれの値域	標準
		2	連立方程式	数Ⅰ代数	4文字 x_1，x_2，y_1，y_2 に係数 α の5文字の連立方程式	やや難
		3	必要条件・十分条件，方程式，不等式	数Ⅰ幾何・数Ⅰ代数	方程式，不等式についての必要条件，十分条件．4問	標準
		4	円の方程式	数Ⅱ	円を折り返し，弦に接する．接点の座標から折り返した円の中心と折り返した弦の中点を求める	やや易
		5	対数	数Ⅰ代数	対数 $\log_2 23$，$\log_4 31$，$\log_3 140$，$\log_5 56$ の近似整数	標準
	2次数Ⅰ代数	1	2次関数，相似	数Ⅰ代数・数Ⅰ幾何	三角形の底辺に平行線を引き，できる台形の面積の最大値	やや易
		2	整数，文章題	数Ⅰ代数	水道料金の表から料金の基礎を明らかにする	やや易
	2次数Ⅰ幾何	1	平面図形，図形の移動	数Ⅰ幾何	三角形の各辺について外心の対称点が作る三角形は元の三角形と合同であることの証明	標準
		2	円	数Ⅰ幾何	弓形の面積を弦の長さ，弧の長さ，弦の中点と弧の中点の距離で表す	標準
	2次数Ⅱ	1	軌跡，判別式	数Ⅱ	放物線が放物線に接しながら平行移動するとき，頂点の軌跡	標準
		2	三角関数，加法定理	数Ⅱ	柱の赤い部分を見込む角が45°以上である広場の部分	標準
	2次数Ⅲ	1	微分法	数Ⅲ	$y=x^2+\frac{1}{4}$ の接線と法線が x 軸を切り取る部分の長さの最小値	標準
		2	整式の積分，体積	数Ⅲ	三角形の穴の上に球をのせる．球の表面より上の部分の体積	標準
1959	1次文	1	直線の方程式	数Ⅱ［解析Ⅰ］	平行四辺形の2辺の方程式ともう1点から他の点の座標を求める	標準
		2	2次方程式	数Ⅰ代数［解析Ⅰ］	$x^2-px-1=0$ の解の正負と p による増減	やや易
		3	直線の方程式	数Ⅱ［解析Ⅰ］	2直線 $(2-a)x+2y=0$，$2x-(1+a)y=0$ の一致条件	やや易
		4	平面図形，垂線	数Ⅰ幾何［幾何］	三角形の1頂点を通る直線への正射影の最大値，垂線の長さの和の最大値	標準
		5	対数，大小判定	数Ⅰ代数［解析Ⅰ］	1，$\log_a 2.5$，$2.5\log_{10}a$，$(\log_a 2)(\log_a 3)$ の大小判定 $(a=e)$	標準
	1次理	1	高次関数	数Ⅰ代数［解析Ⅰ］	4つの関数 $\frac{x^k}{k!}(k=1, 2, 3, 4)$ の大小判定	やや易
		2	恒等式	数Ⅰ代数［解析Ⅰ］	恒等式 $(x-a)^2(bx-x^2-1)=(x-c)^2(dx-x^2-1)$	標準
		3	円の方程式	数Ⅱ［幾何］	円が2円に接し x 軸にも接する．円の半径，接点の x 座標を求める	標準
		4	直線の方程式	数Ⅱ［幾何］	長方形を平行線で切って六角形を作る	標準
		5	2次関数，最大・最小	数Ⅰ代数［解析Ⅰ］	一定の長さの‘さく’で囲まれた図形の面積の最大値	標準
	新2次数Ⅰ代数	1	不等式，不等式と領域，一次変換	数Ⅰ代数	長方形の一次変換．図示，面積比	やや難
		2	2次方程式，速度・加速度，近似値	数Ⅰ代数	落体の運動の相対誤差	やや難
	新2次数Ⅰ幾何	1	平面図形，円，三角関数	数Ⅰ幾何	2つの円弧と直線の交点の作る線分長さの最大値	標準
		2	三角比	数Ⅰ幾何	三角形の各辺からの距離 h が等しい3辺の作る三角形．周の長さが $\frac{1}{2}$ のとき h の大きさを求める	標準
	新2次数Ⅱ	1	軌跡，三角関数，倍角公式	数Ⅱ	三角関数のパラメータ曲線（リサジュー曲線）の図示．4問	標準
		2	軌跡，複素数平面	数Ⅱ	2次方程式の虚数解の軌跡	やや難
	新2次数Ⅲ	1	積分法	数Ⅲ	$\int_0^{\pi}(1-a\sin x-b\sin 2x)^2\,dx$ の最小値	標準
		2	整式の積分，体積	数Ⅲ	ねじれ四辺形の回転体の体積	標準
	旧2次解析数Ⅰ	1	新2次数Ⅰ代数第1問と同じ	旧解析Ⅰ		やや難
		2	新2次数Ⅱ第2問と同じ	旧解析Ⅰ		やや難
		3	新2次数Ⅰ代数第2問と同じ	旧解析Ⅰ		やや難
	旧2次解析数Ⅱ	1	新2次数Ⅱ第1問と同じ	旧解析Ⅱ		標準
		2	新2次数Ⅲ第1問と同じ	旧解析Ⅱ		標準
		3	新2次数Ⅲ第2問と同じ	旧解析Ⅱ		標準
	旧2次幾何	1	新2次数Ⅰ幾何第1問と同じ	旧幾何		標準
		2	新2次数Ⅰ幾何第2問と同じ	旧幾何		標準
		3	立体図形	旧幾何	直方体を三角形で分割したとき，長さの比，内接する四面体の体積	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1958	1次文	1	連立方程式	解析Ⅰ	x，y，z の連立1次方程式と $x^2+1+z^2=26$ から未知係数と解を求める	標準
		2	2次方程式	解析Ⅰ	2次方程式の係数の範囲と解の範囲を求める	やや易
		3	絶対値を含む関数，2次関数	解析Ⅰ	絶対値付2次関数の最大値，最小値，およびそれを与える x を求める	やや易
		4	曲線の方程式，分数関数	解析Ⅰ	$(x-1)^m(y-2)^n=1(m=1,\ 2,\ n=1,\ 2)$ のグラフの選択．4問	やや難
		5	対数関数，三角関数	解析Ⅰ	$\log_x 2$ の x がそれぞれ $\tan 230°$，$\tan 605°$，$\sin 1100°$，$\cos 770°$ のときの大小判定	やや難
	1次理	1	恒等式	解析Ⅰ	x^4-4x+a が $(x-b)^2$ で割り切れる条件，および商を求める	標準
		2	直線の方程式	解析Ⅰ	三角形を作る2頂点の座標から3直線を決定	標準
		3	円の方程式	解析Ⅰ	2円の方程式，2交点の座標，2交点を通る円の中心の軌跡の関係	標準
		4	三角関数	解析Ⅰ	$y=\sin^4 x+\cos^4 x$ のとりうる値の範囲，$y=\dfrac{13}{25}$ のとき，大きい方の解を α とする．その $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値を求める	標準
		5	対数座標	解析Ⅰ	対数目盛の直線グラフからもとの関数を求める．3問．択一	標準
	2次 解析Ⅰ	1	2次方程式，三角関数	解析Ⅰ	三角関数を係数にもつ2次方程式の実解条件	標準
		2	近似値	解析Ⅰ	正比例の近似値から最良近似を求める．最小2乗法，絶対値法それぞれによる	標準
		3	不等式と領域	解析Ⅰ	2交直線で区切られた領域の反転	やや難
	2次 解析Ⅱ	1	数列，連立漸化式，数列の極限	解析Ⅱ	対称性のある連立漸化式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ の極限．	標準
		2	整式の積分，体積	解析Ⅱ	円柱を直径を通る平面で斜めに切ってできる体積	標準
		3	微分法，速度・加速度	解析Ⅱ	斜面を等加速度で下って，水平面を等速で移動するときの最短降下時間	やや難
	2次 幾何	1	方べきの定理	幾何	四角形の各辺が円の弦の3等分点になっている．この四角形の面積	標準
		2	軌跡	幾何	弧ABの3等分点の軌跡	やや難
		3	立体図形	幾何	直円錐と内接球の体積比が 2：1 のとき，直円錐の半径と高さの比を求める	標準
	2次 一般 数学	1	近似値，誤差の計算	一般数学	連立1次方程式の係数に誤差があるとき x の範囲	標準
		2	不等式	一般数学	選挙開票途中の当選可能性	標準
		3	論理	一般数学	スイッチとランプに関する問題	標準
1957	1次文	1	直線の方程式	解析Ⅰ	垂直二等分線と等距離な一方の点が与えられたとき，もう一方の点を求める	標準
		2	2次関数	解析Ⅰ	2次関数の最大になる x と通る点，係数の関係からその関数と最大値を求める	標準
		3	3次方程式	解析Ⅰ	3次方程式の1解から係数を定め虚数解を求める	標準
		4	円の方程式	解析Ⅰ	円束，常に通る点，中心の軌跡を求める	標準
		5	指数・対数，三角比	解析Ⅰ	指数または対数の整数部分を求める．3問	標準
	1次理	1	平面座標	解析Ⅰ	定点Bとの距離と傾きからAの座標，△OABの面積を求める	標準
		2	連立方程式	解析Ⅰ	3次多項式の3次差分からもとの多項式を求める	標準
		3	図形と方程式	解析Ⅰ	パラメータの2次式で与えられた点が直線上を動く．直線の方程式を求める	標準
		4	図形と方程式，二次曲線，双曲線，整式の積分	解析Ⅰ・解析Ⅱ	4個の面積の大小比較．交円の共通部分，楕円，放物線と直線の囲む部分，長方形	標準
		5	三角関数	解析Ⅰ	$\sin^2\theta$，$\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+30\right)°$，$\sin\theta°\cos\theta°$，$\dfrac{1}{1+\tan 3\theta°}$ の周期を求める	やや易
	2次 解析Ⅰ	1	いろいろな関数，平面図形	解析Ⅰ	単位正方形内で光線が3回目に反射する点の $x+y$	標準
		2	平面座標	解析Ⅰ	三角形の面積を二等分する直線	標準
		3	不等式と領域，対数	解析Ⅰ	対数を含む $(x,\ y)$ の不等式の表す領域．図示	標準
	2次 解析Ⅱ	1	2次関数，整式の微分	解析Ⅰ/解析Ⅱ	2動点間の距離の最小値を与える時刻を求める	標準
		2	微分法，積分法	解析Ⅱ	球状の容器の底から水が流れ出る．水面の降下速度が最小となる位置，時刻を求める	やや難
		3	個数	解析Ⅱ	5×4 の格子状に並んだ点から3点をとってできる三角形の個数	標準
	2次 幾何	1	三角比	幾何	AMを中線とするとき，∠BAM＋∠ACB＝直角となる△ABCの形状	やや難
		2	三角比	幾何	頂角が45°，60°，75°で外接円の半径が r の三角形の面積を求める	やや易
		3	円の方程式，軌跡	幾何	円の接点Qの接線上にP，定点Aについて AP＝2PQ となるときのPの軌跡	標準
	2次 一般 数学	1	数列，対数，利息計算	一般数学	貯金高の推移．大小の変化．	標準
		2	投影図，展開図	一般数学	円錐台の側面上における最短コースの距離	標準
		3	論理	一般数学	石とりゲーム．必勝法	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1956	1次文 解析Ⅰ	1	論理	解析Ⅰ	$a>b$，$a^n>b^n$ が同時に成り立つ条件，a，b の正負，n の偶奇で6問	やや難
		2	図形と方程式，軌跡	解析Ⅰ	円と直線が交わる条件，切りとる弦の中点の軌跡	標準
		3	分数関数，相加平均・相乗平均の関係	解析Ⅰ	分数関数の決定．最小値	標準
		4	三角関数，不等式	解析Ⅰ	$\sin 870°$，$\cos(-430)°$，$\tan 1310°$，$\sin(-2095)°$，$\cos 1900°$ の大小判定	標準
	1次理 解析Ⅰ	1	整式の割り算	解析Ⅰ	x^{10} を $x^4+x^3+x^2+x+1$ で割った余り	標準
		2	連立方程式	解析Ⅰ	3元1次連立方程式が2組以上の解をもつ条件	やや難
		3	分数関数	解析Ⅰ	$\dfrac{x^2+3}{x-1}$ の区間 $[2, 6]$，$[-6, -2]$ における最大・最小	標準
		4	二次曲線，双曲線	解析Ⅰ	双曲線 $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{36}=1$ と $(0, 8)$ を通る直線の交点の個数，場合わけ	標準
		5	対数関数，グラフの移動	解析Ⅰ	$y=\log_a x$ の平行移動対称移動．5問	標準
	2次 解析Ⅰ	1	2次関数，グラフの移動	解析Ⅰ	1つの放物線上の異なる2点が $x+y=0$ に関して対称	標準
		2	高次方程式，共通解	解析Ⅰ	2つの方程式 $x^3-ax-2b=0$，$x^3-bx-2a=0$ の共通解．ただ1つ．他は虚数解	標準
		3	図形と方程式	解析Ⅰ	円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y^2=4p(x-\alpha)$ の共有点の個数	標準
	2次 解析Ⅱ	1	整式の微分，三角関数，倍角公式	解析Ⅱ	三角関数の式の最大・最小．$t=\cos\theta$ とおける	標準
		2	整式の積分	解析Ⅱ	$(-1, 1)$，$(1, 1)$ を通る上に凸な放物線と x 軸が囲む面積の最小値	標準
		3	確率，数列の極限	解析Ⅱ	$10n$ 本のくじから10本をひき当りくじが丁度1本である確率およびその極限	標準
	2次 幾何	1	平面図形，軌跡	幾何	円Oの直径と定点Aが作る三角形の外心の軌跡	やや難
		2	平面座標，軌跡	幾何	原点を通る半径一定の円と x 軸，y 軸との交点を両端とする弦の3等分点の軌跡	標準
		3	立体図形，体積	幾何	y 軸をまたぐ三角形の y 軸についての回転体の体積	標準
	2次 一般数学	1	数列，漸化式	一般数学	アルコールの濃度．操作の回数に対する漸化式	標準
		2	数列，漸化式，利息計算	一般数学	借金金利について，3項漸化式を作る	標準
		3	投影図	一般数学	三角形の投影図から角度図示．面積計算	標準
1955	1次文 解析Ⅰ	1	2次関数	解析Ⅰ	3点通過放物線の決定，それを3だけ下方に平行移動	やや易
		2	円の方程式，点と直線の距離	解析Ⅰ	方程式で与えられた円の中心，半径，x 軸との交り，直線との距離の最小値を求める	標準
		3	分数不等式	解析Ⅰ	3つの分数不等式が常に成り立つかどうか判定	標準
		4	対数，桁	解析Ⅰ	与えられた3数の桁・小数以下初めて0以外の出現する桁．3問	標準
		5	三角関数	解析Ⅰ	$\sin(90°+\theta)$，$\cos(\theta-90°)$，$\tan(180°-\theta)$ の簡略化，択一	やや易
	1次文 幾何	1	必要十分	幾何	四角形に関する必要条件，十分条件．4問	標準
		2	図形計量	幾何	等脚台形の計量．4問	標準
		3	軌跡	幾何	2定点で定まる4つの軌跡	標準
		4	1次文科解析Ⅰ・Ⅱと同じ	幾何		標準
		5	1次文科解析Ⅰ・Ⅴと同じ	幾何		やや易
	1次理 解析Ⅰ	1	整式の割り算	解析Ⅰ	x^2-1，x^2+1 で割った余りから3次式を求める	標準
		2	平面座標	解析Ⅰ	平行四辺形の3頂点の座標から第4の頂点，対角線の交点，長さ，面積を求める	標準
		3	対数	解析Ⅰ	$\dfrac{3}{2}$，$\log_3 0.6$，$\log_2 \sqrt[3]{24}$，$\log_4 5$，$\log_5 4$ の大小判定	標準
		4	2次関数	解析Ⅰ	モデルの関数のグラフと係数の符号を変えた関数の関係，グラフの選択	標準
	1次理 幾何	1	必要条件・十分条件，平面図形	幾何	三角形，四角形について必要条件，十分条件．5問	標準
		2	1次理科解析Ⅰ・Ⅱと同じ	幾何		標準
		3	方べきの定理，接弦定理	幾何	定円の直径の延長上の点から接線を引き長さ面積を求める	標準
		4	軌跡	幾何	2定直線で定まる軌跡について4問	標準
	2次 解析Ⅰ	1	2次不等式	解析Ⅰ	2変数2次不等式が常に正になる条件	標準
		2	2次方程式，三角関数	解析Ⅰ	三角関数を係数とする2次方程式の共通解	標準
		3	2次関数，平面図形	解析Ⅰ	長方形に内接する2円の面積の和の最大・最小	標準
	2次 解析Ⅱ	1	関数の極限	解析Ⅱ	$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+x^{-n-1}}{x^n+x^{-n}}$，$y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\cos^2\pi x+n\sin^2\pi x}$ のグラフ図示	標準
		2	平面座標，最大値	解析Ⅱ	定正方形と等積三角形の共通部分の面積の最大値	やや難
		3	整式の積分	解析Ⅱ	$y>x$，$y<x^3$，$x<a$ の部分の面積	標準
	2次 幾何	1	平面図形，面積	幾何	三角形に外接する平行四辺形の面積移動	標準
		2	軌跡	幾何	円の直径両端を通り定直線に接する円の中心の軌跡	やや難
		3	空間図形	幾何	正三角形の正射影から元の正三角形の1辺を求める	やや難
	2次 一般数学	1	数列，対数	一般数学	複利と定額引出し引出せなくなるまでの年数	やや難
		2	投影図	一般数学	投影図から体積を求める	やや易
		3	確率	一般数学	四捨五入したときとしないときの誤差の確率	標準

年度	文理	番号	範囲	科目	内容	難易
1954	解析Ⅰ	1	二次曲線，双曲線	解析Ⅰ	$y=\sqrt{x^2+x+1}$ のグラフの図示	やや易
		2	不等式と領域，2 次方程式の理論	解析Ⅰ	単位円の内部に対して点 $(x+y,\ xy)$ の存在範囲	標準
		3	対数	解析Ⅰ	方程式 $\log_{10}ax\log_{10}bx+1=0$ の実解条件	やや易
	解析Ⅱ	1	三角関数，合成公式	解析Ⅱ	$a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x$ の最大・最小．2 倍角の合成．	やや易
		2	微分法	解析Ⅱ	底辺が $7a$，等辺が $2a$ の等脚台形の面積が最大になる高さ	やや難
		3	積分法，体積	解析Ⅱ	x 軸に 2 回接する4 次関数と x 軸の囲む図形を y 軸回転してできる立体の体積	標準
	幾何	1	平面図形，円周角	幾何	2 円の交点を通る平行な辺をもち，2 円の周上にそれぞれ 2 頂点がある四角形の面積の最大値	やや難
		2	軌跡，二次曲線	幾何	P から定直線に下した垂線の足を Q とする．AP：AQ が一定の点の軌跡	標準
		3	空間図形，軌跡	幾何	3 定点からの距離の 2 乗和が一定の点の軌跡	やや難
	一般数学	1	近似値	一般数学	1 弧度を π を使って 30 秒以内の誤差で表すための π の精度	標準
		2	場合の数，確率	一般数学	4 クラスから 3 人ずつの選手競走の組合せの個数	標準
		3	投影図	一般数学	立方体の平面図が正六角形のときの立面図	標準
1953	解析Ⅰ	1	2 次関数	解析Ⅰ	三角形を底辺に垂直な直線で区切った一方を x の関数とする，そのグラフ	やや易
		2	2 次関数	解析Ⅰ	定長線分を切って 3 つの等積な長方形に区切るとき面積の最大値	やや易
		3	対数	解析Ⅰ	$(\log_a x)^2$，$\log_a x^2$，$\log_a(\log_a x)$ の大小判定	標準
	解析Ⅱ	1	分数関数，グラフの移動，微分法	解析Ⅱ	$y=Ax+B+\dfrac{C}{x}$ が，原点対称な条件，$y=0$ とならない条件，極値をとらない条件	標準
		2	三角関数，合成公式	解析Ⅱ	$y=\lvert\sin x+\cos x-1\rvert$ のグラフの図示	標準
		3	整式の積分	解析Ⅱ	$y=x^2$ と $(1,\ 2)$ を通る直線が囲む図形の面積の最小値	標準
	幾何	1	直線の方程式	幾何	4 直線が囲む凸四角形の面積	標準
		2	二次曲線	幾何	楕円上の点を焦点とし楕円の焦点を通る放物線の準線が定円に接する証明	やや難
		3	立体図形，三角関数	幾何	正 n 角形から 1 角を切り取って作られる正 $(n-1)$ 角錐の体積	標準
	一般数学	1	利息計算，近似値	一般数学	手形の理論価格と銀行価格の比較	標準
		2	確率	一般数学	白球の個数の異なる袋から 1 個ずつ取り出して赤球が 2 個以上出る確率	標準
		3	点の運動，有理数・無理数	一般数学	2 つの正方形を周回する 2 つの動点が初めて出会う時刻	やや難
1952	解析Ⅰ	1	分数関数	解析Ⅰ	$f(x)=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ のグラフの図示	標準
		2	2 次方程式の理論	解析Ⅰ	$ax^2+(1-5a)x+6a=0$ が $x>1$ の 2 解をもつ条件	標準
		3	対数，不等式	解析Ⅰ	$\dfrac{\log_{10}a+\log_{10}b+\log_{10}c+\log_{10}d}{4}$ と $\log_{10}\dfrac{a+b+c+d}{4}$ の大小判定	標準
	解析Ⅱ	1	数列，漸化式，数列の極限	解析Ⅱ	$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}+a_n}{2}$ の $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求める	標準
		2	点の移動	解析Ⅱ	点 $(1,\ 1)$ を原点中心に 30° 回転した点の座標を求める	標準
		3	整式の積分	解析Ⅱ	$f(x)=x^3+x^2+x+1$，$f(1)=g(1)$，$f(-1)=g(-1)$，$\int_{-1}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2dx$ が最小となる 2 次関数 $g(x)$	標準
	幾何	1	点の移動	幾何	2 回の対称移動が回転であることの証明，三角形について各角のまわりの 2 倍の回転移動のくり返し．合計 360° の回転	やや難
		2	軌跡	幾何	半径が $\dfrac{R}{2}$ の内擺線（サイクロイド）．実は線分	標準
		3	立体図形，体積	幾何	立方体に内接する正四面体の体積	やや易
	一般数学	1	場合の数	一般数学	4 つの三角形を 4 色に色塗り	標準
		2	場合分け，整数	一般数学	タクシーの大型と小型の料金の差	標準
		3	空間図形	一般数学	棒の影の長さ	標準
1951	解析Ⅰ	1	方程式	解析Ⅰ	方程式 $\lvert x^2-1\rvert+x+k=0$ の実数解の個数	標準
		2	不等式と領域，二次曲線，双曲線	解析Ⅰ	$f(x)=x^2-xy-6$，$g(x)=x^2-y^2-1$ のとき $f(x)<0$，$g(x)<0$ および $f(x)g(x)<0$ の領域	標準
		3	三角関数，対数	解析Ⅰ	山の高さを三角関数表，対数表を使って近似計算をする	標準
	解析Ⅱ	1	微分法	解析Ⅱ	定積円柱の表面積の最小値	標準
		2	曲線長	解析Ⅱ	円の伸開線の長さ	やや難
		3	整式の積分	解析Ⅱ	放物線と円が囲む部分の面積	標準
	幾何	1	平面図形，軌跡	幾何	正方形 ABCD の辺 CB，CD 上の CE=CF をとる．E から AF に下した垂線の足の軌跡	やや難
		2	二次曲線，放物線	幾何	焦点を通る放物線の弦を直径とする円が準線に接する証明	標準
		3	立体図形	幾何	立方体の 6 辺の中点を結んでできる 6 角形が正 6 角形であることの証明	標準
	一般数学	1	確率，検定	一般数学	不良品の割合	やや易
		2	文章題	一般数学	時計の針が直角になる時刻	やや易
		3	数列，対数，利息計算	一般数学	甲乙 2 人の元利合計の大小．誤差の評価	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　容	難易
1950	共通	1	1 次関数	解析 I	2 点を通る直線について穴埋め．5 問	易
		2	論理	幾何	図形に関する真偽判定，反例提示．5 問	やや易
	解析 I	1	不等式と領域	解析 I	2 変数関数の正負．領域を $-x \leqq x \leqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$ に図示．5 問	標準
		2	2 次関数	解析 I	$2x^2+3mx+2m$ の最小値の最大値	やや易
		3	対数，三角関数	解析 I	対数値の計算，桁数．4 問	やや易
	解析 II	1	極限	解析 II	いろいろな極限．4 問	やや易
		2	分数関数	解析 II	$f(x)=\dfrac{1-x}{2+x^2}$ の増減・極値・グラフ	標準
		3	積分法，体積	解析 II	$y=\sin x (0 \leqq x \leqq \pi)$ の x 軸回転体の体積	標準
	幾何	1	真偽判定	幾何	図形に関する真偽判定，反例図示．4 問	標準
		2	楕円	幾何	楕円の接線に焦点から下した垂線の足が定円周上にあることの証明	やや難
		3	軌跡，円	幾何	2 円の交点の一方を通る直線を定比に内分する点の軌跡	やや難
	一般数学	1	不等式	一般数学	鶏卵と牛肉のたんぱく質と熱量	やや易
		2	資料の整理	一般数学	平均値の計算．仮平均の利用．身長の平均値の計算	やや易
		3	立体図形，投影図	一般数学	屋根の投影図から屋根の面積，稜の長さ，稜の傾きを求める問題	標準

1949	共通	1	真偽判定	解析 1	整数，等式不等式の同値変形，比例関係，真偽判定，反例提示．5 問	やや易
		2	平面図形	幾何	図形に関する穴埋め問題．5 問	やや易
	解析 1	1	2 次関数，指数関数，対数関数，三角関数	解析 1	いろいろな関数のグラフをえがく．5 問	やや易
		2	2 次関数	解析 1	$y=ax^2+bx+c$ の y の正負に関する穴埋め．5 問	標準
		3	三角関数	解析 1	直径 AB に対して周上の P，3AP＋4BP の最大値を求める	標準
	解析 2	1	数列の極限，真偽判定	解析 2	数列の極限について真偽判定．反例．5 問	標準
		2	整式の微分	解析 2	直円錐の内部にある体積最大の直円柱	標準
		3	整式の積分	解析 2	3 点 $(0, -5)$，$(2, 3)$，$(4, 3)$ を通る放物線の決定．x 軸と囲む面積	標準
	幾何	1	平面図形，真偽判定	幾何	平面図形について真偽判定．反例図示．5 問	標準
		2	平面図形，相似	幾何	三角形を分割して 2 つの相似三角形になる三角形の形状は何か	標準
		3	二次曲線	幾何	円と直線に接する円の中心の軌跡	標準

下巻 目次

第 5 章　1985〜1996(昭和 60〜平成 8）年　1
国公立複数受験可能化から後期試験の登場

5.1　第 5 次指導要領改訂（1985 年）　3
問題解答（1985〜1986 年）　4
1985 年　1986 年
5.2　国公立複数受験可能制度（1987 年）　40
問題解答（1987〜1989 年）　41
1987 年　1988 年　1989 年
5.3　後期試験の実施（1990 年）　89
問題解答（1990〜1996 年）　91
1990 年　1991 年　1992 年　1993 年　1994 年
1995 年　1996 年

第 6 章　1997〜2005（平成 9〜平成 17）年　255
数学 I，数学 A，数学 II，数学 B，数学 III，数学 C の形式など現代につながる形式の完成

6.1　第 6 次指導要領改訂（1997 年）　257
問題解答（1997〜2005 年）　259
1997 年　1998 年　1999 年　2000 年　2001 年
2002 年　2003 年　2004 年　2005 年

第 7 章　2006〜2014（平成 18〜平成 26）年　443
後期試験数学の廃止

7.1　第 7 次指導要領改訂（2006 年）　445
問題解答（2006〜2007 年）　446
2006 年　2007 年
7.2　後期試験数学の廃止（2008 年）　490
問題解答（2008〜2014 年）　491
2008 年　2009 年　2010 年　2011 年　2012 年
2013 年　2014 年

第 8 章　2015〜2020（平成 27〜令和 2）年　行列の消滅と新しい入試の時代へ 593

8.1　第 8 次指導要領改訂（2015 年），後期試験の廃止（2016 年） 595

問題解答（2015〜2020 年） 596

2015 年　2016 年　2017 年　2018 年　2019 年　2020 年

巻末資料 689

受験形式 691

入試範囲 692

指導要領の変遷と東大入試 694

出典 695

解答作成に至るまで多くの人の協力に感謝いたします 696

おわりに 697

COLUMN 目次

A 日程，B 日程騒動（1987 年） 61

数学と物理 254

超難問（1988 年後期） 299

$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$（1999 年共通） 301

π の値に関する問題（2003 年理科） 394

エッシャーの絵とタイリング 592

数学と囲碁・将棋 642

数学ができる人は頭がよい？ 688

東京大学数学入試問題一覧表（1985〜2020 年）

上巻 目次 概要

第 1 章 1949〜1958（昭和 24〜昭和 33）年 1
新制東大の発足，おおらかな時代

第 2 章 1959〜1965（昭和 34〜昭和 40）年 183
数 I 代数・数 I 幾何の時代，初等幾何の終焉

第 3 章 1966〜1975（昭和 41〜昭和 50）年 323
複素平面，ベクトルの登場から紛争の時代

第 4 章 1976〜1984（昭和 51〜昭和 59）年 491
数学の現代化と行列の登場，共通一次試験の登場

【第5章】

1985~1996(昭和60~平成8)年

国公立複数受験可能化から後期試験の登場

5.1　第 5 次指導要領改訂（1985 年）

第 5 次指導要領改訂は小学校で 1977 年から準備され，高校では 1982 年から実施され，入試には 1985 年から実施された．

教科名は「数学Ⅰ」,「代数・幾何」,「基礎解析」,「微分・積分」,「確率・統計」と変わった．また，共通一次試験のために「数学Ⅱ」という教科があり，主に旧「数学Ⅰ」の範囲で，新「数学Ⅰ」に入らなかった分野を「代数・幾何」,「基礎解析」,「確率・統計」からピックアップして選択履修する教科であった．この時期の共通一次試験は「数学Ⅰ」と「数学Ⅱ」であり,「数学Ⅱ」は 3 題（「代数・幾何」,「基礎解析」,「確率・統計」）から 2 題の選択制であった．

この改訂は後に批判をうける「ゆとり教育」というスローガンが掲げられた．

このときの改訂は小幅であったが「数学Ⅰ」のみが必修であとは選択制になったことが最も大きかった．内容では,「代数・幾何」に二次曲線が復活したことと，確率が主に理系向き（？）の教材になったことが注目される．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1985〜1986）

1985 年　文科第 2 問は座標幾何的な問題だが，見方によっては初等幾何的な問題と見ることができる．しかし，この頃から初等幾何的な問題は徐々に減ってゆき，解析的な問題が主流となる．むしろ空間図形で直観力を試す問題は引き続き出題されている．

1986 年　文科第 1 問は 2 次関数の区間内における最小値が 0 になる条件を求める問題．一見どうという問題に見えないが，適度で受験生の学力を見る問題で，塾のテキストのスタンダードになっている．

このころ　あんなこと・こんなこと

1985 年の G5 の蔵相会議で円高の方向が合意されその結果として，円高不況の後バブル景気といわれる投機熱が起こった（1986 年〜1991 年）．

日航機墜落（1985 年），搭乗の坂本九死亡．

労働者派遣法（1986 年）制定．これが不況期に極悪な労働環境と労働者の格差を生み出す原因になった．

チェルノブイリ原発事故（1986 年）．今から思うと他人事ではなかった．

ドラゴンクエスト発売，テーマミュージックがクラシック調で画期的だった（1986 年）．

このころの河合塾

1985 年　横浜校開校．

1986 年　池袋校開校．

1985 年　文科

第 1 問

a，b は $a^2+b^2 \neq 0$ なる実数とし，

$$A=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。行列 A^3，$(I-A)^2$ の表す一次変換による点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の像を，それぞれ Q，R とする。ただし Q，R はいずれも P と一致しないものとする。

(1)　$\angle\mathrm{QPR}$ の大きさを求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を a，b，x，y を用いて表せ。

分　野

代数・幾何：一次変換

考え方

すなおに計算しても何とかなる．実は行列 A は正射影を表す行列である．そのことに気づけば見通しがよい．

【解答 1】　すなおに成分計算

$$A^2=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\begin{pmatrix} a^4+a^2b^2 & ab(a^2+b^2) \\ ab(a^2+b^2) & a^2b^2+b^4 \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}=A.$$

$$\therefore\quad A^3=A^2=A.$$

$$(I-A)^2=I-2A+A^2=I-2A+A=I-A$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A^3\overrightarrow{\mathrm{OP}}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x+aby \\ abx+b^2y \end{pmatrix}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(I-A)^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(I-A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b^2x-aby \\ -abx+a^2y \end{pmatrix}=\frac{bx-ay}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.$$

(1)　$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{ax+by}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} (ax+by)a-(a^2+b^2)x \\ (ax+by)b-(a^2+b^2)y \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} aby-b^2x \\ abx-a^2y \end{pmatrix}=\frac{bx-ay}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}=-\overrightarrow{\mathrm{OR}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{(bx-ay)(ax+by)}{(a^2+b^2)^2}(ab-ab)=0.$$

Q，R はいずれも P と一致しないから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\neq\vec{0}$．

よって $\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{2}$.　…(答)

(2)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\frac{1}{2}\left|\frac{(bx-ay)(ax+by)}{(a^2+b^2)^2}(a^2+b^2)\right|=\frac{|bx-ay||ax+by|}{2(a^2+b^2)}.$$　…(答)

【解答 2】　A が正射影を表すことを使って

⑴　$\overrightarrow{e}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ とおくと，$\overrightarrow{e}\perp\overrightarrow{f}$，$|\overrightarrow{e}|=|\overrightarrow{f}|=1$.

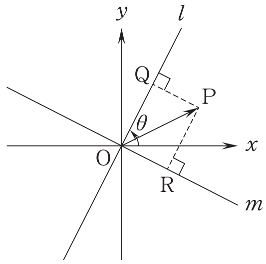
$$A\overrightarrow{e}=\overrightarrow{e},\quad A\overrightarrow{f}=\overrightarrow{0}.$$

したがって A は原点を通り $\overrightarrow{e}$ を方向ベクトルとする直線 l への正射影を表す．

また，

$$(I-A)\overrightarrow{e}=\overrightarrow{0},\quad (I-A)\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}$$

だから，$I-A$ は原点を通り $\overrightarrow{f}$ を方向ベクトルとする直線 m への正射影を表す．



$$\therefore\quad A^2=A，より，A^3=A，(I-A)^2=I-A.$$

したがって，P，Q，R の位置は右図の通り．

$$\therefore\quad \angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}.\qquad\cdots(答)$$

⑵　図より $\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OPQ}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^2x+aby \\ abx+b^2y \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{a^2+b^2}|x(abx+b^2y)-y(a^2x+aby)|=\frac{|(ax+by)(bx-ay)|}{2(a^2+b^2)}.\quad\cdots(答)$$

（注）　$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ とおくと，θ は l と x 軸とのなす角である．このとき，A は原点を通り x 軸と θ の角をなす直線 $\left(\overrightarrow{e}=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}に平行\right)$ への正射影を表す行列である．よって，

$$A=\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

⑴ の【別解】　ケイリー・ハミルトンの定理，転置行列を使って

⑴　ケイリー・ハミルトンの定理から

$$A^2-\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)A+\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\,\frac{b^2}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\,\frac{ab}{a^2+b^2}\right)I=O.\quad\therefore\quad A^2-A=O.$$

よって，$A^2=A$ より，$A^3=A$，$(I-A)^2=I-2A+A^2=I-A$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\{A^3+(I-A)^2\}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\{A+(I-A)\}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

よって，四角形 OQPR は平行四辺形である．

2 ベクトル $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の内積は列ベクトル $\overrightarrow{a}$ を行ベクトルに直したベクトル ${}^t\overrightarrow{a}=(a\quad c)$ と $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の行列としての積である．

行列 $M=\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ に対して，${}^tM=\begin{pmatrix} k & m \\ l & n \end{pmatrix}$ を転置行列という．列ベクトル $M\overrightarrow{a}$ を行ベクトルに直すと ${}^t(M\overrightarrow{a})={}^t\overrightarrow{a}\,{}^tM$ である．本問の A の転置行列は ${}^tA=A$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるからこれを行ベクトルに直すと

$${}^t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}={}^t(A\overrightarrow{\mathrm{OP}})={}^t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,{}^tA={}^t\overrightarrow{\mathrm{OP}}A.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}={}^t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}={}^t\overrightarrow{\mathrm{OP}}A(I-A)\overrightarrow{\mathrm{OP}}={}^t\overrightarrow{\mathrm{OP}}O\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0.$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OR}}$.

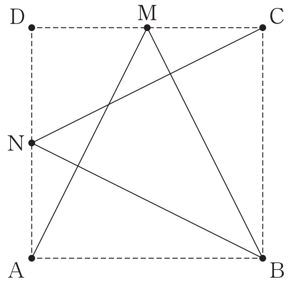
$$\therefore\quad \angle\mathrm{QPR}=\frac{\pi}{2}.\qquad\cdots(答)$$

第2問

図において，ABCD は一辺の長さ 1 km の正方形で，M，N はそれぞれ辺 CD，DA の中点である。

いま，甲，乙は同時刻にそれぞれ A，B を出発し，同じ一定の速さで歩くものとする。甲は図の実線で示した道 AMB 上を進み，乙は実線で示した道 BNC 上を進み，30 分後に甲は B に，乙は C に到着した。

甲，乙が最も近づいたのは出発後何分後か。また，そのときの両者の間の距離はいくらか。



分　野

数学 I ：平面図形，2 次関数

考え方

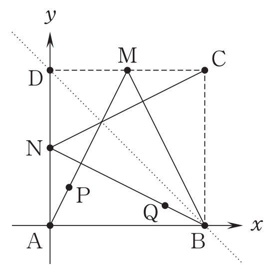
座標を立てて距離を丁寧に計算すれば何でもない．

出発後 t $(0 \leqq t \leqq 15)$ 分後と到着前 t 分では同じ距離であることに気づくと手間が省ける．

甲と乙の位置は常に正方形の中心について $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転した位置にある．このことに気づけば極めて容易になる．

【解答】 座標幾何

A を原点，AB が x 軸，AD が y 軸になるように 1 km を単位とする座標をとり，t 分後の甲の位置を P，乙の位置を Q とする．



(i) $0 \leqq t \leqq 15$ のとき，P の x 座標を x とすると，$0 \leqq x = \dfrac{t}{30} \leqq \dfrac{1}{2}$ で，P，Q の座標は

$$\mathrm{P}(x,\ 2x), \quad \mathrm{Q}(1-2x,\ x).$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ}^2 = (1-3x)^2 + x^2 = 10x^2 - 6x + 1 = 10\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}.$$

よって，$x = \dfrac{3}{10}$ のとき，PQ の長さは最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ をとる．このとき，$t = 30x = 9$.

(ii) $15 < t \leqq 30$ のとき，$\dfrac{1}{2} < x = \dfrac{t}{30} \leqq 1$ で，P，Q の座標は

$$\mathrm{P}(x,\ 2-2x), \quad \mathrm{Q}(2x-1,\ x).$$

$$\therefore \quad \mathrm{PQ}^2 = (x-1)^2 + (2-3x)^2 = 10x^2 - 14x + 5 = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{1}{10}.$$

よって，$x = \dfrac{7}{10}$ のとき，PQ の長さは最小値 $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ をとる．このとき，$t = 30x = 21$.

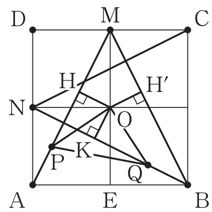
以上より，甲，乙の距離が最小になるのは 9 分後と 21 分後，そのときの距離は $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ km.　…(答)

(注) $15 < t \leqq 30$ のとき，甲，乙の動きを BD について対称移動すると，$0 \leqq t < 15$ のときの乙，甲の動

きを逆にたどった動きになる．

したがって，$t=30-9=21$ のときに PQ は最小になることがわかる．

【別解】 初等幾何



正方形 ABCD の中心を O とする．甲の進む道を O の回りに 90° 回転すると，乙の進む道となり，しかも 2 人は同時に出発し，同じ速さで歩く．

したがって，乙は常に甲の位置を O の回りに 90° 回転した位置にいる．甲，乙のいる位置をそれぞれ P，Q とすると，$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,\mathrm{OP}=\sqrt{2}\,\mathrm{OQ}$ となるから，甲，乙が最も近づくのは，P が O に最も近づくときである．

そのときの P，Q の位置を H，K とする．(H は線分 AM 上，K は線分 BN 上にとる)．また線分 AB の中点を E とする．

$\mathrm{MA}=\sqrt{\mathrm{EM}^2+\mathrm{EA}^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\mathrm{MO}=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{ME}=1$，$\triangle\mathrm{MOH}\backsim\triangle\mathrm{MAE}$ だから，

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{ME}}=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MA}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.\quad\therefore\quad \mathrm{MH}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\therefore\quad \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AM}}=1-\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{AM}}=1-\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{3}{5}.$$

AM を通過するのに 15 分かかるから P が H を通過するのは $15\times\dfrac{3}{5}=9$ 分後である．

$\mathrm{OH}=\dfrac{\mathrm{AE}}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ だから，$\mathrm{HK}=\sqrt{2}\,\mathrm{OH}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

また，線分 MB 上で P が O に最も近づく点 H′ を通過するのは $\mathrm{BH'}=\mathrm{AH}$ だから $30-9=21$ 分後である．

以上より，甲，乙の距離が最小になるのは 9 分後と 21 分後，そのときの距離は $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ km.　…(答)

第 3 問

n を 2 以上の整数とする。x^n+ax+b（a，b は実数の定数）の形の多項式 $f(x)$ で

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=0,\quad \int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$$

を満たすものを求めよ。この $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt,$$

$$G(x)=\int_{-1}^{x}F(t)\,dt$$

とおく。$G(x)$ が極大または極小となる点 x と，その点における $G(x)$ の値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の積分，整式の微分

考え方

$\dfrac{dG(x)}{dx}=F(x)$ という関係をつかえば簡単である．

なお n が偶数である場合と，奇数である場合とを分けて計算した方が不注意ミスを予防しやすいであろう．

【解答】

$f(x)=x^n+ax+b$.

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}(x^n+ax+b)\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-1}^{0}=\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{a}{2}+b=0. \qquad \cdots①$$

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{-1}^{1}=\frac{1+(-1)^n}{n+1}+2b=0. \qquad \cdots②$$

①，② から

$$a=-\frac{1-(-1)^n}{n+1},\quad b=-\frac{1+(-1)^n}{2(n+1)}.$$

(i) n が 3 以上の奇数のとき，

$$a=-\frac{2}{n+1},\quad b=0,\quad f(x)=x^n-\frac{2}{n+1}x. \qquad \cdots(答)$$

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\left(t^n-\frac{2}{n+1}t\right)dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^2}{n+1}\right]_{0}^{x}$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^2}{n+1}=\frac{x^2(x^{n-1}-1)}{n+1}.$$

$$G(x)=\int_{-1}^{x}F(t)\,dt=\int_{-1}^{x}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t^2}{n+1}\right)dt=\left[\frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{t^3}{3(n+1)}\right]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{x^{n+2}+1}{(n+1)(n+2)}-\frac{x^3+1}{3(n+1)}.$$

$G'(x)=F(x)$，n が奇数であることより $x^{n-1}-1$ の正負に注意して，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗		↘		↗

$x=-1$ で極大値 $G(-1)=0$，$x=1$ で極小値 $G(1)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{2}{3(n+1)}=\dfrac{-2(n-1)}{3(n+1)(n+2)}$

をとる．

(ii) n が 2 以上の偶数のとき，

$$a=0,\quad b=-\frac{1}{n+1},\quad f(x)=x^n-\frac{1}{n+1}. \qquad \cdots(答)$$

$$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\int_{0}^{x}\left(t^n-\frac{1}{n+1}\right)dt=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t}{n+1}\right]_{0}^{x}$$

$$=\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x}{n+1}=\frac{x(x^n-1)}{n+1}.$$

$$G(x)=\int_{-1}^{x}F(t)\,dt=\int_{-1}^{x}\left(\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{t}{n+1}\right)dt=\left[\frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{t^2}{2(n+1)}\right]_{-1}^{x}$$

$$=\frac{x^{n+2}-1}{(n+1)(n+2)}-\frac{x^2-1}{2(n+1)}.$$

$G'(x)=F(x)$，n が偶数であることより x^n-1 の正負に注意して，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$G'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x=-1$ および $x=1$ で極小値 $G(-1)=G(1)=0$，$x=0$ で極大値 $G(0)=\dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}$ をとる．

以上から極値をとる x とそのときの $G(x)$ は

$$(x,\ G(x))=\begin{cases}(-1,\ 0) & (n\text{ が奇数，極大のとき}),\\ \left(1,\ -\dfrac{2(n-1)}{3(n+1)(n+2)}\right) & (n\text{ が奇数，極小のとき}),\\ \left(0,\ \dfrac{n}{2(n+1)(n+2)}\right) & (n\text{ が偶数，極大のとき}),\\ (-1,\ 0),\ (1,\ 0) & (n\text{ が偶数，極小のとき}).\end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

t を正の数とする。xyz 空間において，点 $(t,\ t,\ 0)$ を P とし，x 軸を含み点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を Q，y 軸を含み点 $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面に関して P と対称な点を R とする。また，原点を O とする。

⑴ Q，R の座標を求めよ。

⑵ 4 点 O，P，Q，R を頂点とする 4 面体の体積を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間図形

考え方

平面について対称な点の求め方，三角形の面積の求め方，三角錐の体積の求め方等を座標で求める方法を押えておけば答は導かれる．

その上で，図形の特徴，対称性などを考慮した工夫をすることにより計算を回避できる．

⑴の【解答 1】　ベクトルで

x 軸を含み $(t,\ t,\ 1)$ を通る平面は $y-tz=0$．法線ベクトルは $(0,\ 1,\ -t)$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k(0,\ 1,\ -t)=(t,\ t+k,\ -kt).$$

PQ の中点 $\left(t,\ t+\dfrac{k}{2},\ -\dfrac{kt}{2}\right)$ は平面 $y-tz=0$ 上にあるから，$t+\dfrac{k}{2}+\dfrac{kt^2}{2}=0$．$k=-\dfrac{2t}{t^2+1}$．

$$\therefore\quad \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{t^3-t}{t^2+1},\ \frac{2t^2}{t^2+1}\right). \quad \cdots(\text{答})$$

同様に

$$\therefore\quad \mathrm{R}\left(\frac{t^3-t}{t^2+1},\ t,\ \frac{2t^2}{t^2+1}\right). \quad \cdots(\text{答})$$

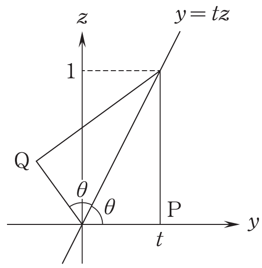
⑴の【解答 2】　*yz* 平面への正射影を考える

yz 平面への正射影は右図のようである．x 軸と点 $(t,\ t,\ 1)$ を含む平面は直線 $y=tz$ で表される．
$y=tz$ と y 軸のなす角を θ とすると Q の y 座標，z 座標は

$$y=t\cos 2\theta,\quad z=t\sin 2\theta.$$

$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ だから

$$\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad \sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{2t}{t^2+1}.$$



Q の x 座標は t だから，

$$\mathrm{Q}\left(t,\ \frac{t^3-t}{t^2+1},\ \frac{2t^2}{t^2+1}\right).$$ …(答)

以下【解答 1】と同様.

(2) の【解答 1】　三角形 PQR の面積を求めて

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(0,\ \dfrac{-2t}{t^2+1},\ \dfrac{2t^2}{t^2+1}\right)=\dfrac{2t}{t^2+1}(0,\ -1,\ t)$，同様に $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{2t}{t^2+1}(-1,\ 0,\ t)$.

よって，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\sqrt{(1+t^2)^2-t^4}=\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\sqrt{1+2t^2}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ に垂直なベクトルの 1 つは $(t,\ t,\ 1)$.

平面 PQR の方程式は $tx+ty+z=2t^2$.

原点 O との距離は $h=\dfrac{|2t^2|}{\sqrt{t^2+t^2+1}}=\dfrac{2t^2}{\sqrt{2t^2+1}}$.

よって，四面体 OPQR の体積は

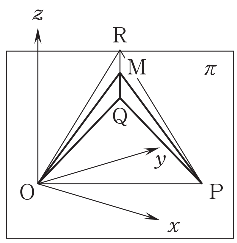
$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\sqrt{2t^2+1}\cdot\frac{2t^2}{\sqrt{2t^2+1}}=\frac{4t^4}{3(t^2+1)^2}.$$ …(答)

(2) の【解答 2】　立体図形の特徴をつかんで

QR の中点を M とすると $\mathrm{M}\left(\dfrac{t^3}{t^2+1},\ \dfrac{t^3}{t^2+1},\ \dfrac{2t^2}{t^2+1}\right)$.

Q，R は平面 π：$x=y$ について対称だから M は π 上にある.

$$\triangle\mathrm{OPM}=\frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot|\mathrm{M}\text{ の }z\text{ 座標}|=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,t\cdot\frac{2t^2}{t^2+1}=\frac{\sqrt{2}\,t^3}{t^2+1}.$$



QR は π に垂直でその長さは $\dfrac{2\sqrt{2}\,t}{t^2+1}$.

よって，四面体 OPQR の体積は

$$\frac{1}{3}\mathrm{QR}\cdot\triangle\mathrm{OPM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}\,t}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}\,t^3}{t^2+1}=\frac{4t^4}{3(t^2+1)^2}.$$ …(答)

1985 年　理科

第 1 問

$a \geqq 1$ とする。xy 平面において，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\quad 1 \leqq y \leqq a\sin x$$

によって定められる領域の面積を S_1，不等式

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqq y \leqq a\sin x,\quad 0 \leqq y \leqq 1$$

によって定められる領域の面積を S_2 とする。$S_2 - S_1$ を最大にするような a の値と，$S_2 - S_1$ の最大値を求めよ。

分　野

微分・積分：微分法，積分法

考え方

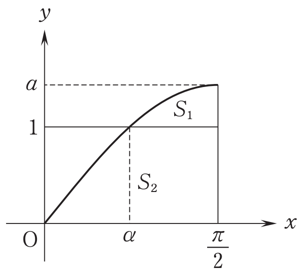
$a\sin x = 1$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ をみたす x を α とおけば，a と α は 1 対 1 に対応する．a の代りに α で面積を表し，$S_2 - S_1$ を α の関数として増減を考えればよい．

【解答】　$a\sin\alpha = 1$，$0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす角 α で考える

$0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\sin x$ は単調に増加するから $a \geqq 1$ のとき

$$a\sin x = 1,\quad 0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$$

をみたす x はただ 1 つ存在する．それを α とおくと $a = \frac{1}{\sin\alpha}$.



$$S_1 = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (a\sin x - 1)\,dx = \Big[-a\cos x - x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} = a\cos\alpha + \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

また $S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin x\,dx = \Big[-a\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a$ だから，$S_2 = a - S_1$.

$$S_2 - S_1 = a - 2S_1 = a - 2a\cos\alpha - 2\alpha + \pi = \frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2\alpha + \pi.$$

これを $f(\alpha)$ とおく．

$$f'(\alpha) = \frac{2\sin^2\alpha - (1 - 2\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - 2 = \frac{\cos\alpha(2\cos\alpha - 1)}{\sin^2\alpha}.$$

α	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	0
$f(\alpha)$		↗	$\frac{\pi}{3}$	↘	1

よって，$\alpha = \frac{\pi}{3}$ のとき，つまり $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき，$S_2 - S_1$ は最大値 $\frac{\pi}{3}$ をとる．　…(答)

第2問

xy 平面において，O を原点，A を定点 $(1, 0)$ とする。また，P，Q は円周 $x^2+y^2=1$ 上を動く2点であって，線分 OA から正の向きにまわって線分 OP にいたる角と，線分 OP から正の向きにまわって線分 OQ にいたる角が等しいという関係が成り立っているものとする。

点 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を R，点 Q を通り x 軸に垂直な直線と x 軸との交点を S とする。実数 $l \geqq 0$ を与えたとき，線分 RS の長さが l と等しくなるような点 P，Q の位置は何通りあるか。

分 野

基礎解析：三角関数，倍角公式，**数学 I**：2次関数，最大・最小

考え方

$\angle AOP=\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけば $\angle AOQ=2\theta$ となり，問題は

$$|\cos\theta-\cos 2\theta|=l$$

をみたす θ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の値の個数を求める問題となる.

$t=\cos\theta$ とおけば $\cos 2\theta=2t^2-1$ であるから t に対する θ の個数を調べることになる.

【解答1】 $t=\cos\theta$ に対する増減を調べる

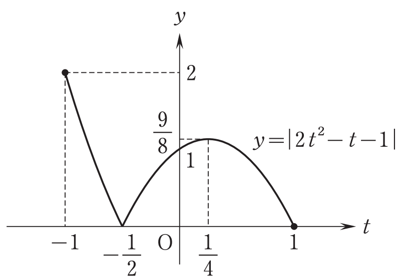
$\angle AOP=\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，$\angle AOQ=2\theta$

$\therefore$ $P(\cos\theta, \sin\theta)$，$Q(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$，$R(\cos\theta, 0)$，$S(\cos 2\theta, 0)$. $\therefore$ $RS=|\cos\theta-\cos 2\theta|$.

$\cos\theta=t$ とおくと，

$$RS=|\cos\theta-2\cos^2\theta+1|=|2t^2-t-1|$$
$$=|(t-1)(2t+1)|=\left|2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\right|.$$

$y=|2t^2-t-1|$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ のグラフは右図のようになる.



よって，$RS=l$ をみたす t の個数は

l の範囲	0	…	$\frac{9}{8}$	…	2	…
t の個数	2	3	2	1	1	0

Q の位置は P の位置を決めれば1通りに定まる．P の位置は t に対して $t\neq\pm1$ のとき2通り，$t=\pm1$ のとき1通り定まるから $RS=l$ となる P，Q の位置は

l の範囲	0	…	$\frac{9}{8}$	…	2	…
θ の個数	3	6	4	2	1	0

…(答)

【解答2】 直接 θ に対する増減を考える

$RS=|\cos\theta-\cos 2\theta|$ を出すところまで**【解答1】**と同じ.

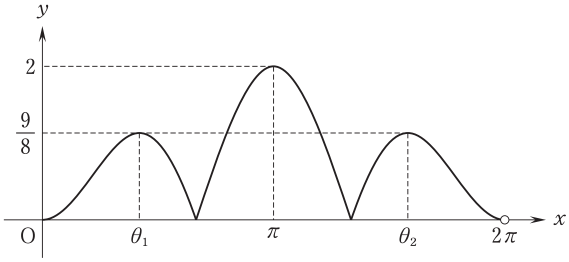
$f(\theta)=\cos\theta-\cos 2\theta$ とおく.

$$f'(\theta)=-\sin\theta+2\sin 2\theta=\sin\theta(4\cos\theta-1).$$

$\cos\theta=\frac{1}{4}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ となる θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ と $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ にそれぞれ1個ずつ存在する．それらをそれぞれ θ_1，θ_2 とすると，

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	π	$\cdots$	θ_2	$\cdots$	(2π)
$f'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	(0)
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{9}{8}$	$\searrow$	(0)

よって，$y=|f(\theta)|$ のグラフは下図.



よって，

l の範囲	0	$\cdots$	$\frac{9}{8}$	$\cdots$	2	$\cdots$
θ の個数	3	6	4	2	1	0

…(答)

第 3 問

（文科　第 4 問と同じ．ただし，(1) なし.）

第 4 問

a，b を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}$$

とおく。

(1)　行列 A^n（$n=1, 2, \cdots$）の表す一次変換による点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$，$\mathrm{R}(1, 1)$ の像をそれぞれ P_n，Q_n，R_n とし，

$$f_n=3\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2+2\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}^2+2\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n}^2$$

とおく。（ここで，$\overline{\mathrm{CD}}$ は線分 CD の長さを表す。）f_n を a，b を用いて表せ。

(2)　$a=1.1$，$b=\frac{1}{1.1}$ であるとして，f_n の値を最小にするような自然数 n を求めよ。

分　野

代数・幾何：一次変換，**基礎解析**：数列

考え方

まず，A^n を求める．A^2，A^3 から A^n が見当つけられる．それを数学的帰納法で証明する．

(2) では (1) で得た結果

$$f_n=2\times(1.1)^{2n}+4\times(1.1)^{-2n}$$

から，f_n を最小にする n を求める．

相加平均・相乗平均の関係から

$$f_n\geqq 2\sqrt{2\times(1.1)^{2n}\cdot 4\times(1.1)^{-2n}}=4\sqrt{2}$$

となるからといって，$(1.1)^{2n}$ のうち $\sqrt{2}$ に最も近いような n を求めたくなるがこのままでは正しくない．$(1.1)^{2n}$ が $\sqrt{2}$ に近いとき f_n は最小になるが，最も近いときに最小になるとは限らないからである．

階差 $f_{n+1}-f_n$ の正負を調べるとか，$2x+4x^{-1}$ の増減を調べるような計算が必要である．

(1) の【解答】　数学的帰納法

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n-b^n & b^n \end{pmatrix} \qquad \cdots(*)$$

と推定．

(Ⅰ)　$n=1$ のとき自明．

(Ⅱ)　$n=k$ のとき $(*)$ が成立つとする．すなわち，$A^k=\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ a^k-b^k & b^k \end{pmatrix}$ とする．

$$A^{k+1}=AA^k=\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ a^k-b^k & b^k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ a^{k+1}-b^{k+1} & b^{k+1} \end{pmatrix}.$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上よりすべての自然数 n において $(*)$ は成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n-b^n & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n \\ a^n-b^n \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n-b^n & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a^n \\ a^n+b^n \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ a^n-b^n & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n \\ a^n \end{pmatrix}.$$

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}^2=b^{2n},\quad \overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}^2=\frac{a^{2n}}{4}+\frac{(a^n-b^n)^2}{4},\quad \overline{\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n}^2=\frac{a^{2n}}{4}+\frac{(a^n+b^n)^2}{4}.$$

$$\therefore\quad f_n=3b^{2n}+2\left\{\frac{a^{2n}}{4}+\frac{(a^n-b^n)^2}{4}\right\}+2\left\{\frac{a^{2n}}{4}+\frac{(a^n+b^n)^2}{4}\right\}=2a^{2n}+4b^{2n}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(1) の【別解】　固有ベクトルを使って

$\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると，$A\vec{u}=a\vec{u}$，$A\vec{v}=b\vec{v}$．

よって，$A^n\vec{u}=a^n\vec{u}$，　$A^n\vec{v}=b^n\vec{v}$．

また

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}(\vec{u}-\vec{v}),\quad \overrightarrow{\mathrm{RP}}=-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{-1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=b^n\vec{v},\quad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}(a^n\vec{u}-b^n\vec{v}),\quad \overrightarrow{\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n}=A^n\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\frac{-1}{2}(a^n\vec{u}+b^n\vec{v}).$$

$|\vec{u}|=\sqrt{2}$，$|\vec{v}|=1$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=1$．

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}|^2=b^{2n}|\vec{v}|^2=b^{2n},\quad |\overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n}|^2=\frac{1}{4}(a^{2n}|\vec{u}|^2-2a^nb^n\vec{u}\cdot\vec{v}+b^{2n}|\vec{v}|^2)=\frac{1}{4}(2a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n}),$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{R}_2\mathrm{P}_2}|^2=\frac{1}{4}(a^{2n}|\vec{u}|^2+2a^nb^n\vec{u}\cdot\vec{v}+b^{2n}|\vec{v}|^2)=\frac{1}{4}(2a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}).$$

$$f_n=3b^{2n}+2\cdot\frac{1}{4}(2a^{2n}-2a^nb^n+b^{2n})+2\cdot\frac{1}{4}(2a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n})=2a^{2n}+4b^{2n}.$$ …(答)

(2)の【解答 1】 f_n と f_{n+1} の大小を比較して

(1), $a=1.1$, $b=\dfrac{1}{1.1}$ より, $f_n=2\times1.1^{2n}+4\times1.1^{-2n}$.

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{2\times1.1^{2n+2}+4\times1.1^{-2n-2}}{2\times1.1^{2n}+4\times1.1^{-2n}}=\frac{1.1^{4n+4}+2}{1.1^{4n+2}+2\times1.1^2}.$$

右辺で（分子－分母）$=h_n$ とおくと,

$$h_n=(1.1^{4n+4}+2)-(1.1^{4n+2}+2\times1.1^2)=(1.1^{4n+2}-2)(1.1^2-1).$$

$n\geqq2$ のとき,

$$1.1^{4n+2}-2\geqq1.1^{10}-2>1+10\cdot0.1-2=0.$$

$$\therefore\quad h_n>0,\quad\therefore\quad\frac{f_{n+1}}{f_n}>1,\quad\therefore\quad f_{n+1}>f_n.$$

$n=1$ のとき $1.1^3=1.331<1.4<\sqrt{2}$ より $1.1^6<2$.

$$\therefore\quad h_1<0,\quad\therefore\quad\frac{f_2}{f_1}<1,\quad\therefore\quad f_2<f_1.$$

$$\therefore\quad f_1>f_2<f_3<f_4<\cdots.$$

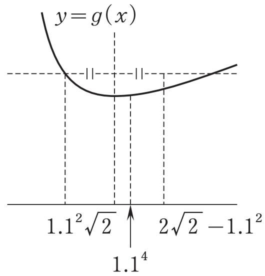
よって, $n=2$ のとき, f_n は最小になる. …(答)

（注） $1.1^{10}=(1+0.1)^{10}=1+{}_{10}C_1\times0.1+{}_{10}C_2\times0.1^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times0.1^{10}>1+10\times0.1=2.$

(2)の【解答 2】 $x=\sqrt{2}$ について線対称移動して考える

$g(x)=2x+\dfrac{4}{x}$ とおくと, $f_n=g((1.1)^{2n})$. $g'(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$.

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	$4\sqrt{2}$	↗



また,

$$1.1^4=1.4641>\sqrt{2}=1.414\cdots>1.1^2=1.21.$$

f_n の最小値は $f_1=g(1.1^2)$ または $f_2=g(1.1^4)$.

$y=g(x)$ を $x=\sqrt{2}$ で対称移動すると $y=g(2\sqrt{2}-x)$.

$0<x<\sqrt{2}$ において

$$g(x)-g(2\sqrt{2}-x)=2x+\frac{4}{x}-2(2\sqrt{2}-x)-\frac{4}{2\sqrt{2}-x}=\frac{4(\sqrt{2}-x)(x-\sqrt{2})^2}{x(2\sqrt{2}-x)}>0.$$

$$\sqrt{2}-1.1^2=1.414\cdots-1.21>0.2>0.06>1.1^4-\sqrt{2}=1.4641-1.4142.$$

より $\sqrt{2}<1.1^4<2\sqrt{2}-1.1^2$.

よって,

$$g(1.1^2)>g(2\sqrt{2}-1.1^2)>g(1.1^4).$$

$$\therefore\quad f_1>f_2.$$

よって, f_n は $n=2$ で最小になる. …(答)

第5問

0または正の整数の値をとる変数 X，Y がある。X が整数 n $(n\geqq 0)$ の値をとる確率と，Y が整数 n $(n\geqq 0)$ の値をとる確率は，ともに p_n であるとする。（ここで，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$ である。）いま，任意の整数 m，n $(m\geqq 0,\ n\geqq 0)$ に対して，$X=m$ なる事象と $Y=n$ なる事象は独立であり，また，$X+Y=n$ となる確率は $(n+1)p_{n+1}$ に等しいという。このとき，p_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ と

$$\sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

の値を求めよ。

分　野

確率・統計：確率，**基礎解析**：数列，数学的帰納法

考え方

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ における p_n を求め，一般の n について p_n を推定しそれを数学的帰納法で証明する.

【解答】

$X=m$ となる事象と $Y=n$ となる事象が独立だから，$X=m$，$Y=n$ となる確率は $p_m p_n$ である.
$X+Y=n$ である確率が $(n+1)p_{n+1}$ だから

$$(n+1)p_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} p_k p_{n-k}.\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

$$(p_1=p_0{}^2.\ 2p_2=p_0p_1+p_1p_0,\ p_2=p_0{}^3.\ 3p_3=p_0p_2+p_1{}^2+p_2p_0,\ p_3=p_0{}^4)$$

$$p_n=p_0{}^{n+1} \qquad \cdots(*)$$

を数学的帰納法で証明する.

(I)　$n=0$ のとき自明.

(II)　$0\leqq m\leqq k$ で(*)が成り立つとすると，

$$p_{k+1}=\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} p_m p_{k-m}=\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} p_0{}^{m+1}p_0{}^{k-m+1}=\frac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} p_0{}^{k+2}=p_0{}^{k+2}.$$

　よって，$m=k+1$ でも(*)は成り立つ.

よって，任意の負でない整数 n について，$p_n=p_0{}^{n+1}$ が示された.

$p_0=1$ とすると $p_0+p_1=2>1$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n=1$ であることに反する.

$p_0=0$ とすると $p_n=0$ となり，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n=0$ となり，確率の和が1であることに反する.

$0<p_0<1$ だから

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n=\sum_{n=0}^{\infty} p_0{}^{n+1}=\frac{p_0}{1-p_0}=1.\quad \therefore\quad p_0=\frac{1}{2}.$$

以上より，

$$p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \qquad \cdots(答)$$

$S_N=\sum_{n=0}^{N} np_n=\sum_{n=0}^{N} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ とおく.

$$\begin{array}{rrl} & 2S_N= & \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\qquad+\frac{N}{2^N} \\ -) & S_N= & \qquad\ \ \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{N-1}{2^N}+\frac{N}{2^{N+1}} \\ \hline & S_N= & \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\qquad+\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}} \end{array}$$

$$\therefore\quad S_N=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^N}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{N}{2^{N+1}}=1-\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}}.$$

$$\frac{2^{N+1}}{N}=\frac{(1+1)^{N+1}}{N}>\frac{1+(N+1)+\frac{N(N+1)}{2}}{N}>\frac{N+1}{2}.\quad\therefore\quad 0<\frac{N}{2^{N+1}}<\frac{2}{N+1}.$$

$\lim_{N\to\infty}\frac{2}{N+1}=0$ より $\lim_{N\to\infty}\frac{N}{2^{N+1}}=0$.

よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}}\right)=1.\qquad\cdots(答)$$

$\sum_{n=0}^{\infty}np_n$ を求める部分の【別解】

$X+Y\geqq 0$ であるから，$X+Y=n$ となる確率を q_n とおくと，全事象の確率は $\sum_{n=0}^{\infty}q_n=1$.

題意から $q_n=(n+1)p_{n+1}$. よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}q_n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}np_n=0p_0+\sum_{n=1}^{\infty}np_n=\sum_{n=0}^{\infty}np_n.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=0}^{\infty}np_n=1.\qquad\cdots(答)$$

第６問

xyz 空間において，点 $(0, 0, 0)$ を A，点 $(8, 0, 0)$ を B，点 $(6, 2\sqrt{3}, 0)$ を C とする。点 P が △ABC の辺を一周するとき，P を中心とし半径 1 の球が通過する点全体のつくる立体を K とする。

(1) K を平面 $z=0$ で切った切り口の面積を求めよ。

(2) K の体積を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間図形，**微分・積分**：積分法，体積

考え方

(1) では半径 1 の円の中心が △ABC の辺上を動いてできる領域を考えればよい．三角形の内部に円が通過しない部分があることに注意．外周は各辺に平行な等長線分と円弧からなり，内周は ABC に相似な三角形となる．

(2) では平面 $z=t$ による切り口を (1) と同様に考え，その面積を求め積分すればよい．

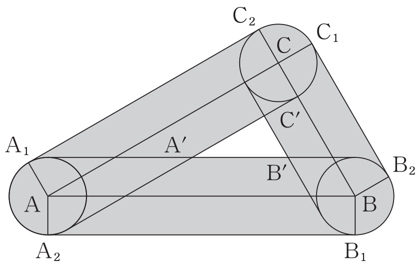
よく考えると通過領域の概形がわかる．球を切ってできる立体と，円柱を斜めに切った立体の組合せになる．

【解答】

問題の球が球面なのか球体なのか明らかでないが，いずれにしろ結論は同じである．

(1) AB=8，BC=4，CA=$4\sqrt{3}$ だから △ABC は $\angle C=\frac{\pi}{2}$，$\angle A=\frac{\pi}{6}$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$ の直角三角形である．

xy 平面上の断面は右図のようになる．A，B，C にPがあるときの円と三角形の辺に平行な接線の接点を A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 とし，内側の接線の交点を A′，B′，C′ とする．



断面積を S とすると，

$$S=\triangle ABC+\text{長方形}\ ABB_1A_2+\text{長方形}\ BCC_1B_2+\text{長方形}\ CAA_1C_2+\text{扇形}\ AA_1A_2+\text{扇形}\ BB_1B_2+\text{扇形}\ CC_1C_2-\triangle A'B'C'.$$

$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

$\triangle ABC$ の内心を I，内接円の半径を r とすると I から $\triangle A'B'C'$ の辺までの距離は $r-1$.

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は相似で内接円の中心を共有する．

$$r=\frac{2\triangle ABC}{AB+BC+CA}=\frac{16\sqrt{3}}{8+4+4\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}+1}=2(\sqrt{3}-1).$$

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の相似比は $2(\sqrt{3}-1):2(\sqrt{3}-1)-1=2(\sqrt{3}-1):\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$ だから

$$\triangle A'B'C'=\left(\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2(\sqrt{3}-1)}\right)^2\triangle ABC=\frac{3(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{8}\cdot8\sqrt{3}=3(2\sqrt{3}-3).$$

$$\text{長方形}\ ABB_1A_2+\text{長方形}\ BCC_1B_2+\text{長方形}\ CAA_1C_2=8+4+4\sqrt{3}=12+4\sqrt{3}.$$

$$\text{扇形}\ AA_1A_2+\text{扇形}\ BB_1B_2+\text{扇形}\ CC_1C_2=\pi.$$

よって，

$$S=8\sqrt{3}+12+4\sqrt{3}+\pi-3(2\sqrt{3}-3)=\pi+21+6\sqrt{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 平面 $z=t$ における通過領域の断面積を $S(t)$ とおく．このとき半径1の球の断面は半径 $a=\sqrt{1-t^2}$ の円であるから(1)と同じ点の名前を使って考える．

$\angle ABC$ と $\angle A'B'C'$ の相似比は $2(\sqrt{3}-1):2(\sqrt{3}-1)-a$ だから

$$\triangle A'B'C'=\left(\frac{2(\sqrt{3}-1)-a}{2(\sqrt{3}-1)}\right)^2\triangle ABC=8\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}+1}{4}a\right)^2.$$

$$\text{長方形}\ ABB_1A_2+\text{長方形}\ BCC_1B_2+\text{長方形}\ CAA_1C_2=(8+4+4\sqrt{3})a=(12+4\sqrt{3})a.$$

$$\text{扇形}\ AA_1A_2+\text{扇形}\ BB_1B_2+\text{扇形}\ CC_1C_2=\pi a^2.$$

よって，

$$S(t)=8\sqrt{3}+(12+4\sqrt{3})a+\pi a^2-8\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}+1}{4}a\right)^2=(24+8\sqrt{3})a+(\pi-3-2\sqrt{3})a^2.$$

K の体積を V とすると

$$V=2\int_0^1S(t)\,dt=2\int_0^1\{(24+8\sqrt{3})\sqrt{1-t^2}+(\pi-3-2\sqrt{3})(1-t^2)\}\,dt.$$

円の面積を考えると $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$．また，$\displaystyle\int_0^1(1-t^2)\,dt=\frac{2}{3}$．よって，

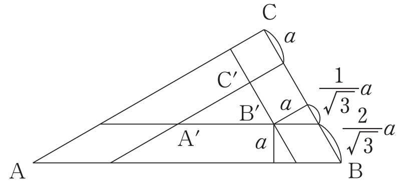
$$V=2\left\{(24+8\sqrt{3})\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}(\pi-3-2\sqrt{3})\right\}=\frac{40}{3}\pi+4\sqrt{3}\pi-4-\frac{8}{3}\sqrt{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注) 右図のようにとって考えると，

$$B'C'=BC-a-\frac{1}{\sqrt{3}}a-\frac{2}{\sqrt{3}}a=4-(1+\sqrt{3})a,$$

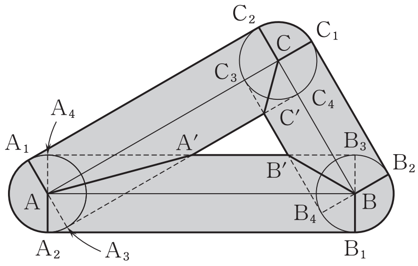
$$A'C'=\sqrt{3}\,B'C'=\sqrt{3}\,\{4-(1+\sqrt{3})a\}$$

から $\triangle A'B'C'$ の面積を出してもよい．



【別解】

右図は K を xy 平面に正射影した図である．



xy 平面上で A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 の直径の他端をそれぞれ，A_3，A_4，B_3，B_4，C_3，C_4 とする．K を xy 平面に垂直に切った立体を便宜上 xy 平面の切り口で説明する．

K を 3 つの六角形 $AA_2B_1BB'A'$，$BB_2C_1CC'B'$，$CC_2A_1AA'C'$ に垂直に切ってできる立体は 3 つの底面の半径が 1 の円柱 $A_4A_2B_1B_3$，$B_4B_2C_1C_3$，$C_4C_2A_1A_3$ から，円柱の底面の直径を通る平面で切り取った 6 つの立体 A_4AA'，$A_3A'A$，B_4BB'，$B_3B'B$，C_4CC'，$C_3C'C$ を取り除いた立体である．また K を 3 つの扇形 AA_1A_2，BB_1B_2，CC_1C_2 に垂直に切ってできる立体を合体すると半径が 1 の 1 つの球になる．

3 つの円柱 $A_4A_2B_1B_3$，$B_4B_2C_1C_3$，$C_4C_2A_1A_3$ の体積の和は $(8+4+4\sqrt{3})\pi=(12+4\sqrt{3})\pi$.

半径 1 の円柱の底面の直径を含み底面と θ をなす平面で円柱を切り取った立体の体積は直径に垂直な断面積を積分して

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)\tan\theta\,dx=\frac{2}{3}\tan\theta$$

である．

$$\angle A_3AA'=\angle A_4AA'=75^\circ,\quad \angle B_3BB'=\angle B_4BB'=60^\circ,\quad \angle C_3CC'=\angle C_4CC'=45^\circ,$$

$$\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

だから 6 つの立体 A_4AA'，$A_3A'A$，B_4BB'，$B_3B'B$，C_4CC'，$C_3C'C$ の体積の和は

$$\frac{4}{3}(\tan 75^\circ+\tan 60^\circ+\tan 45^\circ)=\frac{4}{3}(2+\sqrt{3}+\sqrt{3}+1)=4+\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

半径 1 の球体の体積は $\frac{4}{3}\pi$ だから

$$V=(12+4\sqrt{3})\pi+\frac{4}{3}\pi-4-\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{40}{3}\pi+4\sqrt{3}\pi-4-\frac{8}{3}\sqrt{3}.\qquad\cdots(答)$$

1986 年　文科

第 1 問

x が $0 \leqq x \leqq 3$ という範囲を動くときの，関数

$$f(x)=2x^2-4ax+a+a^2$$

の最小値 m が 0 となるような，定数 a の値をすべて求めよ。

分　野

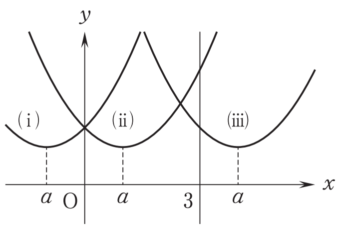
数学 I ：2 次関数

考え方

$y=f(x)$ は直線 $x=a$ を軸とする放物線なので，a の値によって場合分けをして最小値を求める．基本的な問題.

【解答】

$f(x)=2(x-a)^2+a-a^2$．放物線 $y=f(x)$ の軸は $x=a$.



(i)　$a<0$ のとき，

$$m=f(0)=a+a^2=a(a+1)=0$$

より，$a=0$，-1.

$a<0$ より，$a=-1$.

(ii)　$0 \leqq a \leqq 3$ のとき，

$$m=f(a)=a-a^2=-a(a-1)=0$$

より，$a=0$，1.

これらは $0 \leqq a \leqq 3$ をみたす．よって，$a=0$，1.

(iii)　$a>3$ のとき，

$$m=f(3)=a^2-11a+18=(a-2)(a-9)=0$$

より，$a=2$，9.

$a>3$ より，$a=9$.

(i)，(ii)，(iii) より，

$$a=-1,\ 0,\ 1,\ 9. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問

四点 A，B，C，D を頂点とする四面体 T において，各辺の長さが

$$\mathrm{AB}=x,\quad \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=5,\quad \mathrm{CD}=4$$

であるとき，T の体積 V を求めよ。またこのような四面体が存在するような x の範囲を求めよ。またこの範囲で x を動かしたときの体積 V の最大値を求めよ。

分　野

代数・幾何：立体図形

考え方

四面体 T の 2 つの面三角形 ACD と三角形 BCD は合同であるから，三角形 BCD を固定して考えるとき，パラメータ x の変化に応じて三角形 ACD が辺 CD を軸として回転する．この図形的特徴をつかむことがポイント.

【解答】

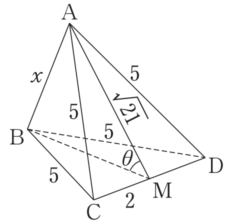
四面体 ABCD は辺 CD の垂直二等分面について面対称である．

CD の中点を M，三角形 ACD と三角形 BCD がなす角を θ とおくと $\theta=\angle\mathrm{AMB}$.

四面体をなす条件は A が平面 BCD 上にないことである．

よって，$0<\theta<\pi$.

$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$.



$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AMB}\times\mathrm{CM}\times 2\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}^2\sin\theta\cdot 4\\&=14\sin\theta\end{aligned}\qquad\cdots①$$

三角形 AMB に余弦定理を用いて，

$$x^2=21+21-2\cdot\sqrt{21}^2\cos\theta=42(1-\cos\theta).\qquad\cdots②$$

$$\therefore\quad \cos\theta=1-\frac{1}{42}x^2.$$

ゆえに ① より，

$$V=14\sqrt{1-\cos^2\theta}=14\sqrt{1-\left(1-\frac{1}{42}x^2\right)^2}=\frac{1}{3}x\sqrt{84-x^2}.\qquad\cdots(\text{答})$$

次に ② および $-1<\cos\theta<1$（$\because\quad 0<\theta<\pi$）より，

$$0<x^2<84.\quad\therefore\quad 0<x<2\sqrt{21}.\qquad\cdots(\text{答})$$

また，① より V は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大でその値は 14. …(答)

（注１） V の計算方法は**【解答】**の方法以外にもいろいろある．

〔Ⅰ〕 例えば，

$$x=\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}\sin\frac{\theta}{2}=2\sqrt{21}\sin\frac{\theta}{2}$$

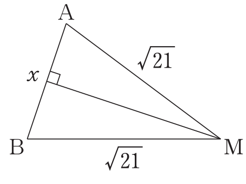
なので（これより $0<x<2\sqrt{21}$ が導かれる)，四面体 ABCD を三角形 BCD を底面とする三角錐とみなして求める．

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times(\text{高さ})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\mathrm{CD}\times\mathrm{BM}\times\mathrm{AM}\sin\theta\\&=14\sin\theta\\&=28\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=28\cdot\frac{x}{2\sqrt{21}}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2\sqrt{21}}\right)^2}\\&=\frac{1}{3}x\sqrt{84-x^2}.\end{aligned}$$

〔Ⅱ〕 また，三角形 MAB は二等辺三角形なので，θ を導入しなくても V は求められる．（図１）より，

$$\triangle\mathrm{AMB}=\frac{1}{2}x\sqrt{\sqrt{21}^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}V&=2\times\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AMB}\times\mathrm{CM}=\frac{2}{3}x\sqrt{21-\frac{x^2}{4}}\\&=\frac{1}{3}x\sqrt{84-x^2}.\end{aligned}$$



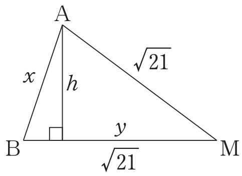
（図１）

〔Ⅲ〕 さらに（図２）で，

$$x^2=h^2+(\sqrt{21}-y)^2,\quad 21=h^2+y^2$$

を解いて，

$$h^2=\frac{1}{84}x^2(84-x^2).$$



（図 2 ）

よって，

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{BCD}\times h=\frac{1}{3}x\sqrt{84-x^2}$$

としてもよい．

（注 2 ） $V=\dfrac{1}{3}\sqrt{84x^2-x^4}$ なので，$f(x)=84x^2-x^4$ を微分して V の最大値を求めてもよい．

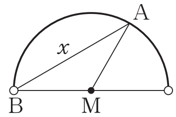
また，$f(x)$ を x^2 の 2 次関数とみて最大値を求めてもよい．

（注 3 ） 直観的に B，C，D を固定して A を動かすと，A は M を中心に半円を描く．

x のとりうる値の範囲は $0<x<\mathrm{AM}+\mathrm{BM}=2\sqrt{21}$．

四面体 ABCD の体積が最大になるのは $\mathrm{AM}\perp\triangle\mathrm{BCD}$ のとき．その体積は，

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BCD}\times\mathrm{AM}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{21}\times\sqrt{21}=14.$$



（図 3 ）

第 3 問

三次またはそれ以下の任意の整式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，常に

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=uf(s)+vf(t)$$

が成立つような定数 u，v，s，t を求めよ。ただし $s<t$ とする。

分　野

基礎解析：整式の積分

考え方

条件式に $f(x)$ を代入して a，b，c，d についてまとめると，u，v，s，t に関する 4 つの方程式が得られる．あとはこれらを解けばよい．

【解答】

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ から，

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_{0}^{1}(bx^2+d)\,dx=\frac{2}{3}b+2d.$$

よって，

$$\frac{2}{3}b+2d=uas^3+ubs^2+ucs+ud+vat^3+vbt^2+vct+vd.$$

任意の a，b，c，d に対して，

$$a(us^3+vt^3)+b\left(us^2+vt^2-\frac{2}{3}\right)+c(us+vt)+d(u+v-2)=0$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{cases} us^3+vt^3=0, & \cdots① \\ us^2+vt^2=\dfrac{2}{3}, & \cdots② \\ us+vt=0, & \cdots③ \\ u+v=2. & \cdots④ \end{cases}$$

①，③ より，$\begin{pmatrix} s^3 & t^3 \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$．$st(s^2-t^2)\neq0$ なら $\begin{pmatrix} s^3 & t^3 \\ s & t \end{pmatrix}$ は逆行列をもち，$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる

が，これは ② に反する．

$$\therefore\quad st(s^2-t^2)=0.\quad \therefore\quad s=0 \text{ または } t=0 \text{ または } s=t \text{ または } s=-t.$$

$s=0$，$t=0$ は ② に反し，$s=t$ は条件 $s<t$ に反する．

$$\therefore\quad s=-t\ (\neq 0).$$

③ より $u=v$．（① もみたす）④ より $u=v=1$．

以上を ② に代入して，

$$s^2+t^2=2s^2=2t^2=\frac{2}{3}.$$

$s<t$ より，$s=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．

以上より，

$$u=1,\quad v=1,\quad s=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad t=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ …(答)

第4問

平面 S の一点 A と正数 α ($\alpha<180$) をとる。点の集合としての S から S への写像 φ が，次の三つの条件 (i)，(ii)，(iii) をみたすとき，φ は A を中心とする正の向きの $\alpha°$ 回転と呼ばれる。

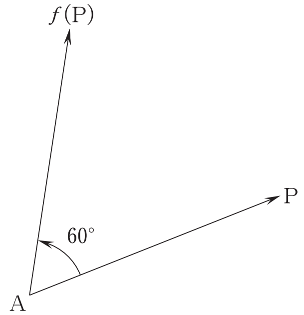
(i) $\varphi(\mathrm{A})=\mathrm{A}$，(ii) S の任意の点 P ($\neq$A) に対し，$\mathrm{AP}=\mathrm{A}\varphi(\mathrm{P})$，$\angle \mathrm{PA}\varphi(\mathrm{P})=\alpha°$，

(iii) 人が三角形 $\mathrm{P}\varphi(\mathrm{P})\mathrm{A}$ の周を一周し，P，$\varphi(\mathrm{P})$，A の順序に頂点を通るとき，三角形の内部は常に人の左側にある。

いま S 上に相異なる二点 A，B をとり，A を中心とする正の向きの $60°$ 回転を f，B を中心とする正の向きの $60°$ 回転を g とする。これに対し，f と g の合成写像 $h=g\circ f$ が，$h(\mathrm{P})=g(f(\mathrm{P}))$ によって定義される。

(1) このとき，点 $h(\mathrm{A})$ と $h(\mathrm{B})$ は，A，B に対して，どのような位置にあるかを求め，図示せよ。

(2) h はある点 O を中心とする正の向きの回転であることを示し，点 O および回転角を求めよ。



分　野

代数・幾何：一次変換

考え方

(1) は図示することから容易に見当がつけられる．

(1) の結果から，点 O は $\mathrm{A}h(\mathrm{A})$，$\mathrm{B}h(\mathrm{B})$ の垂直二等分線上にあるはず．これから O の位置は定まる．回転角はベクトルの変換を考えれば $60°+60°=120°$ であることがわかる．そのことを示すことができればよい．

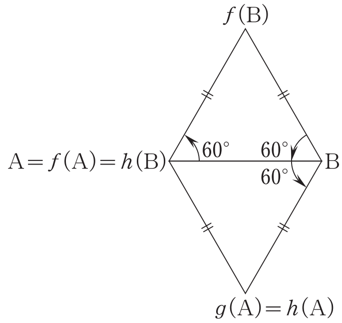
【解答 1】

(1)　f は A を中心とする 60° 回転であるから，$f(\mathrm{A})=\mathrm{A}$，$f(\mathrm{B})$ は A を中心として，B を 60° 回転した点．

　g は B を中心とする 60° 回転であるから，$h(\mathrm{A})$，$h(\mathrm{B})$ は B を中心として，$f(\mathrm{A})$，$f(\mathrm{B})$ を 60° 回転した点．したがって，$h(\mathrm{A})$ は $g(\mathrm{A})$ でもあり，$h(\mathrm{B})$ は A に一致する．

$$h(\mathrm{A})=g(f(\mathrm{A}))=g(\mathrm{A}),\quad h(\mathrm{B})=g(f(\mathrm{B}))=\mathrm{A}.$$

　図示すると右図のよう．　…(答)

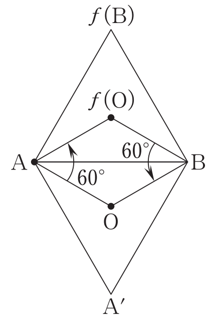


(2)　$h(\mathrm{A})=\mathrm{A}'$，$h(\mathrm{B})=\mathrm{B}'$（$=\mathrm{A}$）とおく．$h$ がある点を中心とする回転であるとすれば，その中心 O は AA′，BB′（$=$BA）の垂直二等分線の交点でなければならない．三角形 ABA′ は正三角形だから垂直二等分線の交点はその外心すなわち重心である．　…(答)

　そこで平面上で 60° 回転を表す行列を R とすると任意の点 P に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{P})}=R\overrightarrow{\mathrm{AP}},\qquad \cdots①$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B}g(\mathrm{P})}=R\overrightarrow{\mathrm{BP}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B}h(\mathrm{P})}=\overrightarrow{\mathrm{B}g(f(\mathrm{P}))}=R\overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{P})},\qquad \cdots②$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{O})}=R\overrightarrow{\mathrm{AO}},\qquad \cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{B}h(\mathrm{O})}=R\overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{O})}.\qquad \cdots④$$

（右図参照）



①−③，②−④ より，

$$\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})}=R\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad \overrightarrow{\mathrm{O}h(\mathrm{P})}=R\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{P})}.$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{O}h(\mathrm{P})}=R^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}.\qquad \cdots⑤$$

　R^2 は 120° 回転を表す行列だから ⑤ より h は O を中心とする 120° 回転である．　…(答)

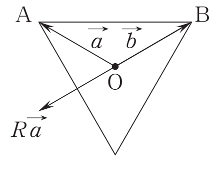
（注）　O の位置が確定した上で ⑤ は次のようにしても導ける．

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$$

とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{P})}=\vec{a}+R\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}+R\vec{p}-R\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{P})}=\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{P})}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{a}+R\vec{p}-R\vec{a}-\vec{b}$$
$$=\vec{a}+R\vec{p},$$

（右図参照）



$$\overrightarrow{\mathrm{O}h(\mathrm{P})}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{B}h(\mathrm{P})}=\vec{b}+\overrightarrow{\mathrm{B}g(f(\mathrm{P}))}$$
$$=\vec{b}+R\overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{P})}=\vec{b}+R(\vec{a}+R\vec{p})$$
$$=\vec{b}+R\vec{a}+R^2\vec{p}=R^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

【解答 2】

(1)　A を原点とし，B の座標を $(a,\ 0)$ とする．また，任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える．$f(\mathrm{P})$ を P_1，$h(P)$ を P′ とかく．また 60° 回転を表す行列を $R=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ とおく．

　f は原点 A を中心とする 60° 回転だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}=R\overrightarrow{\mathrm{AP}}.$$

　g は点 B を中心とする 60° 回転だから $\overrightarrow{\mathrm{BP}'}=R\overrightarrow{\mathrm{BP}_1}$．よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}'}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+R(\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+R^2\overrightarrow{\mathrm{AP}}-R\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\qquad \cdots⑥$$

　よって，$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-R\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(E-R)\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ\\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB'}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+R^2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-R\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(E+R^2-R)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\right\}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{0}.$$

よって，$h(\mathrm{A})=\mathrm{A'}$ はBをAを中心に $-60°$ 回転した点であり，$h(\mathrm{B})=\mathrm{B'}$ はAと一致する．(図省略)

(2) ⑥で h によるすべての点Pの像P′が定まるから，それがある点のまわりの回転になっていることを示せばよい．

h が回転を表すとしたら，その中心Oは h によって不変である．よって，$\mathrm{O'}=\mathrm{O}$ が必要．⑥より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+R^2\overrightarrow{\mathrm{AO}}-R\overrightarrow{\mathrm{AB}}. \quad \cdots⑦$$
$$\therefore\quad (E-R^2)\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(E-R)\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

$E-R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}$，$E+R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&3\end{pmatrix}$ はともに逆行列をもつから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=(E+R)^{-1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&1\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\cos 30°&\sin 30°\\-\sin 30°&\cos 30°\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AB}}.$$

よって，Oは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍して $-30°$ 回転した点 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$.

また，⑥−⑦ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}=R^2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}}).\quad \overrightarrow{\mathrm{OP'}}=R^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

R^2 は $120°$ 回転を表すから，h はOを中心とする $120°$ 回転を表す．

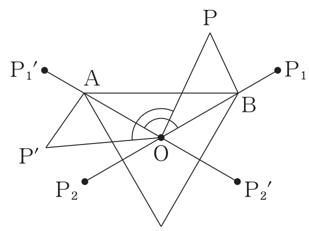
【解答 3】

(1) **【解答 1】**と同じ．

(2) Oの位置を定めるまでも**【解答 1】**と同じ．

任意の点PとO，Bの作る図形 D を h で動かすことを考える．h によるP，B，D の像をP′，B′=A，D' とする．f，g は回転であるので，D' は D と合同でありかつ向きづけも等しい．ただし，D と D' の向きつけが等しいとは，D 上の点Cの周りを点Qが一周するとき，D' 上の対応する点C′の周りを対応する点Q′が同じ向きに一周することを意味する．つまり，裏返しに合同ではないことを意味する．

B′=A であるから，OA=OB，∠BOB′=∠BOA=120°．よって，AはOを中心にBを120°回転した点である．



Pが直線OB上にあるとき，P′は直線OA上にあり OP=OP′ で，P(図の $\mathrm{P_1}$) がOについてBと同じ側にあれば，P′(図の $\mathrm{P_1}'$) はOについてAと同じ側にあり，P(図の $\mathrm{P_2}$) がOについてBと反対側にあれば，P′(図の $\mathrm{P_2}'$) はOについてAと反対側にある．したがって，P′はOを中心にPを120°回転した点である．

また，Pが直線OB上にないとき △OBP≡△OAP′ でありかつ向きづけが等しいから OP′=OP．∠AOP′=∠BOP から∠POP′=∠BOA=120°．よって，P′はOを中心にPを120°回転した点である．

よって，h によって，任意の点PはOのまわりに120°回転する．したがって，h はOのまわりの120°回転である．

1986 年　理科

第 1 問

xy 平面において，座標 $(x,\ y)$ が不等式

$$x \geqq 0,\quad y \geqq 0,\quad xy \leqq 1$$

をみたすような点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の作る集合を D とする。三点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ を頂点とし，D に含まれる三角形 ABC はどのような場合に面積が最大となるか。また面積の最大値を求めよ。ただし $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c > 0$ とする。

分　野

数学 I：平面座標，**微分・積分**：微分法

考え方

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|(a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right)-1\right|$$

および

$$\text{三角形 ABC が D に含まれる} \iff 0 \leqq a \leqq 2c,\quad 0 \leqq b \leqq \frac{2}{c}$$

をおさえておく．

後者の条件下で $\triangle$ABC の最大値を考えればよい訳だが，例えばこの条件を

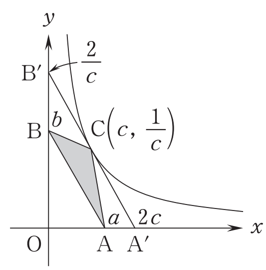
$$-c \leqq a-c \leqq c,\quad -\frac{1}{c} \leqq b-\frac{1}{c} \leqq \frac{1}{c}$$

と書き直すと $\triangle$ABC の式の絶対値の中がとりうる値を求めることができる．

【解答 1】

点 $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ における接線は，

$$y = -\frac{1}{c^2}(x-c)+\frac{1}{c}.\quad y = -\frac{1}{c^2}x+\frac{2}{c}.$$



これと x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A′，B′ とすると，

$$\mathrm{A}'(2c,\ 0),\quad \mathrm{B}'\left(0,\ \frac{2}{c}\right).$$

したがって，

$$\text{三角形 ABC が } D \text{ に含まれる} \iff 0 \leqq a \leqq 2c,\quad 0 \leqq b \leqq \frac{2}{c}. \qquad \cdots①$$

次に $\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} a-c \\ -\dfrac{1}{c} \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} -c \\ b-\dfrac{1}{c} \end{pmatrix}$ より，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|(a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right)-1\right|.$$

ここで ① より，$-c \leqq a-c \leqq c$，$-\dfrac{1}{c} \leqq b-\dfrac{1}{c} \leqq \dfrac{1}{c}$.

したがって，$-1 \leqq (a-c)\left(b-\dfrac{1}{c}\right) \leqq 1$.

よって，$\triangle$ABC は $(a-c)\left(b-\dfrac{1}{c}\right) = -1$ のとき，最大となる．

このようになるには，

$$「a-c=-c \text{ かつ } b-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}」\text{または}「a-c=c \text{ かつ } b-\frac{1}{c}=-\frac{1}{c}」$$

$$\Longleftrightarrow「\mathrm{A}=\mathrm{O} \text{ かつ } \mathrm{B}=\mathrm{B}'」\text{または}「\mathrm{A}=\mathrm{A}' \text{ かつ } \mathrm{B}=\mathrm{O}」.$$

よって，△ABC の最大値は $\frac{1}{2}|-1-1|=1$. …(答)

また，最大値を与えるのは，三角形 ABC が三角形 OB′C か三角形 A′OC に一致するときである $\left(\text{C は } y=\frac{1}{x} \text{ 上の任意の点}\right)$. …(答)

（注１）【解答１】の中に示されているように，

$$-1 \leqq (a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right) \leqq 1$$

なので，△ABC の式の絶対値をはずすことができて，

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\left\{1-(a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right)\right\}.$$

この式を b $\left(0 \leqq b \leqq \frac{2}{c}\right)$ についての１次関数とみなす．

(i) $0 \leqq a \leqq c$ のとき，△ABC は b について単調増加で，$b=\frac{2}{c}$ で最大となり，その最大値は

$$\frac{1}{2}\left\{1-(a-c)\frac{1}{c}\right\}=1-\frac{a}{2c}.$$

(ii) $c<a \leqq 2c$ のとき，△ABC は b について単調減少で，$b=0$ で最大となり，その最大値は

$$\frac{1}{2}\left\{1+(a-c)\frac{1}{c}\right\}=\frac{a}{2c}.$$

(i), (ii) において a を変化させると，(i) では $a=0$ で，(ii) では $a=2c$ で △ABC は最大になる．

【解答２】

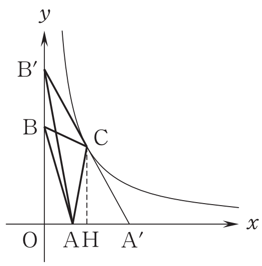
① までは**【解答１】**と同じ．C を固定して考える．A を固定して B を OB′ 上で動かす．

C から x 軸に下した垂線の足を H とすると，H は $(c,\ 0)$.

(i) $0 \leqq a \leqq c$ のとき，すなわち A が線分 OH 上にあるとき，△ABC は B=B′ で最大になる．

更に CB′ を１辺として A を OH 上で動かすと A=O のときに △ABC は最大になる．そのときの最大値は，

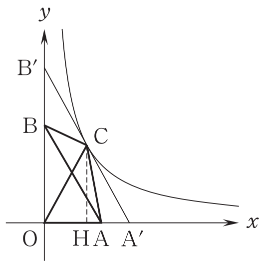
$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{c}\times c=1.$$



(ii) $c<a \leqq 2c$ のとき，すなわち A が線分 HA′ 上 (A≒H) にあるとき，△ABC は B=O で最大になる．

更に OC を１辺として A を HA′ 上で動かすと A=A′ のときに △ABC は最大になる．そのときの最大値は，

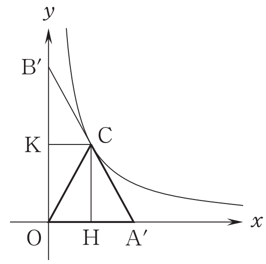
$$\frac{1}{2}\times 2c\times\frac{1}{c}=1.$$



(i), (ii) から (A=O, B=B′) または (A=A′, B=O) のときに △ABC は最大値１をとる． …(答)

（注２） △ABC の最大値が C の位置に依存しないのは次の理由による．

右図で H は常に線分 OA′ の中点なので，△OA′C＝長方形 OHCK であり，長方形 OHCK の面積は C の x 座標と y 座標の積に等しい．ところが C は $xy=1$ 上の点なので x 座標と y 座標の積は一定である．したがって，△OA′C は C の位置によらない定数である．したがって，△ABC の最大値は C の位置によらない．



（注３） 限られた領域内において三角形の面積を最大にする方法について，この**【解答２】**と同様な考え方は **1978 年理科　第六問**の**【解答】**でも使われている．

第２問

長軸，短軸の長さがそれぞれ 4，2 である楕円に囲まれた領域を A とし，この楕円の短軸の方向に，A を $\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ だけ平行移動してできる領域を B とする。このとき A と B の共通部分 $C=A\cap B$ の面積 M を求めよ。ただし，

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\cos\frac{\pi}{12}$$

である。

注　方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

で表される楕円において，$2a$，$2b$ の内大きい方を長軸の長さといい，他方を短軸の長さという。

分　野

微分・積分：積分法，**代数・幾何**：二次曲線，楕円

考え方

適当な座標系により丹念に積分することに尽きる．

条件 $\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})=\cos\dfrac{\pi}{12}$ の使い所がポイント．積分の仕方によっては，$\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ も用いないといけない．

【解答１】

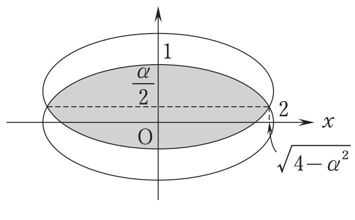
はじめの楕円 A の中心を原点，長軸が x 軸になるように座標をとると，A：$\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqq 1$.

もう１つの楕円 B は A を y 軸正方向に

$$\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

だけ平行移動したものとする．よって，

$$B：\frac{x^2}{4}+(y-\alpha)^2\leqq 1.$$



A，B の周の方程式を引いて $y=\dfrac{\alpha}{2}$．A，B の周の交点の座標は，

$$\left(\pm\sqrt{4-\alpha^2},\ \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$4-\alpha^2=4-\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}^2=2+\sqrt{3}=\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\right\}^2=4\cos^2\frac{\pi}{12}.$$

よって，対称性を考慮して

$$M=2\int_{-\sqrt{4-\alpha^2}}^{\sqrt{4-\alpha^2}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\alpha}{2}\right)dx=4\int_0^{\sqrt{4-\alpha^2}}\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}-\frac{\alpha}{2}\right)dx.$$

$$4\int_0^{\sqrt{4-\alpha^2}}\frac{\alpha}{2}\,dx=4\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2.$$

$x=2\sin\theta$ とおくと，$dx=2\cos\theta\,d\theta$，$\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\cos\theta.$

x	$0\longrightarrow\sqrt{4-\alpha^2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{5}{12}\pi$

$$4\int_0^{\sqrt{4-\alpha^2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx=8\int_0^{\frac{5}{12}\pi}\cos^2\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{5}{12}\pi}(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=4\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{5}{12}\pi}=\frac{5}{3}\pi+1.$$

よって，

$$M=\left(\frac{5}{3}\pi+1\right)-2=\frac{5}{3}\pi-1.$$ …(答)

（注）M の積分は次のように計算することも出来る．

$$M=4\int_{\frac{\alpha}{2}}^{1}|x|\,dy=8\int_{\frac{\alpha}{2}}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

$y=\sin\varphi$ とおくと，$dy=\cos\varphi d\varphi$，$\sqrt{1-y^2}=\cos\varphi.$

$\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{4}}=\cos\frac{\pi}{12}$ から $\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\pi}{12}.$

y	$\frac{\alpha}{2}\longrightarrow1$
φ	$\frac{\pi}{12}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$

$$M=8\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi=4\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=4\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{2}}=4\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{3}\pi-1.$$ …(答)

【解答 2】

【解答 1】と同じ座標系で考える．行列 $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ で表される一次変換 f を考える．f によって楕円 $A:\frac{x^2}{4}+y^2\leqq1$ は原点を中心とする半径 2 の円 $A':x^2+y^2\leqq4$ に，楕円 $B:\frac{x^2}{4}+(y-\alpha)^2\leqq1$ は $\mathrm{O}'(0,\,2\alpha)$ を中心とする半径 2 の円 $B':x^2+(y-2\alpha)^2\leqq4$ に変換される．ただし，$\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

$A'\cap B'$ の面積を M' とすると，$M'=2M$ である．OO' の中点を H とする．

A'，B' の周の交点を P，Q とし $\angle\mathrm{POH}=\theta$ とおく．

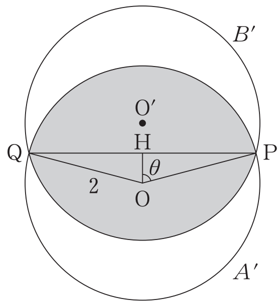
$$M'=2(\text{扇形 OPQ}-\triangle\mathrm{OPQ}).$$

$$\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\mathrm{OO}'=\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).$$

$$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left\{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}^2-1=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore\quad 2\theta=\frac{5}{6}\pi.$$



$$\therefore\quad M'=2\left(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{10}{3}\pi-2.$$

$$\therefore\quad M=\frac{M'}{2}=\frac{5}{3}\pi-1. \qquad \cdots(答)$$

（参考）　問題文の「楕円」は初出で「楕円（だ）」となっています．この時期の教科書では楕円は「だ円」と表記されていました．「楕」の字が常用漢字でないからだと思われます．おそらく出題者は漢字で表記したかったのだと思われます．そのために「楕円（だ）」と表記したのだと思われます．

なお次の改訂（入試では '97 から）で教科書も「楕円」になりました．

第3問

(1)　xyz 空間において，三点 $\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 S_0 に垂直で，長さ 1 のベクトル $\overrightarrow{n_0}$ をすべて求めよ。

(2)　二点 $\mathrm{D}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{E}(0,\ 1,\ 0)$ を通る直線 l を軸として，平面 S_0 を回転して得られるすべての平面 S を考える。このような平面 S に垂直で長さ 1 のベクトル

$$\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$$

の y 成分の絶対値 $|y|$ は S と共に変化するが，その最大値および最小値を求めよ。

分　野

代数・幾何：ベクトル，内積

考え方

$\overrightarrow{n}$ の y 成分が問題なので，l，$\overrightarrow{n}$ を平行移動して考えても差し支えない．そこで，原点を通り l に平行な直線 l' を考え，$\overrightarrow{n}$ の始点を原点にとると，$\overrightarrow{n}$ の回転によって，l' を軸とし原点を頂点とする 2 つの円錐ができる．この円錐を xy 平面に正射影した図形を描いてみると $\overrightarrow{n}$ の y 成分を図の上で見てとることができる．

計算によって解こうとするなら，$\overrightarrow{n}=(x,\ y,\ z)$，$l$ の方向ベクトルの 1 つを $\overrightarrow{l}$ として，

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{l}=\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{l},\quad |\overrightarrow{n}|=1$$

の条件より x，y，z のみたすべき 2 つの式が得られる．これらの式から $|y|$ の範囲を出してもよい．

(1) の【解答】

$\overrightarrow{n_0}=(n_1,\ n_2,\ n_3)$ とおく．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(1,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ で $\overrightarrow{n_0}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{n_0}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$|\overrightarrow{n_0}|=1$ だから，

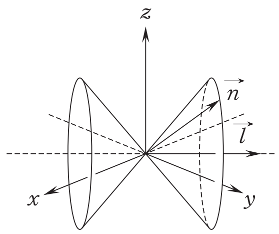
$$\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}(n_2+n_3)=0,\quad \overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=n_1+\frac{1}{2}n_3=0,\quad {n_1}^2+{n_2}^2+{n_3}^2=1.$$

$$\frac{1}{4}{n_3}^2+{n_3}^2+{n_3}^2=1.\quad n_3=\pm\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{n_0}=\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)\ \text{または}\ \overrightarrow{n_0}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right). \qquad \cdots(答)$$

(2) の**【解答 1】**

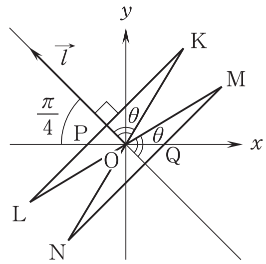
D，E を通る直線 l は xy 平面上の直線 $x+y=1$，$z=0$ である．$\overrightarrow{n_0}$ と l のなす角を θ とする．$\vec{n}$ は l の方向ベクトル $\vec{l}=(-1,\ 1,\ 0)$ と θ をなすか，$\pi-\theta$ をなすように動く．



（図 1）

$\vec{n}$ の始点を原点におき，原点を通り l と平行な直線を l' とすると $\vec{n}$ は l' を軸とする 2 つの円錐を描く．$\vec{n}$ の終点は l' に垂直な平面内の円を描く．（図 1）

$\vec{l}$ は xy 平面に平行だから，（図 1）を xy 平面に正射影すると，$\vec{n}$ の終点 $(x,\ y,\ z)$ の正射影 $(x,\ y,\ 0)$ の軌跡は線分 KL，MN として表される．（図 2）



（図 2）

$\overrightarrow{n_0}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{2}{3}\right)$ と $\vec{l}$ のなす角が θ だから，

$$\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{l}=\sqrt{2}\cos\theta=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.\qquad \therefore\quad \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$0<\dfrac{\sqrt{2}}{6}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

$\vec{l}$ と $\vec{n}$ のなす角が θ のとき，$\vec{l}$ と $-\vec{n}$ のなす角は $\pi-\theta$ であり，対応する平面 S，直線 l は同じである．$\vec{n}$ と $-\vec{n}$ の成分の絶対値は等しいから，$\vec{l}$ と $\vec{n}$ のなす角が θ のときだけ考えて，$|y|$ のとりうる値の範囲を求めればよい．つまり KL だけで考えればよい．

$\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{3}{4}\pi-\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので K は第 1 象限にあり，$\pi<\dfrac{3}{4}\pi+\theta<\dfrac{5}{4}\pi$ なので L は第 3 象限にある．

また，

$$(\text{K の } y \text{ 座標})>|\text{L の } y \text{ 座標}|.$$

以上より，$|y|$ は K で最大になり，KL と x 軸の交点 P で最小になる．

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{18}}=\frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}.$$

K の y 座標は $\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi-\theta\right)=\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$．また，P の y 座標は 0.

よって，$|y|$ の最大値は $\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$，最小値は 0.　…（答）

(2) の**【解答 2】**

l の方向ベクトルを $\vec{l}=(-1,\ 1,\ 0)$ とし，$\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{l}=\dfrac{1}{3}$ であることは**【解答 1】**と同様.

$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$ と直線 l のなす角が $\overrightarrow{n_0}$ と直線 l のなす角と等しく，$|\vec{n}|=1$ だから，

$$\vec{n}\cdot\vec{l}=\pm\overrightarrow{n_0}\cdot\vec{l},\quad |\vec{n}|^2=1.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} -x+y=\pm\dfrac{1}{3}, & \cdots① \\ x^2+y^2+z^2=1. & \cdots② \end{cases}$$

①，② より，x を消去して，

$$z^2=1-\left(y\mp\frac{1}{3}\right)^2-y^2=-2y^2\pm\frac{2}{3}y+\frac{8}{9}\geqq 0.\quad \therefore\quad 9y^2\mp 3y-4\leqq 0.$$

$$\therefore\quad \frac{1-\sqrt{17}}{6}\leqq y\leqq\frac{1+\sqrt{17}}{6}\ \text{ または }\ \frac{-1-\sqrt{17}}{6}\leqq y\leqq\frac{-1+\sqrt{17}}{6}.$$

よって，$|y|$ の最大値は $\dfrac{1+\sqrt{17}}{6}$，最小値は 0.　…（答）

第4問

二次方程式

$$ax^2-2bx+c=0$$

の係数 a，b，c が，それぞれ次の範囲を動くものとする。

$$0.9\leqq a\leqq 1.1,\quad 2.7\leqq b\leqq 3.3,\quad 4.5\leqq c\leqq 5.4$$

(1) このとき

$$u=\frac{b}{a},\quad v=\frac{c}{a}$$

を座標とする点 $\mathrm{P}(u,\ v)$ の動く範囲を定め，図示せよ。

(2) 上の二次方程式の二つの解のうち，大きい方を z とする。a，b，c が上の範囲を動くときの，z の最大値，最小値を求めよ。

分野

数学 I：2 次方程式，不等式と領域

考え方

(1) では u，v の範囲を独立に求めるのでなく uv 平面上で考える．

(2) では解の公式から $z=u+\sqrt{u^2-v}$ の最大最小を求めることになる．u，v の増減に対する z の増減を考える．

(1) の【解答 1】

$a\ (>0)$ を固定して考える．

$$\frac{2.7}{a}\leqq u\leqq\frac{3.3}{a},\quad \frac{4.5}{a}\leqq v\leqq\frac{5.4}{a}.$$

つまり，$(u,\ v)$ は 4 点 $\left(\frac{2.7}{a},\ \frac{4.5}{a}\right)$，$\left(\frac{2.7}{a},\ \frac{5.4}{a}\right)$，$\left(\frac{3.3}{a},\ \frac{5.4}{a}\right)$，$\left(\frac{3.3}{a},\ \frac{4.5}{a}\right)$ を頂点とする長方形の周および内部を動く．

$\frac{1}{1.1}\leqq\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{0.9}$ だから，

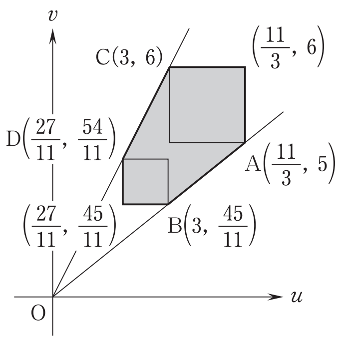
$a=0.9$ のとき $(u,\ v)$ は 4 点 $(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$，$\left(\frac{11}{3},\ 6\right)$，$\left(\frac{11}{3},\ 5\right)$ を頂点とする長方形の周および内部を動く．

$a=1.1$ のとき $(u,\ v)$ は 4 点 $\left(\frac{27}{11},\ \frac{45}{11}\right)$，$\left(\frac{27}{11},\ \frac{54}{11}\right)$，$\left(3,\ \frac{54}{11}\right)$，$\left(3,\ \frac{45}{11}\right)$ を頂点とする長方形の周および内部を動く．

点 $\left(\frac{3.3}{a},\ \frac{4.5}{a}\right)$ は直線 $v=\frac{15}{11}u$ 上を $3\leqq u\leqq\frac{11}{3}$ の範囲で動き，

点 $\left(\frac{2.7}{a},\ \frac{5.4}{a}\right)$ は直線 $v=2u$ 上を $\frac{27}{11}\leqq u\leqq 3$ の範囲で動く．

よって点 P が動く範囲は右図網掛部（境界を含む）． …(答)



（注） $\frac{2.7}{1.1}\leqq u\leqq\frac{3.3}{0.9}$，$\frac{4.5}{1.1}\leqq v\leqq\frac{5.4}{0.9}$ としただけでは不十分．実際，これらをみたす点 $\left(\frac{27}{11},\ 6\right)$ をとってみると，$\frac{b}{a}=\frac{27}{11}$，$\frac{c}{a}=6$．そこで b，c を最初の条件をみたすようにとると，

$$2.7\leqq b=\frac{27}{11}a\leqq 3.3,\quad 4.5\leqq c=6a\leqq 5.4.$$

よって，$1.1 \leqq a \leqq \dfrac{121}{90}$，$\dfrac{3}{4} \leqq a \leqq 0.9$ となり，条件をみたす a が存在しない．

2 変数の不等式は図を用いて考えるとよい．

(2) の【解答 1】

与方程式の $\dfrac{1}{4}$(判別式)$=b^2-ac \geqq 2.7^2-1.1\times 5.4=1.35>0$ より，与方程式は常に相異なる 2 実解をもつ．

両辺を a $(\neq 0)$ で割ると $x^2-2ux+v=0$ となる．よって，大きい方の解は，

$$z=u+\sqrt{u^2-v}$$

u は正だから z は u が大きいほど大きく，v が小さいほど大きい．点 $(u,\ v)$ は (1) の網掛部を動くから，z は図の線分 AB 上で最大になる．

直線 AB の方程式は $v=\dfrac{15}{11}u$ で $3 \leqq u \leqq \dfrac{11}{3}$ だから $v=\dfrac{15}{11}u$ のとき，

$$z=u+\sqrt{u^2-\frac{15}{11}u}=u+\sqrt{\left(u-\frac{15}{22}\right)^2-\left(\frac{15}{22}\right)^2}.$$

$u \geqq 3 > \dfrac{15}{22}$ なので，z は u について単調増加．よって，z は $u=\dfrac{11}{3}$ のとき最大となる．その最大値は，

$$z=\frac{11}{3}+\sqrt{\left(\frac{11}{3}\right)^2-\frac{15}{11}\cdot\frac{11}{3}}=\frac{11+2\sqrt{19}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

点 $(u,\ v)$ は (1) の斜線部を動くから，z は図の線分 CD 上で最小になる．

直線 CD の方程式は $v=2u$ で $\dfrac{27}{11} \leqq u \leqq 3$ だから $v=2u$ のとき，

$$z=u+\sqrt{u^2-2u}=u+\sqrt{(u-1)^2-1}.$$

$1<\dfrac{27}{11} \leqq u$ なので，z は u について単調増加．よって，z は $u=\dfrac{27}{11}$ のとき最小となる．その最小値は，

$$z=\frac{27}{11}+\sqrt{\left(\frac{27}{11}\right)^2-2\cdot\frac{27}{11}}=\frac{27+3\sqrt{15}}{11}. \qquad \cdots(答)$$

(2) の【解答 2】

$b^2-ac>0$ であることは (2) の【解答 1】と同様に示される．

$ax^2-2bx+c=0$ の 2 解のうち大きい方 z は $z=\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}=\dfrac{c}{b-\sqrt{b^2-ac}}$.

z は b について増加し，a，c について減少する．

よって，z の最大値は，

$$\frac{3.3+\sqrt{3.3^2-0.9\times 4.5}}{0.9}=\frac{11+2\sqrt{19}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

最小値は，

$$\frac{2.7+\sqrt{2.7^2-1.1\times 5.4}}{1.1}=\frac{27+3\sqrt{15}}{11}. \qquad \cdots(答)$$

第5問

ベンチが $k+1$ 個一列に並べてあり，A，B の二人が次のようなゲームをする。最初 A は左端，B は右端のベンチにおり，じゃんけんをして勝った方が他の端に向って一つ隣りのベンチに進み，負けた方は動かないとする。また二人が同じ手を出して引き分けとなったときには，二人とも動かないとする。こうしてじゃんけんを繰返して早く他の端のベンチに着いた者を勝ちとする。一回のじゃんけんで，A が勝つ確率，負ける確率，引き分けとなる確率はすべて等しいとき，次の確率を求めよ。

(1) n 回じゃんけんをした後に，二人が同じベンチに座っている確率 q

(2) n 回じゃんけんをしたとき，A，B の移動回数がそれぞれ x 回，y 回である確率 $p(x, y)$

(3) $k=3$ のとき n 回のじゃんけんの後に，まだゲームの勝敗がきまらない確率 p，ただし $n \geqq 3$ とする。

分　野

確率・統計：確率

考え方

n 回じゃんけんをした後 2 人が同席するのは，n 回のじゃんけんのうち k 回勝負がついた場合である．

また n 回のじゃんけんのうち A が x 回，B が y 回勝ち，したがって引き分けが $n-x-y$ 回である場合の数は ${}_n\mathrm{C}_x \cdot {}_{n-x}\mathrm{C}_y = \dfrac{n!}{x!y!(n-x-y)!}$ 通りである．

(3) はすべての場合について数え上げればよい．

ただし，n 回のじゃんけんを待たずに勝負がついてしまった場合，その後も（形式的にではあるが）じゃんけんを続けるのか否かという点で，問題の条件設定がやや曖昧である．解釈の仕方によっていくつかの解答が得られるであろう．ここでは勝負がついたらそれ以後じゃんけんはしないものと考えることにする．

【解答】

(1) $n<k$ のとき 2 人が同じベンチに座ることはないから，その確率は 0.

$n \geqq k$ のとき，n 回のじゃんけんのうち k 回勝負がつき，$n-k$ 回引き分けたとき，2 人は同じベンチに座る．その確率は，

$${}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = {}_n\mathrm{C}_k\frac{2^k}{3^n}$$

である．

ただし，この中には両端のベンチに 2 人が座っている場合が含まれる．両端のベンチに 2 人が座る場合の中には n 回目より以前に一方の人のみが，k 回（$n>k$）勝って勝負がすでについてしまい，その後形式的に n 回目までじゃんけんをして引き分けを続けた場合が含まれている．そのような場合は最初の $n-1$ 回のうち k 回だけ一方の人が勝って，$n-k-1$ 回引き分け，n 回目も引き分ける場合である．その確率は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}\frac{1}{3} \times 2 = {}_{n-1}\mathrm{C}_k\frac{2}{3^n}.$$

よって，$n>k$ のとき，

$$q = {}_nC_k\frac{2^k}{3^n} - {}_{n-1}C_k\frac{2}{3^n} = \frac{n!}{k!(n-k!)}\,\frac{2^k}{3^n} - \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\,\frac{2}{3^n} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\,\frac{2\{(2^{k-1}-1)n+k\}}{3^n}$$

$n=k$ のとき $q=\dfrac{2^n}{3^n}$，$n<k$ のとき，$q=0$ も含めて，

$$q=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!}{k!(n-k)!}\dfrac{2\{(2^{k-1}-1)n+k\}}{3^n} & (n\geqq k\text{ のとき}),\\ 0 & (n<k\text{ のとき}).\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

(2)(i) $x+y\leqq n$ かつ $x\leqq k-1$ かつ $y\leqq k-1$ のとき，

n 回じゃんけんをしてAが x 回勝つ場合の数は ${}_n\mathrm{C}_x$ であり，残りの $n-x$ 回のうちBが y 回勝つ場合の数は ${}_{n-x}\mathrm{C}_y$ である．残り $n-x-y$ 回は引き分けである．

したがって，

$$p(x,\ y)={}_n\mathrm{C}_x\cdot{}_{n-x}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(\frac{1}{3}\right)^{n-x-y}=\frac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

(ii) $x+y\leqq n$ かつ $x=k$ かつ $y\leqq k-1$ のとき，

$n-1$ 回じゃんけんをしてAが $x-1$ 回，Bが y 回勝ち，n 回目にAが勝つ場合であるからその確率は，

$$p(x,\ y)={}_{n-1}\mathrm{C}_{x-1}\cdot{}_{n-x}\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,y!(n-x-y)!}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

(iii) $x+y\leqq n$ かつ $x\leqq k-1$ かつ $y=k$ のとき，

(ii)の x と y を取り替えて，

$$p(x,\ y)=\frac{(n-1)!}{x!(y-1)!(n-x-y)!}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

(iv) $x+y>n$ または $x=y=k$ または $x>k$ または $y>k$ のとき，

$$p(x,\ y)=0.$$

以上より，

$$p(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}\cdot\dfrac{1}{3^n} & (x+y\leqq n\text{ かつ }x\leqq k-1\text{ かつ }y\leqq k-1\text{ のとき}),\\ \dfrac{(n-1)!}{(x-1)!\,y!(n-x-y)!}\cdot\dfrac{1}{3^n} & (x+y\leqq n\text{ かつ }x=k\text{ かつ }y\leqq k-1\text{ のとき}),\\ \dfrac{(n-1)!}{x!(y-1)!(n-x-y)!}\cdot\dfrac{1}{3^n} & (x+y\leqq n\text{ かつ }x\leqq k-1\text{ かつ }y=k\text{ のとき}),\\ 0\quad(x+y>n\text{ または }x=y=k\text{ または }x>k\text{ または }y>k\text{ のとき}).\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

(3) $k=3$ のときベンチは4個である．

Aが勝つ回数を x 回，Bが勝つ回数を y 回とすると，勝負が決まらないのは，

$$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2)$$

の9通り．$p(x,\ y)=p(y,\ x)$ に注意して，

$$\begin{aligned}p&=p(0,\ 0)+p(1,\ 1)+p(2,\ 2)+2p(0,\ 1)+2p(0,\ 2)+2p(1,\ 2)\\ &=\left\{\frac{n!}{0!0!n!}+\frac{n!}{1!1!(n-2)!}+\frac{n!}{2!2!(n-4)!}+2\cdot\frac{n!}{0!1!(n-1)!}\right.\\ &\qquad\left.+2\cdot\frac{n!}{0!2!(n-2)!}+2\cdot\frac{n!}{1!2!(n-3)!}\right\}\frac{1}{3^n}\quad\left(n=3\text{ のとき }\frac{n!}{(n-4)!}=0\text{ とする．}\right)\\ &=\left\{1+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}+2n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)\right\}\frac{1}{3^n}\\ &=(n^4-2n^3+7n^2+2n+4)\cdot\frac{1}{4\cdot3^n}.\end{aligned}\quad\cdots(\text{答})$$

(注) 本問の n は勝負がついたあとどのように処理すべきかの記述がない．**【解答】**では勝負がついた時点で打ち切り，以後はカウントしないという立場で計算した．

勝負がついた後もじゃんけんを続け，端の人がじゃんけんで勝って移動できなくなった時点で打ち切

るというルールだと，

(1) の答は $n \geqq k$ のとき ${}_n\mathrm{C}_k \dfrac{2^k}{3^n}$．$n < k$ のとき 0 となり，

(2) の答は (i) $x+y \leqq n$，$x \leqq k$，$y \leqq k$ のとき $\dfrac{n!}{x!\,y!(n-x-y)!}\dfrac{1}{3^n}$，(iv) $x+y>n$ または $x>k$ または $y>k$ のとき 0，

(3) の答は同じ

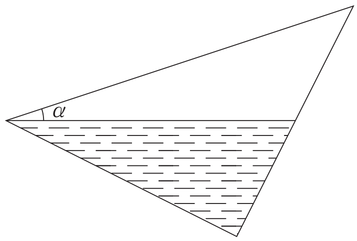
のように単純化されるが設定が不自然になる．

第 6 問

直円錐(すい)形のグラスに水が満ちている。水面の円の半径は 1，深さも 1 である。

(1) このグラスを下の図のように角度 α だけ傾けたとき，できる水面は楕(だ)円である。この楕円の中心からグラスのふちを含む平面までの距離 ℓ と，楕円の長半径 a および短半径 b を，$m=\tan\alpha$ で表せ。ただし楕円の長半径，短半径とは，それぞれ長軸，短軸の長さの $\dfrac{1}{2}$ のことである。

(2) 傾けたときこぼれた水の量が，最初の水の量の $\dfrac{1}{2}$ であるとき，$m=\tan\alpha$ の値を求めよ。ただしグラスの円錐の頂点から，新しい水面までの距離を h とするとき，残った水の量は，$\dfrac{1}{3}\pi abh$ に等しいことを用いよ。



分　野

代数・幾何：立体図形，二次曲線，楕円

考え方

(1) を図形的に考える場合，ℓ，a は問題文の図を考えることで求められる．b は見取り図をきちんと描いて考える必要がある．このとき，水面の楕円の中心を通りかつグラスのふちを含む平面に平行な平面と水面との交線が短軸を与えることに注意したい．

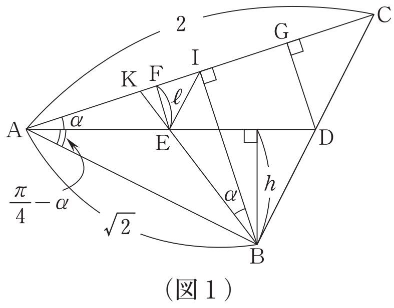
また，適当な座標系のもとで円錐曲面を表す方程式を用いると，座標計算のみでも解を得ることができる．

(2) は (1) ができれば比較的容易である．

【解答 1】

(1) 円錐の回転軸を含み水面に垂直な断面（図 1）で考える．断面 ABC は直角二等辺三角形で $\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ である．AD が水面で AD の中点 E は楕円の中心．

$\mathrm{AD}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ より，



（図 1）

$$a=\mathrm{AE}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{\cos\alpha}}{1+\tan\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{1+\tan\alpha}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}. \qquad \cdots(答)$$

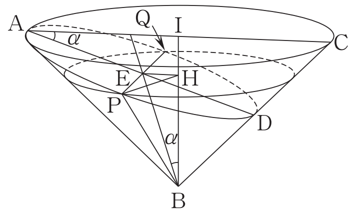
$$\ell=\mathrm{AE}\sin\alpha=a\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{m}{1+m}. \qquad \cdots(答)$$

グラスのふちを含む平面を π とする．E を通りかつ平面 π に平行な平面と水面との交線が短軸であり，（図２）の PQ に相当する．

（図１）で E は AD の中点であり，三角形 ABD は直角三角形なので，
$\mathrm{EA}=\mathrm{EB}=\mathrm{ED}\ (=a)$.

よって，三角形 EAB は二等辺三角形．

$$\therefore\quad \angle\mathrm{EBA}=\angle\mathrm{EAB}=\frac{\pi}{4}-\alpha.$$



（図２）

したがって，（図２）において，

$$\angle\mathrm{EBH}=\angle\mathrm{HBA}-\angle\mathrm{EBA}=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\alpha.$$

$$\therefore\quad \mathrm{EH}=\mathrm{EB}\sin\alpha=a\sin\alpha.$$

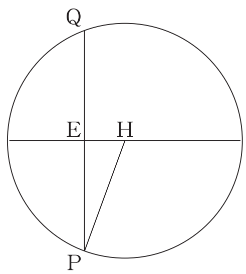
また，$\angle\mathrm{PBH}=\frac{\pi}{4}$ より $\mathrm{PH}=\mathrm{BH}=\mathrm{BE}\cos\alpha=a\cos\alpha$.

$$\therefore\quad b^2=\mathrm{PE}^2=\mathrm{PH}^2-\mathrm{EH}^2=a^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$=a^2(2\cos^2\alpha-1)=a^2\left(\frac{2}{1+\tan^2\alpha}-1\right)$$

$$=\frac{1+m^2}{(1+m)^2}\left(\frac{2}{1+m^2}-1\right)=\frac{1-m}{1+m}.$$

$$\therefore\quad b=\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}. \qquad \cdots(答)$$



(2) $h=\mathrm{AB}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

$$=\cos\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha(1-\tan\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

最初の水の量が $\frac{1}{3}\pi$ だから与条件から $\frac{\pi}{3}abh=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}$．よって，

$$abh=\frac{1}{2}.\quad \frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}\cdot\frac{1-m}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{(1-m)^{\frac{3}{2}}}{(1+m)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}.\quad \frac{1-m}{1+m}=\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}.$$

よって，

$$m=\frac{2^{\frac{2}{3}}-1}{2^{\frac{2}{3}}+1}. \qquad \cdots(答)$$

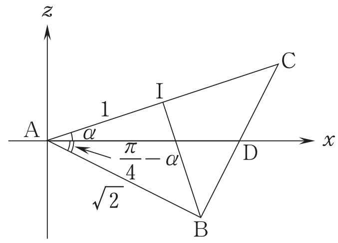
（注１） ℓ，a，b の求め方は多様である．**【解答１】**では ℓ を a から求めたが，ℓ を直接求めるなら（図１）で，

$$\ell=\frac{1}{2}\mathrm{GD}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}\cdot\sin\alpha$$

として求めることができる．

【解答 2】

(1)　A を原点，xy 平面が水面と一致し，B が xz 平面内にあるように座標系をとる．



$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ で AB と水面のなす角は $\frac{\pi}{4}-\alpha$ だから B の座標は，

$$\mathrm{B}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),\ 0,\ -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)$$
$$=(\cos\alpha+\sin\alpha,\ 0,\ \sin\alpha-\cos\alpha).$$

また，グラスのふちの円の中心 I も xz 平面内にあり $\mathrm{AI}=1$，AI と水面のなす角は α だから，

$$\mathrm{I}(\cos\alpha,\ 0,\ \sin\alpha).$$

水面のふちを表す楕円上の任意の点を $\mathrm{S}(x,\ y,\ 0)$ とおくと $\angle\mathrm{IBS}=\frac{\pi}{4}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{BS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}}=|\overrightarrow{\mathrm{BS}}|\cos\frac{\pi}{4}.\quad (\overrightarrow{\mathrm{BS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BI}})^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BS}}|^2.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=(x-\cos\alpha-\sin\alpha,\ y,\ -\sin\alpha+\cos\alpha),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=(-\sin\alpha,\ 0,\ \cos\alpha).$$

$$\{-\sin\alpha(x-\cos\alpha-\sin\alpha)-\cos\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)\}^2=\frac{1}{2}\{(x-\cos\alpha-\sin\alpha)^2+y^2+(-\sin\alpha+\cos\alpha)^2\}.$$

整理すると，

$$(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)x^2-2(\cos\alpha-\sin\alpha)x+y^2=0.$$

これを楕円の標準形になおすと，

$$\frac{\left(x-\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right)^2}{\frac{1}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}}+\frac{y^2}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}}=1.$$

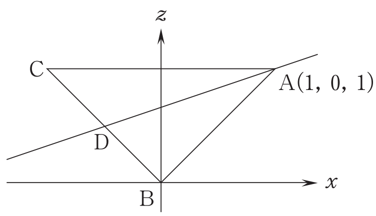
よって，

$$a=\frac{1}{\cos\alpha+\sin\alpha},\quad b=\sqrt{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}}.$$

以下省略．

【解答 3】

B を原点，グラスのふちが xy 平面に平行になるようにとり，水面が xy 平面に垂直になるように座標をとる．



グラスのふちと xy 平面の交点の 1 つを $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$ とする．

$z=k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ におけるグラスの切り口は z 軸上に中心があり，半径 k の円 $x^2+y^2=k^2$ より円錐面を表す方程式は，

$$x^2+y^2=z^2\quad(0\leqq z\leqq 1).\qquad\cdots①$$

水面はグラスを角度 α だけ傾ける．A を通るから，水面と，xy 平面の交わりは傾き $\tan\alpha=m$ の直線．

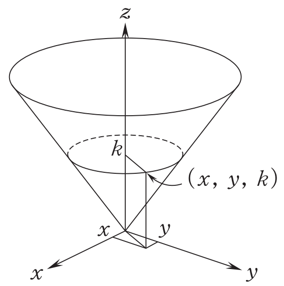
水面の方程式は，

$$z=mx+1-m.$$

① に代入すると，

$x^2+y^2=(mx+1-m)^2.\quad (1-m^2)x^2-2m(1-m)x+y^2=(1-m)^2.$

$$\frac{\left(x-\frac{m}{1+m}\right)^2}{\frac{1}{(1+m)^2}}+\frac{y^2}{\frac{1-m}{1+m}}=1.$$



これは水面の楕円を xy 平面へ正射影した楕円の方程式である．

x 方向の半径が $\dfrac{1}{1+m}$ であるから実際の長半径はその

$\dfrac{1}{\cos\alpha}=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\sqrt{1+m^2}$ 倍したものである．y 方向の半径は

$\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$ でこれが実際の短半径である．よって，

$$a=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m},\quad b=\sqrt{\frac{1-m}{1+m}}. \qquad \cdots(答)$$

水面の楕円の中心の正射影はこの楕円の中心であるから，水面の楕円の中心の x 座標は $\dfrac{m}{1+m}$，y 座標は 0，z 座標は $m\cdot\dfrac{m}{1+m}+1-m=\dfrac{1}{1+m}$.

中心とグラスのふちの平面 $z=1$ との距離が ℓ だから，

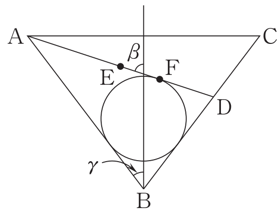
$$\ell=1-\frac{1}{1+m}=\frac{m}{1+m}. \qquad \cdots(答)$$

（注２） 長半径が a，短半径が b の楕円の面積は πab である．残った水が底面積 πab 高さ h の楕円錐であるから，その体積は $\dfrac{1}{3}\pi abh$ である．

(参考) 中心軸と母線のなす角が γ の円錐を中心軸となす角が β の平面で切ってできる二次曲線の離心率 e は，

$$e=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

である．



切り口が楕円になる場合，中心軸を含み平面に垂直な断面は右図のよう．

三角形 ABD において，$\angle A=\beta-\gamma$，$\angle B=2\gamma$，$\angle D=\pi-\beta-\gamma$.

三角形 ABD の内接円と辺 AD の接点を F とすると，F は円錐と平面の内接球の接点でもあるから楕円の焦点の１つである．AD の中点 E が楕円の中心である．したがって離心率 $e=\dfrac{EF}{ED}$.

$$ED=\frac{AD}{2},\quad DF=\frac{1}{2}(AD+BD-AB).$$

$$EF=ED-DF=\frac{AD}{2}-\frac{1}{2}(AD+BD-AB)=\frac{1}{2}(AB-BD).$$

正弦定理を使って，

$$e=\frac{EF}{ED}=\frac{AB-BD}{AD}=\frac{\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)}{\sin 2\gamma}=\frac{2\sin\gamma\cos\beta}{2\sin\gamma\cos\gamma}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

本問では $\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$，$\gamma=\dfrac{\pi}{4}$ だから，

$$e=\sqrt{2}\sin\alpha=\sqrt{2}\,\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}\,m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$b^2=(1-e^2)a^2=\left(1-\frac{2m^2}{1+m^2}\right)a^2=\frac{1-m^2}{1+m^2}a^2.$$

$a=\dfrac{\sqrt{1+m^2}}{1+m}$ から $b=\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$ が導かれる．

5.2　国公立複数受験可能制度（1987 年）

共通一次試験により国公立大学の受験は原則一校のみという時代が続いた．しかしこれは受験生の側からは受験機会を狭めたという批判があった．そこで，複数校受験できる制度への改革が求められた．その結果，国公立大学の入試日程を２つに分け，Ａ日程（３月１日から）とＢ日程（３月４日から）とした．また同一地域で日程を分けると一期校，二期校の弊害が再現する可能性を考慮して，原則西日本の大学はＡ日程，東日本の大学はＢ日程とするように大学間で申し合わせた．

その結果Ａ日程で京都大学，Ｂ日程で東京大学を受験した受験生が多く，しかもその両方に合格した受験生の多くが東大に入学する結果になった．

京都大学は対抗策をねり，1989 年には後期試験導入という手段で，合格者の東大への流出を阻止した（Ａ日程，Ｂ日程騒動（下巻 p61）参照）．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1987～1989）

1987 年　文科第 3 問．同年の京都大理系 $\boxed{3}$ と同内容の問題であった．複数受験可能な元年に東京大学と京都大学で類似問題が出たことは何かの偶然であった（Ａ日程，Ｂ日程騒動（下巻 p61）参照）．

1988 年　理科第 2 問は正四面体の正射影の面積の最大最小を求める問題．おおよその見当はつけられるが．本当に最大または最小であることを証明するのは手間がかかる．

1988 年　理科第 6 問は定点 O からの距離が指定された 4 点を頂点とする四面体の体積の最大値を求める問題．空間における初等幾何的なセンスを問う問題であった．

1989 年　共通第 1 問は原点対称な 3 次関数のグラフを $y=x$ について対称移動したもう 1 つのグラフとの共有点に関する問題であった．美しいグラフであるとともに，対称性を利用できるかどうかを問う問題であった．

1989 年　理科第 5 問．具体的な曲線と x 軸で囲まれた図形を y 軸の回りに回転してできる立体の体積についていわゆるバウムクーヘン積分を証明させる問題．計算結果だけが流布していたことについての警告か．

このころ　あんなこと・こんなこと

1989 年　ベルリンの壁が崩壊．東西ドイツの国境が解放される．翌年ドイツ再統一．

昭和が終り平成となる（1989 年）．

1987 年　携帯電話登場．

思い出す曲「百万本のバラ」（1987 年），「オリノコ・フロウ」（1988 年）．

このころの河合塾

1987 年　松戸校開校．

1988 年　立川校開校．

1987 年　文科

第 1 問

行列 $X=\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ が条件

$$X^2-4X+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をみたすとき，このような x，y を座標とする点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ。ただし，行列の成分は実数とする。

分　野

代数・幾何：行列，**数学 I** ：3 元 2 次連立方程式

考え方

行列の成分計算の問題である．ケイリー・ハミルトンの定理を使っても解ける．
成分の実数条件に注意すること．

【解答 1】　成分計算ですなおに

$X=\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ より，

$$X^2-4X+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+z^2-4x+3 & z(x+y-4) \\ z(x+y-4) & y^2+z^2-4y+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \begin{cases} x^2+z^2-4x+3=0, & \cdots① \\ z(x+y-4)=0, & \cdots② \\ y^2+z^2-4y+3=0. & \cdots③ \end{cases}$$

② より，$z=0$ または $x+y=4$.

(i)　$z=0$ のとき，

① ，③ より，

$(x-3)(x-1)=0$ かつ $(y-3)(y-1)=0$.

$$\therefore \quad (x,\ y)=(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3).$$

(ii)　$x+y=4$ のとき，

③ は ① に一致して，

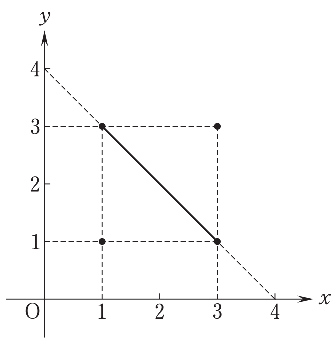
$$z^2=-x^2+4x-3=-(x-3)(x-1).$$

成分は実数だから，$-(x-3)(x-1)\geqq 0$.

$$\therefore \quad 1\leqq x\leqq 3.$$

よって，$x+y=4$ かつ $1\leqq x\leqq 3$.

(i)，(ii) より $(x,\ y)$ の存在範囲は右図の線分及び 2 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 3)$ である．　…(答)



【解答 2】　ケイリー・ハミルトンの定理の利用

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと，

$$X^2-4X+3E=O. \quad \cdots①$$

(i)　$X=xE$ の形でかけるとき，

① より，$(x^2-4x+3)E=O$.

$$\therefore \quad x^2-4x+3=0. \quad \therefore \quad x=1 \text{ または } x=3.$$

このとき，$x=y$ だから $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (3,\ 3)$.

(ii) $X=xE$ の形でかけないとき，

ケイリー・ハミルトンの定理より，

$$X^2-(x+y)X+(xy-z^2)E=O. \qquad \cdots②$$

①，② より，

$$X^2=(x+y)X-(xy-z^2)E=4X-3E.$$

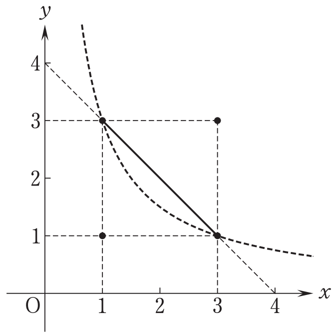
$X=xE$ の形にかけないから，

$$x+y=4, \quad xy-z^2=3.$$

成分は実数であるから $xy-3=z^2\geqq 0$.

よって，$x+y=4$，$xy\geqq 3$.

(i)，(ii) より，$(x,\ y)$ の存在範囲は右図の線分及び 2 点. …(答)



第 2 問

a を正の定数とし，x の関数

$$f(x)=x^3-ax^2-a^2x$$

のグラフを C とする。$f(x)$ が極大となる x の値を b とするとき，点 $(b,\ f(b))$ における C の接線と C とによって囲まれる部分の面積を a で表せ。

分　野

基礎解析：整式の微分，整式の積分

考え方

微分積分の基本問題．計算をしっかり，要領よくやることにつきる．

【解答】

$f(x)=x^3-ax^2-a^2x$ より，

$$f'(x)=3x^2-2ax-a^2=(3x+a)(x-a).$$

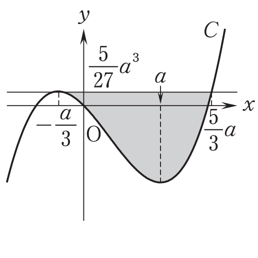
$a>0$ より，$f(x)$ の増減表は下図のようである．

x	$\cdots$	$-\dfrac{a}{3}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$b=-\dfrac{a}{3}$，極大値 $f(b)=f\left(-\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{5}{27}a^3$.

よって，点 $(b,\ f(b))$ における接線は $y=\dfrac{5}{27}a^3$.

C とこの接線のもう一つの共有点の x 座標を求める．



$$x^3-ax^2-a^2x=\frac{5}{27}a^3.$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{a}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}a\right)=0.$$

$x \neq -\dfrac{a}{3}$ より，$x=\dfrac{5}{3}a$.

求める面積を S とすると，

$$S=\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left\{\frac{5}{27}a^3-(x^3-ax^2-a^2x)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{5}{27}a^3x-\frac{x^4}{4}+a\cdot\frac{x^3}{3}+a^2\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}$$

$$=\frac{10}{27}a^4-\frac{52}{27}a^4+\frac{14}{9}a^4+\frac{4}{3}a^4$$

$$=\frac{4}{3}a^4.$$

…(答)

（注１） S の計算は次のようにもできる．

$$S=\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left\{\frac{5}{27}a^3-(x^3-ax^2-a^2x)\right\}dx$$

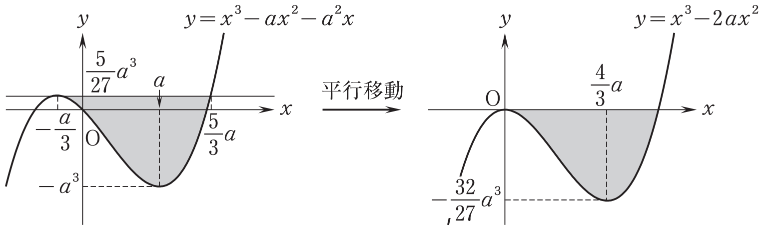
$$=-\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2\left(x-\frac{5}{3}a\right)dx$$

$$=-\int_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}\left\{\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-2a\left(x+\frac{a}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\left(x+\frac{a}{3}\right)^4-\frac{2}{3}a\left(x+\frac{a}{3}\right)^3\right]_{-\frac{a}{3}}^{\frac{5}{3}a}$$

$$=\frac{4}{3}a^4.$$

（注２） またグラフを平行移動してから計算するともっと計算しやすい．



$y=x^3-ax^3-a^2x$ を $\left(\dfrac{a}{3},\ -\dfrac{5}{27}a^3\right)$ だけ平行移動すると $y=x^3-2ax^2$.

$$S=\int_0^{2a}(-x^3+2ax^2)\,dx=\frac{4}{3}a^4.$$

また一般に，

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(\beta-x)\,dx=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

も上と同様に示すことができる．この結果も押えておくとよいだろう．

第3問

t の関数 $f(t)$ を

$$f(t)=1+2at+b(2t^2-1)$$

とおく。区間 $-1\leqq t\leqq 1$ のすべての t に対して $f(t)\geqq 0$ であるような a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を図示せよ。

分　野

数学 I ：2 次関数

考え方

2 次関数のグラフの区間におけるふるまいを調べる問題．ポイントとして，

(i)　グラフの凹凸，　(ii)　両端における正負，　(iii)　判別式，　(iv)　対称軸の位置

を調べる点があげられる．また丹念に場合分けをして，それぞれを調べ尽すことも大切．

【解答】

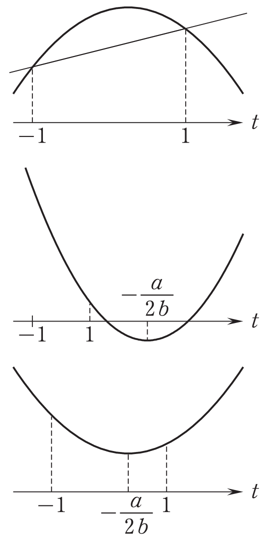
$$f(t)=2bt^2+2at+1-b.$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のすべての t に対して $f(t)\geqq 0$ だから，

$$f(1)=2a+b+1\geqq 0 \text{ かつ } f(-1)=-2a+b+1\geqq 0.$$

$$\therefore\quad b\geqq 2a-1 \text{ かつ } b\geqq -2a-1 \qquad \cdots①$$

でなければならない．



(i)　$b\leqq 0$ のとき $f(t)$ のグラフは上に凸な放物線か直線．

よって，① をみたすことだけが条件．

(ii)　$b>0$ のとき $f(t)$ のグラフは下に凸な放物線．

対称軸 $t=-\dfrac{a}{2b}$ の位置によって，次の (ii-a)，(ii-b) に分けられる．

(ii-a)　$\left|-\dfrac{a}{2b}\right|>1$ すなわち $b<\dfrac{|a|}{2}$ のとき．

対称軸は $-1\leqq t\leqq 1$ にない．よって ① をみたすことが条件．

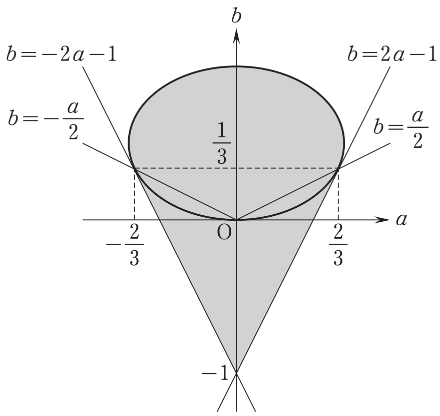
(ii-b)　$\left|-\dfrac{a}{2b}\right|\leqq 1$ すなわち $b\geqq\dfrac{|a|}{2}$ のとき．

対称軸は $-1\leqq t\leqq 1$ にある．よって判別式 $D\leqq 0$ が条件．

$$\therefore\quad \frac{1}{4}D=a^2-2b(1-b)\leqq 0.$$

$$\therefore\quad 2a^2+4\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\leqq 1.$$

$b=2a-1$ と $b=\dfrac{a}{2}$ とは点 $\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ で交わり，$2a^2+4\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2=1$ はこの点で $b=2a-1$ と接することなどを考慮すると，(i)，(ii-a)，(ii-b) より，求める範囲は次図の斜線部，境界を含む．



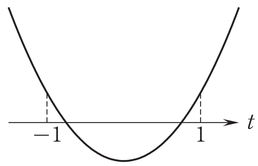
（注１） 場合分けの仕方は色々ある．基本的には $f(t)$ のグラフを考えて，

㈠ b の値， ㈡ 判別式 ㈢ $f(\pm 1)$ の値， ㈣ 対称軸の位置

について場合分けすることになる．

（注２） (ⅰ)，(ⅱ-a)，(ⅱ-b) を次のようにまとめてもよい．

$f(1)\geqq 0$，$f(-1)\geqq 0$ かつ $f(x)$ のグラフが右図のようにならないことが条件．



よって，

$f(1)\geqq 0$ かつ $f(-1)\geqq 0$ かつ

「$\left(D>0,\ \text{かつ}\ b>0\ \text{かつ}\ -1<-\dfrac{a}{2b}<1\right)$ でない」

が条件．

第４問

三つの実数 x，y，z のうち最大の数を $\max(x,\ y,\ z)$ で表し，最小の数を $\min(x,\ y,\ z)$ で表す。いま，次の条件をみたす x，y，z を座標とする点全体の集合を R とする。

$$x\geqq 0,\quad y\geqq 0,\quad z\geqq 0,$$
$$\max(x,\ y,\ z)\leqq a,$$
$$x+y+z-\min(x,\ y,\ z)\leqq a+b$$

R の体積を求めよ。ただし，a，b は定数で，$a>b>0$ とする。

分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：整式の積分，体積

考え方

max，min の記号にまどわされないこと．立体の概形がつかみにくい．

概形がつかみにくいときは断面積を計算して，積分すればよい．$x\leqq y\leqq z$ など大小を指定した部分の体積を６倍すればよい．

概形がつかめるならば初等幾何的な方法で体積を求められる．

【解答】 積分法の利用

求める立体の体積は与えられた条件に，$x\leqq y\leqq z$ をつけ加えたときの立体の体積の６倍に等しい．

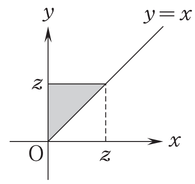
$x\leqq y\leqq z$ のとき，$\max(x,\ y,\ z)=z$，$\min(x,\ y,\ z)=x$ だから与条件は，

$$0\leqq x\leqq y\leqq z\leqq a,\quad y+z\leqq a+b$$

となる．

　$0 \leqq z \leqq a$ の範囲で z を定数として，断面を考える．

$$0 \leqq x \leqq y \leqq z, \quad y \leqq a+b-z.$$

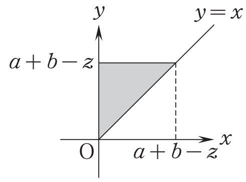


(i)　$0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}(a+b)$ のとき，$z \leqq a+b-z$.

　よって，

$$0 \leqq x \leqq y \leqq z.$$

　右図より断面積は $\dfrac{1}{2}z^2$.



(ii)　$\dfrac{1}{2}(a+b) < z \leqq a$ のとき，$z > a+b-z$.

　よって，

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a+b-z.$$

　右図より断面積は $\dfrac{1}{2}(a+b-z)^2$.

　求める体積は，

$$6\left\{\int_0^{\frac{1}{2}(a+b)}\left(\frac{1}{2}z^2\right)dz+\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{a}\left(\frac{1}{2}(a+b-z)^2\right)dz\right\}$$

$$=\Big[z^3\Big]_0^{\frac{1}{2}(a+b)}+\Big[(z-a-b)^3\Big]_{\frac{1}{2}(a+b)}^{a}$$

$$=\frac{1}{4}(a+b)^3-b^3. \qquad \cdots(答)$$

【別解 1】　図形的解法 1

　【解答 1】と同様に x，y，z の大小を指定する．

　見やすさのため，ここでは $x \geqq y \geqq z$ とする．

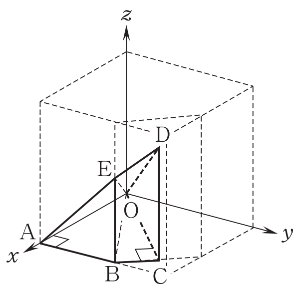
　与条件に $x \geqq y \geqq z$ を付加すると，

$$a \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 0, \quad x+y \leqq a+b.$$

　求める立体は 5 つの面

$$x=a, \quad x=y, \quad y=z, \quad z=0, \quad x+y=a+b$$

で囲まれた右図のような多面体 OABCDE である．



　ただし O(0, 0, 0)，A(a, 0, 0)，B(a, b, 0)，C$\left(\dfrac{1}{2}(a+b),\ \dfrac{1}{2}(a+b),\ 0\right)$，D$\left(\dfrac{1}{2}(a+b),\ \dfrac{1}{2}(a+b),\ \dfrac{1}{2}(a+b)\right)$，E($a$, b, b)．

　多面体 OABCDE の体積は三角錐 O-ABE と四角錐 O-BCDE の体積の和に等しい．

　また，OA⊥(面 ABE)，OC⊥(面 BCDE) に注意してこの体積を計算する．

$$三角錐\ \text{O-ABE}=\frac{1}{3}\triangle \text{ABE}\times \text{OA}=\frac{1}{6}ab^2.$$

$$台形\ \text{BCDE}=\frac{1}{2}(\text{BE}+\text{CD})\times \text{BC}=\frac{1}{2}\left\{b+\frac{1}{2}(a+b)\right\}\times\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}(a+3b)(a-b).$$

$$四角錐\ \text{O-BCDE}=\frac{1}{3}(台形\ \text{BCDE})\times \text{OC}=\frac{1}{12\sqrt{2}}(a+3b)(a-b)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$$

$$=\frac{1}{24}(a^3+3a^2b-ab^2-3b^3).$$

よって，求める立体の体積は，

$$6\times(\text{三角錐 O-ABE}+\text{四角錐 O-BCDE})$$
$$=ab^2+\frac{1}{4}(a^3+3a^2b-ab^2-3b^3)$$
$$=\frac{1}{4}(a^3+3a^2b+3ab^2-3b^3). \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解 2】 図形的解法 2

$\max(x,\ y,\ z)\leqq a$ は x，y，z のいずれも a より大きくないこと，すなわち

$$x\leqq a,\quad y\leqq a,\quad z\leqq a$$

を意味する．

また $x+y+z-\min(x,\ y,\ z)\leqq a+b$ すなわち $x+y+z-a-b\leqq\min(x,\ y,\ z)$ は x，y，z のいずれも $x+y+z-a-b$ より小さくないこと，すなわち

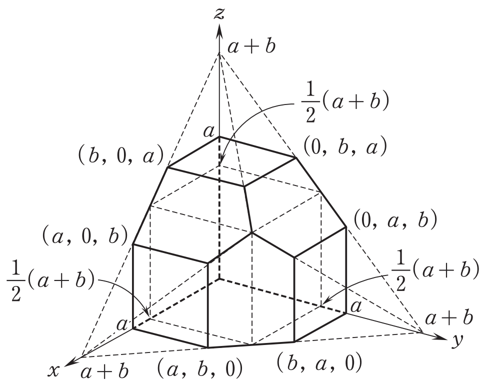
$$x+y+z-a-b\leqq x,\quad x+y+z-a-b\leqq y,\quad x+y+z-a-b\leqq z$$

を意味する．

よって，与条件は，

$$0\leqq x\leqq a,\quad 0\leqq y\leqq a,\quad 0\leqq z\leqq a,$$
$$y+z\leqq a+b,\quad x+z\leqq a+b,\quad x+y\leqq a+b.$$

これらをみたす点集合は右図のような立体をなす．



3 つの断面

$$x=\frac{1}{2}(a+b),\quad y=\frac{1}{2}(a+b),\quad z=\frac{1}{2}(a+b)$$

で区切ると，この立体は一辺の長さが $\frac{1}{2}(a+b)$ の立方体と 3 つの正四角錐台に分けられる．

正四角錐台の上底面は一辺の長さが b の正方形で頂点までの距離は b，下底面は一辺の長さが $\frac{1}{2}(a+b)$ の正方形で頂点までの距離は $\frac{1}{2}(a+b)$．

よって，正四角錐台の体積は $\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-b^3\right\}$．

よって求める体積は，

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+3\times\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-b^3\right\}=\frac{1}{4}(a+b)^3-b^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

1987 年　理科

第 1 問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ の表す xy 平面の一次変換が，直線 $y=2x+1$ を直線 $y=-3x-1$ へうつすとする。点 P(1, 2) がうつる点を Q とし，原点を O とするとき，二直線 OP と OQ のなす角の大きさを求めよ。

分　野

代数・幾何：一次変換

考え方

条件が過剰にあるので，いろいろ方法はある．すなおに直線の移動から a，b を求め，次に Q を求め，角を求めてもそう難しくない．最短コースは他にある．

【解答】

直線 $y=2x+1$ 上の任意の点の座標は $(t,\ 2t+1)$ とかける．この点が移る点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a-2b)t-b \\ (b+2a)t+a \end{pmatrix}.$$

$(X,\ Y)$ が直線 $y=-3x-1$ 上につねにあるから，

$$(b+2a)t+a=-3\{(a-2b)t-b\}-1.$$

これがすべての実数 t について成り立つから，

$$b+2a=-3(a-2b),\quad a=3b-1.$$

よって，$a=b=\dfrac{1}{2}$.

よって，$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.　…①

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=A\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.　…②

$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\frac{\frac{1}{2}(-1+6)}{\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

よって，2 直線 OP と OQ のなす角は $\dfrac{\pi}{4}$.　…(答)

(注 1)　上の**【解答】**はあまり予備知識を必要としないすなおな解答例として示した．しかし，以下に示すいくつかのポイントを押さえておくことにより，より要領よく OP，OQ のなす角を求めることができる．

【別解 1】　2 直線の傾きと tan の加法定理を用いて

② まで**【解答】**と同じ．

② で OP：$y=2x$，OQ：$y=-3x$ であることがわかる．OP，OQ と x 軸のなす角をそれぞれ α，

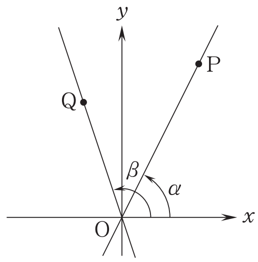
β とする．

2 直線 OP，OQ の傾きはそれぞれ 2，-3 だから，

$$\tan\alpha=2,\quad \tan\beta=-3.$$

$$\tan\angle \mathrm{POQ}=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3-2}{1-6}=1.$$

$$\therefore\quad \angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}. \qquad \cdots(答)$$



（注 2） この問題は 2 直線 OP，OQ のなす角を求めている．**【解答】**から 2 直線のなす角が $\frac{3}{4}\pi$ とするのには抵抗があるかもしれないが，これも正解である．もし，問題が「$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を求めよ」というものだったら，$\frac{\pi}{4}$ だけが正解であるが 2 直線のなす角なら 2 通りの可能性がある．

$\tan\angle \mathrm{POQ}=1$ からは $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角は $\frac{\pi}{4}$ または $\frac{3}{4}\pi$ のいずれかとしか求められない．もっとも，P，Q の座標がすでに求められているのなら tan と図の併用で，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\frac{\pi}{4}$ であるとする手もある．

本問の場合，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が直線 $y=2x+1$ に平行であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ も直線 $y=-3x-1$ に平行なはずである．本来なら，$y=-3x-1$ に平行なベクトルの向きは 2 通りあるが，2 直線のなす角をきいているのだから，向きのことは考えずに，傾きだけから，$\frac{\pi}{4}$ としてよい．

A の形によらず，OP，OQ のなす角は $\frac{\pi}{4}$ であるといえる．

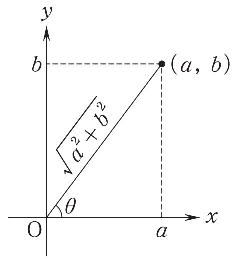
【別解 2】 行列 A の形に注目して

$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ の形の行列は原点中心の相似拡大と回転の合成変換を表す．

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる角を θ とおくと（右図参照），

$$A=\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \cdots③$$



A は $\sqrt{a^2+b^2}$ の相似拡大と θ 回転の合成変換を表す．

このことを使うと ① から，

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

となり，A は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍の相似拡大と $\frac{\pi}{4}$ 回転の合成変換を表す．よって，任意の点 P $(\neq \mathrm{O})$ の像を Q とすると，$\angle \mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$，$\mathrm{OQ}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{OP}$ となる．したがって，① からただちに $\frac{\pi}{4}$ が答えであることがわかる．

（注 3） この形の行列を最初から意識すれば，A が ③ の形で表されているから，任意の直線は原点からの距離が $\sqrt{a^2+b^2}$ 倍され，θ 回転されることがわかる．

したがって，任意の直線とその移された直線とのなす角はつねにθである．したがって，本問では $y=2x+1$ と $y=-3x-1$ の（原点からの法線ベクトルの）なす角がθである．これがわかれば $\angle\mathrm{POQ}=\theta$ である．

2直線OP，OQのなす角を求めているから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きづけも考えずに，$y=2x+1$ と $y=-3x-1$ のなす角すなわち $y=2x$ と $y=-3x$ のなす角を求めればよい．

Aの形から，P，Qにかかわらず，OP，OQのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ に等しいといえる．この点（注2）とは異なる観点である．

いずれにしろ，本問の答は，2直線 $y=2x+1$，$y=-3x-1$ のなす角である．

第2問

点 $(x,\ y)$ を点 $(x+a,\ y+b)$ に移す平行移動によって曲線 $y=x^2$ を移動して得られる曲線を C とする。C と曲線 $y=\dfrac{1}{x}$，$x>0$ が接するような a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の存在する範囲の概形を図示せよ。

また，この二曲線が接する点以外に共有点を持たないような a，b の値を求めよ。ただし，二曲線がある点で接するとは，その点で共通の接線を持つことである。

分　野

微分・積分：微分法

考え方

$(a,\ b)$ の存在範囲は曲線になる．a，b のみたす方程式を出そうとすると，とんでもなく複雑な形になってしまい，図はかけない．a，b を接点の x 座標 t で表し，パラメーター（媒介変数）t で与えられた曲線としてその概形を求めることになる．

後半は3次方程式が3重解をもつ条件を求めればよい．このとき接点以外の交点があれば，必ず第1象限にあることに注意．

前半は難問だが後半だけは独立に解くことができ，しかも標準的である．

【解答】

$y=x^2$ を $(a,\ b)$ だけ平行移動したグラフの方程式は $y=(x-a)^2+b$.

これに $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ を代入して整理すると，共有点の x 座標を求める方程式は，

$$x^3-2ax^2+(a^2+b)x-1=0 \quad (x>0). \qquad \cdots①$$

接点の x 座標を t，他の交点の x 座標を s とおくと，

$$x^3-2ax^2+(a^2+b)x-1=(x-t)^2(x-s).$$

右辺を展開して係数を比較すると，

$$2t+s=2a, \quad t^2+2st=a^2+b, \quad t^2s=1. \qquad \cdots②$$

第3式から，

$$s=\frac{1}{t^2}. \qquad \cdots③$$

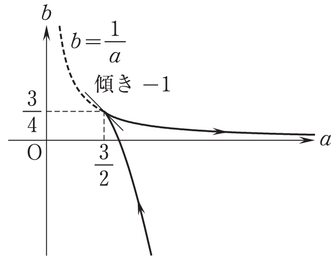
これと②から，

$$a=t+\frac{1}{2t^2}, \quad b=\frac{1}{t}-\frac{1}{4t^4} \quad (t>0). \qquad \cdots④$$

$(a,\ b)$ は t をパラメーターとした曲線を描く．

$$\frac{da}{dt}=1-\frac{1}{t^3}=\frac{t^3-1}{t^3}, \quad \frac{db}{dt}=-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^5}=-\frac{t^3-1}{t^5}. \quad \therefore \quad \frac{db}{da}=-\frac{1}{t^2}. \qquad \cdots⑤$$

t	$(+0)$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$\dfrac{da}{dt}$	$-\infty$	$-$	0	$+$	(1)
$\dfrac{db}{dt}$	$+\infty$	$+$	0	$-$	(0)
$\dfrac{db}{da}$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	(0)
a	$+\infty$	↘	$\dfrac{3}{2}$	↗	$+\infty$
b	$-\infty$	↗	$\dfrac{3}{4}$	↘	(0)



次に ③ より $s>0$．よって，① の実数解が t 以外にないためには $s=t$．

② で $t=s$ とおくと，$t=s=1$．

$$\therefore \quad a=\frac{3}{2}, \quad b=\frac{3}{4}. \qquad \cdots(答)$$

（注１） (a, b) を t で表すには $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=(x-a)^2+b$ とおき，$x=t$ で接する条件，

$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ から，

$$\frac{1}{t}=(t-a)^2+b, \quad -\frac{1}{t^2}=2(t-a) \qquad \cdots⑥$$

から ④ がただちに導かれる．

この方法だと後半で $s>0$ を示すために方程式 ① に戻らなければならない．

$x=t$ 以外に共有点をもたないのは ① が 3 重解をもつときであることを前提とするなら

$f''(t)=g''(t)$ として $\dfrac{2}{t^3}=2$ から $t=1$ が求められる．

（注２） ④（または ⑥）から t を消去しようとかかると，a，b についての複雑な方程式になってしまい，曲線を図示することは困難である．

（参考） **【解答】**では曲線を図示するとき，増減だけ調べた．ここではもう少しくわしく曲線を調べてみよう．

〔Ｉ〕 凹凸

⑤ より，

$$\frac{d^2b}{da^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{db}{da}\right)}{\dfrac{da}{dt}}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)}{\dfrac{t^3-1}{t^3}}=\frac{2}{t^3-1}.$$

よって $t<1$ のとき上に凸，$t>1$ のとき下に凸である．

〔Ⅱ〕 $t=1$ すなわち $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$ の近傍でのふるまい

$t\to1$ のとき $a\to\dfrac{3}{2}$，$b\to\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{db}{da}\to-1$．a は $t=1$ で減少から増加に，b は $t=1$ で増加から減少に変化する．したがって曲線は $t=1$ の前後で傾き -1 の直線 $\left(y=-x+\dfrac{9}{4}\right)$ に接しながら折り返す $\left(折り返し点は\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{4}\right)\right)$．

パラメーターで与えられる曲線がある直線に接しながら折り返すとき，この点をこの曲線の尖点という．

〔Ⅲ〕 **極限におけるふるまい⑴ $t\to+\infty$**

$t\to+\infty$ のとき ④ から a の $\dfrac{1}{2t^2}$，b の $\dfrac{1}{4t^4}$ は無視しうる．よって a はほぼ t，b はほぼ $\dfrac{1}{t}$ とみなしてよい．したがって，曲線は $b=\dfrac{1}{a}$ に漸近する．

もう少し正確にいうと $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(b-\frac{1}{a}\right)=0$ だから曲線は $b=\dfrac{1}{a}$ に漸近する．

〔Ⅳ〕 **極限におけるふるまい⑵ $t\to+0$**

$t\to+0$ のとき ④ から a の t，b の $\dfrac{1}{t}$ は無視しうる．よって a はほぼ $\dfrac{1}{2t^2}$，b はほぼ $\dfrac{-1}{4t^4}$ とみなしてよい．したがって，曲線は $b=-a^2$ に漸近する．

もう少し正確にいうと

$$\lim_{t\to+0}(a-\sqrt{-b})=\lim_{t\to+0}\left(t+\frac{1}{2t^2}-\sqrt{\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t}}\right)=\lim_{t\to+0}t\left(1+\frac{2}{1+\sqrt{1-4t^3}}\right)=0$$

だから $t\to+0$ において曲線は $a=\sqrt{-b}$ すなわち，$b=-a^2$ に漸近する．

ただし，$\displaystyle\lim_{t\to+0}(a^2+b)=+\infty$ となるからおなじ a 座標をもつ，$b=-a^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ と軌跡の点 $(a,\ b)$ の b 座標の差だけを見るとむしろ 2 点は離れてゆく．

第 3 問

xyz 空間内の点 P(0, 0, 1) を中心とする半径 1 の球面 K がある。K 上の点 Q$(a,\ b,\ c)$ が条件 $a>0$，$b>0$，$c>1$ のもとで K 上を動くとき，Q において K に接する平面を L とし，L が x 軸，y 軸，z 軸と交わる点をそれぞれ A，B，C とする。このような三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間座標，**微分・積分**：微分法

考え方

与えられた条件を使ってすなおに式を立てれば三角形 ABC の面積は Q の座標 a，b，c でかける．対称性を考慮すれば $a=b$ で極値をとると見当がつけられる．相加平均・相乗平均の関係，微分法等を使えば最小値は容易に求められる．

【解答】

球面 K の方程式は $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Q$(a,\ b,\ c)$ は球面 K の $a>0$，$b>0$，$c>1$ の部分を動くから，

$$a^2+b^2+(c-1)^2=1\quad(a>0,\ b>0,\ c>1). \qquad \cdots①$$

平面 L は Q で K に接する平面だから，

$$L:\ ax+by+(c-1)(z-1)=1.$$

x 軸，y 軸，z 軸との交点は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{c}{a},\ 0,\ 0\right),\quad \mathrm{B}\left(0,\ \frac{c}{b},\ 0\right),\quad \mathrm{C}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{c-1}\right).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(-\frac{c}{a},\ \frac{c}{b},\ 0\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(-\frac{c}{a},\ 0,\ \frac{c}{c-1}\right).$$

三角形 ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{(c-1)^2}+\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{(c-1)^2}}$$

$$=\frac{c^2}{2ab(c-1)}\sqrt{(c-1)^2+b^2+a^2}=\frac{c^2}{2ab(c-1)}. \qquad (①より)\cdots②$$

c を固定して，① と相加平均・相乗平均の関係より，

$$2ab \leqq a^2+b^2=1-(c-1)^2=2c-c^2. \quad \left(等号は\ a=b=\sqrt{\frac{(2-c)c}{2}}\ のときに成り立つ\right)$$

② より，

$$S \geqq \frac{c^2}{c(2-c)(c-1)}=\frac{c}{(2-c)(c-1)}.$$

① より，$1<c<2$．$f(c)=\dfrac{c}{(2-c)(c-1)}$ とおくと，

$$f'(c)=\frac{c^2-2}{(2-c)^2(c-1)^2}.$$

$f(c)$ の増減表は下のようである．

c	(1)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
$f'(c)$		$-$	0	$+$	
$f(c)$		↘	最小	↗	

$f(\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$．

よって，三角形 ABC の面積の最小値は $3+2\sqrt{2}$．　$\cdots$(答)

$\left(a=b=\sqrt{\sqrt{2}-1},\ c=\sqrt{2}\ のとき\right)$

(注１)　三角形 ABC の面積は四面体の体積を利用して次のようにして求めてもよい．A，B，C の座標を a，b，c で表したあと，四面体 OABC の体積を V とする．

$$V=\frac{1}{6}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}=\frac{c^3}{6ab(c-1)}. \qquad \cdots③$$

一方，平面 L と O の距離を d とすると，

$$d=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+(c-1)^2}}=c.$$

d と三角形 ABC の面積 S より，

$$V=\frac{1}{3}dS=\frac{1}{3}cS.$$

これと ③ より，

$$S=\frac{c^2}{2ab(c-1)}.$$

同様に（四面体 PABC）$=\dfrac{1}{6}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PC}$ と P と L の距離 1 を使って S を求めてもよい．

(注２)　$f(c)$ の最小値は相加平均・相乗平均の関係を使って求めることもできる．

$$f(c)=\frac{c}{(2-c)(c-1)}=\frac{1}{-c+3-\frac{2}{c}}\geqq\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}.$$

$$\left(\because\quad c+\frac{2}{c}\geqq 2\sqrt{c\cdot\frac{2}{c}}=2\sqrt{2}.\ 相加平均・相乗平均の関係，等号は\ c=\sqrt{2}\ のとき成立.\right)$$

第4問

xyz 空間において，点 P は yz 平面上の放物線 $z=1-y^2$ 上にあるとする。点 A(1, 0, 1) と P を結ぶ直線を x 軸のまわりに回転して得られる曲面と二平面 $x=0$，$x=1$ とによって囲まれる部分の体積を V とする。V を P の y 座標で表せ。また V の最小値を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間座標，**基礎解析**：整式の積分，体積

考え方

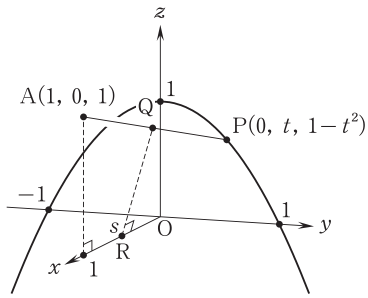
x 軸のまわりに回転するから平面 $x=s$ の断面（円）の面積を求め積分すればよい．直線 AP と平面 $x=s$ の交点の座標を求めればよい．

【解答】

点 P は yz 平面上の放物線 $z=1-y^2$ 上にあるから，P の座標を $(0,\ t,\ 1-t^2)$ とおく．

直線 AP の方程式は，

$$\frac{x}{1}=\frac{y-t}{-t}=\frac{z-(1-t^2)}{t^2}.$$



平面 $x=s$ $(0\leqq s\leqq 1)$ と AP の交点を Q とするとその座標は，

$$\mathrm{Q}(s,\ (1-s)t,\ 1-(1-s)t^2).$$

また $(s,\ 0,\ 0)$ を R とすると，

$$\mathrm{QR}^2=(1-s)^2t^2+\{1-(1-s)t^2\}^2=t^2(t^2+1)(s-1)^2+2t^2(s-1)+1.$$

この立体の $x=s$ における断面積は $\pi\mathrm{QR}^2$ だから，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\{t^2(t^2+1)(s-1)^2+2t^2(s-1)+1\}ds\\&=\pi\left[t^2(t^2+1)\frac{(s-1)^3}{3}+t^2(s-1)^2+s\right]_0^1\\&=\pi\left\{t^2(t^2+1)\frac{1}{3}-t^2+1\right\}\\&=\frac{\pi}{3}\{(t^2-1)^2+2\}.\end{aligned}$$

よって，P の y 座標を t とすると，

$$V=\frac{\pi}{3}\{(t^2-1)^2+2\}.$$ …(答)

また，$t=\pm1$ のとき，V は最小値 $\dfrac{2}{3}\pi$ をとる． …(答)

第5問

n を2以上の自然数とする。$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$ および $y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$ を満足する数列 x_1，x_2，$\cdots$，x_n および y_1，y_2，$\cdots$，y_n が与えられている。y_1，y_2，$\cdots$，y_n を並べかえて得られるどのような数列 z_1，z_2，$\cdots$，z_n に対しても

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2$$

が成り立つことを証明せよ。

分　野

基礎解析：数列，**数学Ⅰ**：不等式

考え方

数列 z_1，z_2，$\cdots$，z_n のうち2項 z_i，z_k を入れかえたとき $\sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2$ が増加するかどうかを調べる所がポイント．

2つの数列から1つずつとり出して積の和をつくるとき，大きいものは大きい同士，小さいものは小さい同士かけたものが最も大きい．

【解答】

$\{y_j\}$ と $\{z_j\}$ が異なるとき $z_i<z_k$ $(i<k)$ となる i，k が存在する．
このとき $x_i \geqq x_k$ だから，

$$\begin{aligned}&(x_i-z_i)^2+(x_k-z_k)^2-(x_i-z_k)^2-(x_k-z_i)^2\\&=-2(x_iz_i+x_kz_k-x_iz_k-x_kz_i)\\&=-2(x_i-x_k)(z_i-z_k) \geqq 0.\end{aligned} \quad \cdots①$$

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ のうち z_i と z_k だけを入れかえたものを $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ とする．
（すなわち，$z_i'=z_k$，$z_k'=z_i$，他はそのまま $z_m'=z_m$ $(m \neq i,\ m \neq k)$ とする．）
このとき①より，z_i と z_k を入れかえた方が小さいかまたは等しい．

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j')^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2.$$

$z_1, z_2, \cdots, z_n$ は $y_1, y_2, \cdots, y_n$ を並べかえたものだから $i<k$ で $z_i<z_k$ であるものを順次入れかえてゆけば，$z_1, z_2, \cdots, z_n$ を $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に一致させることができる．

例えば次のように順序を入れかえれば必ず $z_1, z_2, \cdots, z_n$ を $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に一致させることができる．

$\{z_j\} \neq \{y_j\}$ なら $z_i \neq y_i$ となる i が存在する．そのうち最小の i をとると，$z_k=y_i$ となる k $(i<k \leqq n)$ があり，$z_i<z_k$ である．このとき z_i と z_k を入れかえて新しい数列 $z_1', z_2', \cdots, z_n'$ を作る．

このとき，$\{z_j'\} \neq \{y_j\}$ であっても，$z_i'=y_i$ である．したがって $z_{i'}' \neq y_{i'}$ となる i' が存在するが，そのうち最小の i' は i より大きい．

以下同様に繰り返すと $z_i \neq y_i$ となる最小の i は増加するか，$\{z_j\}=\{y_j\}$ となる．

この操作を多くても $(n-1)$ 回繰り返すと，この数列は $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に一致させることができる．

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2 \geqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j')^2 \geqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j'') \geqq \cdots \geqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2.$$

$$\therefore\ \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2 \geqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2.$$

（証明終り）

（注１） $\{z_j\}$ は $\{y_j\}$ の順序を入れかえたものだから，

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n}x_j{}^2-2\sum_{j=1}^{n}x_jy_j+\sum_{j=1}^{n}y_j{}^2 \leqq \sum_{j=1}^{n}x_j{}^2-2\sum_{j=1}^{n}x_jz_j+\sum_{j=1}^{n}z_j{}^2$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n}x_jy_j \geqq \sum_{j=1}^{n}x_jz_j. \qquad \left(\because \quad \sum_{j=1}^{n}y_j{}^2=\sum_{j=1}^{n}z_j{}^2\right)$$

したがって，本問で証明すべき事柄は，

$$\sum_{j=1}^{n}x_jy_j \geqq \sum_{j=1}^{n}x_jz_j \qquad \cdots②$$

と同値である．

② も $\{z_j\}$ の項の互換を繰り返すことによって証明される．

証明ではないが，② の不等式は次のように説明すると理解しやすい．

ある投資家が y_1 円，y_2 円，…，y_n 円（$y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_n$）の資産を，$n$ 個の企業に分散して投資するとする．各企業の投資額当りの利益率はそれぞれ x_1，x_2，…，x_n（$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_n$）であるとする．ただし，$n$ 個に分けた資産はどの２つも同じ企業に投資することはないとする．このとき利益を最も上げるためには，どのように投資したらよいだろうか．ちょっと考えればすぐにわかることである．利益率の高い企業により多くの投資した方が有利である．

これは ② 式の単なる翻訳であるから証明ではない．しかし２つの数列の項の積の和は大きい項は大きい同士，小さい項は小さい同士かけたものが最大になることがよくわかる例である．

また，逆に大きい項と小さい項，小さい項と大きい項の積の和をとると最小になる．すなわち

$$\sum_{j=1}^{n}x_jy_{n-j+1} \leqq \sum_{j=1}^{n}x_jz_j, \quad \sum_{j=1}^{n}(x_j-y_{n-j+1})^2 \geqq \sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2$$

が成り立つ．これらも $\{z_j\}$ の項の互換で証明される．

（注２） $\{z_j\}$ は $\{y_j\}$ の項を並べかえて作った数列である．このとき $\{z_j\}$ の項のうち２つの項を取り出して互いに交換するという操作を繰り返すことによって $\{y_n\}$ を作ることができるということは，一見明らかなように見える．しかし２個の交換と n 個の順序を変えるということは別のことである．n が有限個の場合はそれでも有限回の操作で並べかえられるが，無限個の場合はそうではない．**【解答】**ではそのことを意識して $\{z_j\}$ を $\{y_j\}$ にする互換の操作手順を示した．

第6問

正六角形の頂点に1から6までの番号を順につける。また n 個のサイコロを振り，出た目を番号とするすべての頂点にしるしをつけるものとする。このとき，しるしのついた三点を頂点とする直角三角形が存在する確率を p_n とする。

(1) p_3，p_4 を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

分野

確率・統計：確率

考え方

p_3，p_4 を出すだけなら直角三角形が作れる場合を数え上げてもよい．しかし，一般の p_n を求めるには直角三角形が作れない場合を数えた方がよい．

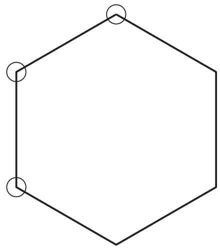
印をつけた頂点の個数で分類する．印をつけた頂点の個数が1，2のときは直角三角形は作れない．また印をつけた頂点の個数が4以上のときは必ず直角三角形は作れる．印をつけた頂点の個数が3のときは両方あるので更に場合分けしなければならない．

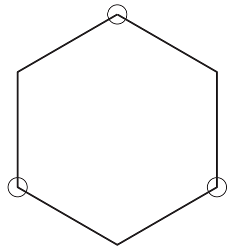
【解答】

一般の n について全事象を考える．

印をつけた頂点の個数が4個以上ならば必ず直角三角形を作れる．

印をつけた頂点の個数が3個のとき直角三角形を作れないのは，隣り合う3頂点に印をつけたとき，または1つおきの3頂点に印をつけたとき（右図で○をつけた頂点）．





印をつけた頂点の個数が2個以下のとき直角三角形は作れない．

(i) 印をつけた頂点が1個のとき，

頂点の選び方は6通りだから，その確率は，

$$6\times\frac{1}{6^n}=\frac{1}{6^{n-1}}.$$

(ii) 印をつけた頂点が2個のとき，

印をつけた頂点の組合せは ${}_6C_2=15$ 通り，2つの頂点を重複を許して n 個選ぶ順列は 2^n 通り．この中には(i)の場合が2通り含まれている．よってその確率は，

$$15\times\frac{2^n-2}{6^n}=\frac{5(2^{n-1}-1)}{6^{n-1}}.$$

(iii) 印をつけた頂点が3個で，直角三角形が作れないとき，

印をつけた頂点の組合せは，隣り合う3頂点となるのが6通り，1つおきの3頂点となるのが2通り，合計8通りである．3つの頂点を重複を許して n 個選ぶ順列は 3^n 通り．この中には(i)の場合が3通り，(ii)の場合が ${}_3C_2(2^n-2)=3(2^n-2)$ 通り含まれている．よってその確率は，

$$8\times\frac{3^n-3(2^n-2)-3}{6^n}=\frac{4(3^{n-1}-2^n+1)}{6^{n-1}}.$$

よって，

$$p_n=1-\frac{1}{6^{n-1}}-\frac{5(2^{n-1}-1)}{6^{n-1}}-\frac{4(3^{n-1}-2^n+1)}{6^{n-1}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}. \quad\cdots①$$

(1)　① から，

$$p_3=\frac{1}{3},\quad p_4=\frac{11}{18}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　① から，

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right)\right\}$$

$$=-\log 2+\frac{1}{n}\log 8+\frac{1}{n}\log\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right\}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\lim_{n\to\infty}\left\{-\log 2+\frac{1}{n}\log 8+\frac{1}{n}\log\left(1-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\right)\right\}$$

$$=-\log 2. \qquad \cdots(答)$$

(参考)　(i)，(ii)，(iii) の分子のうち，頂点が定まったとき，その全部に印をつけている場合の数は (i) で 1，(ii) で 2^n-2，(iii) で $3^n-3\cdot 2^n+3$ である．

これらの数を一般化すると，k 個の物の中から重複を許して n 個順に選ぶとき，k 個すべてを少なくとも 1 回は選ぶ場合の数である．これを N_k とおく．

$$N_k=k^n-{}_k\mathrm{C}_{k-1}(k-1)^n+{}_k\mathrm{C}_{k-2}(k-2)^n-\cdots+(-1)^{k-1}{}_k\mathrm{C}_1 1^n$$

$$=\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}{}_k\mathrm{C}_l\, l^n.$$

である．このことは，

$$N_1=1,\quad N_{k+1}=(k+1)^n-{}_{k+1}\mathrm{C}_k N_k-{}_{k+1}\mathrm{C}_{k-1}N_{k-1}-\cdots-{}_{k+1}\mathrm{C}_1 N_1$$

であることから，数学的帰納法により証明される．

(1) の【別解 1】　数え上げ

$n=3$ のとき，

直角三角形を作るには直径上の 2 頂点と他の 1 頂点を選べばよい．

直径の選び方は 3 通りで，それぞれに対し残りの頂点の選び方は 4 通りあるから，直角三角形は 3×4 通りある．サイコロの目の出方は $3!=6$ 通りである．

サイコロの目の出方の総数は 6^3 であるから，

$$p_3=\frac{3\times 4\times 6}{6^3}=\frac{1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

$n=4$ のとき，

4 つの頂点を選べば必ず直角三角形を作ることができる．その選び方はサイコロの目の出方も含めて ${}_6\mathrm{P}_4$ 通りある．

また，直角三角形の 1 つの頂点に印をつけるサイコロが 2 個あるとき，その選び方は 12×3 通りであり，このときサイコロの目の出方は $\dfrac{4!}{2!}$ 通りである．

サイコロの目の出方の総数は 6^4 であるから，

$$p_4=\frac{{}_6\mathrm{P}_4+12\times 3\times\dfrac{4!}{2!}}{6^4}=\frac{11}{18}. \qquad \cdots(答)$$

(注)　このように数え上げてゆく方法では一般の n の場合を尽くすことは難しい．

【別解 2】　漸化式

直角三角形が存在しないのは，出た目の種類が 2 通り以下であるか，3 通りのときのある場合である．

n 個のサイコロを振って，

出た目の種類が 1 通りである確率を q_n，

出た目の種類が 2 通りで対応する 2 点が同一直径上にある確率を r_n，

出た目の種類が2通りで対応する2点が同一直径上にない確率を s_n，

出た目の種類が3通りで対応する3点が直角三角形にならない確率を t_n

とおく．

1個のサイコロを振ったとき，出た目の種類は1だから，

$$p_1=0,\quad q_1=1,\quad r_1=0,\quad s_1=0,\quad t_1=0. \qquad \cdots①$$

n 個のサイコロを振って出た目と，もう1つのサイコロを振って出た目を比較することにより，

$$\begin{cases} p_{n+1}=p_n+\dfrac{2}{3}r_n+\dfrac{1}{3}s_n+\dfrac{1}{2}t_n, & \cdots② \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n, & \cdots③ \\ r_{n+1}=\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{3}r_n, & \cdots④ \\ s_{n+1}=\dfrac{2}{3}q_n+\dfrac{1}{3}s_n, & \cdots⑤ \\ t_{n+1}=\dfrac{1}{3}s_n+\dfrac{1}{2}t_n. & \cdots⑥ \end{cases}$$

これらから q_n，r_n，s_n，t_n，p_n を順次解く．

$$q_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}q_1=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.\quad（③，①より） \qquad \cdots⑦$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n+\left(\frac{1}{6}\right)^n.\quad（④，⑦より）$$

これを，$3^{n+1}r_{n+1}=3^n r_n+3\cdot\dfrac{1}{2^n}$ と変形して，階差を使って，$r_1=0$ から $\{3^n r_n\}$ を解くことにより，

$$r_n=\frac{1}{3^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right). \qquad \cdots⑧$$

$$s_{n+1}=\frac{1}{3}s_n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.\quad（⑤，⑦より）$$

$\{r_n\}$ と同様に $\{3^n s_n\}$ を階差を使って求めて，

$$s_n=\frac{4}{3^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right). \qquad \cdots⑨$$

$$t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n+\frac{4}{3^n}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).\quad（⑥，⑨より）$$

これを，$2^{n+1}t_{n+1}=2^n t_n+8\dfrac{2^n}{3^n}-\dfrac{16}{3^n}$ と変形して，$t_1=0$ から $\{2^n t_n\}$ を解くことにより，

$$t_n=\frac{1}{2^{n-3}}\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}. \qquad \cdots⑩$$

$$\begin{aligned} p_n&=1-q_n-r_n-s_n-t_n \\ &=1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}-\frac{1}{3^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{4}{3^{n-1}}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &\quad -\frac{1}{2^{n-3}}\left\{1-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &=1-\frac{1}{2^{n-3}}+\frac{1}{3^{n-2}}. \end{aligned}$$

これと，⑦，⑧，⑨，⑩から②はたしかに成り立つ．

以下は**【解答】**と同じ．

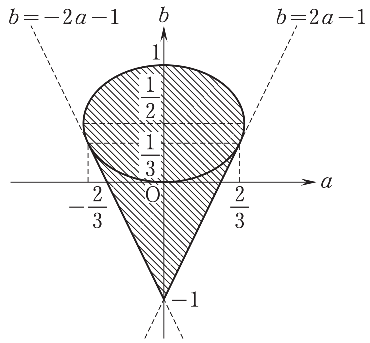
A日程，B日程騒動（1987年）

1987 年（昭和 62 年）A日程，B日程の制度が始まった．

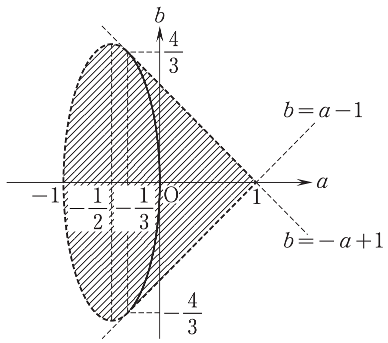
その結果これまでにできなかった東大，京大を同年度に両方受験できる体制ができあがった．

実際にフタをあけてみると，東大，京大を両方受験して両方に合格した受験生がかなり出た．そして，東大と京大で明暗が分かれた．つまり，両方を合格した受験者の大半が東大を選んだのである．

そして，その象徴とでもいえる事件が起こった．その年東大文類（第 3 問）と京大理系（第 3 問）でそっくりな問題が出た．東大の問題の $(2a,\ b,\ t)$ を $(-b,\ -a,\ \cos\theta)$ で置き換え，条件の等号を除くと奇しくも京大の問題と一致する問題になった．解答の図形（共に図示する問題）が私にはその年の東大と京大の明暗を表しているように思えた．



東大文類第 3 問の答の図



京大理系第 3 問の答の図

文理の違いがあるから両方を受験した受験生はいないであろう．同じ年に主要大学で類似した問題が出されることはまれである．

しかも東大の図の方は真っ直ぐ立っていて，境界もはっきりしているのに，京大の方は横倒しになっている上に境界が破線になってぼやけている．この違いはこの年の東大と京大の明暗を象徴しているように私には思える．

翌年 1988 年京大は対抗策をとった．文系の大半をB日程とし，東大との併願ができなくしたのである．

さらに翌々年 1989 年京大は反撃に出た．定員を 2 つに分け，前期試験と後期試験に分ける戦略をとった．A日程より早い時期の 2 月中に前期試験を行い，合格発表を繰り上げ，東大の発表より早くした．その結果京大の合格通知を受けた受験生が東大に流れるのを阻止するという戦略である．また，3 月中旬に後期試験を行った．つまり，後期試験のために手続きを早くしたと説明された．その戦略は一応成功したようである．

東大はその翌年（1990 年）から後期試験を実施するようになった．東大がこのように動いたことで，A日程，B日程を取る大学が減り，前期，後期の試験を実施する大学が増え，数年後にはA日程，B日程そのものが廃止された．

京大が苦労して編み出した後期試験を 2007 年，京大自ら全国に先駆けて廃止したのは歴史の皮肉のように感じられる．

1988 年　文科

第 1 問

直線 l 上に 10 メートル離れた 2 定点 A，B があり，l に平行な直線 m 上を点 P が秒速 1 メートルで一定の向きに動いている。A，P 間の距離と B，P 間の距離の和は，ある時刻に測ったとき 15 メートル，その 5 秒後に測ったときも 15 メートルであった。2 直線 l，m のあいだの距離は何メートルか。

分　野

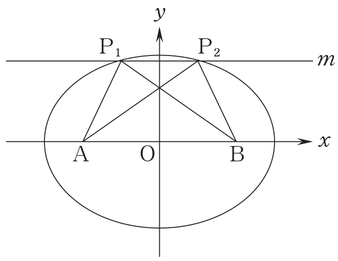
代数・幾何：図形と方程式，二次曲線，楕円

考え方

2 点間の距離の和が等しい点は楕円である．2 つの時間は点 P が楕円と直線の 2 交点間を移動する時間である．

【解答】

以下で長さの単位メートルは省略する．



最初に測った P の位置を P_1，5 秒後の位置を P_2 とする．

$$P_1P_2=5. \quad \cdots①$$

$$AP_1+BP_1=AP_2+BP_2=15. \quad \cdots②$$

AB の中点を O，直線 l を x 軸とし，A を $x<0$ 側にとると，$A(-5,\ 0)$，$B(5,\ 0)$．

② より P_1，P_2 は A，B を焦点とするある楕円上の点である．その楕円の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0) \quad \cdots③$$

とおけて，$AP_1+BP_1=2a$，焦点の x 座標は $\pm\sqrt{a^2-b^2}$ だから $2a=15$，$\sqrt{a^2-b^2}=5$.

$$\therefore \quad a=\frac{15}{2}, \quad b=\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2-5^2}=\frac{5\sqrt{5}}{2}. \quad \cdots④$$

直線 m の方程式を $y=d$ (>0) とおくと，P_1，P_2 は y 軸について対称で，① より P_1，P_2 の座標は $\left(\pm\frac{5}{2},\ d\right)$．これと ④ を ③ に代入して，

$$\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{15}{2}\right)^2}+\frac{d^2}{\left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2}=1. \quad \therefore \quad d^2=\frac{250}{9}.$$

$d>0$ より，$d=\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$.

よって，2 直線 l，m のあいだの距離は $\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$ メートル．　…(答)

第2問

xy 平面上の一次変換 f が次の 3 条件をみたすとする。

(i) 点 $(1,\ 0)$ は f により第 4 象限の内部にうつる。

(ii) 点 $(0,\ 1)$ は f により第 2 象限の内部にうつる。

(iii) 点 $(1,\ 1)$ は f により第 1 象限の内部にうつる。

このとき，f は逆変換が存在することを示せ。また，点 P の像 $f(\mathrm{P})$ が第 1 象限の内部にあれば，点 P も第 1 象限の内部にあることを示せ。

分野

代数・幾何：一次変換，**数学 I**：不等式

考え方

(i), (ii), (iii) は f を表す行列の成分および行列式の正負を与える．これから逆行列の成分の符号が定まる．

【解答】

f を表す行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}.$$

(i) より，点 $(a,\ c)$ は第 4 象限にある．

$$\therefore\quad a>0,\quad c<0. \qquad \cdots ①$$

(ii) より，点 $(b,\ d)$ は第 2 象限にある．

$$\therefore\quad b<0,\quad d>0. \qquad \cdots ②$$

(iii) より，点 $(a+b,\ c+d)$ は第 1 象限にある．

$$\therefore\quad a+b>0,\quad c+d>0. \qquad \cdots ③$$

①，②，③ より，$a>-b>0$，$d>-c>0$．

$$\therefore\quad ad-bc>(-b)(-c)-bc=0. \qquad \cdots ④$$

よって，$ad-bc\neq 0$．

よって，A は逆行列をもち，f には逆変換が存在する．（証明終り）

P，$f(\mathrm{P})$ の座標を $(x,\ y)$，$(x',\ y')$ とおく．

$f(\mathrm{P})$ が第 1 象限にあるとき，

$$x'>0,\quad y'>0. \qquad \cdots ⑤$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx'-by' \\ -cx'+ay' \end{pmatrix}.$$

④，①，②，⑤ より，$ad-bc>0$，$dx'-by'>0$，$-cx'+ay'>0$．よって，$x>0$，$y>0$．

よって，P は第 1 象限の内部にある．（証明終り）

第3問

xyz 空間において次の6個の不等式で表される立体の体積を求めよ。

$$
\begin{aligned}
x &\geqq 0,\\
y &\geqq 0,\\
z &\geqq 0,\\
x+y+z &\leqq 3,\\
x+2z &\leqq 4,\\
y-z &\leqq 1
\end{aligned}
$$

分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：整式の積分，体積

考え方

例えば xy 平面に平行な断面をとって断面積を求め z で積分すればよい．場合分けがあることに注意．
立体の概形がつかめるなら初等幾何的な方法で体積を求めることができる．

【解答1】　積分法の利用

問題の立体を平面 $z=t$ $(t\geqq 0)$ で切った切り口は，不等式

$$0\leqq x\leqq 4-2t,\quad 0\leqq y\leqq t+1,\quad x+y\leqq 3-t$$

で表される．

$0\leqq 4-2t$ より，$0\leqq t\leqq 2$.

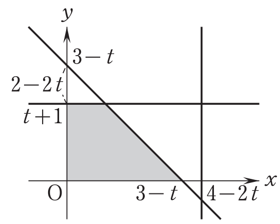
また，$4-2t\leqq 3-t \iff 1\leqq t$，$t+1\leqq 3-t \iff t\leqq 1$.

切り口の面積を $S(t)$ とおく．

(i)　$0\leqq t\leqq 1$ のとき，断面は右図のよう．

よって，

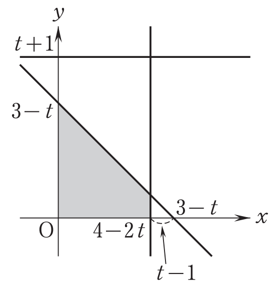
$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)^2-\frac{1}{2}(2-2t)^2=\frac{1}{2}(-3t^2+2t+5).$$



(ii)　$1\leqq t\leqq 2$ のとき，断面は右図のよう．

よって，

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)^2-\frac{1}{2}(t-1)^2=4-2t.$$



(i)，(ii) より，求める体積 V は，

$$V=\int_0^1\frac{1}{2}(-3t^2+2t+5)\,dt+\int_1^2(4-2t)\,dt=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}.\qquad\cdots(\text{答})$$

【解答2】　立体の概形を捉えて

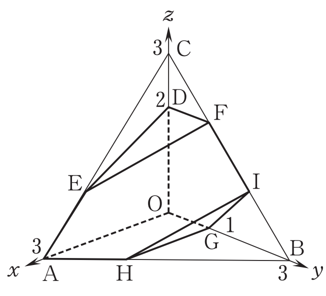
原点を O(0, 0, 0)，平面 $x+y+z=3$ と各軸の交点を A(3, 0, 0)，B(0, 3, 0)，C(0, 0, 3) とおく．

平面 $x+2z=4$ と OC，AC，BC との交点をそれぞれ D，E，F とすると，それらの座標は，

D(0, 0, 2)，　E(2, 0, 1)，　F(0, 1, 2).

平面 $y-z=1$ と OB，AB，BC との交点をそれぞれ G，H，I とすると，それらの座標は，

G(0, 1, 0)，　H(2, 1, 0)，　I(0, 2, 1).



求める図は図の太線で囲まれた立体である．

四面体 OABC，四面体 CDEF，四面体 BGHI の体積をそれぞれ V_1，V_2，V_3 とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\times\mathrm{OA}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot 3=\frac{9}{2},$$

$$V_2=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{CDF}\times(\mathrm{E}\text{ の }x\text{ 座標})=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{3},$$

$$V_3=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BGH}\times(\mathrm{I}\text{ の }z\text{ 座標})=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

よって，求める体積 V は，

$$V=V_1-V_2-V_3=\frac{9}{2}-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{7}{2}.$$ …(答)

第4問

$f(x)=x^3-x^2$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 A(1, 0) における接線が再びこの曲線と交わる点を B とする。

曲線 $y=ax^2+bx+c$ と曲線 $y=f(x)$ が点 A，B を共有し，さらに A と B のあいだにもうひとつの共有点をもつとき，この 2 曲線のかこむ部分の面積を求めよ。また，その面積が最小となるように a，b，c を定めよ。

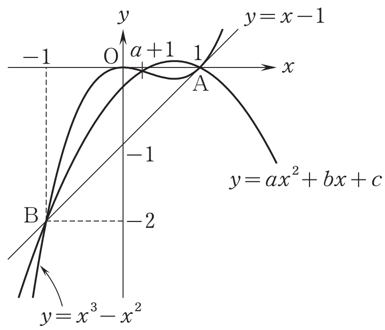
分　野

基礎解析：整式の微分，整式の積分，面積，最小値

考え方

丹念に計算すること．

【解答】



$f'(x)=3x^2-2x$ だから $f'(1)=1$.

よって，A における接線の方程式は $y=x-1$.

$x^3-x^2=x-1$ より，$(x-1)^2(x+1)=0$.

$$\therefore\quad x=1,\quad x=-1.\quad f(-1)=-2.$$

よって，B の座標は $(-1, -2)$.

曲線 $y=ax^2+bx+c$ が A，B を通るから，

$$a+b+c=0,\quad a-b+c=-2.$$

$\therefore\quad b=1,\quad c=-a-1.\quad \therefore\quad ax^2+bx+c=ax^2+x-a-1.$

$x^3-x^2=ax^2+x-a-1$ より，$(x+1)(x-1)(x-a-1)=0$.

$y=f(x)$ と $y=ax^2+bx+c$ の交点の x 座標は 1，-1，$a+1$.

A，B 以外の交点が A，B の間にあるから，$-1<a+1<1$. $-2<a<0$.

2 曲線が囲む部分の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{a+1}\{(x^3-x^2)-(ax^2+x-a-1)\}\,dx+\int_{a+1}^{1}\{(ax^2+x-a-1)-(x^3-x^2)\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x\right]_{-1}^{a+1}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{a+1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-(a+1)x\right]_{a+1}^{1}\\&=-\frac{(a+1)^4}{6}+(a+1)^2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

…(答)

$$\left(S\text{ を }c\text{ で表して }S=-\frac{c^4}{6}+c^2+\frac{1}{2}\text{ としてもよい.}\right)$$

$$S=-\frac{1}{6}\{(a+1)^2-3\}^2+2,\quad -1<a+1<1.$$

$0\leqq(a+1)^2<1$ より，$a+1=0$ のとき，つまり $a=-1$ のとき，S は最小となる.

このとき，

$$a=-1,\quad b=1,\quad c=0.$$

…(答)

1988 年　理科

第 1 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 2 問

空間内に平面 α がある。一辺の長さ 1 の正四面体 V の α 上への正射影の面積を S とし，V がいろいろと位置を変えるときの S の最大値と最小値を求めよ。

ただし，空間の点 P を通って α に垂直な直線が α と交わる点を P の α 上への正射影といい，空間図形 V の各点の α 上への正射影全体のつくる α 上の図形を V の α 上への正射影という。

分　野

代数・幾何：空間図形，最大・最小

考え方

最大最小を予想することは容易である．しかしそれを解析的に証明することは難しい．図形的に他の場合と比較する．正射影が三角形の場合と四角形の場合がある．

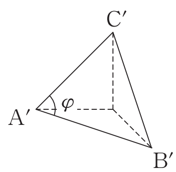
【解答】

正四面体 V の 4 頂点を A，B，C，D とし，その α への正射影を A′，B′，C′，D′ とする．

V の正射影は三角形または四角形である．三角形の場合その三角形が A′B′C′，四角形の場合その四角形が A′B′C′D′ となるように A，B，C，D をとる．

(i)　**最大値を求める**

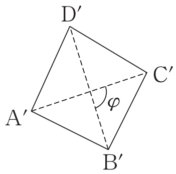
(i-a)　正射影が三角形のとき，$\angle \mathrm{B'A'C'}=\varphi$ とおく．



$$S=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\cdot\mathrm{A'C'}\sin\varphi \leqq \frac{1}{2}.\ (\because\ \ \mathrm{A'B'}\leqq 1,\ \mathrm{A'C'}\leqq 1,\ \sin\varphi\leqq 1.)$$

ただし等号が成り立つ場合はない．

(i-b)　正射影が四角形のとき，対角線 A′C′，B′D′ がなす角を φ とおく．



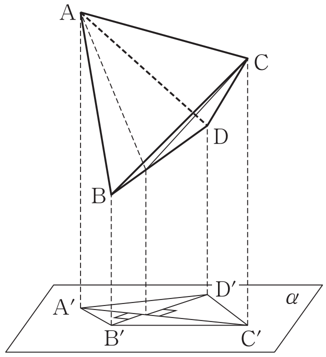
$$S=\frac{1}{2}\mathrm{A'C'}\cdot\mathrm{B'D'}\sin\varphi \leqq \frac{1}{2}.\ (\because\ \ \mathrm{A'C'}\leqq 1,\ \mathrm{B'D'}\leqq 1,\ \sin\varphi\leqq 1.)$$

正四面体の対辺 AC と BD は垂直であるから，$\alpha /\!/ \mathrm{AC}$，$\alpha /\!/ \mathrm{BD}$ のとき，$\mathrm{A'C'}=1$，$\mathrm{B'D'}=1$ で $\varphi=90^\circ$ となり等号が成り立つ．

(i-a)，(i-b) より S の最大値は $\frac{1}{2}$．　…(答)

(ii) **最小値を求める**

(ii-a) 正射影が四角形のとき最小になることがないことを示す．

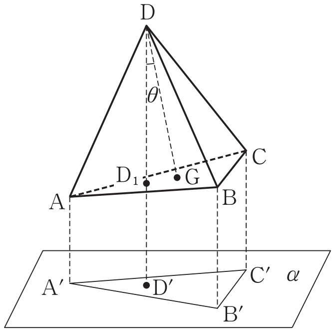


α に平行で AC に垂直な軸について正四面体を回転すると，B′，D′ と直線 A′C′ との距離は AC を含み α と垂直な平面と B，D の距離であり，変化しないから AC と α のなす角が大きい程 S は小さい．B′ と D′ は直線 A′C′ について常に反対側にある．

$\mathrm{AC} \perp \alpha$ のとき，A′，C′ は同じ点に重なり，直線 B′D′ の同じ側にあることになるから，AC と α のなす角を大きくしてゆくと，A または C の正射影 A′ または C′ が線分 B′D′ 上の点になり四角形の正射影より面積が小さい三角形の正射影が存在する．

よって，正射影が四角形のとき S は最小にならない．

(ii-b) 正射影が三角形 A′B′C′ のとき，直線 DD′ は三角形 ABC と交わる．その交点を $\mathrm{D_1}$，D から三角形 ABC へ下ろした垂線の足は三角形 ABC の重心 G である．三角形 ABC の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.



平面 ABC と平面 α のなす角を $\theta\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta$．$\theta$ が大きい程 S は小さい．

DG は平面 ABC に垂直で，$\mathrm{DD_1}$ は α に垂直だから，$\angle \mathrm{GDD_1}$ は平面 ABC と平面 α のなす角 θ に等しい．

θ が最大になるのは $\mathrm{D_1}$ が三角形 ABC の周又は内部にあって，G から最も遠いとき．すなわち $\mathrm{D_1}$ が A，B，C のいずれかと一致したとき．

このとき，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

よって，S の最小値は，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(ii-a)，(ii-b) より S の最小値は，

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

C を $y=x^3-x$，$-1\leqq x\leqq 1$ で与えられる xy 平面上の図形とする。次の条件をみたす xy 平面上の点 P 全体の集合を図示せよ。

「C を平行移動した図形で，点 P を通り，かつもとの図形 C との共有点がただ 1 点であるようなものが，ちょうど 3 個存在する。」

分　野

基礎解析：整式の微分，3 次方程式

考え方

共有点が 1 個は交点の x 座標を求める方程式の異なる実数解の個数が 1 個であることである．結局 2 曲線が接する場合である．その条件を平行移動の x 座標 a の式で表す．

次に，$\mathrm{P}(p,\ q)$ が C' 上にある条件の式において上の条件をみたす a が 3 個存在する条件を，$(p,\ q)$ で表す．

【解答】

C を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したものを C' とする．つまり

$$C' : y=(x-a)^3-(x-a)+b,\quad a-1\leqq x\leqq a+1.$$

C，C' の交点を求める方程式は，

$$(x-a)^3-(x-a)+b=x^3-x.$$

$$\therefore\quad 3ax^2-3a^2x+a^3-a-b=0. \qquad \cdots①$$

この左辺を $f(x)$ とする．

① が，

$$-1\leqq x\leqq 1 \text{ かつ } a-1\leqq x\leqq a+1 \qquad \cdots②$$

にただ 1 つの解（重解は 1 つと数える）をもつ条件を求める．

② の 2 つの区間が共有点をもつ条件は $-1\leqq a+1$ かつ $a-1\leqq 1$．

$$\therefore\quad -2\leqq a\leqq 2.$$

方程式 ① が区間 ② にただ 1 つの解をもつ条件を考える．

(i) $a=0$ のとき，

$b=0$ なら ① は恒等的に成り立ち，① をみたす x は無数にある．

$b\neq 0$ なら ① をみたす x は存在しない．

(ii) $0<a\leqq 2$ のとき，② の区間は $a-1\leqq x\leqq 1$ となる．

$$f(x)=3a\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+(\text{定数})$$

なので $y=f(x)$ のグラフの対称軸 $x=\dfrac{a}{2}$ は区間 ② の中点である．

したがって，$f(x)=0$ がただ 1 つの解をもつならば，それは重解でなければならない．

（$f(a-1)=f(1)$ となるので単独の解がこの区間内にあることはない.）

(iii) $-2\leqq a<0$ のときは (ii) と同様.

よって，方程式 ① が区間 ② にただ 1 つの解をもつ条件は，

$-2\leqq a\leqq 2$，$a\neq 0$ で（① の判別式）$=9a^4-12a(a^3-a-b)=0$.

$$\therefore\quad b=\frac{1}{4}a^3-a,\quad -2\leqq a\leqq 2,\quad a\neq 0. \qquad \cdots③$$

次に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおくと，P が C' 上にある条件は，

$$q=(p-a)^3-(p-a)+b,\quad a-1\leqq p\leqq a+1. \qquad \cdots④$$

C' が 3 個存在するということは，③，④ をみたす $(a,\ b)$ の組が丁度 3 組あるということである.

③ を ④ に代入して，

$$q=(p-a)^3-(p-a)+\frac{1}{4}a^3-a.$$

$$\therefore\quad a^3-4pa^2+4p^2a-\frac{4}{3}(p^3-p-q)=0. \qquad \cdots⑤$$

⑤ の左辺を $g(a)$ とおく．

③，④ より，

$$-2\leqq a\leqq 2,\quad a\neq 0,\quad p-1\leqq a\leqq p+1 \qquad \cdots⑥$$

のもとで，$g(a)=0$ の解が 3 個存在する点 $(p,\ q)$ の範囲が求めるものである．

$$g'(a)=3a^2-8pa+4p^2=(3a-2p)(a-2p)$$

より，$g(a)$ は $a=\frac{2}{3}p$，$a=2p$ で極値をとる．$g(a)=0$ が異なる 3 実解をもつためには，極値をとる a は ⑥ をみたさなければならない．$a=2p$ が ⑥ をみたすから

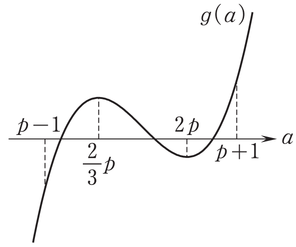
$$p-1\leqq 2p\leqq p+1,\quad 2p\neq 0 \text{ より } -1\leqq p\leqq 1,\quad p\neq 0. \qquad \cdots⑦$$

このとき，$-2\leqq p-1\leqq a\leqq p+1\leqq 2$ だから ⑥ は，

$$p-1\leqq a\leqq p+1,\quad a\neq 0 \qquad \cdots⑥'$$

とまとめられ，$a=\frac{2}{3}p$ も ⑥′ をみたす．

$g(a)$ のグラフを考えると，$g(a)=0$ が ⑥′ の区間に 3 個の解をもつ条件は，

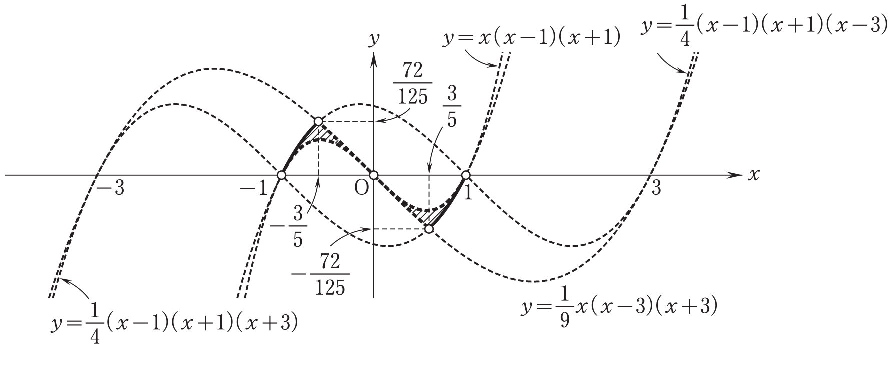


$$g(p-1)\leqq 0,\quad g(p+1)\geqq 0,\quad g(0)\neq 0,\quad g(2p)g\left(\frac{2}{3}p\right)<0.$$

（$g(0)=g(2p)$ なので，条件 $g(0)\neq 0$ は最後の式に含まれる．）

$$\therefore\quad \begin{cases} -1\leqq p\leqq 1,\ p\neq 0 & (⑦ \text{ より}), \\ (q-p^3+p)\left(q-\frac{1}{9}p^3+p\right)<0 & \left(g(2p)g\left(\frac{2}{3}p\right)<0 \text{ より}\right), \\ q\leqq \frac{1}{4}(p-1)(p+1)(p-3) & (g(p-1)\leqq 0 \text{ より}), \\ q\geqq \frac{1}{4}(p-1)(p+1)(p+3) & (g(p+1)\geqq 0 \text{ より}). \end{cases}$$

よって，点 $(p,\ q)$ の存在範囲を図示すると下図の斜線部，境界は実線部のみを含み破線部，白丸は含まない．



第4問

xy 平面上で原点から傾き a $(a>0)$ で出発し折れ線状に動く点Pを考える。ただし，点Pの y 座標はつねに増加し，その値が整数になるごとに動く方向の傾きが s 倍 $(s>0)$ に変化するものとする。

Pの描く折れ線が直線 $x=b$ $(b>0)$ を横切るための a，b，s に関する条件を求めよ。

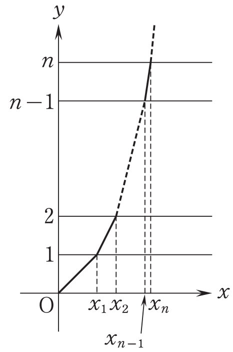
分　野

基礎解析：数列，**微分・積分**：数列の極限

考え方

折れ線と $y=n$ の交点の x 座標を x_n とおき，$\lim_{n\to\infty} x_n$ を求める．

【解答】



Pの y 座標が自然数 n のときの x 座標を x_n とおく．

$n-1<y<n$ における折れ線の傾きは as^{n-1} である．

よって，$x_n-x_{n-1}=\dfrac{1}{as^{n-1}}$.

$x_0=0$ より，

$$x_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{as}+\frac{1}{as^2}+\cdots+\frac{1}{as^{n-1}}.$$

x_n は n について単調に増加するから，題意をみたす条件は，

$$\lim_{n\to\infty} x_n>b.$$

(i) $0<s\leqq 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$．よって，折れ線は $x=b$ と必ず交わる．

(ii) $s>1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{s}}$.

　このとき，$x=b$ と交わる条件は $\dfrac{1}{a\left(1-\frac{1}{s}\right)}>b$.

したがって，求める条件は $0<s\leqq 1$ または「$s>1$，$ab\left(1-\dfrac{1}{s}\right)<1$」. …(答)

(注) $0<s\leqq 1 \iff 1-\dfrac{1}{s}\leqq 0$ だから，(答) をまとめて，

$$ab\left(1-\frac{1}{s}\right)<1 \quad \text{または} \quad abs<ab+s$$

などとしてよい．

第５問

xyz 空間において，xz 平面上の $0 \leqq z \leqq 2-x^2$ で表される図形を z 軸のまわりに回転して得られる不透明な立体を V とする。V の表面上 z 座標１のところにひとつの点光源Ｐがある。

xy 平面上の原点を中心とする円 C の，Ｐからの光が当たっている部分の長さが 2π であるとき，C のかげの部分の長さを求めよ。

分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：整式の微分，三角関数

考え方

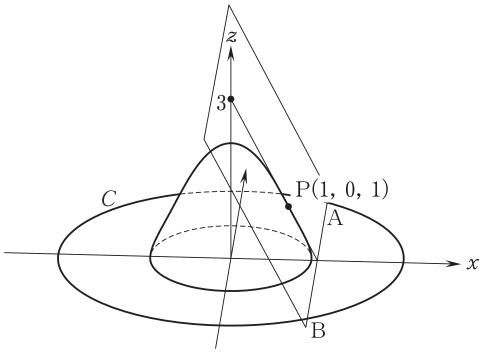
光源は $z=1$ のどの点をとっても同じだからたとえば xz 平面上にとって考える．

Ｐにおける接平面と xy 平面の交線で明るい部分とかげの部分に分れる．

円の半径 r と中心角 2θ をとれば r または θ に関する方程式は容易に求められる．

最後に $\cos\theta=\dfrac{3\theta}{2\pi}$ という見慣れない方程式が出てくる．解があるならただ１つしかないことをいい，適当な θ を代入して解をみつければよい．

【解答】



V および xy 平面を z 軸について回転しても変わらないから，点Ｐが xz 平面上の $x>0$ の点であるときについて考えればよい．このとき，点Ｐの座標は $(1,\ 0,\ 1)$．

光が当たる部分は点Ｐにおける立体 V の接平面について V と反対側の部分．

点Ｐにおける V の接平面は xz 平面に垂直で，xz 平面内の曲線 $z=2-x^2$ の点Ｐにおける接線，

$$z=-2(x-1)+1$$

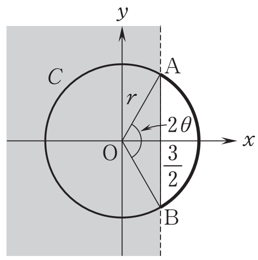
を含む．

よって，接平面の方程式は，

$$2x+z=3.$$

これと xy 平面の交線は，

$$z=0,\quad x=\frac{3}{2}.$$



xy 平面上で円 C の光が当たっている部分は右図の円弧（影のない部分）．その両端をＡ，Ｂとし，原点をＯとし，

$$\angle \mathrm{AOB}=2\theta,\quad \mathrm{OA}=r$$

とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

光が当たっている部分の長さが 2π だから，

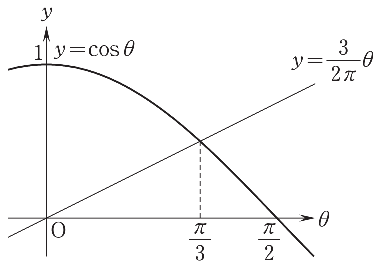
$$2r\theta=2\pi.$$

また交線の x 座標より，

$$r\cos\theta=\frac{3}{2}.$$

これらから r を消去すると，

$$\cos\theta=\frac{3}{2\pi}\theta. \qquad \cdots(*)$$



$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で(*)の左辺は減少し，右辺は増加する．したがって(*)をみたす θ があるならただ1つ．$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ は(*)をみたす．

よって，$r=3$．よって影の部分は，

$$2\pi r-2\pi=4\pi. \quad \cdots(答)$$

第6問

空間内の点Oに対して，4点A，B，C，Dを

$$OA=1,$$
$$OB=OC=OD=4$$

をみたすようにとるとき，四面体ABCDの体積の最大値を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：整式の微分

考え方

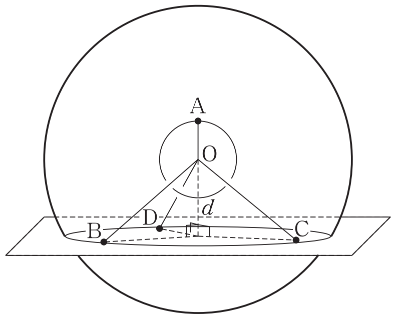
対称性を考慮．BCDを固定してAを動かすなら OA⊥(平面BCD) のとき体積は最大になる．

平面BCDを固定してB，C，Dを動かすとき三角形BCDの面積が最大になるのは三角形BCDが正三角形のとき．

Oと平面BCDの距離 d で正三角錐ABCDの体積を表し，微分法で最大値を求めればよい．

【解答】

点AはOを中心とする半径1の球面上にあり，3点B，C，DはOを中心とする半径4の球面上にある．



平面BCDと点Oの距離を d $(0\leqq d<4)$ とおく．

点Aと平面BCDの距離の最大値は $d+1$．

また，3点B，C，Dは半径4の球とOの距離が d の平面の交円上を動く．よって，三角形BCDはこの平面内の半径 $\sqrt{4^2-d^2}$ の円に内接している．

円に内接する最大面積の三角形は正三角形である．

よって，この円に内接する三角形BCDの面積の最大値は，

$$3\times\frac{1}{2}(\sqrt{4^2-d^2})^2\sin 120°=\frac{3\sqrt{3}}{4}(16-d^2).$$

よって，d を固定したときの四面体ABCDの体積の最大値は，

$$\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}(16-d^2)\times(d+1)=\frac{\sqrt{3}}{4}(16-d^2)(d+1).$$

$f(d)=(16-d^2)(d+1)=-d^3-d^2+16d+16$ とおくと，

$$f'(d)=-3d^2-2d+16=-(d-2)(3d+8).$$

よって，$f(d)$ の最大値は $f(2)=12\times3=36$．

よって，四面体ABCDの体積の最大値は，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times36=9\sqrt{3}. \quad \cdots(答)$$

d	0	$\cdots$	2	$\cdots$	(4)
$f'(d)$		+	0	−	
$f(d)$		↗		↘	(0)

1989 年　文科

第 1 問

$k>0$ とする。xy 平面上の二曲線

$$y=k(x-x^3),\quad x=k(y-y^3)$$

が第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 (α,β) をもつような k の範囲を求めよ。

分　野

数学 I：2 元 3 次連立方程式，図形と方程式

考え方

2 式の対称性に注目することがポイント．2 式の差をとると $(x-y)$ という因数がでてきて，これで割ると，x，y の対称式になる．2 式の和も対称式なので，$x+y$，xy で表して解くことができる．

【解答】

連立方程式

$$\begin{cases} y=k(x-x^3), & \cdots① \\ x=k(y-y^3) & \cdots② \end{cases}$$

を解く．

①−② より，

$$-(x-y)=k\{(x-y)-(x^3-y^3)\}=k(x-y)\{1-(x^2+xy+y^2)\}.$$

$x \neq y$ より，

$$-1=k\{1-(x^2+xy+y^2)\}. \qquad \cdots③$$

①+② より，

$$x+y=k\{(x+y)-(x^3+y^3)\}=k(x+y)\{1-(x^2-xy+y^2)\}.$$

交点が第 1 象限にあるから，$x>0$，$y>0$．よって，$x+y \neq 0$．

$$\therefore\quad 1=k\{1-(x^2-xy+y^2)\}. \qquad \cdots④$$

③+④，$k>0$ つまり $k \neq 0$ より，

$$x^2+y^2=1.$$

④−③ より，

$$1=kxy. \qquad \cdots⑤$$

また，

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=1+\frac{2}{k}.$$

$x>0$，$y>0$ より $x+y>0$ なので，

$$x+y=\sqrt{1+\frac{2}{k}}. \qquad \cdots⑥$$

⑤，⑥ より x，y は 2 次方程式

$$t^2-\sqrt{1+\frac{2}{k}}\,t+\frac{1}{k}=0 \qquad \cdots⑦$$

の 2 解．

$x>0$，$y>0$，$x \neq y$ より，⑦ は相異なる 2 つの正の解をもつ．

$$\therefore\quad D=1+\frac{2}{k}-4\cdot\frac{1}{k}=1-\frac{2}{k}>0,\ \sqrt{1+\frac{2}{k}}>0,\ \frac{1}{k}>0.$$

$$\therefore\quad k>2. \qquad \cdots(答)$$

【別解】

連立方程式

$$\begin{cases} y=k(x-x^3), & \cdots① \\ x=k(y-y^3) & \cdots② \end{cases}$$

より，

$$k(x-x^3)x=k(y-y^3)y.$$

$k>0$ より，

$$x^2-x^4=y^2-y^4. \quad \therefore \quad (x^2-y^2)(x^2+y^2-1)=0.$$

$x>0$，$y>0$，$x \neq y$ より $x^2 \neq y^2$.

$$\therefore \quad x^2+y^2=1.$$

よって，

$$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta \qquad \cdots⑧$$

とおける．

$x>0$，$y>0$，$x \neq y$ より，

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{4}. \qquad \cdots⑨$$

⑧ を ① に代入して，

$$\sin\theta=k(\cos\theta-\cos^3\theta)=k\cos\theta\sin^2\theta.$$

$$\therefore \quad k=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{2}{\sin 2\theta}.$$

これは ② もみたす．

⑨ より，

$$0<\sin 2\theta<1.$$

$$\therefore \quad k>2. \qquad \cdots(答)$$

第２問

$a>0$ に対して次の二つの放物線を考える。

$$C_1:\ y=x^2+\frac{1}{a^2}$$

$$C_2:\ y=-(x-a)^2$$

(1) C_1，C_2 の両方に接するような直線がつねに 2 本存在することを示せ。

(2) (1) で定まる四つの接点が作る四角形の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：図形と方程式，**基礎解析**：整式の微分

考え方

接線の方程式は微分法または判別式を用いて求めることができる．接線が求められれば接点も求まり，四角形の頂点，面積も容易に求まる．

【解答 1】　微分により接線を求めて

(1) C_1 上の点 $\left(t,\ t^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線は，

$$y=2t(x-t)+t^2+\frac{1}{a^2}=2tx-t^2+\frac{1}{a^2}. \qquad \cdots①$$

C_2 上の点 $(s,\ -(s-a)^2)$ における接線は，

$$y=-2(s-a)(x-s)-(s-a)^2=-2(s-a)x+s^2-a^2. \qquad \cdots②$$

① と ② が一致するから，

$$2t=-2(s-a),\quad -t^2+\frac{1}{a^2}=s^2-a^2.$$

$$\therefore\quad t+s=a,\quad t^2+s^2=a^2+\frac{1}{a^2}.$$

$$\therefore\quad ts=\frac{1}{2}\{(t+s)^2-(t^2+s^2)\}=-\frac{1}{2a^2}.$$

よって，t，s は z の 2 次方程式

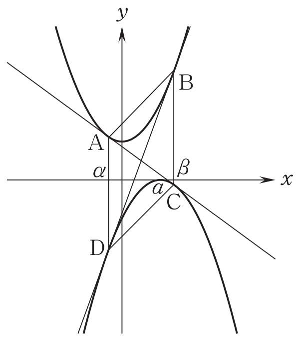
$$z^2-az-\frac{1}{2a^2}=0 \qquad \cdots③$$

の 2 解である．③ の判別式は $a^2+\dfrac{2}{a^2}>0$ だから，③ は相異なる 2 実解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつ．

よって，$(s,\ t)$ は $(\alpha,\ \beta)$ と $(\beta,\ \alpha)$ の異なる 2 組の解をもつ．よって対応する接線も 2 本存在する．

（証明終り）

(2) 4 つの接点は $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \alpha^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \beta^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$，$\mathrm{C}(\beta,\ -(\beta-a)^2)$，$\mathrm{D}(\alpha,\ -(\alpha-a)^2)$．ただし，AC，BD が接線．



2 線分 AD，BC は y 軸に平行であり α，β は ③ の 2 解であるから，

$$\mathrm{AD}=\alpha^2+\frac{1}{a^2}+(\alpha-a)^2=2(\alpha^2-a\alpha)+\frac{1}{a^2}+a^2=a^2+\frac{2}{a^2},$$

$$\mathrm{BC}=\beta^2+\frac{1}{a^2}+(\beta-a)^2=2(\beta^2-a\beta)+\frac{1}{a^2}+a^2=a^2+\frac{2}{a^2}.$$

よって，AD，BC は平行で長さが等しい．よって，四角形 ABCD は平行四辺形．

③ の解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2a^2}.$$

平行四辺形 ABCD の AD に対する高さは，

$$\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{a^2+\frac{2}{a^2}}.$$

$$\therefore\quad S(a)=\mathrm{AD}(\beta-\alpha)=\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\geqq\left(2\sqrt{a^2\frac{2}{a^2}}\right)^{\frac{3}{2}}=4\sqrt[4]{2}.$$

等号は $a=\sqrt[4]{2}$ のとき成り立つ．よって，$S(a)$ の最小値は $4\sqrt[4]{2}$． …(答)

【解答 2】 判別式の利用

(1) 接線を $y=mx+n$ とおく．

直線 $y=mx+n$ が C_1 に接するから，

$$x^2+\frac{1}{a^2}=mx+n \text{ すなわち } x^2-mx+\frac{1}{a^2}-n=0 \qquad \cdots①$$

が重解をもつ．よって，

$$m^2-4\left(\frac{1}{a^2}-n\right)=0. \qquad \cdots②$$

直線 $y=mx+n$ が C_2 に接するから，

$$-(x-a)^2=mx+n \text{ すなわち } x^2+(m-2a)x+a^2+n=0 \qquad \cdots③$$

が重解をもつ．よって，

$$(m-2a)^2-4(a^2+n)=0. \qquad \cdots④$$

② より，

$$n=\frac{1}{a^2}-\frac{m^2}{4}. \qquad \cdots⑤$$

これを ④ に代入すると，

$$m^2-2am-\frac{2}{a^2}=0. \qquad \cdots⑥$$

$\frac{1}{4}$(判別式)$=a^2+\frac{2}{a^2}>0$ だから ⑥ をみたす実数 m は 2 つある．また，n は ⑤ で定まるから接線は m によって定まる．よって，2 曲線 C_1，C_2 の両方に接する直線はつねに 2 本存在する．　（証明終り）

(2)　⑥ の 2 解を m_1，m_2 $(m_1<m_2)$ とすると，解と係数の関係から，

$$m_1+m_2=2a, \quad m_1m_2=-\frac{2}{a^2}. \qquad \cdots⑦$$

傾きが m_1 の接線と C_1，C_2 との接点をそれぞれ A，C とし，傾きが m_2 の接線と C_1，C_2 との接点をそれぞれ B，D とする．

② のとき ① の重解は $x=\frac{m}{2}$，④ のとき ③ の重解は $x=a-\frac{m}{2}$．

よって 4 つの接点は，

$$\mathrm{A}\left(\frac{m_1}{2},\ \frac{{m_1}^2}{4}+\frac{1}{a^2}\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{m_2}{2},\ \frac{{m_2}^2}{4}+\frac{1}{a^2}\right),$$

$$\mathrm{C}\left(a-\frac{m_1}{2},\ -\frac{{m_1}^2}{4}\right),\quad \mathrm{D}\left(a-\frac{m_2}{2},\ -\frac{{m_2}^2}{4}\right).$$

⑦ より A と D，B と C の x 座標は等しく

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(0,\ -\frac{{m_1}^2+{m_2}^2}{4}-\frac{1}{a^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad S(a)&=\frac{m_2-m_1}{2}\left(\frac{{m_1}^2+{m_2}^2}{4}+\frac{1}{a^2}\right)\\&=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}{4}}\left\{\frac{(m_1+m_2)^2-2m_1m_2}{4}+\frac{1}{a^2}\right\}\\&=\sqrt{a^2+\frac{2}{a^2}}\left(a^2+\frac{2}{a^2}\right)\geqq\sqrt{2\sqrt{a^2\cdot\frac{2}{a^2}}}^{\,3}=4\sqrt[4]{2}.\end{aligned}$$

よって，$S(a)$ の最小値は $4\sqrt[4]{2}$ $(a=\sqrt[4]{2}$ のとき$)$．　…(答)

【解答 3】　併せ技

(1)　C_1 上の点 $\left(t,\ t^2+\frac{1}{a^2}\right)$ における接線 l は，

$$l:\ y=2t(x-t)+t^2+\frac{1}{a^2}=2tx-t^2+\frac{1}{a^2}.$$

l と C_2 の交点の x 座標を求める方程式は，

$$-(x-a)^2=2tx-t^2+\frac{1}{a^2}. \quad x^2+2(t-a)x-t^2+a^2+\frac{1}{a^2}=0. \qquad \cdots①$$

l は C_2 にも接するから ① は重解をもつ．

$$\therefore\quad \frac{1}{4}(\text{判別式})=(t-a)^2+t^2-a^2-\frac{1}{a^2}=2t^2-2at-\frac{1}{a^2}=0. \qquad \cdots②$$

②の2解は共通接線と C_1 との接点の x 座標.

②の判別式は $a^2+\dfrac{2}{a^2}>0$ だから，②は相異なる2実解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつ．よって共通接線も2本存在する． （証明終り）

(2) ②は相異なる2実解をもつ．それらを α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=-\frac{1}{2a^2}. \qquad \cdots ③$$

①の重解は $x=a-t$．よって，C_2 との接点の x 座標は $a-\alpha$，$a-\beta$.

4つの接点は $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \alpha^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \beta^2+\dfrac{1}{a^2}\right)$，$\mathrm{C}(a-\alpha,\ -\alpha^2)$，$\mathrm{D}(a-\beta,\ -\beta^2)$．ただし，AC，BD が接線.

四角形 ABCD の対角線 AC，BD の中点はともに $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{2a^2}\right)$ で一致するから四角形 ABCD は平行四辺形.

③から $a-\alpha=\beta$，$a-\beta=\alpha$ から，2線分 AD，BC は y 軸に平行である．③から，

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{a^2}=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{1}{a^2}=a^2+\frac{2}{a^2}.$$

以下**【解答1】**と同じ.

第3問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち，

$$H=\{z=x+yi\,|\,x,\ y \text{ は実数で } y>0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。q を正の実数とし，

$$f(z)=\frac{z+1-q}{z+1}$$

とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z)=f(z)$ と書き，以下 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ に対して

$$f_2(z)=f(f_1(z)),\quad f_3(z)=f(f_2(z)),\quad \cdots,\quad f_n(z)=f(f_{n-1}(z)),\quad \cdots$$

とおく。このとき，各 n に対して

$$f_n(z)=\frac{r_n z+(1-q)s_n}{s_n z+r_n},\quad {r_n}^2-(1-q){s_n}^2=q^n$$

が成り立つような z によらない実数 r_n，s_n がとれることを示せ。

分 野

数学Ⅰ：複素数，**基礎解析**：数学的帰納法

考え方

(1)は分母分子に $\overline{z+1}$ をかけて虚部の正負を見ればよい.

(2)は数学的帰納法を考える.

【解答】

(1)　$z=x+yi$，x，y は実数で $y>0$.

$$f(z)=1-\frac{q}{z+1}=1-\frac{q}{x+yi+1}=1-\frac{q(x+1-yi)}{(x+1+yi)(x+1-yi)}$$
$$=1-\frac{q(x+1-yi)}{(x+1)^2+y^2}=1-\frac{q(x+1)}{(x+1)^2+y^2}+\frac{qy}{(x+1)^2+y^2}i.$$

$q>0$，$y>0$ だから $f(z)$ の虚部 $\dfrac{qy}{(x+1)^2+y^2}>0$. よって，$f(z)$ は H に属する.　　（証明終り）

(2)　n について数学的帰納法で示す.

$$f_n(z)=\frac{r_nz+(1-q)s_n}{s_nz+r_n},\quad r_n{}^2-(1-q)s_n{}^2=q^n \qquad \cdots(*)$$

とおく.

(I)　$n=1$ のとき，$r_1=1$，$s_1=1$ とすると，

$$f_1(z)=\frac{r_1z+(1-q)s_1}{s_1z+r_1}=\frac{z+1-q}{z+1}=f(z),\quad r_1{}^2-(1-q)s_1{}^2=1-(1-q)=q^1$$

となり，(*) は成り立つ.

(II)　$n=k$ のとき (*) が成り立つとする．すなわち，

$$f_k(z)=\frac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k},\quad r_k{}^2-(1-q)s_k{}^2=q^k \qquad \cdots①$$

とする.

$$f_{k+1}(z)=f(f_k(z))=\frac{f_k(z)+1-q}{f_k(z)+1}=\frac{\dfrac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k}+1-q}{\dfrac{r_kz+(1-q)s_k}{s_kz+r_k}+1}$$
$$=\frac{r_kz+(1-q)s_k+(1-q)(s_kz+r_k)}{r_kz+(1-q)s_k+s_kz+r_k}=\frac{\{r_k+(1-q)s_k\}z+(1-q)(s_k+r_k)}{(r_k+s_k)z+\{(1-q)s_k+r_k\}}.$$

ここで，

$$r_{k+1}=r_k+(1-q)s_k,\quad s_{k+1}=s_k+r_k$$

とおくと，

$$f_{k+1}(z)=\frac{r_{k+1}z+(1-q)s_{k+1}}{s_{k+1}z+r_{k+1}}$$

であり，しかも ① より，

$$r_{k+1}{}^2-(1-q)s_{k+1}{}^2=\{r_k+(1-q)s_k\}^2-(1-q)(s_k+r_k)^2$$
$$=q\{r_k{}^2-(1-q)s_k{}^2\}=q^{k+1}.$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

よって，(I), (II) より，すべての自然数 n に対して，

$$f_n(z)=\frac{r_nz+(1-q)s_n}{s_nz+r_n},\quad r_n{}^2-(1-q)s_n{}^2=q^n$$

をみたす r_n，s_n が存在する.　　（証明終り）

第4問

半径 r の円Oのまわりに一辺の長さ a の正三角形ABCを円Oと同一平面内で次の二条件を満たしながら可能な限り移動させる。

(i)　△ABCは円Oの内部と共有点を持たず，円Oの周とただ一点を共有する。

(ii)　ベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CA}$ はそれぞれ一定に保たれる。

このとき，△ABCの通過し得る範囲を図示して，その面積 S を求めよ。

さらに，△ABCの面積を T とするとき，$r\to 0$ としたときの極限値 $\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{S}{T}$ を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：平面図形，面積，**基礎解析**：関数の極限（有限）

考え方

題意の把握が第1のポイント．あとは，三角形の動きを丁寧に把握すること．

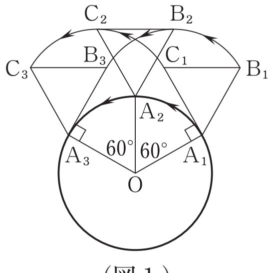
【解答】

△ABCは周と内部を合わせたものと考える．

条件(i)，(ii)をみたしながら正三角形ABCを動かすと，△ABCは円Oに接しながら円Oの外側を一周する．

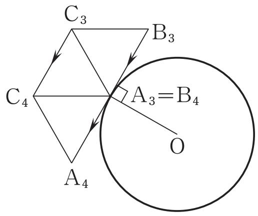
その場合△ABCと円Oの位置によって異なる接し方をする．

(a)　共有点を頂点Aのみに保ちながら動かすとき，
△ABCは（図1）のように動く．（$\angle CAO=90^\circ$ の点から $\angle OAB=90^\circ$ の点までAは円Oの周上を動く．）



（図1）

(b)　共有点が辺AB上の1点のみであるように動かすとき，
△ABCは（図2）のように動く．（円O上の接点は固定され，辺AB上の接点はAからBに向かって変化する．）



（図2）

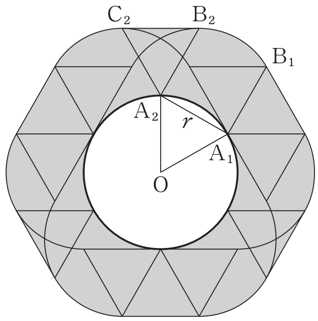
(c)　共有点がBまたはBC上，CまたはCA上にあるときはそれぞれ(a)，(b)を120°，240°回転した範囲を動く．

したがって，求める範囲は（図3）の網掛部の範囲である．

△ABCの通過範囲は，

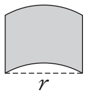
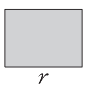
(ア)　△ABCと合同な三角形6個，

(イ)　（図3）の円弧 $\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{B_1B_2}$，線分 A_1B_1，A_2B_2 で囲まれた図形と合同な図形6個からなる．



（図3）

△ABCの面積　$T=\dfrac{1}{2}a^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(イ)の図形1個 $=a$  $=a$ 

その面積は ar.

$$\therefore\quad S=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+ar\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2+6ar. \qquad\cdots(答)$$

$$\therefore\quad \lim_{r\to 0}\frac{S}{T}=\lim_{r\to 0}\frac{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2+6ar}{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\lim_{r\to 0}\left(6+8\sqrt{3}\,\frac{r}{a}\right)=6. \qquad\cdots(答)$$

（注）　$r\to 0$ の極限は正三角形が1点に接しながら動く場合に対応する．この場合正三角形が通過する領域はその1点を頂点とする6個の正三角形になり，$\dfrac{S}{T}\to 6$ となる．

1989 年　理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

xy 平面上に $y=-1$ を準線，点 F(0, 1) を焦点とする放物線がある。この放物線上の点 P$(a,\ b)$ を中心として，準線に接する円 C を描き，接点を H とする。$a>2$ とし，円 C と y 軸との交点のうち F と異なるものを G とする。扇形 PFH（中心角の小さい方）の面積を $S(a)$，三角形 PGF の面積を $T(a)$ とするとき，$a\to\infty$ としたときの極限値

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$$

を求めよ。

分　野

数学 I：図形と方程式，**微分・積分**：関数の極限

考え方

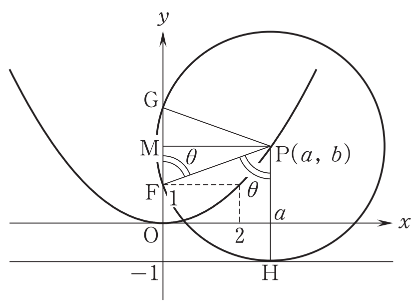
$T(a)$ は a で表せるが，$S(a)$ は a で簡単には表せない．

中心角 $\angle\mathrm{FPH}=\theta$ が a の関数なので，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$ を利用して求める．

【解答】

与放物線の方程式は，

$$4y=x^2. \qquad \cdots①$$



P は ① 上の点だから $b=\dfrac{a^2}{4}$.

$\angle\mathrm{FPH}=\theta\ \left(a>2\ より\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけば，

$$S(a)=\frac{\theta}{2}\mathrm{PH}^2=\frac{\theta}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2.$$

一方，P から y 軸へおろした垂線の足を M とすると，

$$T(a)=2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{PM}\cdot\mathrm{FM}=a\times(b-1)=a\left(\frac{a^2}{4}-1\right).\ (\because\ a>2.)$$

$\angle\mathrm{PFM}=\theta$ だから直角三角形 PFM を考えて，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{PF}}=\frac{a}{\dfrac{a^2}{4}+1},\quad \tan\theta=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{MF}}=\frac{a}{\dfrac{a^2}{4}-1}.$$

$$\sin\theta<\theta<\tan\theta\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

より，

$$\frac{\sin\theta}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2=\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)<S(a)<\frac{\tan\theta}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2=\frac{a}{2}\cdot\frac{\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2}{\left(\frac{a^2}{4}-1\right)}.$$

$$\therefore\quad \frac{a\left(\frac{a^2}{4}-1\right)}{\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)}=2\cdot\frac{1-\frac{4}{a^2}}{1+\frac{4}{a^2}}>\frac{T(a)}{S(a)}>\frac{a\left(\frac{a^2}{4}-1\right)^2}{\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2}=2\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{a^2}\right)^2}{\left(1+\frac{4}{a^2}\right)^2}.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}2\cdot\frac{1-\frac{4}{a^2}}{1+\frac{4}{a^2}}=\lim_{a\to\infty}2\cdot\frac{\left(1-\frac{4}{a^2}\right)^2}{\left(1+\frac{4}{a^2}\right)^2}=2$ であるから，ハサミウチの原理から，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=2. \qquad \cdots(答)$$

【別解】

$\angle\mathrm{FPH}=\theta$ とおくと $\left(a>2 \text{ から } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$S(a)=\frac{\theta}{2}\mathrm{PF}^2.$$

P から y 軸へおろした垂線の足を M とすると $\angle\mathrm{MPF}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$. $\therefore$ $\angle\mathrm{GPF}=\pi-2\theta$.

$$\therefore\quad T(a)=\frac{1}{2}\mathrm{PF}\cdot\mathrm{PG}\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PF}^2\sin 2\theta.$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\sin\theta=\lim_{a\to\infty}\frac{a}{\frac{a^2}{4}+1}=0$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $a\to\infty$ のとき，$\theta\to 0$.

$$\therefore\quad \lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\theta}=2. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

虚部が正の複素数の全体を H とする。すなわち，

$$H=\{z=x+yi \mid x,\ y \text{ は実数で } y>0\}$$

とする。以下 z を H に属する複素数とする。q を正の実数とし，

$$f(z)=\frac{z+1-q}{z+1}$$

とおく。

(1) $f(z)$ もまた H に属することを示せ。

(2) $f_1(z)=f(z)$ と書き，以下 $n=2, 3, 4, \cdots$ に対して

$$f_2(z)=f(f_1(z)),\quad f_3(z)=f(f_2(z)),\quad \cdots,\quad f_n(z)=f(f_{n-1}(z)),\quad \cdots$$

とおく。このとき，H のすべての元 z に対して $f_{10}(z)=f_5(z)$ が成立するような q の値を求めよ。

分 野

数学 I ：複素数，1 次分数関数

考え方

(1) は分母分子に $\overline{z+1}$ をかけて虚部の正負を見ればよい．

(2) は $f(z)$ が1次分数関数のとき，$f(z)=z$ は分母を払えば z の2次方程式．2解を α，β とおき，$\dfrac{f(z)-\alpha}{f(z)-\beta}$ は $\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$ の定数倍になる．このことを利用．

【解答 1】

(1) $z=x+yi$，x，y は実数で $y>0$．

$$f(z)=1-\frac{q}{z+1}=1-\frac{q}{x+yi+1}=1-\frac{q(x+1-yi)}{(x+1+yi)(x+1-yi)}$$
$$=1-\frac{q(x+1-yi)}{(x+1)^2+y^2}=1-\frac{q(x+1)}{(x+1)^2+y^2}+\frac{qy}{(x+1)^2+y^2}i.$$

$q>0$，$y>0$ だから $f(z)$ の虚部 $\dfrac{qy}{(x+1)^2+y^2}>0$．よって，$f(z)$ は H に属する．（証明終り）

(2) $f(z)=z$ となる z を求めると，$\dfrac{z+1-q}{z+1}=z$ から $z=\pm\sqrt{1-q}$．そこで，$\alpha=\sqrt{1-q}$ とおく．

(i) $q\neq1$ のとき，$\alpha\neq0$．

また $q>0$ から $\alpha^2<1$．$0<\alpha<1$ または α は純虚数．

$f(\pm\alpha)=\pm\alpha=\dfrac{\pm\alpha+1-q}{\pm\alpha+1}$.

$$f(z)\mp\alpha=\frac{z+1-q}{z+1}-\frac{\pm\alpha+1-q}{\pm\alpha+1}=\frac{(z\mp\alpha)q}{(1\pm\alpha)(z+1)}.\ （複号同順）$$
$$\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}=\frac{(z-\alpha)q}{(1+\alpha)(z+1)}\cdot\frac{(1-\alpha)(z+1)}{(z+\alpha)q}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\cdot\frac{z-\alpha}{z+\alpha}.$$

ここで，$K=\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ とおくと，$\dfrac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}=K\dfrac{z-\alpha}{z+\alpha}$.

$$\therefore\quad \frac{f_n(z)-\alpha}{f_n(z)+\alpha}=\frac{f(f_{n-1}(z))-\alpha}{f(f_{n-1}(z))+\alpha}=K\frac{f_{n-1}(z)-\alpha}{f_{n-1}(z)+\alpha}=K^2\frac{f_{n-2}(z)-\alpha}{f_{n-2}(z)+\alpha}$$
$$=\cdots=K^{n-1}\frac{f(z)-\alpha}{f(z)+\alpha}=K^n\frac{z-\alpha}{z+\alpha}.$$

$f_{10}(z)=f_5(z)$ のとき，

$$\frac{f_{10}(z)-\alpha}{f_{10}(z)+\alpha}=K^5\frac{f_5(z)-\alpha}{f_5(z)+\alpha}=\frac{f_5(z)-\alpha}{f_5(z)+\alpha}.\quad\therefore\quad K^5=1.$$
$$\therefore\quad (1-\alpha)^5=(1+\alpha)^5.\quad\therefore\quad 5\alpha+10\alpha^3+\alpha^5=0.$$

$\alpha\neq0$ から，$\alpha^4+10\alpha^2+5=0$.

$\alpha^2=1-q$ より，$(1-q)^2+10(1-q)+5=q^2-12q+16=0$．$q=6\pm2\sqrt{5}$.

いずれも $q>1$ で，場合分けの条件（$q>0$ かつ $q\neq1$）をみたす．

(ii) $q=1$ のとき，

$$f(z)=\frac{z}{z+1}.\quad\therefore\quad \frac{1}{f(z)}=\frac{z+1}{z}=\frac{1}{z}+1.$$
$$\therefore\quad \frac{1}{f_n(z)}=\frac{1}{f(f_{n-1}(z))}=\frac{1}{f_{n-1}(z)}+1=\frac{1}{f_{n-2}(z)}+2=\cdots=\frac{1}{f(z)}+(n-1)=\frac{1}{z}+n.$$

よって，$f_{10}(z)=f_5(z)$ となることはない．

(i)，(ii) より，

$$q=6\pm2\sqrt{5}.\qquad\cdots（答）$$

【解答 2】

(1) **【解答 1】**と同じ．

(2) $w=f(z)$ を z について解くと $z=\dfrac{-w+1-q}{w-1}$. よって f は逆関数 f^{-1} をもち,

$$f^{-1}(z)=\frac{-z+1-q}{z-1}.$$

また f_n は定義から $\underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{個}}$ である.

$f^{-1}(f_n(z))=f_{n-1}(z)$ であるから与式の両辺に f^{-1} を5回かけることにより,

$$f_{10}(z)=f_5(z) \iff f_5(z)=z. \qquad \cdots①$$

$f_n(z)=\dfrac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n}$ とおけるとすると,

$$f_{n+1}(z)=f(f_n(z))=\frac{\dfrac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n}+1-q}{\dfrac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n}+1}=\frac{\{a_n+(1-q)c_n\}z+b_n+(1-q)d_n}{(a_n+c_n)z+(b_n+d_n)}$$

とかける. $f_1(z)=\dfrac{z+1-q}{z+1}$ であることに注意して,

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+(1-q)c_n, & b_{n+1}=b_n+(1-q)d_n, \\ c_{n+1}=a_n+c_n, & d_{n+1}=b_n+d_n, \end{cases} \quad \begin{cases} a_1=1, & b_1=1-q, \\ c_1=1, & d_1=1 \end{cases} \qquad \cdots②$$

とおけばすべての自然数 n について $f_n(z)=\dfrac{a_nz+b_n}{c_nz+d_n}$ とかける.

② より $A=\begin{pmatrix} 1 & 1-q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_n+(1-q)c_n & b_n+(1-q)d_n \\ a_n+c_n & b_n+d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1-q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$
$$=A\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 1-q \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$
$$\therefore \quad \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=A^n.$$

ケイリー・ハミルトンの定理から,

$A^2=2A-qE.$
$A^3=2A^2-qA=2(2A-qE)-qA=(4-q)A-2qE.$
$A^5=(2A-qE)\{(4-q)A-2qE\}=2(4-q)A^2-\{q(4-q)+4q\}A+2q^2E$
$\quad =2(4-q)(2A-qE)-q(8-q)A+2q^2E=(q^2-12q+16)A+(4q^2-8q)E.$

一方 ① より, $f_5(z)=\dfrac{a_5z+b_5}{c_5z+d_5}=z.$

これをみたすのは $b_5=c_5=0$, $a_5=d_5$ $(\neq 0)$ のとき.

よって, $A^5=a_5E$ $(a_5\neq 0)$. よって, $q^2-12q+16=0$.

$$\therefore \quad q=6\pm 2\sqrt{5}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分のけた数と，1の位の数字を求めよ。ただし，

$$3^{21}=10460353203$$

を用いてよい。

分　野

数学Ⅰ：整数，桁，式の処理

考え方

桁数を求めるのはあまり難しくない．

1位の数を求めるにはアイディアを要する．3^{21} をどう使うかがポイント．

$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ と 3^{21} をどう結合させるかを考える．

【解答】

$10^{10}<10^{10}+3<10^{11}$.

$$\therefore\quad \frac{10^{210}}{10^{10}}=10^{200}>\frac{10^{210}}{10^{10}+3}>\frac{10^{210}}{10^{11}}=10^{199}.$$

よって，$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の桁数は200である．　…(答)

次に，

$$\frac{10^{210}+3^{21}}{10^{10}+3}=\underbrace{(10^{10})^{20}-(10^{10})^{19}\cdot3+(10^{10})^{18}\cdot3^2-+\cdots-(10^{10})\cdot3^{19}}_{(10\text{ の倍数})}+3^{20}. \quad \cdots(*)$$

よって，$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の1位の数は $3^{20}-\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$ の1位の数に一致する．

与えられた式が正しければ，

$$10^{10}+3<3^{21}<2(10^{10}+3).\quad \therefore\quad 1<\frac{3^{21}}{10^{10}+3}<2.$$

$3^{20}=(3^4)^5=81^5$ の1位の数は1である．$3^{20}-\dfrac{3^{21}}{10^{10}+3}$ の1位の数は $3^{20}-2$ の1位の数と同じ9.

よって，$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の1位の数は9.　…(答)

(注)　(*)の「$-+\cdots$」は，この後に

$$-(10^{10})^{17}\cdot3^3+(10^{10})^{16}\cdot3^4-(10^{10})^{15}\cdot3^5+\cdots$$

のように交互に符号が異なる項が続くことを表す．

第５問

$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸のまわりに回転させてできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$$

で与えられることを示し，この値を求めよ。

分　野

微分・積分：積分法，体積

考え方

近似計算で説明して答を出す問題ではない．

$f(x)$ の最大値を M とし，y 軸に垂直な平面積 $S(y)$ について，定義にしたがって，$V=\int_0^M S(y)\,dy$ とし，置換積分する．ただし，$f(x)$ は x について増加する部分と減少する部分があるからそれぞれに対しての置換が異なることに注意する．

また，次のようにも考えられる．$y=f(x)$ と x 軸，$x=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに１回転させてできる立体の体積を $V(t)$ としたとき，$\dfrac{dV(t)}{dt}=2\pi tf(t)$ となることを示せば，$V=V(1)=2\pi\int_0^1 xf(x)\,dx$ を示せる．

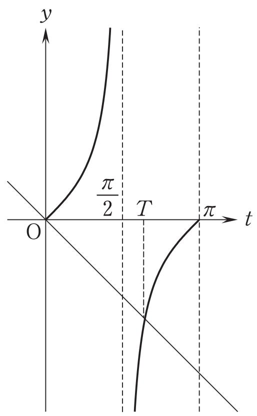
【解答】　部分積分法の利用

$$f'(x)=2\pi x\sin\pi x^2+\pi x^2(2\pi x)\cos\pi x^2$$
$$=2\pi x(\sin\pi x^2+\pi x^2\cos\pi x^2).$$

$0<x<1$ で $f'(x)=0$ となるのは $\tan\pi x^2=-\pi x^2$ のときである．

$t=\pi x^2$ とおくと $0<t<\pi$ で $\tan t=-t$ となるのは（図１）よりただ１つ存在する．その t を T とおくと $f(x)$ の増減は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{T}{\pi}}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$	(0)	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	Y	$\searrow$	(0)



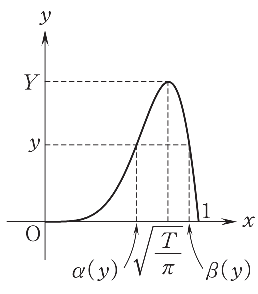
（図１）

グラフは（図２）の通り．ただし，$Y=f\left(\sqrt{\dfrac{T}{\pi}}\right)$.

そこで $0<y<Y$ に対して $f(x)=y$ となる x は $0<x<1$ に必ず２つある．それらを $\alpha(y)$，$\beta(y)$ $(\alpha(y)<\beta(y))$ とおくと，

$$V=\pi\int_0^Y\{\beta(y)\}^2\,dy-\pi\int_0^Y\{\alpha(y)\}^2\,dy.$$

ここで第１項においては $\beta=\beta(y)$，第２項においては $\alpha=\alpha(y)$ とおくと，第１項においては $y=f(\beta)$，第２項においては $y=f(\alpha)$ でもある．



（図２）

$$V=\pi\int_1^{\sqrt{\frac{T}{\pi}}}\beta^2\frac{dy}{d\beta}d\beta-\pi\int_0^{\sqrt{\frac{T}{\pi}}}\alpha^2\frac{dy}{d\alpha}d\alpha$$
$$=\pi\int_1^{\sqrt{\frac{T}{\pi}}}x^2f'(x)\,dx-\pi\int_0^{\sqrt{\frac{T}{\pi}}}x^2f'(x)\,dx$$
$$=-\pi\int_0^1x^2f'(x)\,dx=-\pi\Big[x^2f(x)\Big]_0^1+\pi\int_0^1 2xf(x)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^1xf(x)\,dx.$$
（証明終り）

よって，$f(x)=\pi x^2\sin\pi x^2$ から，

$$V=2\pi^2\int_0^1x^3\sin\pi x^2\,dx.$$

ここで，$u=\pi x^2$ とおくと，

$$V=\int_0^\pi u\sin u\,du=\Big[-u\cos u\Big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos u\,du=\pi+\Big[\sin u\Big]_0^\pi=\pi.$$
…（答）

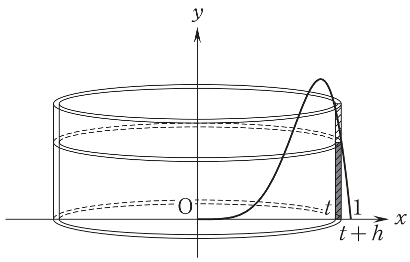
【別解】　積分の定義にもどって

$0<x<1$ において，$f(x)>0$ である．

$0<t<1$ に対して，

$$0\leqq x\leqq t,\quad 0\leqq y\leqq f(x)$$

の範囲を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(t)$ とおく．



（図３）

十分小さな正の定数 h をとり，$t\leqq x\leqq t+h$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

$$\{\pi(t+h)^2-\pi t^2\}m\leqq V(t+h)-V(t)\leqq\{\pi(t+h)^2-\pi t^2\}M.$$
$$\pi(2t+h)m\leqq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\leqq\pi(2t+h)M.$$

h が十分小さな負の数のときには，$t+h\leqq x\leqq t$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

$$\{\pi t^2-\pi(t+h)^2\}m\leqq V(t)-V(t+h)\leqq\{\pi t^2-\pi(t+h)^2\}M.$$
$$\pi(2t+h)m\leqq\frac{V(t+h)-V(t)}{h}\leqq\pi(2t+h)M.$$

$f(x)$ は連続関数なので $\lim_{h\to0}M=\lim_{h\to0}m=f(t)$．ハサミウチの原理により，$V(t)$ は微分可能で，

$$\frac{dV(t)}{dt}=2\pi tf(t).$$

$V(t)$ も連続関数だから，$V(0)=0$，$V(1)=V$．

$$V=V(1)=\int_0^1\frac{dV(t)}{dt}dt=2\pi\int_0^1tf(t)\,dt=2\pi\int_0^1xf(x)\,dx.$$
（証明終り）

以下**【解答１】**と同じ．

第6問

3個の赤玉と n 個の白玉を無作為に環状に並べるものとする。このとき白玉が連続して $k+1$ 個以上並んだ箇所が現れない確率を求めよ。ただし $\dfrac{n}{3} \leqq k < \dfrac{n}{2}$ とする。

分 野

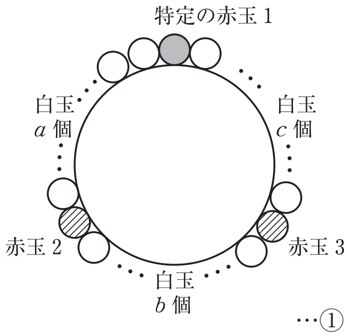
確率・統計：確率，円順列，重複組合せ

考え方

赤玉3個が先に並べられているとし，それらに番号をつけ，その間に白玉を何個ずつ配置するかを考える．

【解答】

$n+3$ 個の玉は区別がつくとしたとき，それらを無作為に環状に等確率で並べるとして，解答する．



赤玉の1つを特定する．与えられた環に対して，特定された赤玉からはじめて反時計まわりに赤玉に番号をつけ，赤玉1，赤玉2，赤玉3とする．赤玉1と赤玉2の間にある白玉の個数を a，赤玉2と赤玉3の間にある白玉の個数を b，赤玉3と赤玉1の間にある白玉の個数を c とする．

条件から，

$$a+b+c=n, \quad a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad c \geqq 0 \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．また a，b，c が定まれば環の並びも定まる．以下では ① をみたす整数の組 (a, b, c) の組について考える．

① をみたすすべての場合の数は重複組合せの公式より ${}_{n+2}\mathrm{C}_n=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$ 通り．

さて与えられた条件は ① の他に，

$$a \leqq k, \quad b \leqq k, \quad c \leqq k \qquad \cdots ②$$

をみたすことである．

①，② より $n-a=b+c \leqq 2k$．∴ $n-2k \leqq a \leqq k$．

$k<\dfrac{n}{2}$ より，$a>0$．また，$k \geqq \dfrac{n}{3}$ より，これをみたす a は必ず存在する．

a を定数と考えて，$b+c=n-a$，$b \leqq k$，$c \leqq k$ をみたす整数の組 (b, c) の個数を $N(a)$ とする．

$c=n-a-b \leqq k$ より，$0 \leqq n-a-k \leqq b \leqq k$ だから $N(a)=2k-n+a+1$．

よって ①，② をみたす (a, b, c) の組の個数を M とすると，

$$M=\sum_{a=n-2k}^{k} N(a)=\sum_{a=n-2k}^{k}(2k-n+a+1)=\frac{(3k-n+1)(3k-n+2)}{2}.$$

よって求める確率は，

$$\frac{M}{{}_{n+2}\mathrm{C}_n}=\frac{(3k-n+1)(3k-n+2)}{(n+1)(n+2)}. \qquad \cdots(答)$$

（注） 何が同程度に起こるか問題文で明らかでない．同じ円順列が等確率で起こるとか，同じ数珠順列が等確率で起こるとも解釈できる．もっとも，そう解釈するとより複雑で，場合分けが必要になってくる．

5.3　後期試験の実施（1990 年）

1987 年の改革から続いた入試制度の変化が，東大の後期試験実施によって，A 日程，B 日程から，前期，後期試験を実施する大学が増え，A 日程，B 日程は有名無実となり数年後に廃止されることになった．

京大の後期試験は前期試験と基本的に変らない形式の問題が出題されたが，東大では前期試験で測れなかった能力を試すという方針で，前期とは全く異なる形式の試験が実施された．数学では，理科Ⅰ類のみを対象として，3 題 150 分という長大な問題をじっくり解かせる問題を課した．理科Ⅰ類では数学，物理，化学，地学から 1 科目の選択であった．理科Ⅱ類，理科Ⅲ類では化学，生物が必須であった．

その他，理科では英語で出題される総合科目Ⅰと理科Ⅰ類のみを対象とした総合科目Ⅱが出題された．総合科目Ⅱは数学，物理を中心とし，理科の他教科も含めた出題がなされた．

また，文科では英語で出題される論文Ⅰ，各類別の論文Ⅱが出題された．特に文科Ⅱ類の論文Ⅱは数学的な内容を含んでいた．

また，1990 年は共通一次試験に代わって，大学入試センター試験が初めて実施された年でもある．共通一次試験は産業医科大以外の私立大学は利用していなかったが，センター試験は私立大学も利用できるようにした点が異なる．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1990〜1996）

1990 年　文科第 1 問．誘導に従って解く問題だが，3 次方程式の 1 解を使って他の 2 解を表す問題．実はガロアの理論の問題．

1990 年　共通第 3 問は正八面体が正方形の穴を通過することができることの証明を求める問題である．何を使ってどう示すのかが見えにくい問題で，この頃の東大の 1 つの特徴を表している．

後期試験初年度（1990 年）の問題は直線の通過領域の問題，等角六角形の辺に関する問題，一筆書きの問題であった．どれもそれなりの重さがあり粘り強く立ち向かわなければならない問題であった．

1991 年　文科第 4 問は四角錐と球が辺上で接する問題であった．実際は正八面体を二等分した四角錐であった．また，錐体と球の共通部分の体積を求める問題であったが，同種の問題は 1982 年に正四面体で出題されている．

1992 年　文科第 1 問は 2 次方程式の実数解と虚数解の問題．一見何でもないように見えるが，実数解条件が複雑．実際は実数解条件を回避して処理しないと厄介．

1992 年　理科第 4 問は円柱上に描かれた図形の展開図を描く問題．珍しい．

1993 年　文理第 2 問はほぼ同じ問題．3 項間漸化式に関する整数問題．文科は偶数になる項について，理科は 10 の倍数になる項を求めさせる問題．書き出して比較することができるかどうかがポイント．

1994 年　文科第 2 問，理科第 6 問は絶対値によった表された距離空間に関する問題．方程式をみたす部分が領域になる問題．

1994 年　理科第 4 問関数方程式の問題．微分方程式を解く問題．

1996 年　後期第 3 問石油タンクから石油が流出する問題．この問題が微分方程式の最後の問題になっている．

このころ　あんなこと・こんなこと

ペルーでフジモリ大統領登場（1990 年），湾岸戦争（1991 年），ソ連崩壊（1991 年）．

バブル崩壊（1991 年），細川内閣（1993 年），神戸震災（1995 年），オウム事件（1995 年）．

富士通から FMV（DOS/V コンピュータ）発売．NEC の牙城崩れ始める（1990 年）．

Micro Soft Windows 3.1（1993 年），Windows 95（1995 年）発売．

思い出す曲 「愛は勝つ」（1990 年），SMAP デビュー（1991 年），「負けないで」（1993 年）．

このころの河合塾

1990 年　千葉校開校.

1991 年　仙台の文理予備校を河合塾文理に改称.

1993 年　大宮校開校.

1990 年　前期・文科

第 1 問

3 次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の一つの解を α とする。

(1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形の式で表せ。ただし a，b，c は有理数とする。

(2) 上の 3 次方程式の α 以外の二つの解を (1) と同じ形の式で表せ。

分　野

数学Ⅰ：3 次方程式

考え方

(1) は基本問題．

一見すると (1) と (2) は無関係のように見えるが，(1) が正しく解けていると，(2) でその結果を使うことができる．

【解答】

(1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $\alpha^3+3\alpha^2-1$ で割って，

$$\begin{aligned}(2\alpha^2+5\alpha-1)^2&=4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1\\&=(\alpha^3+3\alpha^2-1)(4\alpha+8)-3\alpha^2-6\alpha+9.\end{aligned}$$

$\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ だから

$$(2\alpha^2+5\alpha-1)^2=-3\alpha^2-6\alpha+9. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $x^3+3x^2-1=0$ の 1 解が α だから，

$$x^3+3x^2-1=(x-\alpha)\{x^2+(\alpha+3)x+\alpha(\alpha+3)\}.$$

よって，$x=\alpha$ 以外の解は

$$x^2+(\alpha+3)x+\alpha(\alpha+3)=0$$

の 2 解．解の公式から

$$x=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{-3\alpha^2-6\alpha+9}}{2}.$$

(1) より，$-3\alpha^2-6\alpha+9=(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$.

$$\therefore \quad x=\frac{-(\alpha+3)\pm(2\alpha^2+5\alpha-1)}{2}.$$

つまり，α 以外の解は

$$\alpha^2+2\alpha-2, \quad -\alpha^2-3\alpha-1. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注 1) (1) の a，b，c はただ 1 通りに定まる．

(注 2) 任意の有理数係数の 3 次方程式について，常にその解の 1 つを α としたとき，他の解が α の有理数係数の 2 次式で表されるわけではない．

第 2 問

a，b，c を整数，p，q，r を $p<0<q<1<r<2$ をみたす実数とする。関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx+c$ が次の条件 (i)，(ii) をみたすように a，b，c，p，q，r を定めよ。

(i) $f(x)=0$ は 4 個の相異なる実数解をもつ。

(ii) 関数 $f(x)$ は $x=p$，q，r において極値をとる。

分　野

基礎解析：整式の微分，**数学Ⅰ**：高次方程式，整数

考え方

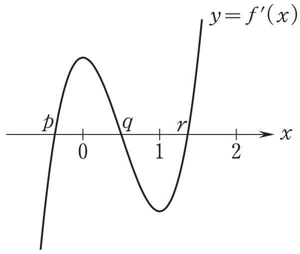
$f(x)$ について考えるより，$f'(x)$ について考える方が考えやすい．

条件(ii)と $p<0<q<1<r<2$ より $f'(0)$，$f'(1)$，$f'(2)$ の正負がわかる．これらを使って a，b の範囲を求め，整数条件から a，b の値を定める．

【解答】

条件(ii)より $f'(x)=4x^3+3ax^2+b=0$ は相異なる3実解 p，q，r をもつ．

$y=f'(x)$ のグラフを考えると（図１）のようである．

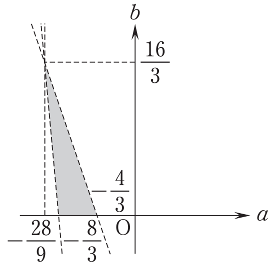


（図１）

$p<0<q<1<r<2$ より，

$$f'(0)=b>0, \quad \cdots①$$
$$f'(1)=4+3a+b<0, \quad \cdots②$$
$$f'(2)=32+12a+b>0. \quad \cdots③$$

ab 座標上に①，②，③をみたす点(a, b)の範囲を図示すると（図２）の網掛部(境界を含まない)となる．



（図２）

a の範囲は $-\dfrac{28}{9}<a<-\dfrac{4}{3}$，$a$ は整数だから

$$a=-3,\ \text{または}\ a=-2$$

(i)　$a=-3$ とすると，①，②，③をみたす b の範囲は

$$4<b<5.$$

これをみたす整数 b は存在しない．

(ii)　$a=-2$ とすると，①，②，③をみたす b の範囲は

$$0<b<2.$$

b は整数だから $b=1$．

よって，$a=-2$，$b=1$．

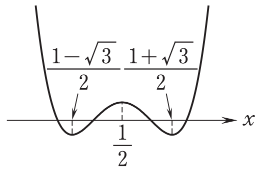
$$\therefore\quad f'(x)=4x^3-6x^2+1=4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x-\frac{1}{2}\right).$$

$f'(x)=0$ の解の大小から

$$p=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\quad q=\frac{1}{2},\quad r=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

このとき，確かに $p<0<q<1<r<2$ をみたす．

条件(i)より $y=f(x)=x^4-2x^3+x+c$ のグラフは（図３）のようである．よって，



（図３）

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{16}+c>0. \quad \cdots④$$

$f(x)=\left(x^2-x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+c$ より，

$$f\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{4}+c<0. \quad \cdots⑤$$

④，⑤より

$$-\frac{5}{16}<c<\frac{1}{4}.$$

c は整数だから

$$c=0.$$

以上より

$$a=-2,\quad b=1,\quad c=0,\quad p=\frac{1-\sqrt{3}}{2},\quad q=\frac{1}{2},\quad r=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$ …(答)

第3問

V を一辺の長さが1の正8面体，すなわち xyz 空間において

$$|x|+|y|+|z|\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$$

をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ の集合と合同な立体とする。

(1) V の一つの面と平行な平面で V を切ったときの切り口の周の長さは一定であることを示せ。

(2) 一辺の長さが1の正方形の穴があいた平面がある。V をこの平面にふれることなく穴を通過させることができるか。結論と理由を述べよ。

分野

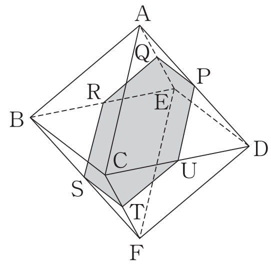
代数・幾何：立体図形

考え方

切り口は内角がすべて120°でひとつおきの3辺の長さが等しい六角形．平行な2面と切断面との距離（または内分比）を使えば周の長さは容易に出せる．

(2)は(1)の切り口がつねに1辺の長さ1の正方形の中に入ることを示せばよい．

【解答】



(1) 右図のように正八面体の頂点をA，B，C，D，E，F，切り口を面ABCに平行にとり，その六角形の頂点をP，Q，R，S，T，Uとする．

$$\mathrm{AP}=t\quad(0<t<1)$$

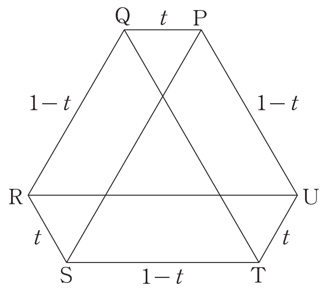
としたとき，$\mathrm{BR}=\mathrm{CT}=t$，$\mathrm{DP}=\mathrm{ER}=\mathrm{FT}=1-t$ で，△APQ，△BRS，△CTU，△DPU，△EQR，△FSTが正三角形だから，

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{RS}=\mathrm{TU}=t,$$
$$\mathrm{QR}=\mathrm{ST}=\mathrm{UP}=1-t.$$

したがって，切り口の周の長さは

$$3t+3(1-t)=3.$$

よって一定である． (証明終り)



(2) 通過させることができる． …(答)

理由：(1)の断面PQRSTUが t の値によらず，1辺の長さ1の正方形の内部にはいりうることを示せばよい．

六角形PQRSTUは内角がすべて $\frac{2}{3}\pi$ の六角形で，t の値によらず

$$\mathrm{PS}=\mathrm{QT}=\mathrm{RU}=1.$$

しかも他の対角線の長さは余弦定理より

$$\mathrm{PR}=\mathrm{QS}=\mathrm{RT}=\mathrm{SU}=\mathrm{TP}=\mathrm{UQ}=\sqrt{1+t^2-t}<1\quad(0<t<1)$$

となるからPS，QT，RUが六角形の周上の2点の距離の最大値を与える．

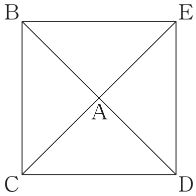
したがって1辺の長さが1の正方形をいずれの辺もPS，QT，RUのいずれとも平行でないようにおけば，切り口の六角形は正方形の内部におくことができる． (証明終り)

(2) の【別解】　理由2：

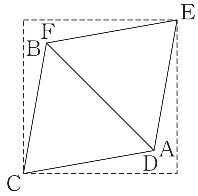
正八面体を頂点 A の上から見ると（図1）のように見える．

これを CE を軸に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転すると（図2）のようになる．このとき2頂点 E，C だけ外側の正方形（1辺の長さ1）にふれている．

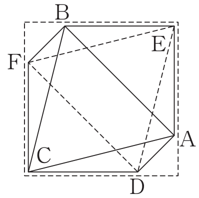
さらに AD，BF の中点を結ぶ線分を軸にすこしだけ（微小角でよい）回転させると（図3）のようになる．



（図1）



（図2）



（図3）

（図3）で C と E は外側の正方形にふれていない．したがって正八面体をこの向きにしたまま，まっすぐに正方形の穴を通過できることを示している．

（注）　この方法を用いると1辺の長さが

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}=0.9428\cdots$$

より大きい正方形の穴なら通過することができる．

第4問

平面 π の上に等辺の長さが1であるような直角二等辺三角形がある。π 上の直線でこの直角二等辺三角形と頂点または一辺のみを共有するものを軸として，その三角形を回転させるときできる立体の体積の最大値，最小値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の積分，体積，三角関数

考え方

O を原点とし，A(a, c)，B(b, d) $(c\geqq 0,\ d\geqq 0,\ ad-bc>0)$ としたとき三角形 OAB を x 軸について一回転してできる立体の体積は $\dfrac{\pi}{3}(ad-bc)(c+d)$ となる．このことは積分を使わなくても，円錐，円錐台の体積をたしひきすることで求められる．

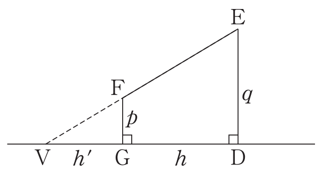
【解答】

準備1：$\angle G=\angle D=90°$，$GD=h$，$GF=p$，$DE=q$ の台形 DEFG を GD のまわりに回転させるときできる立体の体積を求める．

(i)　$p<q$ のとき右図より

$$\text{体積}=\frac{\pi}{3}\{(h+h')q^2-h'p^2\}=\frac{\pi}{3}h\left\{\left(1+\frac{p}{q-p}\right)q^2-\frac{p^3}{q-p}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}h(q^2+pq+p^2). \quad \cdots ①$$



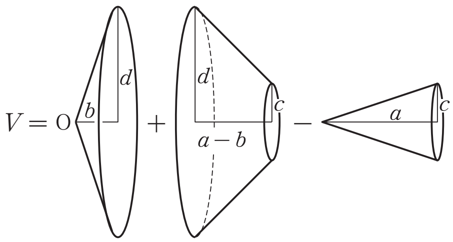
(ii)　$p>q$ のとき ① と同じ式を得る．

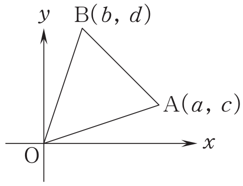
(iii)　$p=q$ のとき，円柱の体積は πhp^2 となるが ① に含められる．

よって体積は ① で表される．

準備 2 ：座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(a,\ c)$，B$(b,\ d)$ をとり，$c \geqq 0$，$d \geqq 0$，$\angle x\mathrm{OA} < \angle x\mathrm{OB}$ とする．（ただし $\angle x\mathrm{OA}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と x 軸の正の向きのなす角を表すものとする）三角形 OAB を x 軸のまわりに回転させるときできる立体の体積 V を求める．

(i) $0 \leqq b \leqq a$ のとき，





$$=\frac{\pi}{3}bd^2+\frac{\pi}{3}(a-b)(c^2+cd+d^2)-\frac{\pi}{3}ac^2$$

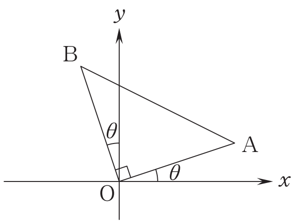
$$=\frac{\pi}{3}(ad-bc)(c+d). \qquad \cdots ②$$

(ii) $0 \leqq a < b$ のとき，$b < 0 \leqq a$ のとき，$a < 0$，$b < 0$ のときも ② と同じ式になる．

以上を問題の直角二等辺三角形に ② を当てはめる．

(I) $\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$．よって

$$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{B}(-\sin\theta,\ \cos\theta)\quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



とおける．② より

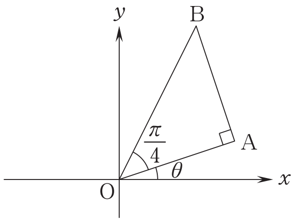
$$V=\frac{\pi}{3}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{\pi}{3}\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$$

よって，V は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{\pi}{3}$ をとる．

(II) $\angle \mathrm{OAB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$，$\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$．よって

$$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \mathrm{B}\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\left(0 \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$$



とおける．② より

$$V=\frac{\pi}{3}\left\{\sqrt{2}\cos\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\left\{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\theta\right\}$$

$$=\frac{\pi}{3}(2\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sqrt{5}}{3}\pi\cos(\theta-\alpha). \qquad \left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

よって，V は $\theta=\alpha$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ をとる．

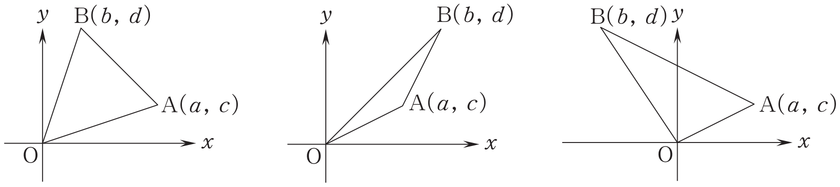
(III) $\angle \mathrm{OBA}=\dfrac{\pi}{2}$ のときは y 軸について対称移動すれば (II) と同じになる．

以上より求める体積の最大値は $\dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$，最小値は $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$． …(答)

（注１） **準備１，準備２**の公式は積分を使っても容易に導かれる．

c，d は正とする．$ab(a-b)\neq 0$ のとき，3 直線 OA，OB，AB の方程式はそれぞれ

$$y=\frac{c}{a}x,\quad y=\frac{d}{b}x,\quad y=\frac{c-d}{a-b}(x-b)+d$$



a，b，$a-b$ の正，負にかかわらず

$$\begin{aligned}V&=\pi\left|\int_0^b\left(\frac{d}{b}x\right)^2dx+\int_b^a\left\{\frac{c-d}{a-b}(x-b)+d\right\}^2dx-\int_0^a\left(\frac{c}{a}x\right)^2dx\right|\\&=\pi\left|\frac{d^2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{3}+\left(\frac{c-d}{a-b}\right)^2\frac{(a-b)^3}{3}+2d\frac{c-d}{a-b}\cdot\frac{(a-b)^2}{2}+d^2(a-b)-\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right|\\&=\frac{\pi}{3}|(ad-bc)(c+d)|.\end{aligned}$$

となる．

$a=0$，$b=0$，$a-b=0$ のときもこの式は成り立つ．

よって，$ad-bc$ の符号は O，A，B の順で三角形 OAB を１周したときのまわる方向が反時計まわりのとき正，時計回りのとき負である．反時計まわりのとき，

$$V=\frac{\pi}{3}(ad-bc)(c+d).$$

（注２） （注１）において，三角形 OAB の面積を S とおくと

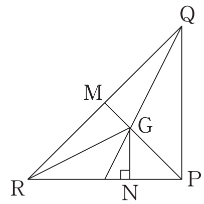
$$S=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}(ad-bc)\quad(\because\ \ \angle x\mathrm{OA}<\angle x\mathrm{OB}\ より\ \ ad-bc>0)$$

また三角形 ABC の重心 G の座標は $\left(\frac{1}{3}(a+b),\ \frac{1}{3}(c+d)\right)$．

G の y 座標を $Y=\frac{1}{3}(c+d)$ とおくと ② の公式は

$$V=2\pi YS \qquad \cdots(*)$$

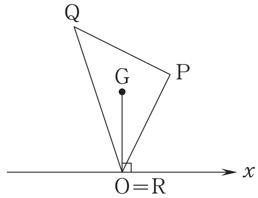
とかける．



本問に当てはめると，三角形の面積 $S=\frac{1}{2}$ は一定だから，Y すなわち G と x 軸の距離が最大のとき体積も最大となり，最小のとき体積も最小になる．

右図のように直角二等辺三角形を PQR とし，M は斜辺 QR の中点，N は G から辺 PR に下した垂線の足とする．

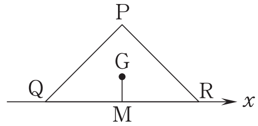
$$\mathrm{RG}>\mathrm{PG}>\mathrm{GN}>\mathrm{GM}.$$



（図１）

V が最大になるのは（図１）のときで

$$V=\pi\mathrm{RG}=\frac{\sqrt{5}}{3}\pi.$$



（図２）

V が最小になるのは（図２）のときで

$$V=\pi\mathrm{GM}=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi.$$

（参考）　パップス・ギュルダン（Pappus-Guldin）の定理

平面内にある図形 F とこれと交わらない直線 l があるとき，図形 F を直線 l の回りに一回転させてできる立体の体積を V とする．このとき，V は図形 F の面積 S と図形 F の重心 G の描く曲線の長さ $2\pi Y$ との積 $2\pi YS$ に等しい．このことは平面内の任意の図形に対して成り立つ．これをパップス・ギュルダン（Pappus-Guldin）の定理という．（上記(*)式はその例になっている）

さて三角形の重心は，3 中線の交点として知られている．また円，楕円などはその中心が重心であることは容易に見当がつけられる．これらについては上の定理を知識として使えば体積を求めることができる．

ただし，高校の範囲では一般の図形の重心までは学習していない．しかも厳密にいえば高校で学習する三角形の重心（三頂点の重心）とこの定理で使う重心（三角形板の重心）とは意味が異なる（結果的には同じ点になる）．したがって，答え合わせとして使うのでなければ，この定理を無証明で利用することはさけたほうがよい．

1990 年　前期・理科

第 1 問

$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}a_n$，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

分　野

微分・積分：無限級数

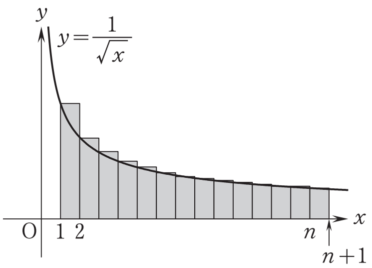
考え方

$a_n\to+\infty$ はただちにわかる．

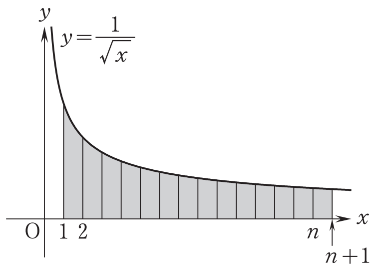
$\frac{b_n}{a_n}$ の極限を求めるには $\sqrt{2k+1}$ と $\sqrt{2k}$，$\sqrt{2k+2}$ の大小関係を利用するとよい．

【解答】

$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ は単調減少なので，a_n は（図 1 ）の網掛部分の面積であり，（図 2 ）の網掛部の面積より大きい．



（図 1 ）



（図 2 ）

したがって，

$$a_n>\int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{n+1}=2(\sqrt{n+1}-1).$$

$$\lim_{n\to\infty}2(\sqrt{n+1}-1)=+\infty \text{ だから，} \lim_{n\to\infty}a_n=+\infty. \qquad \cdots(\text{答})$$

次に $\sqrt{2k}<\sqrt{2k+1}<\sqrt{2k+2}$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

$$\therefore\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+2}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}a_n-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}<b_n<\frac{1}{\sqrt{2}}a_n.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}\,a_n}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}\,a_n}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ より $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}\,a_n}+\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}\,a_n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

後半の【別解】 積分と比較

$\dfrac{1}{\sqrt{k}}<\displaystyle\int_{k-1}^{k}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ($k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$) と前半で使った不等式より

$$2(\sqrt{n+1}-1)<a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{n}-1. \qquad \cdots①$$

また，$\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) より

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}<b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}}<\int_0^n\frac{dx}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{2n+3}-\sqrt{3}<b_n<\sqrt{2n+1}-1. \qquad \cdots②$$

①，② より

$$\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{n}-1}<\frac{b_n}{a_n}<\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2(\sqrt{n+1}-1)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{3}}{2\sqrt{n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2(\sqrt{n+1}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問

3 次関数 $h(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，次の条件 (i)，(ii) をみたすものとする。

(i) $h(1)=1$，$h(-1)=-1$。

(ii) 区間 $-1<x<1$ で極大値 1，極小値 -1 をとる。

このとき，

(1) $h(x)$ を求めよ。

(2) 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が区間 $-1<x<1$ で $-1<f(x)<1$ をみたすとき，$|x|>1$ なる任意の実数 x に対して不等式

$$|f(x)|<|h(x)|$$

が成立することを証明せよ。

分　野

基礎解析：整式の微分

考え方

グラフで考えるとよい．

(1) $y=h(x)$ のグラフと直線 $y=1$ の共有点の x 座標を解とする方程式は $x=1$ の他に重解 α をもっている．$h(x)$ は p と α でかける．$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=-1$ との間にも同様な関係がある．

(2) $y=h(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフの交点について考える．$|x|<1$ の範囲に 3 交点があるから $|x|>1$ の範囲には交点がないことがわかる．

$y=f(x)$ は条件 $|x|<1$ で $|f(x)|<1$ をみたす任意の 3 次関数だから，関数 $y=-f(x)$ も同じ条件をみたす．このことが使える．

【解答】

(1) $h(x)$ は $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとする．

(i)，(ii) より

$$h(x)-1=p(x-1)(x-\alpha)^2,\quad h(x)+1=p(x+1)(x-\beta)^2.$$
$$\therefore\quad h(x)=p(x-1)(x-\alpha)^2+1=p(x+1)(x-\beta)^2-1.$$

展開して係数を比較すると，$p\neq 0$ より，

$$\begin{cases} 2\alpha+1=2\beta-1, & \cdots① \\ \alpha^2+2\alpha=\beta^2-2\beta, & \cdots② \\ -p\alpha^2+1=p\beta^2-1. & \cdots③ \end{cases}$$

① より $\beta=\alpha+1$，② より $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta+2)=0$.

$$\therefore\quad \alpha=-\beta=-\frac{1}{2}.$$

③ より $p=4$.

$$\therefore\quad h(x)=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x-1)+1=4x^3-3x. \qquad \cdots(答)$$

(2) $F(x)=h(x)-f(x)$ とおく．

$-1<x<1$ で $-1<f(x)<1$ より，$-1\leqq f(\pm 1)\leqq 1$.

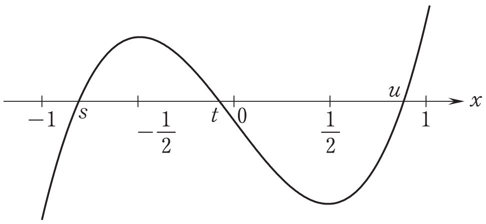
また，$h(\pm 1)=\pm 1$，$h\left(\pm\frac{1}{2}\right)=\mp 1$.（複号同順）

$$F(-1)=-1-f(-1)\leqq 0,\quad F\left(-\frac{1}{2}\right)=1-f\left(-\frac{1}{2}\right)>0,$$
$$F\left(\frac{1}{2}\right)=-1-f\left(\frac{1}{2}\right)<0,\quad F(1)=1-f(1)\geqq 0.$$

3 次関数 $y=F(x)$ のグラフは下図のようになり，x 軸と

$$-1\leqq s<-\frac{1}{2},\quad -\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}<u\leqq 1$$

となる 3 点 $(s,\ 0)$，$(t,\ 0)$，$(u,\ 0)$ で交わりそれ以外では交わらない．



$x<s$ で $F(x)<0$，$x>u$ で $F(x)>0$ だから $x<-1$ で $F(x)<0$，$x>1$ で $F(x)>0$.

$$\therefore\quad h(x)<f(x)\ (x<-1),\quad h(x)>f(x)\ (x>1). \qquad \cdots(*)$$

また関数 $-f(x)$ も $-1<x<1$ で $-1<-f(x)<1$ をみたすから $-f(x)$ についても (*) が成り立ち，

$$h(x)<-f(x)\ (x<-1),\quad h(x)>-f(x)\ (x>1). \qquad \cdots(*)'$$

(*)，(*)′ より，

$$h(x)<f(x)<-h(x)\ (x<-1),\quad -h(x)<f(x)<h(x)\ (x>1).$$

$h(x)<0\ (x<-1)$，$h(x)>0\ (x>1)$ より，$|x|>1$ のとき，

$$|f(x)|<|h(x)|. \qquad （証明終り）$$

第 3 問

（文科　第 3 問と同じ）

第4問

行列

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+a^2} & -\dfrac{a}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} & \dfrac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

に対し，点列 $\mathrm{P}_n=(x_n,\ y_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める：

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\quad \cdots,\quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix},\quad \cdots$$

(1)　a が正の実数を動くとき，$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を最大にする a の値を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた値とする。$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$，…，$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の和集合として表される図形の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

分　野

代数・幾何：一次変換，**微分・積分**：数列の極限

考え方

(1)　三角形の面積公式：$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ c)$，$\mathrm{B}(b,\ d)$ に対し，

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

を使って面積を出す．あとは微分法で増減を調べる．

(2)　重なる部分に注意．$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$ の交点を Q_1 とすると

$$\frac{\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1}{\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\frac{\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}.$$

この関係を利用する．

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=M\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\dfrac{1}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} 1-a^2 \\ 2a \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\frac{a}{1+a^2}\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}-\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\frac{a}{(1+a^2)^2}\begin{pmatrix} -2a \\ 1-a^2 \end{pmatrix}.$$

$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T_0 とする．

$$T_0=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{1+a^2}\,\frac{a(1-a^2)}{(1+a^2)^2}-\frac{-a}{1+a^2}\,\frac{-2a^2}{(1+a^2)^2}\right|=\frac{a^3}{2(1+a^2)^2}.$$

$$\frac{dT_0}{da}=\frac{3a^2}{2(1+a^2)^2}-\frac{4a^4}{2(1+a^2)^3}=\frac{a^2(3-a^2)}{2(1+a^2)^3}.$$

$a>0$ のとき，T_0 は $a=\sqrt{3}$ で増加から減少に変わる．よって，T_0 は $a=\sqrt{3}$ で最大となる．

$$\therefore\quad a=\sqrt{3}.$$ …(答)

(2)　$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ の面積を T_n とする．

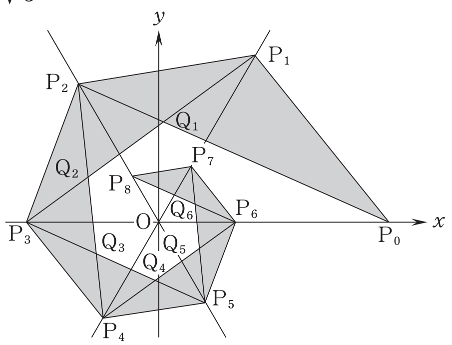
$a=\sqrt{3}$ のとき，$M=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$.

よって，M は $\dfrac{\pi}{3}$ 回転と $\dfrac{1}{2}$ 倍の相似変換の合成を表す．

$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$ と $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+3}$ の交点を Q_{n+1} とする．

$$\mathrm{P}_0(1,\ 0),\quad \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\quad P_2\left(-\frac{1}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right),\quad P_3\left(-\frac{1}{8},\ 0\right).$$

よって，直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$: $y=-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}(x-1)$ と直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$: $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{8}\right)$ の交点 Q_1 の座標は



$$\mathrm{Q}_1\left(\frac{1}{28},\ \frac{3\sqrt{3}}{28}\right).$$

$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ の面積を U_n とする．

(1) より $T_0=\dfrac{3\sqrt{3}}{32}$.

Q_1 は $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ を $\left(1-\dfrac{1}{28}\right):\left(\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{8}\right)=6:1$ に内分するから，$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_1=U_1=\dfrac{1}{7}T_0$.

M により図形は相似比が $\dfrac{1}{2}$，つまり面積比が $\dfrac{1}{4}$ の相似図形に移される．

$$\therefore\quad T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n T_0,\quad U_n=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}U_1.$$

$\left(\mathrm{OP}_6=\dfrac{1}{2^6}<(\mathrm{O}\ \text{と}\ \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\ \text{の距離})=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\ \text{だから一周以上して 2 つの三角形は重ならない}\right)$

$$S_n=(T_0+T_1+T_2+\cdots+T_n)-(U_1+U_2+U_3+\cdots+U_n).$$

$$\sum_{k=0}^{n}T_k=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}T_0=\frac{4}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{32}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\},$$

$$\sum_{k=1}^{n}U_k=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}{1-\frac{1}{4}}U_1=\frac{4}{3}\times\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{32}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}=\frac{\sqrt{3}}{56}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}.$$

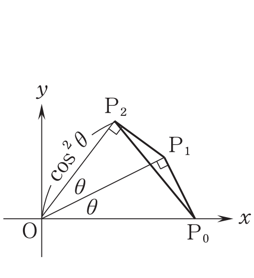
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{3}}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}-\frac{\sqrt{3}}{56}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}\right]=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{56}=\frac{3\sqrt{3}}{28}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(1) の【別解】

$a=\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\frac{1}{1+a^2}=\cos^2\theta,\quad \frac{a}{1+a^2}=\sin\theta\cos\theta.$$

$$M=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta\end{pmatrix}=\cos\theta\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$



よって，M は θ 回転と $\cos\theta$ 倍の相似変換の合成を表す．

よって，P_0，P_1，P_2 を図示すると右図のようである．

よって，$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\pi-\theta$，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=\sin\theta$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\sin\theta\cos\theta$.

$$T_0=\frac{1}{2}\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\cdot\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta.$$

$$\frac{dT_0}{d\theta}=\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\sin^4\theta=\frac{1}{2}\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1).$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，T_0 は増加から減少に変わり最大値をとる．

このとき，$a=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ だから，T_0 を最大にする a は $\sqrt{3}$.　$\cdots$(答)

第5問

円 $x^2+y^2=1$ を C_0，だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を C_1 とする。C_1 上のどんな点Pに対しても，Pを頂点にもち C_0 に外接して C_1 に内接する平行四辺形が存在するための必要十分条件を a，b で表せ。

分　野

代数・幾何：二次曲線，楕円，

考え方

楕円，円とも原点について点対称だから，条件をみたす平行四辺形も原点について点対称なはず．点Pの座標を $(x_1,\ y_1)$ とおくと，Pを通る直線のうち，C_0 と接する直線は2本あって，それらは原点との距離が1である．条件をみたす平行四辺形をPQRSとする．PQ，PS，QRの傾きをそれぞれ m_1，m_2，m_3 とするとき，$m_1 \neq 0$ なら

$$\mathrm{PS}\,/\!/\,\mathrm{QR} \iff m_1m_2=m_1m_3.$$

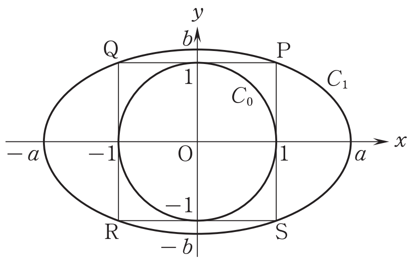
これを利用．

【解答1】

点Pの座標を $(x_1,\ y_1)$ とおくと，対称性から $x_1 \geqq 0$，$y_1 \geqq 0$ としてよい．条件をみたす平行四辺形をPQRSとする．

(i) $x_1=1$ のとき，直線 $x=1$ はPを通り C_0 に接する．これと平行な接線は $x=-1$．2直線 $x=\pm 1$ が C_1 と交わる点の y 座標は $\pm b\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}$．よって平行四辺形の残り2辺は $y=\pm b\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}$．これらが C_0 に接するから，$b\sqrt{1-\dfrac{1}{a^2}}=1$．つまり

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad \cdots①$$



(ii) $x_1 \neq 1$ のとき，PQ，PSは y 軸に平行ではない．Pを通る C_0 の接線の傾きを m とおくと，その方程式は

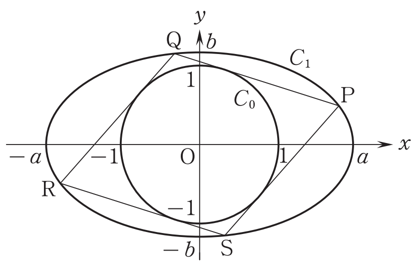
$$y=m(x-x_1)+y_1.$$

これが C_0 に接するから $\dfrac{|-mx_1+y_1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$．したがって，

$$(x_1{}^2-1)m^2-2x_1y_1m+y_1{}^2-1=0. \qquad \cdots②$$

m の方程式②の2解を m_1，m_2 とすると，m_1，m_2 はPQ，PSの傾きである．解と係数の関係から

$$m_1m_2=\frac{y_1{}^2-1}{x_1{}^2-1}.$$



$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ は楕円 C_1 上の点だから $y_1{}^2=b^2\left(1-\dfrac{x_1{}^2}{a^2}\right)$.

$$\therefore\quad m_1m_2=\frac{b^2\left(1-\dfrac{x_1{}^2}{a^2}\right)-1}{x_1{}^2-1}=-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2\left(1-\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)}{x_1{}^2-1}. \qquad \cdots③$$

$Q(x_2, y_2)$ とおいて同様に考える．m_3 を QR の傾きとし，QP の傾き m_1 との積は，

$$m_1m_3=-\frac{b^2}{a^2}+\frac{b^2\left(1-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{{x_2}^2-1}. \quad \cdots④$$

PQ は両軸に平行でないから ${x_1}^2 \neq {x_2}^2$．$m_2=m_3$，③，④ より

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \quad \cdots⑤$$

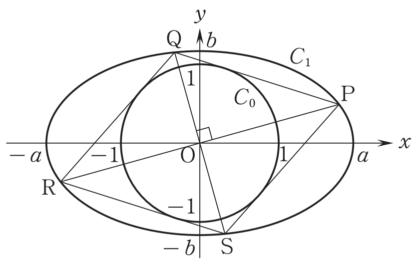
逆にこのとき，③，④ より（QR の傾き）×（QP の傾き）＝（PQ の傾き）×（PS の傾き）となり，QR∥PS．そして，2 辺 PS と QR は原点について点対称だから P，R と Q，S はそれぞれ原点について点対称．PQ が C_0 に接するから RS も C_0 に接する．

したがって，⑤ のとき，P を通る C_0 の 2 接線と C_1 の交点 Q，S を頂点とする平行四辺形 PQRS は C_0 に外接し，C_1 に内接する．

①，⑤ から C_1 上の任意の点 P を頂点とする C_0 に外接し，C_1 に内接する平行四辺形が存在する条件は

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \quad \cdots(答)$$

【解答 2】



円に外接する平行四辺形 PQRS は菱形である．なぜなら各辺は OP，OQ について線対称である．

菱形の対角線は直交するから $P(x_1, y_1)$ とおくと，$Q(-ky_1, kx_1)$ とおける．

P，Q は C_1 上にあるから，

$$\frac{{x_1}^2}{a^2}+\frac{{y_1}^2}{b^2}=1. \quad \cdots⑥$$

$$k^2\left(\frac{{y_1}^2}{a^2}+\frac{{x_1}^2}{b^2}\right)=1. \quad \cdots⑦$$

直線 PQ が C_0 と接するから，PQ と O の距離は 1．

三角形 OPQ について，OP・OQ＝PQ×1＝2△OPQ が成り立つ．

$$\therefore \quad \sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\sqrt{k^2({x_1}^2+{y_1}^2)}=\sqrt{(x_1+ky_1)^2+(y_1-kx_1)^2}.$$

$$\therefore \quad k^2({x_1}^2+{y_1}^2)=1+k^2. \quad \cdots⑧$$

k^2×⑥＋⑦ より，

$$k^2({x_1}^2+{y_1}^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=k^2+1. \quad \cdots⑨$$

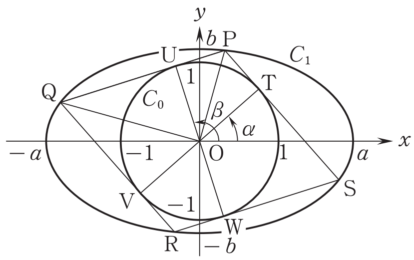
⑧，⑨ より

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1.$$

逆にこのとき $k=\dfrac{1}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2-1}}$ とおけば⑥，⑦は同時に成り立ち，Q は C_1 上にある．対称性から R，S も C_1 上にあり平行四辺形 PQRS の 4 辺は C_0 に接する．以上から

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad \cdots(答)$$

【別解】



平行四辺形を PQRS，その C_0 との接点を図のように T，U，V，W とする．

T$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，U$(\cos\beta,\ \sin\beta)$ とすると V$(-\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，W$(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$.

OP は ∠TOU の二等分線上にあり，x 軸となす角は $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ で $\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$ (∵　∠TOU$=\beta-\alpha$).

同様に OQ が x 軸となす角は $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\pi)$ で $\mathrm{OQ}=\dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha+\pi-\beta}{2}}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$.

よって，P，Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}},\ \frac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{-\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}},\ \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}}\right).$$

対称性から R，S は P，Q の原点についての対称点．P，Q が C_1 上にあれば R，S も C_1 上にある．P，Q が C_1 上にある条件はそれぞれ

$$\frac{\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{a^2\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}+\frac{\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{b^2\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}=1, \qquad \cdots⑩$$

$$\frac{\sin^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{a^2\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}+\frac{\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{b^2\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}=1. \qquad \cdots⑪$$

$\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}\times$⑩$+\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}\times$⑪ から

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad \cdots(*)$$

よって，(*) は C_0 に外接する平行四辺形の頂点が C_1 上にあるための必要条件．

逆に (*) が成り立つとき，$a>1$，$b>1$ だから C_1 上の任意の点 P$(x_1,\ y_1)$ に対し ${x_1}^2+{y_1}^2>1$.

よって，

$${x_1}^2+{y_1}^2=\frac{1}{\cos^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$$

となる角 $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ は存在する．

また，$x_1\neq 0$ なら $\dfrac{y_1}{x_1}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$x_1=0$ なら $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0$ となる角 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ が存在する．

したがって，(*) が成り立つとき，C_1 上の任意の点 P に対し，α，β が定まる．⑩と (*) が成り立てば⑪も成り立つから．このとき，Q も C_1 上にある．よって，点 P を頂点とする平行四辺形 PQRS を定め

ることができる．よって，求める条件は

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1. \qquad \cdots(答)$$

第 6 問

一つのサイコロを続けて投げて，最初の n 回に出た目の数をその順序のまま小数点以下に並べてできる実数を a_n とおく。たとえば，出た目の数が 5，2，6，… であれば，$a_1=0.5$，$a_2=0.52$，$a_3=0.526$，… である。実数 α に対して $a_n \leqq \alpha$ となる確率を $p_n(\alpha)$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=\frac{1}{2}$ となるのは α がどのような範囲にあるときか。

分　野

確率・統計：確率，**微分・積分**：数列の極限

考え方

題意をしっかりつかむことが先決．わかりにくければ具体的にサイコロの目を決めて考えると考えやすい．

(1) は題意把握の為の練習問題．1 回目のサイコロの目が 2 以上だとあとは何が出ても

$$a_n>0.\dot{1}2\dot{3}=\frac{41}{333}.$$

また 1 回目，2 回目ともサイコロの目が 1（$b_1=b_2=1$）ならあとは何が出ても

$$a_n<0.\dot{1}2\dot{3}=\frac{41}{333}.$$

(2) のポイントは，1 回目のサイコロの目が 3 以下（$b_1\leqq 3$）の確率は $\frac{1}{2}$ で，4 以上（$b_1\geqq 4$）の確率も $\frac{1}{2}$．したがって，$b_1\leqq 3$ なら必ず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\leqq\alpha$，$b_1\geqq 4$ なら必ず $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n\geqq\alpha$ となる α の範囲を求めればよい．

【解答】

事象 A が起こる確率を $P(A)$ とかく．

(1) $\frac{41}{333}$ を小数で表すと，$\frac{41}{333}=\frac{123}{999}=0.\dot{1}2\dot{3}$.

n 回目に出た目の数を b_n とし，

$$c_m=100\,b_{3m-2}+10\,b_{3m-1}+b_{3m}$$

とする．

先ず $a_1\leqq 0.1$，$a_2\leqq 0.11$，$a_3\leqq 0.122$ となる確率を考える．$a_1\leqq 0.1$，$a_2\leqq 0.11$ となるのは $b_1=1$，$b_1=b_2=1$ の場合だけだから $P(a_1\leqq 0.1)=\frac{1}{6}$，$P(a_2\leqq 0.11)=\frac{1}{6^2}$.

$a_3\leqq 0.122$ となる確率は $a_2\leqq 0.11$ となる場合と $b_1=1$，$b_2=2$ で $b_3\leqq 2$ となる場合であるから，その確率は

$$P(a_3\leqq 0.122)=P(c_1\leqq 122)=P(a_2\leqq 0.11)+P(b_1=1,\ b_2=2,\ b_3\leqq 2)=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{27}.$$

$$p_{3m}\left(\frac{41}{333}\right)=P\left(a_{3m}\leqq\frac{41}{333}\right)$$
$$=P(c_1\leqq 122)+P(c_1=123,\ c_2\leqq 122)+P(c_1=c_2=123,\ c_3\leqq 122)$$
$$+\cdots+P(c_1=c_2=c_3=\cdots=c_{m-1}=123,\ c_m\leqq 122)$$
$$+P(c_1=c_2=c_3=\cdots=c_{m-1}=c_m=123)$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{27}+\left(\frac{1}{6^3}\right)^2\frac{1}{27}+\cdots+\left(\frac{1}{6^3}\right)^{m-1}\frac{1}{27}+\left(\frac{1}{6^3}\right)^m$$
$$=\frac{1}{27}\left\{1+\frac{1}{6^3}+\left(\frac{1}{6^3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{6^3}\right)^{m-1}\right\}+\frac{1}{6^{3m}}$$
$$=\frac{1}{27}\frac{1-\left(\frac{1}{6^3}\right)^m}{1-\frac{1}{6^3}}+\frac{1}{6^{3m}}$$
$$=\frac{8}{215}\left\{1-\left(\frac{1}{6^3}\right)^m\right\}+\frac{1}{6^{3m}}.$$
$$\therefore\quad \lim_{m\to\infty}p_{3m}\left(\frac{41}{333}\right)=\frac{8}{215}.$$

n が大きくなるにしたがって a_n は増加するから数列 $\left\{p_n\left(\frac{41}{333}\right)\right\}$ は n について減少する．

$$\therefore\quad p_{3m}\left(\frac{41}{333}\right)>p_{3m+1}\left(\frac{41}{333}\right)>p_{3m+2}\left(\frac{41}{333}\right)>p_{3m+3}\left(\frac{41}{333}\right)$$
$$\lim_{m\to\infty}p_{3m}\left(\frac{41}{333}\right)=\lim_{m\to\infty}p_{3m+1}\left(\frac{41}{333}\right)=\lim_{m\to\infty}p_{3m+2}\left(\frac{41}{333}\right)=\lim_{m\to\infty}p_{3m+3}\left(\frac{41}{333}\right)=\frac{8}{215}$$

だから

$$\lim_{n\to\infty}p_n\left(\frac{41}{333}\right)=\frac{8}{215}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2) $b_1\leqq 3$ となる確率がちょうど $\frac{1}{2}$ で，$b_1\geqq 4$ となる確率も $\frac{1}{2}$ である．2つの a_n の列 $\{a_n\}$，$\{a'_n\}$ について，$a_k<a'_k$ なら $a_m<a'_m$ $(m>k)$ のように一度大小関係が決まれば逆転は起こらない．

$b_1\leqq 3$ のとき必ず $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqq\alpha$，$b_1\geqq 4$ のとき必ず $\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\alpha$ となる α を考えればよい．

$b_1=3$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqq 0.3\dot{6}$，$b_1=4$ のとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqq 0.4\dot{1}$.

$$p_n(0.3\dot{6})=P(a_n\leqq 0.3\dot{6})=\frac{1}{2}.$$
$$p_n(0.4\dot{1})=P(a_n<0.4)+P(a_n=0.4\overbrace{1\cdots1}^{(n-1)\text{個}})=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

(i) $0.3\dot{6}\leqq\alpha\leqq 0.4\dot{1}$ のとき，$p_n(0.3\dot{6})\leqq p_n(\alpha)\leqq p_n(0.4\dot{1})$．$\lim\limits_{n\to\infty}p_n(0.3\dot{6})=\lim\limits_{n\to\infty}p_n(0.4\dot{1})=\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}p_n(\alpha)=\frac{1}{2}.$$

(ii) $\alpha<0.3\dot{6}$ のとき，十分大きいある l をとれば $\alpha<0.3\overbrace{6\cdots6}^{l\text{個}}$ となり

$$p_n(\alpha)\leqq P(a_n\leqq 0.3\overbrace{6\cdots6}^{l\text{個}})=P(a_n\leqq 0.3\dot{6})-P(0.3\overbrace{6\cdots6}^{l\text{個}}<a_n\leqq 0.3\dot{6})$$
$$=\frac{1}{2}-P(a_{l+1}=0.3\overbrace{6\cdots6}^{l\text{個}})=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{6}\right)^{l+1}.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha) \leqq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1} < \frac{1}{2}.$$

(iii) $\alpha > 0.4\dot{1}$ のとき，十分大きいある l をとれば $\alpha > 0.4\overbrace{1\cdots1}^{(l-1)\text{個}}2$ となり $n \geqq l+2$ のとき

$$p_n(\alpha) \geqq P(a_n \leqq 0.4\overbrace{1\cdots1}^{(l-1)\text{個}}2) = P(a_n \leqq 0.4\dot{1}) + P(0.4\dot{1} < a_n \leqq 0.4\overbrace{1\cdots1}^{(l-1)\text{個}}2)$$

$$= \frac{1}{2} + P(a_{l+1} = 0.4\overbrace{1\cdots1}^{l\text{個}}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1}.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha) \geqq \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^{l+1} > \frac{1}{2}.$$

(i)，(ii)，(iii) より求める範囲は

$$0.3\dot{6} \leqq \alpha \leqq 0.4\dot{1}.$$

分数で表すと

$$\frac{11}{30} \leqq \alpha \leqq \frac{37}{90}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(1) の【別解】

$$p\left(\frac{41}{333}\right) = p_n(0.\dot{1}2\dot{3}) = P(a_n \leqq 0.\dot{1}2\dot{3})$$

$$= P(a_3 \leqq 0.122) + P(a_3 = 0.123 \text{ かつ } a_n \leqq 0.\dot{1}2\dot{3})$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\right) + P(a_3 = 0.123)P(a_n \leqq 0.\dot{1}2\dot{3} \mid a_3 = 0.123)$$

$$= \frac{1}{27} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 P(a_{n-3} \leqq 0.\dot{1}2\dot{3})$$

$$= \frac{1}{27} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 p_{n-3}\left(\frac{41}{333}\right) \quad (n \geqq 4).$$

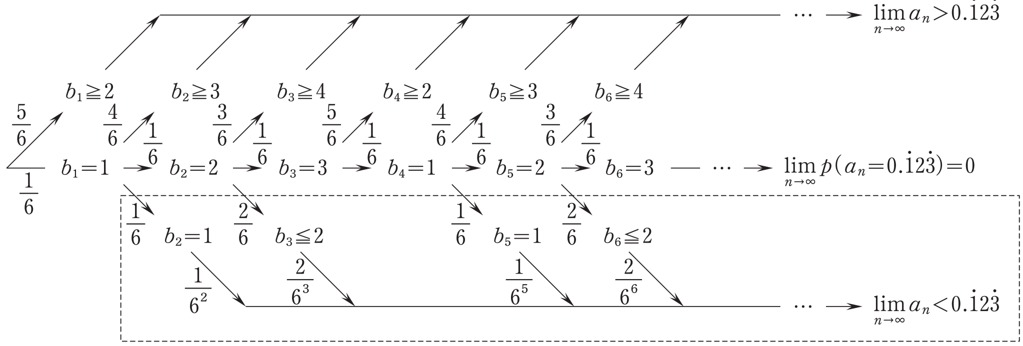
（ただし，$P(a_n \leqq 0.\dot{1}2\dot{3} \mid a_3 = 0.123)$ は $a_3 = 0.123$ のもとで $a_n \leqq 0.\dot{1}2\dot{3}$ となる条件付確率である）

$p_n\left(\frac{41}{333}\right)$ は単調に減少し正だから極限をもつ．その極限を P とすると，

$$\lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{27} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 p_{n-3}\left(\frac{41}{333}\right)\right\}.$$

$$\therefore \quad P = \frac{1}{27} + \left(\frac{1}{6}\right)^3 P. \quad \therefore \quad P = \lim_{n\to\infty} p_n\left(\frac{41}{333}\right) = \frac{\frac{1}{27}}{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{8}{215}. \qquad \cdots(\text{答})$$

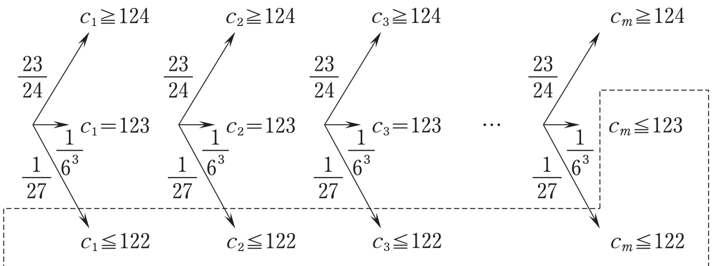
（注）　n 回目に出た目の数を b_n として樹形図をかくと



上の破線囲みの部分の確率が求めるものである．

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(0.\dot{1}2\dot{3})=\frac{0}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{2}{6^3}+\frac{0}{6^4}+\frac{1}{6^5}+\frac{2}{6^6}+\cdots$ となることがわかる．

【解答】では $0.\dot{1}2\dot{3}$ が循環小数だから 3 桁ずつまとめて，次のようにした．



$$p_{2m}(0.\dot{1}2\dot{3})=\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\times\frac{1}{6^3}+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{6^3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{6^3}\right)^{m-1}+\left(\frac{1}{6^3}\right)^m$$

$p_{3m}(0.\dot{1}2\dot{3})$ は図の破線囲みの部分の確率．

1990 年　後期・理科 I 類

第 1 問

xy 平面上の 4 点 O(0, 0)，A(2, 0)，B(2, 2)，C(0, 2) を頂点とする正方形を Q とする。このとき，次の条件を満たす xy 平面上の点 P の存在する範囲を図示し，その部分の面積を求めよ。
（条件）　点 P を通って，Q の面積 4 を 1 と 3 に切り分けるような直線を引くことができない。

分　野

数学 I：直線の方程式，面積，**微分・積分**：積分法

考え方

対称性を利用して場合を減らさないと大変である．正方形を 2 つに分ける直線が，隣合った 2 辺と交わる場合と，向かい合った 2 辺と交わる場合に場合分けして考える．

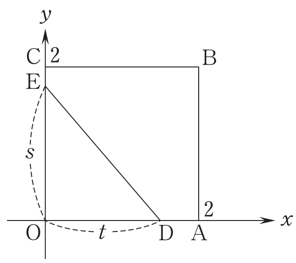
【解答】

正方形 Q の面積を 1：3 に分ける直線 l の通過しない領域が求めるもの．

まず l が通過する領域を求める．

(i)　l が辺 OA，OC と D$(t, 0)$，E$(0, s)$ で交わるとき，

$$0 \leqq t \leqq 2,\quad 0 \leqq s \leqq 2. \quad \cdots ①$$



（図 1）

明らかに $\triangle \mathrm{ODE} < \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ であるから $\triangle \mathrm{ODE} = 1$.

$$\therefore \quad \frac{1}{2}ts = 1. \quad \therefore \quad s = \frac{2}{t}.$$

① より

$$1 \leqq t \leqq 2. \quad \cdots ②$$

このとき，l の方程式は

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{s} = 1.$$

$$\therefore \quad y = -\frac{2}{t^2}(x - t).$$

$$\therefore \quad yt^2 - 2t + 2x = 0. \quad \cdots ③$$

t の方程式 ③ が ② の範囲で少なくとも 1 つの実数解を持つ (x, y) の領域が l の通過領域である．

(i-a)　$y = 0$ のとき

③ の方程式は $t = x$.　これが ② の解をもつ条件は

$$1 \leqq x \leqq 2.$$

(i-b)　$y \neq 0$ のとき

③ は $t^2 - \frac{2}{y}t + \frac{2x}{y} = 0$ とかけるので，

$$f(t) = t^2 - \frac{2}{y}t + \frac{2x}{y}$$

とおくと，求める条件は

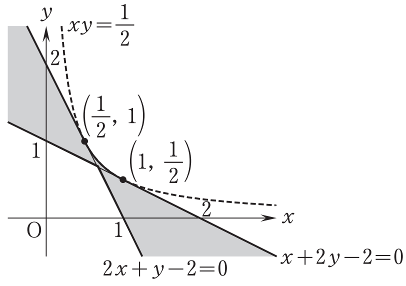
$$\begin{cases} f(1)f(2) \leqq 0 \\ \text{または} \\ f(1) > 0,\ f(2) > 0,\ D \geqq 0,\ 1 < \dfrac{1}{y} < 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y+2x-2}{y}\cdot\dfrac{4y+2x-4}{y}\leqq 0 \\ \text{または} \\ \dfrac{y+2x-2}{y}>0,\ \dfrac{4y+2x-4}{y}>0,\ xy\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<y<1. \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} (y+2x-2)(2y+x-2)\leqq 0 \\ \text{または} \\ y+2x-2>0,\ 2y+x-2>0,\ xy\leqq\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<y<1. \end{cases}$$

(i-a), (i-b) を図示すると（図２）の網掛部，境界を含む．



（図２）

(ii) l が辺 OC，AB と D$(0,\ t)$，E$(2,\ s)$ で交わるとき，

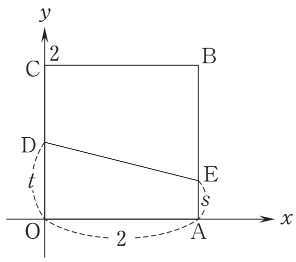
$$0\leqq t\leqq 2,\quad 0\leqq s\leqq 2. \qquad \cdots④$$

□OAED$=1$ のときを考えればよい．$\dfrac{1}{2}\cdot 2(t+s)=1.$

$$\therefore\quad s=1-t.$$

④ より

$$0\leqq t\leqq 1.$$



（図３）

このとき，l の方程式は

$$y=\frac{s-t}{2}x+t.$$

$$\therefore\quad y=\frac{1-2t}{2}x+t.$$

$$\therefore\quad 2(x-1)t+(2y-x)=0.$$

(i) と同様に l の通過領域を求める．

$$g(t)=2(x-1)t+(2y-x)$$

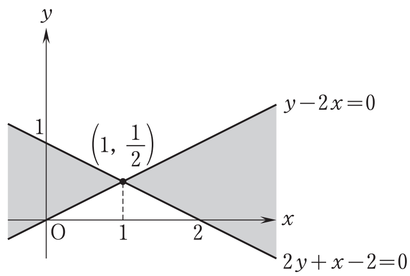
とおくと，求める条件は

$$g(0)g(1)\leqq 0.$$

つまり

$$(2y-x)(2y+x-2)\leqq 0.$$

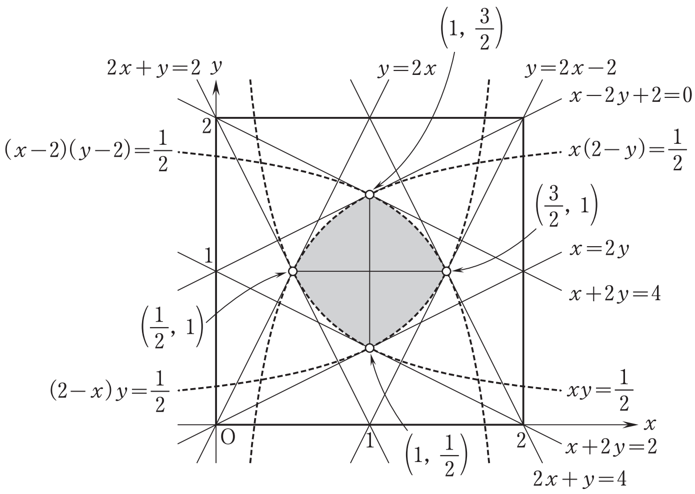
これを図示すると（図４）の網掛部，境界を含む．



（図４）

対称性より l の通過する領域は (i), (ii) で求めた領域を点 $(1,\ 1)$ のまわりに $0°$，$90°$，$180°$，$270°$ 回転したもののすべてを合併した領域である．求める領域はその補集合である．

図示すると（図５）の斜線部，境界は含まない．



…(答)

（図 5 ）

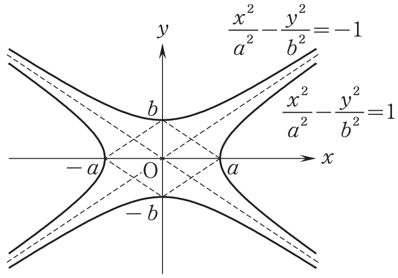
この領域を 4 等分するとそのひとつは $y=1$，$x=1$，$y=\frac{1}{2x}$ が囲むから，面積は

$$4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1}{2x}\right)dx=4\left[x-\frac{1}{2}\log x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=2(1-\log 2). \qquad \cdots(答)$$

（注） x 軸，y 軸（それぞれの正の部分）および直線で囲まれた領域の面積が一定のとき，直線はある定双曲線（x 軸，y 軸が漸近線の直角双曲線）に接する．この事実は比較的によく知られていて，入試問題の題材としてよく取り上げられる．このとき接点は両軸の切片の中点である．これらのことは本問の解答とほぼ同様の方法で証明される．

もう少し一般化できる．2 定直線 m，n とこれらと交わる直線 l が作る三角形の面積が一定のとき l は m，n を漸近線とする定双曲線（またはその共役双曲線）に接する．ここで，l が m，n の交点のどちら側で交わるかということで，2 つの共役な双曲線のどちらと接するかが場合分けられる．これらのことは 2 つの定直線 m，n の交点を原点とし，2 直線のなす角の 2 等分線を x 軸，y 軸とした座標系をとって計算すれば確かめられる．

なお，双曲線 h：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ にたいして双曲線 h'：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ を h の共役双曲線といい，2 つの双曲線 h と h' は共役であるという．



（図 6 ）

第2問

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とし，P_0 を xy 平面上の原点とする。$i=1, \cdots, 6$ に対して，a_i を正の実数とし，$\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}=A^i\begin{pmatrix}a_i\\ 0\end{pmatrix}$ とおいたとき，点 P_i を $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}=(x_i, y_i)$ となるように定める。ただし，このとき $P_6=P_0$ となっているものとする。P_0，P_1，$\cdots$，P_6 を順に結んで得られる六角形を H とおく。

(1) $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$ であることを示せ。

(2) $\sum_{i=1}^{6}a_i=6$，$a_1-a_4=1$ とする。H の面積の最大値を求めよ。

(3) $\sum_{i=1}^{6}a_i=6$ とするとき，H の面積の最大値を求めよ。

分　野

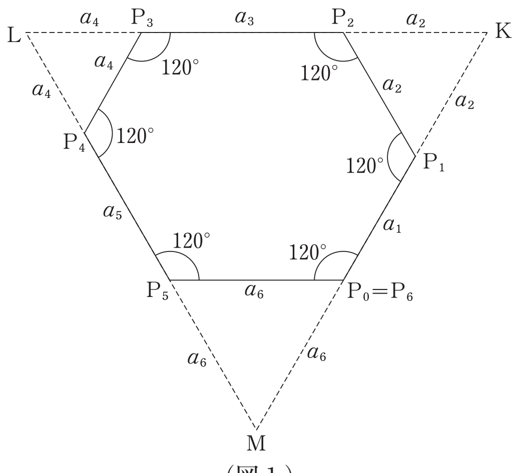
代数・幾何：一次変換，最大・最小

考え方

題意を読み取って六角形の形をしっかり把握すること．あとは2変数の二次式の最大値を求める問題になる．対称性をどう使うかが鍵．

【解答】

(1) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{pmatrix}$ であるから，A は原点の周りの 60° 回転を表す行列である．このとき，A^i は，原点のまわりの $(60\times i)^\circ$ の回転を表す．$\overrightarrow{P_0P_1}$，$\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_2P_3}$，$\overrightarrow{P_3P_4}$，$\overrightarrow{P_4P_5}$，$\overrightarrow{P_5P_6}$ と x 軸のなす角は順に 60°，120°，180°，240°，300°，$360^\circ(0^\circ)$ となる．また $|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}|=a_i$ となる．六角形 H は（図1）のようになる．



（図1）

（図1）で三角形KLMは正三角形となるから，KL=LM=MK．すなわち

$$a_2+a_3+a_4=a_4+a_5+a_6=a_6+a_1+a_2.$$

$$a_2+a_3+a_4=a_4+a_5+a_6 \text{ より } a_5-a_2=a_3-a_6.$$

$$a_4+a_5+a_6=a_6+a_1+a_2 \text{ より } a_1-a_4=a_5-a_2.$$

$$\therefore\quad a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6. \qquad \text{（証明終り）}$$

(2) H の面積を S とする．

$$S=\triangle\mathrm{KLM}-(\triangle\mathrm{KP_1P_2}+\triangle\mathrm{LP_3P_4}+\triangle\mathrm{MP_5P_6})$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2+a_3+a_4)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}{a_2}^2+\frac{\sqrt{3}}{4}{a_4}^2+\frac{\sqrt{3}}{4}{a_6}^2\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(a_2+a_3+a_4)^2-({a_2}^2+{a_4}^2+{a_6}^2)\}. \qquad \cdots①$$

ここで

$$a_1-a_4=k,\quad a_2=u,\quad a_4=v,\quad a_6=w$$

とおくと，

$$a_1=v+k,\quad a_5=u+k,\quad a_3=w+k.$$

$\sum_{i=1}^{6}a_i=6$ より

$$2(u+v+w)+3k=6. \qquad \cdots②$$

よって ① より

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\{(u+w+k+v)^2-(u^2+v^2+w^2)\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{6-k}{2}\right)^2-(u^2+v^2+w^2)\right\}. \qquad \cdots③$$

よって k が一定のとき，S が最大になるのは，② のもとで，$u^2+v^2+w^2$ が最小のときである．

② より $w=\dfrac{6-3k}{2}-u-v.$

$$u^2+v^2+w^2=u^2+v^2+\left(\frac{6-3k}{2}-u-v\right)^2$$
$$=2u^2+2v^2+2uv-(6-3k)(u+v)+\frac{(6-3k)^2}{4}$$
$$=2\left(u+\frac{v}{2}-\frac{6-3k}{4}\right)^2+\frac{3}{2}\left(v-\frac{2-k}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{6-3k}{2}\right)^2$$
$$\geqq\frac{1}{3}\left(\frac{6-3k}{2}\right)^2.$$

よって $u=\dfrac{6-3k}{4}-\dfrac{v}{2}$，$v=\dfrac{2-k}{2}$ のとき，すなわち $u=v=w=\dfrac{2-k}{2}$ のとき $u^2+v^2+w^2$ は最小値 $\dfrac{3}{4}(2-k)^2$ をとる．このとき ③ より S は最大値

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{6-k}{2}\right)^2-\frac{3}{4}(2-k)^2\right\}=\frac{\sqrt{3}}{8}(12-k^2) \qquad \cdots④$$

をとる．ここで $k=1$ とすると，$a_2=a_4=a_6=\dfrac{1}{2}$，$a_1=a_3=a_5=\dfrac{3}{2}$ のとき，確かに六角形ができて，S は最大となる．よって

$$S\text{ の最大値は }\frac{11\sqrt{3}}{8}. \qquad \cdots\text{（答）}$$

(3) ④ より

$$S\leqq\frac{\sqrt{3}}{8}(12-k^2)\leqq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

等号は $k=0$，$u=v=1$ のとき，すなわち $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=1$ のとき成り立つ．このとき H は正六角形．よって

$$S \text{ の最大値は } \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

⑴ の【別解】

六角形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ をなすから

$$\overrightarrow{P_0P_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\overrightarrow{P_3P_4}+\overrightarrow{P_4P_5}+\overrightarrow{P_5P_6}=\vec{0}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}a_4 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_5 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1-a_4)+\frac{1}{2}(a_5-a_2)+a_6-a_3=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a_1-a_4)-\frac{\sqrt{3}}{2}(a_5-a_2)=0 \end{cases}$$

これを解けば

$$a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6. \qquad (\text{証明終り})$$

⑵ で $u^2+v^2+w^2$ の最小値を求める部分の【別解】

③ で S を最大にするには $u^2+v^2+w^2$ を最小にすればよいところまで**【解答】**と同じ.

ここでコーシー・シュワルツの不等式を使うと,

$$(u^2+v^2+w^2)(1^2+1^2+1^2) \geqq (u\times1+v\times1+w\times1)^2$$

より

$$3(u^2+v^2+w^2) \geqq \left(\frac{6-3k}{2}\right)^2=\frac{9}{4}(2-k)^2.$$

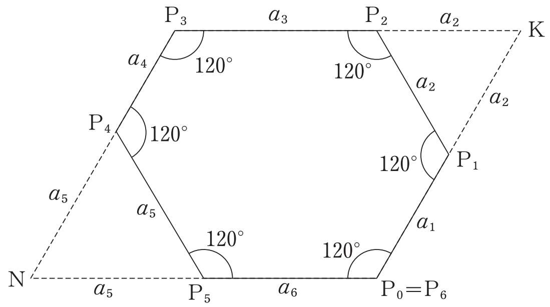
よって

$$u^2+v^2+w^2 \geqq \frac{3}{4}(2-k)^2.$$

等号は $u=v=w=\dfrac{2-k}{2}$ のとき成り立つ.

以下**【解答】**と同じ.

（注） ⑴ および ⑵ の ③ までは（図２）のように平行四辺形を作る条件から導いてもよい.



（図２）

平行四辺形をなす条件は

$$a_1+a_2=a_4+a_5, \quad a_2+a_3=a_5+a_6.$$

$$\therefore \quad a_1-a_4=a_3-a_6=a_5-a_2. \qquad (\text{証明終り})$$

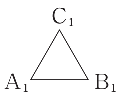
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 を u, v, w, k で表し, ② を使って,

$$\begin{aligned} S &= \text{▱}KP_3NP_0-\triangle KP_2P_1-\triangle NP_5P_4 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}(a_2+a_3)(a_2+a_1)-\frac{\sqrt{3}}{4}(a_2{}^2+a_5{}^2) \end{aligned}$$

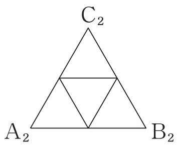
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(u+w+k)(u+v+k)-\frac{\sqrt{3}}{4}\{u^2+(u+k)^2\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\{k^2+2(u+v+w)k+2(uv+vw+wu)\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{6-k}{2}\right)^2-(u^2+v^2+w^2)\right\}. \qquad (\because ②) \qquad \cdots ③$$

第 3 問

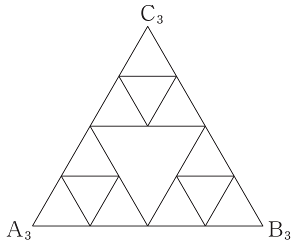
長さ 1 の線分をつなげてできる次のような平面上の図形 Q_1，Q_2，Q_3，$\cdots$ を考える。$n=1$，2，3，$\cdots$ に対し，図形 Q_n の左端の点を A_n，右端の点を B_n，上端の点を C_n とする。



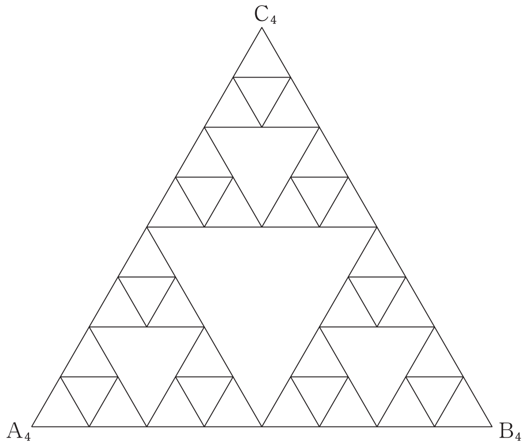
図形 Q_1



図形 Q_2



図形 Q_3



図形 Q_4

Q_1 は一辺の長さが 1 の正三角形の周である。Q_2 は図のように，Q_1 を 3 つつなげてできる図形である。

Q_n と同じ図形を 3 つ用意し，それらを $Q_n(1)$，$Q_n(2)$，$Q_n(3)$ とする。$i=1$，2，3 に対し，$Q_n(i)$ の左端の点を $\mathrm{A}_n(i)$，右端の点を $\mathrm{B}_n(i)$，上端の点を $\mathrm{C}_n(i)$ としたとき，Q_{n+1} は，$\mathrm{B}_n(1)$ と $\mathrm{A}_n(2)$，$\mathrm{C}_n(2)$ と $\mathrm{B}_n(3)$，$\mathrm{A}_n(3)$ と $\mathrm{C}_n(1)$ がそれぞれ同一の点になるようにおいてできる図形である。

Q_n において，A_n から線分の上を通り，一度通った点は二度通らずに B_n まで行く行き方を考える。この行き方のうち，途中 C_n を通らない場合の個数を x_n とし，途中 C_n を通る場合の個数を y_n とする。容易にわかるように，$x_1=y_1=1$ である。

(1) x_2，y_2 を求めよ。

(2) x_{n+1} を x_n，y_n を用いて表わせ。また，y_{n+1} を x_n，y_n を用いて表わせ。

(3) x_3，y_3 を求めよ。

分　野

基礎解析：数列，漸化式，**確率・統計**：場合の数

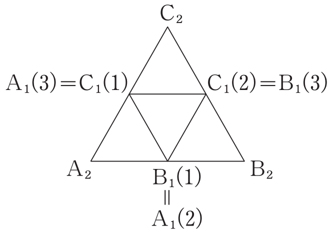
考え方

注意深く丹念に場合分けをする．(2) は (1) を，(3) は (2) を利用．

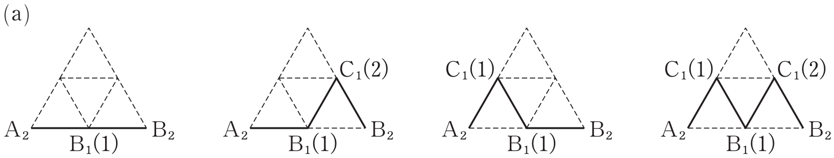
【解答】

(1)　点 A_2 から線分の上を通り，点 C_2 を通らないで点 B_2 まで行く行き方は，

(a)
$$A_2 \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow B_2,$$
$$A_2 \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2,$$
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow B_2,$$
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2.$$



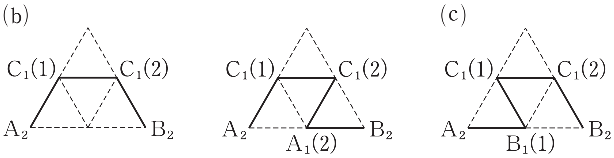
(a)



(b)
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2,$$
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow A_1(2) \longrightarrow B_2.$$

(c)
$$A_2 \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2.$$

(b)　　(c)



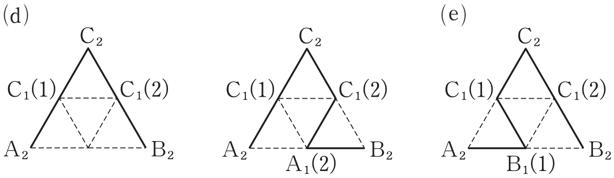
以上 7 通り．

点 A_2 から線分の上を通り，点 C_2 を通って点 B_2 まで行く行き方は，

(d)
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2,$$
$$A_2 \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow A_1(2) \longrightarrow B_2.$$

(e)
$$A_2 \longrightarrow B_1(1) \longrightarrow C_1(1) \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_1(2) \longrightarrow B_2.$$

(d)　　(e)



以上 3 通り．

$$\therefore \quad x_2=7, \quad y_2=3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注)　(a) ～ (e) の記号は (2) の解答との関係でつけてある．

(2)　点 A_{n+1} から線分の上を通り，点 C_{n+1} を通らないで点 B_{n+1} まで行く行き方を，次のように分けて考える．

(a)　$A_{n+1} \xrightarrow{Q_n(1)\text{ 内}} B_n(1) \xrightarrow{Q_n(2)\text{ 内}} B_{n+1}.$

(b)　$A_{n+1} \xrightarrow{Q_n(1)\text{ 内}(B_n(1)\text{ を通らない})} C_n(1) \xrightarrow{Q_n(3)\text{ 内}(C_{n+1}\text{ を通らない})} C_n(2) \xrightarrow{Q_n(2)\text{ 内}} B_{n+1}.$

(c)　$A_{n+1} \xrightarrow{Q_n(1)\text{ 内}(B_n(1)\text{ を通る})} C_n(1) \xrightarrow{Q_n(3)\text{ 内}(C_{n+1}\text{ を通らない})} C_n(2) \xrightarrow{Q_n(2)\text{ 内}(A_n(2)\text{ を通らない})} B_{n+1}.$

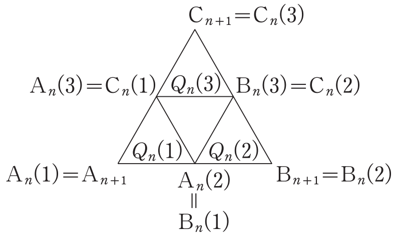
(a) のとき

$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n(1) \longrightarrow \mathrm{B}_n(1)$ の行き方の個数は x_n+y_n,

$\mathrm{B}_n(1)=\mathrm{A}_n(2) \longrightarrow \mathrm{B}_n(2)=\mathrm{B}_{n+1}$ の行き方の個数は x_n+y_n.

よって (a) のときの行き方の個数は $(x_n+y_n)^2$.

(b) のとき



$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n(1) \xrightarrow{\mathrm{B}_n(1)\text{ を通らない}} \mathrm{C}_n(1)$ の行き方の個数は x_n,

$\mathrm{C}_n(1)=\mathrm{A}_n(3) \xrightarrow{\mathrm{C}_n(3)\text{ を通らない}} \mathrm{B}_n(3)$ の行き方の個数は x_n.

$\mathrm{B}_n(3)=\mathrm{C}_n(2) \longrightarrow \mathrm{B}_n(2)=\mathrm{B}_{n+1}$ の行き方の個数は x_n+y_n.

よって (b) のときの行き方の個数は $x_n{}^2(x_n+y_n)$.

(c) のとき

$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n(1) \xrightarrow{\mathrm{B}_n(1)\text{ を通る}} \mathrm{C}_n(1)$ の行き方の個数は y_n,

$\mathrm{C}_n(1)=\mathrm{A}_n(3) \xrightarrow{\mathrm{C}_n(3)\text{ を通らない}} \mathrm{B}_n(3)$ の行き方の個数は x_n.

$\mathrm{B}_n(3)=\mathrm{C}_n(2) \xrightarrow{\mathrm{A}_n(2)\text{ を通らない}} \mathrm{B}_n(2)=\mathrm{B}_{n+1}$ の行き方の個数は x_n.

よって (c) のときの行き方の個数は $x_n{}^2y_n$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_{n+1}&=(x_n+y_n)^2+x_n{}^2(x_n+y_n)+x_n{}^2y_n\\&=(x_n+y_n)^2+x_n{}^2(x_n+2y_n).\end{aligned}$$

点 A_{n+1} から線分の上を通り，点 C_{n+1} を通って点 B_{n+1} まで行く行き方を，次のように分けて考える．

(d) $\mathrm{A}_{n+1} \xrightarrow{Q_n(1)\text{ 内}(\mathrm{B}_n(1)\text{ を通らない})} \mathrm{C}_n(1) \xrightarrow{Q_n(3)\text{ 内}(\mathrm{C}_{n+1}\text{ を通る})} \mathrm{C}_n(2) \xrightarrow{Q_n(2)\text{ 内}} \mathrm{B}_{n+1}$.

(e) $\mathrm{A}_{n+1} \xrightarrow{Q_n(1)\text{ 内}(\mathrm{B}_n(1)\text{ を通る})} \mathrm{C}_n(1) \xrightarrow{Q_n(3)\text{ 内}(\mathrm{C}_{n+1}\text{ を通る})} \mathrm{C}_n(2) \xrightarrow{Q_n(2)\text{ 内}(\mathrm{A}_n(2)\text{ を通らない})} \mathrm{B}_{n+1}$.

(d) のとき

$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n(1) \xrightarrow{\mathrm{B}_n(1)\text{ を通らない}} \mathrm{C}_n(1)$ の行き方の個数は x_n,

$\mathrm{C}_n(1)=\mathrm{A}_n(3) \xrightarrow{\mathrm{C}_n(3)\text{ を通る}} \mathrm{B}_n(3)$ の行き方の個数は y_n.

$\mathrm{B}_n(3)=\mathrm{C}_n(2) \longrightarrow \mathrm{B}_n(2)=\mathrm{B}_{n+1}$ の行き方の個数は x_n+y_n.

よって (d) のときの行き方の個数は $x_ny_n(x_n+y_n)$.

(e) のとき

$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_n(1) \xrightarrow{\mathrm{B}_n(1)\text{ を通る}} \mathrm{C}_n(1)$ の行き方の個数は y_n,

$\mathrm{C}_n(1)=\mathrm{A}_n(3) \xrightarrow{\mathrm{C}_n(3)\text{ を通る}} \mathrm{B}_n(3)$ の行き方の個数は y_n.

$\mathrm{B}_n(3)=\mathrm{C}_n(2) \xrightarrow{\mathrm{A}_n(2)\text{ を通らない}} \mathrm{B}_n(2)=\mathrm{B}_{n+1}$ の行き方の個数は x_n.

よって (c) のときの行き方の個数は $x_ny_n{}^2$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad y_{n+1}&=x_ny_n(x_n+y_n)+x_ny_n{}^2\\&=x_ny_n(x_n+2y_n).\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{cases}x_{n+1}=(x_n+y_n)^2+x_n{}^2(x_n+2y_n),\\ y_{n+1}=x_ny_n(x_n+2y_n).\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

(3) (1), (2) より

$$\begin{cases}x_3=(x_2+y_2)^2+x_2{}^2(x_2+2y_2)=10^2+7^2\times13=737,\\ y_3=x_2y_2(x_2+2y_2)=7\times3\times13=273.\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

1991 年　前期・文科

第 1 問

関数 $f(x)=x^3-2x^2-3x+4$ の，区間 $-\dfrac{7}{4}\leqq x\leqq 3$ での最大値と最小値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の微分

考え方

一見すると易しそうだが，計算が繁雑．$\sqrt{\quad}$ の処理を上手にやること．

【解答】

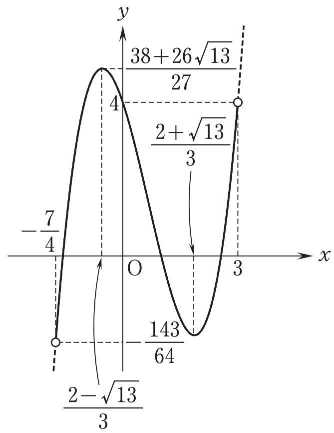
$f'(x)=3x^2-4x-3$ から極値をとる x は $x=\dfrac{2\pm\sqrt{13}}{3}$.

$$-\frac{7}{4}<\frac{2-\sqrt{13}}{3}<0<\frac{2+\sqrt{13}}{3}<3.$$

$$f(3)=27-18-9+4=4,\quad f\left(-\frac{7}{4}\right)=-\frac{343}{64}-\frac{49}{8}+\frac{21}{4}+4=-\frac{143}{64}.$$

$f(x)=\dfrac{1}{3}f'(x)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)-\dfrac{26}{9}x+\dfrac{10}{3}$ より

$$f\left(\frac{2\pm\sqrt{13}}{3}\right)=\frac{38\mp 26\sqrt{13}}{27}.$$



$\dfrac{2-\sqrt{13}}{3}\leqq x\leqq 0$ で $f(x)$ は単調減少だから

$$f\left(\frac{2-\sqrt{13}}{3}\right)>f(0)=f(3)=4.$$

よって最大値は $\dfrac{38+26\sqrt{13}}{27}$.　　…(答)

一方 $f\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{3}\right)-f\left(-\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{38-26\sqrt{13}}{27}+\dfrac{143}{64}$.

$\dfrac{38}{27}+\dfrac{143}{64}=1.40\cdots+2.23\cdots>3.63$．これを 2 乗すると $3.63^2=13.1\cdots>13$.

$$\therefore\quad \frac{38-26\sqrt{13}}{27}+\frac{143}{64}>\sqrt{13}-\frac{26}{27}\sqrt{13}>0.$$

よって最小値は $-\dfrac{143}{64}$.　　…(答)

第 2 問

xyz 空間の点 P$(2,\ 0,\ 1)$ と，yz 平面上の曲線 $z=y^2$ を考える。点 Q がこの曲線上を動くとき，直線 PQ が xy 平面と出会う点 R のえがく図形を F とする。

xy 平面上で F を図示せよ。

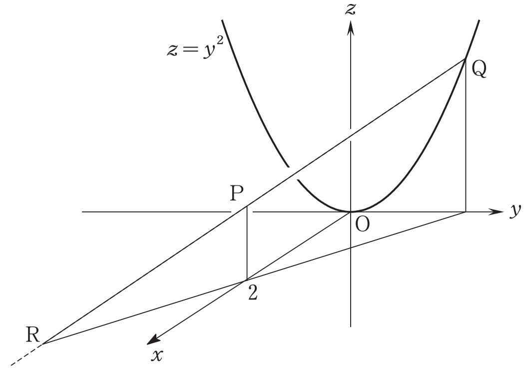
分　野

代数・幾何：空間座標，二次曲線，軌跡

考え方

点 Q の座標を $(0,\ t,\ t^2)$，点 R の座標を $(X,\ Y,\ 0)$ とおいて，P，Q，R が一直線上にある条件を求める．t を消去すれば，X と Y のみたす式が得られる．文字を消去するとき，0 で割らないなどの条件に注意する．除外点がある．

【解答】



Q$(0,\ t,\ t^2)$，R$(X,\ Y,\ 0)$ とする．R は直線 PQ 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}.$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}=(1-s)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X=2(1-s), & \cdots① \\ Y=st, & \cdots② \\ 0=1-s+st^2. & \cdots③ \end{cases}$$

③ より，$t=\pm1$ のとき，R は存在しない．$t\neq\pm1$ のとき，$s=-\dfrac{1}{t^2-1}$.

①，② より

$$\begin{cases} X=2+\dfrac{2}{t^2-1}, & \cdots④ \\ Y=-\dfrac{t}{t^2-1}. & \cdots⑤ \end{cases}$$

④ より $X\neq2$.

④，⑤ より

$$t=-\frac{2Y}{X-2}.$$

これと ④ より

$$t^2-1=\frac{4Y^2}{(X-2)^2}-1=\frac{2}{X-2}.$$

$$\therefore\quad 4Y^2-X(X-2)=0.$$

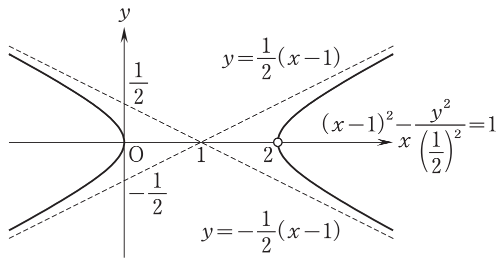
整理して

$$\therefore\quad (X-1)^2-\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1.\quad (X\neq2)$$

よって F は双曲線から 1 点を除いたもの

$$(x-1)^2-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,\quad (x,\ y)\neq(2,\ 0).\quad \cdots(答)$$

これを図示すると右図のようになる．



【別解】

R$(X,\ Y,\ 0)$ とする．Q は直線 PR 上の点だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}X-2\\Y\\-1\end{pmatrix}. \quad (t\ \text{は直線のパラメーター}) \qquad \cdots(*)$$

Q は yz 平面上の点だから，

$$0=2+t(X-2).$$

このとき，$X\fallingdotseq 2$,

$$t=\frac{2}{2-X}.$$

$(*)$ に代入．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{2Y}{2-X}\\ 1-\dfrac{2}{2-X}\end{pmatrix}.$$

点 Q は曲線 $z=y^2\ (x=0)$ 上の点だから，

$$1-\frac{2}{2-X}=\left(\frac{2Y}{2-X}\right)^2,$$

$$\therefore\quad (X-1)^2-\frac{Y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1. \quad (X\fallingdotseq 2)$$

よって F は双曲線

$$(x-1)^2-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

から点 $(2,\ 0)$ を除いたもの． …(答)

図省略

第3問

二辺の長さが1とaの長方形の頂点A，B，C，Dおよび対角線の共有点Eを中心として，半径rの円を5つえがく。どの2つの円の内部も共通部分をもたないようにして半径rを最大にするとき，5つの円が長方形から切りとる面積を$S(a)$とする。

aの関数$\dfrac{S(a)}{a}$のグラフの概形をえがけ。

分　野

数学Ⅰ：平面図形，関数

考え方

aが0に近いとき，極端に大きいときや，長方形が正方形に近いとき，それぞれに対しどの円とどの円が接するかをよく考察すること．場合分けがある．

円と円が外接する条件は半径の和が中心間距離に等しいことである．

【解答】

（図1）のように，半径rの円C，C_1，C_2，C_3を定める．

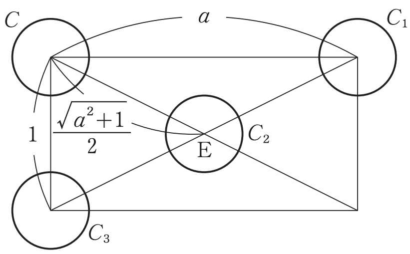
対角線の長さは$\sqrt{a^2+1}$．

CとC_1の内部が共通部分を持たない条件は

$$r \leqq \frac{a}{2}. \qquad \cdots①$$

CとC_2の内部が共通部分をもたない条件は

$$r \leqq \frac{\sqrt{a^2+1}}{4}. \qquad \cdots②$$



（図1）

CとC_3の内部が共通部分をもたない条件は

$$r \leqq \frac{1}{2}. \qquad \cdots③$$

対称性を考慮すれば，rは①，②，③をみたせばよい．rの最大値は$\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{4}$，$\dfrac{1}{2}$のうち最小のものをとればよい．

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{4}\right)^2=\frac{3a^2-1}{16},$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+1}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{a^2-3}{16}$$

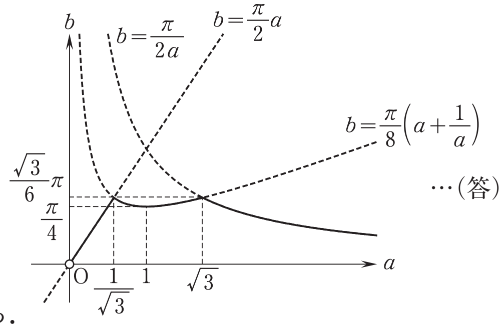
よりrの最大値Rは

$$R=\begin{cases} \dfrac{a}{2} & \left(0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\ のとき\right), \\ \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{4} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq a \leqq \sqrt{3}\ のとき\right), \\ \dfrac{1}{2} & (\sqrt{3}<a\ のとき). \end{cases}$$

$R \leqq \dfrac{a}{2}$，$R \leqq \dfrac{1}{2}$より長方形の対角線の交点Eを中心とする円はつねに長方形の周及び内部に含まれる．

$$\therefore \quad S(a)=4\left(\frac{1}{4}\pi R^2\right)+\pi R^2=2\pi R^2.$$

$$\therefore \quad \frac{S(a)}{a}=\begin{cases} \dfrac{\pi}{2}a & \left(0<a<\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}\right), \\ \dfrac{\pi}{8}\left(a+\dfrac{1}{a}\right) & \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq a\leqq\sqrt{3} \text{ のとき}\right), \\ \dfrac{\pi}{2a} & (\sqrt{3}<a \text{ のとき}). \end{cases}$$



…(答)

したがって，$b=\dfrac{S(a)}{a}$ のグラフは（図２）のようになる．

（図２）

（注）　$y=a+\dfrac{1}{a}$ $(a>0)$ のグラフは基礎解析までの教科書には載っていないのでとまどった人もいるかもしれない．このグラフは次のように $f(a)=a$ と $g(a)=\dfrac{1}{a}$ に対し，各 a ごとに $f(a)+g(a)$ を図形的に読み取って概形を描くことができる．

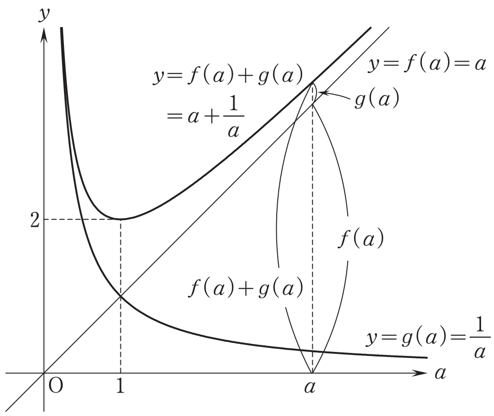
$a+\dfrac{1}{a}$ が $a>0$ において $a=1$ で最小になることは，相加平均・相乗平均の関係を用いて

$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$

（等号は $a=\dfrac{1}{a}$ 即ち $a=1$ のとき成立）

より示せる．

$y=f(a)$ のグラフと，$y=f(a)+g(a)$ のグラフが y 軸の近くで重なって見えるが，ほんのわずか離れている．



（図３）

第４問

正四角錐 V に対し，その底面上に中心をもち，そのすべての辺と接する球がある。底面の一辺の長さを a とするとき，次の量を求めよ。

(1)　V の高さ

(2)　球と錐 V との共通部分の体積

ただし，正四角錐とは，正方形を底面とし，その各辺を底辺とする４つの合同な二等辺三角形と底面とで囲まれる図形とする。

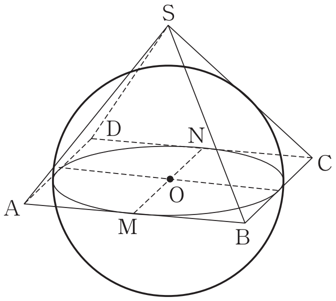
分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：整式の積分，体積

考え方

球と辺が接する条件は中心から辺までの距離が半径に等しいことである．座標を使って計算してもよいが，立体の対称性を利用するとよい．球の中心を通る断面をとって考えるとよい．初等幾何的なアプローチが有効である．正四角錐と球の共通部分の体積は積分で求める．

【解答】



（図１）

底面の正方形を ABCD，対角線の交点を O とする．この球面は O を中心とし，正方形 ABCD に内接するから半径を r とすると

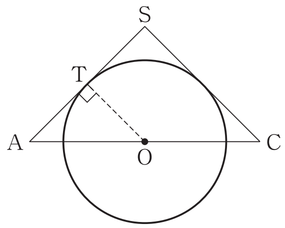
$$r=\frac{1}{2}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}a.$$

(1)　V の頂点を S とし，断面 SAC（図２）を考える．辺 SA と球面の接点を T とする．

$$\begin{cases} \mathrm{OA}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a, \\ \mathrm{OT}=r=\dfrac{1}{2}a, \\ \angle\mathrm{OTA}=90^\circ. \quad \text{（円と直線が接するから）} \end{cases}$$

であるから $\angle\mathrm{SAO}=45^\circ$．他方，対称性から $\angle\mathrm{AOS}=90^\circ$．

$$\therefore\quad V \text{ の高さ } =\mathrm{OS}=\mathrm{OA}=\frac{1}{\sqrt{2}}a. \qquad \cdots\text{(答)}$$



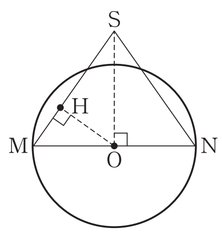
（図２）

(2)　辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とし，平面 MNS による切口（図３）を考える．O から直線 SM に下ろした垂線の足を H とすれば（図３）のようになる．

$$\triangle\mathrm{MOS}=\frac{1}{2}\mathrm{OM}\cdot\mathrm{OS}=\frac{a^2}{4\sqrt{2}},$$

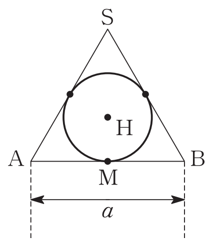
$$\mathrm{SM}=\sqrt{\mathrm{OM}^2+\mathrm{OS}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore\quad \mathrm{OH}=\frac{2\times\triangle\mathrm{MOS}}{\mathrm{SM}}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$



（図３）

この球は V の各辺に接するから，V の側面 SAB との交わりは H を中心とし三角形 SAB の内接円になる．（図４）



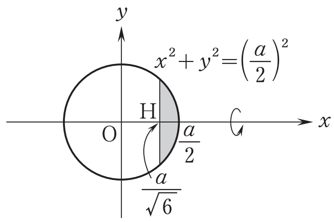
（図４）

（図５）の網掛部を x 軸のまわりに１回転して得られる立体の体積を v とすると

$$v=\pi\int_{\frac{a}{\sqrt{6}}}^{\frac{a}{2}}\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2-x^2\right\}dx$$

$$=\pi\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{a}{\sqrt{6}}}^{\frac{a}{2}}$$

$$=\left(\frac{1}{12}-\frac{7}{36\sqrt{6}}\right)\pi a^3.$$



（図 5 ）

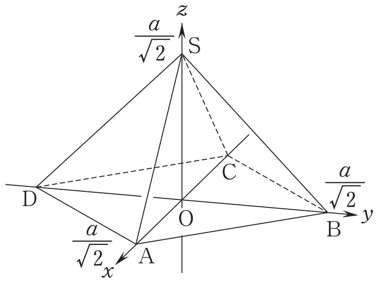
求める立体の体積は

$$(\text{半球の体積})-4v=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3-4\left(\frac{1}{12}-\frac{7}{36\sqrt{6}}\right)\pi a^3$$

$$=\left(\frac{7}{9\sqrt{6}}-\frac{1}{4}\right)\pi a^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】

底面の正方形を ABCD とし，その中心 O を原点，各頂点の座標を $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)$，$B\left(0,\ \frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$C\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0,\ 0\right)$，$D\left(0,\ -\frac{a}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ とおき，四角錐の頂点 S の座標を $(0,\ 0,\ s)$ $(s>0)$ とおく．（図 6 ）



（図 6 ）

(1) xy 平面の直線 AB：$x+y=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$z=0$ と原点 O の距離は $\frac{a}{2}$ である．球の中心は O であるから，球が辺 AB と接するとき，球の半径は $\frac{a}{2}$ である．

このとき，球は辺 BC，CD，DA とも接する．

xz 平面上の直線 SA の方程式は $\frac{\sqrt{2}}{a}x+\frac{z}{s}=1$，$y=0$．直線 SA と球の中心 O の距離は

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{s^2}}}.$$

このとき球 O と直線 SA が接する条件は

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{s^2}}}=\frac{a}{2}. \quad \therefore \quad s=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

このとき球は辺 SB，SC，SD とも接する．
よって高さは

$$\frac{a}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 原点 O と平面 SAB：$x+y+z=\frac{a}{\sqrt{2}}$ の距離は

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

これが**【解答】**の OH の長さである．以下**【解答】**と同じ

1991 年　前期・理科

第 1 問

平面上に正四面体が置いてある。平面と接している面の 3 辺のひとつを任意に選び，これを軸として正四面体をたおす。n 回の操作の後に，最初の平面と接していた面が再び平面と接する確率を求めよ。

分　野

確率・統計：確率，**基礎解析**：数列，漸化式

考え方

n 回の操作の後，最初に平面と接していた面が平面に接する確率を p_n とおき，漸化式をたてる．n 回の操作の後，最初に平面と接していた面が平面に接していない確率は $1-p_n$.

【解答】

最初に平面と接している面を A，n 回目に A が平面と接する確率を p_n とする．$(n+1)$ 回目に A が平面に接するには n 回目に A 以外の面が接していなければならない．また，n 回目に A 以外の面が接しているとき，$(n+1)$ 回目に A が平面に接する確率は $\frac{1}{3}$.

よって

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n).$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{4}\right).$$

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-\frac{1}{4}\right).$$

$p_1=0$ より

$$p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \quad \cdots(答)$$

（注）　問題文中で「最初に接していた面が再び接する確率」の「再び」を「2 度目」の意味に解釈することができる．そのように解釈すると求めるものは 1 回目から $(n-1)$ 回目までは最初に接していた面が接することなく，n 回目に初めて接した確率 P_n となる．

P_n は容易に求められて

$$P_n=\begin{cases} 0 & (n=1 \text{ のとき}), \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right) & (n\geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．

この問題文だと上のように読んだ答案が出ても，これを，間違いであるとすることは出来るであろうか．

第2問

a，b，c を正の実数とする。xyz 空間において，

$$|x|\leqq a,\quad |y|\leqq b,\quad z=c$$

をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ からなる板 R を考える。点光源Pが平面 $z=c+1$ 上の楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad z=c+1$$

の上を一周するとき，光が板 R にさえぎられて xy 平面上にできる影の通過する部分の図をえがき，その面積を求めよ。

分　野

代数・幾何：空間図形

考え方

図形的に取り扱わないと難しい．

板 R 上の点をQ，直線PQが xy 平面と交わる点をQ′とする．PまたはQを止めて考える．

Qを止めて考えると，Q′の軌跡は楕円となり，その後Qを R 上で動かすと，楕円は長方形にそって平行移動する．

また，Pを止めて考えると，Q′は長方形を描く．その後Pを楕円上で動かすと，長方形はその中心が楕円上にあるように平行移動する．

【解答1】　R 上の点Qを止めて考える

点光源Pの座標を $(x,\ y,\ c+1)$，板 R 上の点を $\mathrm{Q}(p,\ q,\ c)$，Qの xy 平面への影を $\mathrm{Q}'(X,\ Y,\ 0)$ とおく．3点P，Q，Q′は一直線上にあるから

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ c+1 \end{pmatrix}=(1-t)\begin{pmatrix} p \\ q \\ c \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{pmatrix}\quad (t\text{ は実数})$$

とおける．

z 成分より

$$c+1=c-ct.\quad \therefore\quad t=-\frac{1}{c}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x=\left(1+\dfrac{1}{c}\right)p-\dfrac{1}{c}X=\dfrac{(c+1)p-X}{c}, \\ y=\left(1+\dfrac{1}{c}\right)q-\dfrac{1}{c}Y=\dfrac{(c+1)q-Y}{c}. \end{cases}$$

これを $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ へ代入して

$$\frac{\{X-(c+1)p\}^2}{a^2c^2}+\frac{\{Y-(c+1)q\}^2}{b^2c^2}=1. \qquad \cdots①$$

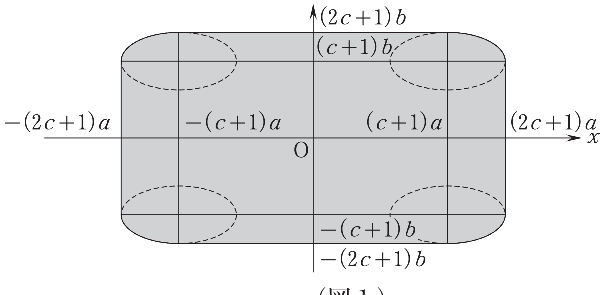
点Q′は中心 $((c+1)p,\ (c+1)q)$，長軸 $2ac$，短軸 $2bc$（それぞれ x 軸，y 軸に平行）の楕円①上を動く．

$|p|\leqq a$，$|q|\leqq b$ より①の中心は，xy 平面上の領域

$$|x|\leqq(c+1)a,\quad |y|\leqq(c+1)b$$

を動く．

よって求める領域は（図1）のようになる．



…(答)

（図1）

求める面積は

$$2a(c+1)2b(c+1)+2\times 2a(c+1)bc$$
$$+2\times 2b(c+1)ac+\pi acbc$$
$$=ab\{\pi c^2+4(c+1)(3c+1)\}. \qquad \cdots(答)$$

【解答 2】 P を止めて考える

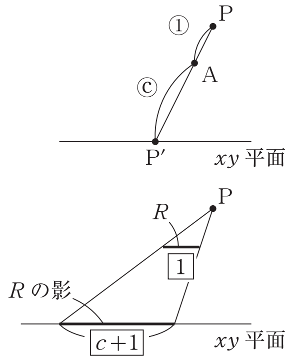
板 R の対角線の交点 $(0,\ 0,\ c)$ を A，直線 AP と xy 平面の交点を P′ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=-c\overrightarrow{\mathrm{AP}}.$$

よって，点 P′ は楕円

$$\frac{x^2}{(ac)^2}+\frac{y^2}{(bc)^2}=1,\quad z=0$$

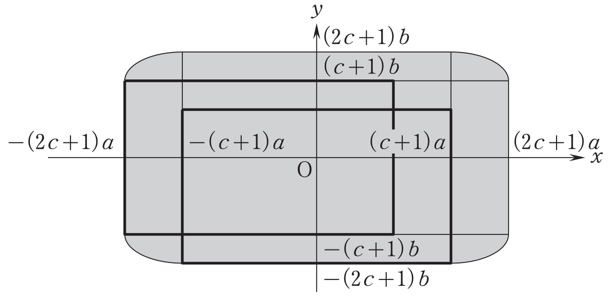
上を動く．



（図 2 ）

点 P を固定した場合，板 R の影は，点 P′ を対角線の交点とし，板 R を $(c+1)$ 倍した長方形（辺は x 軸，y 軸に平行）となる．点 P は常に板 R の上にあるから，この長方形は常に原点を含む．

よって点 P が楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=c$ 上を動くとき，板 R の影は（図 3 ）の領域を描く．



$\cdots$(答)

（図 3 ）

面積計算省略.

第 3 問

定数 p に対して，3 次方程式 $x^3-3x-p=0$ の実数解の中で最大のものと最小のものとの積を $f(p)$ とする。ただし，実数解がただひとつのときには，その 2 乗を $f(p)$ とする。

(1) p がすべての実数を動くとき，$f(p)$ の最小値を求めよ。

(2) p の関数 $f(p)$ のグラフの概形をえがけ。

分 野

微分・積分：微分法

考え方

3 実解（重解は 2 個と数える）をもつときと，1 実解と 2 虚数解をもつときに場合分けする．いずれも $f(p)$ を p で表そうとすると難しい．適当なパラメーターをみつけて，$f(p)$ と p を表す．3 実解をもつときは中間の大きさの解を，虚数解をもつときは実解をパラメーターとするとよい．

【解答】 p，$f(p)$ を適当なパラメーターで表す

(1) $g(x)=x^3-3x$ とおく．

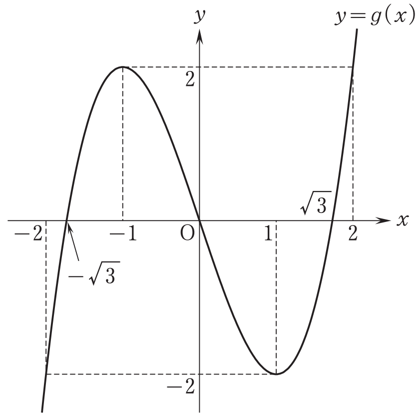
$$g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1),$$

$g(\pm 1)=\mp 2$.（複号同順）

$x=\pm 1$ 以外で，$g(x)=\mp 2$ となるのは $x=\mp 2$.（複号同順）

$y=g(x)$ のグラフは（図１）のようである．

$y=g(x)$ のグラフは原点に関して点対称だから，題意をみたす $f(p)$ は $f(-p)$ に等しい．（$f(p)$ は p の偶関数である）以下 $p\geqq 0$ で考える．



（図１）

(i) $0\leqq p\leqq 2$ のとき，

方程式 $g(x)=p$ は３つの実数解 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)$ をもつ．このとき $f(p)=\alpha\gamma$.

解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-3,\quad \alpha\beta\gamma=p.$$

$y=g(x)$ のグラフから $-1\leqq\beta\leqq 0$.

与方程式から $p=\beta^3-3\beta$.

$f(p)=\alpha\gamma=-3-\beta(\alpha+\gamma)=\beta^2-3$.

以上より

$$f(p)=\beta^2-3,\quad p=\beta^3-3\beta.\quad (-1\leqq\beta\leqq 0)$$

(ii) $p>2$ のとき，

方程式 $g(x)=p$ はただ１つの実数解もつ．この解を t とすると，

$$f(p)=t^2\geqq 0.$$

(i), (ii) より偶関数 $f(p)$ は $\beta=0$ 即ち $p=0$ のとき最小となり，

$$f(p)\ \text{の最小値は}\ -3. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $q=f(p)$ とおく．

(i) $0\leqq p\leqq 2$ のとき，

$$f(p)=\beta^2-3,\quad p=\beta^3-3\beta.\quad (-1\leqq\beta\leqq 0)$$

$$\frac{dp}{d\beta}=3\beta^2-3,$$

$\beta\neq -1$ のとき

$$f'(p)=2\beta\frac{d\beta}{dp}=\frac{2\beta}{3\beta^2-3}\geqq 0.$$

$\beta\to -1+0$ のとき $p\to 2-0$, $\dfrac{dp}{d\beta}\to -0$, $f'(p)\to +\infty$.

$$f''(p)=\frac{d}{d\beta}\left(\frac{2\beta}{3\beta^2-3}\right)\frac{d\beta}{dp}=-\frac{2(\beta^2+1)}{9(\beta^2-1)^3}>0.$$

よって $f(p)$ は $0\leqq p\leqq 2$ で連続，単調増加，下に凸である．

(ii) $p>2$ のとき

方程式 $g(x)=p$ のただ１つの実数解を t とすると，$y=g(x)$ のグラフから $t>2$.

与方程式から $p=t^3-3t$.

$$\therefore\quad f(p)=t^2,\quad p=t^3-3t.\quad (t>2)$$

$$\frac{dp}{dt}=3t^2-3>0,$$

$$f'(p)=2t\frac{dt}{dp}=\frac{2t}{3t^2-3}>0.$$

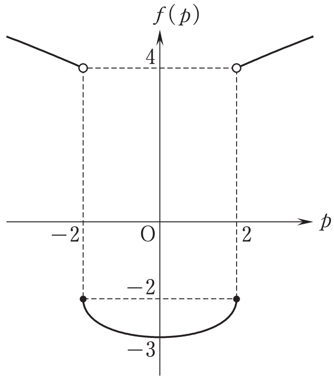
$$f''(p)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{3t^2-3}\right)\frac{dt}{dp}=-\frac{2(t^2+1)}{9(t^2-1)^3}<0.$$

よって $f(p)$ は $p>2$ で連続，単調増加，上に凸である．

$$f(0)=-3,\quad f(2)=-2,\quad \lim_{p\to 2+0}f(p)=\lim_{t\to 2+0}t^2=4,$$

$$\lim_{p\to 2+0}f'(p)=\lim_{t\to 2+0}\frac{2t}{3t^2-3}=\frac{4}{9},\quad \lim_{p\to\infty}f(p)=\lim_{t\to\infty}t^2=+\infty.$$

$q=f(p)$ のグラフは q 軸に関して対称だから $f(p)$ のグラフの概形は（図２）のようになる．



（図２）

(2) の【別解】 p を $q(q=f(p))$ で表す

$p\geqq 0$ のとき p は $q=f(p)$ の式でかける．

(i) $0\leqq p\leqq 2$ のとき，

(1) より

$$q=\beta^2-3,\quad p=\beta^3-3\beta,\quad -1\leqq\beta\leqq 0.$$

$\beta\leqq 0$ より $\beta=-\sqrt{q+3}$．$-3\leqq q\leqq -2$

$$p=-(q+3)^{\frac{3}{2}}+3(q+3)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dp}{dq}=-\frac{3}{2}(q+3)^{-\frac{1}{2}}(q+2)>0,\quad \frac{d^2p}{dq^2}=-\frac{3}{4}(q+3)^{-\frac{3}{2}}(q+4)<0,$$

$$\lim_{q\to -3+0}\frac{dp}{dq}=+\infty,\quad \lim_{q\to -2}\frac{dp}{dq}=+0.$$

(ii) $p>2$ のとき，

ただ１つの実数解を t とする．

$$q=t^2,\quad p=t^3-3t,\quad t>2.$$

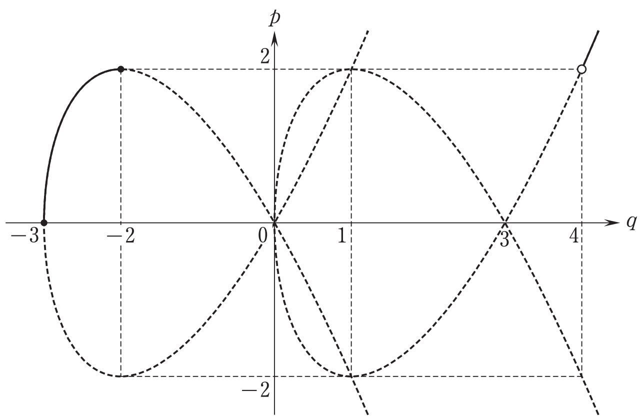
$t>2$ より $t=\sqrt{q}$．$q>4$．

$$p=q^{\frac{3}{2}}-3q^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{dp}{dq}=\frac{3}{2}q^{-\frac{1}{2}}(q-1)>0,\quad \frac{d^2p}{dq^2}=\frac{3}{4}q^{-\frac{3}{2}}(q+1)>0,$$

$$\lim_{q\to 4+0}\frac{dp}{dq}=\frac{9}{4}>0,\quad \lim_{q\to\infty}\frac{dp}{dq}=+\infty.$$

以上より $p\geqq 0$ のときグラフは次のようになる．



（図３）

$p\leqq 0$ のときのグラフは（図３）と q 軸について対称であるから，求める図形は**【解答】**のようになる．

第4問

(1) 自然数 $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，ある多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ が存在して，

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta,$$
$$\cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

と書けることを示せ。

(2) このとき，$n>1$ ならば次の等式が成立することを証明せよ。

$$p_n{}'(x) = nq_{n-1}(x),$$
$$q_n{}'(x) = -np_{n-1}(x)$$

分　野

基礎解析：数学的帰納法

考え方

数学的帰納法で証明．加法定理で $n\theta$ の式から $(n+1)\theta$ の式を導く．(2) は両辺を θ で微分したものと，もとの式を比較，(1) の漸化式も利用．あるいは，(1) の漸化式を微分して数学的帰納法に持ち込んでもよい．

【解答】

(1)

$$\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \qquad \cdots①$$
$$\cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta. \qquad \cdots②$$

（ただし $p_n(x)$，$q_n(x)$ は多項式）

①，② が成り立つような多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ が存在することを数学的帰納法で証明する．

(I) $n=1$ のとき，

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$，$\cos\theta = 1\times\cos\theta$ から，$p_1(x)=x$，$q_1(x)=1$ とすれば ①，② は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき ①，② が成り立つとする．

$\sin k\theta = p_k(\tan\theta)\cos^k\theta$，　$\cos k\theta = q_k(\tan\theta)\cos^k\theta$．（ただし $p_k(x)$，$q_k(x)$ は多項式）

$$\begin{aligned}\sin(k+1)\theta &= \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta\\ &= p_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta + q_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta\\ &= \{p_k(\tan\theta) + q_k(\tan\theta)\tan\theta\}\cos^{k+1}\theta\end{aligned}$$

よって

$$p_{k+1}(x) = p_k(x) + xq_k(x) \qquad \cdots③$$

とおけば $p_{k+1}(x)$ は多項式で $\sin(k+1)\theta$ は ① の形に表せる．同様に，

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\theta &= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta\\ &= q_k(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta - p_k(\tan\theta)\cos^k\theta\sin\theta\\ &= \{q_k(\tan\theta) - p_k(\tan\theta)\tan\theta\}\cos^{k+1}\theta\end{aligned}$$

よって

$$q_{k+1}(x) = q_k(x) - xp_k(x) \qquad \cdots④$$

とおけば $q_{k+1}(x)$ は多項式で $\cos(k+1)\theta$ は ② の形に表せる．

以上より $n=k+1$ においても ①，② が成り立つ．

(I)，(II) より ①，② は任意の自然数 n で成り立つ．　（証明終り）

(2) ① の両辺を θ で微分すると，

$$\begin{aligned}n\cos n\theta &= p_n{}'(\tan\theta)(\tan\theta)'\cos^n\theta + p_n(\tan\theta)\,n\cos^{n-1}\theta(-\sin\theta)\\ &= p_n{}'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta - np_n(\tan\theta)\cos^n\theta\tan\theta\\ &= p_n{}'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta - n\{p_{n-1}(\tan\theta) + (\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta\tan\theta. \quad (③ より) \cdots⑤\end{aligned}$$

また ② より

$$n\cos n\theta = nq_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

$$=n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta. \qquad (④ より) \cdots ⑥$$

⑤，⑥ より

$$p_n'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta-n\{p_{n-1}(\tan\theta)+(\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta\tan\theta$$
$$=n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta.$$

よって

$$\begin{aligned}p_n'(\tan\theta)&=n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^2\theta\\&\quad+n\{p_{n-1}(\tan\theta)+(\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^2\theta\tan\theta\\&=n(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta q_{n-1}(\tan\theta)\\&=nq_{n-1}(\tan\theta).\end{aligned}$$

よって

$$p_n'(x)=nq_{n-1}(x). \qquad \cdots(*)$$

また同様に ② の両辺を θ で微分すると，

$$\begin{aligned}-n\sin n\theta&=q_n'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta-nq_n(\tan\theta)\cos^n\theta\tan\theta\\&=q_n'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta-n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta\tan\theta. \qquad (④ より) \cdots ⑦\end{aligned}$$

また ① より

$$\begin{aligned}-n\sin n\theta&=-np_n(\tan\theta)\cos^n\theta\\&=-n\{p_{n-1}(\tan\theta)+(\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta. \qquad (③ より) \cdots ⑧\end{aligned}$$

⑦，⑧ より

$$q_n'(\tan\theta)\cos^{n-2}\theta-n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta\tan\theta$$
$$=-n\{p_{n-1}(\tan\theta)+(\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^n\theta.$$

よって

$$\begin{aligned}q_n'(\tan\theta)&=-n\{p_{n-1}(\tan\theta)+(\tan\theta)q_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^2\theta\\&\quad+n\{q_{n-1}(\tan\theta)-(\tan\theta)p_{n-1}(\tan\theta)\}\cos^2\theta\tan\theta\\&=-np_{n-1}(\tan\theta).\end{aligned}$$

よって

$$q_n'(x)=-np_{n-1}(x). \qquad \cdots(**)$$

(*)，(**) より題意は証明された． （証明終り）

(2) の【別解】　多項式 $p_n(x)$，$q_n(x)$ を x で微分して数学的帰納法

$$p_n'(x)=nq_{n-1}(x). \qquad \cdots(*)$$
$$q_n'(x)=-np_{n-1}(x). \qquad \cdots(**)$$

(*)，(**) が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=2$ のとき，

$p_1(x)=x$，$q_1(x)=1$，③，④ より

$$p_2(x)=p_1(x)+xq_1(x)=2x,\quad q_2(x)=q_1(x)-xp_1(x)=1-x^2.$$
$$\therefore\quad p_2'(x)=2=2q_1(x),\quad q_2'(x)=-2x=-2p_1(x).$$

(II)　$n=k$ $(\geqq 2)$ のとき (*)，(**) が成り立つとする．つまり

$$p_k'(x)=kq_{k-1}(x).\quad q_k'(x)=-kp_{k-1}(x). \qquad \cdots ⑨$$

③ の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}p_{k+1}'(x)&=p_k'(x)+q_k(x)+xq_k'(x)\\&=kq_{k-1}(x)+q_k(x)-xkp_{k-1}(x) \qquad (⑨ より)\\&=k(q_{k-1}(x)-xp_{k-1}(x))+q_k(x)\\&=(k+1)q_k(x). \qquad (④ で k を k-1 に置き換えて)\end{aligned}$$

同様に，④ の両辺を微分すると

$$q_{k+1}'(x)=q_k'(x)-p_k(x)-xp_k'(x)$$

$$=-kp_{k-1}(x)-p_k(x)-xkq_{k-1}(x) \qquad (⑨ より)$$
$$=-(k+1)p_k(x) \qquad (③ で k を k-1 に置き換えて)$$

よって，$n=k+1$ のときも，(*)，(**) が成立つ．

(I)，(II) より，(*)，(**) は 2 以上の自然数 n について成り立つ．　(証明終り)

第 5 問

xy 平面上，x 座標，y 座標がともに整数であるような点 $(m,\ n)$ を格子点とよぶ。

各格子点を中心として半径 r の円がえがかれており，傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

分　野

数学 I ：平面図形，整数

考え方

直線と円が交わる条件は円の中心と直線の距離が半径より小さいことである．任意の直線が円のどれかと共有点をもつということは，直線と円の中心の距離の最小値が常に r より小さいか等しいということである．つまり，r は，直線と格子点の距離の最小値の最大値より小さくない．よって r の最小値は，直線と格子点の距離の最小値の最大値である．直線と格子点の距離のとりうる値は限られた跳び跳びの値をとる．そのことを整数の性質（$2m-5n$ がすべての整数をとること）を使うか，図形的に読み取るかして表すことがポイント．

【解答】 $2m-5n$ はすべての整数をとりうる．

傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線の方程式は $2x-5y=k$ とかける．この直線を l とする．l が格子点 $(m,\ n)$ を中心とする円と共有点をもつ条件は，点 $(m,\ n)$ と直線 l の距離が r 以下であることである．

$$\therefore \quad r \geqq \frac{|2m-5n-k|}{\sqrt{29}}.$$

m，n が整数全体をとって変わるとき $2m-5n$ は整数全体をとりうるから（$n=0$ のとき偶数全体をとり，$n=1$ のとき奇数全体をとる），k に最も近い整数（の 1 つ）を N とすると，$|2m-5n-k|$ の最小値は $|N-k|$ である．よって，直線 l が半径 r の円のどれかと共有点ををもつ条件は

$$r \geqq \frac{|N-k|}{\sqrt{29}}. \qquad \cdots ①$$

k に最も近い整数（の 1 つ）が N だから $k-\dfrac{1}{2} \leqq N \leqq k+\dfrac{1}{2}$.

よって，$|N-k| \leqq \dfrac{1}{2}$ であり，等号が成立することがある．

したがって，任意の実数 k に対して ① が成り立つ条件は，

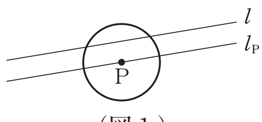
$$r \geqq \frac{1}{2\sqrt{29}}.$$

よって，r の最小値は

$$\frac{1}{2\sqrt{29}}. \qquad \cdots (答)$$

【別解 1】　l_{P} に最も近い格子点

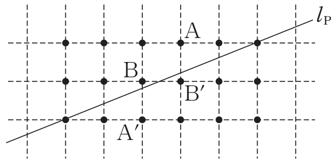
傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線を l，格子点 P を中心とし，半径 r の円を C_{P}，P を通り傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線を l_{P} とする．



（図 1）

l と円 C_{P} が共有点をもつ条件は，平行 2 直線 l と l_{P} の距離が r 以下であることである．

l_{P} は格子点 P によって定まり，無数にある．それらの並び方を調べる．l_{P} 上の格子点は x 座標が 5 の幅で等間隔に並んでいる．したがって，l_{P} にそって図形を x 方向に 5，y 方向に 2 だけ平行移動しても図形は変らない．よって，l_{P} 上のとなりあった格子点の間（x 座標の差 5）で考えればよい．l_{P} 上のとなりあった格子点の間で l_{P} に近い格子点を図示すると（図 2）のようになる．明らかに A より B が l_{P} に近い．l_{P} に最も近い点は B（B′ でもよい）．点 B と直線 l_{P} の距離は点 $(2,\ 1)$ と直線 $y=\dfrac{2}{5}x$ の距離 $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ に等しい．



（図 2）

格子点を通る傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線はすべて $\dfrac{1}{\sqrt{29}}$ の間隔で等間隔に並ぶ．

傾き $\dfrac{2}{5}$ の任意の直線 l と l に最も近い格子点を通る傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線 l_{P} との距離は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ 以下で，l を適当にとれば $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ とすることができる．

よって，円の半径 r を $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ 以上にとると，l をどのようにとっても l と l_{P} の距離が r 以下になるような l_{P} があり，直線 l は円 C_{P} のどれかと共有点をもつ．

r が $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ より小さいときは，l と l_{P} の距離を $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ にすれば l は C_{P} のどれとも共有点をもたない．

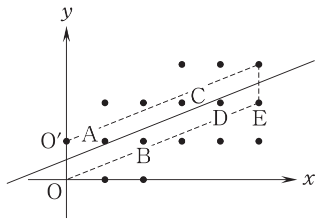
よって r の最小値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$．　…(答)

【別解 2】　格子点との距離のグラフで見る

傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線 l を y 軸の正方向へ 1 だけ平行移動した直線を l' とすると，l に最も近い格子点の距離は l' に最も近い格子点の距離に等しい．

また，格子点 $\mathrm{P}(m,\ n)$ と l の距離は，$\mathrm{P}'(m+5,\ n+2)$ と l の距離に等しい．

よって，直線 l は y 切片が 0 から 1 までのものを考えればよく，格子点は x 座標が 0 から 5 までのものを考えればよい．



（図 3）

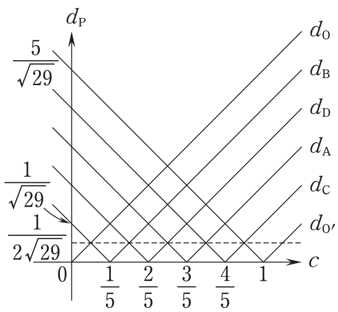
$0\leqq x\leqq 5$，$\dfrac{2}{5}x\leqq y\leqq\dfrac{2}{5}x+1$ にある格子点を（図 3）のように O(0, 0)，A(1, 1)，B(2, 1)，C(3, 2)，D(4, 2)，E(5, 2) と定める．

$$l:y=\frac{2}{5}x+c\quad(0\leqq c\leqq 1)$$

とおき，点 $\mathrm{P}(m,\ n)$ と直線 l の距離を d_{P} とする．

$$d_{\mathrm{P}}=\frac{|2m-5n+5c|}{\sqrt{29}}$$

である．例えば，$d_{\mathrm{A}}=\dfrac{|2-5+5c|}{\sqrt{29}}$ である．d_{O}，d_{A}，d_{B}，d_{C}，d_{E}，$d_{\mathrm{O'}}$



（図 4）

を l の y 切片 c の関数としてかくと，（図４）のようになる．

d_O，d_B，d_D，d_A，d_C，$d_{O'}$ のグラフがこの順に等間隔に並ぶ．

隣り合うグラフの交点の d_P の値はすべて $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である．つまり $0\leqq c\leqq\dfrac{1}{10}$ のとき最も近い格子点はOで，$c=\dfrac{1}{10}$ のとき，$d_O=d_B=\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ となる．$\dfrac{1}{10}\leqq c\leqq\dfrac{3}{10}$ のとき，l に最も近い格子点はBで，$c=\dfrac{3}{10}$ のとき，$d_B=d_D=\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ となる．以下同様にして，最も近い格子点がD，A，C，O′ となるが，2つの格子点までの距離が等しいときの距離は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である．

グラフからわかるように，常に P＝O，A，B，C，D，E，O′ の中に必ず $d_P\leqq\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ のものが存在する．したがって，l に最も近い格子点までの距離の最大値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である．

したがって，条件をみたす r の最小値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$.　…(答)

第６問

$f(x)$ は $x>0$ で定義された連続な関数で，$0<x_1<x_2$ ならば，つねに $f(x_1)>f(x_2)>0$ であるものとし，

$$S(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$$

とおく。このとき，$S(1)=1$ であり，さらに任意の $a>0$ に対して，原点と点 $(a,\ f(a))$，原点と点 $(2a,\ f(2a))$ を結ぶ２直線と曲線 $y=f(x)$ とで囲まれる部分の面積は $3S(a)$ に等しいものとする。

⑴　$S(x)$，$f(x)-2f(2x)$ をそれぞれ x の関数として表せ。

⑵　$x>0$ に対して，$a(x)=\lim_{n\to\infty}2^nf(2^nx)$ とおく。積分

$$\int_x^{2x}a(t)\,dt$$

の値を求めよ。

⑶　関数 $f(x)$ を決定せよ。

分　野

微分・積分：関数方程式

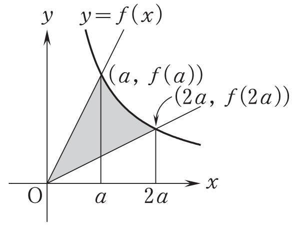
考え方

与えられた領域の面積は a，$f(a)-2f(2a)$ と $S(a)$ で表せる．また積分の上端下端が x の式で表せるから，これを微分すると $S'(x)$ は $f(x)-2f(2x)$ で表せる．これから $S(x)$ についての微分方程式を解き，$S(x)$，$f(x)-2f(2x)$ を求める．

⑵のポイントは $f(x)-2f(2x)$ を関数列 $\{2^nf(2^nx)\}$ の階差関数列として処理することである．$a(x)$ の積分が0になるように誘導されている．この計算があわないと⑶に進めない．

【解答】

(1)　$S(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$ の両辺を微分すると



$$S'(x)=2f(2x)-f(x). \qquad \cdots ①$$

$f(x)$ は減少関数で常に正だから $f(x)$ のグラフは右図のようになる．網掛部の面積が $3S(a)$ となることより，

$$3S(a)=\frac{1}{2}af(a)+\int_a^{2a} f(t)\,dt-\frac{1}{2}2af(2a)$$

$$=S(a)+\frac{1}{2}a\{f(a)-2f(2a)\}.$$

$$\therefore\quad 2S(a)=\frac{1}{2}a\{f(a)-2f(2a)\}. \qquad \cdots ②$$

① より

$$2S(x)=-\frac{1}{2}xS'(x).$$

$S(x)>0$ に注意して，

$$\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{4}{x}.\quad \therefore\quad \int\frac{S'(x)}{S(x)}\,dx=-4\int\frac{dx}{x}.$$

$$\therefore\quad \log S(x)=-4\log x+C\quad (C \text{ は積分定数}).$$

$S(1)=1$ より $C=0$.

$$\therefore\quad S(x)=\frac{1}{x^4}. \qquad \cdots(\text{答})$$

② より

$$f(x)-2f(2x)=\frac{4}{x}S(x)=\frac{4}{x^5}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　(1) の答の式の x に $2^{k-1}x\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を順次代入して両辺を 2^{k-1} 倍した式を並べて，辺々加える．

$$f(x)-\ 2f(2x)=\frac{4}{x^5}$$

$$2f(2x)-2^2f(2^2x)=\frac{4}{(2x)^5}\times 2\qquad =\frac{4}{x^5}\times\frac{1}{16}$$

$$2^2f(2^2x)-2^3f(2^3x)=\frac{4}{(2^2x)^5}\times 2^2\qquad =\frac{4}{x^5}\times\left(\frac{1}{16}\right)^2$$

$$\cdots$$

$$+)\ 2^{n-1}f(2^{n-1}x)-2^nf(2^nx)=\frac{4}{(2^{n-1}x)^5}\times 2^{n-1}=\frac{4}{x^5}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$$

$$f(x)-2^nf(2^nx)=\frac{4}{x^5}\left\{1+\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{4}{x^5}\times\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1-\frac{1}{16}}=\frac{64}{15x^5}\left(1-\frac{1}{16^n}\right).$$

$$\therefore\quad a(x)=\lim_{n\to\infty}2^nf(2^nx)=\lim_{n\to\infty}\left\{f(x)-\frac{64}{15x^5}\left(1-\frac{1}{16^n}\right)\right\}=f(x)-\frac{64}{15x^5}. \qquad \cdots ③$$

これを区間 $[x,\ 2x]$ で積分する．

$$\int_x^{2x} a(t)\,dt=\int_x^{2x} f(t)\,dt-\int_x^{2x}\frac{64}{15t^5}\,dt=S(x)-\frac{64}{15}\left[-\frac{1}{4t^4}\right]_x^{2x}=\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^4}=0. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) $f(x)$ の定義から $f(2^n x)>0$．よって $a(x)=\lim_{n\to\infty}2^n f(2^n x)\geqq 0$．

また，$f(x)$ は連続だから ③ より $a(x)$ も連続．

(2) より $\int_x^{2x}a(t)\,dt=0$，$a(x)\geqq 0$ より任意の x (>0) について $a(t)$ は区間 $[x,\,2x]$ で恒等的に 0．

よって，すべての x (>0) について $a(x)=0$．

したがって，③ より

$$f(x)=\frac{64}{15x^5}. \qquad \cdots(答)$$

(参考)　直接 $f(x)$ が求められる

次のようにすれば $f(x)$ を直接求めることができる．

② まで**【解答】**と同じ．$f(x)$ の原始関数を $g(x)$ とする．

$$S(x)=g(2x)-g(x)=\frac{x}{4}(f(x)-2f(2x)).$$

$$\therefore\quad g(2x)+\frac{2x}{4}f(2x)=g(x)+\frac{x}{4}f(x).$$

$F(x)=g(x)+\dfrac{x}{4}f(x)$ とおくと，$F(x)$ が連続関数であることに注意して，

$$F(x)=F\left(\frac{x}{2}\right)=F\left(\frac{x}{2^2}\right)=\cdots=F\left(\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{x\to 0}F(x)=(\text{定数}).$$

$F(x)$ を微分して

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{4}f(x)+\frac{x}{4}f'(x)=\frac{5}{4}f(x)+\frac{x}{4}f'(x)=0.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{5}{x}. \quad (f(x)>0)$$

両辺の原始関数をとって

$$\log f(x)=-5\log x+c. \quad (c\text{ は積分定数})$$

よって，

$$f(x)=\frac{C}{x^5}. \quad (C=e^c)$$

$S(1)=1$ より，

$$S(1)=\int_1^2\frac{C}{x^5}\,dx=\left[\frac{C}{-4x^4}\right]_1^2=\frac{15C}{64}=1.$$

$$\therefore\quad C=\frac{64}{15}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{64}{15x^5}.$$

これを使えば

$$S(x)=\int_x^{2x}\frac{64}{15t^5}\,dx=\frac{1}{x^4},$$

$$f(x)-2f(2x)=\frac{64}{15x^5}-\frac{4}{15x^5}=\frac{4}{x^5},$$

$$a(x)=\lim_{n\to\infty}2^n f(2^n x)=\lim_{n\to\infty}\frac{64}{15\times 2^{4n}x^5}=0$$

などが導ける．

1991 年　後期・理科 I 類

第 1 問

(1)　$x>0$ において，関数 $\dfrac{\log x}{x}$ の増減を調べよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。

(2)　正整数 a，b の組で，$a^b=b^a$ かつ $a \neq b$ を満たすものをすべて求めよ。

(3)　$3^x=x^3$ を満たす正の有理数は，3 以外には存在しないことを示せ。

分　野

数学 I：整数，　**微分・積分**：微分法

考え方

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，(2) は $f(a)=f(b)$ の形になる．a または b の範囲に注目．

(3) は条件をみたす有理数 x を $x=\dfrac{n}{m}$（n，m は互いに素な正整数）とおき，まず $m=1$ を示し，次に (2) の利用を考える．

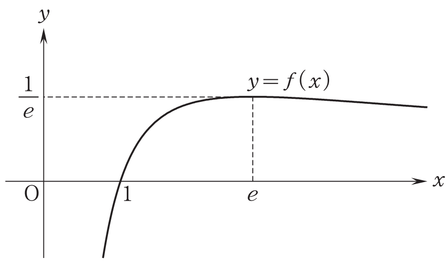
【解答】

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおく．$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より $f(x)$ の増減は，下表のようになる．

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0$，$f(e)=\dfrac{1}{e}$.

$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようである．（グラフを正確にかくと，一見 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ のようには見えない．ゆっくり 0 に近づく．）



$a^b=b^a$ の両辺の対数をとると

$$b\log a=a\log b.$$

$$\therefore\quad \frac{\log a}{a}=\frac{\log b}{b}.\quad \therefore\quad f(a)=f(b).$$

$a<b$ とすると，グラフより $1<a<e<b$．a は整数だから $a=2$．このときグラフより，$f(2)=f(b)$ をみたす b（$>e$）はただ 1 つ存在する．$2^4=4^2$ より $b=4$ がその数である．$a>b$ の場合も含めて求める a，b の組は

$$(a,\ b)=(2,\ 4)\ \text{または}\ (a,\ b)=(4,\ 2).$$ …(答)

(3)　$3^x=x^3$ をみたす正の有理数 x を $x=\dfrac{n}{m}$（n，m は互いに素な自然数）とおく．

$3^x=x^3$ より $3^{\frac{n}{m}}=\left(\dfrac{n}{m}\right)^3$.

$$\therefore\quad 3^n=\left(\frac{n}{m}\right)^{3m}.$$

左辺は整数で m と n は互いに素だから $m=1$.

$$\therefore \quad 3^n = n^3.$$

(2) より，これをみたす自然数 n は 3 だけである．

よって，$x = \dfrac{n}{m} = 3$.

$3^x = x^3$ をみたす正の有理数は 3 以外には存在しない． （証明終り）

第2問

平面上に 3 つの円 C_1，C_2，C_3 があって，C_1 と C_2 は相異なる 2 点 A，B で交わり，C_3 は C_1 および C_2 と互いに直交している。ただし，2 つの円が互いに直交しているとは，2 つの円に共通点があって，各共通点におけるそれぞれの円に対する接線がその共通点で直交しているときをいう。

(1) 円 C_3 の中心は，2 点 A，B を通る直線上にあることを示せ。

(2) 2 点 A，B の一方は円 C_3 の内側に，他方は円 C_3 の外側にあることを示せ。

分　野

数学Ⅰ：平面図形

考え方

直線 AB と C_1，C_2 の中心を通る直線を座標軸に選ぶとよい．与条件を順次式にたててゆけばよい．2 円の直交条件は 2 円の半径と中心間の距離で表せる．

【解答】 座標をとって考える

(1) C_1，C_2 の中心は線分 AB の垂直二等分線上にある．

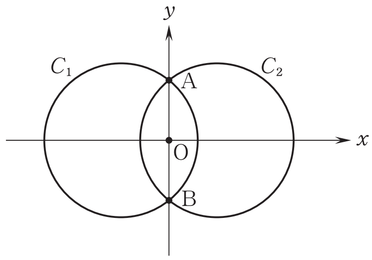
xy 平面および a，c_1，c_2 を

$$A(0,\ a),\quad B(0,\ -a),$$
$$C_1 \text{ の中心 } O_1(c_1,\ 0),$$
$$C_2 \text{ の中心 } O_1(c_2,\ 0)\quad (c_1 \neq c_2)$$

となるようにとる．このとき

$$C_1 \text{ の半径は } r_1 = \sqrt{a^2 + {c_1}^2},$$
$$C_2 \text{ の半径は } r_2 = \sqrt{a^2 + {c_2}^2}$$

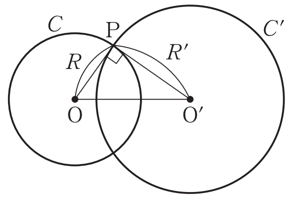
となる．



（図 1 ）

一般に，2 円 C，C' が直交するとき，中心をそれぞれ O，O′，半径を R，R' とし交点の 1 つを P とすると，

$$\angle OPO' = 90°.$$
$$\therefore \quad R^2 + R'^2 = OO'^2. \quad \cdots①$$



（図 2 ）

C_3 の中心を $O_3(p,\ q)$ とおき，半径を r とする．

C_1 と C_3 が直交するから ① より ${r_1}^2 + r^2 = O_1{O_3}^2$.

$$(a^2 + {c_1}^2) + r^2 = (p - c_1)^2 + q^2. \quad \cdots②$$

C_2 と C_3 が直交するから ① より ${r_2}^2 + r^2 = O_2{O_3}^2$.

$$(a^2 + {c_2}^2) + r^2 = (p - c_2)^2 + q^2. \quad \cdots③$$

②−③ より

$$ {c_1}^2 - {c_2}^2 = -2(c_1 - c_2)p + {c_1}^2 - {c_2}^2.$$
$$\therefore \quad 2(c_1 - c_2)p = 0.$$

$c_1 \neq c_2$ より

$$p=0.$$

よって円 C_3 の中心は $(0,\ q)$ となり，直線 AB 上にある．（証明終り）

(2) $p=0$，② より

$$r^2=q^2-a^2.$$

したがって C_3 の方程式は $x^2+(y-q)^2=q^2-a^2$ すなわち

$$x^2+y^2-2qy+a^2=0.$$

ここで $F(x,\ y)=x^2+y^2-2qy+a^2$ とおくと，$F(x,\ y)>0$ なら点 $(x,\ y)$ は円 C_3 の外側にあり，$F(x,\ y)<0$ なら点 $(x,\ y)$ は円 C_3 の内側にある．

$$F(0,\ a)F(0,\ -a)=(2a^2-2aq)(2a^2+2aq)=4a^2(a^2-q^2)=-4a^2r^2<0.$$

よって，$\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(0,\ -a)$ の一方は円 C_3 の内側に，他方は円 C_3 の外側にある．（証明終り）

【別解】 方べきの定理の利用

(1) 円 C_1，C_2，C_3 の中心を $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$，$\mathrm{O_3}$ とし，C_3 と C_1，C_2 との交点の 1 つを $\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$ とすると直交条件より

$$\angle \mathrm{O_3T_1O_1}=\angle \mathrm{O_3T_2O_2}=90^\circ.$$

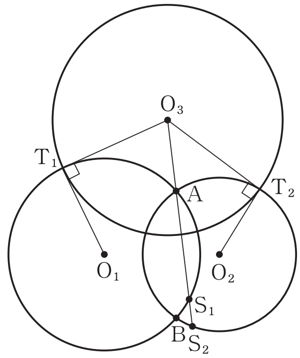
$$\mathrm{O_3T_1}=\mathrm{O_3T_2}\ （=\text{円 } C_3 \text{ の半径}）.$$

中心 $\mathrm{O_3}$ は円 C_1，C_2 の外側にある．

もし $\mathrm{O_3A}=\mathrm{O_3T_1}(=\mathrm{O_3T_2})$ とすると，直線 $\mathrm{O_3A}$ は C_1，C_2 の接線となり，C_1，C_2 が点 A で接することになり，C_1，C_2 が相異なる 2 点で交わることに矛盾する．

$$\therefore\quad \mathrm{O_3A}\neq\mathrm{O_3T_1}.$$

よって直線 $\mathrm{O_3A}$ は A 以外のもう一点で C_1，C_2 と交わる．



（図 3）

これらを $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ とすると，方べきの定理より，

$$\mathrm{O_3A}\cdot\mathrm{O_3S_1}=\mathrm{O_3T_1}^2=\mathrm{O_3T_2}^2=\mathrm{O_3A}\cdot\mathrm{O_3S_2}. \quad \cdots ④$$

$$\therefore\quad \mathrm{O_3S_1}=\mathrm{O_3S_2}.$$

直線 $\mathrm{O_3A}$ 上で，$\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ は $\mathrm{O_3}$ に関して A と同じ側にある．よって $\mathrm{S_1}$，$\mathrm{S_2}$ は一致し，また B にも一致する．したがって，円 C_3 の中心 $\mathrm{O_3}$ は，A，B を通る直線上にある．（証明終り）

(2) C_3 の半径を r とすると，④ より

$$\mathrm{O_3A}\cdot\mathrm{O_3B}=\mathrm{O_3T_1}^2=r^2.$$

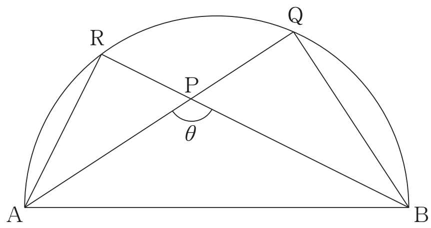
$\mathrm{O_3A}\neq\mathrm{O_3B}$ であるから，一方は r より小さく，他方は r より大きい．したがって，2 点 A，B の一方は円 C_3 の内側に，他方は円 C_3 の外側にある．（証明終り）

第 3 問

xy 平面上の長さ 2 の線分 AB を直径とする半円を D とする。半円 D の内部（周を含まない）の一点を P とする。A と P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を Q とし，B と P を通る直線と半円 D の円弧の部分との交点を R とする。五角形 ARPQB の面積を S とおく。

(1) $\angle \mathrm{APB}$ を一定に保ったまま点 P が半円 D の内部を動くとき，S のとる値の範囲を，$\angle \mathrm{APB}=\theta$ を使って表わせ。

(2) 点 P が，半円 D の内部を自由に動くとき，S のとる値の範囲を求めよ。



分　野

微分・積分：微分法，最大・最小，**数学Ⅰ**：三角比，**基礎解析**：三角関数，和積・積和公式

考え方

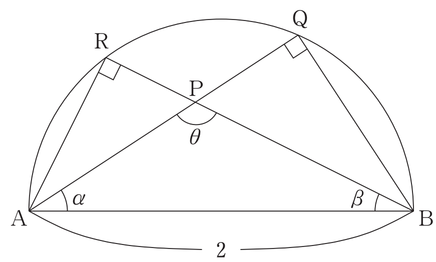
$\angle\mathrm{QAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{ABR}=\beta$ とおくと $\alpha+\beta+\theta=\pi$．求める面積を α，β，θ でかき，α，β の対称性を利用するか，α，β の一方を消去すれば S の増減がみえてくる．

θ の値によって増減が異なるので注意を要する．

(2) は微分計算．最大値を与える角の具体的な値は求められない．

【解答】 $S=\triangle\mathrm{ABQ}+\triangle\mathrm{ABR}-\triangle\mathrm{ABP}$

(1) P は半円 D の内部にあるから $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$.



（図１）

$\angle\mathrm{PAB}=\alpha$，$\angle\mathrm{PBA}=\beta$ とおくと

$$\alpha>0,\quad \beta>0,\quad \alpha+\beta=\pi-\theta. \qquad \cdots①$$

$\mathrm{AQ}=2\cos\alpha$，$\mathrm{BQ}=2\sin\alpha$ より

$$\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{1}{2}\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha.$$

同様に，$\triangle\mathrm{ABR}=\sin2\beta$.

また，三角形 PAB について正弦定理より

$$\frac{2}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{PB}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{PA}}{\sin\beta}.$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta=\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\theta}.$$

よって

$$\begin{aligned}S&=\triangle\mathrm{ABQ}+\triangle\mathrm{ABR}-\triangle\mathrm{PAB}\\&=\sin2\alpha+\sin2\beta-\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\theta}\\&=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{\sin\theta}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}\\&=\left(2\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}\right)\cos(\alpha-\beta)-\frac{\cos\theta}{\sin\theta} &&\text{（① より）}\\&=-\frac{\cos2\theta}{\sin\theta}\cos(\alpha-\beta)-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. &&\cdots②\end{aligned}$$

① より $\alpha-\beta=2\alpha-(\pi-\theta)$．$\alpha$ の範囲は $0<\alpha<\pi-\theta$．よって $-(\pi-\theta)<\alpha-\beta<\pi-\theta$.

$\cos(\alpha-\beta)$ のとりうる範囲は

$$-\cos\theta=\cos(\pi-\theta)<\cos(\alpha-\beta)\leqq1. \qquad \cdots③$$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$.

$$\begin{cases} \cos 2\theta < 0 & \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi \text{ のとき}\right) \\ \cos 2\theta = 0 & \left(\theta = \dfrac{3}{4}\pi \text{ のとき}\right) \\ \cos 2\theta > 0 & \left(\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \pi \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

②，③ より，S のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi \text{ のとき，} -\sin 2\theta < S \leqq -\dfrac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\sin\theta}. \\ \theta = \dfrac{3}{4}\pi \quad \text{ のとき，} S = 1. \\ \dfrac{3}{4}\pi < \theta < \pi \text{ のとき，} -\dfrac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\sin\theta} \leqq S < -\sin 2\theta. \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2)
$$f(\theta) = -\sin 2\theta, \quad g(\theta) = -\frac{\cos 2\theta + \cos\theta}{\sin\theta} = 2\sin\theta - \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

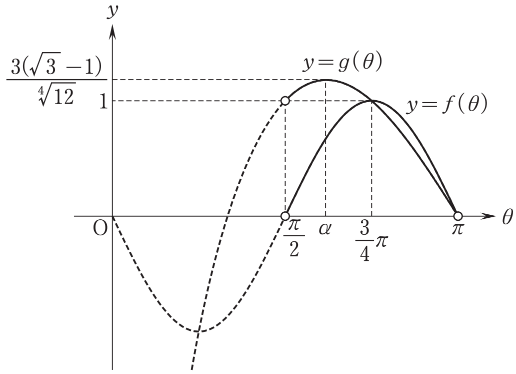
とおく．

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より $0 < f(\theta) \leqq 1$.

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 2\cos\theta + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \\ &= 2\cos\theta + \frac{1}{1-\cos\theta} \\ &= -\frac{2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1}{1-\cos\theta} \\ &= -\frac{2\left(\cos\theta - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\theta - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\cos\theta}. \end{aligned}$$

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$. $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ となる α をとる．$g(\theta)$ の増減は次のようになる．

θ	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$g'(\theta)$	(1)	$+$	0	$-$	$\left(-\dfrac{3}{2}\right)$
$g(\theta)$	(1)	↗	$\dfrac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt[4]{12}}$	↘	(0)



(図２)

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\pi-0} g(\theta) &= \lim_{\theta\to\pi-0}\left(2\sin\theta - \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right) \\ &= \lim_{\theta\to\pi-0}\left(2\sin\theta - \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right) = 0. \end{aligned}$$

また，$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$ なので，

$$g(\alpha) = \frac{2\sin^2\alpha - 1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt[4]{12}}.$$

これらから，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ において $f(\theta)$, $g(\theta)$ のグラフは（図２）のようになる．これと，(1) より

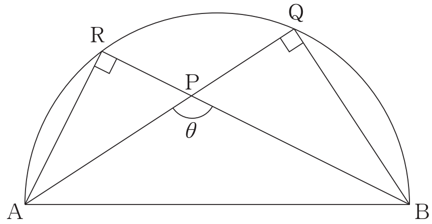
$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ のとき S がとりうる値の範囲は

$$0<S\leqq\frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt[4]{12}}.\qquad\cdots(答)$$

(1) の**【別解】**　$\boldsymbol{S=\triangle \mathrm{APR}+\triangle \mathrm{BPQ}+\triangle \mathrm{ABP}}$

$\angle \mathrm{APR}=\pi-\theta$ より，

$$\mathrm{PR}=\mathrm{AP}\cos(\pi-\theta)=-\mathrm{AP}\cos\theta,$$
$$\mathrm{AR}=\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)=\mathrm{AP}\sin\theta.$$
$$\therefore\quad \triangle \mathrm{APR}=\frac{1}{2}\mathrm{AR}\cdot\mathrm{PR}$$
$$=-\frac{1}{2}\mathrm{AP}^2\sin\theta\cos\theta$$
$$=-\frac{1}{4}\mathrm{AP}^2\sin 2\theta.$$



（図 3 ）

同様に，$\triangle \mathrm{BPQ}=-\frac{1}{4}\mathrm{BP}^2\sin 2\theta$.

$$\therefore\quad \triangle \mathrm{APR}+\triangle \mathrm{BPQ}=-\frac{1}{4}(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2)\sin 2\theta.\qquad\cdots④$$

三角形 PAB について余弦定理より

$$4=\mathrm{AB}^2=\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\theta.$$
$$\therefore\quad \mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=4+2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\theta.\qquad\cdots⑤$$

④，⑤ より

$$\therefore\quad \triangle \mathrm{APR}+\triangle \mathrm{BPQ}=-\sin 2\theta-\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos\theta\sin 2\theta$$
$$=-\sin 2\theta-\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cos^2\theta\sin\theta$$
$$=-\sin 2\theta-2\triangle \mathrm{PAB}\cos^2\theta$$

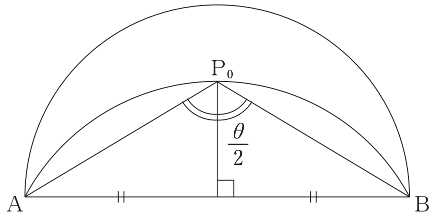
よって

$$S=\triangle \mathrm{APR}+\triangle \mathrm{BPQ}+\triangle \mathrm{PAB}=-\sin 2\theta+(1-2\cos^2\theta)\triangle \mathrm{PAB}.\qquad\cdots⑥$$

θ が一定のときの S のとる値の範囲を調べるには $\triangle$PAB のとる値の範囲を調べればよい．
θ が一定のとき点 P は AB を弦とする円弧上を動く．
（図 4 ）より

$$0<\triangle \mathrm{PAB}\leqq\triangle \mathrm{P_0AB}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\qquad\cdots⑦$$

となる．ただし $\mathrm{P_0}$ は弧 AB の中点．⑥ で $1-2\cos^2\theta$ の正負に注意して，⑦ の範囲で θ を動かすと，S の範囲が導かれる．（以下略）



（図 4 ）

（注）　**【解答】**と**【別解】**の最大，最小の式の一方，$-\sin 2\theta$ でない方は異なるように見えるが，同じである．

$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ をつかうと ⑥ で $\triangle \mathrm{PAB}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ のとき，

$$-\sin 2\theta+(1-2\cos^2\theta)\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}=-2\sin\theta\cos\theta+(1-2\cos^2\theta)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$=-\frac{2\cos^2\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}$$
$$=-\frac{\cos 2\theta+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

この結果は ② で $\cos(\alpha-\beta)=1$ としたときと確かに一致している．

1992 年　前期・文科

第 1 問

x についての方程式

$$px^2+(p^2-q)x-(2p-q-1)=0$$

が解をもち，すべての解の実部が負となるような実数の組 $(p,\ q)$ の範囲を pq 平面上に図示せよ。

（注）　複素数 $a+bi$（a，b は実数，i は虚数単位）に対し，a をこの複素数の実部という。

分　野

数学 I：複素数，2 次方程式の理論

考え方

1 次方程式になる場合（$p=0$ のとき）は，その場合があることを見落としさえしなければ容易．

2 次方程式になる場合は判別式を D，解を α，β とすると，係数が実数だから，$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ は実数で，

$$D \geqq 0,\quad \alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0 \text{ または } D<0,\quad \alpha+\beta<0$$

が条件となる．

pq 平面上で $D=0$ のグラフは容易にかけない．$D<0$ のとき常に $\alpha\beta>0$ なることに注意すれば全体として

$$\alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0$$

だけでよいことがわかる．

【解答】

$$px^2+(p^2-q)x-(2p-q-1)=0 \quad (p,\ q：\text{実数}) \qquad \cdots①$$

とおく．

(i)　$p=0$ のとき ① は $-qx+q+1=0$ となる．

(i-a)　$q=0$ のとき解なし．

(i-b)　$q \neq 0$ のとき $x=\dfrac{q+1}{q}$.

題意をみたす条件は $x=\dfrac{q+1}{q}<0$. $-1<q<0$.

まとめて

$$p=0,\quad -1<q<0. \qquad \cdots②$$

(ii)　$p \neq 0$ のとき ① の 2 解を α，β とおき，判別式を D とおく．

(ii-a)　$D \geqq 0$ のとき α，β はともに負の実数.

$$\therefore\quad \alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0. \qquad \cdots③$$

(ii-b)　$D<0$ のとき ① は実数係数の方程式だから

$$\alpha=a+bi,\ \beta=a-bi \quad (a,\ b \text{ は実数},\ b \neq 0)$$

とおける．

解の実部 $\left(a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$ が負だから

$$\alpha+\beta<0. \qquad \cdots④$$

$D<0$ のとき常に $\alpha\beta=a^2+b^2>0$（なぜなら $b \neq 0$）が成り立つから，④ は

$$\alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0. \qquad \cdots⑤$$

と表しても同じである．

③，⑤ をまとめると $D \geqq 0$ のときも，$D<0$ のときも

$$\alpha+\beta<0,\quad \alpha\beta>0.$$

①の解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=-\frac{p^2-q}{p},\quad \alpha\beta=-\frac{2p-q-1}{p}.$$

$$\therefore\quad \frac{p^2-q}{p}>0,\quad \frac{2p-q-1}{p}<0.$$

$$\therefore\quad (p^2-q)p>0,\quad (2p-q-1)p<0.$$

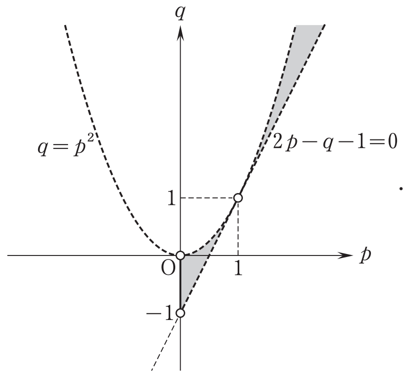
$\therefore$ 「$p>0$ かつ $p^2>q>2p-1$」

または「$p<0$ かつ $q>p^2$, $q<2p-1$」.

「$p<0$ かつ $q>p^2$, $q<2p-1$」をみたす (p, q) は存在しない.

$$\therefore\quad p>0 \text{ かつ } p^2>q>2p-1. \qquad \cdots⑥$$

②, ⑥を図示すると, 右図網掛部境界は「$-1<q<0$, $p=0$」のみ入る.



…(答)

(注1) 判別式 D の正負で場合分けする.

【解答】では(ii) $p\neq0$ の場合を更に(ii-a) $D\geqq0$ と(ii-b) $D<0$ の場合に分けたが, 最終的には $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$ にまとめて解いた. $D=0$ を (p, q) で表そうとすると複雑になるのでそれを回避するためにこのようにした.

もし, D の正負で場合分けすることにこだわって解こうとすると次のようになる.

(ii) $p\neq0$ のとき

①の判別式は

$$\begin{aligned} D&=(p^2-q)^2+4p(2p-q-1)\\ &=q^2-2(p^2+2p)q+p^4+8p^2-4p\\ &=\{q-(p^2+2p)\}^2-4p(p^2-p+1). \end{aligned} \qquad \cdots Ⓐ$$

(ii-a) $D\geqq0$ のとき

(ii-a-ア) $p<0$ なら常に $D>0$.

$$\alpha+\beta=-\frac{p^2-q}{p}<0,\quad \alpha\beta=-\frac{2p-q-1}{p}>0$$

より

$$q>p^2,\quad q<2p-1$$

これをみたす (p, q) は存在しない.

(ii-a-イ) $p>0$ なら $D\geqq0$ より

$$q\geqq p^2+2p+2\sqrt{p(p^2-p+1)} \text{ または } q\leqq p^2+2p-2\sqrt{p(p^2-p+1)}. \qquad \cdots Ⓑ$$

$$\alpha+\beta=-\frac{p^2-q}{p}<0,\quad \alpha\beta=-\frac{2p-q-1}{p}>0$$

より

$$q<p^2,\quad q>2p-1 \qquad \cdots Ⓒ$$

(ii-b) $D<0$ のとき

(ii-b-ア) $p<0$ のときⒶより $D<0$ となることはない.

(ii-b-イ) $p>0$ のとき $D<0$ から

$$p^2+2p-2\sqrt{p(p^2-p+1)}<q<p^2+2p+2\sqrt{p(p^2-p+1)}. \qquad \cdots Ⓓ$$

①の解は $x=\dfrac{-(p^2-q)\pm\sqrt{-D}\,i}{2p}$ だからその実部は $\dfrac{-p^2+q}{2p}$. これが負だから

$$q<p^2. \qquad \cdots Ⓔ$$

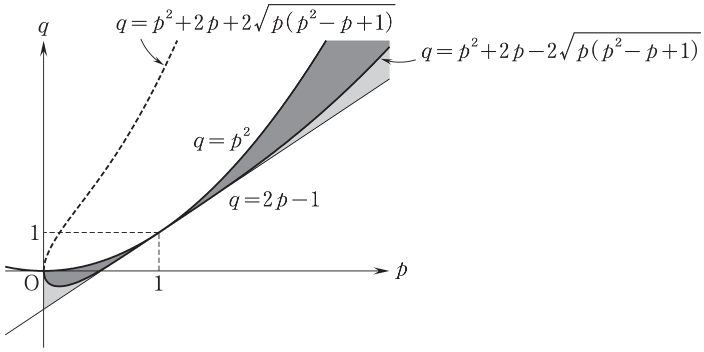
以上Ⓑ, Ⓒ, Ⓓ, Ⓔをまとめて図示すればよいのだが, 境界 $D=0$ を文系の範囲（基礎解析まで）で図示することは不可能である.

$p>0$ のとき

$$2p-1 \leqq p^2+2p-2\sqrt{p(p^2-p+1)} \leqq p^2 < p^2+2p+2\sqrt{p(p^2-p+1)}$$

に気づけば境界が消え，図示することができるかも知れない．

実際に $D=0$ のグラフを重ねて図示すると，下図のようになる．



これをみると**【解答】**で(ii–a)（薄いアミかけ部分）と(ii–b)（濃いアミかけ部分）をまとめたとき，$D=0$ の境界が消えてしまうことがよく理解されるであろう．

また，本問の方程式が $x^2+ax+b=0$ で，2 解の実部が負である点 (a, b) の範囲を求める問題だったら，$D=0$ の曲線 $a^2-4b=0$ が容易に描けて，$a>0$，$b>0$ が求める範囲であることがすぐにわかるであろう．

もちろんこの場合 $D=0$ の境界が消滅することもみてとれるはずである．

（注 2） 判別式 D の正負と $\alpha\beta$ の正負について．

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ の判別式 D，解を α，β とする．

このとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$D<0$ なら $\alpha\beta>0$ となることは次のようにして示すことができる．

$$D=b^2-4ac=a^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}<0.$$

$$\therefore \quad 0 \leqq (\alpha+\beta)^2 < 4\alpha\beta.$$

$$\alpha\beta>0.$$

また $\alpha\beta<0$ なら $D>0$ であることも同様に示せる．

これらのことは，いろいろな場面で使うことがある．

第 2 問

甲乙二人が出資して共同事業を行う。二人の出資合計を s とするとき，この事業による利潤 $f(s)$ は

$$f(s)=\begin{cases} \dfrac{1}{4}s(s-3)^2 & (0 \leqq s \leqq 2), \\ -\dfrac{3}{4}s+2 & (s>2) \end{cases}$$

で与えられ，利潤は出資額に応じて甲，乙に比例配分されるものとする。

甲の出資額 a が一定であるとして，乙の利潤配分額を最大にする s の値を求めよ。ただし $0 \leqq a \leqq 2$ とする。

分　野

基礎解析：整式の微分，最大最小

考え方

出資合計 s から甲の出資額 a をひいたものが乙の出資額 $s-a$．乙の出資率 $\dfrac{s-a}{s}$ と利潤 $f(s)$ をかけたものが乙の利潤配分額 $\dfrac{s-a}{s}f(s)$ である．

乙の利潤配分額を $g(s)$ とすると，$f(s)$ が $s=2$ の前後で別々に定義されているから，$g(s)$ も $s=2$ の前後で場合分けされる．

それぞれの区間で $g(s)$ の最大値を求め，そのうち大きい方が全体の最大値．

$0\leqq s\leqq 2$ における $g(s)$ の最大値は微分法を使えば容易に求められる．

$s\geqq 2$ において $g(s)$ は s の分数式になるのでその最大値を求めるとき少々工夫を要する．

【解答】

乙の出資額 $s-a\geqq 0$ なので $s\geqq a$．

乙の利潤配分額を $g(s)$ とすると

$$g(s)=\frac{(s-a)}{s}f(s).$$

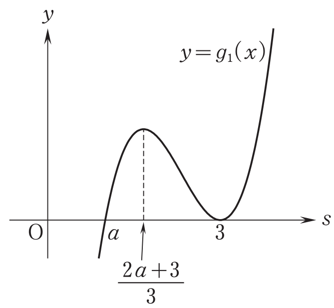
$$\therefore\quad g(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(s-a)(s-3)^2 & (0\leqq s\leqq 2),\\ -\dfrac{3}{4}(s-a)+2\cdot\dfrac{s-a}{s} & (s>2).\end{cases}$$

$$g_1(s)=\frac{1}{4}(s-a)(s-3)^2,$$

$$g_2(s)=-\frac{3}{4}(s-a)+2\cdot\frac{s-a}{s}=2+\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}s-\frac{2}{s}a.$$

とおく．

$$g_1'(s)=\frac{1}{4}\{(s-3)^2+2(s-a)(s-3)\}$$
$$=\frac{3}{4}(s-3)\left(s-1-\frac{2}{3}a\right).$$



（図１）

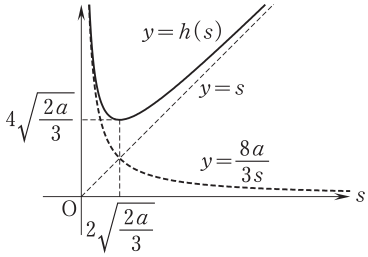
$0\leqq a\leqq 2$ のとき $1\leqq 1+\dfrac{2}{3}a\leqq\dfrac{7}{3}<3$．

$y=g_1(s)$ のグラフの概形は（図１）のようになる．

$a>0$ のとき $h(s)=s+\dfrac{8}{3s}a$ とおくと，$s>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$$h(s)=s+\frac{8}{3s}a\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{8}{3s}a}=4\sqrt{\frac{2}{3}a}.$$

等号は $s=2\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$ のとき成り立つ．



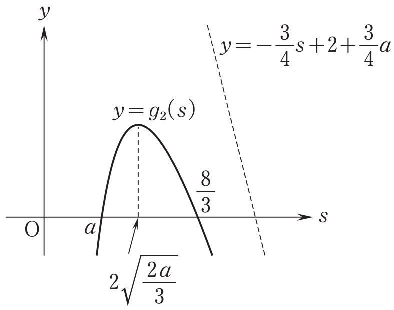
（図２）

$y=h(s)$ のグラフの概形は（図２）のようになる．

$g_2(s)=2+\dfrac{3}{4}a-\dfrac{3}{4}h(s)$ より

$y=g_2(s)$ のグラフの概形は（図３）のようになる．

$\left(a=0 \text{ のときは，} y=g_2(s)=2-\dfrac{3}{4}s \text{ は直線である．}\right)$



（図３）

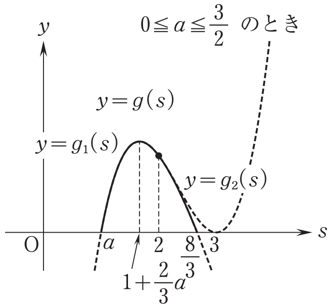
また

$$g_1(2)=g_2(2)=\frac{2-a}{4}.$$

$$\left(1+\frac{2}{3}a\right)-2=\frac{2}{3}\left(a-\frac{3}{2}\right).$$

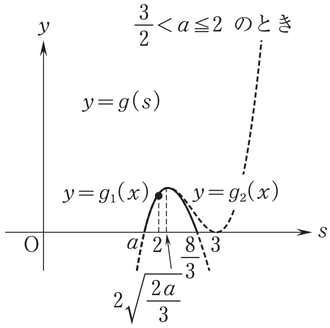
$$2\sqrt{\frac{2a}{3}}-2=\frac{4}{3}\cdot\frac{a-\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{2a}{3}}+1}.$$

以上より $g(s)$ の増減は次のようになる．



（i） $0\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき，$1+\dfrac{2}{3}a\leqq 2$，$2\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\leqq 2$．

s	a	$\cdots$	$1+\frac{2}{3}a$	$\cdots$	2	$\cdots$
$g(s)$		↗	最大	↘		↘



（ii） $\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 2$ のとき，$1+\dfrac{2}{3}a\geqq 2$，$2\sqrt{\dfrac{2a}{3}}\geqq 2$．

s	a	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{\frac{2a}{3}}$	$\cdots$
$g(s)$		↗		↗	最大	↘

以上より乙の利潤配分額を最大にする s の値は

$$\begin{cases} s=1+\dfrac{2}{3}a & \left(0\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}\right) \\ s=2\sqrt{\dfrac{2}{3}a} & \left(\dfrac{3}{2}\leqq a\leqq 2\right) \end{cases}$$

…（答）

（注） $g_2(s)$ の増減は「微分・積分」（当時文系の範囲外）の公式 $\left(\dfrac{1}{s}\right)'=-\dfrac{1}{s^2}$ を使った方が手っ取り早い．文系の受験生にこれを要求するわけではないが，この程度の公式を自由に使いこなせる文系の受験生は少なくない．

第3問

$p_1=1$，$p_2=1$，$p_{n+2}=p_n+p_{n+1}$（$n\geqq 1$）によって定義される数列 $\{p_n\}$ をフィボナッチ数列といい，その一般項は

$$p_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

で与えられる。必要ならばこの事実を用いて，次の問に答えよ。

各桁の数字が 0 か 1 であるような自然数の列 $X_n(n=1, 2, \cdots)$ を次の規則により定める。

（i） $X_1=1$

（ii） X_n のある桁の数字 α が 0 ならば α を 1 で置き換え，α が 1 ならば α を‘10’で置き換える。X_n の各桁ごとにこのような置き換えを行って得られる自然数を X_{n+1} とする。

たとえば，$X_1=1$，$X_2=10$，$X_3=101$，$X_4=10110$，$X_5=10110101$，$\cdots$ となる。

(1) X_n の桁数 a_n を求めよ。

(2) X_n の中に‘01’という数字の配列が現れる回数 b_n を求めよ（たとえば，$b_1=0$，$b_2=0$，$b_3=1$，$b_4=1$，$b_5=3$，$\cdots$）。

分　野

基礎解析：数列，漸化式，フィボナッチ数列

考え方

(1)は X_n に含まれる‘0’の個数，‘1’の個数に関する漸化式をたてて考えるとよい．

(2)は 1 の位の数に注目．

答はいずれも p_n でかける．答を予想しただけでは不十分．根拠を示すことが必要．

【解答】

(1) X_n の数字のうち‘0’の個数を x_n，‘1’の個数を y_n とする．

X_{n+1} は X_n の桁の数字のうち‘0’を‘1’に，‘1’を‘10’に置き換えて得られるから，$n\geqq 1$ で

$$\begin{cases} x_{n+1}=y_n, & \cdots① \\ y_{n+1}=x_n+y_n. & \cdots② \end{cases}$$

② より $y_{n+2}=x_{n+1}+y_{n+1}$（$n\geqq 0$）．

① を代入して

$$y_{n+2}=y_n+y_{n+1} \quad (n\geqq 1).$$

また

$$x_1=0, \quad y_1=1. \quad \therefore \quad y_2=x_1+y_1=1.$$

よって $\{y_n\}$ は，フィボナッチ数列 $\{p_n\}$ と初項，第 2 項および漸化式が一致する．

$$\therefore \quad y_n=p_n. \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots③$$

$$\therefore \quad a_n=x_n+y_n=y_{n+1}=p_{n+1}. \quad (n\geqq 1)$$

$$\therefore \quad a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}. \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) X_n の桁の並びに‘00’は存在しないから．

$$b_n=\begin{cases} x_n & (1\text{ の位が‘1’のとき}) \\ x_n-1 & (1\text{ の位が‘0’のとき}) \end{cases}$$

p_n の式で $n=0$ とおくと，$p_0=0=x_1$ となること，①，③ より $x_n=y_{n-1}=p_{n-1}$（$n\geqq 2$）から $x_n=p_{n-1}$（$n\geqq 1$）．

X_n の 1 の位が '1' のとき，X_{n+1} の 1 の位は '0'，X_n の 1 の位が '0' のとき，X_{n+1} の 1 の位は '1'.
$X_1=1$ より

$$X_n \text{ の 1 の位は} \begin{cases} \text{'1'} \quad (n \text{ が奇数のとき}) \\ \text{'0'} \quad (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

よって

$$b_n=\begin{cases} x_n \quad =p_{n-1} \quad =\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} \quad (n \text{ が奇数のとき}) \\ x_n-1=p_{n-1}-1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}-1 \quad (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(1) の【別解】

$X_0=0$ に (ii) の置き換えをすると $X_1=1$ となる.

(ii) の置き換えを n 回繰り返すと，X_1 から X_{n+1} が，X_0 から X_n が得られる.

$X_2=10$ に (ii) の置き換えを n 回繰り返すと '1' から X_{n+1} が，'0' から X_n が得られるから，X_{n+2} は X_{n+1} と X_n をこの順に並べてできる数である.

よって，X_{n+2} の桁数は X_{n+1} と X_n の桁数の和である.

$$\therefore \quad a_{n+2}=a_{n+1}+a_n.$$

また

$$a_1=1, \quad a_2=2, \quad p_1=1, \quad p_2=1, \quad p_3=2.$$

よって $\{a_n\}$ は，フィボナッチ数列 $\{p_n\}$ を 1 項だけずらした数列 $\{p_{n+1}\}$ と初項，第 2 項および漸化式が一致する.

$$\therefore \quad a_n=p_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}. \quad (n \geqq 1) \quad \cdots(\text{答})$$

（注） $\{a_n\}$ の漸化式は次のように求めてもよい.

X_n の数字 '0'，'1' のいずれからも X_{n+1} の数字 '1' が 1 つずつ得られるから，X_{n+1} の数字 '1' の個数は a_n，X_{n+1} の数字 '0' の個数は $a_{n+1}-a_n$.

さらに数字 '1' は 2 桁の数字 '10' に，数字 '0' は 1 桁の数字 '1' に，置き換えられるから

$$a_{n+2}=2a_n+(a_{n+1}-a_n)=a_n+a_{n+1}.$$

$a_1=1$，$a_2=2$ から $a_n=p_{n+1}$.

もちろん，①，② と $a_n=x_n+y_n$ から変形して $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ としてもよい.

第4問

xy 平面において，x 座標，y 座標ともに整数であるような点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点にもつ三角形 ABC を考える。

(1) 辺 AB，AC それぞれの上に両端を除いて奇数個の格子点があるとすると，辺 BC 上にも両端を除いて奇数個の格子点があることを示せ。

(2) 辺 AB，AC 上に両端を除いて丁度 3 点ずつ格子点が存在するとすると，三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数であることを示せ。

分野

基礎解析：数列，整数，格子点

考え方

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分がともに偶数であることをどのようにいうかがポイント．

辺上にある格子点が等間隔に並ぶことを示し，それを使うのも 1 方法．

【解答】 格子点は直線上に等間隔に並ぶ

(1) 点 A，B，C が格子点のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ d)\quad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は整数})$$

とおける．

$a=b=0$ ではないので，a と b の最大公約数を N (>0) とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b)=N(a',\ b')\quad (a' \text{ と } b' \text{ は互いに素な整数})$$

とおける．なお，$a=0$ のとき，$N=|b|$，$a'=0$，$b'=\pm1$（b と同符号），$b=0$ のときも同様．

(*) 辺 AB 上の格子点を P とすると P は

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k(a',\ b'),\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

をみたす，$N-1$ 個である．

(証明) 両端以外の格子点を P とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$0<t<1$ とかける．

ここで，t は有理数なので，$t=\dfrac{q}{p}$（p，q は互いに素な自然数，$p>q$）とおける．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{q}{p}N(a',\ b')$．これから p は qNa'，qNb' の公約数，p，q および a'，b' は互いに素だから，p は N の約数．

よって，$\dfrac{q}{p}N$ は整数．これを k とおく．

よって，$t=\dfrac{q}{p}=\dfrac{k}{N}$．$0<t<1$ より $k=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1$．

逆にこのとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{k}{N}a,\ \dfrac{k}{N}b\right)=(ka',\ kb')$ の各成分は整数となる．

（(*) の証明終り）

よって，辺 AB 上に両端を除いて奇数個の格子点があるのは，$N-1$ が奇数，すなわち，N が偶数のときである．これは，a，b が偶数であることと同値である．

同様に c，d も偶数である．

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(c-a,\ d-b)$$

の成分はともに偶数．$c-a$，$d-b$ の最大公約数は偶数．

(*) より，辺 BC 上に両端を除いて奇数個の格子点がある．（証明終り）

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(c,\ d)$ とおく．格子点が丁度 3 個あるから(1)で $N-1=3$ つまり $N=4$ のときに相当する．よって $(a,\ b)=4(a',\ b')$，$(c,\ d)=4(c',\ d')$，（$a',\ b',\ c',\ d'$ は整数）とかける．
よって，

$$a=4a',\quad b=4b',\quad c=4c',\quad d=4d'.$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|=\frac{1}{2}|4a'\cdot 4d'-4b'\cdot 4c'|=8|a'd'-b'c'|.$$

よって三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数．（証明終り）

【別解】 中点についての対称性に着目

(1) 辺 AB の中点を M とする．M の x 座標，y 座標はともに整数または整数に $\frac{1}{2}$ を加えたもの．したがって，任意の格子点の M について点対称な点は格子点．線分 AM（両端は除く）上にある格子点の M について点対称な点は線分 BM（両端は除く）上にある格子点である．よって，それらの個数は等しい．

よって，

辺 AB（両端は除く）上にある格子点の個数が奇数個である

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分が整数

$\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分はともに整数でしかも偶数．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(a,\ b)$（$a,\ b$ は整数．$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$）とかける．
同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2(c,\ d)$（$c,\ d$ は整数．$(c,\ d)\neq(0,\ 0)$）とかける．
よって

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(c-a,\ d-b).$$

ABC が三角形をなすから $(c-a,\ d-b)\neq(0,\ 0)$.
上記の考察から辺 BC（両端は除く）上にある格子点の個数は奇数個である．（証明終り）

(2) (1)の考察より，辺 AB の中点 M は格子点であり，線分 AM，BM（両端を除く）上に各 1 個ずつの格子点がある．同様の考察からそれらは，AM，BM の中点である．

AM の中点を N とすると，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4(a',\ b')$（$a',\ b'$ は整数．$(a',\ b')\neq(0,\ 0)$）とかける．
同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4(c',\ d')$（$c',\ d'$ は整数．$(c',\ d')\neq(0,\ 0)$）とかける．

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|=\frac{1}{2}|4a'\cdot 4d'-4b'\cdot 4c'|=8|a'd'-b'c'|.$$

よって三角形 ABC の面積は 8 で割り切れる整数．（証明終り）

1992 年　前期・理科

第 1 問

a は 1 より大きい定数とし，xy 平面上の点 $(a,\ 0)$ を A，点 $(a,\ \log a)$ を B，曲線 $y=\log x$ と x 軸の交点を C とする。さらに x 軸，線分 BA および曲線 $y=\log x$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする。

(1)　$1\leqq b\leqq a$ となる b に対し点 $(b,\ \log b)$ を D とする。四辺形 ABDC の面積が S_1 にもっとも近くなるような b の値と，そのときの四辺形 ABDC の面積 S_2 を求めよ。

(2)　$a\to\infty$ のときの $\dfrac{S_2}{S_1}$ の極限値を求めよ。

分　野

微分・積分：微分法，積分法，関数の極限

考え方

四辺形 ABCD の面積が最大になるのは D における接線が BC に平行なとき．

S_2 は a でかくときれいな式ではない．落ちついて対応すれば何でもない．

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\log(\log a)}{\log a}$ は $t=\log a$ とおいて考えるとよい．

計算量が多いので要領のよい計算を心掛けること．

【解答】

(1)　$f(x)=\log x$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0.$$

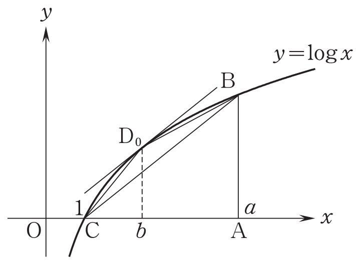
よって，$f(x)$ は上に凸．

BC に平行な接線をひき，その接点を D_0 とする．

弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上の任意の点 D に対して

$$\triangle BCD\leqq\triangle BCD_0$$

となる．



四辺形 ABCD の面積はつねに，S_1 より小さく，$D=D_0$ のとき最大になるから，このとき S_1 に最も近づく．

直線 BC の傾きは $\dfrac{\log a}{a-1}$ であるから，D_0 の x 座標を b とすると

$$\frac{1}{b}=\frac{\log a}{a-1}.\quad\therefore\quad b=\frac{a-1}{\log a}.\qquad\cdots(答)$$

このとき，四辺形 ABD_0C の面積は

$$S_2=\triangle AD_0C+\triangle ABD_0=\frac{1}{2}\{(a-1)\log b+(a-b)\log a\}.$$

$b=\dfrac{a-1}{\log a}$ より

$$S_2=\frac{1}{2}[(a-1)\{\log(a-1)-\log(\log a)\}+a\log a-a+1].\qquad\cdots(答)$$

(2)　$S_1=\displaystyle\int_1^a\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^a=a\log a-a+1.$

$$\therefore \quad \frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}\frac{(a-1)\{\log(a-1)-\log(\log a)\}}{a\log a-a+1}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\frac{a-1}{a}\left\{\frac{\log(a-1)}{\log a}-\frac{\log(\log a)}{\log a}\right\}\frac{1}{1-\dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{a\log a}}+\frac{1}{2}.$$

ここで $\dfrac{\log(a-1)}{\log a}=\dfrac{\log a+\log\left(1-\dfrac{1}{a}\right)}{\log a}=1+\dfrac{\log\left(1-\dfrac{1}{a}\right)}{\log a}$.

よって，$a\to\infty$ のとき，$\dfrac{\log(a-1)}{\log a}\to 1$.

また，$\log a=t$ とおくと，$a\to\infty$ のとき $t\to\infty$ より $\dfrac{\log(\log a)}{\log a}=\dfrac{\log t}{t}\to 0$.

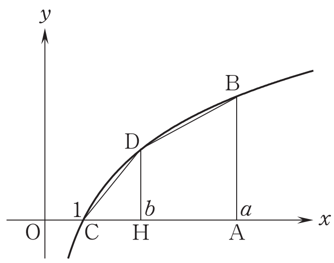
以上より

$$\lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}1(1-0)\frac{1}{1-0+0}+\frac{1}{2}=1. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） $\dfrac{\log t}{t}\to 0$ については **1984 年理科　第 2 問【解答】**（注）参照.

(1) の前半の【別解】

四辺形 ABDC の面積は H$(b,\ 0)$ とおいて，次のように求めてもよい.



$$S_2=\triangle\text{CDH}+\text{台形 ABDH}$$
$$=\frac{1}{2}(b-1)\log b+\frac{1}{2}(a-b)(\log a+\log b)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-1)\log b+(a-b)\log a\}.$$

これを b の関数として，

$$F(b)=\frac{1}{2}\{(a-1)\log b+(a-b)\log a\}$$

とおく.

$$F'(b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a-1}{b}-\log a\right)=\frac{a-1-b\log a}{2b}$$

$b>0$ における増減を調べる.

b	(0)	$\cdots$	$\dfrac{a-1}{\log a}$	$\cdots$
$F'(b)$		$+$	0	$-$
$F(b)$		↗	極大	↘

$F(1)=F(a)\left(=\dfrac{1}{2}(a-1)\log a\right)$ であるから，$b=\dfrac{a-1}{\log a}$ は $1<b<a$ の範囲にある.

よって，$F(b)$ は $b=\dfrac{a-1}{\log a}$ で最大になり，四辺形 ABCD の面積は S_1 に最も近づく.（以下略）

（注） $1<\dfrac{a-1}{\log a}<a$ は次のようにも示せる.

$g(x)=x-1-\log x$ とおくと，$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$. $x>1$ のとき，$g'(x)>0$. $\therefore$ $g(x)>g(1)=0$.

$$\therefore \quad x-1>\log x\ (>0),\quad 1<\frac{x-1}{\log x}\ (x>1).$$

また，$h(x)=x\log x-x+1$ とおくと，$h'(x)=\log x$. $x>1$ のとき，$h'(x)>0$.

$\therefore$ $h(x)>h(1)=0$.

$$\therefore\quad x\log x > x-1\ (>0),\quad \frac{x-1}{\log x} < x\ (x>1).$$

よって，$a>1$ のとき $1<\dfrac{a-1}{\log a}<a$.

第２問

（文科　第４問と同じ）

第３問

a，b を正の実数とする。座標空間の４点 P(0, 0, 0)，Q(a, 0, 0)，R(0, 1, 0)，S(0, 1, b) が半径１の同一球面上にあるとき，P，Q，R，S を頂点とする四面体に内接する球の半径を r とすれば，次の二つの不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{20}{3},$$

$$\frac{1}{r} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}$$

分　野

代数・幾何：空間図形，**数学Ⅰ**：不等式の証明

考え方

４点を通る球の中心は４点までの距離が等しい点であり，内接球の中心は４つの面までの距離 r が等しい点である．方程式をたてて計算すればよい．

ただ，この四面体は，４つの面がすべて直角三角形であることに着目すると，速く計算できる．

r を a，b で表すと，変形して $\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ にしやすい形をしている．

残りの項は a，b について対称な形をしていて，外接球の半径の条件を使えばすべて ab の式として表される．

相加平均・相乗平均の関係から，ab のとりうる値の範囲も決まる．

２つの不等式とも，ab の式にしてしまえば扱いやすい．

この問題も計算量が多いので要領のよい計算を心掛けること．

【解答】　座標計算

点 P，Q，R，S を含む球の中心を C とする．C は PQ の垂直二等分面 $x=\dfrac{a}{2}$，PR の垂直二等分面 $y=\dfrac{1}{2}$，RS の垂直二等分面 $z=\dfrac{b}{2}$ の交点である．その座標は $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{b}{2}\right)$ である．

半径が１だから

$$\mathrm{PC}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=1.$$

$$\therefore\quad a^2+b^2=3. \qquad \cdots①$$

四面体 PQRS の内接球は半径が r で，xy 平面（面 PQR），yz 平面（面 PRS）に接するから中心 I の座標は $(r,\ k,\ r)$ $(k>0)$ とおける．

点 I は面 QRS：$x+ay=a$ の P と同じ側 $x+ay<a$ にある．I と面 QRS の距離は

$$\frac{a-r-ak}{\sqrt{1+a^2}}=r. \qquad \cdots②$$

点 I は面 PQS：$by-z=0$ の R と同じ側 $by-z>0$ にある．I と面 PQS の距離は

$$\frac{bk-r}{\sqrt{b^2+1}}=r. \qquad \cdots③$$

②，③ より，k を消去して，r について整理すると

$$ab=(a+b+b\sqrt{1+a^2}+a\sqrt{1+b^2})r.$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}. \qquad \cdots④$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2&=\left(\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}\right)^2\\&=2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{a^2+b^2+1}{a^2b^2}}\\&=2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}}. \qquad (① \text{ より})\end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の関係と ① より

$$ab=\sqrt{a^2b^2}\leqq\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{3}{2}. \qquad \cdots⑤$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^2b^2}\geqq\frac{4}{9}.$$

$$\therefore\quad \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geqq2+3\cdot\frac{4}{9}+2\sqrt{1+4\cdot\frac{4}{9}}=\frac{20}{3}. \qquad (\text{証明終り})$$

④ より，$\frac{1}{r}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$．　よって，上の結果より

$$\frac{1}{r}\geqq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+2\sqrt{\frac{5}{3}}. \qquad \cdots⑥$$

また相加平均・相乗平均の関係より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqq2\sqrt{\frac{1}{ab}}\geqq2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

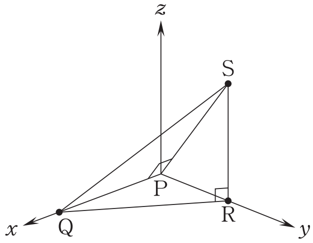
⑥ とあわせて

$$\frac{1}{r}\geqq2\sqrt{\frac{2}{3}}+2\sqrt{\frac{5}{3}}. \qquad (\text{証明終り})$$

【別解】　図形的特徴をつかんで

$\angle\mathrm{QPS}=\angle\mathrm{QRS}=90°$ より，QS は 4 点 P，Q，R，S を通る球の直径．
半径が 1 だから，直径は 2．　$\mathrm{QS}^2=a^2+1+b^2=4$．

$$\therefore\quad a^2+b^2=3. \qquad \cdots①$$



四面体 PQRS の体積は $\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}b=\frac{1}{6}ab$．

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\frac{1}{2}a,$$

$$\triangle\mathrm{PSR}=\frac{1}{2}\mathrm{RS}\cdot\mathrm{PR}=\frac{1}{2}b,$$

$$\triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\mathrm{RS}\cdot\mathrm{QR}=\frac{1}{2}b\sqrt{1+a^2},$$

$$\triangle\mathrm{QPS}=\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PS}=\frac{1}{2}a\sqrt{1+b^2}.$$

四面体PQRSの体積を三角形PQR，PSR，QRS，QPSを底面とし，Iを頂点とする4つの三角錐に分けて考える．Iと各面の距離が r だから

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b\sqrt{1+a^2}+\frac{1}{2}a\sqrt{1+b^2}\right)r=\frac{1}{6}ab.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}+\frac{\sqrt{1+b^2}}{b}. \qquad \cdots④$$

以下**【解答】**と同じ．

（注１） 不等式の証明の問題なので等号成立条件を調べなかった．⑤，⑥の等号成立条件はともに $a=b=\sqrt{\frac{3}{2}}$ である．したがって，第2の不等式の証明から r の最大値が $\frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ であることが示された．

（注２） さらに，$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2b^2}=\frac{3}{a^2b^2}+\frac{2}{ab}$ と，⑤の直前の式から，

$$\frac{1}{r}=\sqrt{\frac{3}{a^2b^2}+\frac{2}{ab}}+\sqrt{2+\frac{3}{a^2b^2}+2\sqrt{1+\frac{4}{a^2b^2}}}.$$

$\frac{1}{r}$ は $\frac{1}{ab}$ の増加関数，すなわち r は ab の増加関数である．ab のとりうる値の範囲が $0<ab\leqq\frac{3}{2}$ であるから r のとりうる値の範囲は

$$0<r\leqq\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

であることがわかる．

第4問

xyz 空間において，x 軸と平行な柱面

$$A=\{(x,\ y,\ z)\,|\,y^2+z^2=1,\ x,\ y,\ z\text{は実数}\}$$

から y 軸に平行な柱面

$$B=\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,x^2-\sqrt{3}\,xz+z^2=\frac{1}{4},\ x,\ y,\ z\text{は実数}\right\}$$

により囲まれる部分を切り抜いた残りの図形を C とする。図形 C の展開図をえがけ。ただし点 $(0, 1, 0)$ を通り x 軸と平行な直線に沿って C を切り開くものとする。

分　野

代数・幾何：空間図形，**基礎解析**：三角関数，合成公式，**数学Ⅰ**：不等式と領域，展開図

考え方

円柱面 A 上の座標を考える．軸に平行な x 軸，円柱を一周する θ 軸をとる．
円柱の半径が1だから弧の長さ θ は中心角に一致する．
A 上の点は x と θ で $(x,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ とかける．
$z=\sin\theta$ を B の方程式に代入すれば A と B の交わりの曲線を x と θ で表せる．

【解答】

A の円柱の断面が半径1の円になるので，弧の長さが中心角 θ に等しい．
A 上の点は $(x,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とおける．
これを B の方程式に代入して

$$x^2-\sqrt{3}\,x\sin\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4}.$$

解の公式より

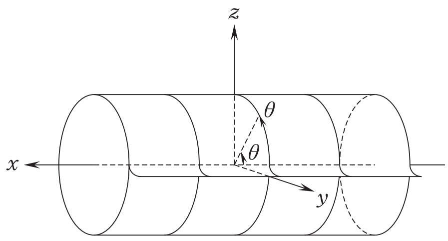
$$x=\frac{\sqrt{3}\,\sin\theta\pm\sqrt{3\sin^2\theta-4\left(\sin^2\theta-\frac{1}{4}\right)}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\,\sin\theta\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}$$

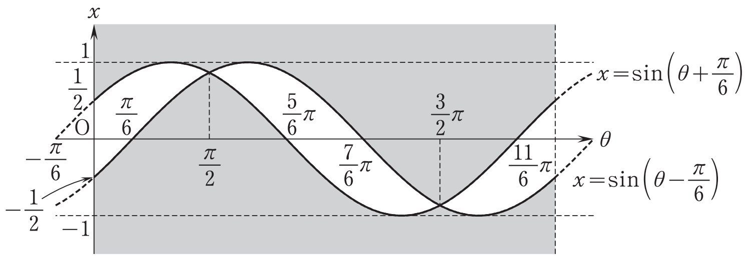
$$=\frac{\sqrt{3}\,\sin\theta\pm|\cos\theta|}{2}.$$

$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}\,\sin\theta\pm\cos\theta}{2}$$

$$=\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{6}\right).\qquad\cdots(*)$$



A を題意のように展開することは，A 上の点 $(x,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ を展開された平面上の点 $(x,\ \theta)$ に $(0\leqq\theta<2\pi)$ に対応させることになる．したがって，図形 C の展開図は $(*)$ を境界として，その外側である．次図網掛部．



…(答)

第 5 問

xy 平面において，曲線 $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ 上の点 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を出発し，この曲線上を進む点Pがある。出発してから t 秒後のPの速度 $\vec{v}$ の大きさは $\dfrac{t}{2}$ に等しく，$\vec{v}$ の x 成分はつねに正または 0 であるとする。

(1) 出発してから t 秒後のPの位置を $(x,\ y)$ として，x と t の間の関係式を求めよ。

(2) $\vec{v}$ がベクトル $(8,\ 15)$ と平行になるのは出発してから何秒後か。

分野

微分・積分：微分方程式，速度・加速度

考え方

動点の速度ベクトルは，x 座標，y 座標を時刻 t で微分したものが成分．

式を丁寧にたててゆけば，微分方程式がたつ．それを解けば t と x の関係式が得られる．

(2) は平行条件から x がえられ，t もえられる．

【解答 1】

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} x \\ \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x} \end{pmatrix}$ から

$$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2} \end{pmatrix}. \qquad \cdots(*)$$

$$\therefore\quad |\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left\{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2\right\}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)^2.$$

$\vec{v}$ の x 成分 $\dfrac{dx}{dt}$ はつねに正または 0 だから

$$|\vec{v}|=\frac{dx}{dt}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right).$$

これと P の速度 $\vec{v}$ の大きさ $|\vec{v}|=\dfrac{t}{2}$ から

$$\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}.$$

$$\therefore\quad \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}=t.$$

$$\therefore\quad \int\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int t\,dt.$$

$$\therefore\quad \frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}=\frac{t^2}{2}+C.\quad (C\text{ は積分定数})$$

$t=0$ のとき速さ 0 で，$x=1$ を出発するから $C=-\dfrac{2}{3}$.

よって

$$\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}=\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注) x，t の範囲は $x\geqq 1$，$t\geqq 0$.

(2) (*) と $\dfrac{dx}{dt}\neq 0$ から $\vec{v}\parallel\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2} \end{pmatrix}$.

これと $\vec{v}$ がベクトル $\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ と平行だから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2} \end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad 8\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)-15=0.$$

$$\therefore\quad 4x^4-15x^2-4=0.$$

$$\therefore\quad (4x^2+1)(x^2-4)=0.$$

$x\geqq 1$ であるから $x=2$.

(1) の結果に代入して整理して $t^2=\dfrac{17}{3}$. $t\geqq 0$ だから $t=\sqrt{\dfrac{17}{3}}$.

よって，平行になるのは $\sqrt{\dfrac{17}{3}}$ 秒後. $\cdots$(答)

【解答 2】

(1) 速度 $\overrightarrow{v}$ の大きさは $\dfrac{t}{2}$ なので $t=0$ から t までに曲線上を動く道のりは

$$\int_0^t \frac{t}{2}\,dt=\frac{t^2}{4}.$$

点 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ から点 $\left(x,\ \dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}\right)$ までのこの曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_1^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx&=\int_1^x \sqrt{1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx\\&=\int_1^x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx\\&=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}\right]_1^x\\&=\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

よって，x と t の関係式は

$$\frac{x^3}{6}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}=\frac{t^2}{4}.$$

つまり

$$t^2=\frac{2x^3}{3}-\frac{2}{x}+\frac{4}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\overrightarrow{v}$ がベクトル $\begin{pmatrix}8\\15\end{pmatrix}$ に平行なとき，曲線の接線の傾きは $\dfrac{15}{8}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2x^2}=\frac{15}{8}.$$

$$\therefore\quad 4x^4-15x^2-4=0.$$

以下**【解答】**と同じ.

第 6 問

A，B の二人がじゃんけんをして，グーで勝てば 3 歩，チョキで勝てば 5 歩，パーで勝てば 6 歩進む遊びをしている。1 回のじゃんけんで A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値を E とする。

(1) B がグー，チョキ，パーを出す確率がすべて等しいとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すとき，E は最大となるか。

(2) B がグー，チョキ，パーを出す比が $a:b:c$ であるとする。A がどのような確率でグー，チョキ，パーを出すならば，任意の a，b，c に対し，$E\geqq 0$ となるか。

分 野

確率・統計：確率，ゲームの理論

考え方

確率の和が 1 であることを考えれば 2 変数になる．例えば，グーをだす確率 p とチョキをだす確率 q を平面上に図示すると見通しがよい．

E を定数とみれば平面上の直線を表す．この直線が，点 $(p,\ q)$ の存在領域を通過する条件が E のとり得る値の範囲．

(2) では任意の a，b，c に対して $E \geqq 0$ となることを要求している．a，b，c がつねに正または 0 であることから p，q についての不等式がたつ．再び pq 平面に図示するのがよいであろう．

【解答】

(1) A がグー，チョキ，パーを出す確率を順に p，q，r とする．A の進む歩数から B の進む歩数を引いた値の期待値 E は

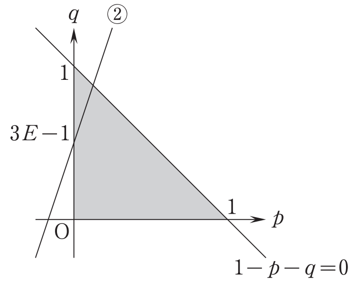
$$E=\left(3\cdot p\cdot\frac{1}{3}-6\cdot p\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(5\cdot q\cdot\frac{1}{3}-3\cdot q\cdot\frac{1}{3}\right)+\left(6\cdot r\cdot\frac{1}{3}-5\cdot r\cdot\frac{1}{3}\right)=-p+\frac{2}{3}q+\frac{1}{3}r.$$

（ただし，アイコの場合は進まないと解釈した）

さて，

$$r=1-p-q\geqq 0,\quad p\geqq 0,\quad q\geqq 0 \qquad \cdots①$$

であるからこれを pq 座標に図示すると右図の網掛部のようになる．



また，$E=-p+\dfrac{2}{3}q+\dfrac{1}{3}(1-p-q)=-\dfrac{4}{3}p+\dfrac{1}{3}q+\dfrac{1}{3}$

より

$$q=4p+3E-1. \qquad \cdots②$$

直線 ② が ① の領域を通過するとき，E が最大になるのは q 切片が最大のとき．

すなわち，$(p,\ q)=(0,\ 1)$ のとき，このとき，$r=0$.

グーを 0，チョキを 1，パーを 0 の確率で出せばよい．　…(答)

(2) 比が同じで $a+b+c=1$ のものがとれるからその場合のみを考えることにする．(1) と同様に

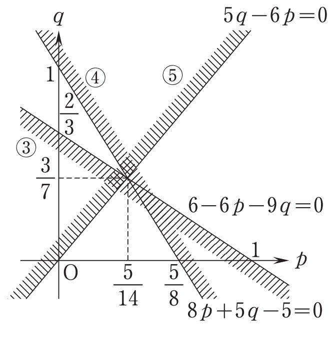
$$E=(3pb-6pc)+(5qc-3qa)+(6ra-5rb)=(6r-3q)a+(3p-5r)b+(5q-6p)c.$$

任意の a，b，c $(a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ a+b+c=1)$ に対して $E\geqq 0$ となる条件は

$$\begin{cases} 6r-3q\geqq 0, \\ 3p-5r\geqq 0, \\ 5q-6p\geqq 0. \end{cases}$$

① より

$$\begin{cases} 6-6p-9q\geqq 0, & \cdots③ \\ 8p+5q-5\geqq 0, & \cdots④ \\ 5q-6p\qquad\geqq 0. & \cdots⑤ \end{cases}$$



③，④，⑤ を pq 座標に図示すると右図のそれぞれの直線の斜線をつけた側になる．

③ かつ ④ かつ ⑤ をみたすのは $(p,\ q)=\left(\dfrac{5}{14},\ \dfrac{3}{7}\right)$ のみ．このとき $r=\dfrac{3}{14}$.

グーを $\dfrac{5}{14}$，チョキを $\dfrac{3}{7}$，パーを $\dfrac{3}{14}$ の確率で出せばよい．　…(答)

1992 年　後期・理科 I 類

第 1 問

定数 a に対して，曲線 $y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}$ の $x \geqq 1$ の部分を $C(a)$ とおく。

(1) $C(a)$ が直線 $y=x$ の下部 $y<x$ に含まれるような実数 a の最大値 a_0 を求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$C(a_0)$ と 3 直線 $y=x$，$x=1$，$x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ によって囲まれる図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体 V の体積 $V(\theta)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} V(\theta)$ を求めよ。

分　野

微分・積分：微分法，積分法

考え方

(1) $\sqrt{x^2-1}+\dfrac{a}{x}<x$ を $a<f(x)$ の形に直して考える．

$x \geqq 1$ における $f(x)$ のとりうる値の範囲がわかれば a のとりうる値の範囲がわかり，最大値もわかる．

(2) 頑張って計算．積分の上端が $\dfrac{1}{\cos\theta}$ となるのは，置換の仕方のヒントになっている．

(3) 極限が計算しにくかったら $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおいて，$\varphi\to+0$ の形に直すと見通しがよくなる．

【解答 1】

(1) $x \geqq 1$ のとき

$$\sqrt{x^2-1}+\frac{a}{x}<x \iff a<x(x-\sqrt{x^2-1}). \qquad \cdots(*)$$

$f(x)=x(x-\sqrt{x^2-1})$ とおくと

$$f'(x)=2x-\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2x\sqrt{x^2-1}-(2x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$$

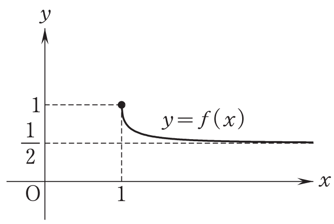
$$=\frac{-1}{(2x\sqrt{x^2-1}+2x^2-1)\sqrt{x^2-1}}<0.$$

また

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\{x^2-(x^2-1)\}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

x	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	↘	$\left(\dfrac{1}{2}\right)$

よって増減表は右図．

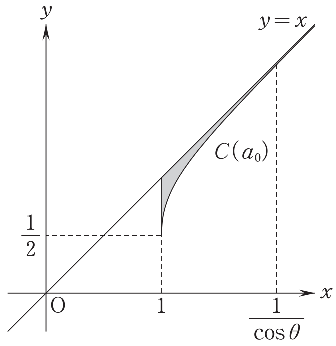


したがって，$x \geqq 1$ においてつねに $(*)$ が成り立つのは

$$a \leqq \frac{1}{2}.$$

a の最大値は $a_0=\dfrac{1}{2}$.　　　　$\cdots$(答)

(2) $C(a_0): y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2x}$ は $x \geqq 1$ においてつねに $y=x$ の下にあるので，囲まれる図形は右図の網掛部となる．



$$\therefore \quad V(\theta)=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left\{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2x}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)dx-\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$$

ここで $x=\dfrac{1}{\cos t}$ $\left(0 \leqq t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\sqrt{x^2-1}=\tan t$,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sin t}{\cos^2 t},\quad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & \dfrac{1}{\cos\theta} \\ \hline t & 0 & \longrightarrow & \theta \end{array}$$

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx=\int_0^{\theta}\tan^2 t\,dt=\int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)dt=\Big[\tan t-t\Big]_0^{\theta}=\tan\theta-\theta.$$

$$\therefore \quad V(\theta)=\pi\left[x+\frac{1}{4x}\right]_1^{\frac{1}{\cos\theta}}-\pi(\tan\theta-\theta)=\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right). \qquad \cdots(答)$$

(3) $$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}V(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}-\tan\theta+\theta\right)$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta+\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\pi\left(\frac{\cos\theta}{4}-\frac{5}{4}+\theta+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$$=\pi\left(-\frac{5}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi(2\pi-5)}{4}. \qquad \cdots(答)$$

【解答 2】

(1) $x \geqq 1$ のとき

$$\sqrt{x^2-1}+\frac{a}{x}<x \iff a<x^2-x\sqrt{x^2-1} \iff a<\frac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$$

$\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}$ は x について減少関数で，その極限は $\dfrac{1}{2}$ だから不等式がつねに成り立つ条件は

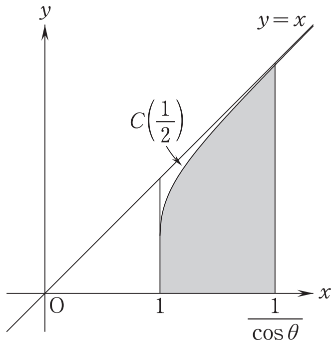
$a \leqq \dfrac{1}{2}$.

$$\therefore \quad a_0=\frac{1}{2}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 3 直線 $y=x$，$x=1$，$x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ および x 軸で囲まれる台形を，x 軸のまわりに回転させてできる円錐台の体積を V_1 とすると

$$V_1=\frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^3-1\right\}.$$

また，2 直線 $x=1$，$x=\dfrac{1}{\cos\theta}$ と曲線 $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ および x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_2=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2x}\right)^2dx$$

$$=\pi\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(x^2-1+\frac{1}{4x^2}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)dx.$$

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\left(x^2-1+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x-\frac{1}{4x}\right]_1^{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{3\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{11}{12}.$$

$x=\dfrac{1}{\cos t}$ $\left(0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$，

x	$1\longrightarrow\dfrac{1}{\cos\theta}$
t	$0\longrightarrow\theta$

$$\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int_0^{\theta}\tan^2t\,dt=\int_0^{\theta}\left(\frac{1}{\cos^2t}-1\right)dt=\Big[\tan t-t\Big]_0^{\theta}=\tan\theta-\theta.$$

$$\therefore\quad V_2=\pi\left(\frac{1}{3\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{11}{12}+\tan\theta-\theta\right).$$

以上より

$$V(\theta)=V_1-V_2$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^3-1\right\}-\pi\left(\frac{1}{3\cos^3\theta}-\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{4}\cos\theta+\frac{11}{12}+\tan\theta-\theta\right)$$

$$=\pi\theta-\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\cos\theta+\frac{\pi}{\cos\theta}-\pi\tan\theta.\qquad\cdots(\text{答})$$

(3) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ とおくと，

$$V(\theta)=V\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\pi^2}{2}-\varphi\pi-\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\sin\varphi+\frac{\pi}{\sin\varphi}-\frac{\pi}{\tan\varphi}.$$

$\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$ のとき $\varphi\to+0$.

$$\lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{\pi}{\sin\varphi}-\frac{\pi}{\tan\varphi}\right)=\pi\lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\right)=\pi\lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)=0.$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}V(\theta)=\lim_{\varphi\to+0}V\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$=\lim_{\varphi\to+0}\left(\frac{\pi^2}{2}-\varphi\pi-\frac{5}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\sin\varphi+\frac{\pi}{\sin\varphi}-\frac{\pi}{\tan\varphi}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\frac{5}{4}\pi.\qquad\cdots(\text{答})$$

(1) の【別解】

$x\geqq1$ のもとで

$$\sqrt{x^2-1}+\frac{a}{x}<x\iff\sqrt{x^2-1}<x-\frac{a}{x}\iff x^2-1<\left(x-\frac{a}{x}\right)^2,\ x>\frac{a}{x}$$

$$\iff(2a-1)x^2<a^2,\ x^2>a.$$

「$x\geqq1$ でつねに $x^2>a$ が成立」$\iff a<1$. …①

$$A:x\geqq 1 \text{ でつねに } (2a-1)x^2<a^2 \text{ が成立}$$

が成り立つ条件を求める．

$$\begin{cases} a>\dfrac{1}{2} \text{ のとき } x^2<\dfrac{a^2}{2a-1} \text{ となり } A \text{ は成り立たない．} \\ a=\dfrac{1}{2} \text{ のとき } 0\cdot x^2<\dfrac{1}{4} \text{ となり } A \text{ は成り立つ．} \\ a<\dfrac{1}{2} \text{ のとき } (2a-1)x^2<0\leqq a^2 \text{ となり } A \text{ は成り立つ．} \end{cases}$$

これと，① から，仮定をみたす a の範囲は $a\leqq\dfrac{1}{2}$.

$$\therefore\quad a_0=\frac{1}{2}. \qquad\cdots(\text{答})$$

第２問

(1) 空間内の直線 L を共通の境界線とし，角 θ で交わる 2 つの半平面 H_1，H_2 がある。H_1 上に点 A，L 上に点 B，H_2 上に点 C がそれぞれ固定されている。ただし，A，C は L 上にはないものとする。半平面 H_1 を，L を軸として，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で回転させる。このとき，θ が増加すると $\angle\mathrm{ABC}$ も増加することを証明せよ。

(2) 空間内の相異なる 4 点 A，B，C，D について，不等式

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{DAB}\leqq 2\pi$$

が成り立つことを証明せよ。

ただし，角の単位はラジアンを用いる。

分　野

代数・幾何：空間図形

考え方

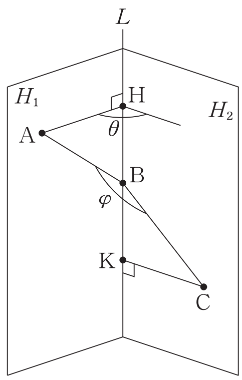
(1) は内積を使ってもよいし，余弦定理を使ってもよい．

(2) は (1) の利用を考える．

【解答】

空間の角は 0 から π までの範囲で考えるものとする．

(1) $\angle\mathrm{ABC}=\varphi$ とおき，A，C から L に下ろした垂線の足をそれぞれ H，K とする．



$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}.$$

さて，L を軸として，A，C を回転したとき，ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{HA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BK}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{KC}}|$ は変化しない．したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ も変化しない．

2 平面のなす角は $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{KC}}$ のなす角に等しい．

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KC}}=|\overrightarrow{\mathrm{HA}}||\overrightarrow{\mathrm{KC}}|\cos\theta.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\overrightarrow{\mathrm{BH}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BK}}+\overrightarrow{\mathrm{KC}})=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}+\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KC}}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}$ は L 上の点 H，B，K の位置によって定まる定数で θ によらない．($\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}=\pm|\overrightarrow{\mathrm{BH}}||\overrightarrow{\mathrm{BK}}|$) よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}+|\overrightarrow{\mathrm{HA}}||\overrightarrow{\mathrm{KC}}|\cos\theta.$$

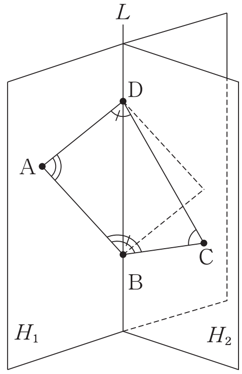
したがって，θ が増加すると，$\cos\theta$ は減少し，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=|\overrightarrow{\mathrm{BA}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\varphi$ は減少し，$\cos\varphi$ は減少する．よって，$\varphi=\angle\mathrm{ABC}$ は増加する．（証明終り）

（注）　余弦定理なら，

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AH}^2-\mathrm{KC}^2+2\mathrm{AH}\cdot\mathrm{KC}\cos\theta}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}$$

となり，AB，BC，AH，KC は変化しないから，φ と θ の増減は一致する．

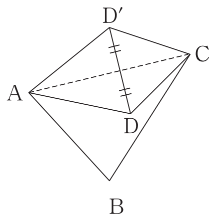
⑵　2 点 B，D を通る直線を L，3 点 A，B，D を含む半平面を H_1，3 点 C，B，D を含む半平面を H_2 とする．2 つの半平面 H_1，H_2 のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおく．⑴と同様に L を軸に H_2 を動かす．このとき，∠BAD，∠DCB は変化しない．また，⑴より，∠ABC，∠CDA は θ が大きいほど大きい．よってこの 2 つの角は $\theta=\pi$ すなわち 4 点が同一平面上にあるとき最大になる．このとき，2 点 A，C はそれぞれ L をはさんだ異なる半平面上にあるから，4 点 A，B，C，D はこの順に四辺形の 4 頂点をなす．よって，この場合に不等式が成り立つことを示せばよい．



これが凸四辺形なら 4 点が同一平面上にあるとき四辺形 ABCD について

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{DAB}=2\pi.$$

また，凹四辺形なら，凹の頂点を D とし，D を直線 AC に関して線対称移動した点を D′ とすると，四辺形 ABCD′ は凸四辺形であり，



$$\angle\mathrm{BCD}\leqq\angle\mathrm{BCD}',\ \angle\mathrm{CDA}=\angle\mathrm{CD}'\mathrm{A},\ \angle\mathrm{DAB}\leqq\angle\mathrm{D}'\mathrm{AB}$$

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}+\angle\mathrm{CDA}+\angle\mathrm{DAB}$$
$$\leqq\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{BCD}'+\angle\mathrm{CD}'\mathrm{A}+\angle\mathrm{D}'\mathrm{AB}=2\pi.$$

よって証明された．（証明終り）

（注）　厳密にいうと，本問の 4 点 A，B，C，D は「異なる」とだけしか条件付けされていないから，4 点のうち，3 点または 4 点が同一直線上にある場合がある．この場合，H_1，H_2 の定義が一意的でなくなる可能性がある．また，もともとは同一直線上になかった 3 点が，H_1，H_2 のなす角を π になるように移動したときに同一直線上にくることもある．

これらの場合，4 点は同一平面上にあるが，これらを結んでできる図形は凸四辺形でも凹四辺形でもない．三角形またはそれから辺が飛び出した形，あるいは線分になる場合が考えられる．したがって，上の議論は正確でないと言えるかもしれない．しかし，これらの場合は上の四辺形の自然な拡張であり，同様な議論でこの命題が成り立つことを示すことができる．そのため，あえて場合分けしなかった．

第 3 問

多項式の列 $P_0(x)=0$，$P_1(x)=1$，$P_2(x)=1+x$，…，$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k$，…を考える。

⑴　正の整数 n，m に対して，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_0(x)$，$P_1(x)$，…，$P_{m-1}(x)$ のいずれかであることを証明せよ。

⑵　等式

$$P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$$

が成立するような正の整数の組 $(l,\ m,\ n)$ をすべて求めよ。

分　野

数学 I ：整式の割り算，整数

考え方

$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割る割り算を直接実行してみるのも一考.

n を m で割った余りを r とおくと $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_r(x)$ となる.

(2) は (1) の利用が鍵. 丹念に項を比較していくこと, 面倒がらずに, 場合分けをしてゆくこと. 何とかなる.

【解答 1】

(1) $n<m$ のとき $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_n(x)$ となり, $1 \leqq n \leqq m-1$ より成立する.

$n \geqq m$ のとき n を m で割った商を q, 余りを r とすると, $q \geqq 1$, $0 \leqq r \leqq m-1$.

このとき, $n=mq+r$ で

$$
\begin{aligned}
P_n(x)&=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\\
&=x^{n-m}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)+\begin{cases}0 & (n=m \text{ のとき})\\ x^{n-m-1}+x^{n-m-2}+\cdots+1 & (n>m \text{ のとき})\end{cases}\\
&=x^{n-m}P_m(x)+P_{n-m}(x).
\end{aligned}
$$

これを繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
P_n(x)&=x^{n-m}P_m(x)+x^{n-2m}P_m(x)+P_{n-2m}(x)\\
&=\cdots\\
&=x^{n-m}P_m(x)+x^{n-2m}P_m(x)+\cdots+x^{n-qm}P_m(x)+P_{n-qm}(x)\\
&=(x^{n-m}+x^{n-2m}+\cdots+x^{n-qm})P_m(x)+P_r(x).
\end{aligned}
$$

$r<m$ なので $P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_r(x)$.

$0 \leqq r<m$ より, 余りは $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$, $P_{m-1}(x)$ のいずれかである. (証明終り)

(2) $P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=(1+x+x^2+\cdots+x^{l-1})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2(m-1)})(1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(n-1)})$

が $P_{100}(x)$ に等しい.

当然 $l>0$, $m>0$, $n>0$. x の係数に注意すると, $l \geqq 2$.

x^2 の係数に注意すると, $l \leqq 2$ または $m=1$.

また,

$$P_l(x)P_n(x^l)=(1+x+x^2+\cdots+x^{l-1})(1+x^l+x^{2l}+\cdots+x^{(n-1)l})=1+x+x^2+\cdots+x^{nl-1}=P_{nl}(x).$$

$\cdots(*)$

(i) $m=1$ のとき

$$P_l(x)P_n(x^4)=(1+x+x^2+\cdots+x^{l-1})(1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(n-1)})=P_{100}(x).$$

x^3 の係数に注意すると, $l \geqq 4$. x^4 の係数に注意すると, $l \leqq 4$ または $n=1$.

(i-a) $n=1$ のとき $P_l(x)=P_{100}(x)$.

$$\therefore\ (l,\ m,\ n)=(100,\ 1,\ 1).$$

(i-b) $l=4$ のとき $(*)$ より, $P_4(x)P_n(x^4)=P_{4n}(x)=P_{100}(x)$.

$$\therefore\ (l,\ m,\ n)=(4,\ 1,\ 25).$$

(ii) $l=2$ のとき

$$P_2(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{2m}(x)P_n(x^4)=(1+x+x^2+\cdots+x^{2m-1})(1+x^4+x^8+\cdots+x^{4(n-1)})=P_{100}(x).$$

x^3 の係数に注意すると, $m \geqq 2$. x^4 の係数に注意すると, $m \leqq 2$ または $n=1$.

(ii-a) $n=1$ のとき $P_{2m}(x)=P_{100}(x)$.

$$\therefore\ (l,\ m,\ n)=(2,\ 50,\ 1).$$

(ii-b) $m=2$ のとき $(*)$ より, $P_4(x)P_n(x^4)=P_{4n}(x)=P_{100}(x)$.

$$\therefore\ (l,\ m,\ n)=(2,\ 2,\ 25).$$

以上より $(l,\ m,\ n)$ の組は

$(100,\ 1,\ 1)$, $(4,\ 1,\ 25)$, $(2,\ 50,\ 1)$, $(2,\ 2,\ 25)$. $\cdots$(答)

【解答 2】

(1)　$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_0(x)$, $P_1(x)$, $\cdots$, $P_{m-1}(x)$ のいずれかである.　…(＊)

を n についての数学的帰納法で証明する.

(Ⅰ)　$n=0$ のとき

$P_0(x)=0$ を $P_m(x)$ で割った余りは $0=P_0(x)$. よって(＊)をみたす.

(Ⅱ)　$n=k$ のとき(＊)が成り立つとする.

このとき $P_k(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_r(x)(0\leqq r\leqq m-1)$ のようにおける.

$$\therefore\quad P_k(x)=P_r(x)+P_m(x)Q(x).$$

ここで任意の l に対して

$$P_{l+1}(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{l-1}+x^l=1+x(1+x+x^2+\cdots+x^{l-2}+x^{l-1})=1+xP_l(x)$$

となることを使う.

$$P_{k+1}(x)=1+xP_k(x)=1+xP_r(x)+xP_m(x)Q(x)=P_{r+1}(x)+P_m(x)xQ(x).$$

$r\neq m-1$ のとき, $P_{k+1}(x)$ を $P_m(x)$ で割った商は $xQ(x)$ で, 余りは $P_{r+1}(x)$ $(1\leqq r+1\leqq m-1)$ となり(＊)は成り立つ.

$r=m-1$ のとき $P_{r+1}(x)=P_m(x)$ だから

$$P_{k+1}(x)=1+xP_k(x)=P_m(x)(1+xQ(x)).$$

$P_{k+1}(x)$ は $P_m(x)$ で割り切れる. よって, 余りは, $P_0(x)=0$ となり(＊)は成り立つ.

よって, $n=k+1$ でも(＊)が成り立つ.

(Ⅰ), (Ⅱ)より(＊)は任意の正の整数 n について成り立つ.　(証明終り)

(2)　**【解答 1】**と同様に,

$$P_l(x)P_n(x^l)=(1+x+x^2+\cdots+x^{l-1})(1+x^l+x^{2l}+\cdots+x^{l(n-1)})=P_{nl}(x)\quad\cdots(＊)$$

であることを使って, 考える.

100 を l で割った余りが r であるとすると, $100=lq+r(q\geqq 0,\ l\geqq 0,\ 0\leqq r\leqq l-1)$

$$P_{100}(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{r-1}+x^1(1+x+x^2+\cdots+x^{lq-1})=P_r(x)+x^rP_l(x)P_q(x^l)$$

だから, $P_{100}(x)$ が $P_l(x)$ で割り切れるなら $r=0$ で

$$P_{100}(x)=P_l(x)P_q(x^l),\ 100=ql.$$

$P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$ だから, $P_{100}(x)$ は $P_l(x)$ で割り切れる. したがって,

$$P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)=P_l(x)P_q(x^l)\quad(ql=100)$$

$P_l(x)\neq 0$ より

$$P_m(x^2)P_n(x^4)=P_q(x^l).\quad(ql=100)$$

左辺は x の偶数乗の項からなる多項式だから $q=1$ または l は偶数.

(i)　$q=1$ のとき, $l=100$. $P_m(x^2)P_n(x^4)=1$. より $m=n=1$.

$$\therefore\quad(l,\ m,\ n)=(100,\ 1,\ 1).$$

(ii)　$q>1$ かつ l が偶数のとき, $l=2l'$, $x^2=t$ とおくと,

$$P_m(t)P_n(t^2)=P_q(t^{l'}).\quad(ql'=50)$$

このとき, t の項を考えると, $l'=1$ または $m=1$.

(ii-a)　$l'=1$ のとき,

$$P_m(t)P_n(t^2)=P_{50}(t).$$

$P_{50}(t)$ が $P_m(t)$ で割り切れることから, m は 50 の約数.

$50=ms$ とおくと

$$P_m(t)P_n(t^2)=P_{ms}(t)=P_m(t)P_s(t^m).$$

$$\therefore\quad P_n(t^2)=P_s(t^m).$$

$$\therefore\quad m=2,\ s=\frac{50}{m}=25=n \text{ または } n=s=1,\ m=\frac{50}{s}=50.$$

$$\therefore\quad(l,\ m,\ n)=(2,\ 2,\ 25) \text{ または } (2,\ 50,\ 1).$$

(ii-b)　$l' \neq 1$ のとき，$m=1$.

$$P_n(t^2)=P_q(t^{l'}).\quad (ql'=50)$$

$q>1$ より $l'=2$，$q=\dfrac{50}{l'}=25=n$.

$$\therefore\quad (l,\ m,\ n)=(4,\ 1,\ 25).$$

以上より $(l,\ m,\ n)$ の組は

$$(100,\ 1,\ 1),\ (2,\ 50,\ 1),\ (2,\ 2,\ 25),\ (4,\ 1,\ 25).\quad \cdots(答)$$

【別解】

(1)　$x \neq 1$ のとき $P_n(x)=\dfrac{x^n-1}{x-1}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ である.

n を m で割った商を q，余りを r とする.

$$n=mq+r,\quad 0 \leqq r \leqq m-1.$$

このとき，$x \neq \pm 1$ で

$$\begin{aligned}P_n(x)&=\frac{x^{mq+r}-1}{x-1}=\frac{x^r(x^{mq}-1)+(x^r-1)}{x-1}\\&=x^r\frac{x^m-1}{x-1}\frac{x^{mq}-1}{x^m-1}+\frac{x^r-1}{x-1}\\&=x^rP_m(x)P_q(x^m)+P_r(x).\end{aligned}$$

多項式についての等式 $P_n(x)=x^rP_m(x)P_q(x^m)+P_r(x)$ は，$x \neq \pm 1$ で成立する．両辺の連続性よりすべての実数で成り立つ.

よって，$P_n(x)$ を $P_m(x)$ で割った余りは $P_r(x)$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$ である.　(証明終り)

(2)　$P_l(x)P_m(x^2)P_n(x^4)=P_{100}(x)$　$\cdots$①

より $x \neq \pm 1$ のとき，

$$\frac{x^l-1}{x-1}\frac{x^{2m}-1}{x^2-1}\frac{x^{4n}-1}{x^4-1}=\frac{x^{100}-1}{x-1}.\quad \cdots②$$

$$\therefore\quad (x^l-1)(x^{2m}-1)(x^{4n}-1)=(x^2-1)(x^4-1)(x^{100}-1).$$

$$\therefore\quad x^{l+2m+4n}-x^{l+2m}-x^{l+4n}-x^{2m+4n}+x^l+x^{2m}+x^{4n}-1=x^{106}-x^{104}-x^{102}-x^6+x^{100}+x^4+x^2-1.$$

両辺の係数および指数を比較して

$$l+2m+4n=106.\quad \cdots③$$

$$\{l+2m,\ l+4n,\ 2m+4n\}=\{6,\ 102,\ 104\}.\quad \cdots④$$

$$\{l,\ 2m,\ 4n\}=\{2,\ 4,\ 100\}.\quad \cdots⑤$$

⑤ が成り立てば ③，④ も成り立ち，② も成り立つ．また，(1) と同様に $x=\pm 1$ も含めてすべての実数に対して，多項式の等式 ① も成り立つ.

⑤ をみたす $(l,\ m,\ n)$ を求めればよい．$4n$ は 4 の倍数なので $4n \neq 2$.　⑤ から可能な $(l,\ 2m,\ 4n)$ は

$$(l,\ 2m,\ 4n)=(2,\ 4,\ 100),\ (2,\ 100,\ 4),\ (4,\ 2,\ 100),\ (100,\ 2,\ 4).$$

$$\therefore\quad (l,\ m,\ n)=(2,\ 2,\ 25),\ (2,\ 50,\ 1),\ (4,\ 1,\ 25),\ (100,\ 1,\ 1).\quad \cdots(答)$$

1993 年　前期・文科

第 1 問

3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ は極大値と極小値をもち，それらを区間 $-1\leqq x\leqq 1$ 内でとるものとする。

この条件をみたすような実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

分　野

基礎解析：整式の微分，極値，**数学 I**：2 次方程式の理論

考え方

2 次方程式 $f'(x)=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ に異なる 2 実解をもつ条件が求めるもの.

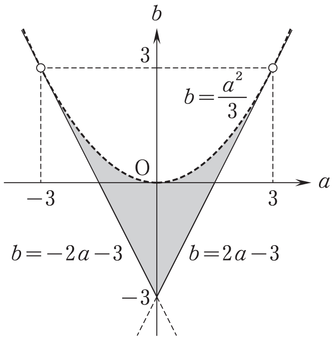
【解答】

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ より 2 次方程式 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$ が $-1\leqq x\leqq 1$ に相異なる 2 実解をもつ条件が求めるものである.

よって

$$\begin{cases}(f'(x)=0 \text{ の判別式})>0,\\ -1\leqq(y=f'(x) \text{ の軸})\leqq 1,\\ f'(1)\geqq 0,\\ f'(-1)\geqq 0\end{cases} \iff \begin{cases}a^2-3b>0,\\ -3\leqq a\leqq 3,\\ 3+2a+b\geqq 0,\\ 3-2a+b\geqq 0.\end{cases}$$

これらを ab 平面に図示すると，下図の網掛部．境界は太線を含み破線および白丸を除く.



…(答)

第 2 問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases}a_1=1,\quad a_2=3,\\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$$

で定める。

a_n が偶数となる n を決定せよ。

分　野

基礎解析：数列，漸化式，**数学 I**：整数

考え方

最初の数項を書き出せば，奇数偶数がどのように並ぶのか見当がつくはず.

あとはその予想を証明すればよい．

【解答】 数学的帰納法

a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，… を順次書き出すと

$$1,\ 3,\ 2,\ -15,\ -59,\ -72,\ \cdots.$$

m を自然数とするとき a_{3m-2}，a_{3m-1} は奇数，a_{3m} は偶数，つまり

$$\begin{cases} a_{3m-2}=2L_m-1, \\ a_{3m-1}=2M_m-1, \quad (L_m,\ M_m,\ N_m \text{ は整数}) \\ a_{3m}=2N_m \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

と表されることを数学的帰納法で証明する．

(I) $m=1$ のとき

$$\begin{cases} a_1=1=2\cdot1-1 & (L_1=1), \\ a_2=3=2\cdot2-1 & (M_1=2), \\ a_3=3a_2-7a_1=2=2\cdot1 & (N_1=1). \end{cases}$$

よって $(*)$ は成り立つ．

(II) $m=k$ のとき $(*)$ が成り立つとすると

$$\begin{aligned} a_{3k+1}&=3a_{3k}-7a_{3k-1}=3\cdot2N_k-7(2M_k-1) \\ &=2(3N_k-7M_k+4)-1=2L_{k+1}-1 \\ a_{3k+2}&=3a_{3k+1}-7a_{3k}=3(2L_{k+1}-1)-7\cdot2N_k \\ &=2(3L_{k+1}-7N_k-1)-1=2M_{k+1}-1 \\ a_{3k+3}&=3a_{3k+2}-7a_{3k+1}=3(2M_{k+1}-1)-7(2L_{k+1}-1) \\ &=2(3M_{k+1}-7L_{k+1}+2)=2N_{k+1}. \end{aligned}$$

L_k，M_k，N_k が整数のとき L_{k+1}，M_{k+1}，N_{k+1} は整数となるから $m=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

したがって，a_n が偶数になるのは n が 3 の倍数のとき． …(答)

【別解】 直接証明

$$\begin{aligned} a_{n+3}-a_n&=(3a_{n+2}-7a_{n+1})-a_n=\{3(3a_{n+1}-7a_n)-7a_{n+1}\}-a_n \\ &=2(a_{n+1}-11a_n). \end{aligned}$$

すべての自然数 n について a_n は整数だから $a_{n+3}-a_n$ は偶数．

すなわち，a_n が奇数なら a_{n+3} も奇数，a_n が偶数なら a_{n+3} も偶数．

$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=2$ より，a_n が偶数になるのは a_3，a_6，a_9，… つまり n が 3 の倍数のとき． …(答)

第３問

xyz 空間内の原点を中心とする半径１の球面

$$S=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1,\ x,\ y,\ z \text{ は実数}\}$$

を考え，S 上の定点 $(0,\ 0,\ 1)$ を A とする。

A とことなる S 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，直線 AP と xy 平面の交点を $\mathrm{Q}(u,\ v,\ 0)$ とする。

k を正の定数とし，点 P が

$$x^2+y^2+z^2=1, \quad x \geqq \frac{1}{k}, \quad y \geqq \frac{1}{k}, \quad z \geqq \frac{1}{k}$$

をみたしながら動くとき，対応する点 Q の動く範囲を uv 平面上に図示せよ。

分　野

代数・幾何：空間図形

考え方

3点A，P，Qが一直線上にある条件および $x^2+y^2+z^2=1$ から x，y，z を消去すると u，v および k の不等式が導かれる．

【解答】

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & \cdots① \\ x \geqq \dfrac{1}{k}, \quad y \geqq \dfrac{1}{k}, \quad z \geqq \dfrac{1}{k}. & \cdots② \end{cases}$$

①，② をみたす領域が存在するためには，点 $\left(\dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k},\ \dfrac{1}{k}\right)$ が ① で表される球面上，または内部にあればよいから，

$$\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2+\left(\frac{1}{k}\right)^2 \leqq 1.$$

$k>0$ より

$$k \geqq \sqrt{3} \quad \left(k=\sqrt{3} \text{ のときは，ただ1点} \left(\frac{1}{k},\ \frac{1}{k},\ \frac{1}{k}\right) \text{を表す}\right).$$

ところで，3点 A(0, 0, 1)，P(x, y, z)，Q(u, v, 0) は一直線上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(tu,\ tv,\ 1-t). \qquad \cdots③$$

P と A とは異なるから $t \neq 0$.

$x=tu$，$y=tv$，$z=1-t$ を ① に代入すると

$$(tu)^2+(tv)^2+(1-t)^2=1$$

$$\therefore \quad t\{(u^2+v^2+1)t-2\}=0$$

$t \neq 0$ より

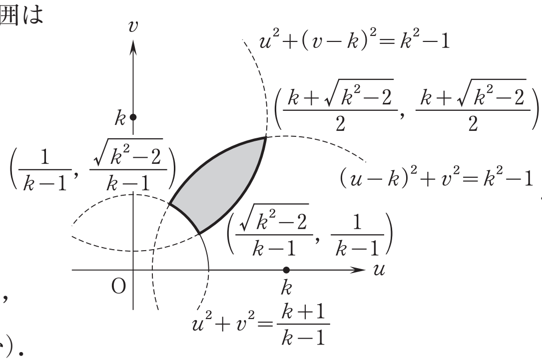
$$t=\frac{2}{u^2+v^2+1}.$$

③ より $x=\dfrac{2u}{u^2+v^2+1}$，$y=\dfrac{2v}{u^2+v^2+1}$，$z=\dfrac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}$.

$$\frac{2u}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k}, \quad \frac{2v}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k}, \quad \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \geqq \frac{1}{k}.$$

$k \geqq \sqrt{3}$ のとき，対応する点 Q(u, v) の動く範囲は

$$\begin{cases} (u-k)^2+v^2 \leqq k^2-1, \\ u^2+(v-k)^2 \leqq k^2-1, \\ u^2+v^2 \geqq \dfrac{k+1}{k-1}. \end{cases}$$



以上より，点Qが動く範囲は

$$\begin{cases} 0<k<\sqrt{3} \text{ ならば，存在しない，} \\ k=\sqrt{3} \text{ ならば，1点} \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \\ k>\sqrt{3} \text{ ならば，右図の網掛部(境界を含む).} \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

(注)　問題文では点Pの存在が前提となっているかどうかが判然としない．点Pの存在が前提であると解釈すれば，$0<k<\sqrt{3}$ の場合について言及しなくてもよい．

第4問

$0 \leqq t \leqq 2$ の範囲にある t に対し，方程式

$$x^4-2x^2-1+t=0$$

の実数解のうち最大のものを $g_1(t)$，最小のものを $g_2(t)$ とおく。

$$\int_0^2 (g_1(t)-g_2(t))\,dt$$

を求めよ。

分 野

基礎解析：整式の積分

考え方

$g_1(t)$，$g_2(t)$ を求めても基礎解析（当時）の範囲では積分はできない.

与方程式を $f(x)=t$ と読んで，4次方程式の解をグラフの上で捉えてみよう.

与えられた積分の図形的意味がわかれば基礎解析でも計算できる.

【解答】

$f(x)=-x^4+2x^2+1$ とおくと，与方程式は

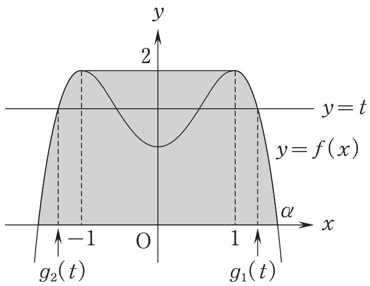
$$f(x)=-x^4+2x^2+1=t \qquad \cdots①$$

とおける.

よって ① の実数解は曲線 $y=f(x)$ と $y=t$ の共有点の x 座標である.

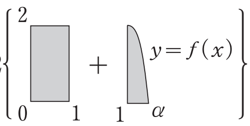
$$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x-1)(x+1).$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	2	↘	1	↗	2	↘



このとき，$I=\int_0^2 \{g_1(t)-g_2(t)\}\,dt$ は上図の網掛部の面積である.

$f(x)=0$ の実数解で最大のものを α とおくと $\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$.



$$I=2\{\ \cdots\ \}=2\times(1\times 2)+2\int_1^\alpha (-x^4+2x^2+1)\,dx$$

$$=4+2\left[-\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right]_1^\alpha=4+2\left(-\frac{\alpha^5}{5}+\frac{2}{3}\alpha^3+\alpha+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right)$$

$$=\frac{16}{15}-\frac{2}{5}\alpha^5+\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha.$$

$\alpha^4-2\alpha^2-1=0$ より

$$-\frac{2}{5}\alpha^5+\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha=-\frac{2}{5}(2\alpha^2+1)\alpha+\frac{4}{3}\alpha^3+2\alpha=\frac{8}{15}\alpha^3+\frac{8}{5}\alpha$$

$$=\frac{8}{15}(4+\sqrt{2})\alpha.$$

$$\therefore\quad I=\frac{16}{15}+\frac{8}{15}(4+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

（参考解） 置換積分（微分・積分（当時））の利用

与方程式を解くと $x^2=1\pm\sqrt{2-t}$ から

$$x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{2-t}}\quad（複号任意）.$$

このうち最大のもの $g_1(t)$ と最小のもの $g_2(t)$ は

$$g_1(t)=\sqrt{1+\sqrt{2-t}},\quad g_2(t)=-\sqrt{1+\sqrt{2-t}}.$$

求める積分は

$$I=2\int_0^2\sqrt{1+\sqrt{2-t}}\,dt$$

となる．

$\sqrt{1+\sqrt{2-t}}=x$ とおいて置換積分法で計算する．

$t=-x^4+2x^2+1$，$\dfrac{dt}{dx}=-4x^3+4x$，$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ とおくと $\begin{array}{c|c} t & 0\longrightarrow 2 \\ \hline x & \alpha\longrightarrow 1 \end{array}$ より

$$\begin{aligned}I&=2\int_\alpha^1 x(-4x^3+4x)\,dx=8\int_1^\alpha(x^4-x^2)\,dx=8\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_1^\alpha\\&=8\left(\frac{\alpha^5}{5}-\frac{\alpha^3}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{8}{15}(3(2\alpha^2+1)\alpha-5\alpha^3+2)=\frac{8}{15}(\alpha^3+3\alpha+2).\qquad(\because\quad \alpha^4-2\alpha^2-1=0)\end{aligned}$$

$\alpha=\sqrt{1+\sqrt{2}}$ を代入すると

$$I=\frac{8}{15}\{(4+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}+2\}\qquad\cdots(\text{答})$$

を得る．

1993 年　前期・理科

第 1 問

すべての面が合同な四面体 ABCD がある。頂点 A，B，C はそれぞれ x，y，z 軸上の正の部分にあり，辺の長さは

$$AB=2l-1,\quad BC=2l,\quad CA=2l+1 \qquad (l>2)$$

である。

四面体 ABCD の体積を $V(l)$ とするとき，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{l\to 2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}$$

分　野

代数・幾何：空間図形，**微分・積分**：関数の極限

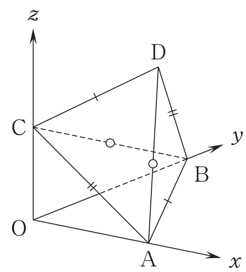
考え方

問題文で与えられた座標系で考えるとよい．頂点 D の座標は座標計算から 2 通り求められるが 2 つは合同な図形なので一方をとればよい．

体積を求めることがすべて．

【解答】　座標計算

A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ とおくと，与式から



$$\begin{cases} AB^2=a^2+b^2=(2l-1)^2, \\ BC^2=b^2+c^2=(2l)^2, \\ CA^2=c^2+a^2=(2l+1)^2 \end{cases} \qquad \cdots①$$

となる．点 D の座標を $(p,\ q,\ r)$ とおく．

四面体 ABCD のすべての面が合同であるから

$$BC=DA,\quad CA=DB,\quad AB=DC.$$

$$\therefore\ \begin{cases} DA^2=(p-a)^2+q^2+r^2=(2l)^2, \\ DB^2=p^2+(q-b)^2+r^2=(2l+1)^2, \\ DC^2=p^2+q^2+(r-c)^2=(2l-1)^2. \end{cases} \qquad \cdots②$$

四面体の各辺の長さが与えられているので，対称性より ①，② をみたす $(p,\ q,\ r)$ を一つ求めればそれでよい．

$(p,\ q,\ r)=(a,\ b,\ c)$ は ①，② をみたすので

$$D(a,\ b,\ c)$$

として考える．

平面 ABC の方程式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1.$

点 D と平面 ABC の距離を h とおくと

$$h=\frac{\left|\dfrac{a}{a}+\dfrac{b}{b}+\dfrac{c}{c}-1\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}}=\frac{2abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}. \qquad \cdots②$$

三角形 ABC の面積を S として，四面体 OABC の体積を 2 通りに表す．ただし，O は原点．

$$\frac{1}{3}\cdot S\cdot(\text{平面 ABC と O の距離})=\frac{1}{3}\cdot OC\cdot\triangle OAB=\frac{abc}{6}.$$

平面 ABC と O の距離は $\dfrac{|-1|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2+\left(\dfrac{1}{c}\right)^2}}=\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.　よって

$$S=\frac{abc}{2}\cdot\frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{abc}=\frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2}.$$

したがって

$$V(l)=\frac{1}{3}Sh=\frac{abc}{3}.$$

① より

$$a^2=\frac{1}{2}(\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2)=\frac{1}{2}\{(2l-1)^2+(2l+1)^2-(2l)^2\}=2l^2+1$$

$$b^2=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2)=\frac{1}{2}\{(2l-1)^2+(2l)^2-(2l+1)^2\}=2l^2-4l$$

$$c^2=\frac{1}{2}(\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2)=\frac{1}{2}\{(2l)^2+(2l+1)^2-(2l-1)^2\}=2l^2+4l$$

$$\therefore\quad V(l)=\frac{abc}{3}=\frac{2l}{3}\sqrt{(2l^2+1)(l-2)(l+2)}.$$

$$\therefore\quad \lim_{l\to 2}\frac{V(l)}{\sqrt{l-2}}=\lim_{l\to 2}\frac{2l}{3}\sqrt{(2l^2+1)(l+2)}=\frac{4}{3}\sqrt{9\cdot 4}=8.$$ …(答)

（注）　①，② をみたす点 D は 2 つあり，それらは平面 ABC について面対称な位置にある．

一方は**【解答】**にある $(a,\ b,\ c)$ であり，他方は計算によると

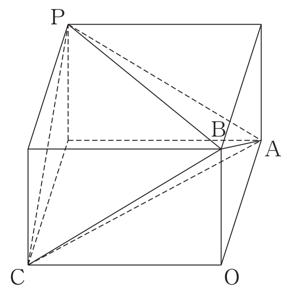
$$\left(a-\frac{4ab^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},\ b-\frac{4a^2bc^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2},\ c-\frac{4a^2b^2c}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}\right)$$

である．これらの点は平面 ABC について面対称であるから D をどちらにとっても $V(l)$ は同じ値になる．したがって，両方について $V(l)$ を調べなくてよい．

【別解】　A，B，C，D を頂点としてもつ直方体がある

原点を O とし，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OB}=b$，$\mathrm{OC}=c$ とおく．

OA，OB，OC を 3 辺にもつ直方体 M を考え，図のように点 P をとる．



$$\mathrm{BC}^2=b^2+a^2=\mathrm{PA}^2,$$
$$\mathrm{CA}^2=c^2+a^2=\mathrm{PB}^2,$$
$$\mathrm{AB}^2=a^2+b^2=\mathrm{PC}^2.$$

四面体のすべての面は合同だから D は P の位置にあるとしてよい．

四面体 ABCD は直方体 M から四面体 OABC に合同な 4 つの四面体を取り除いたものであるから

$$V(l)=(\text{直方体 } M \text{ の体積})-4\times(\text{四面体 OABC の体積})$$
$$=abc-4\times\frac{1}{6}abc=\frac{1}{3}abc.$$

以下 3 辺の長さから a，b，c を l で表し，これから $V(l)$ を l で表し極限を求めるところは**【解答】**と同じ．

第2問

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_1=1,\ a_2=3, \\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

によって定める。

(1) a_n が偶数となることと，n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

分　野

基礎解析：数列，漸化式，**数学 I**：整数

考え方

(1) n が 3 の倍数のとき $a_n=2N$，そうでないとき $a_n=2N+1$ となることを数学的帰納法で証明すればよい.

(2) 5 で割った余りがどのような順序で並ぶかを観察するとよい.

考え方は (1) と同じだが 10 で割った余りを考えると，繰り返しが見えにくい.

【解答】　数学的帰納法

(1) m を自然数とするとき a_{3m-2}，a_{3m-1} は奇数，a_{3m} は偶数，つまり

$$\begin{cases} a_{3m-2}=2L_m-1, \\ a_{3m-1}=2M_m-1, \quad (L_m,\ M_m,\ N_m \text{ は整数}) \\ a_{3m}\ \ =2N_m \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

と表されることを数学的帰納法で証明する.

(I) $m=1$ のとき

$$\begin{cases} a_1=1=2\cdot1-1 & (L_1=1), \\ a_2=3=2\cdot2-1 & (M_1=2), \\ a_3=3a_2-7a_1=2=2\cdot1 & (N_1=1). \end{cases}$$

よって (*) は成り立つ.

(II) $m=k$ のとき (*) が成り立つとすると

$$\begin{aligned} a_{3k+1}&=3a_{3k}-7a_{3k-1}=3\cdot2N_k-7(2M_k-1) \\ &=2(3N_k-7M_k+4)-1=2L_{k+1}-1 \\ a_{3k+2}&=3a_{3k+1}-7a_{3k}=3(2L_{k+1}-1)-7\cdot2N_k \\ &=2(3L_{k+1}-7N_k-1)-1=2M_{k+1}-1 \\ a_{3k+3}&=3a_{3k+2}-7a_{3k+1}=3(2M_{k+1}-1)-7(2L_{k+1}-1) \\ &=2(3M_{k+1}-7L_{k+1}+2)=2N_{k+1}. \end{aligned}$$

L_k，M_k，N_k が整数のとき L_{k+1}，M_{k+1}，N_{k+1} は整数となるから $m=k+1$ のときも (*) は成り立つ.

したがって，a_n が偶数になることと，n が 3 の倍数となることは同値.　(証明終り)

(2) a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，$\cdots$ を順次書き出すと

$$1,\ 3,\ 2,\ -15,\ -59,\ -72,\ \cdots.$$

5 で割った余りのみに注目すると，

$$1,\ 3,\ 2,\ 0,\ 1,\ 3,\ \cdots$$

のように繰り返される. n を自然数とするとき a_n が 5 で割り切れるのは n が 4 で割り切れるときで，それ以外のときも含めて，5 で割った余りは繰り返される．つまり

$$\begin{cases} a_{4m-3}=5A_m+1, \\ a_{4m-2}=5B_m+3, \\ a_{4m-1}=5C_m+2, \\ a_{4m}\ \ =5D_m \end{cases} \quad (A_m,\ B_m,\ C_m,\ D_m \text{ は整数}) \qquad \cdots(**)$$

と表されることを数学的帰納法で証明する.

(i) $m=1$ のとき

$$\begin{cases} a_1=1=5\cdot0+1 & (A_1=0), \\ a_2=3=5\cdot0+3 & (B_1=0), \\ a_3=3a_2-7a_1=2=5\cdot0+2 & (C_1=0), \\ a_4=3a_3-7a_2=-15=5\cdot(-3) & (D_1=-3). \end{cases}$$

よって (**) は成り立つ.

(ii) $m=k$ のとき (**) が成り立つとすると

$$\begin{aligned} a_{4k+1}&=3a_{4k}-7a_{4k-1}=3\cdot5D_k-7(5C_k+2) \\ &=5(3D_k-7C_k-3)+1=5A_{k+1}+1, \\ a_{4k+2}&=3a_{4k+1}-7a_{4k}=3(5A_{k+1}+1)-7\cdot5D_k \\ &=5(3A_{k+1}-7D_k)+3=5B_{k+1}+3, \\ a_{4k+3}&=3a_{4k+2}-7a_{4k+1}=3(5B_{k+1}+3)-7(5A_{k+1}+1) \\ &=5(3B_{k+1}-7A_{k+1})+2=5C_{k+1}+2, \\ a_{4k+4}&=3a_{4k+3}-7a_{4k+2}=3(5C_{k+1}+2)-7(5B_{k+1}+3) \\ &=5(3C_{k+1}-7B_{k+1}-3)=5D_{k+1}. \end{aligned}$$

A_k, B_k, C_k, D_k が整数のとき A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1} は整数となるから $m=k+1$ のときも (**) は成り立つ.

したがって, a_n が 5 の倍数になるのは n が 4 の倍数のとき.

したがって, (1) より, a_n が 10 の倍数になるのは n が 3 の倍数かつ 4 の倍数のとき.

すなわち 12 の倍数のとき. …(答)

【別解】 直接証明

(1) $a_{n+3}-a_n=(3a_{n+2}-7a_{n+1})-a_n=\{3(3a_{n+1}-7a_n)-7a_{n+1}\}-a_n$

$\qquad =2(a_{n+1}-11a_n)$.

すべての自然数 n について a_n は整数だから $a_{n+3}-a_n$ は偶数.

すなわち, a_n が奇数なら a_{n+3} も奇数, a_n が偶数なら a_{n+3} も偶数.

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=2$ より, a_n が偶数になるのは a_3, a_6, a_9, … つまり n が 3 の倍数のとき.

したがって, a_n が偶数であることと, n が 3 の倍数であることは同値.

(証明終り)

(2) $a_{n+4}-a_n=(3a_{n+3}-7a_{n+2})-a_n=\{3(3a_{n+2}-7a_{n+1})-7a_{n+2}\}-a_n$

$\qquad =2a_{n+2}-21a_{n+1}-a_n=2(3a_{n+1}-7a_n)-21a_{n+1}-a_n$

$\qquad =-15(a_{n+1}+a_n)$.

すべての自然数 n について a_n は整数だから $a_{n+4}-a_n$ は 5 の倍数.

すなわち, a_n が 5 の倍数なら a_{n+4} も 5 の倍数, a_n が 5 の倍数でないなら a_{n+4} も 5 の倍数でない.

$a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=2$, $a_4=-15$ より, a_n が 5 の倍数になるのは n が 4 の倍数のとき.

したがって, a_n が 10 の倍数になるのは n が 3 の倍数かつ 4 の倍数のとき.

すなわち 12 の倍数のとき. …(答)

第3問

xy 平面内に次の二つの集合 l, m を考える。

$$l=\{(-5,\ y)\mid -5<y<5\},$$
$$m=\{(5,\ y)\mid -5<y<5\}$$

l, m 上にない 2 点 A, B に対し，A, B を l, m と交らない線分又は折れ線で結ぶとき経路の長さの最小値を $d(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ で表す。

2 点 P$(-9,\ -3)$, Q$(9,\ 3)$ に対し

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})=d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})$$

となる点 R の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

分　野

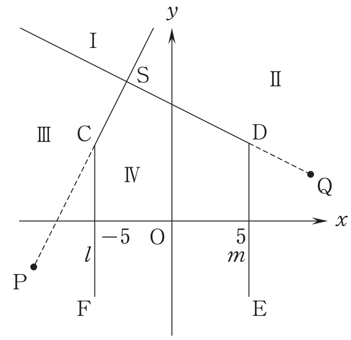
代数・幾何：軌跡，二次曲線

考え方

l, m を通らない最短コースを丹念に場合分けしてそれぞれの場合について，経路の長さが等しい点の軌跡を求める．

2 定点からの距離が等しい点の軌跡は垂直二等分線であり，2 定点からの距離の差が一定である点の軌跡は双曲線である．

【解答】



原点についての対称性より点 R が $y\geqq 0$ の範囲にある場合のみを考えればよい．

C$(-5,\ 5)$, D$(5,\ 5)$, E$(5,\ -5)$, F$(-5,\ -5)$ とおく．また，2 直線 PC, QD の交点は $(-3,\ 9)$ で，これを S とおく．

半平面 $y\geqq 0$ を右図のようにⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳにわける．(境界はⅠまたはⅣに含むとする)

(i)　点 R がⅠの部分にあるとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=\mathrm{QR}$, $d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})=\mathrm{PR}$．よって $\mathrm{QR}=\mathrm{PR}$ つまり R は PQ の垂直二等分線上にある．

PQ の垂直二等分線は O, S を通る．よって，直線 OS のⅠの部分．

(ii)　点 R がⅡの部分にあるとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=\mathrm{QR}$, $d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})>\mathrm{PR}$．ところがⅡの部分では $\mathrm{PR}>\mathrm{QR}$ となるから $d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=\mathrm{QR}<\mathrm{PR}<d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})$．よって条件をみたす R はⅡに存在しない．

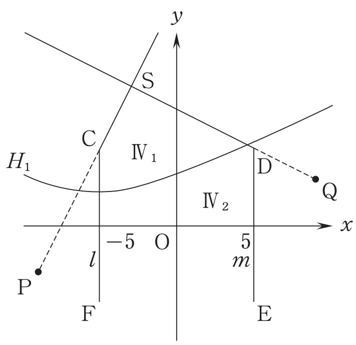
(iii)　点 R がⅢの部分にあるとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})>\mathrm{QR}$, $d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})=\mathrm{PR}$．ところがⅢの部分では $\mathrm{PR}<\mathrm{QR}$ となるから $d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})>\mathrm{QR}>\mathrm{PR}=d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})$．よって条件をみたす R はⅢに存在しない．

(iv)　点 R がⅣの部分にあるとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=\mathrm{QD}+\mathrm{DR}$．

また，$\mathrm{QD}=\mathrm{PF}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$．$\mathrm{PC}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$．



P と R の最短コースは C を経由する場合と F を経由する場合に分けられる．

点 T が $\mathrm{PF}+\mathrm{FT}=\mathrm{PC}+\mathrm{CT}$ すなわち，$\mathrm{FT}-\mathrm{CT}=\mathrm{PC}-\mathrm{PF}=2\sqrt{5}$ となる点の軌跡は C, F を焦点とする双曲線

$$H_1：\frac{(x+5)^2}{20}-\frac{y^2}{5}=-1$$

の $y>0$ の部分．

H_1 でⅣの部分を図のようにⅣ$_1$ とⅣ$_2$ に分ける．

(iv-a)　点 R がⅣ$_1$ の部分にあるときつまり，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})=\mathrm{PC}+\mathrm{CR}$ のとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})$ より $\mathrm{QD}+\mathrm{DR}=\mathrm{PC}+\mathrm{CR}$ つまり $\mathrm{DR}-\mathrm{CR}=\mathrm{PC}-\mathrm{QD}=2\sqrt{5}$ となる．

点 R の軌跡は C，D を焦点とする双曲線

$$H_2:\ \frac{x^2}{5}-\frac{(y-5)^2}{20}=1$$

の $x<0$ の部分．よって，双曲線 H_2 の $x<0$ の部分でⅣ$_1$ の部分．

H_2 は $\mathrm{S}(-3,\ 9)$ を通る．

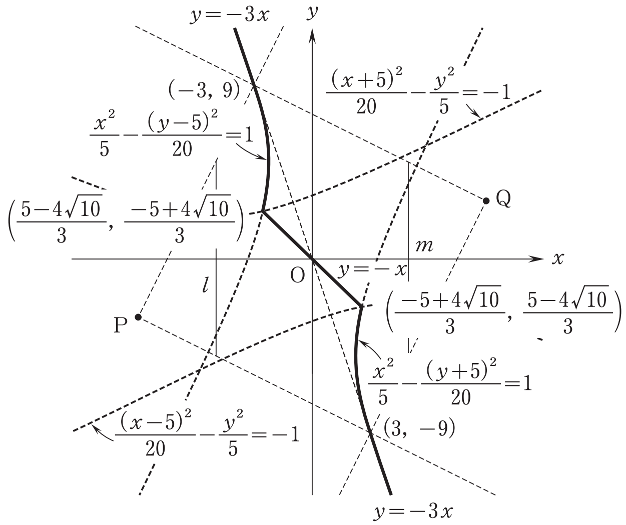
また H_1，H_2 の交点は $x<0$，$y>0$ に注意して，$\left(\dfrac{5-4\sqrt{10}}{3},\ \dfrac{-5+4\sqrt{10}}{3}\right)$.

(iv-b)　点 R がⅣ$_2$ の部分にあるときつまり，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})=\mathrm{PF}+\mathrm{FR}$ のとき

$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{R})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{R})$ より $\mathrm{QD}+\mathrm{DR}=\mathrm{PF}+\mathrm{FR}$．$\mathrm{QD}=\mathrm{PF}$ より $\mathrm{DR}=\mathrm{FR}$ つまり R は DF の垂直二等分線 $y=-x$ 上にある．よって，直線 $y=-x$ のⅣ$_2$ の部分．

$y=-x$ は原点と $\left(\dfrac{5-4\sqrt{10}}{3},\ \dfrac{-5+4\sqrt{10}}{3}\right)$ を通る．

(i)，(ii)，(iii)，(iv-a)，(iv-b) をまとめ，原点に関する対称性を考慮して図をかくと次のようである．



第4問

n を2以上の自然数とし

$$f(x)=x^n+px+q \quad (p,\ q \text{ は実数})$$

の形の n 次関数について積分

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)^2\,dx$$

を考える。I を最小にするような $(p,\ q)$ が唯一組存在することを示し，そのような $(p,\ q)$ と I の最小値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の積分

考え方

定積分を完了すると，I は p，q の2次式になる，n が奇数か偶数かで積分は異なる．いずれにせよ，pq の項が消える．

【解答】

$$I=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^n+px+q)^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^{2n}+2px^{n+1}+2qx^n+p^2x^2+2pqx+q^2)\,dx.$$

(i)　n が奇数のとき，奇関数，偶関数の性質と対称性を利用して，

$$I=\int_0^1(x^{2n}+2px^{n+1}+p^2x^2+q^2)\,dx=\frac{1}{2n+1}+\frac{2p}{n+2}+\frac{p^2}{3}+q^2$$

$$=\frac{1}{3}\left(p+\frac{3}{n+2}\right)^2+q^2+\frac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}.$$

よって，I が最小になるのは $(p,\ q)=\left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right)$ のときのみ．最小値は $\dfrac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2}$.

(ii)　n が偶数のとき，(i)と同様に

$$I=\int_0^1(x^{2n}+2qx^n+p^2x^2+q^2)\,dx=\frac{1}{2n+1}+\frac{2q}{n+1}+\frac{p^2}{3}+q^2$$

$$=\left(q+\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{p^2}{3}+\frac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}.$$

よって，I が最小になるのは $(p,\ q)=\left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right)$ のときのみ．最小値は $\dfrac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2}$.

2以上の自然数 n に対して I を最小にする $(p,\ q)$ は唯1組存在して

$$\begin{cases}(p,\ q)=\left(-\dfrac{3}{n+2},\ 0\right) & (n\text{ が奇数のとき}),\\[2ex] (p,\ q)=\left(0,\ -\dfrac{1}{n+1}\right) & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

最小値は

$$\begin{cases}\dfrac{(n-1)^2}{(2n+1)(n+2)^2} & (n\text{ が奇数のとき}),\\[2ex] \dfrac{n^2}{(2n+1)(n+1)^2} & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

第 5 問

1 と 0 を 5 個ならべた列 10110 をある人が繰返し書き写すとする。ただしこの列を S で表し，これの第 1 回の写しを S_1 で表すとき，第 2 回目に書き写すときは S_1 を書き写す。S_1 の写しを S_2 とするとき，第 3 回目には S_2 を書き写す。以下同様に続ける。

この人が 0 を 1 に写しまちがえる確率は p $(0<p<1)$ であり，1 を 0 に写しまちがえる確率は q $(0<q<1)$ であるが，それ以外の写しまちがいはないものとする。第 n 回の写し S_n が S に一致する確率を $C(n)$ とするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty} C(n)$$

を求めよ。

分 野

確率・統計：確率，**基礎解析**：数列，漸化式，**微分・積分**：数列の極限

考え方

各桁の数が写し間違えるかどうかは独立であることを利用し，5 つの数字について，すべて最初と同じ状態になる確率を求める．

【解答】

ある桁と別の桁が 0 であるか 1 であるかは独立した事象だから各桁ごとに考えればよい．

最初に 1 であった桁が n 回の写しで 1 である確率を a_n，最初に 0 であった桁が n 回の写しで 0 である確率を b_n とおく．

a_n の漸化式は

$$a_{n+1}=(1-q)a_n+p(1-a_n),\quad a_0=1.$$

$$a_{n+1}-\frac{p}{p+q}=(1-p-q)\left(a_n-\frac{p}{p+q}\right).$$

よって数列 $\left\{a_n-\dfrac{p}{p+q}\right\}$ は初項（第 0 項）$1-\dfrac{p}{p+q}=\dfrac{q}{p+q}$，公比 $1-p-q$ の等比数列である．

$$a_n-\frac{p}{p+q}=(1-p-q)^n\frac{q}{p+q}.$$

$$\therefore\quad a_n=(1-p-q)^n\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}.$$

$-1<1-p-q<1$ より $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p-q)^n=0.$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{p}{p+q}.$$

同様にして，b_n の漸化式は

$$b_{n+1}=(1-p)b_n+q(1-b_n),\quad b_0=1.$$

これは a_n の漸化式で p，q を入れ換えたものと一致する．

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{q}{p+q}.$$

$C(n)={a_n}^3{b_n}^2$ だから

$$\lim_{n\to\infty} C(n)=\frac{p^3q^2}{(p+q)^5}. \qquad \cdots(答)$$

第6問

時刻 t における座標が

$$x=2\cos t+\cos 2t,\quad y=\sin 2t$$

で表される xy 平面上の点Pの運動を考える。

(1) Pの速さ，すなわち速度ベクトル $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさ，の最大値と最小値を求めよ。

(2) t が $0\leqq t<2\pi$ の範囲を動く間にPが2回以上通過する点が唯一つ存在することを示し，その点を通過する各々の時刻での速度ベクトルを求め図示せよ。

分 野

微分・積分：微分法，関数の極限，速度・加速度

考え方

(1)は $|\vec{v}|^2=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ を微分すれば $|\vec{v}|$ の最大値，最小値がわかる．

(2)は曲線の概形がつかめれば交わる1点が予想できる．

【解答】

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$．ここで，$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}|\vec{v}|^2&=(-2\sin t-2\sin 2t)^2+(2\cos 2t)^2=4(\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+1)\\&=4(\sin^2 t+4\sin^2 t\cos t+1)=4\{1-\cos^2 t+4(1-\cos^2 t)\cos t+1\}\\&=4(-4\cos^3 t-\cos^2 t+4\cos t+2)\end{aligned}$$

ここで $X=\cos t$ とおき，$f(X)=-4X^3-X^2+4X+2$ $(-1\leqq X\leqq 1)$ とおくと

$$f'(X)=-12X^2-2X+4=-2(3X+2)(2X-1).$$

よって，$f(X)$ の増減は次のよう．

X	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(X)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(X)$		↘		↗		↘	

$$f(-1)=1,\quad f\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27},\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{4},\quad f(1)=1.$$

$|\vec{v}|^2$ の最大値は13，最小値は $\dfrac{8}{27}$．

$|\vec{v}|$ の最大値は $\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$． …(答)

(2) t を $2\pi-t$ で置き換えると $(x,\ y)$ は $(x,\ -y)$ に置き換わる．よって，与えられた図形は x 軸について対称である．したがって，$0\leqq t\leqq\pi$ の範囲で考えればよい．

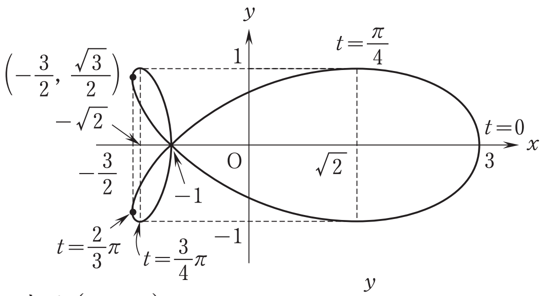
$$\frac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t=-2\sin t(1+2\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=2\cos 2t.$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=0$ となるのは $t=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$，$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるのは $t=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$，また，$y=0$ となるのは $t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi$．

増減等は次のよう．

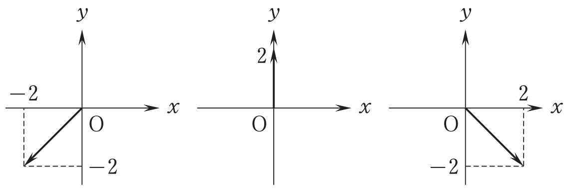
t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$\dfrac{dy}{dt}$	2	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\vec{v}$	↑	↖	←	↙	↓	↘	→	↗	↑
x	3	↘	$\sqrt{2}$	↘	$-\dfrac{3}{2}$	↗	$-\sqrt{2}$	↗	-1
y	0	↗	1	↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘	-1	↗	0

$0\leqq t<2\pi$ においてPがえがくグラフの概形は図のよう．



図よりPが2回以上通る点は $(-1,\ 0)$ で $t=\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$ のとき．それぞれにおける速度ベクトルは $(-2,\ -2)$，$(0,\ 2)$，$(2,\ -2)$．

図は右図．



…(答)

（注1） 点 $(x,\ y)$ と点 $(-1,\ 0)$ を結ぶ直線の傾きを調べると

$$\frac{y}{x+1}=\frac{\sin 2t}{2\cos t+\cos 2t+1}=\cdots=\tan\frac{t}{2}$$

となる．$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$ の範囲で傾きは単調増加であるから，点 $(-1,\ 0)$ 以外の1点を2度通ることはない．

(2)の【別解1】 計算のみから

2回通過する点を $(X,\ Y)$，通過時刻を t_1，t_2 $(0\leqq t_1<t_2<2\pi)$ … ① とする．

$X=2\cos t_1+\cos 2t_1=2\cos t_2+\cos 2t_2$ より

$$2\cos t_1+2\cos^2 t_1-1=2\cos t_2+2\cos^2 t_2-1.$$

$$\therefore\quad (\cos t_1-\cos t_2)(1+\cos t_1+\cos t_2)=0.$$

よって $\cos t_1=\cos t_2$ …②，または $\cos t_1+\cos t_2=-1$ …③．

$$Y=\sin 2t_1=\sin 2t_2. \qquad \cdots ④$$

(i) ② のとき ① より，$t_2=2\pi-t_1$ $(0<t_1<\pi)$．

$$\therefore\quad \sin 2t_2=-\sin 2t_1=\sin 2t_1=0.$$

$$\therefore\quad t_1=\frac{\pi}{2},\quad t_2=\frac{3}{2}\pi.$$

このとき $(X,\ Y)=(-1,\ 0)$．

(ii) ③ のとき ④ より $2t_2=2t_1+2n\pi$ または $2t_2=\pi-2t_1+2n\pi$.

① より

$$t_2=t_1+\pi,\ \cdots⑤,\quad \text{または}\ t_2=-t_1+\frac{2n+1}{2}\pi\ (0\leqq n\leqq 3)\ \cdots⑥.$$

(ii-a) ⑤ のとき $\cos t_2=-\cos t_1$ より ③ をみたさない.

(ii-b) ⑥ のとき $\cos t_2=(-1)^n\sin t_1$.

(ii-b-ア) n が偶数 $(n=0,\ 2)$ のとき ③ より

$$\cos t_1+\sin t_1=-1.\quad \therefore\quad \sin\left(t_1+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\quad t_1=\pi$, または $\dfrac{3}{2}\pi$.

これと ①, ⑥ より $t_1=\pi$, $t_2=\dfrac{3}{2}\pi$.

このとき $(X,\ Y)=(-1,\ 0)$.

(ii-b-イ) n が奇数 $(n=1,\ 3)$ のとき ③ より

$$\cos t_1-\sin t_1=-1.\quad \therefore\quad \sin\left(t_1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\therefore\quad t_1=\dfrac{\pi}{2}$, または π.

これと ①, ⑥ より $t_1=\dfrac{\pi}{2}$, $t_2=\pi$.

このとき $(X,\ Y)=(-1,\ 0)$.

以上より, P が 2 回以上通る点は $(-1,\ 0)$ で 3 回通る. その時刻は $t=\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3}{2}\pi$. それぞれにおける速度ベクトルは $(-2,\ -2)$, $(0,\ 2)$, $(2,\ -2)$. 図は省略.

(2) の【別解 2】 最初から $(-1,\ 0)$ を意識して

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos t+\cos 2t+1 \\ \sin 2t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos t+2\cos^2 t \\ 2\sin t\cos t \end{pmatrix}=2\cos t\begin{pmatrix} 1+\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$=2\cos t\begin{pmatrix} 2\cos^2\dfrac{t}{2} \\ 2\sin\dfrac{t}{2}\cos\dfrac{t}{2} \end{pmatrix}=4\cos t\cos\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} \\ \sin\dfrac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{t}{2} \\ \sin\dfrac{t}{2} \end{pmatrix}$ は $0\leqq t<2\pi$ で異なる t に対して平行ではない. よって, $\cos t\cos\dfrac{t}{2}\neq 0$ のときは同じ点を 2 回通ることはない.

よって, $0\leqq t<2\pi$ で P が同じ点を 2 回以上通る点があるなら $\cos t\cos\dfrac{t}{2}=0$ のとき.

そのような点は $\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. すなわち $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 唯一つである.

点 P は確かに $(-1,\ 0)$ を 2 回以上, すなわち $t=\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3}{2}\pi$ の 3 回通る. (以下略)

(注 2) 与曲線は点 $(-1,\ 0)$ を極とする極方程式

$$r=4\cos 2\theta\cos\theta$$

で表されることがわかる.

1993 年　後期・理科Ⅰ類

第 1 問

n を 3 以上の自然数とする。xy 平面上，原点を中心とし，点 $(1,\ 0)$ をひとつの頂点にもつ正 n 角形を P とする。

(1)　P の像が P に完全に重なるような 1 次変換を表す行列をすべて求めよ。

(2)　(1) で求めた行列すべての和を求めよ。

分　野

代数・幾何：一次変換

考え方

頂点は頂点にうつる．

1 次変換は平行でない 2 つのベクトルの像が定まれば定まる．

したがって，点 $(1,\ 0)$ とそれにとなりあう頂点の像が定まれば 1 次変換を表す行列は定まる．

【解答】

(1)　正 n 角形 P の頂点の座標は点 $(1,\ 0)$ を原点中心に $\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 回転した点であるからその座標は $\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n},\ \sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$ と表せる．

正 n 角形 P の頂点は P の頂点にうつされるから，$(1,\ 0)$ の像は $\left(\cos\dfrac{2l\pi}{n},\ \sin\dfrac{2l\pi}{n}\right)$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ と表せる．

また辺は辺にうつるので点 $(1,\ 0)$ のとなりの頂点 $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n},\ \sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$ の像は $\left(\cos\dfrac{2l\pi}{n},\ \sin\dfrac{2l\pi}{n}\right)$ のとなりの頂点 $\left(\cos\dfrac{2(l+1)\pi}{n},\ \sin\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\right)$ または $\left(\cos\dfrac{2(l-1)\pi}{n},\ \sin\dfrac{2(l-1)\pi}{n}\right)$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のいずれかである．

(i)　$\left(\cos\dfrac{2\pi}{n},\ \sin\dfrac{2\pi}{n}\right)$ の像が $\left(\cos\dfrac{2(l+1)\pi}{n},\ \sin\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\right)$ のとき求める行列を X_l とおくと

$$X_l\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2l\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2l\pi}{n}\end{pmatrix},\quad X_l\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2\pi}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

よって

$$X_l\begin{pmatrix}1 & \cos\dfrac{2\pi}{n}\\ 0 & \sin\dfrac{2\pi}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2l\pi}{n} & \cos\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2l\pi}{n} & \sin\dfrac{2(l+1)\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

$n\geqq 3$ のとき $\sin\dfrac{2\pi}{n}\neq 0$ だから $\begin{pmatrix}1 & \cos\dfrac{2\pi}{n}\\ 0 & \sin\dfrac{2\pi}{n}\end{pmatrix}$ は逆行列 $\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{n}}\begin{pmatrix}\sin\dfrac{2\pi}{n} & -\cos\dfrac{2\pi}{n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ をもつ．

$$\therefore\quad X_l=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & \cos\frac{2(l+1)\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & \sin\frac{2(l+1)\pi}{n}\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}\begin{pmatrix}\sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2l\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2(l+1)\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2l\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2(l+1)\pi}{n}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{n}}\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2l\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & -\sin\frac{2l\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & \cos\frac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

(ii)　$\left(\cos\frac{2\pi}{n},\ \sin\frac{2\pi}{n}\right)$の像が$\left(\cos\frac{2(l-1)\pi}{n},\ \sin\frac{2(l-1)\pi}{n}\right)$のとき求める行列を Y_l とおくと

$$Y_l\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n}\end{pmatrix},\quad Y_l\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n}\\ \sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2(l-1)\pi}{n}\\ \sin\frac{2(l-1)\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

よって

$$Y_l\begin{pmatrix}1 & \cos\frac{2\pi}{n}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & \cos\frac{2(l-1)\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & \sin\frac{2(l-1)\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

$n\geqq 3$ のとき $\sin\frac{2\pi}{n}\neq 0$ だから$\begin{pmatrix}1 & \cos\frac{2\pi}{n}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}$は逆行列をもつ.

(i)と同様に計算して

$$Y_l=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & \cos\frac{2(l-1)\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & \sin\frac{2(l-1)\pi}{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cos\frac{2\pi}{n}\\ 0 & \sin\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & \sin\frac{2l\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & -\cos\frac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}.$$

(i), (ii)より求める行列は

$$X_l=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & -\sin\frac{2l\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & \cos\frac{2l\pi}{n}\end{pmatrix},\quad Y_l=\begin{pmatrix}\cos\frac{2l\pi}{n} & \sin\frac{2l\pi}{n}\\ \sin\frac{2l\pi}{n} & -\cos\frac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}.\quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　X_l は角度 $\frac{2l\pi}{n}$ の回転を表す行列だから

$$X_l={X_1}^l\quad (l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\quad X_0={X_1}^n=E\quad(\text{単位行列}).$$

また

$$(X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1+X_0)(X_1-E)=({X_1}^{n-1}+{X_1}^{n-2}+\cdots+X_1+E)(X_1-E)={X_1}^n-E=O.\quad\cdots①$$

$$X_1-E=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n}-1 & -\sin\dfrac{2\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n}-1\end{pmatrix}$$ において $\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}-1\right)^2+\sin^2\dfrac{2\pi}{n}=2-2\cos\dfrac{2\pi}{n}\neq 0$

$\left(\text{なぜなら } n\geqq 3 \text{ より } \cos\dfrac{2\pi}{n}\neq 1\right)$だから X_1-E は逆行列をもつ．① より

$$X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1+X_0=O.$$

よってその成分から

$$\sum_{l=0}^{n-1}\cos\frac{2l\pi}{n}=\sum_{l=0}^{n-1}\sin\frac{2l\pi}{n}=0.$$

$$\therefore\quad Y_{n-1}+Y_{n-2}+\cdots+Y_1+Y_0=\begin{pmatrix}\sum\limits_{l=0}^{n-1}\cos\dfrac{2l\pi}{n} & \sum\limits_{l=0}^{n-1}\sin\dfrac{2l\pi}{n}\\ \sum\limits_{l=0}^{n-1}\sin\dfrac{2l\pi}{n} & -\sum\limits_{l=0}^{n-1}\cos\dfrac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}=O.$$

以上より，求める和は

$$(X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1+X_0)+(Y_{n-1}+Y_{n-2}+\cdots+Y_1+Y_0)=O. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) の【別解】

(1) より

$$X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1+X_0+Y_{n-1}+Y_{n-2}+\cdots+Y_1+Y_0=2\begin{pmatrix}\sum\limits_{l=0}^{n-1}\cos\dfrac{2l\pi}{n} & 0\\ \sum\limits_{l=0}^{n-1}\sin\dfrac{2l\pi}{n} & 0\end{pmatrix}.$$

一方 $\vec{v}_l=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2l\pi}{n}\\ \sin\dfrac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}$ とおくと $\vec{v}_l$ は単位円に内接する正 n 角形の中心と頂点を結ぶベクトルに等しい．正 n 角形の重心は中心であるから

$$\frac{1}{n}(\vec{v}_0+\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_{n-1})=\vec{0}.$$

$$\therefore\quad \sum_{l=0}^{n-1}\vec{v}_l=\begin{pmatrix}\sum\limits_{l=0}^{n-1}\cos\dfrac{2l\pi}{n}\\ \sum\limits_{l=0}^{n-1}\sin\dfrac{2l\pi}{n}\end{pmatrix}=\vec{0}.$$

$$\therefore\quad \sum_{l=0}^{n-1}\cos\frac{2l\pi}{n}=\sum_{l=0}^{n-1}\sin\frac{2l\pi}{n}=0.$$

$$\therefore\quad X_{n-1}+X_{n-2}+\cdots+X_1+X_0+Y_{n-1}+Y_{n-2}+\cdots+Y_1+Y_0=O. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１） $\sum\limits_{l=0}^{n-1}\vec{v}_l=\vec{0}$ は各ベクトルの矢線の終点と始点を順次結んで１辺の長さが１の正 n 角形が作れることからも導くことができる．

（注２） $\sum\limits_{l=0}^{n-1}\cos\dfrac{2l\pi}{n}=\sum\limits_{l=0}^{n-1}\sin\dfrac{2l\pi}{n}=0$ の別証．

$\sin\dfrac{\pi}{n}$ $(\neq 0)$ を掛ける．積和公式から，

$$\sin\frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\cos\frac{2l\pi}{n}=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\left\{\sin\left(\frac{2l\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{2l\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right\}=0.$$
$$\sin\frac{\pi}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\sin\frac{2l\pi}{n}=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\left\{\cos\left(\frac{2l\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{2l\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}+\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right)\right\}=0.$$

第2問

xy 平面において，直線 l と点 A の距離を $d(l,\ \mathrm{A})$ と書くことにする。さらに，相異なる 3 点 $\mathrm{A}=(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}=(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{C}=(x_3,\ y_3)$ が与えられたとき

$$f(l)=d(l,\ \mathrm{A})^2+d(l,\ \mathrm{B})^2+d(l,\ \mathrm{C})^2$$

とおく。

(1) ある与えられた直線に平行な直線のうち，$f(l)$ を最小にする直線 l_0 は三角形 ABC の重心を通ることを示せ。

(2) 異なる 3 本の直線が $f(l)$ を最小にするならば，三角形 ABC は正三角形であることを示せ。

分　野

代数・幾何：点と直線の距離，**基礎解析**：三角関数

考え方

距離の公式を使う．最小になる条件を求めると，もとの直線が重心を通ることがわかる．

座標設定を上手にとって計算の負担を少なくする．重心を通りいろいろな向きの直線について $f(l)$ を計算し，最小値を求める．

【解答】

(1) l を $px+qy=0$ に平行な直線とする．（ただし，$(p,\ q)\neq(0,\ 0)$ とする.）

l の方程式は

$$px+qy+t=0$$

とおける．このとき

$$f(l)=\frac{(px_1+qy_1+t)^2}{p^2+q^2}+\frac{(px_2+qy_2+t)^2}{p^2+q^2}+\frac{(px_3+qy_3+t)^2}{p^2+q^2}.$$

これを t の関数とみて $g(t)$ とおくと

$$g'(t)=\frac{2}{p^2+q^2}\{p(x_1+x_2+x_3)+q(y_1+y_2+y_3)+3t\}.$$

$g(t)$ は t^2 の係数が正の 2 次関数だから $g'(t)=0$ のとき $f(l)$ は最小になる．

$$\therefore\quad p(x_1+x_2+x_3)+q(y_1+y_2+y_3)+3t=0.$$

このとき

$$p\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)+q\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)+t=0$$

となるから l_0 は三角形 ABC の重心 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ を通る．　（証明終り）

⑵　一般性を失わずに

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\quad \mathrm{B}(b,\ c),\quad \mathrm{C}(-a-b,\ -c)$$

となるように座標系を置き直すことができる．

三角形 ABC の重心は原点 (0, 0)．⑴より $f(l)$ を最小にする直線は原点を通る．原点を通る直線を l_0 とすると，$f(l_0)$ が最小のとき $f(l)$ は最小になる．直線 l_0 と x 軸のなす角を θ とおくと

$$l_0：x\sin\theta-y\cos\theta=0\quad(0\leqq\theta<\pi).$$

このとき θ と l_0 は 1 対 1 に対応する．

$$\begin{aligned}f(l_0)&=(a\sin\theta)^2+(b\sin\theta-c\cos\theta)^2+\{(-a-b)\sin\theta+c\cos\theta\}^2\\&=2(a^2+b^2+ab)\sin^2\theta+2c^2\cos^2\theta-2(a+2b)c\sin\theta\cos\theta\\&=a^2+b^2+ab+c^2-(a^2+b^2+ab-c^2)\cos2\theta-(a+2b)c\sin2\theta.\end{aligned}$$

$((a+2b)c,\ a^2+b^2+ab-c^2)\neq(0,\ 0)$ のとき

$$f(l_0)=a^2+b^2+ab+c^2-\sqrt{(a+2b)^2c^2+(a^2+b^2+ab-c^2)^2}\sin(2\theta+\alpha)\quad(\alpha\text{は適当な角})$$

となり，$f(l_0)$ を最小にする θ は $0\leqq\theta<\pi$ の範囲に唯一つ存在することになり，異なる 3 本の直線で最小になることに反する．

よって $((a+2b)c,\ a^2+b^2+ab-c^2)=(0,\ 0)$．

$c=0$ とすると $a^2+b^2+ab=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2=0$ となり，$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0)$ となる．

このとき $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=(0,\ 0)$ となり ABC は三角形をなさない．

$$\therefore\quad a+2b=0.$$
$$\therefore\quad c^2=a^2+b^2+ab=3b^2.$$
$$\therefore\quad a=-2b,\quad c=\pm\sqrt{3}\,b.$$

このとき $f(l_0)$ は一定値 $6b^2$ で，異なる 3 本以上の直線で最小になる．

また，このとき $\mathrm{A}(-2b,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ \pm\sqrt{3}\,b)$，$\mathrm{C}(b,\ \mp\sqrt{3}\,b)$（複号同順）となり，ABC は正三角形をなす．　（証明終り）

（注）⑵の問題文は間違ってはいないがいささか疑問がある．

【解答】からわかることだが，ABC が正三角形でないときは，$f(l)$ を最小にする直線 l はただ 1 本であり，ABC が正三角形のときは，重心を通る任意の直線 l_0 に対して $f(l_0)$ は $f(l)$ の最小値 $6b^2$ をとる．

したがって，$f(l)$ の最小値を与える l は 1 本であるか無数にあるかのどちらかで，ちょうど 3 本という場合はない．

問題文の「異なる 3 本の直線」を「ちょうど 3 本の異なる直線」と解釈したらこの問題は成り立たない．しかし，この問題を解いてゆけば自然にこれが「すくなくとも 3 本の異なる直線」であることは理解できるであろう．しかし，問題を明確にするためには「すくなくとも」を入れた方がよかったのではないだろうか．

もし，そうしたとしてもなぜ 3 本かという疑問も浮かぶ．正三角形の対称性から 3 本になったのかもしれないが，ここは 2 本でよかったように思える．

「すくなくとも 2 本の異なる直線」とするのが適切であろう．

第3問

放物線の一部 $y=x^2$，$0\leqq x\leqq 2$，を y 軸のまわりに回転してできる回転体型の容器に水を満たし，このなかに，半径 r の鉛の球を，それが容器につかえて止るまでゆっくり沈めた。ただし，鉛直線を y 軸とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) もとの水面の高さから球の中心の高さを引いた差 s を r の関数として表せ。

(2) あふれ出る水の体積を最大にする r の値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の積分，体積

考え方

球の大きさで場合分けられる．(1)は接点の位置で，(2)は球の一部が水面上にあるかどうかで場合分けされる．

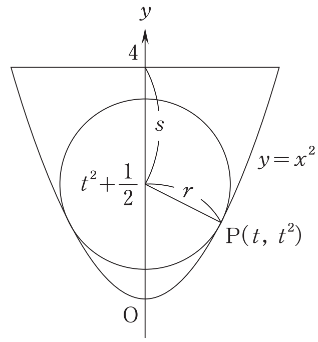
【解答】

(1) 鉛の球を xy 平面で切った切り口を考える．

(i) $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ $(0<t\leqq 2)$ で接するとき，

Pにおける法線の式は

$$y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}.$$



点Pで接する円の中心は $\left(0,\ t^2+\dfrac{1}{2}\right)$.

その半径が r だから $r^2=t^2+\dfrac{1}{4}$.

$0<t\leqq 2$ より $\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

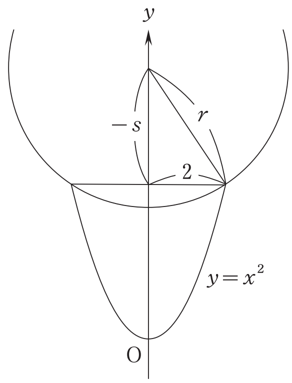
このとき，$s=4-\left(t^2+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{7}{2}-t^2=\dfrac{15}{4}-r^2$.

(ii) $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，

円が原点で放物線と接するので $s=4-r$.

(iii) $r>\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ のとき，

右図より $s=-\sqrt{r^2-4}$.



以上まとめて

$$s=\begin{cases} 4-r & \left(0<r\leqq\dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{15}{4}-r^2 & \left(\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right) \\ -\sqrt{r^2-4} & \left(r>\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right) \end{cases}\qquad\cdots(答)$$

(2) あふれでる水の体積を V とおく．

(I) $s\geqq r$ のとき，

$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ のときは当然 $s=4-r>r$.

$\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ のとき，

$$s-r=\frac{15}{4}-r^2-r=\left(\frac{3}{2}-r\right)\left(\frac{5}{2}+r\right)\geqq 0.$$

よって，$r\leqq\frac{3}{2}$．このとき，

球全体が水没するので，$V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

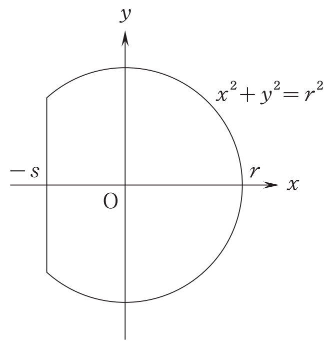
V は r の増加関数.

(II) $r>\frac{\sqrt{17}}{2}$ のとき，

図より明らかに V は r の減少関数.

(III) $\frac{3}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}$ のとき，

V は右図の弓形を x 軸回転してできる立体の体積.



$$V=\int_{-s}^{r}\pi(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-s}^{r}=\frac{\pi}{3}(2r^3+3r^2s-s^3).$$

$s=\frac{15}{4}-r^2$，$s'=\frac{ds}{dr}=-2r$ より

$$\begin{aligned}\therefore\quad V'&=\pi(2r^2+2rs+r^2s'-s^2s')\\&=2\pi(r^2+rs-r^3+rs^2)=2\pi r(r+s)(1-r+s)\\&=2\pi r\left(r^2-r-\frac{15}{4}\right)\left(r^2+r-\frac{19}{4}\right)\\&=2\pi r\left(r-\frac{5}{2}\right)\left(r+\frac{3}{2}\right)\left(r^2+r-\frac{19}{4}\right).\end{aligned}$$

$\frac{3}{2}\leqq r\leqq\frac{\sqrt{17}}{2}$ において $V'=0$ となるのは $r=\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$.

r	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{17}}{2}$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

(I)，(II)，(III) よりあふれる水の体積を最大にするのは $r=\frac{-1+2\sqrt{5}}{2}$. …(答)

(1) の【解答 2】

xy 平面で切った切り口の円の中心を $\mathrm{A}(0,\,a)$ とする.

放物線上の点 $\mathrm{P}(t,\,t^2)$ $(-2\leqq t\leqq 2)$ とおく.

$$\mathrm{AP}^2=t^2+(t^2-a)^2=\left(t^2-\frac{2a-1}{2}\right)^2+\frac{4a-1}{4}.$$

AP の最小値が r．$\mathrm{AP}^2=f(t)$ とおく.

(i) $0<a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $t=0$ で $f(t)$ は最小値 a^2 をとる．$\therefore$ $r=a$．このとき $0<r\leqq\frac{1}{2}$.

(ii) $0<\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}\leqq 2$ とすると，$\frac{1}{2}<a\leqq\frac{9}{2}$.

このとき $t=\pm\frac{\sqrt{2a-1}}{\sqrt{2}}$ で $f(t)$ は最小値 $\frac{4a-1}{4}$ をとる.

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{4a-1}}{2}.\quad\therefore\quad a=r^2+\frac{1}{4}$$

$\dfrac{1}{2}<a\leqq\dfrac{9}{2}$ より $\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

(iii) $a\geqq\dfrac{9}{2}$ のとき $t=\pm2$ で $f(t)$ は最小値 $(a-4)^2+4$ をとる.

$$\therefore\quad r=\sqrt{(a-4)^2+4}.\quad\therefore\quad a=4+\sqrt{r^2-4}.\quad\left(\because\quad a\geqq\frac{9}{2}>4\right)$$

このとき $r\geqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

$s=4-a$ より $s=-\sqrt{r^2-4}$

以上まとめて

$$s=\begin{cases}4-r & \left(0<r\leqq\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{15}{4}-r^2 & \left(\dfrac{1}{2}<r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\\ -\sqrt{r^2-4} & \left(r>\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

1994 年　前期・文科

第 1 問

xy 平面上で，次の条件をみたす点 $(x,\ y)$ の範囲を D とする。

$$\log_2 x \leqq 2+\log_2 y \leqq \log_2 x+\log_2(4-2x)$$

(1)　D を xy 平面上に図示せよ。

(2)　$s<1$ のとき，$y-sx$ の D 上での最大値 $f(s)$ を求め，関数 $t=f(s)$ のグラフを st 平面上に図示せよ。

分　野

基礎解析：対数，**数学 I** ：不等式と領域，最大・最小

考え方

真数条件を押え，両辺の対数をはずす．

得られた領域と直線 $y-sx=k$ が共有点が存在する k の最大値が $f(s)$.

【解答】

$$\log_2 x \leqq 2+\log_2 y \leqq \log_2 x+\log_2(4-2x) \qquad \cdots①$$

とおく．

(1)　真数条件より $x>0$，$y>0$，$4-2x>0$.

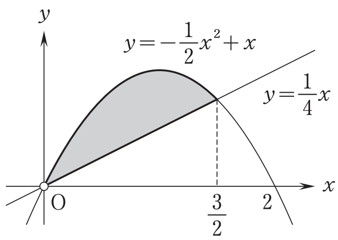
$$0<x<2,\quad y>0. \qquad \cdots②$$

① より $x \leqq 4y \leqq x(4-2x)$.

$$\frac{x}{4} \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2+x.$$

$y=\dfrac{x}{4}$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ の交点は $(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{8}\right)$.

①，② より，D は右図の網掛部．原点以外の境界を含む．



(2)　$y-sx=k$ とおくと，

$$y=sx+k \quad (s<1) \qquad \cdots③$$

この直線が D と共有点をもつときの k（y 切片）の最大値が $f(s)$ である．

$g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ とおくと $g'(x)=-x+1$. ∴　$g'(0)=1$，$g'\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

(i)　$s<-\dfrac{1}{2}$ のとき

直線 ③ が点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{8}\right)$ を通るとき k は最大値

$$k=\frac{3}{8}-\frac{3}{2}s$$

をとる．

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \leqq s<1$ のとき

直線 ③ が放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ と接するとき k は最大となる．

$sx+k=-\dfrac{1}{2}x^2+x$ より $x^2+2(s-1)x+2k=0$.

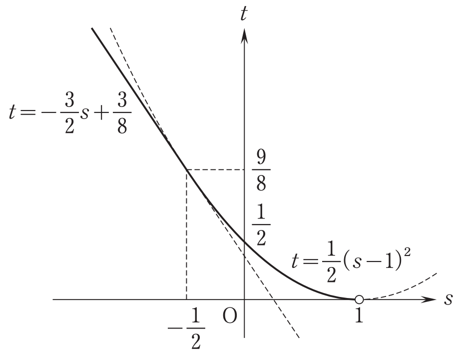
$\dfrac{1}{4}$(判別式)$=(s-1)^2-2k=0$.

$$\therefore \quad k=\frac{1}{2}(s-1)^2.$$

以上より

$$f(s)=\begin{cases} -\dfrac{3}{2}s+\dfrac{3}{8} & \left(s<-\dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{1}{2}(s-1)^2 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq s<1\right). \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

グラフは右図.



(注) (ii)の接する条件は微分法を使って求めてもよい.

第2問

xy 平面上の2点P，Qに対し，PとQを x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す。

(1) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ と点 $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ に対し，$d(\mathrm{A},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

分　野

数学Ⅰ：平面座標

考え方

$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ の意味をつかむことが先決.

あとは丁寧に場合分けする．一部線分でなく領域になることがある.

【解答】

$\mathrm{P}(p,\ r)$，$\mathrm{Q}(q,\ s)$ のとき，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=|p-q|+|r-s|$.

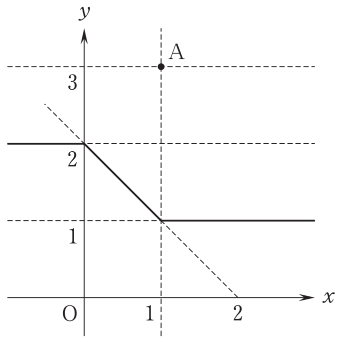
(1) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 3)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ より

$$|x|+|y|=|x-1|+|y-3|. \qquad \cdots①$$

次のように場合分けをする．① より

	$x\leqq 0$	$0\leqq x\leqq 1$	$x\geqq 1$
$y\geqq 3$	$-x+y=-x+1+y-3$. 成り立たない.	$x+y=-x+1+y-3$. $\therefore\ x=-1$. 不適.	$x+y=x-1+y-3$. 成り立たない.
$0\leqq y\leqq 3$	$-x+y=-x+1-y+3$. $\therefore\ y=2$.	$x+y=-x+1-y+3$. $\therefore\ x+y=2$.	$x+y=x-1-y+3$. $\therefore\ y=1$.
$y\leqq 0$	$-x-y=-x+1-y+3$. 成り立たない.	$x-y=-x+1-y+3$. $\therefore\ x=2$. 不適.	$x-y=x-1-y+3$. 成り立たない.

以上より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲は下図の折れ線.



…(答)

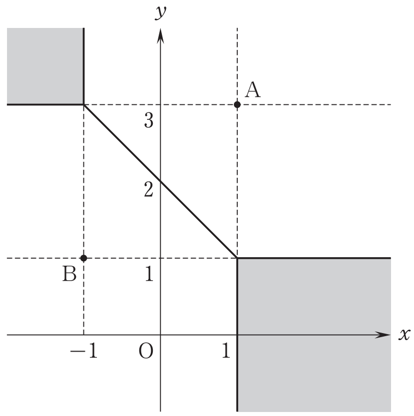
⑵ A(1, 3)，B(−1, 1)，P(x, y)，d(A, P)$=d$(P, B) より

$$|x-1|+|y-3|=|x+1|+|y-1|. \qquad \cdots②$$

次のように場合分けをする．② より

	$x\leqq-1$	$-1\leqq x\leqq1$	$x\geqq1$
$y\geqq3$	$-x+1+y-3$ $=-x-1+y-1.$ つねに成り立つ．	$-x+1+y-3$ $=x+1+y-1.$ $\therefore\ x=-1.$	$x-1+y-3$ $=x+1+y-1.$ 成り立たない．
$1\leqq y\leqq3$	$-x+1-y+3$ $=-x-1+y-1.$ $\therefore\ y=3.$	$-x+1-y+3$ $=x+1+y-1.$ $\therefore\ x+y=2.$	$x-1-y+3$ $=x+1+y-1.$ $\therefore\ y=1.$
$y\leqq1$	$-x+1-y+3$ $=-x-1-y+1.$ 成り立たない．	$-x+1-y+3$ $=x+1-y+1.$ $\therefore\ x=1.$	$x-1-y+3$ $=x+1-y+1.$ つねに成り立つ．

以上より，点 P(x, y) の存在範囲は下図の網掛部およびその境界，および (1, 1)，(−1, 3) を結ぶ線分．



…(答)

第3問

$0<a\leqq 1$ に対し，行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+2a\end{pmatrix}$ を考える。

$\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ のとき，ベクトル $A\overrightarrow{u}$ の長さ $|A\overrightarrow{u}|$ について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(2-\sqrt{2})a\leqq|A\overrightarrow{u}|\leqq 2+\sqrt{2}$$

ただし $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ とする。

分　野

代数・幾何：一次変換，**基礎解析**：三角関数，合成公式

考え方

$|A\overrightarrow{u}|^2$ を θ で表すと，2θ の式になり合成できるのでその最大，最小は求められる．

このようにして求められた，$|A\overrightarrow{u}|$ の最大値より $2+\sqrt{2}$ が大きいか等しく，最小値より $(2-\sqrt{2})a$ が小さいか等しいことを示せばよい．

【解答】

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta+\sin\theta\\ \cos\theta+(1+2a)\sin\theta\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}|A\overrightarrow{u}|^2&=(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta+(1+2a)\sin\theta)^2\\&=2+4(1+a)\cos\theta\sin\theta+4a(1+a)\sin^2\theta\\&=2+2(1+a)\sin 2\theta+2a(1+a)(1-\cos 2\theta)\\&=2(a^2+a+1)+2(a+1)(\sin 2\theta-a\cos 2\theta)\\&=2(a^2+a+1)+2(a+1)\sqrt{a^2+1}\sin(2\theta-\alpha).\end{aligned}$$

ただし α は適当な角である．

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ より，$-1\leqq\sin(2\theta-\alpha)\leqq 1$.

また $a>0$ より $a+1>0$.

$$2(a^2+a+1)-2(a+1)\sqrt{a^2+1}\leqq|A\overrightarrow{u}|^2\leqq 2(a^2+a+1)+2(a+1)\sqrt{a^2+1}.$$

$$\therefore\quad (a+1-\sqrt{a^2+1})^2\leqq|A\overrightarrow{u}|^2\leqq(a+1+\sqrt{a^2+1})^2.$$

$0<a\leqq 1$ のとき，$(a+1)^2-(a^2+1)=2a>0$ だから $a+1>\sqrt{a^2+1}$.

$$\therefore\quad a+1-\sqrt{a^2+1}\leqq|A\overrightarrow{u}|\leqq a+1+\sqrt{a^2+1}. \qquad \cdots①$$

$0<a\leqq 1$ のとき

$$a+1+\sqrt{a^2+1}\leqq 1+1+\sqrt{1+1}=2+\sqrt{2}. \qquad \cdots②$$

また

$$a+1-\sqrt{a^2+1}=\frac{2a}{a+1+\sqrt{a^2+1}}\geqq\frac{2a}{2+\sqrt{2}}=(2-\sqrt{2})a. \qquad \cdots③$$

①，②，③ より

$$\therefore\quad (2-\sqrt{2})a\leqq|A\overrightarrow{u}|\leqq 2+\sqrt{2}.$$

（証明終り）

第 4 問

$0<c<1$ とする。3 次関数 $f(x)=-4x^3+3x^2$ に対し,

$$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)\,dt,\quad f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)\,dt$$

とおく。以下，関数 $f_3(x)$，$f_4(x)$，… を順次

$$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt\quad (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

により定める。

(1) 関数 $f_n(x)$ を求めよ。

(2) $f_n(x)$ について，$0<x<1$ のとき，$f_n(x)=0$ をみたす x がただひとつ存在することを示せ。

分　野

基礎解析：数列，整式の微分，整式の積分

考え方

順次書き出して結果を予想して数学的帰納法で証明する.

【解答】

(1)

$$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)\,dt=-4x^3+3x^2-c^4+c^3,$$

$$f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)\,dt=-4x^3+3x^2-c^4+c^3-c^5+c^4=-4x^3+3x^2-c^5+c^3,$$

$$f_3(x)=f(x)+\int_0^c f_2(t)\,dt=-4x^3+3x^2-c^4+c^3-c^6+c^4=-4x^3+3x^2-c^6+c^3,$$

$$\cdots$$

より

$$f_n(x)=-4x^3+3x^2-c^{n+3}+c^3 \qquad \cdots(*)$$

と推定される.

$n=1$ のとき (*) が成り立つことは上の計算から明らか.

$n=k$ のとき (*) が成り立つとすると

$$f_{k+1}(x)=f(x)+\int_0^c f_k(t)\,dt=-4x^3+3x^2+\int_0^c(-4t^3+3t^2-c^{k+3}+c^3)\,dt$$
$$=-4x^3+3x^2-c^4+c^3-c^{k+4}+c^4=-4x^3+3x^2-c^{k+4}+c^3.$$

数学的帰納法により (*) はすべての自然数 n について成り立つ.

よって,

$$f_n(x)=-4x^3+3x^2-c^{n+3}+c^3 \qquad \cdots(答)$$

(2) $f_n'(x)=-12x^2+6x=-6x(2x-1)$.

$f_n(x)$ の増減は次のよう.

x	(0)	…	$\frac{1}{2}$	…	(1)
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$		↗		↘	

ここで

$$f_n(0)=c^3(1-c^n)>0, \qquad (0<c<1 \text{ より})$$
$$f_n(1)=-1+c^3-c^{n+3}=-(1-c^3)-c^{n+3}<0. \qquad (0<c<1 \text{ より})$$

よって $f_n(x)$ は $0<x\leqq\frac{1}{2}$ でつねに正であり，$\frac{1}{2}<x<1$ で単調に減少して正から負に変わる.

以上より，$f_n(x)=0$ は $0<x<1$ にただひとつの解をもつ．（証明終り）

(1) の**【別解】**

$f_0(x)=f(x)$，$a_n=\int_0^c f_n(t)\,dt$ とおくと，

$$f_n(x)=f(x)+a_{n-1} \quad (n\geqq 1) \qquad \cdots ①$$

とかけて，

$$a_0=\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c(-4t^3+3t^2)\,dt=\Big[-t^4+t^3\Big]_0^c=-c^4+c^3=c^3(1-c). \qquad \cdots ②$$

① の両辺を積分すると

$$a_n=a_0+ca_{n-1} \quad (n\geqq 1). \qquad \cdots ③$$

$\alpha=a_0+c\alpha$ とおくと，② から $\alpha=\dfrac{a_0}{1-c}=c^3$．③ から

$$a_n-c^3=c(a_{n-1}-c^3) \quad (n\geqq 1)$$

となる．これから

$$a_n-c^3=c^n(a_0-c^3)=-c^{n+4} \qquad (② より).$$

$$\therefore \quad a_n=c^3-c^{n+4} \quad (n\geqq 0).$$

① から

$$f_n(x)=f(x)+a_{n-1}=-4x^3+3x^2+c^3-c^{n+3}. \qquad \cdots (答)$$

1994 年　前期・理科

第 1 問

$$f(x)=x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{24}$$

$$g(x)=x^5+x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x+\frac{1}{120}$$

とする。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1)　任意の実数 x に対し，$f(x)>0$ である。

(2)　方程式 $g(x)=0$ はただひとつの実数解 α をもち，$-1<\alpha<0$ となる。

分　野

基礎解析：整式の微分，方程式への応用

考え方

$f(x)$ の増減を調べる．$f'(x)$ の正負がわからなければもう 1 回微分する．わかるまで繰り返す．

【解答】

(1)　$f'(x)=4x^3+3x^2+x+\dfrac{1}{6}$,

$f''(x)=12x^2+6x+1$.

$f''(x)=0$ の判別式を D_1 とおくと $\dfrac{1}{4}D_1=9-12<0$.

よって $f''(x)>0$. $f'(x)$ は 3 次関数だから $-\infty$ から $+\infty$ へ単調増加する．
$f'(x)=0$ のただ 1 つの実数解を β とおくと $f(x)$ は $x=\beta$ で最小となる．

$$f(x)=\frac{1}{4}\left(4x^3+3x^2+x+\frac{1}{6}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right).$$

$f'(\beta)=0$ より

$$f(\beta)=\frac{1}{16}\left(\beta^2+\beta+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}\left\{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}>0.$$

よって $f(x)\geqq f(\beta)>0$.　　（証明終り）

(2)　$g'(x)=5x^4+4x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{24}$,

$g''(x)=20x^3+12x^2+3x+\dfrac{1}{3}$,

$g'''(x)=60x^2+24x+3$.

$g'''(x)=0$ の判別式を D_3 とおくと $\dfrac{1}{4}D_3=12^2-3\times 60<0$.

よって $g'''(x)>0$. $g''(x)$ は 3 次関数だから $-\infty$ から $+\infty$ へ単調増加する．
$g''(x)=0$ のただ 1 つの実数解を γ とおくと $g'(x)$ は $x=\gamma$ で最小となる．

$$g'(x)=\frac{1}{4}\left(20x^3+12x^2+3x+\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{20}x^2+\frac{1}{10}x+\frac{1}{40}.$$

$g''(\gamma)=0$ より $g'(\gamma)=\dfrac{3}{20}\gamma^2+\dfrac{1}{10}\gamma+\dfrac{1}{40}$.

$\dfrac{3}{20}x^2+\dfrac{1}{10}x+\dfrac{1}{40}=0$ の判別式を D_4 とおくと $D_4=\dfrac{1}{100}-4\times\dfrac{3}{20}\times\dfrac{1}{40}=-\dfrac{1}{200}<0$.

よって $g'(x)\geqq g'(\gamma)>0$.

よって，$g(x)$ は単調増加.

$g(0)=\dfrac{1}{120}>0$，$g(-1)=-\dfrac{11}{30}<0$.

よって，$g(x)=0$ の実数解はただ 1 つで，その解 α は $-1<\alpha<0$ をみたす．（証明終り）

【別解】

(1) $f(x)=\dfrac{x^4}{0!}+\dfrac{x^3}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x}{3!}+\dfrac{1}{4!}$.

$f(0)>0$ は明らか.

$x\neq 0$ のとき，

$F(x)=x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}>0$ を示す.

$$F'(x)=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!},$$

$$F''(x)=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}>0.$$

よって $F'(x)$ は単調増加.

$F'(x)=0$ のただ 1 つの実数解を β とおくと，$\beta\neq 0$ で $F(x)$ は $x=\beta$ で最小となる.

$$F(\beta)=F'(\beta)+\frac{\beta^4}{4!}=\frac{\beta^4}{4!}>0.$$

よって，$F(x)\geqq\dfrac{\beta^4}{4!}>0$．よって，$x\neq 0$ のとき $f\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$.

よって，任意の実数 x について $f(x)>0$．（証明終り）

(2) $g(x)=\dfrac{x^5}{0!}+\dfrac{x^4}{1!}+\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x}{4!}+\dfrac{1}{5!}$.

$g(0)=\dfrac{1}{5!}\neq 0$ は明らか．よって，$\alpha\neq 0$.

$x\neq 0$ のとき，

$G(x)=x^5 g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}$ とおく.

$G(0)\neq 0$，$G(x)=0$ が $x<-1$ の範囲にただ 1 つの実数解をもつことを示す.

$G'(x)=\dfrac{1}{0!}+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}=F(x)$．(1) より $G'(x)>0$.

よって $G(x)$ は単調増加.

$G(x)=0$ の 1 つの実数解を γ とおくと，$G(-1)=\dfrac{11}{30}>0$．$\therefore\ \gamma<-1$.

$G(\gamma)=\gamma^5 g\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)=0$ より $\alpha=\dfrac{1}{\gamma}$.

$$\therefore\ -1<\alpha<0.$$

（証明終り）

（注） $F(x)$，$G(x)$ は **1971 年文科　第 4 問**の $f_4(x)$，$f_5(x)$ とそれぞれ同じ.

【別解 2】　上手に変形すれば

(1)　$f(x)=x^2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\left\{\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{18}\right\}>0.$　　（証明終り）

(2)　$g'(x)=5x^4+4x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{24}$

$$=5x^2\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{10}\left(x+\frac{5}{21}\right)^2+\frac{1}{504}>0.$$

よって $g(x)$ は単調増加.（以下**【解答】**と同じ）

第 2 問

$a=\sin^2\dfrac{\pi}{5}$，$b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$ とおく。このとき，以下のことが成り立つことを示せ。

(1)　$a+b$ および ab は有理数である。

(2)　任意の自然数 n に対し $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数である。

分　野

基礎解析：三角関数，加法定理，数列，数学的帰納法

考え方

a，b の値を求めてしまえば後が楽.

(2) は $(a^{-n-1}+b^{-n-1})(a+b)^{n+1}$ を $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$，$(a^{-n+1}+b^{-n+1})(a+b)^{n-1}$ で表すことを考える.

【解答】

(1)　$\dfrac{3\pi}{5}=\pi-\dfrac{2\pi}{5}$ から

$$\sin\frac{3\pi}{5}=\sin\frac{2\pi}{5}. \qquad \cdots①$$

ここで，$\sin\dfrac{3\pi}{5}=3\sin\dfrac{\pi}{5}-4\sin^3\dfrac{\pi}{5}$，$\sin\dfrac{2\pi}{5}=2\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}$ および ① より

$$\sin\frac{\pi}{5}\left(3-4\sin^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}\right)=0.$$

$\sin\dfrac{\pi}{5}>0$ より

$$4\cos^2\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}-1=0.\quad \therefore\quad \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.\quad \cos\frac{\pi}{5}>0 \text{ より } \cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$$\therefore\quad \begin{cases} a=\sin^2\dfrac{\pi}{5}=1-\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}, \\ b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}=4\sin^2\dfrac{\pi}{5}\cos^2\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}. \end{cases}$$

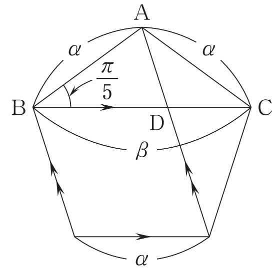
以上より

$$a+b=\frac{5}{4},\quad ab=\frac{5}{16}.$$

よって $a+b$，ab はともに有理数.　　（証明終り）

⑴ の**【別解】**

右図のような正五角形を考える．



$\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DCA から AB：BC＝DC：CA が成り立つ．

そこで，AB＝α，BC＝β とおくと

$$\alpha : \beta = \beta - \alpha : \alpha$$

$$\therefore \quad \beta^2 - \alpha\beta - \alpha^2 = 0. \qquad \cdots(\#)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \frac{\beta}{\alpha} - 1 = 0 \quad \therefore \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

また右図から $\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\beta}{2\alpha} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

以下**【解答】**と同じ．

⑵ 数学的帰納法により

$$(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n \text{ は整数} \qquad \cdots(*)$$

であることを示す．

(i) $n=1$ のとき $(a^{-1}+b^{-1})(a+b) = \dfrac{(a+b)^2}{ab} = 5$.

$n=2$ のとき $(a^{-2}+b^{-2})(a+b)^2 = \left\{\dfrac{(a+b)^2}{ab}\right\}^2 - 2\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 15$.

これらはともに整数である．よって，$n=1$，2 のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k-1$，k $(k \geqq 2)$ のとき $(*)$ が成り立つとする．

$$\begin{aligned}
&(a^{-(k+1)}+b^{-(k+1)})(a+b)^{k+1} \\
&= \{(a^{-k}+b^{-k})(a^{-1}+b^{-1}) - (a^{-(k-1)}+b^{-(k-1)})(ab)^{-1}\}(a+b)^{k+1} \\
&= \{(a^{-k}+b^{-k})(a+b)^k - (a^{-(k-1)}+b^{-(k-1)})(a+b)^{k-1}\}\frac{(a+b)^2}{ab}.
\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 5$ であり，数学的帰納法の仮定より $(a^{-k}+b^{-k})(a+b)^k$ および $(a^{-(k-1)}+b^{-(k-1)})(a+b)^{k-1}$ は整数だから $(a^{-(k+1)}+b^{-(k+1)})(a+b)^{k+1}$ も整数.

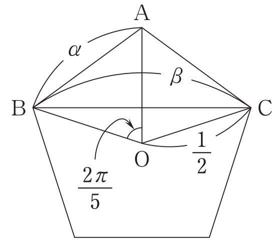
(i), (ii) から任意の自然数 n について，$(*)$ が成り立つ． （証明終り）

（注１） ⑵ の証明だけが目的なら，a，b の値を求めなくても $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$ が整数であることを示せばよい.

（⑵ の**【解答】**をみれば明らか）

$\dfrac{(a+b)^2}{ab} = 5$ を示すだけなら，次のような解法も考えられる．

⑴ の**【別解】**と同じ正五角形を考え，その外接円の半径を $\dfrac{1}{2}$ とおく．



$$\alpha = \text{AB} = 2\text{OA}\sin\frac{\angle\text{AOB}}{2} = \sin\frac{\pi}{5}.$$

$$\beta = \text{BC} = 2\text{OB}\sin\frac{\angle\text{BOC}}{2} = \sin\frac{2\pi}{5}.$$

$$\therefore \quad \alpha = \sqrt{a}, \quad \beta = \sqrt{b}.$$

⑴ の**【別解】**の $(\#)$ から

$$b - \sqrt{ab} - a = 0. \quad \therefore \quad (a-b)^2 = ab. \quad \therefore \quad (a+b)^2 = 5ab.$$

$$\therefore \quad \frac{(a+b)^2}{ab} = 5.$$

（注２） $(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ で $n=0$ とすると，2 だから $(*)$ は $n=0$ から成り立つ．数学的帰納法の証明も $n=0$ から始めてもよい．

第3問

xyz 空間において条件

$$x^2+y^2 \leqq z^2, \quad z^2 \leqq x, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

をみたす点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の全体からなる立体を考える。この立体の体積を V とし，$0 \leqq k \leqq 1$ に対し，z 軸と直交する平面 $z=k$ による切り口の面積 $S(k)$ とする。

(1) $k=\cos\theta$ とおくとき $S(k)$ を θ で表せ。ただし $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) V の値を求めよ。

分　野

微分・積分：積分法，非回転体の体積

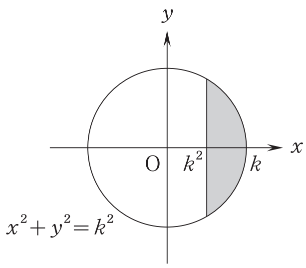
考え方

断面図を考える．断面図が描ければ積分でも，弓形の面積としても断面積は計算できる．
あとは三角関数の積分である．部分積分，置換積分等を駆使して求める．

【解答】

(1) 平面 $z=k$ によるこの立体の切り口は右図のような弓形である．よって

$$S(k)=2\int_{k^2}^{k}\sqrt{k^2-x^2}\,dx=2\int_{\cos^2\theta}^{\cos\theta}\sqrt{\cos^2\theta-x^2}\,dx.$$



ここで，$x=\cos\theta\cos\varphi$ $\left(0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

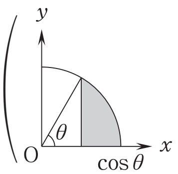
$$\frac{dx}{d\varphi}=-\cos\theta\sin\varphi. \qquad \begin{array}{c|ccc} x & \cos^2\theta & \longrightarrow & \cos\theta \\ \hline \varphi & \theta & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} S(k)&=2\int_{\theta}^{0}\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2\theta\cos^2\varphi}\,(-\cos\theta\sin\varphi)\,d\varphi \\ &=2\int_0^{\theta}\cos^2\theta\sin^2\varphi\,d\varphi=2\cos^2\theta\int_0^{\theta}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi \\ &=\cos^2\theta\left[\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{\theta}=\cos^2\theta\left(\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

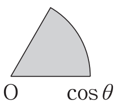
…(答)

(注) 弓形の面積 $S(k)$ の計算は次のようにすると簡単である．

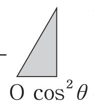
$S(k)=2\times\Big($



$\Big)=2\times\Big($



$-$



$\Big)$

$$\begin{aligned} &=2\left\{\frac{1}{2}(\cos\theta)^2\cdot\theta-\frac{1}{2}(\cos\theta)^2(\cos\theta\sin\theta)\right\} \\ &=\cos^2\theta(\theta-\cos\theta\sin\theta). \end{aligned}$$

(2) $V=\displaystyle\int_0^1 S(k)\,dk.$

ここで，$k=\cos\theta$ とおくと，

$$\frac{dk}{d\theta}=-\sin\theta. \qquad \begin{array}{c|ccc} k & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^2\theta(\theta-\cos\theta\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\theta\cos^2\theta\sin\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta)\,d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)'d\theta=\left[-\theta\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}\right)d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta.$$

$$\therefore\quad V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos^3\theta\sin^2\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\cos\theta\,d\theta.$$

$t=\sin\theta$ とおくと

$$\cos^2\theta=1-t^2,\quad \frac{dt}{d\theta}=\cos\theta.\qquad \begin{array}{c|c} \theta & 0\longrightarrow\frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0\longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\therefore\quad V=\int_0^1\left(\frac{1}{3}(1-t^2)-(1-t^2)t^2\right)dt=\left[\frac{t}{3}-\frac{4}{9}t^3+\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{4}{45}.\qquad\cdots(答)$$

第 4 問

$0<c<1$ とする。$0\leqq x<1$ において連続な関数 $f(x)$ に対して

$$f_1(x)=f(x)+\int_0^c f(t)\,dt,\quad f_2(x)=f(x)+\int_0^c f_1(t)\,dt$$

とおく。以下，関数 $f_3(x)$，$f_4(x)$，… を順次

$$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt\qquad (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

により定める。また，

$$g(c)=\int_0^c f(t)\,dt$$

とし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し

$$g_n(c)=\int_0^c f_n(t)\,dt$$

とおく。このとき，$0<x<1$ をみたす任意の x に対し

$$xf(x)=g(x)+x\lim_{n\to\infty}g_n(x)$$

が成り立ち，さらに $f(0)=1$ となるような関数 $f(x)$ を定めよ。

分　野

微分・積分：関数方程式，微分方程式

考え方

順次書き出して結果を予想して数学的帰納法で証明する．
最後は微分方程式を解く．

【解答】

与えられた条件式から

$$f_1(x)=f(x)+g(c),\ f_2(x)=f(x)+\int_0^c\{f(t)+g(c)\}\,dt=f(x)+(1+c)g(c),$$

$$f_3(x)=f(x)+\int_0^c\{f(t)+(1+c)g(c)\}\,dt=f(x)+(1+c+c^2)g(c),\ \cdots$$

より

$$f_n(x)=f(x)+(1+c+c^2+\cdots+c^{n-1})g(c)=f(x)+\frac{1-c^n}{1-c}g(c)\qquad\cdots(*)$$

と推定される．

$n=1$ のとき $(*)$ が成り立つことは明らか．

$n=k$ のとき $(*)$ が成り立つとすると

$$f_{k+1}(x)=f(x)+\int_0^c\left\{f(t)+\frac{1-c^k}{1-c}g(c)\right\}dt$$

$$=f(x)+g(c)+c\frac{1-c^k}{1-c}g(c)=f(x)+\frac{1-c^{k+1}}{1-c}g(c).$$

数学的帰納法により $(*)$ はすべての自然数 n について成り立つ．

よって，

$$g_n(c)=\int_0^c\left\{f(t)+\frac{1-c^n}{1-c}g(c)\right\}dt=\left\{1+\frac{1-c^n}{1-c}\cdot c\right\}g(c)=\frac{1-c^{n+1}}{1-c}g(c).$$

$0<c<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}g_n(c)=\frac{g(c)}{1-c}.$$

$$\therefore\quad g(x)+x\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)+\frac{x}{1-x}g(x)=\frac{g(x)}{1-x}.$$

$0<x<1$ をみたす任意の x に対して

$$xf(x)=g(x)+x\lim_{n\to\infty}g_n(x)$$

が成り立つから

$$xf(x)=\frac{g(x)}{1-x}.\quad\therefore\quad x(1-x)f(x)=\int_0^x f(t)\,dt. \qquad \cdots①$$

$f(x)$ は $0\leqq x<1$ で連続だから右辺は微分可能．両辺を x で微分して，

$$(1-2x)f(x)+x(1-x)f'(x)=f(x).\quad\therefore\quad (1-x)f'(x)-2f(x)=0. \qquad \cdots(★)$$

これに $1-x$ $(\neq 0)$ をかけて整理する．

$$(1-x)^2f'(x)-2(1-x)f(x)=\{(1-x)^2f(x)\}'=0.$$

よって，$(1-x)^2f(x)=D$（D は定数）．

$$\therefore\quad f(x)=\frac{D}{(1-x)^2}\quad(0<x<1).$$

$f(x)$ は $x=0$ で連続で $f(0)=1$ より $f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=D=1$.

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

これは確かに ① をみたしている．

【別解】

$f_0(x)=f(x)$，$g_0(c)=g(c)$ とおくと，与えられた関数列 $\{f_n(x)\}$ は

$$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt\quad(n\geqq 1,\ 0<c<1)$$

で定まる．

$$g_n(c)=\int_0^c f_n(t)\,dt\quad(n\geqq 0)$$

より，

$$f_n(x)=f(x)+g_{n-1}(c)\quad(n\geqq 1). \qquad \cdots②$$

② の両辺を $[0,\ c]$ で積分すると

$$g_n(c)=g(c)+cg_{n-1}(c)\quad(n\geqq 1). \qquad \cdots③$$

$\alpha(c)=\dfrac{g(c)}{1-c}$ とおくと，

$$g_n(c)-\alpha(c)=c\{g_{n-1}(c)-\alpha(c)\}\quad(n\geqq 1)$$

となる．これから

$$g_n(c)-\alpha(c)=c^n\{g_0(c)-\alpha(c)\}\quad(n\geqq 0)$$

$0<c<1$ より

$$\lim_{n\to\infty}g_n(c)=\lim_{n\to\infty}[\alpha(c)+c^n\{g(c)-\alpha(c)\}]=\alpha(c)=\frac{g(c)}{1-c}.$$

③ より

$$g(x)+x\lim_{n\to\infty}g_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_{n+1}(x)=\frac{g(x)}{1-x}.$$

以下**【解答】**と同じ．

（注）　微分方程式 (★) を解くとき，$1-x$ をかけて微分する方法を示したが，答えを出すだけなら，次のような完全ではない方法でよい．

(★) の両辺を $(1-x)f(x)$ で割って，　…(☆)

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{1-x}.$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int\frac{2}{1-x}\,dx.$$

$$\log|f(x)|=-2\log|1-x|+C.\quad\therefore\quad f(x)=\pm e^C(1-x)^{-2}.$$

ここで，$\pm e^C=D$ とおくと

$$f(x)=\frac{D}{(1-x)^2}.$$

これで**【解答】**と同じ結果をえた．ただ，(☆) で $(1-x)f(x)$ が 0 の場合を吟味していないのでこの解答は正確でない．$0<x<1$ のどこかで $f(x)=0$ になる解があるとそれについて答えていないからである．実際 $f(x)=0$（恒等的）も解である．それは $D=0$ の場合であるが，$f(0)=1$ をみたさないから本問の解ではない．

もちろん**【解答】**の方法の方が正確で正しいことは変わらない．しかし，$1-x$ をかけることは思いつきにくいと思われる．とりあえず解にたどり着くにはあえて冒険をして，$f(x)\neq 0$ の場合の解だけを出してしまうのも受験技術上は許されると思われる．おそらく実際に $f(x)=0$ について言及がなくても微分方程式の難しさからして減点があっても軽微にとどまるであろう．

また，$D=(1-x)^2f(x)$ であることを見てから $(1-x)^2f(x)$ を微分することを思いついてもよいのかもしれない．

第 5 問

大量のカードがあり，各々のカードに 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数字のいずれかの一つが書かれている。これらのカードから無作為に 1 枚をひくとき，どの数字のカードをひく確率も正である。さらに，3 の数字のカードをひく確率は p であり，1, 2, 5, 6 の数字のカードをひく確率はそれぞれ q に等しいとする。

これらのカードから 1 枚をひき，その数字 a を記録し，このカードをもとに戻して，もう 1 枚ひき，その数字を b とする。このとき，$a+b\leqq 4$ となる事象を A，$a<b$ となる事象を B とし，それぞれのおこる確率を $P(A)$，$P(B)$ と書く。

(1)　$E=2P(A)+P(B)$ とおくとき，E を p，q で表わせ。

(2)　$\dfrac{1}{p}$ と $\dfrac{1}{q}$ がともに自然数であるとき，E の値を最大にするような p，q を求めよ。

分 野

確率・統計：確率，**数学 I**：整数

考え方

$P(A)$ は場合を書き出して求める．$P(B)$ は $a=b$ となる確率を求め，これを使って求める．

E を p，q について平方完成して最大となる p，q を考える．

【解答】

(1) 3 のカードをひく確率が p で，1，2，5，6 のカードをひく確率が q だから，4 のカードをひく確率は $1-p-4q$．

$a+b\leqq 4$ となる場合は次の表の 6 通りである．

a	1	1	1	2	2	3
b	1	2	3	1	2	1
確率	q^2	q^2	pq	q^2	q^2	pq

よって

$$P(A)=2pq+4q^2.$$

$a=b$ となる確率を r とすると

$$P(B)=\frac{1-r}{2}.$$

$a=b$ となる場合は次の表の 6 通りである．

a	1	2	3	4	5	6
b	1	2	3	4	5	6
確率	q^2	q^2	p^2	$(1-p-4q)^2$	q^2	q^2

よって $r=p^2+4q^2+(1-p-4q)^2$．

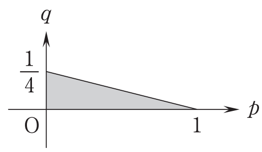
$$P(B)=\frac{1}{2}\{1-p^2-4q^2-(1-p-4q)^2\}=-p^2-4pq-10q^2+p+4q.$$

$$\therefore\quad E=2P(A)+P(B)=4pq+8q^2-p^2-4pq-10q^2+p+4q=-p^2-2q^2+p+4q. \quad \cdots(答)$$

(2) どのカードをひく確率も正だから

$$p>0,\quad q>0,\quad 1-p-4q>0. \quad \cdots ①$$

この領域を図示すると右図．



境界を含まない

$0<q<\frac{1}{4}$ で $\frac{1}{q}$ が自然数だから $q=\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \cdots$．また ① より

$$p<1-4q. \quad \cdots ②$$

$$E=-p^2-2q^2+p+4q=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-2(q-1)^2+\frac{9}{4}$$

に注意．$p\leqq\frac{1}{2}$，$q\leqq\frac{1}{5}$ だから p，q はそれぞれ大きいほど E は大きい．

(i) $q=\frac{1}{5}$ のとき ② より，$p<\frac{1}{5}$．よって，$p\leqq\frac{1}{6}$．

$$\therefore\quad E\leqq-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{5}-1\right)^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{9}-\frac{32}{25}+\frac{9}{4}$$

$$=-0.\dot{1}-1.28+\frac{9}{4}=-1.39\cdots+\frac{9}{4}.$$

(ii) $q=\frac{1}{6}$ のとき ② より，$p<\frac{1}{3}$．よって，$p\leqq\frac{1}{4}$．

$$\therefore \quad E \leqq -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{6}-1\right)^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{16}-\frac{25}{18}+\frac{9}{4}$$
$$=-0.0625-1.3\dot{8}+\frac{9}{4}=-1.4\cdots+\frac{9}{4}.$$

(iii) $q \leqq \frac{1}{7}$ のとき，

$$\therefore \quad E \leqq -\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)^2-2\left(\frac{1}{7}-1\right)^2+\frac{9}{4} \leqq -\frac{72}{49}+\frac{9}{4}=-1.4\cdots+\frac{9}{4}.$$

(i)〜(iii) より E が最大なのは

$$p=\frac{1}{6}, \quad q=\frac{1}{5} \qquad \cdots(\text{答})$$

のとき．

第 6 問

xy 平面上の 2 点 P，Q に対し，P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す。

(1) 原点 O(0, 0) と点 A(1, 1) に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ をみたす点 P$(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

(2) 実数 $a \geqq 0$ に対し，点 Q$(a,\ a^2+1)$ を考える。
次の条件 (*) を満足する点 P$(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。
(*) 原点 O(0, 0) に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ となるような $a \geqq 0$ が存在する。

分　野

数学 I：軌跡，不等式と領域

考え方

$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ の意味をつかむことが先決．丁寧に場合分けする．
a の変化に対して折れ線の折れる点の軌跡を考える．

【解答】

P$(p,\ r)$，Q$(q,\ s)$ のとき，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=|p-q|+|r-s|$.

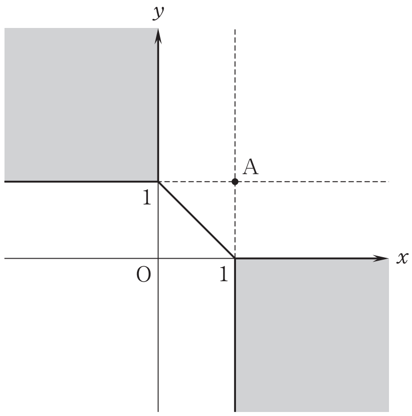
(1) O(0, 0)，A(1, 1)，P$(x,\ y)$，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})$ より

$$|x|+|y|=|x-1|+|y-1|. \qquad \cdots①$$

次のように場合分けをする．① より

	$x \leqq 0$	$0 \leqq x \leqq 1$	$x \geqq 1$
$y \geqq 1$	$-x+y=-x+1+y-1$. つねに成り立つ.	$x+y=-x+1+y-1$. $\therefore\ x=0$.	$x+y=x-1+y-1$. 成り立たない.
$0 \leqq y \leqq 1$	$-x+y=-x+1-y+1$. $\therefore\ y=1$.	$x+y=-x+1-y+1$. $\therefore\ x+y=1$.	$x+y=x-1-y+1$. $\therefore\ y=0$.
$y \leqq 0$	$-x-y=-x+1-y+1$. 成り立たない.	$x-y=-x+1-y+1$. $\therefore\ x=1$.	$x-y=x-1-y+1$. つねに成り立つ.

以上より，点 P$(x,\ y)$ の存在範囲は下図の網掛部およびその境界，および (1, 0)，(0, 1) を結ぶ線分.



(2)　$O(0,\ 0)$，$P(x,\ y)$，$Q(a,\ a^2+1)$，$d(O,\ P)=d(P,\ Q)$ より

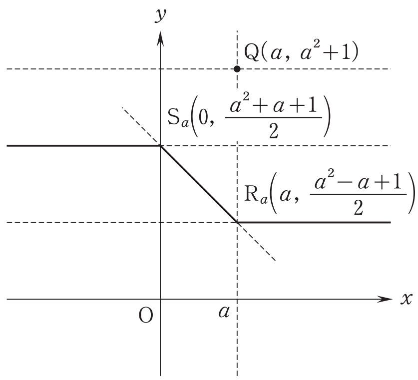
$$|x|+|y|=|x-a|+|y-a^2-1|. \qquad \cdots②$$

次のように場合分けをする．② より

	$x\leqq 0$	$0\leqq x\leqq a$	$x\geqq a$
$y\geqq a^2+1$	$-x+y$ $=-x+a+y-a^2-1.$ $\therefore\ a^2-a+1=0.$ 成り立たない．	$x+y$ $=-x+a+y-a^2-1.$ $\therefore\ x=-\dfrac{a^2-a+1}{2}.$ $x<0$ より不適．	$x+y$ $=x-a+y-a^2-1.$ $\therefore\ a^2+a+1=0.$ 成り立たない．
$0\leqq y\leqq a^2+1$	$-x+y$ $=-x+a-y+a^2+1.$ $\therefore\ y=\dfrac{a^2+a+1}{2}.$ $(0\leqq y\leqq a^2+1.)$	$x+y$ $=-x+a-y+a^2+1.$ $\therefore\ x+y=\dfrac{a^2+a+1}{2}.$ $(0\leqq x+y\leqq a^2+a+1.)$	$x+y$ $=x-a-y+a^2+1.$ $\therefore\ y=\dfrac{a^2-a+1}{2}.$ $(0\leqq y\leqq a^2+1.)$
$y\leqq 0$	$-x-y$ $=-x+a-y+a^2+1.$ $\therefore\ a^2+a+1=0.$ 成り立たない．	$x-y$ $=-x+a-y+a^2+1.$ $\therefore\ x=\dfrac{a^2+a+1}{2}.$ $x>a$ より不適．	$x-y$ $=x-a-y+a^2+1.$ $\therefore\ a^2-a+1=0.$ 成り立たない．

よって，a を固定したときの点 P の存在範囲は右図のよう．

ただし，S_a は $\left(0,\ \dfrac{a^2+a+1}{2}\right)$，$R_a$ は $\left(a,\ \dfrac{a^2-a+1}{2}\right)$．



これを $a\geqq 0$ の範囲で動かしたときに折れ線が通過する領域が求めるもの．

S_a は $a\geqq 0$ において y 軸上の $S_0\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ およびそれより上の部分を動く．

半直線 $y=\dfrac{a^2+a+1}{2}$，$x\leqq 0$ は $a\geqq 0$ において $x\leqq 0$，$y\geqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を通過する．

R_a は $a\geqq 0$ において，曲線 $y=\dfrac{x^2-x+1}{2}$，$x\geqq 0$ 上を動く．また，$S_0=R_0$．

線分 $\mathrm{S}_a\mathrm{R}_a$ の傾きはつねに -1．また曲線 $y=\dfrac{x^2-x+1}{2}$ の $x=0$ における接線の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であることに注意する．線分 $\mathrm{S}_a\mathrm{R}_a$ は $a\geqq 0$ において，領域 $x\geqq 0$，$y\geqq\dfrac{x^2-x+1}{2}$ の範囲を通過する．

半直線 $y=\dfrac{a^2-a+1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{8}$，$x\geqq a$ は

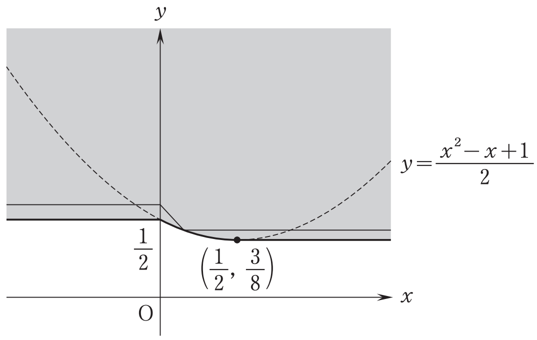
$0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ において $\dfrac{x^2-x+1}{2}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$，$\dfrac{3}{8}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq x\right)$ を通過し，

$a\geqq\dfrac{1}{2}$ において $\dfrac{3}{8}\leqq y\leqq\dfrac{x^2-x+1}{2}$ の範囲を通過する．

よって，点 P の存在範囲は

$$\begin{cases} y\geqq\dfrac{1}{2} & (x\leqq 0 \text{ のとき}), \\ y\geqq\dfrac{x^2-x+1}{2} & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right), \\ y\geqq\dfrac{3}{8} & \left(x\geqq\dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right). \end{cases}$$

図示すると，右図網掛部．境界を含む．



1994 年　後期・理科 I 類

第 1 問

正の整数 m と $k=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ に対して $0 \leqq a_k \leqq k$ をみたす整数 $a_1,\ \cdots,\ a_m$ があたえられたときに

$$[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m = a_m \cdot m! + a_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1$$

とおく。ただし $a_m \neq 0$ とする。

(1)　$[m,\ m-1,\ \cdots,\ 1]_m = [1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{m+1} - 1$ を証明せよ。

(2)　すべての正の整数は $[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m$ の形にただ一通りに表示できることを証明せよ。

(3)　n が 5 以上の整数のとき $\dfrac{n!}{5}$ を $[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m$ の形に表示せよ。

分　野

数学 I：整数

考え方

$k \cdot k! = (k+1)! - k!$ であることを利用する．

$[q,\ a_k,\ a_{k-1},\ \cdots,\ a_1]_{k+1}$ が $q(k+1)!$ から $(q+1)(k+1)!-1$ までのすべての自然数を表しうることを示せればよい．

(3) は n を 5 で割った余りで分類．丹念に計算．

【解答】

(1)　定義から

$$\begin{aligned}[m,\ m-1,\ \cdots,\ 1]_m &= m \cdot m! + (m-1) \cdot (m-1)! + \cdots + 1 \cdot 1! \\ &= \{(m+1)-1\}m! + (m-1)(m-1)! + \cdots + (2-1)1! \\ &= \{(m+1)! - m!\} + \{m! - (m-1)!\} + \cdots + (2! - 1!) = (m+1)! - 1.\end{aligned}$$

$$[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{m+1} = 1 \cdot (m+1)! + 0 \cdot (m-1)! + \cdots + 0 \cdot 1! = (m+1)!.$$

よって，

$$[m,\ m-1,\ \cdots,\ 1]_m = [1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{m+1} - 1.$$

（証明終り）

(2)　$[a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1]_n$ について考える．

$k! > 0$ で $0 \leqq a_k \leqq k\ (1 \leqq k \leqq n-1)$，$1 \leqq a_n \leqq n$ だから

$$[1,\ 0,\ \cdots,\ 0]_n \leqq [a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1]_n \leqq [n,\ n-1,\ \cdots,\ 1]_n.$$

(1) の結果より

$$n! \leqq [a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1]_n \leqq (n+1)! - 1.$$

(*)　$n! \leqq x < (n+1)!$ であるすべての正の整数 x は

$$x = [a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1]_n$$

の形に表される．

このことを，n についての数学的帰納法で証明する．

(I)　$n=1$ のとき，$1! \leqq x < 2!$ より，$n=1$ となる正の整数は $x=1$ のみで，$x=[1]_1$ と表される．

(II)　$n=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ のとき，(*) が成り立つと仮定する．

つまり，$1! \leqq x < 2!$，$2! \leqq x < 3!$，$3! \leqq x < 4!$，$\cdots$，$k! \leqq x < (k+1)!$ であるすべての整数 x について，それぞれ $[a_1]_1$，$[a_1,\ a_2]_2$，$[a_3,\ a_2,\ a_1]_3$，$\cdots$，$[a_k,\ a_{k-1},\ a_{k-2},\ \cdots,\ a_1]_k$ の形で表せるとする．

このとき，$x < (k+1)!$ であるすべての正の整数 x は適当な $l\ (\leqq k)$，$a_l,\ a_{l-1},\ \cdots,\ a_1$ によって，$x = [a_l,\ a_{l-1},\ \cdots,\ a_1]_l$ と表される．

$(k+1)! \leqq x < (k+2)!$ となる正の整数 x を考える．

x を $(k+1)!$ で割った商を q，余りを r とおくと

$$x = q(k+1)! + r, \quad 1 \leqq q \leqq k+1, \quad 0 \leqq r < (k+1)!.$$

$r < (k+1)!$ だから仮定より r は

$$r = [a_l,\ a_{l-1},\ \cdots,\ a_1]_l = a_l \cdot l! + a_{l-1} \cdot (l-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1!$$

と表される．ただし，$l \leqq k$.

このとき x は

$$x = q(k+1)! + a_l \cdot l! + a_{l-1} \cdot (l-1)! + \cdots + a_1 \cdot 1! = [q,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ a_l,\ a_{l-1},\ \cdots,\ a_1]_{k+1}$$

と表される．

よって，$n = k+1$ においても (＊) は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，(＊) はすべての正の整数 n について成り立つ．

よって，すべての正の整数は $[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m$ の形に表すことができる．

次に，表し方がただ 1 通りであることを証明する．

ある正の整数 x が，異なる 2 通りに表されたとする．つまり

$$x = [a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m = [b_l,\ b_{l-1},\ \cdots,\ b_1]_l$$

とする．

(a) $m \neq l$ のとき，$m < l$ としてもよい．このとき (1) より

$$x = [a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m < (m+1)! \leqq l! \leqq [b_l,\ b_{l-1},\ \cdots,\ b_1]_l = x$$

となり，矛盾．

(b) $m = l$ のとき

$a_m \neq b_m$ または $a_m = b_m$，$a_{m-1} = b_{m-1}$，$\cdots$，$a_{k+1} = b_{k+1}$，$a_k \neq b_k$ となる k が存在する．

$a_m = b_m$，$a_{m-1} = b_{m-1}$，$\cdots$，$a_{k+1} = b_{k+1}$，$a_k \neq b_k$ の場合，

$$\begin{aligned} &a_m \cdot m! + a_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + a_{k+1} \cdot (k+1)! + a_k \cdot k! + \cdots + a_1 \\ &= b_m \cdot m! + b_{m-1} \cdot (m-1)! + \cdots + b_{k+1} \cdot (k+1)! + b_k \cdot k! + \cdots + b_1 \end{aligned}$$

より

$$a_k \cdot k! + a_{k-1} \cdot (k-1)! + \cdots + a_1 = b_k \cdot k! + b_{k-1} \cdot (k-1)! + \cdots + b_1. \qquad \cdots①$$

また，$a_m \neq b_m$ の場合は $k = m$ と考えればよい．

(＊) より

$$a_{k-1} \cdot (k-1)! + a_{k-2} \cdot (k-2)! + \cdots + a_1 = [a_{k-1},\ a_{k-2},\ \cdots,\ a_1]_{k-1} < k!,$$
$$b_{k-1} \cdot (k-1)! + b_{k-2} \cdot (k-2)! + \cdots + b_1 = [b_{k-1},\ b_{k-2},\ \cdots,\ b_1]_{k-1} < k!.$$

よって，① の両辺を $k!$ で割った商は a_k，b_k でこれが等しくないことは矛盾である．

(a)，(b)より，ある正の整数 x が異なる 2 通りに表されることはない．

よって，すべての正の整数は $[a_m,\ a_{m-1},\ \cdots,\ a_1]_m$ の形にただ 1 通りに表すことができる．

（証明終り）

(3) $x = \dfrac{n!}{5}$ とおく．$(n-1)! = \dfrac{n!}{n} \leqq x = \dfrac{n!}{5} < n!$.

x を $(n-1)!$ で割った商は n を 5 で割った商．

(i) $n = 5m$ のとき

$$x = \frac{(5m)!}{5} = m(5m-1)! = [m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{n-1}$$
$$= \left[\frac{n}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}.$$

(ii) $n = 5m+1$ のとき，

$$x = \frac{(5m+1)!}{5} = \left(m + \frac{1}{5}\right)(5m)!$$

$$=m(5m)!+m(5m-1)!=[m,\ m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{n-1}$$
$$=\left[\frac{n-1}{5},\ \frac{n-1}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}.$$

(iii) $n=5m+2$ のとき，

$$x=\frac{(5m+2)!}{5}=\left(m+\frac{2}{5}\right)(5m+1)!$$
$$=m(5m+1)!+2m(5m)!+\frac{2}{5}(5m)!$$
$$=m(5m+1)!+2m(5m)!+2m(5m-1)!$$
$$=[m,\ 2m,\ 2m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{n-1}$$
$$=\left[\frac{n-2}{5},\ \frac{2(n-2)}{5},\ \frac{2(n-2)}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}.$$

(iv) $n=5m+3$ のとき，

$$x=\frac{(5m+3)!}{5}=\left(m+\frac{3}{5}\right)(5m+2)!$$
$$=m(5m+2)!+(3m+1)(5m+1)!+\frac{1}{5}(5m+1)!$$
$$=m(5m+2)!+(3m+1)(5m+1)!+m(5m)!+\frac{1}{5}(5m)!$$
$$=m(5m+2)!+(3m+1)(5m+1)!+m(5m)!+m(5m-1)!$$
$$=[m,\ 3m+1,\ m,\ m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{n-1}$$
$$=\left[\frac{n-3}{5},\ \frac{3n-4}{5},\ \frac{n-3}{5},\ \frac{n-3}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}.$$

(v) $n=5m+4$ のとき，

$$x=\frac{(5m+4)!}{5}=\left(m+\frac{4}{5}\right)(5m+3)!$$
$$=m(5m+3)!+(4m+2)(5m+2)!+\frac{2}{5}(5m+2)!$$
$$=m(5m+3)!+(4m+2)(5m+2)!+2m(5m+1)!+\frac{4}{5}(5m+1)!$$
$$=m(5m+3)!+(4m+2)(5m+2)!+2m(5m+1)!+4m(5m)!+\frac{4}{5}(5m)!$$
$$=m(5m+3)!+(4m+2)(5m+2)!+2m(5m+1)!+4m(5m)!+4m(5m-1)!$$
$$=[m,\ 4m+2,\ 2m,\ 4m,\ 4m,\ 0,\ \cdots,\ 0]_{n-1}$$
$$=\left[\frac{n-4}{5},\ \frac{2(2n-3)}{5},\ \frac{2(n-4)}{5},\ \frac{4(n-4)}{5},\ \frac{4(n-4)}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1}.$$

よって，n を 5 で割った余りを r とするとき

$$\begin{cases}\left[\frac{n}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1} & (r=0\ \text{のとき}),\\ \left[\frac{n-1}{5},\ \frac{n-1}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1} & (r=1\ \text{のとき}),\\ \left[\frac{n-2}{5},\ \frac{2(n-2)}{5},\ \frac{2(n-2)}{5},\ 0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1} & (r=2\ \text{のとき}),\\ \left[\frac{n-3}{5},\ \frac{3n-4}{5},\ \frac{n-3}{5},\ \frac{n-3}{5},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1} & (r=3\ \text{のとき}),\\ \left[\frac{n-4}{5},\ \frac{2(2n-3)}{5},\ \frac{2(n-4)}{5},\ \frac{4(n-4)}{5},\ \frac{4(n-4)}{5},\ 0,\ \cdots,\ 0\right]_{n-1} & (r=4\ \text{のとき}).\end{cases}$$

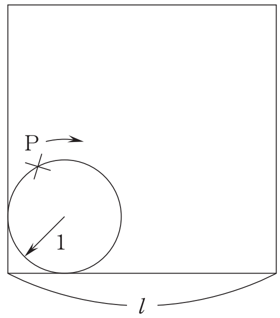
…(答)

第2問

一辺の長さが l の正方形の内部に半径1の円が入っている。ここで $l>2$ とする。この円が図のように正方形の角から出発して正方形の辺にそってすべらずに正方形の内部をころがる。ただし円が正方形の他の辺に接すれば次にはその辺にそってすべらずにころがるとする。この円の中心が最初にもとの位置にもどってくるまでの円周上の点Pの軌跡を考える。

(1) Pの軌跡の始点と終点が一致するための l の条件を求めよ。

(2) l は(1)の条件をみたす最小の長さとする。このときPの軌跡の長さのとりうる値の範囲を求めよ。



分　野

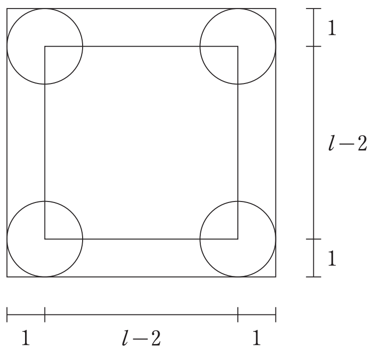
微分・積分：積分法，曲線長，サイクロイド

考え方

サイクロイドの一部分の長さを求めることになる．円周上の1点を固定して，$\dfrac{1}{4}$ 周したときの弧長を求める．対称性を考慮する．場合分けがあることに注意．

【解答】

(1) 回転角で考える．正方形の1辺を転がるとき円の中心の移動距離は $l-2$．その間に円が回転する角は半径が1であるから $(l-2)$rad である．1周するときに回転する角は $4(l-2)$ である．



Pの始点と終点が一致するとき，円の回転角は $2n\pi$（n は整数）である．

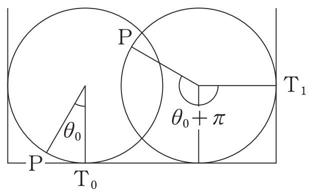
$$\therefore\quad 4(l-2)=2n\pi \quad (n\text{ は整数}).$$

$l>2$ より

$$l=2+\frac{n}{2}\pi \quad (n\text{ は自然数}). \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)の条件をみたす l の最小の長さは

$$l=2+\frac{\pi}{2}.$$



円が1辺を転がるとき，円は $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転する．

円の中心をO，最初に円と底辺が接している点を T_0 とおく．

$\angle POT_0=\theta_0$ とおく．

円が1辺を転がってとなりの辺と最初に接する点を順次 T_1，T_2，T_3 とする．このとき

$$\angle POT_1=\theta_0+\pi,\quad \angle POT_2=\theta_0,\quad \angle POT_3=\theta_0+\pi.$$

最初の辺を転がるとき，T_0 を原点，底辺を x 軸とする．最初の位置からの回転角を θ とするとき，Pの座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\theta-\sin(\theta+\theta_0),\quad y=1-\cos(\theta+\theta_0).$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{d\theta}=1-\cos(\theta+\theta_0),\quad \frac{dy}{d\theta}=\sin(\theta+\theta_0).$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\{1-\cos(\theta+\theta_0)\}^2+\{\sin(\theta+\theta_0)\}^2=2-2\cos(\theta+\theta_0)=4\sin^2\frac{\theta+\theta_0}{2}.$$

円が4つの辺を転がるときのPの軌跡の長さをそれぞれ l_1，l_2，l_3，l_4 とする．

$$l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left|\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right|d\theta.$$

l_2 は l_1 の θ_0 を $\theta_0+\pi$ で置き換えたもの．

$$\therefore\quad l_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left|\sin\frac{\theta+\theta_0+\pi}{2}\right|d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left|\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\right|d\theta.$$

また，l_3，l_4 はそれぞれ，l_1，l_2 と同じ式になるので $l_3=l_1$，$l_4=l_2$．軌跡の長さを L とすると

$$L=2(l_1+l_2).$$

l_1 と l_2 の対称性を考えると $0\leqq\theta_0<\pi$ で考えればよい．

このとき，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $0\leqq\dfrac{\theta+\theta_0}{2}<\dfrac{3}{4}\pi$．

$$\therefore\quad l_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\,d\theta=\left[-4\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-4\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\frac{\theta_0}{2}. \qquad \cdots①$$

(i) $0\leqq\theta_0\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0\leqq\dfrac{\theta+\theta_0}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$．

$$l_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\,d\theta=\left[4\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=4\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-4\sin\frac{\theta_0}{2}. \qquad \cdots②$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad L&=2(l_1+l_2)\\&=-8\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+8\cos\frac{\theta_0}{2}+8\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-8\sin\frac{\theta_0}{2}\\&=8\left\{(\sqrt{2}-1)\sin\frac{\theta_0}{2}+\cos\frac{\theta_0}{2}\right\}=8\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}\,\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\alpha\right).\end{aligned}$$

ただし，α は $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる角 $\left(\text{実は } \alpha=\dfrac{3}{8}\pi\right)$．

$\dfrac{\theta_0}{2}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $L=8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$，$\theta_0=0$，$\dfrac{\pi}{2}$ のとき $L=8$．

$0\leqq\theta_0\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$8\leqq L\leqq 8\sqrt{4-2\sqrt{2}}.$$

(ii) $\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta_0\leqq\pi$ のとき，$\theta=\pi-\theta_0$ で $\dfrac{\theta+\theta_0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ となるから，

$$\begin{aligned}\therefore\quad l_2&=\int_0^{\pi-\theta_0}2\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\,d\theta-\int_{\pi-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}\,d\theta\\&=\left[4\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right]_0^{\pi-\theta_0}-\left[4\sin\frac{\theta+\theta_0}{2}\right]_{\pi-\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\\&=8-4\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-4\sin\frac{\theta_0}{2}. \qquad \cdots③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad L&=2(l_1+l_2)\\&=-8\cos\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+8\cos\frac{\theta_0}{2}+16-8\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-8\sin\frac{\theta_0}{2}\\&=8\left\{2-\sin\frac{\theta_0}{2}-(\sqrt{2}-1)\cos\frac{\theta_0}{2}\right\}\\&=8\left\{2-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2+1}\,\cos\left(\frac{\theta_0}{2}-\alpha\right)\right\}.\end{aligned}$$

$\dfrac{\theta_0}{2}-\alpha=0$ のとき $L=8(2-\sqrt{4-2\sqrt{2}})$，$\theta_0=\dfrac{\pi}{2}$，$\pi$ のとき $L=8$．

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta_0 \leqq \pi$ のとき

$$8(2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}) \leqq L \leqq 8.$$

(i), (ii) より

$$8(2-\sqrt{4-2\sqrt{2}}) \leqq L \leqq 8\sqrt{4-2\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(注)　①, ②, ③ で和積公式を使うと

$$l_1 = 8\sin\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{8}\right),\quad l_2 = \begin{cases} 8\sin\dfrac{\pi}{8}\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) & \left(0 \leqq \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}\ のとき\right), \\ 8-8\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta_0 \leqq \pi\ のとき\right). \end{cases}$$

さらに合成公式を使うと

$$L = \begin{cases} 16\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{3}{8}\pi\right) & \left(0 \leqq \theta_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}\ のとき\right), \\ 16-16\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta_0 \leqq \pi\ のとき\right) \end{cases}$$

となる．ただし，$\sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$ だから，$16\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{8} = 8\sqrt{4-2\sqrt{2}}$.

また，$\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}-\dfrac{3}{8}\pi\right)$.

このようにして，l_1，l_2，L を求めてもよい．

第 3 問

ある会社である工事を受注した。その工事はまず第 1 工程，第 2 工程，検査の順に行い，それぞれ 1 日を必要とする。検査では第 1 工程，第 2 工程に欠陥があるかないかがわかる。検査の結果第 1 工程に欠陥があれば，工事は第 1 工程，第 2 工程ともやり直し，改めて検査をする。第 1 工程に欠陥がなく第 2 工程のみに欠陥があれば，第 2 工程のみやり直して検査する。これらの作業は日曜日を除いて引き続いて行い，検査の結果第 1，第 2 工程ともに欠陥がなければ工事は終了する。各工程ではそれまでの経過とは独立に確率 p で欠陥が発生するものとする。月曜日から工事を始めた場合 n 週間以内に工事が終了する確率を $P(n)$ とする。

(1)　$P(1)$ を求めよ。

(2)　$P(n)$ を求めよ。

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $1-P(n)<\dfrac{1}{1000}$ をみたす最小の正整数 n を求めよ。

分　野

確率・統計：確率

考え方

何日間で終了するかを考え，それが 6 日を単位として何週間かかるかを考える．題意に従って立式するところがポイント．第 1，2 工程を行い検査するプロセスと，第 2 工程だけ行って検査するプロセスをそれぞれ何回行うかで場合分けする．丁寧に調べ上げる．

【解答】

第 1 工程，第 2 工程，検査を各々 1，2，検で表し，欠陥なしを○，欠陥ありを△で表す．

例えば第 1 工程に欠陥がない場合を ①，第 2 工程に欠陥がある場合を②⃤と表し，第 2 工程に欠陥があ

る場合，ない場合のどちらでもよい場合は 2 とのみ表す．

(1) 1 週間以内に工事が終了するのは

月	火	水	木	金	土	確率
①	②	検				$(1-p)\times(1-p)$
①	△2	検	②	検		$(1-p)\times p\times(1-p)$
△1	2	検	①	②	検	$p\times(1-p)\times(1-p)$

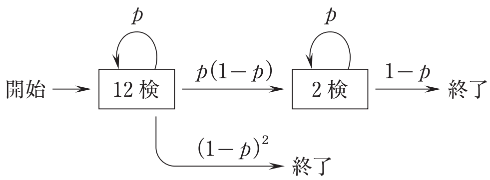
したがって

$$P(1)=(1-p)^2+p(1-p)^2+p(1-p)^2=(1+2p)(1-p)^2. \qquad \cdots(答)$$

(2) 検査毎に区切って考える．各単位のつながりとその確率は以下のようになる．

			確率
①②検	→	終了	$(1-p)\times(1-p)$
①△2検	→	2 検	$(1-p)\times p$
△1 2 検	→	12 検	p
②検	→	終了	$1-p$
△2検	→	2 検	p

よって工事の流れは次のようになる．



今，$\boxed{12\,検}$（3 日間）を x 回（$x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$），さらに，$\boxed{2\,検}$（2 日間）を y 回（$y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）行って工事を終了したとする．

工事に要した日数は $3x+2y$（日）であり，そのようになる確率は $y\geqq 1$ のとき

$$p^{x-1}\times p(1-p)\times p^{y-1}\times(1-p)=(1-p)^2p^{x+y-1}.$$

これは，$y=0$ のときも成り立つ．ただし，$(x,\ y)=(1,\ 0)$ で $p=0$ のとき p^{x+y-1} は 0^0 となるがこれは 1 とみなす．

n 週間（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）以内に工事が終了するのは $3x+2y\leqq 6n$ のとき．

$p=0$ のとき，必ず 1 回で工事は終了するから $P(n)=1$．

また $p=1$ のときは工事は永遠に終わらないから $P(n)=0$．

$0<p<1$ で考える．

(i) x が偶数のとき，

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して

$$x=2m,\quad y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3n-3m.$$

よってこの場合の確率は

$$\sum_{x,\ y}(1-p)^2p^{x+y-1}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{y=0}^{3n-3m}(1-p)^2p^{2m+y-1}.$$

右辺は公比が p の等比数列の和とみて

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{y=0}^{3n-3m}(1-p)^2p^{2m-1}p^y=\sum_{m=1}^{n}(1-p)^2p^{2m-1}\frac{1-p^{3n-3m+1}}{1-p}=(1-p)\sum_{m=1}^{n}(p^{2m-1}-p^{3n-m}).$$

同様に m について加えて

$$(1-p)\sum_{m=1}^{n}(p^{2m-1}-p^{3n-m})=(1-p)p\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}-(1-p)p^{3n-1}\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-1}}=p\frac{1-p^{2n}}{1+p}+(p^{3n}-p^{2n}).$$

(ii) x が奇数のとき，

$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して

$$x=2m-1,\quad y=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3n-3m+1.$$

よってこの場合の確率は(i)と同様な計算で

$$\sum_{x,\ y}(1-p)^2p^{x+y-1}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{y=0}^{3n-3m+1}(1-p)^2p^{2m+y-2}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{y=0}^{3n-3m+1}(1-p)^2p^{2m-2}p^y.$$

$$=\sum_{m=1}^{n}(1-p)^2p^{2m-2}\frac{1-p^{3n-3m+2}}{1-p}=(1-p)\sum_{m=1}^{n}(p^{2m-2}-p^{3n-m})$$

$$=(1-p)\frac{1-p^{2n}}{1-p^2}-(1-p)p^{3n-1}\frac{1-p^{-n}}{1-p^{-1}}=\frac{1-p^{2n}}{1+p}+(p^{3n}-p^{2n}).$$

(i), (ii)より

$$P(n)=p\frac{1-p^{2n}}{1+p}+(p^{3n}-p^{2n})+\frac{1-p^{2n}}{1+p}+(p^{3n}-p^{2n})=1+2p^{3n}-3p^{2n}.$$

これは $p=0$, $p=1$ のときも成り立つ.

$$P(n)=1+2p^{3n}-3p^{2n}. \qquad \cdots(答)$$

(3) 条件と(2)の結果より

$$1-\left\{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right\}<\frac{1}{1000}.$$

$$\therefore\quad -2\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}<\frac{1}{1000}. \qquad \cdots(*)$$

(*)が成り立つとき，少なくとも

$$-2\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}<\frac{1}{1000}$$

つまり

$$1000<2^{2n}=4^n.\quad \therefore\quad n\geqq 5.$$

が成り立っていなければならない.

(*)より

$$\therefore\quad 2^n(2^{2n}-3000)+2000>0.$$

$n=5$ のとき

$$2^n(2^{2n}-3000)+2000=2^5(2^{10}-3000)+2000=32(1024-3000)+2000<0.$$

(*)は成り立たない.

$n=6$ のとき

$$2^n(2^{2n}-3000)+2000=2^6(2^{12}-3000)+2000=64(4096-3000)+2000>0.$$

(*)は成り立つ.

$1-P(n)<\dfrac{1}{1000}$ をみたす最小の正の整数は 6. …(答)

1995 年　前期・文科

第 1 問

すべての正の実数 x，y に対して，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

分　野

数学 I ：2 次不等式

考え方

両辺を 2 乗して比較できる．$\sqrt{x}$ または $\sqrt{y}$ の 2 次関数が定符号である条件と考えればよい．ただ，x，y の同次式で $x \neq 0$ だから $t=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ とおくと扱いやすくなる．

【解答】

両辺の符号を考えると $k>0$．$t=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ とおき，与不等式の両辺を正の数 $\sqrt{x}$ で割ると

$$1+t \leqq k\sqrt{2+t^2}$$

とかける．すべての正の実数 t に対して，この式をみたす最小の k が求めるものである．

更に両辺は正だから，2 乗すると

$$(1+t)^2 \leqq k^2(2+t^2).\quad (1-k^2)t^2+2t+(1-2k^2) \leqq 0. \qquad \cdots①$$

すべての正の実数 t に対して ① が成り立つ正の数 k の値の最小値が求めるものである．

$f(t)=(1-k^2)t^2+2t+(1-2k^2)$ とおく．

(i)　$k>1$ のとき，

$y=f(t)$ は上に凸な放物線．$t>0$ に対して，$f(t) \leqq 0$ となればよい．

軸は $t=\dfrac{1}{k^2-1}>0$ だから，

$$\frac{1}{4}(\text{判別式})=1-(1-k^2)(1-2k^2)=-2k^4+3k^2=-k^2(2k^2-3) \leqq 0$$

が条件．よって，

$$k^2 \leqq 0 \ \text{または}\ k^2 \geqq \frac{3}{2}.$$

$k>1$ だから

$$k \geqq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(ii)　$k=1$ のとき，$f(t)=2t-1$ となり，$t>\dfrac{1}{2}$ で $f(t)>0$ になり条件をみたさない．

(iii)　$0<k<1$ のとき，

$y=f(t)$ は下に凸な放物線になるから，すべての正の実数 t に対して $f(t) \leqq 0$ とはならない．

(i)，(ii)，(iii) から k の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.　　…(答)

【理系的解答】

与式と $k \geqq \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ は同値.

$\dfrac{y}{x}=s$ とおくと，$s>0$.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=\frac{1+\sqrt{s}}{\sqrt{2+s}}.$$

これを $f(s)$ とおき $f(s)$ の最大値を求める．

$$f'(s)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{s}}\cdot\sqrt{2+s}-(1+\sqrt{s})\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2+s}}}{2+s}=\frac{2-\sqrt{s}}{2\sqrt{s}\sqrt{2+s}^{3}}.$$

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(s)$		$+$	0	$-$
$f(s)$		↗		↘

よって，$f(s)$ の最大値は $f(4)=\dfrac{1+2}{\sqrt{2+4}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

よって，k の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. …(答)

【河合塾公表解答】

$\vec{u}=\begin{pmatrix}\sqrt{2x}\\ \sqrt{y}\end{pmatrix}$，$\vec{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ 1\end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{u}\cdot\vec{v}\leqq|\vec{u}||\vec{v}|$ から

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{2x+y}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

等号は $y=4x$ のときに成り立つ．

よって $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値すなわち，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k$ をみたす k の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. …(答)

第2問

自然数 k に対し，xy 平面上のベクトル

$$\overrightarrow{v_k}=\left(\cos\frac{k\pi}{4},\ \sin\frac{k\pi}{4}\right)$$

を考える。a，b を正の数とし，平面上の点 P_0, P_1, …, P_8 を

$$P_0=(0,\ 0),$$
$$\overrightarrow{P_{2n}P_{2n+1}}=a\overrightarrow{v_{2n+1}},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$
$$\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+2}}=b\overrightarrow{v_{2n+2}},\quad n=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

によって定める。このとき以下の問に答えよ。

(1) $P_8=P_0$ であることを示せ。

(2) P_0, P_1, …, P_8 を順に結んで得られる 8 角形の面積 S を a，b を用いて表せ。

(3) 面積 S が 7，線分 P_0P_4 の長さが $\sqrt{10}$ のとき，a，b の値を求めよ。

分　野

代数・幾何：ベクトル，平面図形

考え方

図を描いて初等幾何的に考えれば容易．

a，b についての対称式で条件が与えられるから，a，b を解とする 2 次方程式を立てればよい．

【解答】

(1)　$\overrightarrow{v_k}$ と $\overrightarrow{v_{k+4}}$ を比較すると，

$$\overrightarrow{v_{k+4}}=\left(\cos\frac{(k+4)\pi}{4},\ \sin\frac{(k+4)\pi}{4}\right)=\left(\cos\left(\frac{k\pi}{4}+\pi\right),\sin\left(\frac{k\pi}{4}+\pi\right)\right)$$
$$=\left(-\cos\frac{k\pi}{4},\ -\sin\frac{k\pi}{4}\right)=-\overrightarrow{v_k}.$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+4}\mathrm{P}_{2n+5}}=a\overrightarrow{v_{2n+5}}=-a\overrightarrow{v_{2n+1}}=-\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}}\quad (n=0,\ 1).$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+5}\mathrm{P}_{2n+6}}=b\overrightarrow{v_{2n+6}}=-b\overrightarrow{v_{2n+2}}=-\overrightarrow{\mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+2}}\quad (n=0,\ 1).$$

よって，

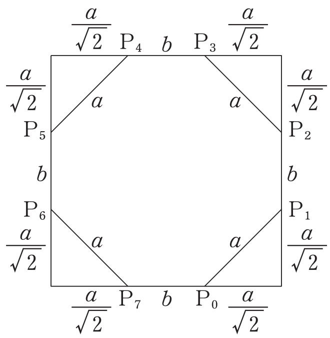
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+4}\mathrm{P}_{n+5}}=-\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_8}=\sum_{k=0}^{7}\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}=\sum_{k=0}^{3}(\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}+\overrightarrow{\mathrm{P}_{k+4}\mathrm{P}_{k+5}})=\sum_{k=0}^{3}(\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}-\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}})=\vec{0}.$$

よって，$\mathrm{P}_8=\mathrm{P}_0$．　　（証明終り）

(2)　八角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_7$ は辺の長さが交互に a と b で各角が $\dfrac{3}{4}\pi$ の八角形である．



長さが b の辺を延長すると正方形になりその 1 辺は $b+\sqrt{2}\,a$ である．

問題の八角形は，この正方形から 4 つの直角二等辺三角形を除いたもの．

4 つの直角二等辺三角形は斜辺が a，直角をはさむ 2 辺の長さが $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ の直角二等辺三角形．よって，

$$S=(b+\sqrt{2}\,a)^2-4\times\frac{a^2}{4}=a^2+2\sqrt{2}\,ab+b^2.\qquad\cdots(\text{答})$$

(3)　$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4$ は八角形の対角線．外接正方形で考えると，

$$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4=\sqrt{(b+\sqrt{2}\,a)^2+b^2}=\sqrt{2a^2+2\sqrt{2}\,ab+2b^2}.$$

よって，$S=7$，$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_4=\sqrt{10}$ のとき，

$$a^2+2\sqrt{2}\,ab+b^2=7,\quad 2a^2+2\sqrt{2}\,ab+2b^2=10.$$

よって，

$$a^2+b^2=3,\quad 2\sqrt{2}\,ab=4.\quad ab=\sqrt{2},\quad (a+b)^2=3+2\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^2.$$

よって，a，b は $t^2-(1+\sqrt{2})t+\sqrt{2}=0$ の 2 解．よって，

$$(a,\ b)=(1,\ \sqrt{2})\ \text{または}\ (\sqrt{2},\ 1).\qquad\cdots(\text{答})$$

第3問

xy 平面において，曲線 $y=-x^3+ax$ 上の $x>0$ の部分に，点Pを次の条件をみたすようにとる。ただし，$a>0$ とする。

点Pにおけるこの曲線の接線と y 軸との交点をQとするとき，原点Oにおける接線が∠QOPを二等分する。

このとき，△QOPの面積 $S(a)$ の最小値と，それを与える a の値を求めよ。

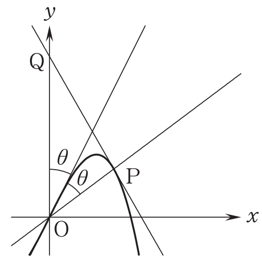
分　野

基礎解析：整式の微分

考え方

Oにおける接線の傾き a は容易に求められる．接線とOQすなわち y 軸がなす角はこれから求められる．∠QOPはその2倍の角であることから直線OPの方程式，Pにおける接線が定まる．よって，Qの座標も定まる．

【解答】



$f(x)=-x^3+ax$ とおくと，$f'(x)=-3x^2+a$．原点Oにおける接線の傾きは，a．

この接線とOQのなす角を θ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{a}$．よって，

$$\tan 2\theta=\frac{\dfrac{2}{a}}{1-\dfrac{1}{a^2}}=\frac{2a}{a^2-1}.$$

よって，OQとなす角が 2θ の直線OPの方程式は $y=\dfrac{a^2-1}{2a}x$ である．

Pは $y=f(x)$ 上にあるから

$$-x^3+ax=\frac{a^2-1}{2a}x.\quad x^3-\frac{a^2+1}{2a}x=0.$$

$x>0$ だからPの x 座標は $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{2a}}$．

$\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{2a}}$ とおくと，Pにおける接線は

$$y=(-3\alpha^2+a)(x-\alpha)-\alpha^3+a\alpha=(-3\alpha^2+a)x+2\alpha^3.$$

よってQの y 座標は $2\alpha^3$．よって，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\alpha^3\cdot\alpha=\alpha^4.$$

相加平均・相乗平均の関係から

$$\alpha^2=\frac{a}{2}+\frac{1}{2a}\geqq 1.$$

よって，$S(a)$ の最小値は1，それを与える a は1.　…(答)

第4問

半径1cmの半球形の器が水平から角θだけ傾けて固定されている。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$とする。この器に毎秒$\dfrac{\pi}{18}\,\mathrm{cm}^3$の割合で水を入れるとき，入れはじめてから$3+\cos^2\theta$秒後に器から水が流れ出した。このときの$\theta$の値を求めよ。

分野

基礎解析：整式の積分，体積

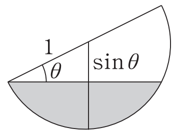
考え方

水の量は，器の底から水面までの高さがわかれば，回転体の体積として積分して求められる．

【解答】

器の底から水面までの高さは$(1-\sin\theta)$ cmである．

容積を$V\,\mathrm{cm}^3$とすると，



$$V=\pi\int_{\sin\theta}^{1}(1-x^2)\,dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sin\theta}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right).$$

毎秒$\dfrac{\pi}{18}\,\mathrm{cm}^3$の割合で水を$3+\cos^2\theta$秒間入れると，器に入れた水量を$U\,\mathrm{cm}^3$とすると，

$$U=\frac{\pi}{18}(3+\cos^2\theta)=\frac{\pi}{18}(4-\sin^2\theta).$$

$V=U$だから，

$$\pi\left(\frac{2}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3}\right)=\frac{\pi}{18}(4-\sin^2\theta).$$
$$6\sin^3\theta+\sin^2\theta-18\sin\theta+8=0.$$
$$(2\sin\theta-1)(3\sin\theta-4)(\sin\theta+2)=0.$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$から$0<\sin\theta<1$.

よって，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$．$\theta=\dfrac{\pi}{6}$．　…(答)

1995 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

$f(x)=1-\sin x$ に対し，$g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$ とおく。

このとき，任意の実数 x，y について

$$g(x+y)+g(x-y) \geqq 2g(x)$$

が成り立つことを示せ。

分　野

微分・積分：積分法，**数学 I** ：不等式の証明

考え方

$f(x)$ が具体的に与えられているから，$g(x)$ を求めてから証明しても難しくない．

証明すべきは $g(x)$ のグラフが下に凸であることであることに注意すれば．$g''(x) \geqq 0$ を示せばよいことがわかる．

【解答】

$$g(x)=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt.$$

$$g'(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

$$g''(x)=f(x)=1-\sin x \geqq 0.$$

よって，$g'(x)$ は増加関数．

(i)　$y=0$ のとき，$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)$ である．

(ii)　$y>0$ のとき，平均値の定理から，$\dfrac{g(x+y)-g(x)}{y}=g'(x_1)$，$\dfrac{g(x)-g(x-y)}{y}=g'(x_2)$ となる，

x_1，x_2 が $x-y<x_2<x<x_1<x+y$ をみたして存在する．$g'(x)$ は増加関数だから $g'(x_2) \leqq g'(x_1)$.

$$\therefore\quad \frac{g(x)-g(x-y)}{y} \leqq \frac{g(x+y)-g(x)}{y}.\quad \therefore\quad g(x)-g(x-y) \leqq g(x+y)-g(x).$$

$$\therefore\quad g(x+y)+g(x-y) \geqq 2g(x).$$

(iii)　$y<0$ のとき，$y'=-y$ とすると $y'>0$.

(ii) の結果を用いると $g(x+y')+g(x-y') \geqq 2g(x)$．また，

$g(x+y')+g(x-y')=g(x-y)+g(x+y)$.

$$\therefore\quad g(x+y)+g(x-y) \geqq 2g(x).$$

以上より

$$g(x+y)+g(x-y) \geqq 2g(x).$$

（証明終り）

（参考）　$g(x)=-x+\dfrac{x^2}{2}+\sin x$.

$$g(x+y)+g(x-y)-2g(x)=y^2+2\sin x(\cos y-1)=y^2-4\sin x\sin^2\frac{y}{2}.$$

$|\theta| \geqq |\sin\theta|$ に注意すれば,

$$y^2 \geqq 4\sin^2\frac{y}{2} \geqq 4\sin x \sin^2\frac{y}{2}.$$

第3問

二辺の長さが1と2の長方形と一辺の長さが2の正方形の2種類のタイルがある。縦2，横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし，n は正の整数である。たとえば，$A_1=1$，$A_2=3$，$A_3=5$ である。このとき以下の問に答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき，A_n を A_{n-1}，A_{n-2} を用いて表せ。

(2) A_n を n で表せ。

分　野

基礎解析：数列

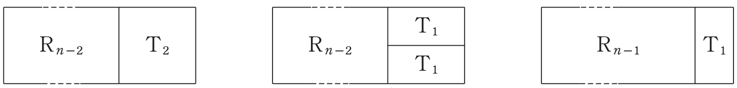
考え方

途中までタイルが敷きつめられた状態を考え，そこに正方形または長方形のタイルを敷くことを考える．横 $n-2$ まで敷きつめたとき横 $n-1$ まで敷きつめることなく n まで敷きつめる方法と，横 $n-1$ まで敷きつめてから n まで敷きつめる方法を考えて漸化式を立てる．

【解答】

(1) 横の長さが n の部屋を R_n，長方形のタイルを T_1，正方形のタイルを T_2 とする．

R_n に敷かれるタイルの右端は T_2 が敷かれているか，T_1 が2枚横に敷かれているか T_1 が縦に1枚敷かれているかのいずれかである．



それらより左には R_{n-2} または R_{n-1} に敷いたタイルと同じ敷き方が可能だから，

$$A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1)の式を変形すると

$$A_n + A_{n-1} = 2(A_{n-1} + A_{n-2}).$$

$A_1=1$，$A_2=3$ より，

$$A_{n+1} + A_n = 2^{n-1}(A_2 + A_1) = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}. \qquad \cdots①$$

また，次のようにも変形できる．

$$A_n - 2A_{n-1} = -(A_{n-1} - 2A_{n-2}).$$

$A_1=1$，$A_2=3$ より，

$$A_{n+1} - 2A_n = (-1)^{n-1}(A_2 - 2A_1) = (-1)^{n+1}. \qquad \cdots②$$

$\dfrac{①-②}{3}$ から，

$$A_n = \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}. \qquad \cdots(答)$$

第4問

N を正の整数とする。N の正の約数 n に対して

$$f(n)=n+\frac{N}{n}$$

とおく。このとき，次の各 N に対して $f(n)$ の最小値を求めよ。

(1) $N=2^k$，ただし，k は正の整数。

(2) $N=7!$

分　野

数学Ⅰ：整数，**微分・積分**：微分法

考え方

相加平均・相乗平均の関係で最小値が出そうだが，等号が成り立たなければ最小値を求めたことにならない．そこで不等式を使うか，連続化して近似値を求める．

【解答】

(1) N の約数は $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^k$．$f(2^l)=2^l+\dfrac{2^k}{2^l}=2^l+2^{k-l}$．

(i) $k=2m$ のとき，相加平均・相乗平均の関係から，

$f(2^l)=2^l+2^{2m-l}\geqq 2\sqrt{2^{2m}}=2^{m+1}=2^{\frac{k+2}{2}}=f(2^{\frac{k}{2}})$.

(ii) $k=2m-1$ のとき，$f(2^l)-f(2^m)=2^l+2^{2m-1-l}-2^m-2^{m-1}=(2^{m-l-1}-1)(2^{m-l}-1)2^l$.

この式は $l=m$，$l=m-1$ のときに 0 でそれ以外では正である．

よって，$f(2^l)$ の最小値は

$$f(2^m)=f(2^{m-1})=2^m+2^{m-1}=2^{\frac{k+1}{2}}+2^{\frac{k-1}{2}}=3\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

以上より，$f(n)$ の最小値は $\begin{cases} f(2^{\frac{k}{2}})=2^{\frac{k+2}{2}} & (k\text{ が偶数のとき}), \\ f(2^{\frac{k+1}{2}})=f(2^{\frac{k-1}{2}})=3\cdot 2^{\frac{k-1}{2}} & (k\text{ が奇数のとき}). \end{cases}$ …(答)

(2) $f(n)$ を連続関数として考えると

$$f'(n)=1-\frac{N}{n^2}=\frac{n^2-N}{n^2}$$

だから，$f(n)$ は $n<\sqrt{N}$ で減少し，$n>\sqrt{N}$ で増加し，$n=\sqrt{N}$ で最小になる．

一方 n が N の約数なら $\dfrac{N}{n}$ も N の約数で，$f(n)=f\left(\dfrac{N}{n}\right)$ である．

したがって，$\sqrt{N}$ が整数でないとき，$f(n)$ は n が $\sqrt{N}$ より小さい最大の約数か，$\sqrt{N}$ より大きい最小の約数のときに最小になる．

$7!=7\cdot 5\cdot 3^2\cdot 2^4=5040$．$70^2<5040<71^2$

71 は 7! の約数ではないが 70 と 72 は 7! の約数で $70\times 72=5040$.

よって，$f(n)$ の最小値は

$$f(70)=f(72)=142.$$ …(答)

第5問

サイコロを n 回投げて，xy 平面上の点 P_0, P_1, …, P_n を次の規則(a)，(b)によって定める。

(a)　$P_0=(0,\ 0)$

(b)　$1\leqq k\leqq n$ のとき，k 回目に出た目の数が1，2，3，4のときには，P_{k-1} をそれぞれ東，北，西，南に $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ だけ動かした点を P_k とする。また，k 回目に出た目の数が5，6のときには $P_k=P_{k-1}$ とする。ただし，y 軸の向きを北と定める。

このとき以下の問に答えよ。

(1)　P_n が x 軸上にあれば，P_0, P_1, …, P_{n-1} もすべて x 軸上にあることを示せ。

(2)　P_n が第1象限 $\{(x,\ y)|x>0,\ y>0\}$ にある確率を n で表せ。

分　野

確率・統計：確率，**数学Ⅰ**：論証問題

考え方

2，4のうち2が先に出れば以後常に y 座標は正になり，4が先に出れば以後常に y 座標は負になる．このことを示せばよい．

【解答】

(1)　P_k の座標を $(x_k,\ y_k)$ とする．

k 回目に2，4以外が出たときには $y_k=y_{k-1}$．

$y_0=0$ だから，

(i)　n 回の間に2，4が一度もでなければ $y_n=0$ で P_n は x 軸上にある．

(ii)　k $(1\leqq k\leqq n)$ 回目に2，4のうちで初めて2が出た場合，$y_k=\dfrac{1}{2^k}$ である．このとき，y_n が最小になるのは，$k+1$ 回目から n 回目まで連続して4が出る場合である．そのとき，

$$y_n=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{k+2}}-\cdots-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-k}}}{1-\dfrac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}>0$$

n 回目に2，4のうちで初めて2が出た場合も含めて，2，4のうちで最初に2が出た場合 $y_n>0$ である．

(iii)　k $(1\leqq k\leqq n)$ 回目に2，4のうちで初めて4が出た場合，$y_k=-\dfrac{1}{2^k}$ である．このとき，y_n の最大になるのは，$k+1$ 回目から n 回目まで連続して2が出る場合である．そのとき，

$$y_n=-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}\,\frac{1-\dfrac{1}{2^{n-k}}}{1-\dfrac{1}{2}}=-\frac{1}{2^n}<0$$

n 回目に2，4のうちで初めて4が出た場合も含めて，2，4のうちで最初に4が出た場合 $y_n<0$．

以上から P_n が x 軸上にあるのは，(i)の場合すなわち，2，4が1度も出なかった場合だけである．その場合 P_0, P_1, …, P_{n-1} もすべて x 軸上にある．　(証明終り)

(2)　P_n が第1象限にあるのは，1および2が1回は出て，1より前には3が出ていなく，2より前には4が出ていない場合である．

この条件のもとで，k 回目 $(1\leqq k<n)$ に1が初めて出て，l 回目 $(k<l\leqq n)$ に2が初めて出る場合を考える．この場合は1回目から $k-1$ 回目まで5または6の目が出て，k 回目に1が出て，$k+1$ 回目から $l-1$ 回目までの $l-k-1$ 回，1，3，5，6のいずれかの目が出て l 回目に2の目が出る場合

である．その確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{l-k-1}\cdot\frac{1}{6}$ である．

k 回目に 2 が初めて出て，l 回目に 1 が初めて出る確率も等しいから，求める確率は

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=k+1}^{n}\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{2^{l-k-1}}{3^{l-k-1}}=2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{2^{m-1}}{3^{m-1}}$$

$$=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6^2}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\cdot\frac{1-\frac{2^{n-k}}{3^{n-k}}}{1-\frac{2}{3}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^{k-1}}\left(1-\frac{2^{n-k}}{3^{n-k}}\right)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3^{k-1}}-\frac{2^{n-k}}{3^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 3^n}-\frac{2^{n-1}}{3^n}.$$

…(答)

【河合塾公表解答】

(2)

原点にとどまる確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$.

x 軸上にある確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^n}{3^n}$.

y 軸上にある確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2^n}{3^n}$.

よって，両軸上にない確率は $1-\frac{2^n}{3^n}-\frac{2^n}{3^n}+\frac{1}{3^n}$.

よって，求める確率は

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right).$$

…(答)

第6問

原点をOとするxy平面上の双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0)$$

上の点Pにおける接線と2つの漸近線との交点をQ，Rとする。このとき以下の問に答えよ。

(1) 三角形OPQの面積Sは，点Pのとり方にはよらず，a，bによって定まることを示せ。

(2) $a=5e^{2t}+e^{-t}$，$b=e^{2t}+e^{-t}$として実数tを変化させるときのSの最小値を求めよ。

分　野

代数・幾何：二次曲線，双曲線，**微分・積分**：微分法

考え方

(1)は有名問題．(2)は関数の最小値を求める問題に帰着．

【解答】

(1) Pの座標を$(p,\ q)$とすると，Pにおける接線は $\dfrac{p}{a^2}x-\dfrac{q}{b^2}y=1$.

漸近線は $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. よって，交点の座標は，

$$\left(\frac{a^2b}{bp-aq},\ \frac{ab^2}{bp-aq}\right),\quad \left(\frac{a^2b}{bp+aq},\ -\frac{ab^2}{bp+aq}\right).$$

これらをこの順にQ，Rとして一般性を失わない．

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2b}{bp-aq}\cdot\frac{ab^2}{bp+aq}+\frac{ab^2}{bp-aq}\,\frac{a^2b}{bp+aq}\right|=\left|\frac{a^3b^3}{b^2p^2-a^2q^2}\right|=\left|\frac{ab}{\dfrac{p^2}{a^2}-\dfrac{q^2}{b^2}}\right|=ab.$$

よって，三角形OQRの面積Sは，点Pのとり方にはよらず，a，bによって定まる．　(証明終り)

(2) $a=5e^{2t}+e^{-t}$，$b=e^{2t}+e^{-t}$ のとき，$S=ab=(5e^{2t}+e^{-t})(e^{2t}+e^{-t})=5e^{4t}+6e^{t}+e^{-2t}$.

Sをtの関数として，$S=S(t)$ とおくと，$S'(t)=20e^{4t}+6e^{t}-2e^{-2t}=\dfrac{2(5e^{3t}-1)(2e^{3t}+1)}{e^{2t}}$.

$S'(t)=0$ となるのは，$t=-\dfrac{1}{3}\log 5$ のとき，

t	$\cdots$	$-\frac{1}{3}\log 5$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘		↗

$t=-\dfrac{1}{3}\log 5$. つまり $e^{t}=\dfrac{1}{5^{\frac{1}{3}}}$，$e^{3t}=\dfrac{1}{5}$ のとき，Sは最小値をとる．その値は

$$S(t)=\frac{(5e^{3t}+1)(e^{3t}+1)}{e^{2t}}=\frac{(1+1)\left(\dfrac{1}{5}+1\right)}{\dfrac{1}{5^{\frac{2}{3}}}}=\frac{12}{\sqrt[3]{5}}. \qquad \cdots(答)$$

1995 年　後期・理科 I 類

第 1 問

パスカルの 3 角形の第 n 行の部分和

$$P_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k},$$

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+1},$$

$$R_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}$$

として数列 $\{P_n\}$，$\{Q_n\}$，$\{R_n\}$ を定義する。ただし，$k>n$ のとき ${}_n\mathrm{C}_k=0$ とする。

(1)　P_{n+1}，Q_{n+1}，R_{n+1} を P_n，Q_n，R_n の式として表わせ。

(2)　一般項 P_n，Q_n，R_n を求めよ。

(3)　P_{12}，Q_{12}，R_{12} を求めよ。

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

分　野

確率・統計：二項係数，**基礎解析**：数列，漸化式

考え方

(1) は自然に求められる．${}_n\mathrm{C}_k=0$ $(k>n)$ という定義にとまどった人もいるかもしれないが，このように拡張しても基本公式はそのまま成り立つ．

(2) は漸化式から，$P_n+Q_n+R_n=2^n$ を使うところまでは何とかなる．

ここから 1 工夫必要．$P_n\to R_{n+1}\to Q_{n+2}\to P_{n+3}$ のように順次導かれるから，$P_{3m}=\alpha_{3m}$，$R_{3m+1}=\alpha_{3m+1}$，$Q_{3m+2}=\alpha_{3m+2}$ などのようにおいて解いた．

もちろん P_{n+3} を P_n で表して解いてもよい．

【解答】

(1)

$$P_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{3k}=1+\sum_{k=1}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{3k}=1+\sum_{k=1}^{n+1}({}_n\mathrm{C}_{3k-1}+{}_n\mathrm{C}_{3k})$$

$$=\left(1+\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k}\right)+{}_n\mathrm{C}_{3n+3}+\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}=P_n+R_n. \qquad \cdots(答)$$

$$\mathrm{Q}_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{3k+1}=\sum_{k=0}^{n+1}({}_n\mathrm{C}_{3k}+{}_n\mathrm{C}_{3k+1})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k}+{}_n\mathrm{C}_{3n+3}+\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+1}+{}_n\mathrm{C}_{3n+4}=P_n+Q_n. \qquad \cdots(答)$$

$$R_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{3k+2}=\sum_{k=0}^{n+1}({}_n\mathrm{C}_{3k+1}+{}_n\mathrm{C}_{3k+2})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+1}+{}_n\mathrm{C}_{3n+4}+\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_{3k+2}+{}_n\mathrm{C}_{3n+5}=Q_n+R_n. \qquad \cdots(答)$$

(2) $P_n+Q_n+R_n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ だから,

$$P_{n+1}=2^n-Q_n,\quad Q_{n+1}=2^n-R_n,\quad R_{n+1}=2^n-P_n.$$

$n=3m$（m は負でない整数）のとき，$P_n=\alpha_n$，$Q_n=\beta_n$，$R_n=\gamma_n$，

$n=3m+1$（m は負でない整数）のとき，$P_n=\beta_n$，$Q_n=\gamma_n$，$R_n=\alpha_n$，

$n=3m+2$（m は負でない整数）のとき，$P_n=\gamma_n$，$Q_n=\alpha_n$，$R_n=\beta_n$

と記号を変更すると

$$\begin{cases} P_{3m+1}=2^{3m}-Q_{3m}, & Q_{3m+1}=2^{3m}-R_{3m}, & R_{3m+1}=2^{3m}-P_{3m}, \\ P_{3m+2}=2^{3m+1}-Q_{3m+1}, & Q_{3m+2}=2^{3m+1}-R_{3m+1}, & R_{3m+2}=2^{3m+1}-P_{3m+1}, \\ P_{3m+3}=2^{3m+2}-Q_{3m+2}, & Q_{3m+3}=2^{3m+2}-R_{3m+2}, & R_{3m+3}=2^{3m+2}-P_{3m+2} \end{cases}$$

から,

$$\begin{cases} \beta_{3m+1}=2^{3m}-\beta_{3m}, & \gamma_{3m+1}=2^{3m}-\gamma_{3m}, & \alpha_{3m+1}=2^{3m}-\alpha_{3m}, \\ \gamma_{3m+2}=2^{3m+1}-\gamma_{3m+1}, & \alpha_{3m+2}=2^{3m+1}-\alpha_{3m+1}, & \beta_{3m+2}=2^{3m+1}-\beta_{3m+1}, \\ \alpha_{3m+3}=2^{3m+2}-\alpha_{3m+2}, & \beta_{3m+3}=2^{3m+2}-\beta_{3m+2}, & \gamma_{3m+3}=2^{3m+2}-\gamma_{3m+2} \end{cases}$$

となるから，一般に

$$\alpha_{n+1}=2^n-\alpha_n,\quad \beta_{n+1}=2^n-\beta_n,\quad \gamma_{n+1}=2^n-\gamma_n$$

が成り立つ.

$$\alpha_0=P_0=1,\quad \beta_0=Q_0=0,\quad \gamma_0=R_0=0.$$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\alpha_n}{2^n}.$$

$a_n=\dfrac{\alpha_n}{2^n}$ とおくと，$a_0=\alpha_0=P_0=1$.

$$a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}.\quad \therefore\quad a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right).$$

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(a_0-\frac{1}{3}\right).$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore\quad \alpha_n=\frac{2^n}{3}+(-1)^n\frac{2}{3}.$$

$\beta_0=\gamma_0=0$ だから同様にして,

$$\beta_n=\gamma_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3}.$$

以上から

n が 3 で割り切れるとき,

$$P_n=\frac{2^n}{3}+(-1)^n\frac{2}{3},\quad Q_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3},\quad R_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

n を 3 で割って 1 余るとき,

$$P_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3},\quad Q_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3},\quad R_n=\frac{2^n}{3}+(-1)^n\frac{2}{3}. \qquad \cdots(答)$$

n を 3 で割って 2 余るとき,

$$P_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3},\quad Q_n=\frac{2^n}{3}+(-1)^n\frac{2}{3},\quad R_n=\frac{2^n}{3}-(-1)^n\frac{1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　(2) より，

$$\begin{cases} P_{12}=\dfrac{2^{12}}{3}+\dfrac{2}{3}=1366, \\ Q_{12}=\dfrac{2^{12}}{3}-\dfrac{1}{3}=1365, \\ R_{12}=\dfrac{2^{12}}{3}-\dfrac{1}{3}=1365. \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

（注１）　(2) の漸化式の解法としてはこのほか P_{n+3} を P_n で表す方法がある．以下に概略を示す．

$$P_{n+3}=-P_n+3\cdot 2^n,\quad P_1=1,\quad P_2=1,\quad P_3=2$$

から，m を自然数として，

$$\begin{cases} P_{3m-2}=\dfrac{2^{3m-2}}{3}-(-1)^m\dfrac{1}{3}, \\ P_{3m-1}=\dfrac{2^{3m-1}}{3}+(-1)^m\dfrac{1}{3}, \\ P_{3m}=\dfrac{2^{3m}}{3}+(-1)^m\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

を導き，

$$Q_n=2^n-P_{n+1},\quad R_n=2^{n-1}-P_{n-1}$$

を使って Q_n，R_n を導く．

【別解】　1 の虚数 3 乗根 ω を使う（(2)を先に解く）

(2)　定義から

$$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots. \quad \cdots①$$

$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$ とすると，$\omega^3=1$，$1+\omega+\omega^2=0$.

ここで，$x=1$，$x=\omega$，$x=\omega^2$ を ① に代入する．

$$(1+1)^n=2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+{}_nC_4+{}_nC_5+\cdots=P_n+Q_n+R_n \quad \cdots②$$

$$(1+\omega)^n=(-\omega^2)^n={}_nC_0+{}_nC_1\omega+{}_nC_2\omega^2+{}_nC_3+{}_nC_4\omega+{}_nC_5\omega^2+\cdots=P_n+Q_n\omega+R_n\omega^2. \quad \cdots③$$

$$(1+\omega^2)^n=(-\omega)^n{}_nC_0+{}_nC_1\omega^2+{}_nC_2\omega+{}_nC_3+{}_nC_4\omega^2+{}_nC_5\omega+\cdots=P_n+Q_n\omega^2+R_n\omega. \quad \cdots④$$

$\dfrac{②+③+④}{3}$，$\dfrac{②+③\omega^2+④\omega}{3}$，$\dfrac{②+③\omega+④\omega^2}{3}$ より，

$$\begin{cases} P_n=\dfrac{1}{3}\{2^n+(-\omega^2)^n+(-\omega)^n\}, \\ Q_n=\dfrac{1}{3}\{2^n-(-\omega^2)^{n+1}-(-\omega)^{n+1}\}, \\ R_n=\dfrac{1}{3}\{2^n-(-\omega^2)^{n-1}-(-\omega)^{n-1}\}. \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(1)　(2) より，

$$P_{n+1}=\frac{1}{3}\{2^{n+1}+(-\omega)^{n+1}+(-\omega^2)^{n+1}\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(3-1)2^n+(-\omega)^{n+1}+(-\omega^2)^{n+1}\}=2^n-Q_n. \quad \cdots(\text{答})$$

$$Q_{n+1}=\frac{1}{3}\{2^{n+1}-(-\omega^2)^{n+2}-(-\omega)^{n+2}\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(3-1)2^n+(-\omega^2)^{n-1}+(-\omega)^{n-1}\}=2^n-R_n, \quad \cdots(\text{答})$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{3}\{2^{n+1}-(-\omega^2)^n-(-\omega)^n\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(3-1)2^n-(-\omega^2)^n-(-\omega)^n\}=2^n-P_n. \qquad \cdots(答)$$

(3)

$$\begin{cases} P_{12}=\frac{1}{3}\{2^{12}+(-\omega^2)^{12}+(-\omega)^{12}\}=\frac{1}{3}(4096+1+1)=1366, \\ Q_{12}=\frac{1}{3}\{2^{12}-(-\omega^2)^{13}-(-\omega)^{13}\}=\frac{1}{3}(4096+\omega^2+\omega)=1365, \\ R_{12}=\frac{1}{3}\{2^{12}-(-\omega^2)^{11}-(-\omega)^{11}\}=\frac{1}{3}(4096+\omega+\omega^2)=1365. \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

（注２） (2)を先に解いた．(1)，(2)の答は**【解答】**と異なって見えるが，同じである(2)は n を３で割った余りで分類すると**【解答】**と同じであることを確認できる．(1)の答は**【解答】**(2)の冒頭の式である．

（注３） (3)は(1)，(2)とは独立に ${}_{12}C_k$（$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$）を求め，これを加えても大したことはない．

第２問

平面上に２点Ｐ，Ｑがあり，ＰとＱの距離は１であるとする。このとき，次の（条件）をみたす３角形ABCの面積 S の最大値を求めたい。

（条件）３角形ABCは与えられた平面上にあり，各頂点Ａ，Ｂ，ＣからＰまでの距離またはＱまでの距離のうち少なくとも一方は１以下である。

(1) Ｐを中心とする半径１の円周を E，Ｑを中心とする半径１の円周を F とする。上の（条件）の下で最大面積をもつ３角形の頂点Ａ，Ｂ，Ｃはそれぞれ E または F の上にあることを示せ。

(2) この二つの頂点Ａ，Ｂは円周 E 上にあるとして，この円の中心Ｐから弦ABに下した垂線の長さを p とする。p を固定したとき，（条件）をみたす３角形ABCの面積 S が最大となるならば，直線ABと直線PQは直交することを示せ。

(3) （条件）をみたす３角形ABCの面積 S の最大値を求めよ。

分 野

数学Ｉ：平面図形，**微分・積分**：微分法

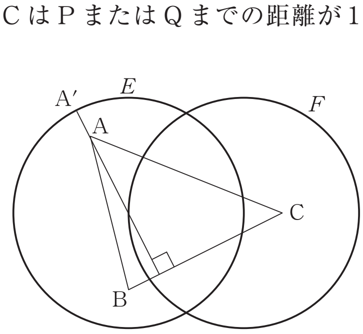
考え方

(1)，(2)は(3)のための誘導．(2)で三角形の最大値を p で表せばあとは p について微分すればよい．

【解答】

(1) Ｐを中心とする半径１の円板とＱを中心とする半径１の円板の和集合を D とする，D の周上の点はすべて２円 E または F の上にある．（条件）の下では３頂点Ａ，Ｂ，ＣはＰまたはＱまでの距離が１以下の点であるから，D 上の点である．

たとえばＡが E 上にも，F 上にもないとき，Ａは D の周上にはない．したがって，BCに垂直でＡを通る直線上をBCから遠ざかる方向へ移動することができる．そのとき３角形ABCの面積はより大きくなるからこの３角形ABCは（条件）をみたす面積最大の３角形ではない．



同様にＢまたはＣが E 上にも，F 上にもないとき３角形ABCは（条件）をみたす面積最大の３角形ではない．

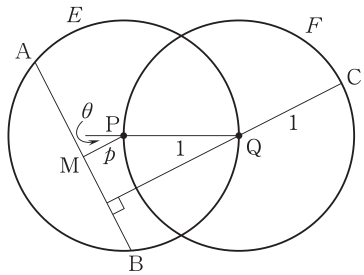
したがって，（条件）をみたす面積最大の３角形ABCの３頂点は円周 E または円周 F 上にある．

（証明終り）

(2) Ｐを原点，Ｑの座標を $(1,\ 0)$ とする．ABの中点をＭとすると，$\mathrm{MP}=p$ で $\mathrm{AB}=2\sqrt{1-p^2}$ は固定される．

頂点 C は AB から最も遠い点でなければならない．

A，B はともに D の境界上の点でなければならないから円周 $E：x^2+y^2=1$ のうち，D の境界の部分 $x \leqq \dfrac{1}{2}$ の部分になければならない．したがって 3 角形 ABC の面積が最大になる点 C は常に AB について Q と同じ側にある．



$\angle \mathrm{QPM}=\pi-\theta \left(0 \leqq \theta < \dfrac{2}{3}\pi\right)$ とおける．

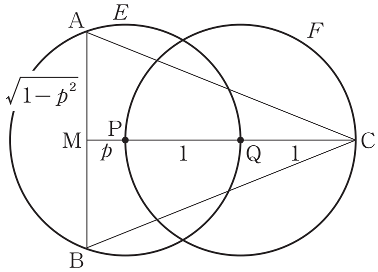
$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，C は F 上の点で $\mathrm{QC} \perp \mathrm{AB}$ となる点である．このとき 3 角形 ABC の高さは $\mathrm{MP}+\mathrm{PQ}\cos\theta+\mathrm{QC}=p+\cos\theta+1 \leqq p+2$ である．

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，C は E 上の点で $\mathrm{PC} \perp \mathrm{AB}$ となる点である．このとき 3 角形 ABC の高さは $\mathrm{MP}+\mathrm{PC}=p+1<p+2$ となる．

したがって，p を固定したとき，3 角形 ABC の底辺の長さは固定されるから高さが最大のとき面積は最大になる．高さが最大値 $p+2$ をとるとき $\theta=0$ で，AB は PQ に垂直である． （証明終り）

(3) （条件）と (1) から三角形の ABC の 3 頂点のうち，2 頂点は E または F 上にある．

その 2 頂点を改めて，A，B とし，A，B がある円を E とすれば (2) についての最大値が S の最大値である．



(2) より，$\mathrm{PM}=p$ のとき，$\mathrm{AB}=2\sqrt{1-p^2}$ で AB に対する 3 角形の高さは $p+2$ であるから，3 角形 ABC の面積は

$$\sqrt{1-p^2}\,(2+p)=\sqrt{(1-p^2)(2+p)^2} \quad (0 \leqq p<1).$$

$f(p)=(1-p^2)(2+p)^2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f'(p)&=-2p(2+p)^2+2(1-p^2)(p+2)\\ &=-2(p+2)(2p^2+2p-1). \end{aligned}$$

$f'(p)=0$ となるのは，$p=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

p	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	(1)
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$	4	↗		↘	(0)

$p=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

よって，3 角形 ABC の面積の最大値は

$$\frac{\sqrt[4]{3}\,(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

1 から 13 まで，それぞれ違った数字が書かれたカードが 1 枚ずつ 13 枚ある。このカードを使って，A と B の 2 人が次のルールでゲームをする。

◦ A と B は最初に 2 枚ずつカードをもつ。相手のカードの数字は見えない。

◦ まず，A が 1 枚のカードを数字が見えるようにして出し，B はそれを見て一枚のカードを出す。数字の大きいカードを出した者が 1 点を得る。

◦ 次に，残りのカードを出しあって，数字が大きいカードを出した者が 1 点を得る。

◦ この際，A と B はおのおのの得点が最大となるようにカードを出すものとする。

(1) カードを配られた後，A は手持ちのカードのうち，数字の大きいものを最初に出した方が有利か，不利か，あるいはどちらを出しても同じか。

(2) A，B に無作為に 2 枚ずつカードを配った場合，A の得点の期待値を求めよ。

(3) A はカードの数字の合計が 14 となるような 2 枚のカードを最初に選んで持っているものとする。B は残りのカードから無作為に選んでゲームを行なう。この場合，A ははじめにどのようなカードを選べば A の得る点数の期待値が最大となるか，また最小となるか。それぞれの場合の得点の期待値を求めよ。

分 野

確率・統計：確率，期待値

考え方

B の戦略は A の出したカードより数字が大きいカードが 2 枚あるときも，数字が小さいカードが 2 枚あるときも数字が小さい方のカードを出す．A の出したカードより数字が大きいカードと数字が小さいカードが 1 枚ずつあるときは数字が大きいカードを出す．

得点は A と B のもっているカードの数字の大小順で決まる．その順序は ${}_4C_2=6$ 通りある．

【解答】

(1) A，B の持っているカードの数字の大小で異なった結果になる．A，B が最初にもつカードを小さい順に並べたとき，それを A，B のどちらがもつカードかを示す順列を考える．その順列は $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通りあり

$$\text{AABB，ABAB，ABBA，BAAB，BABA，BBAA} \qquad \cdots ①$$

である．

このうち，AABB は A がどの順にカードを出しても A の得点は 0 点であり，BBAA は A がどの順にカードを出しても A の得点は 2 点である．

また，ABBA と BAAB は A がどの順にカードを出しても A の得点は 1 点である．

B は A の出したカードより数字が大きいカードがあればそのうち最小のものを出し，A の出したカードより数字が大きいカードがないときは数字が小さい方のカードを出すのが有利である．

ABAB のとき，A が最初に数字の大きいカードを出したとき，B はそれより大きい数字のカードを出し，残りのカードの数字も B の方が大きいから A の得点は 0 点である．

また，このとき，A が最初に数字の小さいカードを出したとき，B はそれより大きいが，小さい方の数字のカードを出し，残りのカードの数字も B の方が大きいから A の得点は 0 点である．

BABA のとき，A が最初に数字の大きいカードを出したとき，B はそれより大きい数字のカードがないから小さい方の数字のカードを出し，残りのカードの数字は B の方が大きいから A の得点は 1 点である．

また，このとき，A が最初に数字の小さいカードを出したとき，B はそれより大きい数字のカードを出し，残りのカードの数字は A の方が大きいから A の得点は 1 点である．

以上から，A が手持ちのカードのどちらを最初に出しても有利，不利はなく同じである．　…(答)

(2)　選ばれる 4 枚のカードが何であっても，その 4 枚がどの大小順で A，B に配られるかで得点の期待値は決まる．

① で示した 6 個の順列は等確率で起こる．

AABB，ABAB のとき A の得点は 0 点，ABBA，BAAB，BABA のとき A の得点は 1 点，BBAA のとき A の得点は 2 点であるから，A の得点の期待値は

$$0\times\frac{2}{6}+1\times\frac{3}{6}+2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

…(答)

(3)　A が選んだカードの小さい方の数字を k $(1\leqq k\leqq 6)$ とする．残りのカードのうち k より小さい数字のカードは $k-1$ 枚，k より大きく $14-k$ より小さい数字のカードは $13-2k$ 枚，$14-k$ より大きいカードは $k-1$ 枚の合計 11 枚である．

この中から B が無作為に 2 枚取り出したとき，カードの数字の大小順が ① で示した順序になる確率をそれぞれ求めると，

AABB：$\dfrac{{}_{k-1}C_2}{{}_{11}C_2}=\dfrac{(k-1)(k-2)}{110}$，　ABAB：$\dfrac{(13-2k)(k-1)}{55}$，

ABBA：$\dfrac{{}_{13-2k}C_2}{{}_{11}C_2}=\dfrac{(13-2k)(6-k)}{55}$，　BAAB：$\dfrac{(k-1)^2}{55}$，

BABA：$\dfrac{(k-1)(13-2k)}{55}$，　BBAA：$\dfrac{{}_{k-1}C_2}{{}_{11}C_2}=\dfrac{(k-1)(k-2)}{110}$．

場合	AABB	ABAB	ABBA
得点	0	0	1
確率	$\dfrac{(k-1)(k-2)}{110}$	$\dfrac{(13-2k)(k-1)}{55}$	$\dfrac{(13-2k)(6-k)}{55}$

場合	BAAB	BABA	BBAA
得点	1	1	2
確率	$\dfrac{(k-1)^2}{55}$	$\dfrac{(k-1)(13-2k)}{55}$	$\dfrac{(k-1)(k-2)}{110}$

よって期待値は

$$0+0+\frac{(13-2k)(6-k)}{55}+\frac{(k-1)^2}{55}+\frac{(k-1)(13-2k)}{55}+2\times\frac{(k-1)(k-2)}{110}=\frac{2k^2-15k+68}{55}.$$

$k=1$ のとき期待値は $\dfrac{2-15+68}{55}=1$，$k=6$ のとき期待値は $\dfrac{2\cdot 6^2-15\cdot 6+68}{55}=\dfrac{50}{55}<1$.

よって，A の得点の期待値が最大なのは $k=1$ のとき，つまり，1 と 13 を選んだとき．その期待値は 1.　…(答)

k が $\dfrac{15}{4}$ に最も近い整数 4 のとき，期待値は最小値 $\dfrac{2\cdot 4^2-15\cdot 4+68}{55}=\dfrac{8}{11}$ をとる．

よって，A の得点の期待値が最小なのは $k=4$ のとき，つまり，4 と 10 を選んだとき．その期待値は $\dfrac{8}{11}$.　…(答)

1996 年　前期・文科

第 1 問

a を実数とする。行列 $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ が

$$X^2-2X+aE=O$$

をみたすような実数 x，y を求めよ。

ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

分　野

代数・幾何：行列

考え方

成分計算でもできるが，ケイリー・ハミルトンの定理をうまく使う．

【解答】

ケイリー・ハミルトンの定理から

$$X^2-2xX+(x^2+y^2)E=O.$$

与式とあわせて

$$(2x-2)X-(x^2+y^2-a)E=O. \qquad \cdots ①$$

(i)　$x \neq 1$ のとき，$X=\dfrac{x^2+y^2-a}{2(x-1)}E$ とかけるから，X は E の実数倍．成分を比較して，$y=0$.

よって，$X=xE$．与式から

$$X^2-2X+aE=(x^2-2x+a)E=O.$$

$E \neq O$ から $x^2-2x+a=0$.

x は実数だから，$\dfrac{1}{4}$(判別式)$=1-a \geqq 0$．$a \leqq 1$.

このとき，

$$x=1 \pm \sqrt{1-a}, \quad y=0.$$

$x \neq 1$ から $a<1$.

(ii)　$x=1$ のとき，① から，$x^2+y^2-a=0$．$y^2=a-1$.

y は実数だから $a \geqq 1$.

以上 (i)，(ii) より

$$\begin{cases} (x,\ y)=(1 \pm \sqrt{1-a},\ 0) & (a<1 \text{ のとき}), \\ (x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{a-1}) & (a \geqq 1 \text{ のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

a，b，c，d を正の数とする。不等式

$$\begin{cases} s(1-a)-tb>0, \\ -sc+t(1-d)>0 \end{cases}$$

を同時にみたす正の数 s，t があるとき，２次方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

は $-1<x<1$ の範囲に異なる２つの実数解をもつことを示せ。

分　野

数学Ⅰ：連立不等式，２次方程式の理論

考え方

a，b，c，d が正である条件と，連立不等式が s，t が正の解をもつことから，a，b，c，d に関する不等式をうる．

また，$-1<x<1$ に解をもつ条件を１つ１つ証明する．

【解答】

そのような，s，t をとると，

$$t(1-d)>sc>0, \quad s(1-a)>tb>0$$

で，a，b，c，d は正だから，

$$1-d>0, \quad 1-a>0. \qquad \cdots①$$

$$\frac{1-a}{b}s>t>\frac{c}{1-d}s$$

だから，

$$(1-a)(1-d)-bc>0. \qquad \cdots②$$

$f(x)=x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ が $-1<x<1$ の範囲に異なる２つの実数解をもつ条件は

$$\begin{cases} (\text{判別式})=(a+d)^2-4(ad-bc)>0, & \cdots③ \\ (\text{軸})：x=\dfrac{a+d}{2},\ -1<\dfrac{a+d}{2}<1,\ -2<a+d<2, & \cdots④ \\ f(-1)=1+(a+d)+ad-bc>0, & \cdots⑤ \\ f(1)=1-(a+d)+ad-bc>0. & \cdots⑥ \end{cases}$$

である．

$$(a+d)^2-4(ad-bc)=(a-d)^2+4bc$$

で $b>0$，$c>0$ から ③ は成り立つ．

① から

$$a+d<2. \quad \text{また}\ -2<0<a+d$$

から ④ は成り立つ．

② から

$$(1-a)(1-d)-bc=1-(a+d)+ad-bc>0$$

よって，⑥ は成り立つ．

また，

$$1+(a+d)+ad-bc>1-(a+d)+ad-bc$$

より ⑥ が成り立つとき，⑤ も成り立つ．

以上より，③，④，⑤，⑥ が成り立ち，与式をみたす st が存在するとき，$f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲に異なる２実解をもつ．（証明終り）

第3問

xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ に対し，正方形 $S(\mathrm{P})$ を連立不等式

$$|x-a| \leqq \frac{1}{2},\quad |y-b| \leqq \frac{1}{2}$$

の表す領域として定め，原点と $S(\mathrm{P})$ の点との距離の最小値を $f(\mathrm{P})$ とする。

点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を P が動くとき，$f(\mathrm{P})$ の最大値を求めよ。

分 野

数学 I：図形と方程式，最大・最小

考え方

作図して観察すること．$S(\mathrm{P})$ が x 軸と交るときは左側の辺と x 軸の交点が原点に最も近く，そうでないときは左下の頂点が原点に最も近い．

【解答】

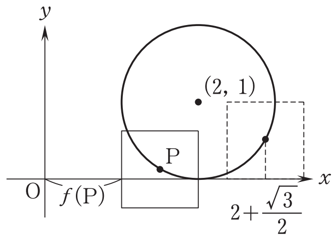
点 $(2,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を P が動くとき，P の x 座標 a は $1 \leqq a \leqq 3$ の範囲を動き，y 座標 b は $0 \leqq b \leqq 2$ の範囲を動く．

(i) P が $0 \leqq y \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，正方形 $S(\mathrm{P})$ 上で原点に最も近い点は原点から $S(\mathrm{P})$ へ下した垂線の足 $\left(a-\frac{1}{2},\ 0\right)$ で

$f(\mathrm{P})=a-\frac{1}{2}$.

$y=\frac{1}{2}$ と $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ の交点は $\left(2\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ だから，

$f(\mathrm{P})$ の最大値は $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.



(ii) P が $\frac{1}{2} \leqq y \leqq 2$ の範囲を動くとき，正方形 $S(\mathrm{P})$ 上で原点に最も近い点は $S(\mathrm{P})$ の左下の頂点 $\left(a-\frac{1}{2},\ b-\frac{1}{2}\right)$ で，

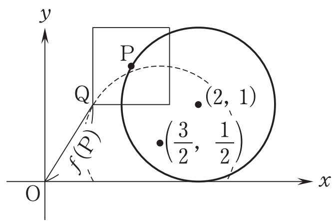
$f(\mathrm{P})=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2}$.

$S(\mathrm{P})$ の左下の頂点を Q とすると，Q は点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 1 の円周の $y \geqq 0$ 上を動く．

OQ の最大値が $f(\mathrm{P})$ の最大値.

O と，点 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ の距離は $\frac{\sqrt{10}}{2}$ だから，$f(\mathrm{P})$ の最大値は

$$\frac{\sqrt{10}}{2}+1. \qquad \cdots(答)$$



(i), (ii) より，$f(\mathrm{P})$ の最大値は

$$f(\mathrm{P})=\frac{\sqrt{10}}{2}+1. \qquad \cdots(答)$$

第4問

xyz 空間において，点 P を $(1,\ 0,\ 1)$，点 Q を $(a,\ a+1,\ 0)$ とする。線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転して得られる曲面と平面 $z=1$ および xy 平面で囲まれる部分の体積を $V(a)$ とおく。a が実数全体を動くときの $V(a)$ の最小値およびそれを与える a の値を求めよ。

分　野

基礎解析：整式の積分，体積

考え方

平面 $z=t$ と線分 PQ の交点が z 軸のまわりに 1 周するときできる円が断面．その面積を $z=t$ で積分する．

【解答】

線分 PQ を $1-t:t$ に内分する点を R とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(t+(1-t)a,\ (1-t)(a+1),\ t).$$

R は PQ と平面 $z=t$ の交点．z 軸と $z=t$ の交点を H とすると，$\mathrm{H}(0,\ 0,\ t)$ で

$$\mathrm{HR}^2=\{t+(1-t)a\}^2+(1-t)^2(a+1)^2.$$

$$\begin{aligned}V(a)&=\pi\int_0^1[\{t+(1-t)a\}^2+(1-t)^2(a+1)^2]\,dt\\&=\pi\int_0^1[t^2+2t(1-t)a+(1-t)^2\{a^2+(a+1)^2\}]\,dt\\&=\pi\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{6}a+\frac{1}{3}\{a^2+(a+1)^2\}\right\}\\&=\frac{\pi}{3}(2a^2+3a+2)=\frac{\pi}{3}\left\{2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\right\}.\end{aligned}$$

よって，$a=-\dfrac{3}{4}$ のとき，$V(a)$ は最小値 $\dfrac{7}{24}\pi$ をとる．　…(答)

1996 年　前期・理科

第 1 問

xy 平面において，行列 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{3}$ の円を C とする。

f による C の像が直線 $x=\dfrac{2}{3}$ に接し，かつ領域 $D=\{(x,\ y)|x>0\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ 全体のなす図形を ab 平面上に図示せよ。

分　野

代数・幾何：一次変換，二次曲線

考え方

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ はもとの図形を回転実数倍で相似な図形に移す.

移された円が $x=\dfrac{2}{3}$ に接する条件，$x>0$ に含まれる条件を求めて図示する.

【解答】

C の方程式は $(x-1)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$ である.

f による点 $(x,\ y)$ の像を $(X,\ Y)$，C の像を C' とする.

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のとき，f により C' は原点となり，題意に反する.

$(a,\ b)\fallingdotseq(0,\ 0)$ のとき，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

だから，

$$C' : \left(\frac{aX+bY}{a^2+b^2}-1\right)^2+\left(\frac{-bX+aY}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{1}{9} \iff (X-a)^2+(Y-b)^2=\frac{a^2+b^2}{9}.$$

よって，C' は点 $(a,\ b)$ が中心で半径が $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ の円.

直線 $x=\dfrac{2}{3}$ に接するとき，

$$\left|a-\frac{2}{3}\right|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}. \qquad \cdots①$$

C' が D に含まれるから $a>0$ で

$$a-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}=a-\left|a-\frac{2}{3}\right|>0.\ \text{よって，}a>\frac{1}{3}.$$

① から，

$$(3a-2)^2=a^2+b^2.\quad 8a^2-12a+4-b^2=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2-b^2-\frac{1}{2}=0.$$

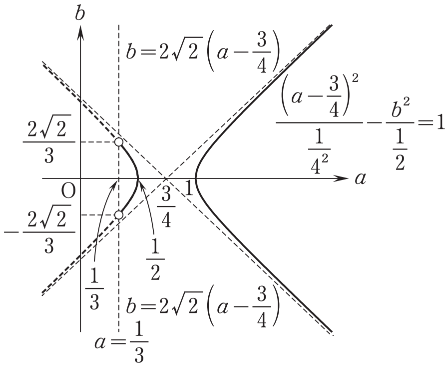
ab の方程式で表される曲線は双曲線で中心は $\left(\frac{3}{4},\ 0\right)$ で，

頂点は $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$(1,\ 0)$ で，漸近線は $b=\pm 2\sqrt{2}\left(a-\frac{3}{4}\right)$.

以上から，点 $(a,\ b)$ の軌跡は

$$\frac{\left(a-\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{1}{4^2}}+\frac{b^2}{\frac{1}{\sqrt{2}^2}}=1 \quad \left(a>\frac{1}{3}\right).$$

図示すると右図太線部.



第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

空間内の点 O を中心とする一辺の長さが l の立方体の頂点を $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_8$ とする。また，O を中心とする半径 r の球面を S とする。

(1) S 上のすべての点から，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_8$ のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

(2) S 上のすべての点から，$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_8$ のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件を l と r で表せ。

ただし，S 上の点 P から A_k が見えるとは，A_k が S の外側にあり，線分 PA_k と S との共有点が P のみであることとする。

分　野

代数・幾何：空間図形

考え方

球面の接平面より上にある頂点が見える．条件をみたす限界の図形がどのようであるかをよく考えることが大切．

【解答】

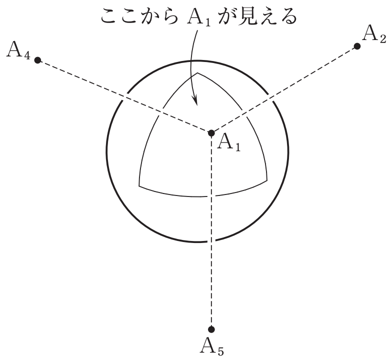
(1) 立方体 $A_1A_2\cdots A_8$ を C とする．

球面 S 上の点 P における接平面を π とすると，P からみえる空間上の点は，接平面 π について S と反対側にある点．

立方体 C の中心 O を原点，各辺を座標軸に平行にとり，$A_1\left(\frac{l}{2},\ \frac{l}{2},\ \frac{l}{2}\right)$ とする．

また，このとき，$S：x^2+y^2+z^2=r^2$ である．

(i) 立方体 C の内部に S があるとき，すなわち，$r \leqq \dfrac{l}{2}$ のとき，



S 上の点 $P(s,\ t,\ u)$ $(s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ u \geqq 0)$ における接平面は
$\pi : sx+ty+uz=r^2$.

$P(s,\ t,\ u)$ は 3 点 $(r,\ 0,\ 0)$，$(0,\ r,\ 0)$，$(0,\ 0,\ r)$ を含む平面 $x+y+z=r$ について原点の反対側にあるから
$s+t+u \geqq r$.

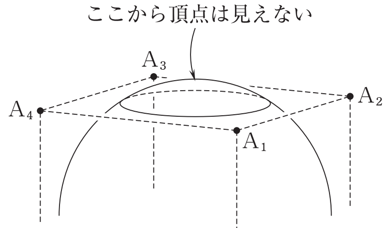
A_1 の座標に対して，

$$s\frac{l}{2}+t\frac{l}{2}+u\frac{l}{2}=(s+t+u)\frac{l}{2} \geqq r^2$$

だから，A_1 は π について S の反対側にある．

図形が yz 平面，zx 平面，xy 平面について対称だから，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$u \geqq 0$ 以外のときも球面上のすべての点に対して，立方体 C の少なくとも 1 頂点は見えている．

(ii) $r > \dfrac{l}{2}$ のとき，S 上の点 $P(0,\ 0,\ r)$ における接平面は $z=r$ は $z > \dfrac{l}{2}$ つまり立方体 C の外側にある．よって，P からは立方体 C のどの頂点も見えない．



以上より，S 上のすべての点から，A_1, A_2, …, A_8 のうち少なくとも 1 点が見えるための必要十分条件は

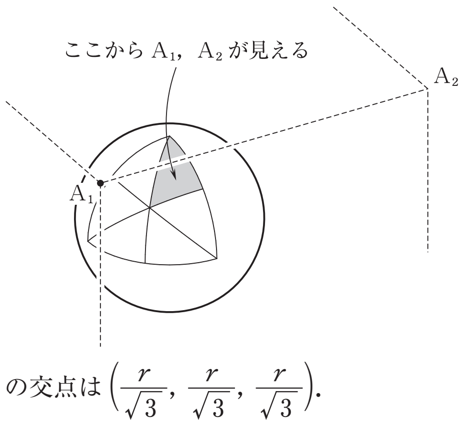
$$r \leqq \frac{l}{2}.$$ …(答)

(2) C 上の 3 頂点 $A_2\left(-\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$，$A_4\left(\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$，$A_5\left(\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2}\right)$ を通る平面を α とおくと，

$$\alpha : x+y+z=\frac{l}{2}.$$

この平面と原点の距離は $\dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ である．

(a) α について原点側に S があるとき，すなわち，$r \leqq \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ のとき，S 上の点 $P(s,\ t,\ u)$ $(0 \leqq s \leqq t \leqq u)$ における接平面は $\pi : sx+ty+uz=r^2$.



(1)(i) から A_1 はすでに見えている．

A_2 の座標に対して，

$$-s\frac{l}{2}+t\frac{l}{2}+u\frac{l}{2}=(-s+t+u)\frac{l}{2}$$

$0 \leqq s \leqq t \leqq u$ で，$0=s=t$ と S の交点は $(0,\ 0,\ r)$，
$s=0$，$t=u$ と S の交点は $\left(0,\ \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$，$s=u=t$ と S の交点は $\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}},\ \dfrac{r}{\sqrt{3}},\ \dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)$.

よって，$0 \leqq s \leqq t \leqq u$ と S の共有点は $-s+t+u \geqq \dfrac{r}{\sqrt{3}}$ の範囲にある．

よって，
$$-s\frac{l}{2}+t\frac{l}{2}+u\frac{l}{2}=(-s+t+u)\frac{l}{2} \geqq \frac{rl}{2\sqrt{3}} \geqq r^2.$$

よって，A_2 も見えている．

図形が yz 平面，zx 平面，xy 平面について対称で，s，t，u の大小関係についても対称だから，$0 \leqq s \leqq t \leqq u$ 以外のときも球面上のすべての点で，立方体 C の少なくとも 2 頂点は見えている．

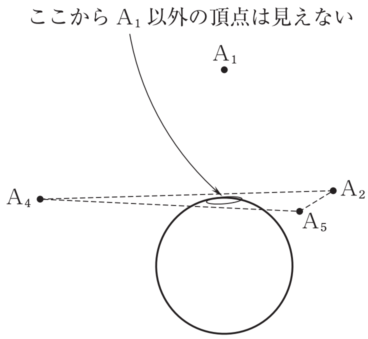
(b)　$r>\dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ のとき，S 上の点 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{r}{\sqrt{3}},\ \dfrac{r}{\sqrt{3}},\ \dfrac{r}{\sqrt{3}}\right)$ における接平面 α は $\dfrac{r}{\sqrt{3}}(x+y+z)=r^2$ である．

このとき，$\mathrm{A}_2\left(-\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$，$\mathrm{A}_4\left(\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$，$\mathrm{A}_5\left(\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2}\right)$ において，

$$\frac{r}{\sqrt{3}}(x+y+z)=\frac{rl}{2\sqrt{3}}<r^2$$

となり，3 点 A_2，A_4，A_5 は平面 α より原点側にあり見えない．

よって，Q からは立方体 C の頂点 A_1 以外の頂点の見えない．



以上より，S 上のすべての点から，A_1，A_2，…，A_8 のうち少なくとも 2 点が見えるための必要十分条件は

$$r\leqq\frac{l}{2\sqrt{3}}.\qquad\cdots(答)$$

（注）　$\mathrm{A}_3\left(-\dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2}\right)$，$\mathrm{A}_6\left(-\dfrac{l}{2},\ \dfrac{l}{2},\ -\dfrac{l}{2}\right)$ としたとき，いくら r を小さくしても S 上の点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{r}{\sqrt{2}},\ \dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)$ における接平面は 4 頂点 A_3，A_4，A_5，A_6 および原点を通る平面に平行だから，R からは，4 頂点 A_3，A_4，A_5，A_6 は見えない．したがって，R からは見えたとしても A_1，A_2 だけが見える．このことから，S 上のすべての点から A_1，A_2，…，A_8 のうち少なくとも 3 点が見えるということはないことがわかる．

第 4 問

1 つのサイコロを続けて投げて，それによって a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を以下のように定める。

出た目の数を順に c_1，c_2，… とするとき，
$1\leqq k\leqq n-1$ をみたすすべての整数 k に対し $c_k\leqq c_n$ ならば $a_n=c_n$，それ以外のとき $a_n=0$ とおく。ただし，$a_1=c_1$ とする。

(1)　a_n の期待値を $E(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}E(n)$ を求めよ。

(2)　a_1，a_2，…，a_n のうち 2 に等しいものの個数の期待値を $N(n)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}N(n)$ を求めよ。

分　野

確率・統計：確率，期待値，**微分・積分**：数列の極限

考え方

$a_n=k$ であるのは，$n-1$ 回まで k 以下の目が出続け，n 回目がの目が k である場合である．

【解答】

(1)　$a_n=k$ である確率は $n-1$ 回まで続けて 1 から k までの目が出て，n 回目に k の目が出る確率だから，

$$\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}.$$

$$E(n)=\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}E(n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{6}k\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{5}k\left(\frac{k}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}+1\right\}=1. \quad \cdots(答)$$

(2)　$a_k=2$ となる確率は，(1) から

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

a_1, a_2, $\cdots$, a_n のうち 2 に等しいものの個数は

$$N(n)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{6}.$$

よって，$\lim_{n\to\infty}N(n)$ は無限等比級数で公比は $0<\frac{1}{3}<1$ だから

$$\lim_{n\to\infty}N(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}. \quad \cdots(答)$$

第 5 問

xyz 空間に内の円柱 $x^2+y^2=R^2$，$R>0$ を側面とする容器に，水面が $z=0$ と一致するように $z\leqq 0$ の部分に水がはいっている。

$z\geqq 0$ に対して定義された連続な関数 $r(z)$ で

$$r(0)=0,\quad 0\leqq r(z)\leqq R$$

をみたすものを考える。xz 平面内の不等式

$$0\leqq x\leqq r(z),\quad z\geqq 0$$

で表された領域を z 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を毎秒 1 の速さで下に動かすと，t 秒後には水面は $z=f(t)$ に上昇するという。

$t\geqq 0$ に対し，$f(t)=e^t-t-1$ であるとき，関数 $r(z)$ を決定せよ。

分　野

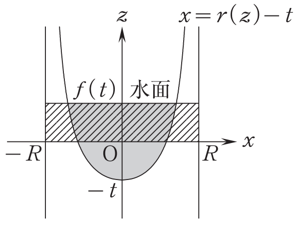
微分・積分：積分法

考え方

円柱のうち，水面の上昇分は立体の水面下の部分の体積に等しい．

t の式でその関係式を立てる．$r(z)$，$z=f(t)$ は被積分関数の中にあるから，立てた式を t で微分する．

【解答】



t 秒後において，立体のうち水面下にある部分の体積を $V(t)$ とすると，

$$V(t)=\pi\int_0^{f(t)+t}\{r(z)\}^2dz.$$

一方，水面の上昇は水面下にある立体によって引き起こされるから，$V(t)=\pi R^2f(t)$.

よって，

$$\int_0^{f(t)+t}\{r(z)\}^2dz=R^2f(t).$$

両辺を t で微分すると

$$(f'(t)+1)\{r(f(t)+t)\}^2=R^2f'(t).$$

$f(t)=e^t-t-1$ より，

$$e^t\{r(e^t-1)\}^2=R^2(e^t-1).$$

$z=e^t-1$ とすると，

$$(z+1)\{r(z)\}^2=R^2z.$$

$r(z)\geqq 0$ だから，

$$r(z)=\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+1}}R. \qquad \cdots(答)$$

（注） 前頁の微分をもう少し丁寧にする．$X=f(t)+t$，$\int_0^X\{r(z)\}^2dz=F(X)$ とおき，

$F'(X)=\{r(X)\}^2$ に注意すれば，

$$\frac{d}{dt}\int_0^{f(t)+t}\{r(z)\}^2dz=\frac{d}{dt}\int_0^X\{r(z)\}^2dz=\frac{d}{dt}F(X)=\frac{dX}{dt}F'(X)=(f'(t)+1)\{r(f(t)+t)\}^2.$$

第６問

α，β を正の数とし，xy 平面において，だ円

$$C:\frac{x^2}{\alpha}+\frac{(y-\sqrt{\beta})^2}{\beta}=1$$

と領域 $D=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqq 1\}$ を考える。

⑴ C が D に含まれるような点 $(\alpha,\ \beta)$ の範囲を求め，$\alpha\beta$ 平面上に図示せよ。

⑵ 点 $(\alpha,\ \beta)$ が⑴で求めた範囲を動くとき，だ円 C の面積の最大値を求めよ。

分　野

代数・幾何：楕円，平面座標　**基礎解析**：整式の微分

考え方

楕円が円に接する場合を考える．楕円をパラメータ表示して，原点からの距離の最大値を α，β で表す．

【解答】

⑴ C 上の点の座標は $(\sqrt{\alpha}\cos\theta,\ \sqrt{\beta}(\sin\theta+1))$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ とかける．

この点を $(x,\ y)$ とおくと，

$$x^2+y^2=\alpha\cos^2\theta+\beta(\sin\theta+1)^2=(\beta-\alpha)\sin^2\theta+2\beta\sin\theta+\alpha+\beta.$$

$t=\sin\theta$，$f(t)=(\beta-\alpha)t^2+2\beta t+\alpha+\beta$ とおく．C が D に含まれる条件は，$f(t)$ の $-1\leqq t\leqq 1$ における最大値が 1 またはそれより小さいことである．

必要条件として，$f(1)\leqq 1$，$f(-1)\leqq 1$．$f(1)=4\beta$，$f(-1)=0$ より，

$$\beta\leqq\frac{1}{4}. \qquad \cdots①$$

$\beta-\alpha\geqq 0$ のときは ① をみたせばよい．

$\beta-\alpha<0$ のとき，

$$f(t)=-(\alpha-\beta)\left(t-\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)^2+\frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}.$$

$u=f(t)$ の軸は $t=\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$.

$-1\leqq\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}\leqq 1$ つまり，$\beta\leqq\dfrac{\alpha}{2}$ のとき，$f(t)$ の最大値は $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$.

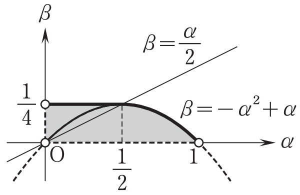
よって，$\dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta}\leqq 1$ が条件．すなわち，

$$\alpha^2 \leqq \alpha-\beta. \quad \beta \leqq -\alpha^2+\alpha.$$

$\dfrac{\alpha}{2}<\beta<\alpha$ のときは ① をみたせばよい．

以上より，

$$\beta \leqq \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \left(0<\alpha \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right), \\ -\alpha^2+\alpha & \left(\dfrac{1}{2} \leqq \alpha<1\right) \end{cases}$$



…(答)

図示すると右図，境界は α 軸，β 軸を含まず，それ以外は含む．

(2) だ円の面積は $\pi\sqrt{\alpha\beta}$．

β 固定した場合 α が大きいほど面積は大きい．したがって，$\beta=-\alpha^2+\alpha$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq \alpha<1\right)$ で考えればよい．

$$\alpha\beta=-\alpha^3+\alpha^2.$$

これを $g(\alpha)$ とおくと，$g'(\alpha)=-3\alpha^2-2\alpha=-3\alpha\left(\alpha-\dfrac{2}{3}\right)$．

α	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$g'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$g(\alpha)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{2}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}.$$

よって $\alpha\beta$ の最大値は $\dfrac{4}{27}$．$\left((\alpha,\ \beta)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{9}\right) \text{ のとき．}\right)$

だ円の面積の最大値は

$$\pi\sqrt{\frac{4}{27}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

1996 年　後期・理科 I 類

第 1 問

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする。以下に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

(1)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

(2)　互に区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

(3)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

(4)　n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互に区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか。

分　野

確率・統計：場合の数

考え方

(1)，(2) は重複順列，重複組合せの基本．

(3)，(4) は (1)，(2) のうち箱を入れ替えたとき同一視できるものを考える．

【解答】

(1)　n 個のボールはそれぞれ 3 個の箱のどれかに入るから，その場合の数は

$$3^n \text{ 通り．} \qquad \cdots\text{(答)}$$

(2)　A，B，C の 3 つの箱に入るボールの個数で場合分けをする．

A の箱の入るボールを左から並べ，仕切りをいれてその右に B の箱に入るボールを並べ，仕切りを入れてその右に C の箱に入るボールを並べる．

このようにしてできたボールと仕切りの順列の個数が求めるものに対応する．

その個数は

$${}_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n=\frac{(n+2)!}{n!2!}=\frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ 通り．} \qquad \cdots\text{(答)}$$

(3)　(1) で求めた 3^n 通りの場合のうち，2 つの箱が空の場合は 3 通りである．

この場合 3 つの箱に区別がなくなると，3 通りは同一視され，1 通りとなる．

3 つの箱が空でない場合と，1 つの箱だけが空の場合の数は 3^n-3 通り．3 つの箱に区別がなくなると，入っているボールで 3 つの箱は区別できる．同じボールの組み合せで箱だけが入れ替わる場合の数は $3!=6$ 通りずつあるはずだから，それぞれ 6 通りが同一視される．

求める入れ方は

$$\frac{3^n-3}{6}+1=\frac{3^{n-1}+1}{2} \text{ 通り．} \qquad \cdots\text{(答)}$$

(4)　$n=6m$ のとき，(2) の個数は $\dfrac{(6m+2)(6m+1)}{2}=(3m+1)(6m+1)$ 通り．

このうち，3 つの箱に入っているボールの個数が等しく $2m$ 個ずつのものは 1 通りである．

2 つの箱に入っているボールの個数が等しく，残りの箱に入っているボールの個数が異なるような入れ方は，ボールの個数が等しい箱に入るボールの個数が，$0, 1, 2, \cdots, 2m-1, 2m+1, \cdots, 3m$ の $3m$

通り，箱の選び方がそれぞれ3通りあるから$9m$通り．

3つの箱に入っているボールの個数が互いに異なるのは上記以外でその個数は
$$(3m+1)(6m+1)-1-9m=18m^2 \text{ 通り．}$$

箱を区別しないとき3つの箱に入っているボールの個数が等しいときはそのまま，2つの箱に入っているボールの個数が等しく，残りの箱に入っているボールの個数が異なるものは3通りが同一視され，3つの箱に入っているボールの個数が互いに異なるものは6通りが同一視される．

求める個数は
$$1+\frac{9m}{3}+\frac{18m^2}{6}=3m^2+3m+1 \text{ 通り．} \qquad \cdots(\text{答})$$

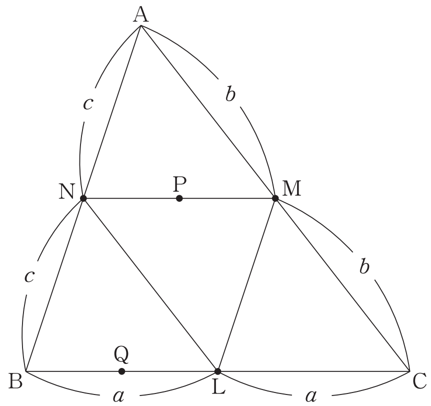
（注）　nで表せば $\dfrac{1}{12}n^2+\dfrac{n}{2}+1$．

第2問

3辺の長さが BC$=2a$，CA$=2b$，AB$=2c$ であるような鋭角三角形△ABCの3辺BC，CA，ABの中点をそれぞれL，M，Nとする。線分LM，MN，NLに沿って三角形を折り曲げ，四面体をつくる。その際，線分BLとCL，CMとAM，ANとBNは同一視されて，長さがa，b，cの辺になるものとする。

(1)　線分MN，BLの中点をそれぞれP，Qとする。四面体を組み立てたとき，空間内の線分PQの長さを求めよ。

(2)　この四面体の体積をa，b，cを用いて表せ。



分　野

代数・幾何：ベクトル，内積，立体図形

考え方

四面体を組み立てBLMNとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BL}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BN}}$について，それぞれの大きさと相互の内積を求めることが先決．

PQ$\perp$MN，PQ$\perp$BL を利用する．

【解答】

(1)　四面体を作ったとき，3点A，B，Cは一致する．以下では一致した3点をBで表し，ベクトルは空間ベクトルとする．このとき，
$$|\overrightarrow{\mathrm{BL}}|=a,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=b,\quad |\overrightarrow{\mathrm{BN}}|=c. \qquad \cdots①$$

またもとの平面上で中点連結定理から

$$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|=a,\quad |\overrightarrow{\mathrm{NL}}|=b,\quad |\overrightarrow{\mathrm{LM}}|=c. \qquad \cdots②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BN}}-\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{BN}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2.\quad \therefore\quad a^2=c^2-2\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}+b^2$（①，②から）．

よって，

$\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$．同様に $\overrightarrow{\mathrm{BN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$．…③

P は MN の中点，Q は BL の中点だから

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{BN}}),\quad \overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BL}}.$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BL}}-\overrightarrow{\mathrm{BM}}-\overrightarrow{\mathrm{BN}}).$$

③より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{BL}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BN}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}-2\overrightarrow{\mathrm{BN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}}-2\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}})$$

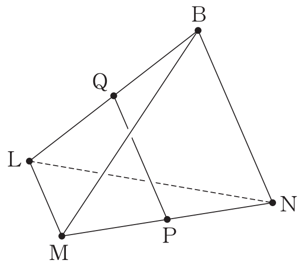
$$=\frac{1}{4}\{a^2+b^2+c^2+(-a^2+b^2+c^2)-(a^2-b^2+c^2)-(a^2+b^2-c^2)\}=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2).$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{\sqrt{-a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{BL}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}}-\overrightarrow{\mathrm{BN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BL}})=\frac{1}{4}\{2a^2-(a^2+b^2-c^2)-(a^2-b^2+c^2)\}=0.$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}-\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}+|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BN}}|^2)$$

$$=\frac{1}{4}\{(a^2-b^2+c^2)-(a^2+b^2-c^2)+2b^2-2c^2\}=0.$$



よって，PQ⊥MN，PQ⊥BL．

三角形 QMN の面積は

$$\triangle\mathrm{QMN}=\frac{1}{2}\mathrm{MN}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{a\sqrt{-a^2+b^2+c^2}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BN}}-\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\frac{1}{2}\{(a^2-b^2+c^2)-(a^2+b^2-c^2)\}=-b^2+c^2.$$

よって，BL と MN のなす角を θ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BL}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MN}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BL}}||\overrightarrow{\mathrm{MN}}|}=\frac{-b^2+c^2}{a^2}.$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{(-b^2+c^2)^2}{a^4}}=\frac{\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}}{a^2}.$$

B と平面 QMN の距離と，L と平面 QMN の距離は等しく，ともに $\frac{a}{2}\sin\theta$．

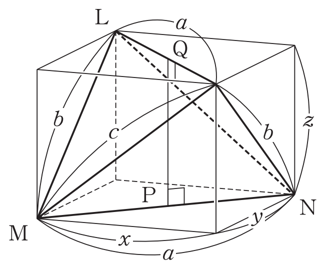
よって，四面体 BLMN の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{QMN}\cdot\mathrm{BL}\sin\theta=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{-a^2+b^2+c^2}}{2\sqrt{2}}a\frac{\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}}{a^2}$$

$$=\frac{\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}}{6\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

【別解】 河合塾公表解答

(1) 4 つの面がすべて合同な四面体（等面四面体という）には図のように外接する直方体が存在する．
外接する直方体の 3 辺の長さを x，y，z とおき，



$$x^2+y^2=a^2, \qquad \cdots ①$$
$$y^2+z^2=b^2, \qquad \cdots ②$$
$$z^2+x^2=c^2 \qquad \cdots ③$$

とおくことができる．

②＋③－① から $2z^2=b^2+c^2-a^2$.

$$\therefore \quad \mathrm{PQ}=z=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 同様にして，直方体の残りの 2 辺の長さは

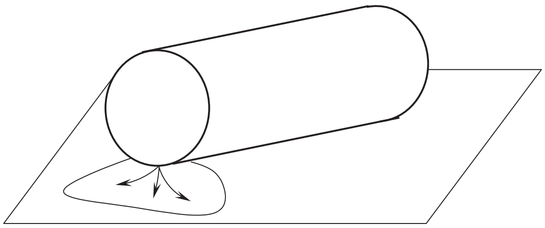
$$x=\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}}, \quad y=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}}.$$

直方体の体積は xyz で求める四面体の体積はこれから体積が $\dfrac{1}{2}xyz$ の四面体を 4 つ引いたものだから，

$$V=xyz-4\times\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}xyz=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

直円柱形の石油タンクが，図のように側面の一母線で水平な地面と接する形に横倒しになり，地面と接する一点に穴があいて石油が流出しはじめた。倒壊前の石油タンクは一杯で，1 時間後の現在までに半分の石油が流出した。単位時間当りの流出量は穴から測った油面の高さの平方根に比例するという。微分方程式をたてて，このあと何時間何分で全部の石油が流出するか予測せよ。ただし，分未満は切り捨てよ。



分 野

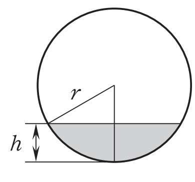
微分・積分：微分方程式

考え方

タンクの大きさ，流出量の比例定数が与えられていないので，とりあえず，直円柱の半径 r，長さ L，流出速度を $a\sqrt{h}$ とおいて，微分方程式を立てる．

1 時間で半分流出したのに対し，全部流出するまでの時間の比が求められている．

【解答】



タンクの断面の円の半径を r，タンクの長さを L とし，地表上の穴から油面までの高さを h 高さが h のときの石油の流出量が 1 時間当り $a\sqrt{h}$ とする．

最初に入っていた石油の量は πr^2L である．t 時間後タンクに入っている石油の量を $V(t)$ とする．このとき，

$$\frac{dV}{dt}=-a\sqrt{h}$$

という関係式が成り立つ．穴から油面までの高さが h のとき，

$$V=2\int_{-r}^{h-r}\sqrt{r^2-x^2}\,dxL.\quad \frac{dV}{dt}=2\sqrt{r^2-(h-r)^2}\,L\frac{dh}{dt}.$$

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{a\sqrt{h}}{2L\sqrt{r^2-(h-r)^2}}=-\frac{a}{2L\sqrt{2r-h}}.$$

これから，微分方程式を解く．

$$\int\sqrt{2r-h}\,dh=-\frac{a}{2L}\int dt.$$

$u=\sqrt{2r-h}$ とおくと，$h=2r-u^2$．$\dfrac{dh}{du}=-2u$.

$$-\int 2u^2du=-\frac{a}{2L}\int dt.\quad \frac{2}{3}u^3=\frac{a}{2L}(t+C).$$

現在時刻を $t=0$ とすると，$t=-1$ のとき，$h=2r$，$u=0$ だから $C=1$.

また，$t=0$ のとき，$h=r$，$u=\sqrt{r}$ だから，$\dfrac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}=\dfrac{a}{2L}$．よって，$a=\dfrac{4}{3}r^{\frac{3}{2}}L$.

$$\frac{2}{3}\sqrt{2r-h}^{\,3}=\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}(t+1).\quad \therefore\quad (2r-h)^3=r^3(t+1)^2.$$

$h=0$ のとき，$8r^3=r^3(t+1)^2$ だから $t=2\sqrt{2}-1$.

$$t\fallingdotseq 1.828\cdots=1+\frac{49.70\cdots}{60}.$$

よって，1 時間 49 分後に全部の石油が流出する． …(答)

数学と物理

私は，大学で物理を学び，河合塾に入ってから数学を教えてきました．そして，現在物理オリンピックというものに関って物理をやっています．

そこで，数学と物理学について考えてみます．

物理では数学を道具として使います．また，数学の分野によっては物理的必要性から生まれてきたものもあります．

私自身は物理学科出身なので，数学を物理を理解するための道具と考え，新しい数学を創造しようとはあまり考えません．

物理でも数学でも，より少ない前提からより多くのことを説明できることが大切です．

しかし，現実世界に合わないことは物理学では意味がないことですが，数学では現実世界に合うかどうかということは関係がないのです．

私が大学院生だったころ，河合塾である数学科の大学院生と知り合いました．私が「何を研究されているのですか」と聞くと「基礎論です」と返事が返ってきた．そこで，「それって何に使えるのですか」と聞くと，しばらく間があって，困惑したように「それは愚問ですよ」と返ってきた．今思うと赤面もので，数学基礎論は数学の本質を研究する分野で，応用などとは全く無関係と考えられる分野でした．

基礎論だけでなくても数学を研究している研究者に何に使えるかを聞くこと自体失礼なことだと思います．ゴメンナサイ．

でも当時，少なくとも私は数学を道具としかとらえていなかったことは事実です．

現実の世界では数学的に簡単に説明つきにくいことは山ほどあります．逆に，数学的にスッキリいえたとしても現実に合わないものはそれ以上にあるように思います．「このことは数学的に証明されていることだから本当です」などということを言う人がいたら嘘でしょう．数学的に言えることが現実を反映するとは限らないからです．

また，物理では扱う関数は限られています．高校の数学で扱う関数を少し拡張した程度で，微分方程式の解になるような関数か，それらをつぎはぎにした関数がせいぜいです．数学で扱うような一般化した議論は行っていません．したがって，連続性や微分・積分可能性について厳しい検討はしません．所詮，物理学では実験値の集積から類推することが基本なので，解析学で取り上げるような厳しい検討は意味がないことが多いようです．

そのためか，物理を扱っている人の方が，数学科の人よりおおらかな感じがします．河合塾で東大後期総合科目Ⅱのプロジェクトチームを作ったとき，物理学科出身の数学科と物理学科の講師からなるチームで共同作業を行いました．いずれも各学科の優秀なメンバーだったのですが，作業をしているうちに，元は同じ物理学科だったはずが，数学を教えている講師と物理を教えている講師の性格が異なってきていることを感じました．数学科の講師は細かい表現にもとかく注意を払うのに対して，物理学科の講師は細かいところより要点を押えることの方に関心があるようで，ここにも，数学をプロパーに考える数学科と，数学を道具として考える物理学科の性格の違いが表れていると感じ，興味深かったことを覚えています．

第6章

1997~2005(平成9~平成17)年

数学I, 数学A, 数学II,
数学B, 数学III, 数学Cの形式など
現代につながる形式の完成

6.1　第 6 次指導要領改訂（1997 年）

第 6 次指導要領改訂は小学校で 1989 年から準備され，高校では 1994 年から実施され，入試には 1997 年から実施された．

この指導要領では日の丸，君が代義務化が問題になった．

高校数学では「数学Ⅰ」,「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」の名前が復活し，選択科目の「数学A」,「数学B」,「数学C」が登場した．高校１年で数学Ⅰ・Aを，高校２年で数学Ⅱ・Bを，高校３年で数学Ⅲ・Cを学習することが想定され，高校卒業必須科目は数学Ⅰのみである．

「数学Ⅰ」,「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」は解析的な分野が中心になり,「数学Ⅲ」の微分・積分を学習するための前提になる分野はすべて「数学Ⅰ」,「数学Ⅱ」に含まれる構成になっている．

「数学A」,「数学B」,「数学C」はそれぞれ４単元から２単元を選択するようになっている．

「数学A」,「数学B」に初めてコンピュータが導入された．

入試での選択はほとんどの大学で,「数学A」では「数と式」と「数列」,「数学B」では「ベクトル」と,「複素数と複素数平面」,「数学C」では「行列と線型計画法」と「いろいろな曲線」が指定された．

細部では複素数平面の再登場，微分方程式の退場，体積，分数関数，無理関数が「数学Ⅲ」のみで扱われるようになったことが目立った．

記憶に残る問題・特徴的な問題（1997〜2005）

1997 年　理科第２問はすべての整数 m について２次不等式が成立する条件を求める問題．条件をうまく作ってあるが，なかなか難しい．

1997 年　後期第１問．三角形を塗りつぶす問題．いくつか塗りつぶした後の数列が最初の数列でハサミウチにできるところが面白い．

1998 年　文科第３問．三角関数の問題の形で与えられた，いわゆるパイこね変換の問題．

1998 年　後期第３問．グラフの関する問題．『大学への数学』に「史上最強の問題」と言わしめた問題．⑵で $n=3m+2$ のときにグラフが不可能であることを示すところがきわめて難しい．

1999 年　文理共通第１問は加法定理の証明を求める問題．教科書にある内容そのままだったが，受験テクニックだけ勉強してきた受験生には難問だったらしく平均点は極めて低かったようである．受験教育に一石を投じた問題である．

2000 年　文科第３問は四面体の頂点を動点が動く確率の問題．1980 年　理科第５問とほぼ同じ．少しひねってはいるが．

2000 年　後期第１問は累乗和に関する多項式 $P_k(x)=\sum_{j=1}^{x} j^{k-1}$ の性質に関する問題．

2000 年　後期第２問．1989 年の理科の問題でバウムクーヘン積分の証明を求めたが，この問題では三角関数を含む関数のグラフと，x 軸が囲む部分を y 軸回転するため，今度はバウムクーヘン積分を積極的に使わないと難しい問題になっている．

2001 年　理科第５問はビーカーの水を他のビーカーに入れる問題．条件をよく理解して解く問題．

2002 年　理科第６問は $2N$ 枚のカードを「シャッフル」することを繰り返すともとに戻ることを示す問題．実は剰余の問題．

2003 年　理科第６問は $\pi>3.05$ であることを証明する問題である．この時期の小学校の指導要領で π を３としてもよいとしたことに対する批判ともとれる問題であった．

2004 年　共通第１問は放物線上に３頂点 P，Q，R をもつ正三角形で，PQ の傾きが与えられたものを求める問題．単純でいろいろ考えさせる問題であった．

2005 年　理科第６問は直角に交わる３つの円柱のうち，２つの共通部分を第３の円柱が繰り抜いた外側に部分の体積を求めるもの．３つの円柱の共通部分なら平凡だが，繰り抜いた外側というのが東大らしく珍しい．

このころ　あんなこと・こんなこと

在ペルー日本大使館人質事件（1996－1997年）.

ダイアナ妃事故死（1997年）.

シドニー・オリンピック・女子マラソンで高橋尚子優勝（2000年）.

小泉内閣（2001年－2006年）．小泉劇場と言われ人気は高かったが，この間失業者が増大，格差が問題になった.

9.11事件（2001年），アメリカ軍アフガニスタンに侵攻（2001年－）．さらにイラク戦争（2003年－）へ.

スマトラ沖地震津波（2004年）.

思い出す曲「つつみこむように」(1998年),「世界に一つだけの花」(2003年)，AKB48デビュー(2005年).

このころの河合塾

1996年　町田校開校.

2001年　津田沼校開校.

2005年　麹町校，新宿校開校，札幌予備学院を河合塾札幌校に.

2006年　河合塾文理，河合塾仙台校に改称.

1997 年　前期・文科

第 1 問

a，b は実数で

$$a^2+b^2=16,\quad a^3+b^3=44$$

をみたしている。このとき，

(1)　$a+b$ の値を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とするとき，a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ。

分　野

数学A：数学的帰納法，整数，**数学B**：高次方程式

考え方

(1) は実数条件を使うところがポイント．

(2) では $a^{k+2}+b^{k+2}=(a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k)$ という関係式を使って数学的帰納法で証明する．

【解答】

(1)　$\begin{cases} a^2+b^2=16, \\ a^3+b^3=44 \end{cases}$ より $\begin{cases} (a+b)^2-2ab=16, \\ (a+b)^3-3ab(a+b)=44. \end{cases}$

$a+b=X$，$ab=Y$ とおくと

$$\begin{cases} X^2-2Y=16, & \cdots① \\ X^3-3XY=44. & \cdots② \end{cases}$$

また a，b は t の 2 次方程式 $t^2-Xt+Y=0$ の 2 実解なので

$$(\text{判別式})=X^2-4Y \geqq 0. \qquad \cdots③$$

① より $Y=\dfrac{1}{2}X^2-8$　$\cdots①'$ であり，これを ③ に代入して

$$-X^2+32 \geqq 0.$$

$$\therefore\quad -4\sqrt{2} \leqq X \leqq 4\sqrt{2}. \qquad \cdots④$$

また ①′ を ② に代入して $X^3-3X\left(\dfrac{1}{2}X^2-8\right)=44.$

$$\therefore\quad (X-2)(X^2+2X-44)=0.$$

$$\therefore\quad X=2,\quad -1\pm 3\sqrt{5}.$$

したがって，④ より $X=a+b=2.$　　…(答)

(2)　$X=2$ のとき ①′ より $Y=ab=-6$．2 以上の自然数 n について

「a^n+b^n は 4 で割り切れる整数である.」　　…(*)

が成立することを数学的帰納法で証明する．

(i)　$n=2$，3 のとき，$a^2+b^2=16$，$a^3+b^3=44$ より (*) は成立．

(ii)　$n=k$，$k+1$ $(k \geqq 2)$ のとき，(*) が成立すると仮定する．

$$\begin{aligned} a^{k+2}+b^{k+2} &= (a+b)(a^{k+1}+b^{k+1})-ab(a^k+b^k) \\ &= 2(a^{k+1}+b^{k+1})+6(a^k+b^k) \quad (\because\ a+b=2,\ ab=-6). \end{aligned}$$

ここで $a^{k+1}+b^{k+1}$，a^k+b^k は仮定により 4 で割り切れる整数なので $a^{k+2}+b^{k+2}$ も 4 で割り切れる整数であり，$n=k+2$ のときも (*) は成立する．

以上 (i)，(ii) より 2 以上のすべての整数 n について (*) は成立する．　　(証明終り)

第2問

a，b を正の数とし，xy 平面の2点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ および $\mathrm{B}(0,\ b)$ を頂点とする正3角形を ABC とする。ただし，C は第1象限の点とする。

(1) 3角形 ABC が正方形 $D=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1\}$ に含まれるような $(a,\ b)$ の範囲を求めよ。

(2) $(a,\ b)$ が(1)の範囲を動くとき，3角形 ABC の面積 S が最大となるような $(a,\ b)$ を求めよ。またそのときの S の値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：平面座標，**数学B**：複素数，複素数平面

考え方

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $60°$ 回転したものとして考えるとよい．回転行列または複素数を利用する．

$(a,\ b)$ についての条件を図示して考える．

【解答】

(1)

〔解1：新課程（複素数平面）〕

複素数平面において A，B，C が表す複素数を α，β，γ とすると，

$$\alpha=a,\quad \beta=bi.$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $-60°$ 回転したものであるから，

$$\gamma-\alpha=(\beta-\alpha)\{\cos(-60°)+i\sin(-60°)\}$$

$$\Longleftrightarrow\ \gamma-a=(bi-a)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ \gamma=\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)i.$$

〔解2：旧課程（1次変換）〕

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $-60°$ 回転したものであるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}\cos(-60°) & -\sin(-60°)\\ \sin(-60°) & \cos(-60°)\end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\Longleftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}-\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}a+\sqrt{3}\,b\\ \sqrt{3}\,a+b\end{pmatrix}.$$

よって，$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$ である．

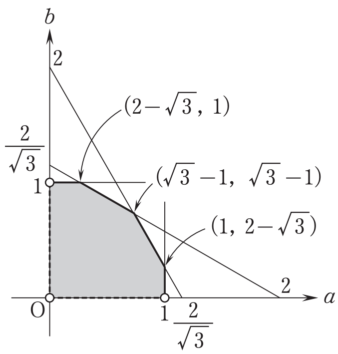
三角形 ABC が D に含まれる条件は，3点 A，B，C が D 内に含まれることであり，$a>0$，$b>0$ と合わせて，

$$0<a\leqq 1,\quad 0<b\leqq 1,\quad (0\leqq)\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\leqq 1,\quad (0\leqq)\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\leqq 1.$$

よって，求める $(a,\ b)$ の範囲は，

$$0<a\leqq 1,\quad 0<b\leqq 1,\quad b\leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}a+\frac{2}{\sqrt{3}},\quad b\leqq -\sqrt{3}\,a+2.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2) (1)で求めた範囲を ab 平面に図示すると，右図の網掛部分（境界は a，b 軸上は含まない）になる．



三角形 ABC の面積 S が最大となるのは，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$$

が最大となるときである． 右図の領域内の点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，AB の長さは OP の長さであるから，OP が最大となるとき S は最大となる．図より次の3点のみを調べればよい．

$\mathrm{P}(1,\ 2-\sqrt{3})$ のとき，$\mathrm{OP}^2=1+(2-\sqrt{3})^2=8-4\sqrt{3}$，

$\mathrm{P}(2-\sqrt{3},\ 1)$ のとき，$\mathrm{OP}^2=(2-\sqrt{3})^2+1=8-4\sqrt{3}$，

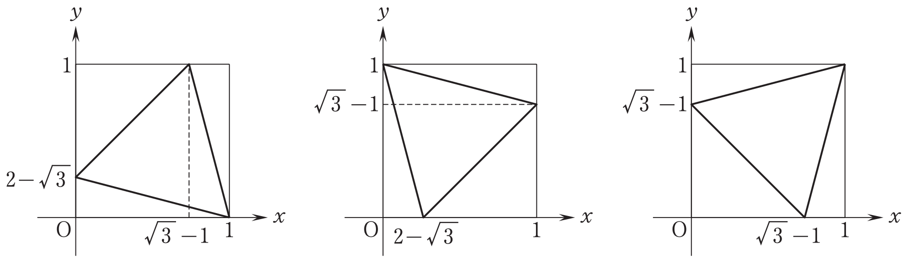
$\mathrm{P}(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1)$ のとき，$\mathrm{OP}^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=8-4\sqrt{3}$

であるから，S が最大となるのは，

$(a,\ b)=(1,\ 2-\sqrt{3}),\ (2-\sqrt{3},\ 1),\ (\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}-1)$ のときで

$$S\text{ の最大値は } \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\sqrt{3}(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3. \qquad \cdots\text{(答)}$$

(注)　3 つの場合は同じ正三角形を向きを変えて置いた場合である．



第 3 問

r を正の数とする。xyz 空間に原点 $(0,\ 0,\ 0)$ と 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ をとる。xyz 空間の点 P で

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|,\quad |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|$$

をみたすものが 2 つ存在するための r の条件を求めよ。さらに，この 2 点の座標を r を用いて表せ。

分　野

数学B：空間ベクトル

考え方

座標計算で，x の 2 次方程式を導き，異なる 2 実解をもつ条件を求める．

【解答】

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく．$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|^2$ より，

$$x^2+y^2+(1-z)^2=x^2+y^2+z^2.$$

$$\therefore\quad z=\frac{1}{2}. \qquad \cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2$ より，$(1-x)^2+y^2+z^2=x^2+(1-y)^2+z^2.$

$$\therefore\quad x=y. \qquad \cdots②$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=r^2|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|^2$ より，$x^2+(1-y)^2+z^2=r^2(x^2+y^2+z^2).$

上式を ①，② を用いて整理すると

$$8(r^2-1)x^2+8x+r^2-5=0. \qquad \cdots③$$

x に対する 2 次方程式 ③ が異なる 2 つの実数解をもつ条件を求める．

$$r^2-1\neq 0 \qquad \cdots④$$

かつ

$$(③\text{ の判別式})>0. \qquad \cdots⑤$$

$$④\text{ で } r>0 \text{ だから } r\neq 1.$$

⑤ より，$r^4-6r^2+3<0$　よって，$3-\sqrt{6}<r^2<3+\sqrt{6}$　つまり，$\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$.
$(\because\ r>0)$

$3-\sqrt{6}<1<3+\sqrt{6}$ であることおよび ③ の解 x が $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)}$ であることから，

r の範囲は $\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<1,\quad 1<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$. …(答)

P の座標は $\left(\dfrac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \dfrac{-2\pm\sqrt{-2r^4+12r^2-6}}{4(r^2-1)},\ \dfrac{1}{2}\right)$ (複号同順). …(答)

第 4 問

$0\leqq t\leqq 1$ をみたす実数 t に対して，xy 平面上の点 A，B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める。t が $0\leqq t\leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を図示せよ。

分 野

数学Ⅱ：整式の微分

考え方

直線の方程式を求め，t で整理して，t の方程式が $0\leqq t\leqq 1$ の解をもつ条件として求める.

【解答】

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}-\dfrac{2}{3}t\\ -2+2t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3(t+1)}\\ 2(t-1)\end{pmatrix}=\frac{2}{3(t+1)}\begin{pmatrix}1\\ 3(t+1)(t-1)\end{pmatrix}$$

であるから，直線 AB の方程式は

$$y-(-2t)=3(t+1)(t-1)\left(x-\frac{2}{3}t\right).$$

展開して t について整理すると，

$$2t^3-3xt^2+3x+y=0. \qquad \cdots(*)$$

t の方程式(*)が $0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつような x，y の条件を求めればよい.

$$f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$$

とおくと，$f'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$.

(i) $x\leqq 0$ のとき，

$0\leqq t\leqq 1$ において $f'(t)\geqq 0$ だから，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 1$ に解をもつ条件は $f(0)\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$.

$$\therefore\ \ y\leqq -3x \text{ かつ } y\geqq -2.$$

(ii) $0<x<1$ のとき，

増減表より，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 1$ に解をもつ条件は，

$f(x)\leqq 0$ かつ ($f(0)\geqq 0$ または $f(1)\geqq 0$).

$$\therefore\ \ y\leqq x^3-3x \text{ かつ } (y\geqq -3x \text{ または } y\geqq -2).$$

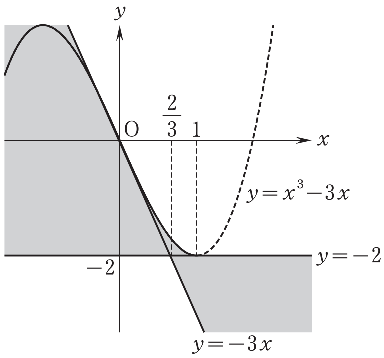
t	(0)	…	x	…	(1)
$f'(t)$		$-$		$+$	
$f(t)$		↘		↗	

(iii) $x\geqq 1$ のとき，

$0\leqq t\leqq 1$ において $f'(t)\leqq 0$ だから，$f(t)=0$ が $0\leqq t\leqq 1$ に解をもつ条件は，$f(0)\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$.

$$\therefore\ \ y\geqq -3x \text{ かつ } y\leqq -2.$$

以上より，直線 AB の通りうる範囲は図の網掛部（境界含む）.


y
x
O
2/3
1
y = x^3 − 3x
y = −2
−2
y = −3x

1997 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 2 問

n を正の整数，a を実数とする。すべての整数 m に対して

$$m^2-(a-1)m+\frac{n^2}{2n+1}a>0$$

が成り立つような a の範囲を n を用いて表せ。

分　野

数学Ⅰ：2 次関数，**数学A**：整数

考え方

すべての実数 m で成り立つ条件をまず押える．

その境界近くですべての整数 m に対し，与不等式が成り立つかどうかを詰めてゆく．

【解答】

$f(m)=m^2-(a-1)m+\dfrac{n^2}{2n+1}a$ とおく．すべての整数 m について $f(m)>0$ となる条件を(*)とする．

すべての実数 m に対して $f(m)>0$ が成り立つ条件は

$$(a-1)^2-\frac{4n^2a}{2n+1}=a^2-\left(2n+1+\frac{1}{2n+1}\right)a+1=\{a-(2n+1)\}\left(a-\frac{1}{2n+1}\right)<0.$$

よって，$\dfrac{1}{2n+1}<a<2n+1$ のときは(*)は成り立つ．

$a=0$ のとき，$f(m)=m^2+m$ で $m=0$ のとき $f(m)=0$ となり条件をみたさない．

$f(0)=\dfrac{n^2}{2n+1}a$ は $a\leqq 0$ のとき $f(0)\leqq 0$ となり(*)をみたさない．

$a=2n+1$ のとき，$f(m)=m^2-2nm+n^2=(m-n)^2$．よって，$f(n)=0$ となり(*)をみたさない．

$$f(n)=n^2-(a-1)n+\frac{n^2}{2n+1}a=n^2+n+\left(\frac{n^2}{2n+1}-n\right)a=\frac{n(n+1)}{2n+1}(2n+1-a).$$

よって，$a\geqq 2n+1$ のとき $f(n)\leqq 0$ となり(*)をみたさない．

$0<a\leqq\dfrac{1}{2n+1}$ のとき，$f(m)$ を最小にする m は $\dfrac{a-1}{2}$ に最も近い整数で $m=0$.

$f(0)=\dfrac{n^2}{2n+1}a>0$ であるから，$0<a\leqq\dfrac{1}{2n+1}$ では(*)をみたす．

以上より(*)をみたす a の範囲は

$$0<a<2n+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

第3問

r は $0<r<1$ をみたす実数とする。xyz 空間に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と2点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$ をとる。

(1) xyz 空間の点Pで条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|$$

をみたすものが存在するような r の範囲を求めよ。

(2) 点Pが(1)の条件をみたして動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値，最小値を r の関数と考えてそれぞれ $M(r)$，$m(r)$ で表す。このとき，左からの極限

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}$$

を求めよ。

分　野

数学B：ベクトル，内積，**数学Ⅲ**：関数の極限

考え方

与条件から1文字消去して2変数の2方程式が解をもつ条件にして，平方完成することから実数解をもつ条件が求められる．

(1)の条件と，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の2次の項が等しいことから，内積は x の1次式でかける．

【解答】

(1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=\{(x-1)^2+y^2+z^2\}-\{x^2+(y-1)^2+z^2\}=-2(x-y)=0.\quad \therefore\quad x=y \quad \cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=r|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-r^2|\overrightarrow{\mathrm{PO}}|^2=\{(x-1)^2+y^2+z^2\}-r^2\{x^2+y^2+z^2\}=(1-r^2)\{x^2+y^2+z^2\}-2x+1=0.$$

$1-r^2>0$ と①より，

$$2x^2-\frac{2}{1-r^2}x+z^2+\frac{1}{1-r^2}=2\left\{x-\frac{1}{2(1-r^2)}\right\}^2+z^2-\frac{2r^2-1}{2(1-r^2)^2}=0. \quad \cdots②$$

これをみたす実数 x，z が存在するから $2r^2-1\geqq 0$．よって，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq r<1. \quad \cdots(答)$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=x(x-1)+y(y-1)+z^2=2x^2-2x+z^2$.

②から $2x^2+z^2=\dfrac{2}{1-r^2}x-\dfrac{1}{1-r^2}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{2}{1-r^2}x-\frac{1}{1-r^2}-2x=\frac{2r^2x-1}{1-r^2}.$$

②から

$$\frac{1}{2(1-r^2)}-\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2(1-r^2)}\leqq x\leqq\frac{1}{2(1-r^2)}+\frac{\sqrt{2r^2-1}}{2(1-r^2)}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は x の1次式で，x の係数が正であることに注意する．

$$M(r)=\frac{2r^2-1}{(1-r^2)^2}+\frac{r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}.$$

$$m(r)=\frac{2r^2-1}{(1-r^2)^2}-\frac{r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1-r^2)^2}.$$

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)^2\{M(r)-m(r)\}=\lim_{r\to 1-0}\frac{2r^2\sqrt{2r^2-1}}{(1+r)^2}=\frac{1}{2}. \quad \cdots(答)$$

第4問

正3角形ABCの頂点Aから辺ABとのなす角がθの方向に，3角形の内部に向かって出発した光線を考える。ただし，$0<\theta<60^\circ$ とする。この光線は3角形の各辺で入射角と反射角が等しくなるように反射し，頂点に到達するとそこでとまるものとする。また，3角形の内部では光線は直進するものとする。

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ のとき，この光線はどの頂点に到達するかを述べよ。

(2) 正の整数kを用いて $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ と表せるとき，この光線の到達する頂点を求め，またそこへ至るまでの反射の回数をkを用いて表せ。

分 野

数学A：整数，平面図形

考え方

正三角形を対称移動して鏡像を見えるように描くことで見通しがよくなる．傾き $\dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ の図形的意味をとらえることが重要．

【解答】

(1) 図1

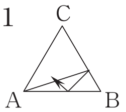


図2

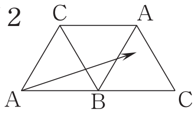
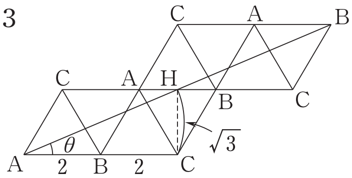


図3

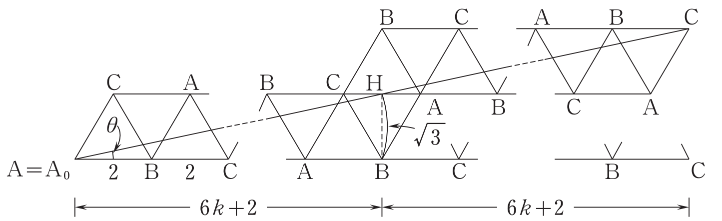


正三角形を反射する各辺に関して次々と折り返すことにより，光線の軌跡図1を図2のように表記できる．

正三角形の一辺の長さを2として考えても一般性を失わない．

図3のように点Hをとると，図3の角θは $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ をみたし，Aを端点とする半直線が最初に通る頂点の種類はBである．よってBに到着する．　…(答)

(2) (1)と同様の折り返しを考える．



上図第1段において，左端の $A=A_0$ から $2\times3m$（m：正の整数）だけ右に進んだ所には頂点Aがある．$2\times3m+2$，$2\times3m+4$ だけ進んだ所には，順に頂点B，Cがある（…①）．よってA_0から $6k+2$ だけ進んだ所には頂点Bがある．そのBから第2段におろした垂線の足をHとおくと，上図の角θは $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{6k+2}$ をみたす．線分A_0H上には，左端のA_0以外に頂点はない．第1段の左端のA_0から $(6k+2)\times2$ だけ進んだ所には①より頂点Cがある．そのCから第3段におろした垂線の足はやはり頂点Cである．（∵　第1段と第3段の頂点の並びは同じ.）このCとHとの間には頂点がないので，光線は頂点Cに到達する．　…(答)

(反射の回数)＝(図の線分A_0HCが正三角形の辺(端点を除く)と交わる回数)
＝(図の線分A_0HCが通る正三角形の個数)-1
$=(6k+2)\times2-1=12k+3$　…(答)

第5問

a を $0<a<\frac{1}{4}$ をみたす実数とする。xy 平面で，不等式

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a$$

の表す領域を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積

考え方

y の範囲，y による x の範囲を求める．断面は2重の円になる．外側の半径と，内側の半径を y の式で求めて，積分する．

【解答】

$$y^2 \leqq x^2(1-x^2)-a \quad \left(0<a<\frac{1}{4}\right) \qquad \cdots(*)$$

から，

$$-\sqrt{x^2(1-x^2)-a} \leqq y \leqq \sqrt{x^2(1-x^2)-a}$$

となる．

境界 $y=\pm\sqrt{x^2(1-x^2)-a}$ のグラフの性質を調べると x 軸，y 軸に関して対称である．$y \geqq 0$ の部分は

$$y=\sqrt{\left(\frac{1}{4}-a\right)-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}$$

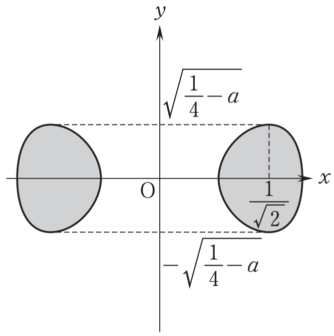
となる．

x^2 の範囲は $\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-a} \leqq x^2 \leqq \frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-a}$.

$x^2=\frac{1}{2}$ のとき，y は最大値 $\sqrt{\frac{1}{4}-a}$ をとる．

以上をまとめて，$(*)$ の表す領域は右図のようになる．

(図は x 軸，y 軸対称)



右図の領域の境界は $y^2=x^2(1-x^2)-a$．これを x^2 について解くと，

$$x^2=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2-4a}}{2}.$$

これを

$$(x_+)^2=\frac{1+\sqrt{1-4y^2-4a}}{2}, \quad (x_-)^2=\frac{1-\sqrt{1-4y^2-4a}}{2}$$

とする．

回転体の体積は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}(x_+)^2\,dy-\pi\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}(x_-)^2\,dy \\
&= \pi\int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-a}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}\sqrt{1-4y^2-4a}\,dy \\
&= 4\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4}-a}}\sqrt{\left(\frac{1}{4}-a\right)-y^2}\,dy \quad \text{（この積分は四分円の面積とみなせる）} \\
&= \pi^2\left(\frac{1}{4}-a\right). \qquad \cdots\text{(答)}
\end{aligned}$$

第6問

a を実数とする。

(1) 曲線 $y=\dfrac{8}{27}x^3$ と放物線 $y=(x+a)^2$ の両方に接する直線が x 軸以外に 2 本あるような a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)の範囲にあるとき，この 2 本の接線と放物線 $y=(x+a)^2$ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表せ。

分 野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分

考え方

$y=\dfrac{8}{27}x^3$ の接線を接点の x 座標を使って表し，これと $y=(x+a)^2$ が接する条件を判別式で求める．2 つの接点の x 座標がみたす方程式の解と係数の関係と，2 解の差を使って，面積を求める．

【解答】

(1) $y=\dfrac{8}{27}x^3$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{8}{27}t^3\right)$ での接線の方程式は，

$$y=\frac{8}{9}t^2x-\frac{16}{27}t^3. \quad \cdots ①$$

これと，放物線 $y=(x+a)^2$ とが接するのは，2 次方程式 $(x+a)^2=\dfrac{8}{9}t^2x-\dfrac{16}{27}t^3$，つまり

$$x^2-\left(\frac{8}{9}t^2-2a\right)x+a^2+\frac{16}{27}t^3=0 \quad \cdots ②$$

が重解を持つときである．判別式$=0$ より，

$$\left(\frac{4}{9}t^2-a\right)^2-\left(a^2+\frac{16}{27}t^3\right)=0,\ \text{つまり}\ t^2(2t^2-6t-9a)=0. \quad \cdots ③$$

接線 ① が x 軸となるのは $t=0$ のときなので，③ が $t=0$ 以外の異なる 2 実解をもつ a の範囲を求めることになる．つまり，

$$2t^2-6t-9a=0 \quad \cdots ④$$

が，0 以外の異なる 2 実解をもつような a の条件を求めることにより，

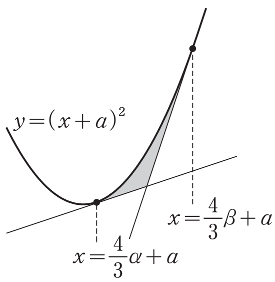
$$a\neq 0,\ \text{かつ}\ a>-\frac{1}{2}. \quad \cdots (答)$$

(2) ④ の 2 実解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると，(1) で考えた 2 本の接線は，① に $t=\alpha$，β を代入することにより，

$$y=\frac{8}{9}\alpha^2x-\frac{16}{27}\alpha^3,\quad y=\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3.$$

解と係数の関係から $\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=-\dfrac{9}{2}a$．この 2 本の接線の交点の x 座標は，

$$x=\frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta}{\alpha+\beta}=a+2.$$



また，各接線と放物線との接点の x 座標は，それぞれ $t=\alpha$，β のときの ② の重解なので，$\dfrac{4}{9}\alpha^2-a$，$\dfrac{4}{9}\beta^2-a$．

ここで，α，β が ④ をみたすことより，α^2，β^2 を消去すると，接点の x 座標は $\dfrac{4}{3}\alpha+a$，$\dfrac{4}{3}\beta+a$ となる．よって，

$$S=\int_{\frac{4}{3}\alpha+a}^{a+2}\left\{(x+a)^2-\left(\frac{8}{9}\alpha^2x-\frac{16}{27}\alpha^3\right)\right\}dx+\int_{a+2}^{\frac{4}{3}\beta+a}\left\{(x+a)^2-\left(\frac{8}{9}\beta^2x-\frac{16}{27}\beta^3\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{4}{3}\alpha+a}^{a+2}\left(x-\frac{4}{3}\alpha-a\right)^2dx+\int_{a+2}^{\frac{4}{3}\beta+a}\left(x-\frac{4}{3}\beta-a\right)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\alpha-a\right)^3\right]_{\frac{4}{3}\alpha+a}^{a+2}+\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\beta-a\right)^3\right]_{a+2}^{\frac{4}{3}\beta+a}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)^3-\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)^3\right\}$$

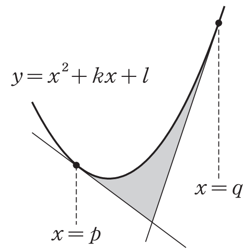
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}(\beta-\alpha)\left\{\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)^2+\left(2-\frac{4}{3}\alpha\right)\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)+\left(2-\frac{4}{3}\beta\right)^2\right\}$$

$$=\frac{4}{9}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}\left\{12+\frac{16}{9}(\alpha^2+\beta^2)-\frac{24}{3}(\alpha+\beta)+\frac{16}{9}\alpha\beta\right\}$$

$$=\frac{16}{3}\sqrt{2a+1}^3.$$

…(答)

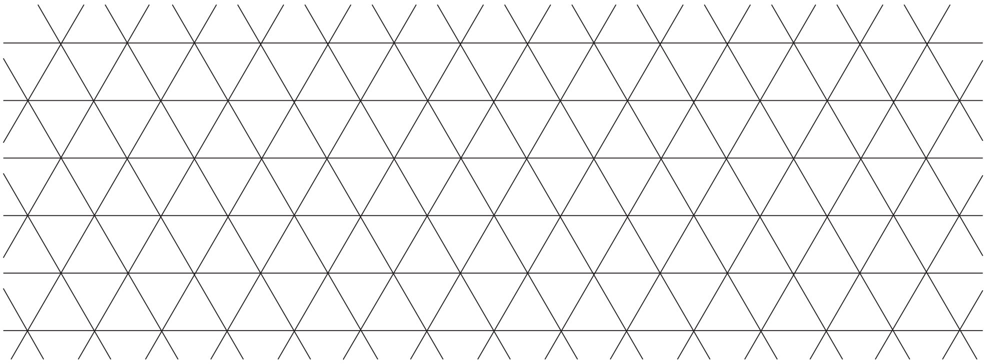
（注）　右図の網掛部の面積 S が，$S=\dfrac{1}{12}(q-p)^3$ となることを使うと積分計算が省略できる．



1997 年　後期・理科 I 類

第 1 問

下図のように，1 辺の長さが 1 の正 3 角形で，平面を分割する。



これらの 1 辺の長さが 1 の正 3 角形 1 つ 1 つを，単位正 3 角形とよぶことにする。はじめに 1 個以上有限個の単位正 3 角形が塗りつぶされているとし，以下の操作を繰り返すことにより，次々に単位正 3 角形を塗りつぶしていく。

『1 回の操作ごとに，既に塗りつぶされている単位正 3 角形と少なくとも 1 つの辺を共有する単位正 3 角形を，すべて塗りつぶす』

次の問に答えよ。

(1)　はじめに塗りつぶされている単位正 3 角形が 1 つだけのとき，n 回目の操作が終わったときに塗りつぶされている単位正 3 角形の個数 a_n を求めよ。

(2)　はじめに 2 個以上有限個の単位正 3 角形が塗りつぶされているとき，n 回目の操作が終わったときに塗りつぶされている単位正 3 角形の個数を b_n とおくと，極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

は，はじめの塗りつぶされ方がどのようであっても存在するか。極限が存在する場合については，その極限を求めよ。存在しない場合があるならば，その例をあげよ。

分　野

数学 A：数列，**数学 III**：数列の極限

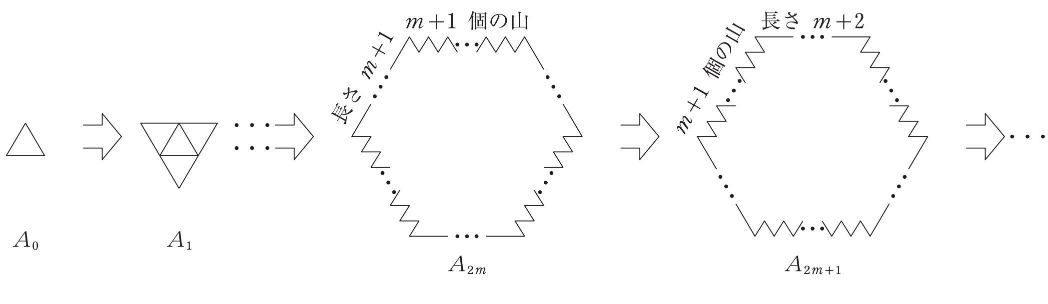
考え方

(1) は 1 回の操作で何個増えるかを考える．階差数列から $\{a_n\}$ は求められる．

十分大きな $n+N$ に対して $b_n < a_{n+N}$ となることを利用する．発想が難しい．

【解答】

(1)　最初の正三角形の向きを△としてその部分を A_0 とする．A_0 から n 回の操作で塗りつぶされている部分を A_n とする．



1回の操作で長さ n の辺の上には新たな n 個の正三角形が付け加わり，n 個の山には $n-1$ 個の谷を埋める $n-1$ 個の正三角形が付け加わる．

$a_0=1$．前頁の図から，

$$a_{2m+1}-a_{2m}=3\{(m+1)+m\}=3(2m+1),\quad a_{2m+2}-a_{2m+1}=3\{(m+2)+m\}=3(2m+2)$$

となる．まとめて，

$$a_0=1,\quad a_{n+1}-a_n=3(n+1)$$

となる．

よって，

$$a_n=a_0+\sum_{k=0}^{n-1}3(k+1)=1+\frac{3}{2}n(n+1). \qquad \cdots(答)$$

(2) 最初の有限個の正三角形の部分を B_0 とする．B_0 から n 回の操作で塗りつぶされている部分を B_n とする．

A_n は n が大きくなるにしたがって，平面全体を埋め尽くすから，十分大きな N に対して $A_N\supset B_0$ である．

毎回の操作で隣接する正3角形を塗りつぶす操作は同じだから，$A_{N+n}\supset B_n$ である．したがって，

また，最初の正3角形を適当にとることにより，$A_0\subset B_0$ とすることもできる．そのとき，$A_n\subset B_n$.

よって，

$$a_n\leqq b_n\leqq a_{N+n}.$$

よって，

$$\frac{a_n}{a_{N+n}}\leqq\frac{a_n}{b_n}\leqq 1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{N+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{2}n(n+1)}{1+\frac{3}{2}(n+N)(n+N+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}+3\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n^2}+3\left(1+\frac{N}{n}\right)\left(1+\frac{N+1}{n}\right)}$$

$$=\frac{0+3(1+0)}{0+3(1+0)(1+0)}=1.$$

ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1. \qquad \cdots(答)$$

第2問

座標平面上の点 A$(x,\ y)$ が次の連立不等式の表す領域を動くとする。

$$\begin{cases}|xy|<1\\ y>0\end{cases}$$

関数 $y=\dfrac{1}{|x|}$ のグラフのうち，$x<0$ の部分を H，$x>0$ の部分を K とする。

点 A に対し，x 軸上の2点 B，C，曲線 H 上の点 D，曲線 K 上の点 E を次の条件によって定める。

『直線 AB は，2点 A，B の間の点 D で H に接し，直線 AC は，2点 A，C の間の点 E で K に接する。』

(1) 3角形 ABC の面積のとり得る範囲を求めよ。

(2) 3角形 ADE の面積のとり得る範囲を求めよ。

分　野

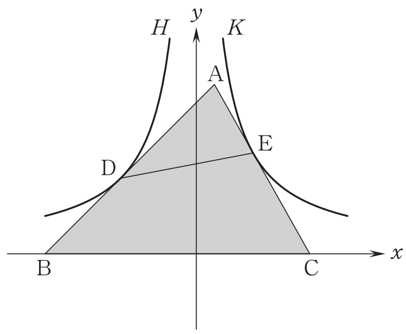
数学Ⅲ：微分法

考え方

A$(X,\ Y)$ を通る H の接線，K の接線を求める．

2 接点の x 座標を A の座標で表せば三角形の面積を表せる．

【解答】



(1)　点 A の座標を $(X,\ Y)$ とすると，$|XY|<1$，$Y>0$．

点 D$\left(-s,\ \dfrac{1}{s}\right)$ $(s>0)$ における，$H：y=-\dfrac{1}{x}$ の接線は

$$y=\frac{1}{s^2}(x+s)+\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2}x+\frac{2}{s}.$$

x 軸との交点は B$(-2s,\ 0)$．

A$(X,\ Y)$ を通るから $Y=\dfrac{1}{s^2}X+\dfrac{2}{s}$．$s$ で整理して，

$$g(s)=Ys^2-2s-X=0 \qquad \cdots①$$

とおく．$\dfrac{1}{4}$(判別式)$=1+XY>0$ より，① も必ず異なる 2 実解をもつ．

$s>0$ より AB 間に接点がある条件は $-s<X$ つまり $-X<s$．

$X\geqq 0$ のとき $g(0)=-X\leqq 0$ より，① には $s>0$ の解が存在し，$-s<X$．

$X<0$ のとき，$g(-X)=X^2Y+X=X(XY+1)<0$ より，① の 1 解は $-X$ より大．

よって，s は ① の大きいほうの解 $s=\dfrac{1+\sqrt{1+XY}}{Y}$．

点 E$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ における，$K：y=\dfrac{1}{x}$ の接線は

$$y=-\frac{1}{t^2}(x-t)+\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}.$$

x 軸との交点は C$(2t,\ 0)$．

A$(X,\ Y)$ を通るから $Y=-\dfrac{1}{t^2}X+\dfrac{2}{t}$．$t$ で整理して，

$$f(t)=Yt^2-2t+X=0 \qquad \cdots②$$

とおく．$\dfrac{1}{4}$(判別式)$=1-XY>0$ より，② は必ず異なる 2 実解をもつ．

$t>0$ より AC 間に接点がある条件は $t>X$．

$X\leqq 0$ のとき $f(0)=X\leqq 0$ より，② には $t>0$ の解が存在し，$t>X$．

$X>0$ のとき，$f(X)=X^2Y-X=X(XY-1)<0$ より，② の 1 解は X より大．

いずれの場合も，t は ② の大きいほうの解 $t=\dfrac{1+\sqrt{1-XY}}{Y}$．

よって，B，C の座標は B$(-2s,\ 0)$，C$(2t,\ 0)$ だから三角形 ABC の面積は

$\dfrac{1}{2}(2t+2s)Y=(t+s)Y$．よって，

$$\triangle\mathrm{ABC}=(1+\sqrt{1-XY})+(1+\sqrt{1+XY})=2+\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY}.$$

$u=\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY}$ とおくと，

$$u^2=(\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY})^2=2+2\sqrt{1-(XY)^2} \qquad \cdots③$$

で，$-1<XY<1$ だから $2<u^2\leqq 4$．

$u=\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY}\geqq 0$ だから，

$$\sqrt{2}<u \leqq 2. \qquad \cdots ④$$

$$\therefore \quad 2+\sqrt{2}<\triangle ABC=2+u \leqq 4. \qquad \cdots(答)$$

(2) $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\dfrac{AD}{AB}\dfrac{AE}{AC}.$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{X+s}{X+2s}=\frac{X+\dfrac{1+\sqrt{1+XY}}{Y}}{X+\dfrac{2+2\sqrt{1+XY}}{Y}}=\frac{XY+1+\sqrt{1+XY}}{XY+2+2\sqrt{1+XY}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+XY}\,(1+\sqrt{1+XY})}{(1+\sqrt{1+XY})^2}=\frac{\sqrt{1+XY}}{1+\sqrt{1+XY}}.$$

$$\frac{AE}{AC}=\frac{t-X}{2t-X}=\frac{\dfrac{1+\sqrt{1-XY}}{Y}-X}{\dfrac{2+2\sqrt{1-XY}}{Y}-X}=\frac{1+\sqrt{1-XY}-XY}{2+2\sqrt{1-XY}-XY}$$

$$=\frac{\sqrt{1-XY}\,(1+\sqrt{1-XY})}{(1+\sqrt{1-XY})^2}=\frac{\sqrt{1-XY}}{1+\sqrt{1-XY}}.$$

$$\therefore \quad \triangle ADE=(2+\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY})\cdot\frac{\sqrt{1+XY}}{1+\sqrt{1+XY}}\cdot\frac{\sqrt{1-XY}}{1+\sqrt{1-XY}}.$$

③ より，$\sqrt{1+XY}\sqrt{1-XY}=\dfrac{u^2}{2}-1.$

$$\triangle ADE=(2+\sqrt{1-XY}+\sqrt{1+XY})\cdot\frac{\sqrt{1-XY}\sqrt{1+XY}}{1+\sqrt{1+XY}+\sqrt{1-XY}+\sqrt{1-XY}\sqrt{1+XY}}$$

$$=(2+u)\frac{\dfrac{u^2}{2}-1}{1+u+\dfrac{u^2}{2}-1}=\frac{u^2-2}{u}=u-\frac{2}{u}.$$

右辺は u について単調に増加するから，④ より，

$$\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=0<u-\frac{2}{u}\leqq 2-\frac{2}{2}=1.$$

よって，

$$0<\triangle ADE \leqq 1. \qquad \cdots(答)$$

(注 1) XY を変数とする微分で範囲を求めてもよい．また，u の最大値はコーシー・シュワルツの不等式で出せる．

(注 2) いずれの場合も面積が最大になるのは A が y 軸上にあるとき，また，A が $|xy|=1$ に近づくほど面積は小さくなる．

第3問

ボタンを1回押す毎に，1以上 N 以下の整数を，同じ確率で1つずつ発生する機械がある。複数回ボタンを押した場合，どの整数が発生するかについての確率は，どの回についても他の回と互いに独立であるとする。この機械には，発生した整数の下4桁のみを表示する表示装置が接続されており，4桁未満の数については，欠けている桁に0を入れて4桁にして表示される。たとえば，発生した整数が925のときは0925が，12320のときは2320が表示される。

2回ボタンを押したとき，同じ数字が表示される確率を p_N とする。

(1) p_{10000} を求めよ。

(2) p_{10000} と p_{10001} はどちらが大きいかを判断し，その差を有効数字1桁で求めよ。

(3) 確率 p_{10000}，p_{10001}，…，p_{20000} のうち，最小の値を q，最大の値を r とおく。q と r を求めよ。

(4) N を10000以上の整数とするとき，$q \leqq p_N \leqq r$ を示せ。

分　野

数学Ⅰ：確率，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

同じ数字が表示される場合は発生した数字を10000で割った余り r が等しい場合である．その場合の数は N を10000で割った余り n について，r が $1 \leqq r \leqq n$ の場合とそうでない場合で1だけ異なる．ただし，$n=0$ の場合はすべて同じになる．

N が10000の倍数の場合 $p_N=\dfrac{1}{10000}$ であるが，$1 \leqq n \leqq 999$ の場合 p_N は変化する．n を連続変数として微分して増減を調べ，$10000m \leqq N \leqq 10000(m+1)$ における最大最小を求める．

【解答】

(1) 0000から9999までの10000個の数字がすべて等確率 $\dfrac{1}{10000}$ で独立に表示される．

したがって，2回ボタンを押したとき，同じ数字が表示される確率は

$$p_{10000}=10000\frac{1}{10000^2}=\frac{1}{10000}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $N=10001$ のとき，0001以外の数字は $\dfrac{1}{10001}$ の確率で表示され，0001は $\dfrac{2}{10001}$ で表示される．

$$\therefore \quad p_{10001}=9999\frac{1}{10001^2}+\frac{2^2}{10001^2}=\frac{10003}{10001^2}.$$

$10003\times 10000=1000300000>10001^2=100020001$ から $p_{10001}>p_{10000}$. $\cdots$(答)

$$p_{10001}-p_{10000}=\frac{10003}{10001^2}-\frac{1}{10000}=\frac{9999}{10000\times 10001^2}\fallingdotseq 1\times 10^{-8}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) $10001 \leqq N \leqq 19998$ のとき，0001から $N-10000$ までの数字は $\dfrac{2}{N}$ の確率で表示され，$N-9999$ から9999までの数字と0000は $\dfrac{1}{N}$ の確率で表示される．

$N=19999$ のとき，0001から9999までの数字は $\dfrac{2}{N}$ の確率で表示され，0000は $\dfrac{1}{N}$ の確率で表示される．

$N=10000$ のときと，$N=20000$ のときは，すべての数字が $\dfrac{1}{10000}$ の確率で表示される．

したがって，$10000 \leqq N \leqq 20000$ のとき，

$$p_N=(N-10000)\frac{4}{N^2}+(20000-N)\frac{1}{N^2}=\frac{3N-20000}{N^2}=\frac{3}{N}-\frac{20000}{N^2}.$$

$f(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{20000}{x^2}$ とおき，微分する．

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}+2\frac{20000}{x^3}=\frac{40000-3x}{x^3}.$$

x	(10000)	$\cdots$	$\dfrac{40000}{3}$	$\cdots$	(20000)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$x=10000,\ 20000$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{10000}$.

$\dfrac{40000}{3}$ は 13333 と 13334 の間にある．

$p_{13333}=\dfrac{19999}{13333^2}$，$p_{13334}=\dfrac{20002}{13334^2}$.

$20002\times13333^2-19999\times13334^2=(19999+3)13333^2-19999(13333+1)^2=13333-19999=-6666<0.$

よって，$\dfrac{19999}{13333^2}>\dfrac{20002}{13334^2}$.

$N=13333$ のとき，p_N は最大になり，$N=10000,\ 20000$ のとき，p_N は最小になる．よって，

$$q=\frac{1}{10000},\quad r=\frac{19999}{13333^2}.$$ …(答)

(4) N を 10000 で割った商を m，余りを n とすると，$10000m+1\leqq N\leqq10000m+9998$ のとき，0001 から $N-10000m$ までの数字は $\dfrac{m+1}{N}$ の確率で表示され，$N-10000m+1$ から 9999 までの数字と 0000 は $\dfrac{m}{N}$ の確率で表示される．$N=10000m+9999$ のとき，0001 から 9999 までの数字は $\dfrac{m+1}{N}$ の確率で表示され，0000 は $\dfrac{m}{N}$ の確率で表示される．$N=10000m$ のときは，すべての数字が $\dfrac{1}{10000}$ の確率で表示される．

よって，$10000m\leqq N<10000(m+1)$ のとき，$N=10000m+n$ から，

$$p_N=n\frac{(m+1)^2}{N^2}+(10000-n)\frac{m^2}{N^2}=\frac{2m+1}{N}-10000\frac{m(m+1)}{N^2}.$$

(2) と同様に，$g(x)=\dfrac{2m+1}{x}-10000\dfrac{m(m+1)}{x^2}$ として微分する．

$$g'(x)=-\frac{2m+1}{x^2}+\frac{m(m+1)20000}{x^3}.$$

$g'(x)=0$ のとき，$x=\dfrac{2m(m+1)}{2m+1}10000=10000m+\dfrac{m}{2m+1}10000.$

x	$10000m$	$\cdots$	$\dfrac{2m(m+1)}{2m+1}10000$	$\cdots$	$(10000(m+1))$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{2m(m+1)}{2m+1}10000\right)=\frac{(2m+1)^2}{m(m+1)20000}-\frac{(2m+1)^2}{m(m+1)40000}=\frac{(2m+1)^2}{m(m+1)40000}$$
$$=\frac{1}{10000}\left\{1+\frac{1}{4m(m+1)}\right\}.$$

よって，$g\left(\dfrac{2m(m+1)}{2m+1}10000\right)\geqq p_N$ の最大値は $m\geqq 2$ のとき減少する．

$m=2$ のとき，$\dfrac{2m(m+1)}{2m+1}10000=\dfrac{120000}{5}=24000$．$g(24000)=\dfrac{1}{9600}$．

$$r-\frac{1}{9600}=\frac{19999}{13333^2}-\frac{1}{9600}>\frac{(20000-1)\cdot 9}{40000^2}-\frac{1}{9600}=\frac{4\cdot 10^4-27}{2^4\cdot 3\cdot 10^8}>0$$

また，$g(10000m)=g(10000(m+1))=\dfrac{1}{10000}=q$ だから，$N\geqq 10000$ において

$$q\leqq p_N\leqq r.$$

（証明終り）

（注）(3)の $f(x)$ および(4)の $g(x)$ の最小を与える x は微分法で求めたが，これらの関数は $\dfrac{1}{x}$ の２次関数になっているから平方完成で求めてもよい．またその場合，最小値を与える $\dfrac{1}{x}$ に最も近い $\dfrac{1}{(\text{整数})}$ を求めることになる．

1998 年　前期・文科

第 1 問

a は 0 でない実数とする。関数

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)$$

の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

考え方

極大極小を与える x は容易に求められる．極大値と極小値の差の最小値は相加平均・相乗平均の関係を用いて求められる．そのとき，a の正負に注意する．

【解答】

$$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\frac{1}{a}\right)=3x^3-3\left(a-\frac{1}{a}\right)x^2-4x+4\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

$$f'(x)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4=(3x-2a)\left(3x+\frac{2}{a}\right).\quad (a\neq 0)$$

$f'(x)=0$ は必ず相異なる 2 実解 $x=\dfrac{2a}{3}$，$x=-\dfrac{2}{3a}$ をもつから $f(x)$ は必ず極値をもつ．

$$f\left(\frac{2a}{3}\right)-f\left(-\frac{2}{3a}\right)=\left\{3\left(\frac{2a}{3}\right)^2-4\right\}\left(-\frac{a}{3}+\frac{1}{a}\right)-\left\{3\left(-\frac{2}{3a}\right)^2-4\right\}\left(-a+\frac{1}{3a}\right)$$

$$=-\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3.$$

よって，極大値と極小値の差について相加平均・相乗平均の大小より

$$\left|f\left(\frac{2a}{3}\right)-f\left(-\frac{2}{3a}\right)\right|=\frac{4}{9}\left(|a|+\frac{1}{|a|}\right)^3\geqq\frac{4}{9}\left(2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{|a|}}\right)^3=\frac{32}{9}.$$

$$\therefore\quad \left|f\left(\frac{2a}{3}\right)-f\left(-\frac{2}{3a}\right)\right|\geqq\frac{32}{9}.$$

ここで等号が成り立つのは $|a|=\dfrac{1}{|a|}$ のとき，すなわち，

$$a=\pm 1 \qquad \cdots(答)$$

のとき．

第 2 問

a，b は実数で，$b\neq 0$ とする。xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる。

(1)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ が鋭角三角形となるための a，b の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　m，n を整数とする。a，b が(1)で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0$$

が成り立つことを示せ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域，**数学Ⅰ**：不等式の証明

考え方

(1) の条件は3つの角の鋭角条件から容易に導ける．

(2) についてはまず，b を消去する．その結果，示すべき式が a の1次不等式になることを利用する．

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(a,\ b)$，$\angle\mathrm{QOP}<90^\circ$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=a>0. \qquad \cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=(-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(a-1,\ b)$，$\angle\mathrm{OPQ}<90^\circ$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-a+1>0. \qquad \cdots②$$

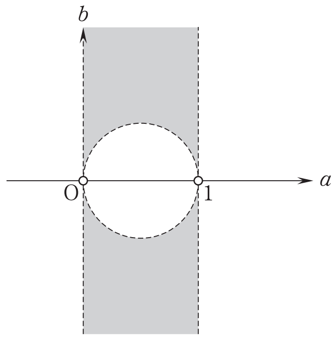
$\overrightarrow{\mathrm{QO}}=(-a,\ -b)$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(-a+1,\ -b)$，$\angle\mathrm{OQP}<90^\circ$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=-a(-a+1)+b^2>0. \qquad \cdots③$$

①，②，③ より　$0<a<1$　かつ　$a^2-a+b^2>0$.

$$\therefore\quad 0<a<1 \text{ かつ } \left(a-\frac{1}{2}\right)^2+b^2>\frac{1}{4}.$$

点 $(a,\ b)$ の範囲は右図（境界は含まない）．



(2)　$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2=m^2-m+2mna-na+n^2(a^2+b^2)$

$$\geqq m^2-m+2mna-na+n^2a \quad (\because\ (1))$$

$$=m^2-m+n(2m-1+n)a.$$

$f(a)=m^2-m+n(2m-1+n)a$　とおくと，

$$f(0)=m^2-m=m(m-1),$$

$$f(1)=m^2-m+n(2m-1+n)=(m+n)^2-(m+n)=(m+n)(m+n-1).$$

m は整数だから　$m\leqq 0$　または　$1\leqq m$．$\therefore$　$f(0)\geqq 0$.

$m+n$　も整数だから上と同様に　$f(1)\geqq 0$.

$f(a)$ は高々 a の1次式であるから，$0<a<1$　のとき　$f(a)\geqq 0$．よって，m，n が整数のとき，

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0. \qquad \text{（証明終り）}$$

第3問

(1)　x は　$0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$　をみたす角とする。

$$\begin{cases} \sin y=|\sin 4x|, \\ \cos y=|\cos 4x|, \\ 0^\circ\leqq y\leqq 90^\circ \end{cases}$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

(2)　α は　$0^\circ\leqq\alpha\leqq 90^\circ$　をみたす角とする。

$0^\circ\leqq\theta_n\leqq 90^\circ$　をみたす角 θ_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$　を

$$\begin{cases} \theta_1=\alpha, \\ \sin\theta_{n+1}=|\sin 4\theta_n|, \\ \cos\theta_{n+1}=|\cos 4\theta_n| \end{cases}$$

で定める。k を2以上の整数として，$\theta_k=0^\circ$　となる α の個数を k で表せ。

分　野

数学Ⅱ：三角関数，**数学A**：数列

考え方

(1) は $0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ$ に注意し，丁寧に場合分けして三角方程式を解けばよい．

(2) は α と，θ_2, θ_3, θ_4, $\cdots$ のグラフを具体的に描いてみると，θ_k のグラフも想像できる．

【解答】

(1) (i) $0^\circ \leqq x \leqq 22.5^\circ$ のとき

$$0^\circ \leqq 4x \leqq 90^\circ, \quad 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ.$$

$\begin{cases} \cos y = \cos 4x, \\ \sin y = \sin 4x \end{cases}$ より $y = 4x$.

(ii) $22.5^\circ \leqq x \leqq 45^\circ$ のとき

$$90^\circ \leqq 4x \leqq 180^\circ, \quad 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ.$$

$\begin{cases} \cos y = -\cos 4x, \\ \sin y = \sin 4x \end{cases}$ より $y = 180^\circ - 4x$.

(iii) $45^\circ \leqq x \leqq 67.5^\circ$ のとき

$$180^\circ \leqq 4x \leqq 270^\circ, \quad 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ.$$

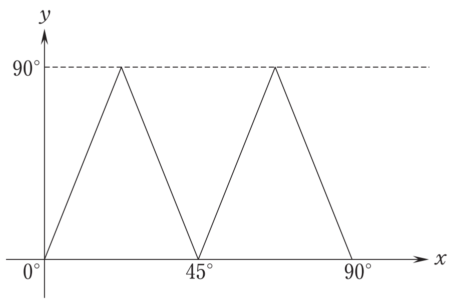
$\begin{cases} \cos y = -\cos 4x, \\ \sin y = -\sin 4x \end{cases}$ より $y = 4x - 180^\circ$.

(iv) $67.5^\circ \leqq x \leqq 90^\circ$ のとき

$$270^\circ \leqq 4x \leqq 360^\circ, \quad 0^\circ \leqq y \leqq 90^\circ.$$

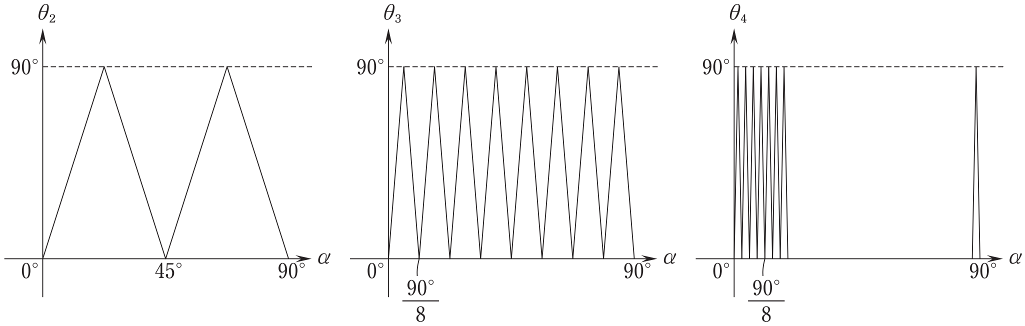
$\begin{cases} \cos y = \cos 4x, \\ \sin y = -\sin 4x \end{cases}$ より $y = 360^\circ - 4x$.

以上を図示すると下図のようになる．



(2) $\theta_k = 0^\circ$ となる α を α_k とおき，その個数を a_k とおく．

θ_n と θ_{n+1} の関係は(1)の x と y の関係と同じ．θ_n が 0° から 90° まで変化するとき，θ_{n+1} は上図のように，0° と 90° の間を 2 往復する．よって，$0^\circ \leqq \alpha = \theta_1 \leqq 90^\circ$ に対して θ_2, θ_3, θ_4 は下図のようになる．



上図より，$\alpha_2 = \dfrac{90^\circ}{2} \cdot l$ $(l = 0, 1, 2)$．$\alpha_3 = \dfrac{90^\circ}{2 \cdot 4} \cdot l$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, 2 \cdot 4)$．

$\alpha_4 = \dfrac{90^\circ}{2 \cdot 4^2} \cdot l$ $(l = 0, 1, 2, \cdots, 2 \cdot 4^2)$．

よって，

$$a_2 = 3 (= 2 + 1), \quad a_3 = 2 \cdot 4 + 1, \quad a_4 = 2 \cdot 4^2 + 1.$$

以下同様にして

$$\alpha_k = \frac{90^\circ}{2 \cdot 4^{k-2}} \cdot l \ (l = 0, 1, 2, \cdots, 2 \cdot 4^{k-2}).$$

よって，$\theta_k = 0^\circ$ となる α の個数は

$$a_k = 2 \cdot 4^{k-2} + 1 \text{（個）}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

xyz 空間に3点 A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0)，C(0, $\sqrt{3}$, 0) をとる。△ABC を1つの面とし，$z \geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに △ABD を1つの面として，点 C と異なる点 E をもう1つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積を求めよ。

分野

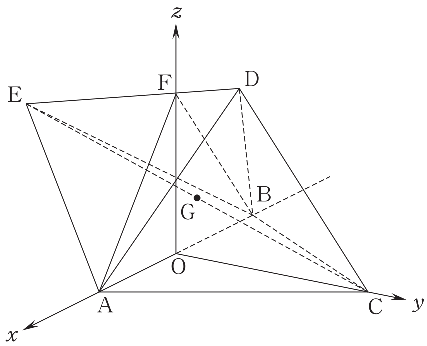
数学B：空間図形

考え方

(1) ABC は1辺の長さが2の正三角形．D は重心の垂直上方にある．
E は面 ABD について C と対称な点であることを利用する．

(2) ED と z 軸の交点を F とすると，四面体 ABFE と正四面体 ABDE の体積比は EF：ED である．

【解答】



(1) A(1, 0, 0)，B(−1, 0, 0)，C(0, $\sqrt{3}$, 0).

三角形 ABC の重心は $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$.

よって，D の座標は $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ h\right)$ とおける.

AD=2 より $h=\sqrt{2^2-1^2-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

D の座標は $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

三角形 ABD の重心を G とすると，G の座標は

$$G\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right).$$

2つの四面体は面 ABD について対称だから G は CE の中点である.

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE})$ より

$$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OC}$$
$$=2\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{9},\ \frac{2\sqrt{6}}{9}\right)-(0,\ \sqrt{3},\ 0)=\left(0,\ -\frac{7\sqrt{3}}{9},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right).$$

よって，E の座標は

$$\left(0,\ -\frac{7\sqrt{3}}{9},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right).$$ …(答)

(2) 辺 ED と z 軸との交点を F とすると EF：FD は |E の y 座標|：|D の y 座標| である.

$$EF : FD=\frac{7\sqrt{3}}{9} : \frac{\sqrt{3}}{3}=7 : 3.$$

$$(\text{四面体 EABF の体積})=\frac{EF}{ED}(\text{四面体 EABD の体積})=\frac{7}{10}(\text{四面体 EABD の体積}).$$

四面体 EABD の体積は四面体 ABCD の体積に等しく $\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ だから

$$(\text{四面体 EABF の体積})=\frac{7}{10}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{7\sqrt{2}}{15}.$$ …(答)

1998 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

n を正の整数とする。連立不等式

$$\begin{cases} x+y+z \leqq n \\ -x+y-z \leqq n \\ x-y-z \leqq n \\ -x-y+z \leqq n \end{cases}$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で $x,\ y,\ z$ がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^3}$$

を求めよ。

分　野

数学A：数列，格子点，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

$x,\ y,\ z$ のうち 1 文字たとえば，z を固定して平面 $z=n$ 上にある格子点の個数を数えそれを加えあげてゆく．

【解答】

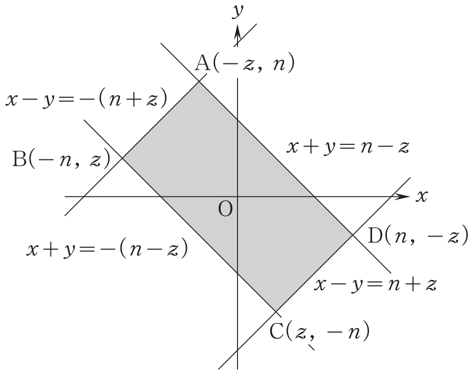
$$\begin{cases} x+y+z \leqq n, \\ -x+y-z \leqq n, \\ x-y-z \leqq n, \\ -x-y+z \leqq n \end{cases} \iff \begin{cases} -(n-z) \leqq x+y \leqq n-z & \cdots①, \\ -(n+z) \leqq x-y \leqq n+z & \cdots②. \end{cases}$$

①，② をみたす $(x,\ y)$ が存在する条件から

$n-z \geqq 0$，$n+z \geqq 0$ すなわち，$-n \leqq z \leqq n$.

z を固定したときに $(x,\ y)$ で $x,\ y$ が整数である点の個数を数える．

①，② をみたす領域は $\mathrm{A}(-z,\ n)$，$\mathrm{B}(-n,\ z)$，$\mathrm{C}(z,\ -n)$，$\mathrm{D}(n,\ -z)$ を頂点とする長方形である．

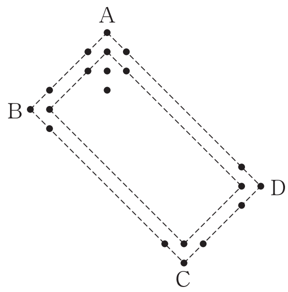


各辺が座標軸と 45° をなす長方形 ABCD の周または内部にある格子点の個数は，

(AB 上にある格子点の個数)
　×(AD 上にある格子点の個数)
　+(AB 上にある格子点の個数 −1)
　×(AD 上にある格子点の個数 −1)

である．

AB 上にある格子点の個数は $n-z+1$ であり，AD 上にある格子点の個数は $n+z+1$ である．



よって，長方形 ABCD の周または内部にある格子点の個数は，

$$(n-z+1)(n+z+1)+(n-z)(n+z)=2n^2+2n+1-2z^2.$$

これを，$-n$ から n まで加えると

$$\begin{aligned} f(n)&=\sum_{z=-n}^{n}(2n^2+2n+1-2z^2)\\ &=(2n^2+2n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &=\frac{1}{3}(4n^2+4n+3)(2n+1). \end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{8}{3}.$$ …(答)

第3問

xy 平面に2つの円

$$C_0:x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\quad C_1:(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n=2, 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で，C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n, 0)$ として，

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{2r_n}},\quad p_n=q_nx_n$$

とおく。

(1) q_n は整数であることを示せ。

(2) p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3) α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式

$$|x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}|x_n-\alpha|$$

を示し，極限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

分　野

数学A：数列，漸化式，数学的帰納法，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

2円が外接する条件は（中心距離）=（半径の和）である．x 軸に接する円の中心の y 座標の絶対値は半径に等しい．

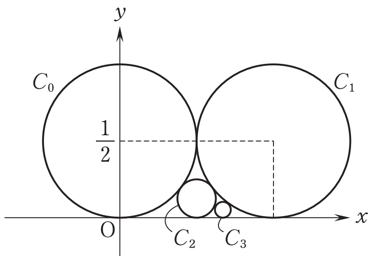
x 軸に接する2円の中心の y 座標の差は半径の差であるから，中心の x 座標の差は2円の半径から導くことができる．

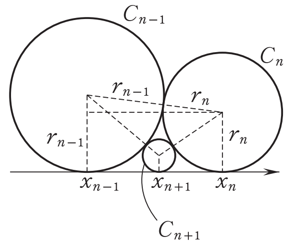
q_n，p_n が整数であることは数学的帰納法で示される．

また，p_n，p_{n-1}，q_n，q_{n-1} の関係式で p_n，q_n が1より大きい公約数をもつと矛盾することから p_n，q_n が互いに素であることが導ける．

(3) については $\{x_n\}$ の漸化式を立て，それを，$\{x_n-\alpha\}$ の漸化式とすることから不等式を導く．

【解答】





(1) C_n と C_{n-1} が互いに外接し，ともに x 軸に接する条件から

$$|x_n-x_{n-1}|=\sqrt{(r_{n-1}+r_n)^2-(r_{n-1}-r_n)^2}=2\sqrt{r_{n-1}r_n}. \qquad \cdots①$$

同様に

$$|x_{n+1}-x_n|=2\sqrt{r_{n+1}r_n},\quad |x_{n+1}-x_{n-1}|=2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}.$$

つねに，x_{n+1} は x_{n-1} と x_n の間にあるから

$$|x_n-x_{n-1}|=|x_n-x_{n+1}|+|x_{n+1}-x_{n-1}|.$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{r_nr_{n-1}}=2\sqrt{r_nr_{n+1}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}.$$

両辺を $2\sqrt{2r_{n-1}r_nr_{n+1}}$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{2r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{2r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2r_n}}.\quad \therefore\quad q_{n+1}=q_n+q_{n-1}. \qquad \cdots②$$

$r_0=r_1=\dfrac{1}{2}$ より $q_0=q_1=1$ である．

q_0，q_1 はともに整数であり，② から q_{n-1}，q_n がともに整数なら，q_{n+1} も整数である．よって，すべての自然数 n に対して，q_n は整数である．（証明終り）

(2) x_{n-1} と x_n の大小関係は n が偶数のとき $x_{n-1}>x_n$ で，n が奇数のとき $x_{n-1}<x_n$ であるから，① は

$$x_n-x_{n-1}=(-1)^{n-1}2\sqrt{r_{n-1}r_n}.$$

$x_n=\dfrac{p_n}{q_n}$，$\sqrt{2r_n}=\dfrac{1}{q_n}$ より

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1}{q_nq_{n-1}}.\quad \therefore\quad p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}. \qquad \cdots③$$

同様に

$$\therefore\quad p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n. \qquad \cdots③'$$

③＋③′ より

$$(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)+(p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1})=q_np_{n+1}+(q_{n-1}-q_{n+1})p_n-q_np_{n-1}=0.$$

② より $q_{n-1}-q_{n+1}=-q_n$．よって

$$q_np_{n+1}-q_np_n-q_np_{n-1}=q_n(p_{n+1}-p_n-p_{n-1})=0.$$

$q_n\neq 0$ より

$$p_{n+1}=p_n+p_{n-1}. \qquad \cdots④$$

$p_0=q_0x_0=0$，$p_1=q_1x_1=1$ はともに整数であり，④ から p_{n-1}，p_n がともに整数なら，p_{n+1} も整数である．よって，すべての自然数 n に対して，p_n は整数である．（証明終り）

p_n，q_n，p_{n-1}，q_{n-1} が整数で，p_n，q_n が 1 より大きい公約数 k をもつとすると，③ の左辺は k の倍数であり，右辺が $(-1)^{n-1}$ であることに反する．よって，p_n と q_n は互いに素．（証明終り）

(3) $p_2=p_1+p_0=1+0=1$ だから $p_1=q_0$，$p_2=q_1$．②，④ は同じ漸化式であるからすべての自然数において $p_{n+1}=q_n$．

$$\therefore\quad x_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

また，

$$x_n=\frac{q_{n+1}-q_n}{q_n}=\frac{q_{n+1}}{q_n}-1=\frac{1}{x_{n+1}}-1.$$

$$\therefore\quad x_{n+1}=\frac{1}{1+x_n}.$$

$\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ より

$$|x_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha-x_n}{(1+x_n)(1+\alpha)}\right|$$

$$=\frac{\alpha}{1+x_n}|x_n-\alpha|.$$

$x_n>0$，$\alpha^2+\alpha-1=0$，$\alpha>0$ より

$$0<\frac{\alpha}{1+x_n}<\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad |x_{n+1}-\alpha|<\frac{2}{3}|x_n-\alpha|.$$ （証明終り）

$$\therefore\quad |x_n-\alpha|<\frac{2}{3}|x_{n-1}-\alpha|<\cdots<\left(\frac{2}{3}\right)^n|x_0-\alpha|.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n|x_0-\alpha|=0$ よりハサミウチの原理から

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0.\quad\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$ …(答)

(1)，(2)の【別解】

次のように，q_n と p_n の漸化式②，④を同時に求めることができる．

$$\begin{cases} x_{n+1}-x_n\ =(-1)^n\ 2\sqrt{r_{n+1}r_n}, \\ x_{n+1}-x_{n-1}=(-1)^{n+1}2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}, \\ x_n\ -x_{n-1}=(-1)^{n+1}2\sqrt{r_nr_{n-1}}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_np_{n+1}\ -q_{n+1}p_n\ =(-1)^n & \cdots⑤, \\ q_{n-1}p_{n+1}-q_{n+1}p_{n-1}=(-1)^{n+1} & \cdots⑥, \\ q_{n-1}p_n\ -q_np_{n-1}\ =(-1)^{n+1} & \cdots⑦. \end{cases}$$

よって，⑤，⑥より

$$\begin{pmatrix} -p_n & q_n \\ -p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

逆行列を計算することにより

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{-p_nq_{n-1}+p_{n-1}q_n}\begin{pmatrix} q_{n-1} & -q_n \\ -p_{n-1} & -p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}.$$

⑦より

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}=\frac{1}{(-1)^n}\begin{pmatrix} q_{n-1} & -q_n \\ p_{n-1} & -p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{n-1}+q_n \\ p_{n-1}+p_n \end{pmatrix}.$$

②，④が導かれた．

第 4 問

実数 a に対して $k\leqq a<k+1$ をみたす整数 k を $[a]$ で表す。
n を正の整数として，

$$f(x)=\frac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$$

とおく。$36n+1$ 個の整数

$$[f(0)],\ [f(1)],\ [f(2)],\ \cdots,\ [f(36n)]$$

のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，**数学A**：整数

考え方

$f'(x)$ を考えると，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 36n$ で単調に増加する．

$f'(x)$ と 1 の大小関係を考える．

$f'(x)<1$ の区間では整数 x に対して $[f(x+1)]-[f(x)]$ は 0 か 1 であるから区間内の $[f(x)]$ の最大値と最小値の間にある整数はすべてとりうる．

$f'(x)>1$ の区間では整数 x に対して $[f(x+1)]-[f(x)]$ は 1 以上であるから $[f(x)]$ の個数は区間内の整数 x の個数と同じである．

【解答】

$f(x)$ は x の 3 次関数．

$$f'(x)=\frac{2x(2\cdot 3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}-\frac{x^2}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}=\frac{x(2^2\cdot 3^2\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^2\cdot n^2}\geqq 0\quad (0\leqq x\leqq 36n).$$

$f'(x)=1$ を解くと

$$x(2^2\cdot 3^2\cdot n-x)=2^5\cdot 3^2\cdot n^2.\quad \therefore\quad x^2-3\cdot 2^2\cdot 3\cdot nx+2\cdot 2^4\cdot 3^2\cdot n^2=0.$$

$$\therefore\quad (x-2^2\cdot 3\cdot n)(x-\cdot 2^3\cdot 3\cdot n)=0.$$

$$\therefore\quad x=12n,\quad x=24n.$$

(i) $0\leqq x\leqq 12n$，$24n\leqq x\leqq 36n$ のとき，

$0\leqq f'(x)\leqq 1$.

よって $0\leqq x\leqq 12n-1$ または $24n\leqq x\leqq 36n-1$ のとき $f(x+1)-f(x)=f'(c)$，$(x<c<x+1)$ となる c が存在する．よって $0<f(x+1)-f(x)<1$.

$$[f(x+1)]-[f(x)]=0 \text{ または } 1.$$

ここで，$[f(0)]=0$，$[f(12n)]=7n$，$[f(24n)]=20n$，$[f(36n)]=27n$.

$[f(0)]$，$[f(1)]$，$\cdots$，$[f(12n)]$ のうちには $0, 1, 2, \cdots, 7n$ の $7n+1$ 個のすべての整数が存在しそれ以外はない．

$[f(24n)]$，$[f(24n+1)]$，$\cdots$，$[f(36n)]$ のうちには $20n$，$20n+1$，$20n+2$，$\cdots$，$27n$ の $7n+1$ 個のすべての整数も存在しそれ以外はない．

(ii) $12n\leqq x\leqq 24n$ のとき，

$f'(x)\geqq 1$.

よって $12n\leqq x\leqq 24n-1$ のとき $f(x+1)-f(x)=f'(c)$，$(x<c<x+1)$ となる c が存在する．よって $f(x+1)-f(x)>1$.

$$[f(x+1)]-[f(x)]\geqq 1.$$

よって，$[f(12n)]<[f(12n+1)]<\cdots<[f(24n)])$ だから，$[f(12n+1)]$，$\cdots$，$[f(24n-1)])$ の $12n-1$ 個のすべての整数は異なり，(i) の整数と共通のものはない．

以上から，$[f(0)]$，$[f(1)]$，$\cdots$，$[f(36n)]$ のうちに異なる整数の個数は，

$$(7n+1)+(12n-1)+(7n+1)=26n+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

第５問

θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル

$$\vec{a} = (\cos\theta,\ \sin\theta),\quad \vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

をとり，点 P_n，Q_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1,\ 0) \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a} \\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\} \end{cases}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値

$$\lim_{n\to\infty} x_n,\quad \lim_{n\to\infty} y_n$$

を求めよ。

分　野

数学Ｂ：ベクトル，内積，**数学Ⅱ**：数列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

$(x_{n+1},\ y_{n+1})$ を $(x_n,\ y_n)$ で表す．$n \geqq 2$ のとき，ベクトル $(x_n,\ y_n)$ は一定向きであり，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は等比数列をなす．公比により収束するかどうか決る．

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = (z_n,\ w_n)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a}$ より

$$\begin{aligned}(z_n,\ w_n) &= (x_n,\ y_n) - (x_n\cos\theta + y_n\sin\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta) \\ &= (x_n\sin^2\theta - y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta + y_n\cos^2\theta) \\ &= (x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)(\sin\theta,\ -\cos\theta).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\}$ より

$$\begin{aligned}(x_{n+1},\ y_{n+1}) &= 4\left\{(z_n,\ w_n) - \left(z_n\frac{\sqrt{3}}{2} + w_n\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)\right\} = (z_n - \sqrt{3}\,w_n,\ -\sqrt{3}\,z_n + 3w_n) \\ &= (z_n - \sqrt{3}\,w_n)(1,\ -\sqrt{3}).\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = (x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)(1,\ -\sqrt{3}). \qquad \cdots①$$

$n \geqq 2$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} /\!/ (1,\ -\sqrt{3})$．よって，$n \geqq 2$ のとき $y_n = -\sqrt{3}\,x_n$．

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = x_n(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2(1,\ -\sqrt{3}).$$

$$\therefore\quad x_{n+1} = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 x_n.$$

$$\therefore\quad x_n = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{2(n-2)} x_2.$$

① より

$$x_2 = (x_1\sin\theta - y_1\cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta) = \sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta).$$

$$\therefore\quad \begin{cases} x_n = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{2n-1}\sin\theta, \\ y_n = -\sqrt{3}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{2n-1}\sin\theta, \end{cases} \quad (n \geqq 2)$$

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ はともに第２項以後が公比 $(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2$ の等比数列であり，初項は $x_2 = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta$，$y_2 = -\sqrt{3}\,x_2$．である．収束する条件は

$$(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^3\sin\theta = 0 \text{ または } (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 \leqq 1.$$

つまり，

$$\sin\theta = 0 \text{ または } |\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta| \leqq 1.$$

(i)　$\sin\theta = 0$ のとき $\theta = 0$，$\theta = \pi$．

(ii)　$|\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta| \leqq 1$ のとき

$$2\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\leqq 1.$$

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq\frac{1}{2}. \qquad \cdots②$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$.

この範囲で ② を解くと

$$\frac{5}{6}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{7}{6}\pi,\quad \frac{11}{6}\pi\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{13}{6}\pi.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi.$$

以上より，

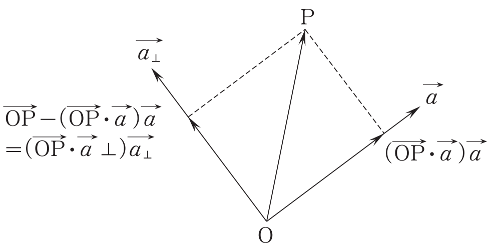
$$\theta=0,\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad \theta=\pi,\quad \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0, & \displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=0 \quad \left(\theta=0,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi\right) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x_2=1, & \displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=y_2=-\sqrt{3} \quad \left(\theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{3}{2}\pi\right) \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x_2=-\frac{1}{2}, & \displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=y_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{11}{6}\pi\right). \end{cases}$$

$\cdots$(答)

【別解】

$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ を 90° 回転したベクトルを $\overrightarrow{a_\perp}$，$\overrightarrow{b_\perp}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\overrightarrow{a}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ を $\overrightarrow{a_\perp}$ に正射影したベクトルであり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\overrightarrow{b}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ を $\overrightarrow{b_\perp}$ に正射影したベクトルである．



$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{a_\perp}$ のなす角は $\theta+\dfrac{\pi}{2}$．よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}|=\left|\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=|\sin\theta|$．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}$ の向きは $\overrightarrow{a_\perp}$ と同じ向きか逆向きである．

以下 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ は $\overrightarrow{a_\perp}$ に平行であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$$(n\geqq 2)$ は $\overrightarrow{b_\perp}$ に平行である．正射影の正射影と同じ向きであるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ は同じ向きである．

$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角は $\theta-\dfrac{\pi}{6}$ だから，$\overrightarrow{a_\perp}$ と $\overrightarrow{b_\perp}$ のなす角も $\theta-\dfrac{\pi}{6}$ である．

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ $(n\geqq 2)$ と $\overrightarrow{a_\perp}$ のなす角も $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ $(n\geqq 1)$ と $\overrightarrow{b_\perp}$ のなす角も $\theta-\dfrac{\pi}{6}$ である．

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}|=\left|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right||\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}|=4\left|\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\right||\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}|.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}.$$

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する条件は，

$$4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1,\ \text{または}\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=\overrightarrow{0}.$$

(i) $4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ のとき

$$-\frac{1}{2}\leqq\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\leqq\frac{1}{2}. \qquad \cdots②'$$

$0\leqq\theta<2\pi$ より $-\frac{\pi}{6}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}<2\pi-\frac{\pi}{6}$.

この範囲で ②′ を解くと

$$\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}\pi,\quad \frac{4}{3}\pi\leqq\theta-\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{3}\pi.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi.$$

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=\vec{0}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\sin\theta\,\overrightarrow{b_\perp}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{b_\perp}\neq\vec{0}$, $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=0$ のときは(i)に含まれるから $\sin\theta=0$.

$$\therefore\quad \theta=0,\quad \theta=\pi.$$

$4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\neq 1$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ は限りなく $\vec{0}$ に近づき，$4\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\neq 1$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ はつねに $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ に等しい.

以上より,

$$\theta=0,\quad \frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi,\quad \theta=\pi,\quad \frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}x_n=0, & \lim\limits_{n\to\infty}y_n=0 \quad \left(\theta=0,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{11}{6}\pi\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_2=1, & \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_2=-\sqrt{3} \quad \left(\theta=\frac{\pi}{2},\ \theta=\frac{3}{2}\pi\right) \\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_2=-\frac{1}{2}, & \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_2=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta=\frac{5}{6}\pi,\ \theta=\frac{11}{6}\pi\right). \end{cases}$$

…(答)

第6問

xyz 空間に5点 A(1, 1, 0)，B(−1, 1, 0)，C(−1, −1, 0)，D(1, −1, 0)，P(0, 0, 3) をとる。四角錐 PABCD の

$$x^2+y^2\geqq 1$$

をみたす部分の体積を求めよ。

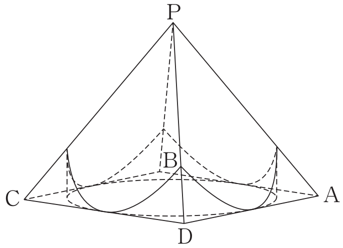
分 野

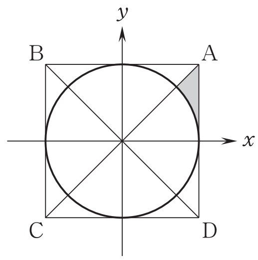
数学Ⅲ：積分法

考え方

対称性から8等分できる．8等分した1つを適当な断面をとって断面積を積分する．

【解答】





求める図形を xz 平面，yz 平面，平面 PCA，平面 PDB で切って 8 等分する．そのうち xz 平面と平面 OPA で囲まれた領域は

$$x+\frac{z}{3}\leqq 1,\quad x^2+y^2\geqq 1,\quad y\geqq 0,\quad z\geqq 0,\quad y\leqq x$$

と表される．

xy 平面上で，$y=x$ と $x^2+y^2=1$ の交点の x 座標は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である．

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq 1$ における yz 平面と平行な断面は長方形でその領域は

$$\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq x,\quad 0\leqq z\leqq 3(1-x)$$

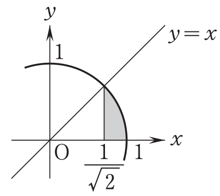
で表される．

求める体積は

$$V=8\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}3(1-x)\{x-\sqrt{1-x^2}\}\,dx \qquad \cdots ①$$

である．

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-x)x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}=\frac{\sqrt{2}-1}{12}. \qquad \cdots ②$$



図形的考察から

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}. \qquad \cdots ③$$

$t=x^2$ とおいて

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t}\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{\sqrt{2}}{12}. \qquad \cdots ④$$

②，③，④ を ① に代入して

$$V=24\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{12}-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{12}\right\}=4\sqrt{2}+4-3\pi. \qquad \cdots (\text{答})$$

1998 年　後期・理科 I 類

第 1 問

xy 平面上の点 $P_1=(0,\ 10)$ を中心とし半径が 1 の円周 C_1 と，$P_2=(0,\ 0)$ を中心とし半径が 2 の円周 C_2 を与える。xy 平面上の 3 点 Q，R，S を頂点とし，$\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ に関して次の問に答えよ。

(1)　点 Q が円周 C_1 上を動き，点 R が円周 C_2 上を動くとき，第 3 の頂点 S が動いた軌跡を求めよ。

(2)　さらに，直線 $x+2y=10$ の上にある点 P_3 を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周 C_3 を与える。点 P_3 を適当にとったところ，頂点 Q，R，S がそれぞれ円周 C_1，C_2，C_3 上にあり，角 $\angle QRS$ が直角になるような直角二等辺三角形 $\triangle QRS$ がただ一つだけ定まったという。このときの P_3 の座標を定めよ。

分　野

数学B：ベクトル，**数学Ⅱ**：軌跡，**数学C**：一次変換

考え方

2 点 Q，R の座標をたとえばパラメータ α，β で表し，$\overrightarrow{RQ}$ を $\pm 90^\circ$ 回転したベクトルが $\overrightarrow{RS}$ であることを使えば，S の座標を α，β で表すことができる．

$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$ の関係を使う．

【解答】

(1)　Q の座標を $(\cos\alpha,\ 10+\sin\alpha)$，R の座標を $(2\cos\beta,\ 2\sin\beta)$，S の座標を $(X,\ Y)$ とおく．

三角形 QRS が $\angle QRS$ が直角の直角二等辺三角形だから $\overrightarrow{RQ}=\begin{pmatrix}\cos\alpha-2\cos\beta\\ \sin\alpha+10-2\sin\beta\end{pmatrix}$ を $\pm 90^\circ$（以下複号同順）回転したベクトルが $\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}X-2\cos\beta\\ Y-2\sin\beta\end{pmatrix}$ である．

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}X-2\cos\beta\\ Y-2\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \mp 1\\ \pm 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha-2\cos\beta\\ \sin\alpha-2\sin\beta+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mp\sin\alpha\pm 2\sin\beta\mp 10\\ \pm\cos\alpha\mp 2\cos\beta\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\quad \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\beta\mp\sin\alpha\pm 2\sin\beta\mp 10\\ 2\sin\beta\pm\cos\alpha\mp 2\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mp\sin\alpha\pm 2\sqrt{2}\sin\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\mp 10\\ \pm\cos\alpha\mp 2\sqrt{2}\cos\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\pm\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}\mp 2\sqrt{2}\begin{pmatrix}-\sin\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}\mp\begin{pmatrix}10\\ 0\end{pmatrix}.$$

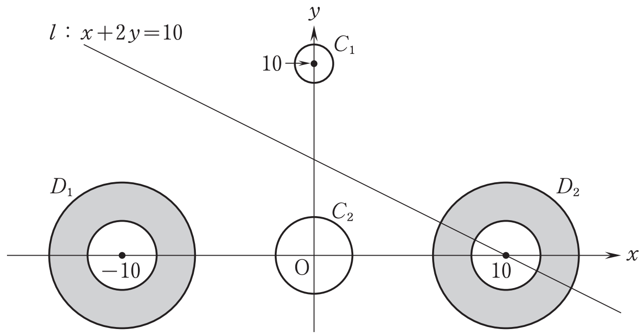
$\vec{a}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}-\sin\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos\left(\beta\pm\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}$ とおくと，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は向きが独立な単位ベクトルだから

$$2\sqrt{2}-1\leqq|\pm\vec{a}\mp 2\sqrt{2}\,\vec{b}|\leqq 2\sqrt{2}+1.$$

$$\therefore\quad (2\sqrt{2}-1)^2\leqq(X\pm 10)^2+Y^2\leqq(2\sqrt{2}+1)^2.$$

よって，点 S の存在範囲は点 $(10,\ 0)$，$(-10,\ 0)$ を中心とする，半径 $2\sqrt{2}-1$ と $2\sqrt{2}+1$ の円の間の部分．境界を含む．　…(答)

(2)　l：$x+2y=10$ とする．(1) で求めた領域は下図網掛部（境界を含む）．



2つの領域を図のように D_1, D_2 とする．

条件をみたすQ，R，Sがただ1つ存在するのは，l 上に中心 P_3 をもつ半径 $\sqrt{2}$ の円 C_3 が D_1 または D_2 とただ1点を共有するとき．すなわち，C_3 が D_1 または D_2 の外円と外接するか，内円と内接するとき．

したがって，D_1，D_2 の中心をそれぞれ $D_1(-10,\ 0)$，$D_2(10,\ 0)$ とすると，P_3D_1，P_3D_2 の長さが $3\sqrt{2}+1$ または $\sqrt{2}-1$ のときである．

D_1 と l の距離は $\dfrac{20}{\sqrt{5}}=4\sqrt{5}$．ところが $4\sqrt{5}>4\sqrt{2}>3\sqrt{2}+1$ だから，P_3D_1 は $3\sqrt{2}+1$ にも $\sqrt{2}-1$ にもなることはない．

一方 D_2 は l 上の点であり，l の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ なので，

$P_3D_2=3\sqrt{2}+1$ となる点 P_3 の座標は $\left(10\pm\dfrac{2(3\sqrt{2}+1)}{\sqrt{5}},\ \mp\dfrac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}\right)$.

$P_3D_2=\sqrt{2}-1$ となる点 P_3 の座標は $\left(10\pm\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\right)$.

求める座標は

$$P_3\left(10\pm\frac{6\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}},\ \mp\frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(10\pm\frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{5}},\ \mp\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}}\right)$$（それぞれ複号同順）．　…(答)

第２問

パラメータ r，θ $\left(r>0,\ 0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対しての x 関数

$$f(x)=r\sin(x+\theta)$$

を考える。

(1)　r，θ が等式

$$\int_0^{2\pi}(\sin x-f(x))^2\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2 x\,dx \tag{E}$$

をみたしているとき，r を θ の関数として表せ。

(2)　式(E)をみたしながら r，θ を動かしたとき，$0\leqq x\leqq\pi$ における $y=f(x)$ のグラフは xy 平面上を動く。これらのグラフが動く範囲 D を求め，図示せよ。

(3)　図形 D の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

(1)は容易．(2)が問題．x を止めて $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，y のとりうる値の範囲を求める．x によって $x+2\theta$ のとる範囲が変化するので場合分けする．

【解答】

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi} = \pi.$

$$\int_0^{2\pi}(\sin x - f(x))^2\,dx = \int_0^{2\pi}(\sin x - r\sin(x+\theta))^2\,dx = \int_0^{2\pi}\{\sin^2 x - 2r\sin x\sin(x+\theta) + r^2\sin^2(x+\theta)\}\,dx.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(x+\theta)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_\theta^{2\pi+\theta} = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\theta)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos\theta - \cos(2x+\theta)\}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\cos\theta - \frac{1}{2}\sin(2x+\theta)\right]_0^{2\pi} = \pi\cos\theta$$

から

$$\int_0^{2\pi}(\sin x - f(x))^2\,dx = \pi - 2r\pi\cos\theta + r^2\pi.$$

よって，与式(E)が成り立つとき，

$$\pi - 2r\pi\cos\theta + r^2\pi = \pi. \quad \therefore \quad -2r\cos\theta + r^2 = 0.$$

$r \neq 0$ だから

$$r = 2\cos\theta. \qquad \cdots\text{(答)}$$

(2) (1)のとき $r>0$ はみたされている．$y=f(x)$ は

$$y = 2\cos\theta\sin(x+\theta) = \sin(x+2\theta) + \sin x.$$

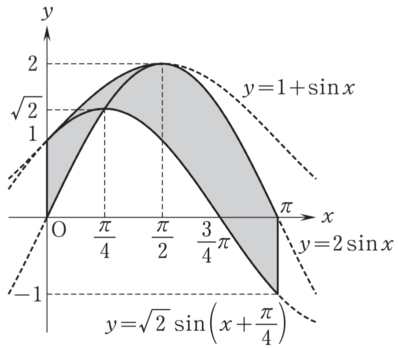
x を固定して θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かすと $x \leqq x+2\theta \leqq x+\dfrac{\pi}{2}$ だから，$\sin(x+2\theta)$ のとりうる範囲は

$$\begin{cases} \sin x \leqq \sin(x+2\theta) \leqq 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \cos x \leqq \sin(x+2\theta) \leqq 1 & \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \cos x \leqq \sin(x+2\theta) \leqq \sin x & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right). \end{cases}$$

よって，

$$\begin{cases} 2\sin x \leqq f(x) \leqq 1+\sin x & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq f(x) \leqq 1+\sin x & \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right), \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq f(x) \leqq 2\sin x & \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi\right). \end{cases}$$

領域 D を図示すると下図網掛部（境界を含む）．



(3)　D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\sin x-2\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x-\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2\sin x-\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}.$$ …(答)

第３問

グラフ $G=(V, W)$ とは有限個の頂点の集合 $V=\{\mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n\}$ とそれらの間を結ぶ辺の集合 $W=\{E_1, \cdots, E_m\}$ からなる図形とする。各辺 E_j は丁度２つの頂点 P_{i_1}，P_{i_2}（$i_1 \neq i_2$）を持つ。頂点以外での辺同士の交わりは考えない。さらに，各頂点には白か黒の色がついていると仮定する。

例えば，図１のグラフは頂点が $n=5$ 個，辺が $m=4$ 個あり，辺 E_i（$i=1, \cdots, 4$）の頂点は P_i と P_5 である。P_1，P_2 は白頂点であり，P_3，P_4，P_5 は黒頂点である。

出発点とするグラフ G_1（図２）は $n=1$，$m=0$ であり，ただ１つの頂点は白頂点であるとする。

与えられたグラフ $G=(V, W)$ から新しいグラフ $G'=(V', W')$ を作る２種類の操作を以下で定義する。これらの操作では頂点と辺の数がそれぞれ１だけ増加する。

図１

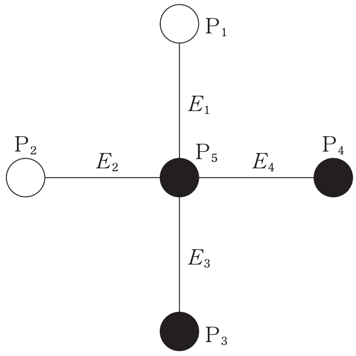
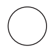
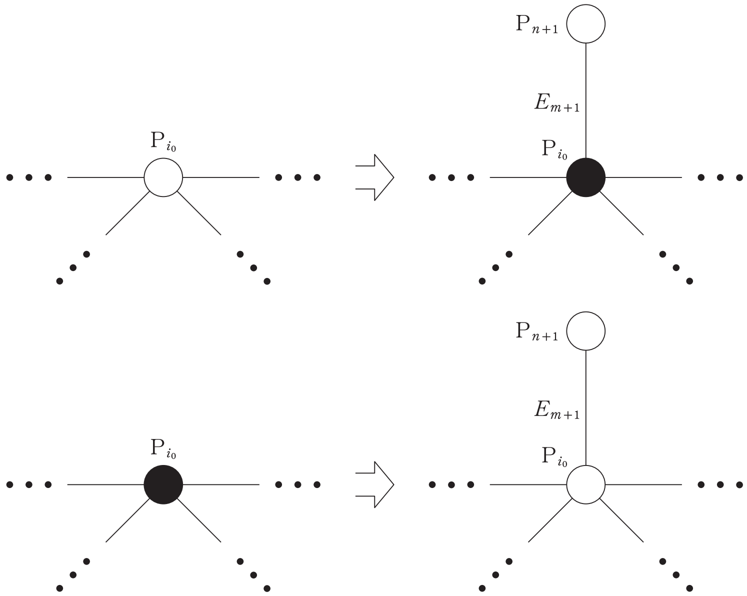


図２



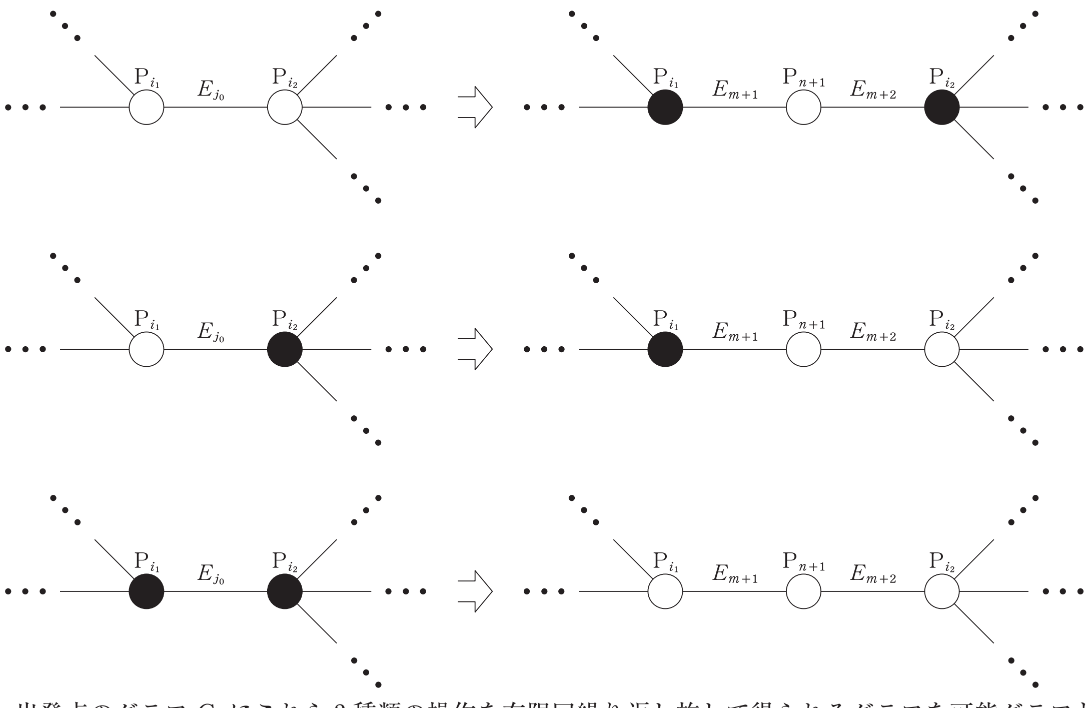
（操作１）　この操作は G の頂点 P_{i_0} を１つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W に新しい辺 E_{m+1} を加えたものとする。E_{m+1} の頂点は P_{i_0} と P_{n+1} とし，G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_0} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図３）。

図 3



（操作 2）　この操作は G の辺 E_{j_0} を 1 つ選ぶと定まる。V' は V に新しい頂点 P_{n+1} を加えたものとする。W' は W から辺 E_{j_0} を取り去り，新しい辺 E_{m+1}，E_{m+2} を加えたものとする。E_{j_0} の頂点が P_{i_1} と P_{i_2} であるとき，E_{m+1} の頂点は P_{i_1} と P_{n+1} であり，E_{m+2} の頂点は P_{i_2} と P_{n+1} であるとする。G' のそれ以外の辺の頂点は G での対応する辺の頂点と同じとする。G において頂点 P_{i_1} の色が白又は黒ならば，G' における色はそれぞれ黒又は白に変化させる。P_{i_2} についても同様に変化させる。それ以外の頂点の色は変化させない。また P_{n+1} は白頂点にする（図 4）。

図 4



出発点のグラフ G_1 にこれら 2 種類の操作を有限回繰り返し施して得られるグラフを可能グラフと呼ぶことにする。次の問に答えよ。

(1) 図5の3つのグラフはすべて可能グラフであることを示せ。ここで，すべての頂点の色は白である。

図5

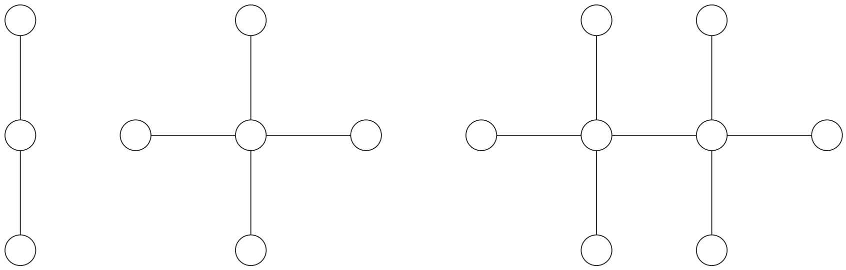
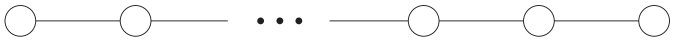


図6



(2) n を自然数とするとき，n 個の頂点を持つ図6のような棒状のグラフが可能グラフになるために n のみたすべき必要十分条件を求めよ。ここで，すべての頂点の色は白である。

分　野

数学Ⅰ：個数，**数学A**：整数，数列

考え方

予備知識なしに工夫して解くことが要求されている．題意の把握がまず必要．

(1)は黒頂点を増やさないようにしながら操作を繰り返すことで具体的に示す．図5の最初の2個は割合に見つけやすいが，3番目のグラフが難しい．

(2)は棒状に付け加えることを考える．白頂点を3個付け加える方法を見つけることができることを示すことが先決．

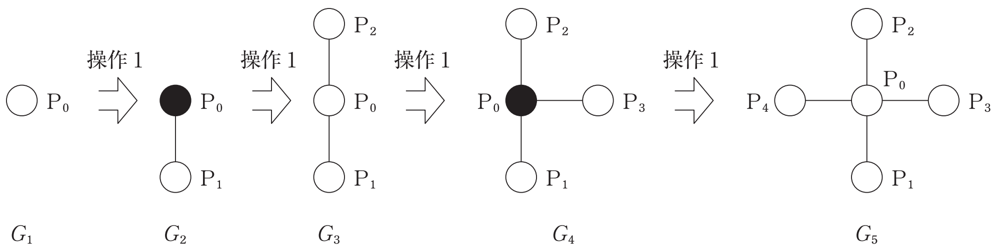
白頂点1個と3個が可能だから $n=3m$ と $3m+1$ のグラフが可能であることはこれでいえる．

しかし，$n=3m+2$ のときのグラフが不可能であることを示すことは大変難しい．

ここに示した方法も一方法である．黒頂点ではさまれた部分の白頂点の個数を3で割った余りを基準に分類し，(操作1)を両端の頂点に行うか，(操作2)を中間の辺にのみ行うことを考え，そのときに黒頂点ではさまれた部分の個数や，白頂点の個数がどのように変化するかを精査することによって導かれた．

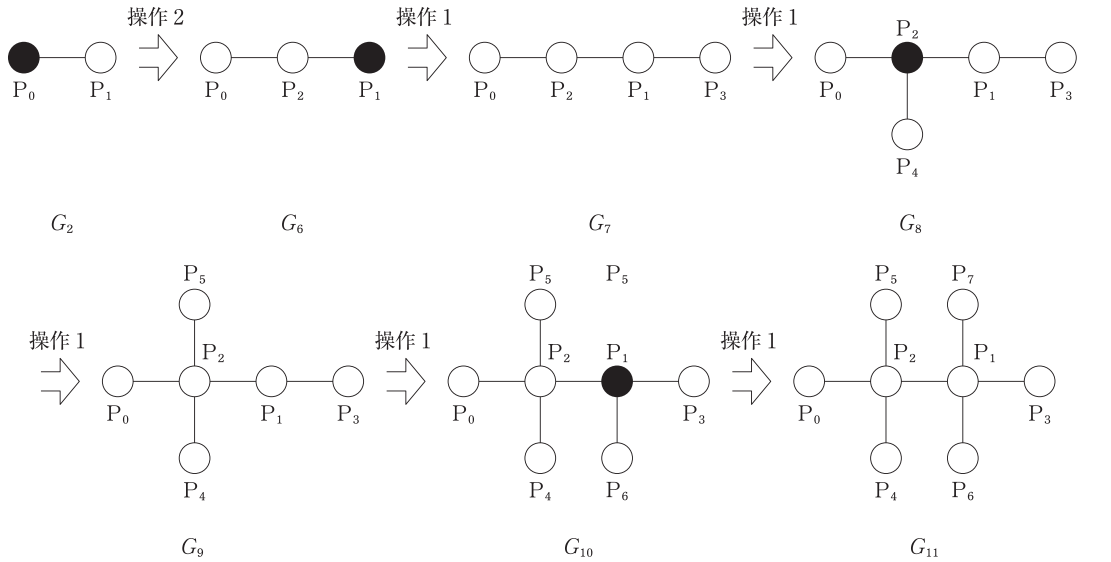
【解答】

(1) 最初の白頂点を P_0 とし，付加される頂点を順次 P_1，P_2，… とする．次のような操作を行う．



上図で G_3，G_5 は図5の最初の2つの図である．したがって，図5の最初の2つが可能グラフであることが示された．

上図の G_2 から出発する次のような操作を行う．



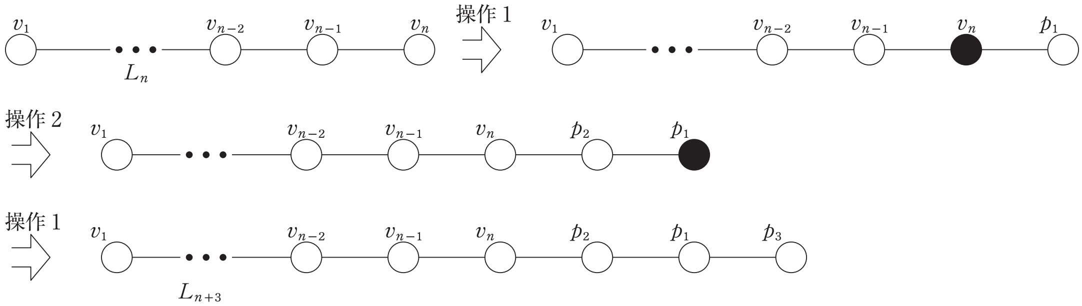
上図で G_{11} は図 5 の 3 つ目の図である．

したがって，図 5 の 3 つの図が可能グラフであることが示された．（証明終り）

（注） G_3，G_5 の作り方の手順は 1 通りだが，G_{11} の作り方の手順はこれ以外に異なるものがある．

(2) n 個すべての頂点の色が白である棒状グラフを L_n とおく．

まず，L_n が可能グラフであるならば，L_{n+3} も可能グラフであることを示す．



(1) における G_3，G_7 は L_3，L_4 が可能グラフであることを示している．また，1 頂点だけのグラフ L_1 も可能グラフであるから L_{3m}，L_{3m-2}（$m \geqq 1$）は可能グラフである．

L_{3m+2} が可能グラフでないことを示すには次のような変数を考える．

いま，n 個の頂点からなる棒状のグラフにある黒頂点に着目する．棒状のグラフに黒頂点が b 個あるとき，このグラフは黒頂点によって $b+1$ 個の部分に分けられる．これらの部分には白頂点が 1 つもないことがありうる．この部分を連と呼ぶことにする．連は $b+1$ 個ある．1 つの連にある白頂点の個数（0 も含む）に 1 を加えたものを w_1，w_2，…，w_{b+1} とする．

ここで w_i をひとつおきに加え

$$p = w_1 + w_3 + w_5 + \cdots, \quad q = w_2 + w_4 + \cdots$$

とする．当然 $p+q=n+1$ である．

この p，q の各操作における変化を見ると，いずれの操作においても一方は 2 加えられ，他方は 1 減ずる．つまり p，q を 3 割った余りは常に 2 増えるか 1 減る．つまり 1 回の操作では元の数に 2 を加えて数を 3 で割った余りを考えればよい．

2 個の可能グラフは白頂点，黒頂点が 1 個ずつのグラフで $p=2$，$q=1$ である．n 個の頂点からなるグラフでは p，q を 3 で割った余りは，$2(n-2)+2$，$2(n-2)+1$ を 3 で割った余りに等しくなければならない．

一方 L_n の p，q は $n+1$，0 であるから，$2(n-2)+2$，$2(n-2)+1$ の一方は３の倍数でなければならない．

$n=3m+2$ とすると，$2(n-2)+2=6m+2$，$2(n-2)+1=6m+1$ で共に３の倍数ではない．

よって，L_{3m+2} は可能グラフではない．

以上より，求める n は

$$n=3m,\ 3m-2\quad(m \text{ は 1 以上の整数}). \qquad \cdots(\text{答})$$

【解説】

棒状のグラフの場合問題文の（図３）は（図７），（図８）のように，（図４）は（図９），（図10），（図11）のように表される．

図７


図８

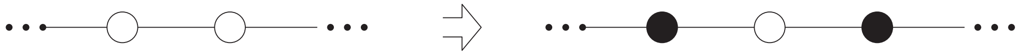

図９


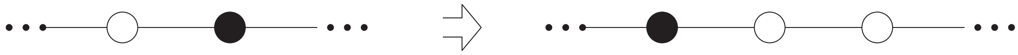
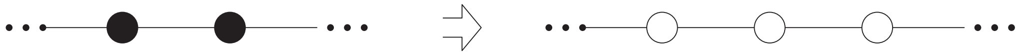
図10


図11


図は左側から w_1，w_2 と数え，左側の … の部分が k 番目の連であるとし，k 番目の連を含む変数を p，含まない方の変数を q とする．以下で操作後の w，p，q を「$'$」をつけて表す．

（図７）では頂点を付け加えた後右側に新たな黒頂点が表れて，

$w_{k+1}'=2$，$w_k'=w_k-1$，$w_i'=w_i$ $(i \leqq k-1)$ となる．よって，$p'=p-1$，$q'=q+2$．

（図８）の場合最初あった黒頂点が消えるので $w_{k+1}=1$ が消え，

$w_{k+1}'=0$，$w_k'=w_k+2$，$w_i'=w_i$ $(i \leqq k-1)$．よって，$p'=p+2$，$q'=q-1$．

（図９）の場合，新たな黒頂点が２個表れるので番号がずれる．

$w_i'=w_i$ $(i \leqq k-1)$，$w_k'+w_{k+2}'=w_k-1$，$w_{k+1}'=2$，$w_i'=w_{i-2}$ $(i \geqq k+3)$．

よって，$p'=p-1$，$q'=q+2$．

（図10）の場合，

$w_i'=w_i$ $(i \leqq k-1)$，$w_k'=w_k-1$，$w_{k+1}'=w_{k+1}+2$，$w_i'=w_i$ $(i \geqq k+2)$．よって，$p'=p-1$，$q'=q+2$．

（図11）の場合，黒頂点が２個消えるので番号がずれる．

$w_i'=w_i$ $(i \leqq k-1)$，$w_k'=w_k+w_{k+2}+2$，$w_{k+1}=1$ が消滅，$w_i'=w_{i+2}$ $(i \geqq k+1)$．

よって，$p'=p+2$，$q'=q-1$．

以上のことから１回の操作で p，q は２増えるか，１減るかのいずれかしか起こらない．２も -1 も３で割ると余りはともに２である．したがって，n 回の操作による p，q の増加は $2n$ と３で割った余りが等しい．

さて，n 個の白頂点だけからなる棒状のグラフでは $w_1=n+1$ よって，$p=n+1$，$q=0$ である．

最初１個の白頂点だけの場合は可能グラフだが１個が両端になっている特別の場合であるから $n=2$ から考える．

２個のとき可能グラフは白頂点と黒頂点が１個ずつだから $w_1=2$，$w_2=1$ だから，$p=2$，$q=1$ である．

よって，n 個の頂点からなる棒状の可能グラフでは p，q と $2(n-2)+2$，$2(n-2)+1$ を３で割った余りが一致する．ただし，奇数番目，偶数番目という区別は左右を入れ替えることによって入れ替わりうるので p，q を取り替え成り立ってもよい．

$p+q=n+1$ は常に成り立つから，$2(n-2)+2=3n-n-2$，$2(n-2)+1=3n-n-3$ の一方が３で割り切れればよい．一方が３で割り切るのは $n=3m$，$n=3m+1$ のとき．

（注）　問題冒頭の（図１）は可能グラフではない．なぜなら２回の操作の後は３つの頂点が１列になっており，その少なくとも一方の端は白頂点である．この状態から（図１）のような１頂点が４つの頂点に辺で結ばれている状態を作るには中央の頂点に操作１をもう２回行わなければならない．ところがこうして新たにつけ加えられた頂点は白頂点であるから，中央の頂点に辺で結ばれている４頂点のうち少なくとも３頂点は白頂点でなければならない．したがって（図１）は出発点のグラフ G_1 から可能なグラフではない．

超難問（1998年後期）

京大の後期試験はその成り立ちの経緯から，前期試験と類似した入試であった．東大は後期試験を特色のある入試にしようと考えたようである．その結果，東大は前期試験とは一味違う入試を用意した．論文試験と総合科目である．文類は論文試験，理類は総合科目という形式がとられた．

文類の論文Ⅰは英語で出題され，論文Ⅱは各類ごとに出題されたが，特に文Ⅱの論文Ⅱは数学を含む，経済学的な内容の問題であった．

また，総合科目Ⅰは英語で出題され，総合科目Ⅱは理Ⅰのみを対象とし物理，数学の融合問題であった．後に総合科目Ⅱは文類にも課すようになりより広い分野の数学的応用を問う問題に変化していった．

この他理Ⅰでは数学の問題も出題された．ここでも東大は後期試験に特徴をもたせようとした．

後期試験の数学は150分で3題をじっくり解かせるという出題であった．そのためにかなり難しい問題が出題された．

そのなかで，特に取り上げるなら1998年（平成10年）の第3問，つまり上の問題であろう．

⑴は問題の意味が理解できているかどうかを問う意味もある．題意の規則が理解できれば最初の2つは「犬も歩けば棒に当る」式に作れることが示せる．3番目も少し工夫を要するが何とか作れる．

⑵について，nが3の倍数であるときと，3で割って1余るときにグラフが作れることは，少し難しいが，何とか見つけることができる．

最初○1個から始めることと，⑴の最初のグラフが○3個が1列に並んでいることに注意する．

またすでにn個並んでいる列に3個の○を●があまり増えないようにつけ加えて行くと，比較的に容易に，ちょうど3個の○が増えたグラフを作ることができることがわかる．

これらから，$n=3m$，$3m-2$（mは自然数）に対してグラフが作れることを示すことができた．

問題はnの必要十分条件を見つけること，すなわち，nを3で割った余りが2のときにグラフが作れないことを証明する部分である．

○を付け加える方法が無数にあり，$n=3m+2$ も無数にあるからこれが不可能であることをいうのは一筋縄ではいかない．

この部分のために河合塾の解答も発表が1日近く遅れたのを憶えてる．

この解答に当って，不可能を示すためには，グラフ全体に対して，何らかの指標があると便利だと考えた．そして，その指標が操作で不変であれば，指標が異なるグラフは互いに変換し合えないはずである．

すなわち，この操作で不変な指標を探すことが目的だと考えた．

そして見つけたのが，（○が連続している個数 $+1$）を1つおきに加えたものをp，qとする．こうすると，一連の操作に対して，p，qを3で割った余りが不変になることに気づいたのである．左右を逆に並べたり，端が●である場合などを考えると，奇数番目の個数の和と，偶数番目の和のどちらをp，qとするかを指定することは意味がない．(p, q)のセットで考えた．

他にも，$n=3m+2$ の場合が不可能であることを示す方法があるかもしれない．実際，当時の受験界ではいろいろな“模範”解答が出されている．時間的な制約もあったのかもしれないが，かなりの“解答”が不完全であったり間違っていたりした．

この問題は最後の部分の要求水準が高いので『大学への数学』の著者をして「史上最強の問題」と言わしめた問題である．私も史上“最難”だと思う．しかし，⑵の前半まではそこそこの問題だと思われる．このような難問では得てして“入試にならない”ことが多いのだが，この問題は前半だけで十分入試になったのではないだろうか．そして，オープン・クエスチョン（実際にはそうではないのだが）にどう対応するかという能力が問われたと思われる．もっともその意味では入試になっていないだろうと思われる．実際に能力を問われたのは我々受験産業だったのかもしれない．

1999 年　前期・文科

第 1 問

(1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1) で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

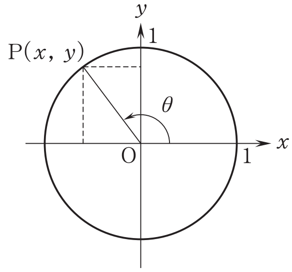
分　野

数学Ⅱ：三角関数，加法定理

考え方

教科書にある内容の問題である．できなかった人はしっかり復習すべきである．

【解答】



(1)　O を原点とする座標平面上で，x 軸の正の部分を始線として，角 θ を表す動径上に OP の長さが 1 となるように P をとり，点 P の座標を $(x,\ y)$ とするとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ は

$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x \qquad \cdots(答)$$

のように定められる．

(2)　まず，

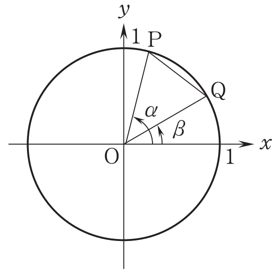
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad \cdots①$$

が成り立つことを示す．単位円において動径 OP，OQ の表す角をそれぞれ α，β とする．このとき (1) より，

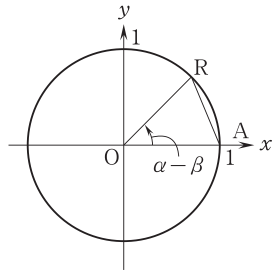
$$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\quad \mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

であるから 2 点間の距離の公式より

$$\mathrm{PQ}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$=2\{1-(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\}. \qquad \cdots②$$



一方，三角形 OPQ を原点 O のまわりに $-\beta$ だけ回転して，点 Q が点 A(1, 0) に重なるようにする．この回転により点 P が移った点を R とすると，点 $\mathrm{R}(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$ となる．



よって，

$$\mathrm{RA}^2=\{1-\cos(\alpha-\beta)\}^2+\{0-\sin(\alpha-\beta)\}^2$$
$$=2\{1-\cos(\alpha-\beta)\}. \qquad \cdots③$$

PQ＝RA であるから，②，③ より ① が成り立つ．

（① の証明終り）

① の両辺の β を $-\beta$ でおきかえると，$\cos(-\beta)=\cos\beta$，$\sin(-\beta)=-\sin\beta$ であるから

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (証明終り)$$

また，① の両辺の α を $90°-\alpha$ でおきかえると，$\cos\{(90°-\alpha)-\beta\}=\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$，$\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$ であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (証明終り)$$

(注)　教科書の内容であるにもかかわらず，出来が悪かったと聞いている．その意味で，入試に一石を投じた問題である．

$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$（1999 年共通）

1999 年共通問題は東大が受験界に一石を投じた問題だった．

sin，cos の定義を述べ，その定義に従って加法定理を証明する問題である．

果たして，この問題は易問なのだろうか，難問なのだろうか，答はその両方である．

易問である理由は，教科書をそのまま写せば満点がもらえる問題だからである．

難問である理由は，実際にこの問題の出来が極めて悪かったと聞いているからである．

出来が悪かった理由は，受験生にとって加法定理は問題を解く道具であって，これを憶えていさえすればよいものであると考えていたからではないだろうか．受験指導をする我々も実際にそのように指導していた．まさか，これが出題されるとは思っていなかった面がある．

しかし，同時に学習指導の上では一通りの証明，あるいは説明はしていたはずである．また，教科書には必ず証明は付されているはずである．証明方法も，初等幾何的な方法，座標幾何的な方法，ベクトルを使う方法，行列の積を使う方法などいくらでもあると思われる．

当時（1999）も今日（2020）も加法定理は数学Ⅱで学習し，ベクトルは数学Bであるため教科書は座標幾何的な方法がとられている．指導要領によっては，ベクトルや行列などで証明されたことがある（第 4 次改訂）．

いずれにしろ受験生は必ず学習しているはずの事柄である．

受験指導はよく出題される事柄を繰り返し学習することに終始し，余り出題されないことは 2 の次にしてしまう傾向がある．このような重要な公式証明まで犠牲にしてきたことに対する反省が迫られた．

「のど元過ぎいれば熱さを忘れる」のようにこの問題が出てからもう 20 数年経ってしまっている．当時は重要な公式の証明も大切にしなければと思っていたのだが，近年ではその気分も薄らいでいる．「“災い？”は忘れたころにやってくる」にならなければと思える今日この頃である．

話は変るが，(1) の設問は東大の配慮と思われる．入試問題の証明問題は何を前提とするかを問題の中に示すことは難しい．もし，行列で証明しようとすれば sin，cos は回転行列の成分と定義することになるであろう．

実は私が予備校講師になりたての頃，たしか東京芸術大学の問題（当時は芸大の入試でも数学が課されていた）と記憶しているのだが，「三角関数の加法定理を証明せよ」という問題を生徒が質問に来て，考え込んでしまった記憶がある．当時大学院生だった私は「三角関数の定義は級数だったのか，それとも微分方程式の解だったのか」と考え込んでしまったからである．勿論，当時も今も教科書における三角関数の定義は図形的な定義に他ならない．東大の (1) はこのような問題を引き起こさないための配慮からなされているのかもしれない．こう見るとこの出題者の深謀遠慮が読み取れて面白い．

第 2 問

次の 2 つの条件 (a), (b) を同時に満たす複素数 z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(a)　$2z$, $\dfrac{2}{z}$ の実部はいずれも整数である。

(b)　$|z| \geqq 1$ である。

分　野

数学B：複素数平面

考え方

$z=x+yi$ とおき，与えられた条件を x, y で表す.

【解答】

$z=x+yi$(x, yは実数) とおくと，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{x-yi}{x^2+y^2}$. 条件 (b) から，

$$x^2+y^2 \geqq 1. \qquad \cdots ①$$

条件 (a) から，

$$\begin{cases} 2x=m & (m \text{ は整数}), & \cdots ② \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2}=n & (n \text{ は整数}) & \cdots ③ \end{cases}$$

とおける.

(i)　$n=0$ のとき，

③ から，$x=0$. (このとき，② から，$m=0$：整数.)

① から，$y^2 \geqq 1$.

$$\therefore \quad x=0 \quad (y \leqq -1,\ 1 \leqq y).$$

(ii)　$n \neq 0$ のとき，

③ から，$x^2+y^2=\dfrac{2}{n}x$.

$$\therefore \quad \left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2. \qquad \cdots ④$$

①, ④ が共有点をもつためには，

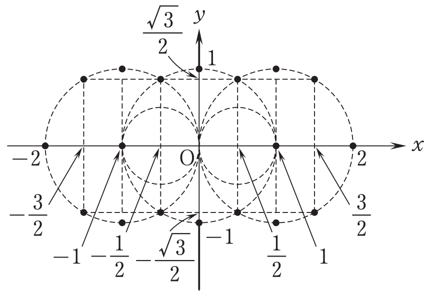
$$|n|=1,\ 2.$$

($\because$　$|n| \geqq 3$ のときは，円 ④ は $x^2+y^2<1$ に含まれる.)

よって，求める (x, y) の条件は，

① かつ ② かつ ④　($n=\pm 1$, ± 2).

以上を図示すると右図を得る.　…(答)



【別解】

$$z=x+yi \quad (x, y \text{ は実数})$$

とおくと，条件 (b) から，

$$x^2+y^2 \geqq 1. \qquad \cdots ①$$

条件 (a) から，

$$\begin{cases} 2x=m & (m \text{ は整数}), & \cdots ② \\ \dfrac{2x}{x^2+y^2}=n & (n \text{ は整数}) & \cdots ③ \end{cases}$$

とおける.

②, ③ から，

$$\frac{m}{\frac{m^2}{4}+y^2}=n. \qquad \cdots④$$

(i) $m>0$ のとき,

$\frac{m^2}{4}+y^2 \geqq \frac{m^2}{4}$ であるから,

$$\frac{m}{\frac{m^2}{4}} \geqq n \iff 4 \geqq mn. \qquad \cdots⑤$$

④ から,

$$\frac{m^2}{4}+y^2=\frac{m}{n}.$$

①, ②, ③ から.

$$\frac{m}{n} \geqq 1.$$

$m>0$ と ④ から, $n>0$.

$$\therefore \quad m \geqq n. \qquad \cdots⑥$$

⑤, ⑥ から,

$$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (4,\ 1).$$

$$\therefore \quad (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (1,\ \pm 1),\ (1,\ 0),\ \left(\frac{3}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (2,\ 0).$$

(ii) $m<0$ のとき,

同様にして,

$$\therefore \quad (x,\ y)=\left(-\frac{1}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (-1,\ \pm 1),\ (-1,\ 0),\ \left(-\frac{3}{2},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ (-2,\ 0).$$

(iii) $m=0$ のとき,

② から, $x=0$.（このとき, $n=0$：整数）

① から,

$$y^2 \geqq 1 \iff y \leqq -1,\ 1 \leqq y.$$

以上を図示して（答）を得る.（図省略）

第 3 問

c を $c>\frac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし, 直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き, 点 Q が放物線 B 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。

分　野

数学Ⅱ：図形と方程式

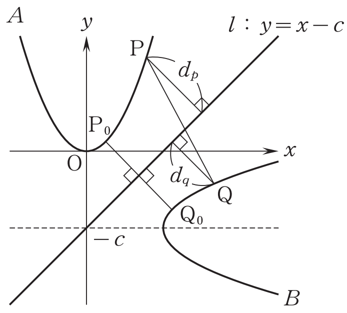
考え方

$y=x-c$ について対称だから, 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x-c$ の距離の最小値を考えればよい.

【解答】

直線 $y=x-c$ を l とし,

点 P と l の距離を d_p,
点 Q と l の距離を d_q とする.
P を $(t,\ t^2)$ とおくと



$$d_p=\frac{|t^2-t+c|}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+c-\frac{1}{4}\right|.$$

$c>\frac{1}{4}$ より d_p の最小値は $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c-\frac{1}{4}\right)$ $\left(t=\frac{1}{2}\ のとき\right)$

A と B は l に関して対称だから d_q の最小値も同じ.

P, Q の距離について不等式

$$PQ \geqq d_p+d_q \geqq (d_p\ の最小値)+(d_q\ の最小値)$$

が成り立つが, d_p の最小値を与える P（P_0 とする）と d_q の最小値を与える Q（Q_0 とする）は l に関して対称だから, $P=P_0$, $Q=Q_0$ のとき等号はすべて成立する.

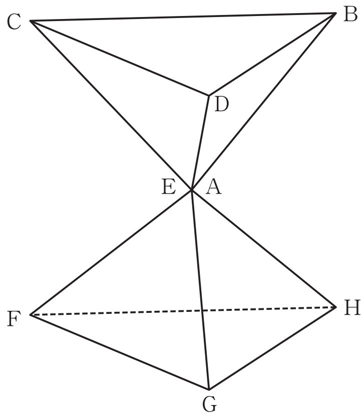
よって, PQ の最小値は P_0Q_0 すなわち

$$2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(c-\frac{1}{4}\right)=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right). \qquad \cdots(答)$$

第 4 問

(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で電流を通すものとする。このとき, 頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし, 各辺が電流を通すか通さないかは独立で, 辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1) で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき, 頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



分　野

数学 I ：確率

考え方

A から B に電流が流れるのは辺 AB を電流が流れる場合と AB は流れないが他の回路を通して電流が流れる場合に分けて考える.

他の回路を流れる場合は5個の辺のうち何個を流れるかで考える．

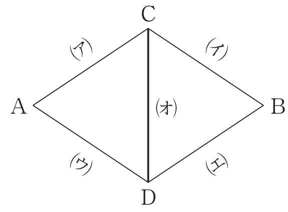
(2) はAからB，BからEへ流れる確率は(1)の結果を使える．

【解答】

(1)(i)　辺ABが電流を通すとき$\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{2}\right)$，他の辺の状態に関わらずAからBへ電流は流れる．

(ii)　辺ABが電流を通さないとき$\left(\text{確率}\ \dfrac{1}{2}\right)$，

右図のAからBへ電流が流れればよい．



(ii-a)　(ア)〜(オ)のすべてが電流を通すとき，適．

$$\text{(ii)の下での確率}：\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

(ii-b)　(ア)〜(オ)のうち，1ヶ所だけ電流を通さないとき，適．

$$\text{(ii)の下での確率}：{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

(ii-c)　(ア)〜(オ)のうち，2ヶ所だけ電流を通さないとき，

電流を通さない2ヶ所の組合せが ((ア)と(ウ))，((イ)と(エ)) 以外ならば適．

$$\text{(ii)の下での確率}：({}_5C_2-2)\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

(ii-d)　(ア)〜(オ)のうち，2ヶ所だけ電流を通すとき，

電流を通す2ヶ所の組合せが ((ア)と(イ))，((ウ)と(エ)) ならば適．

$$\text{(ii)の下での確率}：2\left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

上記以外はAからBへ電流は流れない．

以上より求める確率は，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1+5+8+2)\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{4}. \qquad \cdots\text{(答)}$$

(2)　BからFに電流が流れるのは，

(BからAに電流が流れる) かつ (AからFに電流が流れる)

ときであり，AからFに電流が流れる確率は(1)と同様に$\dfrac{3}{4}$となり，これらはそれぞれ独立なので，

求める確率は，

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}. \qquad \cdots\text{(答)}$$

1999 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を

$$z_1=1,\quad z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$$

によって定める。ただし i は虚数単位である。

(1)　すべての自然数 n について

$$\frac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$$

を求めよ。

分　野

数学B：複素数，**数学A**：数列，**数学Ⅲ**：関数の極限

考え方

複素数であっても 2 項間漸化式の解法は変らない．

複素三角不等式 $||a|-|b||\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$ を利用する．

最後はハサミウチの原理を使う．

【解答】

(1)　$z_1=1$，$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$ より，

$$\begin{array}{rl} z_{n+1} & =(3+4i)z_n+1 \\ -)\quad \alpha & =(3+4i)\alpha+1 \\ \hline z_{n+1}-\alpha & =(3+4i)(z_n-\alpha) \end{array}\quad \left(\alpha=-\frac{1}{10}(1-2i)\right)$$

$$\therefore\quad z_n=(3+4i)^{n-1}(z_1-\alpha)+\alpha=\frac{11-2i}{10}(3+4i)^{n-1}-\frac{1-2i}{10}.$$

三角不等式 $|a|-|b|\leqq|a+b|\leqq|a|+|b|$ を使って，

$$\left|\frac{11-2i}{10}(3+4i)^{n-1}\right|-\left|\frac{1-2i}{10}\right|\leqq|z_n|\leqq\left|\frac{11-2i}{10}(3+4i)^{n-1}\right|+\left|\frac{1-2i}{10}\right|.$$

$$\therefore\quad \frac{5\sqrt{5}}{10}5^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{10}\leqq|z_n|\leqq\frac{5\sqrt{5}}{10}5^{n-1}+\frac{\sqrt{5}}{10}. \qquad \cdots①$$

ここで $n\geqq2$ で

$$\frac{5\sqrt{5}}{10}5^{n-1}+\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n+1)<\frac{5^n}{4}. \qquad \cdots②$$

$$\left(\because\quad \frac{\sqrt{5}}{10}<\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)5^2\leqq\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)5^n.\ \right)$$

$n \geqq 1$ で

$$\frac{5\sqrt{5}}{10}5^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{10}=\frac{\sqrt{5}}{10}(5^n-1)>\frac{3\cdot 5^{n-1}}{4}. \qquad \cdots③$$

$$\left(\because \quad \frac{\sqrt{5}}{10}<\left(\frac{5}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{4}\right)5^0 \leqq \left(\frac{5}{10}\sqrt{5}-\frac{3}{4}\right)5^{n-1}.\right)$$

①，②，③ から，$n \geqq 2$ で，$\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$.

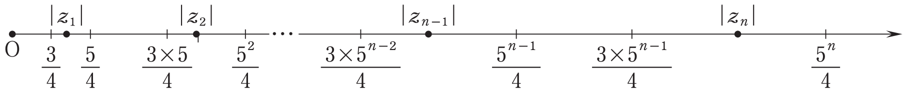
また，$n=1$ のときは $z_1=1$ より明らかに成り立つ.

$$\therefore \quad \frac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\frac{5^n}{4}.$$

（証明終り）

(2) (1) から $\dfrac{3\times 5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$.

数直線上に $|z_k|$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ をかけば



よって，

$$\frac{5^{n-1}}{4} \leqq r < \frac{5^n}{4} \Longrightarrow n-1 \leqq f(r) \leqq n \Longrightarrow \frac{n-1}{\log\left(\frac{5^n}{4}\right)} \leqq \frac{f(r)}{\log r} \leqq \frac{n}{\log\left(\frac{5^{n-1}}{4}\right)}.$$

$r \to \infty$ のとき $n \to \infty$ だから，ハサミウチの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\log\left(\frac{5^n}{4}\right)} \leqq \lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r} \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log\left(\frac{5^{n-1}}{4}\right)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\log\left(\frac{5^n}{4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\log 5-\frac{1}{n}\log 4}=\frac{1}{\log 5},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\log\left(\frac{5^{n-1}}{4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\log 5-\frac{1}{n}\log 4}=\frac{1}{\log 5}.$$

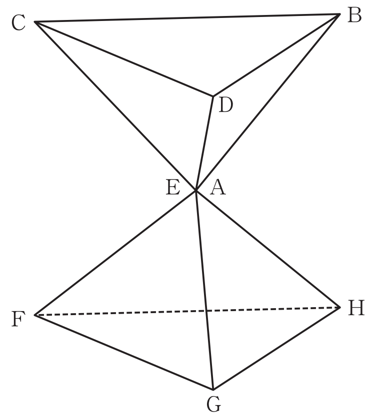
$$\therefore \quad \lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log 5}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第３問

p を $0<p<1$ を満たす実数とする。

(1) 四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2) (1) で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。



分　野

数学 I ：確率

考え方

A から B に電流が流れるのは辺 AB を電流が流れる場合と AB は流れないが他の回路を通して電流が流れる場合に分けて考える．

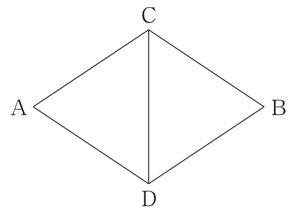
他の回路を流れる場合は CD を電流が流れる場合と，CD を電流が流れない場合で場合分けして考える．

(2) は A から B，B から E へ流れる確率は (1) の結果を使える．

【解答】

(1)　(i)　辺 AB が電流を通すとき（確率 p），他の辺の状態に関わらず A から B へ電流は流れる．

(ii)　辺 AB が電流を通さないとき（確率 $1-p$），右図の A から B へ電流が流れればよい．



(ii-a)　辺 CD が電流を通すとき（確率 p）．

A から B へ電流が流れる条件は

「辺 AC と辺 AD の少なくとも一方が電流を通す」

かつ

「辺 CB と辺 DB の少なくとも一方が電流を通す」

である．(ii) の下での確率：$p(p+p-p^2)^2$．

(ii-b)　辺 CD が電流を通さないとき（確率 $1-p$）．

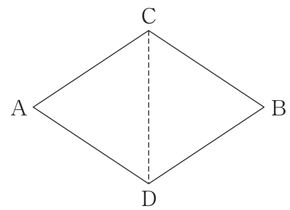
A から B へ電流が流れる条件は

「辺 AC と辺 CB がともに電流を通す」

または

「辺 CB と辺 DB がともに電流を通す」

である．(ii) の下での確率：$(1-p)(p^2+p^2-p^4)$．



(i)，(ii) あわせて，A から B に電流が流れる確率は

$$p+(1-p)\{p(2p-p^2)^2+(1-p)(2p^2-p^4)\}$$
$$=p(1+2p-7p^3+7p^4-2p^5). \quad \cdots(答)$$

(2)　B から F に電流が流れる確率は，

$$(\text{B から A に電流が流れる確率})\times(\text{A から F に電流が流れる確率})$$
$$=p^2(1+2p-7p^3+7p^4-2p^5)^2. \quad \cdots(答)$$

(注)　文科第 4 問の解答も参照せよ．((1) の確率の計算の仕方が少し異なる．)

第4問

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の2条件を満たしているものとする。

(a)　A，B は原点からの距離が1以下の領域に含まれる。

(b)　A，B は一点Pのみ共有し，Pはそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし，円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。

分　野

数学B：空間図形

考え方

2つの円板が接点以外で共有点をもつとすると，それは x 軸上の点である．接点の x 座標を p とすると，A，B と x 軸の共有点は一方が $x \geqq p$ であり，他方が $x \leqq p$ である．この状態でそれぞれの半径の最大値を考えればよい．また，p を変化させてその和の最大値の最大値を求める．

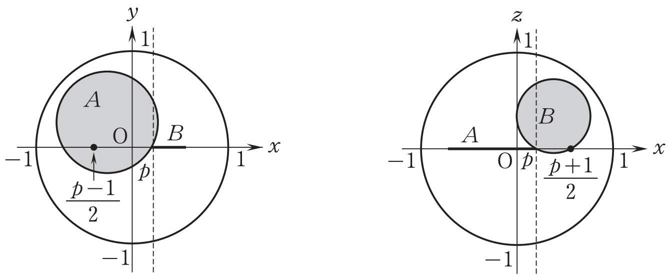
【解答】

Pが原点のとき，A，B はそれぞれの平面内で半径が $\frac{1}{2}$ 以下の円になる．また，半径がともに $\frac{1}{2}$ のとき，x 軸上ではP以外に共有点をもたないようにすることができる．このとき，A と B は条件(a)，(b)をみたしており，半径の和は1である．

Pが原点以外にあるときも含めて考えるときは，A，B の半径の和が1より大きい場合を考えれば十分であり，このとき，A の半径は $\frac{1}{2}$ より大きいと仮定してよい．A と B の共有点Pの座標を $(p,\ 0,\ 0)$ と表すことにする．対称性から $p>0$ としてよい．

また，A の中心の座標を $(a,\ b,\ 0)$，B の中心の座標を $(a',\ 0,\ b')$ とおく．条件より

$$\frac{p-1}{2} \leqq a \leqq p \quad \cdots①, \quad p \leqq a' \leqq \frac{p+1}{2} \quad \cdots②.$$



Pを固定する．

A が xy 平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接するとしてその半径を r とすると

$$\begin{cases} (p-a)^2+b^2=r^2 & (点\ (p,\ 0,\ 0)\ が円板\ A\ の周上にある) \\ a^2+b^2=(1-r)^2 & (A\ が\ x^2+y^2=1\ に内接する) \end{cases}$$

より $r=\frac{1}{2}(p^2-2ap+1)$ であり，r は a の減少関数である．

① より，r は $a=\frac{p-1}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}\left(p^2-2\cdot\frac{p-1}{2}\cdot p+1\right)=\frac{1}{2}(p+1)$ をとる．

同様に B が xz 平面上で円 $x^2+z^2=1$ に内接するとしてその半径を r' とすると

$r'=\frac{1}{2}(p^2-2a'p+1)$ であり，r' は a' の減少関数である．

② より，r' は $a'=p$ のとき最大値 $\frac{1}{2}(p^2-2p\cdot p+1)=\frac{1}{2}(1-p^2)$ をとる．

$$\frac{1+p}{2}+\frac{1-p^2}{2}=\frac{1}{2}(-p^2+p+2)=\frac{1}{2}\left\{-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}.$$

よって，A と B の半径の和の最大値は $\frac{9}{8}$．　…(答)

（注）　p を固定したとき，半径 1 の球面に接する A，B の中心をそれぞれ Q，R とすると，Q，R の軌跡はともに O，P を焦点とし，長軸の長さが 1 の楕円の一部である．Q はその $x\leqq p$ の部分，R はその $x\geqq p$ 部分を動く．$\mathrm{PQ}=r$，$\mathrm{PR}=r'$，で $\mathrm{OQ}+\mathrm{PQ}=\mathrm{OR}+\mathrm{PR}=1$ であるから，r，r' が最大になるのは，Q，R が O からそれぞれ最も近い点．

Q の軌跡は $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{y^2}{1-p^2}=\frac{1}{4}$ $(x\leqq p)$，　R の軌跡は $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+\frac{z^2}{1-p^2}=\frac{1}{4}$ $(x\geqq p)$．

$p>0$ のとき，O に最も近い点は $\mathrm{Q}\left(\frac{p-1}{2},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{R}\left(p,\ 0,\ \pm\frac{1-p^2}{2}\right)$．

このとき，$r=\mathrm{PQ}=\frac{1+p}{2}$，$r'=\mathrm{PR}=\frac{1-p^2}{2}$．

第 5 問

(1)　k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2)　以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。
条件：$0\leqq n\leqq m$ をみたすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

分　野

数学Ａ：二項係数

考え方

${}_m\mathrm{C}_n=\frac{m}{n}{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ で，$m=2^k$ のときを考えると，$0<n<m$ なら $\frac{m}{n}$ を既約分数で表したとき分子は偶数．このことから (1) は示せる．

(2) で，$m=2^k-1$ のとき，${}_m\mathrm{C}_n$ がすべて奇数であることは，${}_{m+1}\mathrm{C}_n={}_m\mathrm{C}_n+{}_m\mathrm{C}_{n-1}$ と，${}_m\mathrm{C}_0=1$ から，${}_m\mathrm{C}_0$ は奇数で，(奇数)＋□＝(偶数) なら，□は奇数であることから示せる．

$m\neq 2^k-1$ 以外のときは ${}_m\mathrm{C}_n$ が偶数になる n があることを示さなければならない．

${}_m\mathrm{C}_n=\frac{m-n+1}{n}{}_m\mathrm{C}_{m-n+1}$ で，$m-n+1=2^k$ のときを考える．$m-n+1>n>0$ なら $\frac{m-n+1}{n}$ を既約分数で表したとき分子は偶数．このことから示せる．

【解答】

(1)　${}_m\mathrm{C}_n=\frac{2^k!}{n!(2^k-n)!}=\frac{2^k\cdot(2^k-1)!}{n\cdot(n-1)!(2^k-n)!}=\frac{2^k}{n}\cdot{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$．

ここで $n<2^k$ なので，n は 2^k で割り切れない．

よって，$n=2^i\cdot n'$ $(0\leqq i<k,\ n'$ は奇数$)$ と表されて，

$$ {}_m\mathrm{C}_n=2^{k-i}\cdot\frac{1}{n'}\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}. $$

n' は奇数なので $\dfrac{1}{n'}\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ は整数※．したがって，${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数．（証明終り）

(2)　$m=2^k,\ 2^k+1,\ 2^k+2,\ \cdots,\ 2^{k+1}-2$ に対して

$$
\begin{aligned}
{}_m\mathrm{C}_{m-2^k+1}&=\frac{m!}{(m-2^k+1)!(2^k-1)!}=\frac{2^k}{m-2^k+1}\cdot\frac{m!}{(m-2^k)!2^k!}\\
&=\frac{2^k}{m-2^k+1}\cdot{}_m\mathrm{C}_{2^k}.
\end{aligned}
$$

ここで，$m-2^k+1<2^k$ なので，$m-2^k+1$ は 2^k で割り切れない．

よって，$m-2^k+1=2^i\cdot n'$（$0\leqq i<k$，n' は奇数）と表されて，

$$
{}_m\mathrm{C}_{m-2^k+1}=2^{k-i}\cdot\frac{1}{n'}\cdot{}_m\mathrm{C}_{2^k}.
$$

n' は奇数なので $\dfrac{1}{n'}\cdot{}_m\mathrm{C}_{2^k}$ は整数※．したがって，${}_m\mathrm{C}_{m-2^k+1}$ は偶数．…(＊)

したがって，$m=2^k,\ 2^k+1,\ 2^k+2,\ \cdots,\ 2^{k+1}-2$ は条件をみたさない．

また，$m=2^k-1$ のとき

$$
\begin{cases}
{}_{2^k-1}\mathrm{C}_0=1,\\
{}_{2^k-1}\mathrm{C}_i+{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{i+1}={}_{2^k}\mathrm{C}_{i+1}:\text{偶数}\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k-2)
\end{cases}
$$

が成り立つので，

$$
{}_{2^k-1}\mathrm{C}_i\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ 2^k-1)\ \text{はすべて奇数．}
$$
…(＊＊)

(＊)，(＊＊)から，題意の条件をみたす自然数 m は

$$
m=2^k-1\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).
$$
…(答)

（補注）　パスカルの三角形において，偶数を 0，奇数を 1 と表してみると右図のようになる．

(1) は A の部分が 0 つまり偶数であることを示している．

(2) の (＊) は B の部分が 0 つまり偶数であることを示している．

(2) の (＊＊) は C の部分が 1 つまり奇数であることを示している．

以下同じパターン（三角形はだんだん大きくなってゆくが）を繰り返して行く．

```
                1                  …0
              1   1                …1
            1   0   1    B         …2
          1   1   1   1  C         …3
        1   0   0   0  A 1         …4
      1   1   0   0   1   1   B    …5
    1   0   1   0   1   0   1      …6
  1   1   1   1   1   1   1   1  C …7
1   0   0   0   0   0   0   0  A 1 …8
                …                  ⋮
```

【別解】

考え方

${}_m\mathrm{C}_n$ は $(x+1)^m$ の x^n の係数であることを使って，数学的帰納法で証明する．

(1) では $(x+1)^{2n}$ は $(x+1)^{2^{n+1}}=\{(x+1)^{2^n}\}^2$ のようにして順次作られる．$(x+1)^{2^n}$ の x^{2^n} の項と，1 を他の項と分けると，$(x+1)^{2^k}=x^{2^k}+2f_k(x)+1$ の形になり，$f_k(x)$ は整数係数の多項式だから，$2f_k(x)$ の係数はすべて偶数となる．

(2) では $2^{k-1}\leqq m\leqq 2^k-1$ の範囲について，$(x+1)^m$ のすべての係数が奇数になるのは $m=2^k-1$ のときだけであることを数学的帰納法により証明する．

$(x+1)^{2^l+t}=(x+1)^{2^l}(x+1)^t=x^{2^l}(x+1)^t+(x+1)^t+2f_l(x)(x+1)^2$ となるが，$2f_l(x)(x+1)^2$ はすべて偶数係数だから，$x^{2^l}(x+1)^t+(x+1)^t$ の係数の奇偶性について考えればよい．

※　$2^{k-i}\cdot\dfrac{1}{n'}\cdot N$ と N が整数で，n' は奇数であるから 2^{k-i} と互いに素，よって，N は n' で割り切れる．

(1) k を自然数とする．

$(x+1)^{2^k}=x^{2^k}+1+2f_k(x)$ をみたす整数係数の多項式 $f_k(x)$ が存在する ☆

ことを示せばよい．数学的帰納法を用いる．

(I) $k=1$ のとき $(x+1)^2=(x^2+1)+2x$ より ☆ は成り立つ．

(II) $k=l$ $(l\geqq 1)$ のとき ☆ が成り立つと仮定すると

$$(x+1)^{2^{l+1}}=\{(x+1)^{2^l}\}^2=(x^{2^l}+1+2f_l(x))^2$$
$$=x^{2^{l+1}}+1+4\{f_l(x)\}^2+2(x^{2^l}+2f_l(x)+2x^{2^l}f_l(x))$$

となり $f_{l+1}(x)=2\{f_l(x)\}^2+x^{2^l}+2f_l(x)+2x^{2^l}f_l(x)$ とおけばこれは整数係数の多項式なので $k=l+1$ のときも ☆ は成り立つ．

よって，$(1+x)^{2^k}$ の 1，x^{2^k} 以外の係数はすべて偶数． （証明終り）

(2) $m=2^k-1$（k は自然数）のときのみ ${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_m$ がすべて奇数と予想される．

$(x+1)^m$ の係数がすべて奇数となるのは $m=2^k-1$ しかない ★

ことを示せばよい．

m を $2^{k-1}\leqq m\leqq 2^k-1$ の区間に区切って，数学的帰納法で証明する．

(I) $k=1$ のとき $1\leqq m\leqq 1$ であり $(x+1)^m=(x+1)^1=x+1$ となる．この係数はすべて奇数なので ★ は成り立つ．

(II) $k=l$ $(l\geqq 1)$ のとき ★ が成り立つと仮定する．$k=l+1$ のとき，つまり $2^l\leqq m\leqq 2^{l+1}-1$ のとき $m=2^l+t$，$0\leqq t\leqq 2^l-1$ とおける．このとき，

$$(x+1)^m=(x+1)^{2^l+t}=(x+1)^{2^l}(x+1)^t=(x^{2^l}+1+2f_l(x))(x+1)^t$$
$$=x^{2^l}(x+1)^t+(x+1)^t+2f_l(x)(x+1)^t.$$

$t<2^l-1$ のときは $2^l>t+1$ なので，x^{t+1} の項は $2f_l(x)(x+1)^t$ の部分にしかないから x^{t+1} の係数は偶数であり，係数が偶数である項が存在する．

$t=2^l-1$ のときは $x^{2^l}(x+1)^t=x^{2^l}(x+1)^{2^l-1}$ の係数も $(x+1)^t=(x+1)^{2^l-1}$ の係数も，数学的帰納法の仮定よりすべて奇数である．$x^{2^l}(x+1)^{2^l-1}$ と $(x+1)^{2^l-1}$ に一致する項はなく，しかも x^n $(0\leqq n\leqq 2^{l+1}-1)$ のすべての項は $x^{2^l}(x+1)^{2^l-1}$ または $(x+1)^{2^l-1}$ の項であるので，$2f_2(x+1)^t$ は偶数係数であるから $(x+1)^n=(x+1)^{2^l+2^l-1}=(x+1)^{2^{l+1}-1}$ の係数はすべて奇数となる．よって $k=l+1$ のときも ★ は成り立つ．

(I)，(II) より，★ はすべての自然数について成り立つ．

題意の条件をみたす自然数 m は

$$m=2^k-1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$ …（答）

第 6 問

$\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx>8$ であることを示せ。ただし $\pi=3.14\cdots$ は円周率，$e=2.71\cdots$ は自然対数の底である。

分 野

数学Ⅲ：積分法，**数学Ⅰ**：不等式の証明

考え方

$\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx$ を出すところまでは標準．

e^π の近似値を求める部分が難しい．$e^{3.14}=e^3\cdot e^{0.14}$ とし，$e^x>x+1$ を利用．

【解答】

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi} e^x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi} e^x\,dx-\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx\right\}. \quad \cdots①$$

ここで，

$$\int_0^{\pi} e^x\,dx=\Big[e^x\Big]_0^{\pi}=e^{\pi}-1. \quad \cdots②$$

また，$I=\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$ とおくと，

$$\begin{aligned}
I&=\left[e^x\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x\sin 2x\,dx\\
&=-\frac{1}{2}\left\{\left[e^x\cdot\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} e^x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\,dx\right\}=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{e^{\pi}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\right\}\\
&=\frac{1}{4}(e^{\pi}-1)-\frac{1}{4}I.
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{5}{4}I=\frac{1}{4}(e^{\pi}-1).\quad \therefore\quad I=\frac{1}{5}(e^{\pi}-1). \quad \cdots③$$

①，②，③ から

$$\text{与式}=\frac{2}{5}(e^{\pi}-1).$$

したがって，示すべき不等式は

$$\frac{2}{5}(e^{\pi}-1)>8.\quad \text{すなわち}\ e^{\pi}>21 \quad \cdots④$$

である．ここで $x>0$ のとき

$$e^x>1+x \quad \cdots(*)$$

が成り立つことに注意すると

$$e^{\pi}>e^{3.14}=e^3\cdot e^{0.14}>(2.7)^3(1+0.14)>19.6\times 1.1>21.5>21$$

であるから，④ は成り立つ．よって，$\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx>8$. （証明終り）

（注） (*) は $f(x)=e^x-(1+x)$ とおくと，$x>0$ で $f'(x)=e^x-1>0$，$f(0)=0$ であることから導かれる．

1999 年　後期・理科 I 類

第 1 問

(1)　n を正の整数とする。$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin nx}{\sin x} & -\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2},\quad x \neq 0 \\ c_n & x=0 \end{cases}$$

とおくことにより定義される関数 $f_n(x)$ が連続関数となるように定数 c_n の値を定めよ。

(2)　$f_3(x)$ は $\cos x$，$\cos 2x$ 等を用いて表せることを示し，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,dx$$

の値を求めよ。

(3)　任意の正の整数 n に対して，定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx$$

の値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，関数の連続

考え方

連続の定義にしたがって c_n を求める．

(3) で $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx$ を直接求めることは困難だが，これらがすべて等しいことは容易に示せる．

【解答】

(1)　$x \neq 0$ で $f_n(x)$ が連続であることは明らか．

$x=0$ で連続であるためには $\lim_{x\to 0} f_n(x)=f_n(0)=c_n$ が条件．

$$\lim_{x\to 0} f_n(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}\,\frac{x}{\sin x}n=n.$$

$$\therefore\quad c_n=n.$$
…(答)

(2)　$x \neq 0$ のとき，$f_3(x)=\dfrac{\sin 3x}{\sin x}=\dfrac{3\sin x-4\sin^3 x}{\sin x}=3-4\sin^2 x=2\cos 2x+1.$

$x=0$ のとき，$f_3(x)=3.$

よって，$f_3(x)=2\cos 2x+1.$　　（証明終り）

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_3(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos 2x+1)\,dx=\Big[\sin 2x+x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi.$$
…(答)

(3)　$I_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx$ とおく．

$\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x=2\cos 2nx\sin x$ から，

$$f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)=\begin{cases} 2\cos 2nx & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ (2n+1)-(2n-1)=2 & (x=0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

よって，$f_{2n+1}(x)-f_{2n-1}(x)=2\cos 2nx.$

$$I_n - I_{n-1} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n-1}(x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2nx\,dx = 2\left[\frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

よって $I_n = I_{n-1}$．また，(2) より $I_1 = \pi$ だから，

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_{2n+1}(x)\,dx = \pi. \qquad \cdots(答)$$

(注)　(1) で定義した $f_n(x)$ および，それが連続であるという要請は (2)，(3) でも有効であるとして解答した．

第2問

座標平面上の原点を O(0, 0) とする。また x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。

(1)　t を正の実数とする。点 P$(-1, 0)$ を通り，傾きが t の直線と単位円 $x^2+y^2=1$ との P 以外の交点を Q(t) とする。Q(t) の座標を求めよ。つぎに $0<s<t$ をみたす 2 つの実数 s，t に対し，線分 Q(s)Q(t) の長さを求めよ。

(2)　$\angle$Q(s)PO$=\alpha$，$\angle$Q(t)PO$=\beta$ とし，

$$u = \tan\frac{\alpha}{2}, \quad v = \tan\frac{\beta}{2}$$

とおく。もし，u，v がともに有理数ならば，線分 Q(s)Q(t) の長さもまた有理数となることを示せ。

(3)　任意に与えられた 3 以上の整数 n に対し，つぎの条件 (C1)，(C2)，(C3) をすべてみたす n 個の異なる点 A_1，A_2，…，A_n が，座標平面上に存在することを証明せよ。

(C1)　A_1，A_2，…，A_n はすべて格子点である。

(C2)　A_1，A_2，…，A_n のどの異なる 3 点も一直線上にない。

(C3)　A_1，A_2，…，A_n のどの異なる 2 点 A_i，A_j に対しても，線分 A_iA_j の長さは整数である。

分　野

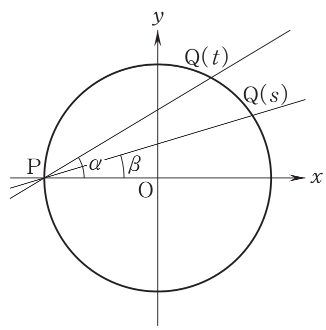
数学Ⅱ：図形と方程式，**数学A**：整数

考え方

(1)，(2) は (3) のための準備で，誘導に従えばよい．

(3) は (2) で有理数 u から Q(s) を導いたように，n 個の有理数 u_1，u_2，u_3，…，u_n から n 個の点 Q(s_1)，Q(s_2)，Q(s_3)，…，Q(s_n) を作ると，各 Q(s_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$ の座標は有理数で Q(s_i)Q(s_j) の長さは有理数である．これらの座標を適当に整数倍にした点を取ればよい．

【解答】



(1)　P$(-1, 0)$ を通り，傾きが t の直線は $y=t(x+1)$．

$x^2+y^2=1$ に代入して，

$$x^2-1+t^2(x+1)^2=(x+1)\{(1+t^2)x-(1-t^2)\}=0.$$

$x \neq -1$ のとき，$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，　$y=\dfrac{2t}{t^2+1}$．

よって，Q(t) の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$．　$\cdots$(答)

同様に Q$(s)\left(\dfrac{1-s^2}{1+s^2}, \dfrac{2s}{1+s^2}\right)$．

$$\mathrm{Q}(s)\mathrm{Q}(t)^2=\left\{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{1-s^2}{1+s^2}\right\}^2+\left\{\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2s}{1+s^2}\right\}^2$$
$$=\frac{\{(1+s^2)(1-t^2)-(1-s^2)(1+t^2)\}^2+\{(1+s^2)2t-2s(1+t^2)\}^2}{(1+s^2)^2(1+t^2)^2}$$
$$=\frac{4(t-s)^2}{(1+t^2)(1+s^2)}.$$

$0<s<t$ より，

$$\mathrm{Q}(s)\mathrm{Q}(t)=\frac{2(t-s)}{\sqrt{(1+s^2)(1+t^2)}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\mathrm{PQ}(s)$ の傾きは $s=\tan\alpha=\dfrac{2\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2u}{1-u^2}$．同様に $t=\dfrac{2v}{1-v^2}$．

これを，(1) の結果に代入すると，

$$\mathrm{Q}(s)\mathrm{Q}(t)=\frac{2\left(\dfrac{2v}{1-v^2}-\dfrac{2u}{1-u^2}\right)}{\sqrt{\left\{1+\left(\dfrac{2u}{1-u^2}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\dfrac{2v}{1-v^2}\right)^2\right\}}}=\frac{4(v-u)(1+uv)}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

よって，u，v が有理数なら，線分 $\mathrm{Q}(s)\mathrm{Q}(t)$ の長さも有理数である．

(3) x 座標，y 座標が有理数であるような点を有理点とよぶ．

まず，$\tan\dfrac{\alpha_i}{2}=u_i$，$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ が有理数のとき，$\mathrm{P}(-1,\ 0)$ を通り，傾きが $t_i=\tan\alpha_i$ の直線と単位円が P 以外で交わる点を $\mathrm{Q}(t_i)$ とする．

$$t_i=\tan\alpha_i=\frac{2\tan\dfrac{\alpha_i}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\alpha_i}{2}}=\frac{2u_i}{1-{u_i}^2}$$

が有理数で，(1) から $\mathrm{Q}(t_i)$ の座標が $\left(\dfrac{1-{t_i}^2}{1+{t_i}^2},\ \dfrac{2t_i}{1+{t_i}^2}\right)$ だから，$\mathrm{Q}(t_i)$ は有理点．また，線分 $\mathrm{Q}(t_i)\mathrm{Q}(t_j)$ $(i\neq j)$ の長さも (1) から有理数である．

したがって，u_1，u_2，u_3，$\cdots$，u_n が相異なる有理数で $0<u_i<1$ をみたすとき，$t_i=\tan\alpha>0$ となるので，$\mathrm{Q}(t_1)$，$\mathrm{Q}(t_2)$，$\mathrm{Q}(t_3)$，$\cdots$，$\mathrm{Q}(t_n)$ は相異なる半円 $x^2+y^2=1$，$y>0$ 上の点である．したがって，これらのどの異なる 3 点も一直線上にない．

ここで，$\mathrm{Q}(t_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots n)$ の x 座標 y 座標および，$\mathrm{Q}(t_i)\mathrm{Q}(t_j)$ (i，j は整数で $1\leqq i<j\leqq n$) の長さを既約分数で表したときの分母の最小公倍数を L とし，$\mathrm{Q}(t_i)$ の x 座標，y 座標をそれぞれ L 倍した座標ををもつ点を A_i とすると，A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_n は条件 (C1)，(C2)，(C3) をみたす．

なぜなら，$\mathrm{Q}(t_i)$ の x 座標，y 座標を L 倍すると，L が x 座標，y 座標の分母の倍数であるから，A_i の x 座標，y 座標は整数であり，A_i は格子点である．よって，(C1) をみたす．

また，A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ は原点 O を相似中心として，$\mathrm{Q}(t_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ を L 倍に相似拡大した点列で，$\mathrm{Q}(t_i)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ のどの異なる 3 点も 1 直線上にないから，A_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ のどの異なる 3 点も 1 直線上にない．したがって，(C2) をみたす．

また，L は $\mathrm{Q}(t_i)\mathrm{Q}(t_j)$ の長さの分母の倍数でもあるから $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j$ の長さも整数である．よって，(C3) をみたす．

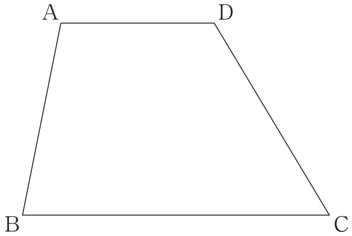
以上から (C1)，(C2)，(C3) をみたす A_1，A_2，A_3，$\cdots$，A_n は存在する．　　（証明終り）

第3問

座標平面上にある2つの四角形ABCDと$A'B'C'D'$が相似であるとは，対応する4つの頂点における内角がそれぞれ等しく，かつ対応する辺の長さの比がすべて等しいこととする。このとき

$$\square ABCD \backsim \square A'B'C'D'$$

と書く。ただし，四角形ABCDと書くときには，4つの頂点A，B，C，Dは図のようにつねに時計と反対回りに並んでいるものとし，また四角形は周および内部を込めて考えるものとする。



四角形$A_0B_0C_0D_0$が与えられたとき，この四角形から出発して，任意の整数nに対して四角形$A_nB_nC_nD_n$を以下のように帰納的に定める。

(I) $n=0$ のときは，与えられた四角形$A_0B_0C_0D_0$とする。

(II) $n>0$ のときは，四角形$A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$まで定まったとして，四角形$A_nB_nC_nD_n$を

$$A_n=D_{n-1},\quad B_n=C_{n-1} \text{ かつ}$$
$$\square A_nB_nC_nD_n \backsim \square A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$$

となる四角形として定める。

(III) $n<0$ のときは，0，-1，… と負の向きに進んで，四角形$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$まで定まったとして，四角形$A_nB_nC_nD_n$

$$D_n=A_{n+1},\quad C_n=B_{n+1} \text{ かつ}$$
$$\square A_nB_nC_nD_n \backsim \square A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$$

となる四角形として定める。

こうして定まった四角形$A_nB_nC_nD_n$をK_nと書くことにする。

さて，座標平面上の3点

$$A_0(2,\ 1),\quad B_0(8,\ 4),\quad P(4,\ 12)$$

を考える。原点をOとし，線分OP上に原点以外の1点C_0をとる。点A_0から線分B_0C_0に平行にひいた直線と，線分OPとの交点をD_0とする。このようにして定まる四角形$A_0B_0C_0D_0$から出発して，上記のようにして得られる四角形の系列

$$\cdots,\ K_{-2},\ K_{-1},\ K_0,\ K_1,\ K_2,\ \cdots$$

について考える。

(1) $\angle B_0OP$を求めよ。

(2) 線分OP上のある点C_0をえらび，それにより定まる四角形$A_0B_0C_0D_0$から出発して，四角形の系列$\cdots$，K_{-2}，K_{-1}，K_0，K_1，K_2，$\cdots$を作ったところ，ある0でない整数nが存在して，$K_n=K_0$となったという。このとき，点C_0の座標を求めよ。また，$K_n=K_0$となる整数nの値をすべて求めよ。

(3) 線分OP上のある点C_0をえらび，それにより定まる四角形$A_0B_0C_0D_0$から出発して，四角形の系列$\cdots$，K_{-2}，K_{-1}，K_0，K_1，K_2，$\cdots$を作ったところ，これら四角形が座標平面から原点を除いた部分を，辺と頂点以外には互いに重なることなく，すき間なくおおったという。このような性質をもつ点C_0をすべて求め，それらの座標を記せ。またそれらの場合のおのおのについて，点$(100,\ 50)$がK_nに含まれるような整数nを求めよ。

分　野

数学B：複素数平面，**数学A**：数列，**数学 I**：平面図形

考え方

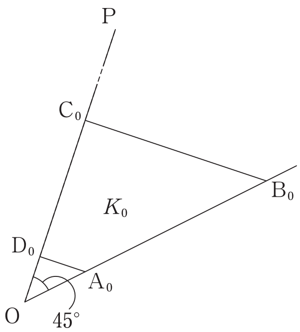
$\angle \mathrm{B_0OP}=\dfrac{\pi}{4}$ は容易に求められる．

O，A_n，B_n および，O，D_n，C_n が同一直線上にあり，$\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n /\!/ \mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ であるから，この相似四角形は，$\square \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転と適当な実数倍することで，$\square \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{D}_{n+1}$ が得られるような関係になっている．したがって複素数または行列を使うと扱いやすい．

回転角が $\dfrac{\pi}{4}$ だから 8 回の回転と実数倍でもとの半直線まで戻るので，K_0 と K_8 の位置関係が重要になる．

【解答】

(1)　複素数平面で考える．A_n，B_n，C_n，D_n，P を表す複素数をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n，p とおく．



$$b_0=8+4i,\quad p=4+12i.$$

$$\frac{p}{b_0}=\frac{4+12i}{8+4i}=\frac{1+3i}{2+i}=1+i.$$

$$\arg\frac{p}{b_0}=\frac{\pi}{4}$$

だから，$\theta=\angle \mathrm{B_0OP}=\dfrac{\pi}{4}$.　　　…(答)

(注)　tan の加法定理，あるいは三角形 $\mathrm{OB_0P}$ が直角二等辺三角形であることからも $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ は求められる．

(2)　$\mathrm{C_0}$ は線分 OP 上の点だから $c_0=tp$ $(0\leqq t\leqq 1)$．$\mathrm{D_0}$ は $\mathrm{OC_0}$ 上にあるから，$d_0=kc_0$ (k は実数)．
また，$\mathrm{B_0C_0} /\!/ \mathrm{A_0D_0}$ だから，$d_0-a_0=M(c_0-b_0)$ (M は実数)．
$b_0=4a_0$，$d_0=kc_0$ だから $kc_0-a_0=M(c_0-4a_0)$．$(k-M)c_0=(1-4M)a_0$．
$\mathrm{OA_0}$，$\mathrm{OC_0}$ は平行でなく，$k-M$，$1-4M$ は実数だから，$k-M=1-4M=0$．よって，$k=M=\dfrac{1}{4}$.

よって，$d_0=\dfrac{1}{4}c_0$.

$$\therefore\quad c_0=tp=4t+12ti,\quad d_0=\frac{1}{4}c_0=t+3ti.$$

$b_0=4a_0$，$c_0=4d_0$ である．(II) から $a_1=d_0$，$b_1=c_0$ である．

$$\frac{b_1}{b_0}=\frac{c_0}{b_0}=\frac{tp}{b_0}=(1+i)t=r$$

とおく．$r=\sqrt{2}\,t\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ だから，複素数 x に対して，$y=rx$ とすると x を表す点を原点を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して原点を中心に $\sqrt{2}\,t$ 倍した点になる．

$K_1 \backsim K_0$ であり，$b_1=rb_0$，$a_1=ra_0$ であるから，$c_1=rc_0$，$d_1=rd_0$ が推定される．
ここで任意の整数 n に対して

$$a_n=r^n a_0,\quad b_n=r^n b_0,\quad c_n=r^n c_0,\quad d_n=r^n d_0$$

とすると，$b_n=r^nb_0=4r^na_0=4a_n$，$c_n=r^nc_0=4r^nd_0=4d_n$ で，$d_0=a_1=ra_0$ だから，$d_{n-1}=r^{n-1}d_0=r^na_0=a_n$ だから $\mathrm{A}_n=\mathrm{D}_{n-1}$ が任意の整数に対して成り立つ．

また，$c_{n-1}=4d_{n-1}=4a_n=b_n$ より，$\mathrm{B}_n=\mathrm{C}_{n-1}$．

また，

$$\frac{a_n-b_n}{a_n-d_n}=\frac{ra_{n-1}-rb_{n-1}}{ra_{n-1}-rd_{n-1}}=\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{a_{n-1}-d_{n-1}},$$

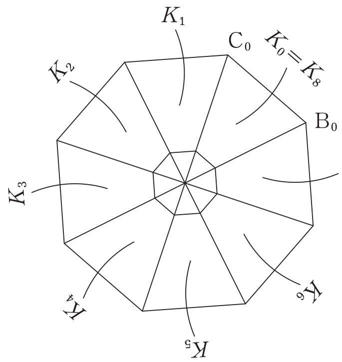
同様に，

$$\frac{b_n-c_n}{b_n-a_n}=\frac{b_{n-1}-c_{n-1}}{b_{n-1}-a_{n-1}},\quad \frac{c_n-d_n}{c_n-b_n}=\frac{c_{n-1}-d_{n-1}}{c_{n-1}-b_{n-1}},\quad \frac{d_n-a_n}{d_n-c_n}=\frac{d_{n-1}-a_{n-1}}{d_{n-1}-c_{n-1}}$$

だから，$\square\,\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ と $\square\,\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$ の対応する辺の比は等しく，対応する角も等しい．したがって

$$\square\,\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n \backsim \square\,\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$$

このnは任意の整数だから，(Ⅱ)，(Ⅲ) の関係をともにみたしている．



$|a_n|=|r|^n|a_0|$ だから $|r|\neq 0$ のとき，$n\neq 0$ とすると，$|a_n|\neq|a_0|$ となり，$a_n\neq a_0$ となる．したがって $K_n\neq K_0$ となる．したがって $K_n=K_0$ であるためには $|r|=\sqrt{2}\,t=1$，つまり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ でなければならない．また，このとき，

$$r=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

であるから $r^8=1$ となり，$K_8=K_0$ となる．

したがって，このときの C_0 の座標は $(4t,\ 12t)=(2\sqrt{2},\ 6\sqrt{2})$．

…(答)

また $K_n=K_0$ となる n は $8m$（mは整数）である．$n\neq 8m$ のとき K_n は K_i（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$）のいずれかと等しく，K_0 とは等しくない．したがって，求める n は

$$n=8m\quad (m\text{ は整数}).$$

…(答)

(3) (2) の r を使って考える．r をかけることは，$\dfrac{\pi}{4}$ 回転を含むから O，A_0，A_n 一直線上にあるのは n が8の倍数のとき．

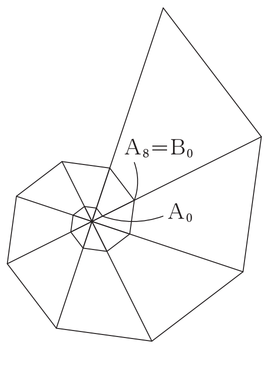
$$r^8=(\sqrt{2}\,t)^8=16t^8.$$

K_8 の位置について考える，平面をすき間なくおおいつくすには K_0 と K_8 は互いに辺を共有してしかも隣り合っていなければならない．そのようになるためには，$\mathrm{A}_8=\mathrm{B}_0$ であるか，$\mathrm{A}_0=\mathrm{B}_8$ でなければならない．さもなければ，2辺 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ と $\mathrm{A}_8\mathrm{B}_8$ の間が重なるか，2辺 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ と $\mathrm{A}_8\mathrm{B}_8$ の間にすき間ができてしまう．

$$a_8=b_0=4a_0 \text{ または } a_0=b_8=4a_8$$

であり，$a_8=16t^8a_0$ であるから，

$$16t^8=4 \text{ または } 1=4\times16t^8.\quad \therefore\quad t=\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \text{ または } t=\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}.$$



$t=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$ のとき，$b_0=a_8$ から $b_n=a_{n+8}$，$c_n=b_{n+1}=a_{n+9}=d_{n+8}$ となり，K_n と K_{n+8} は $\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$ の内部にあり，互いに辺 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ と $\mathrm{A}_{n+8}\mathrm{D}_{n+8}$ を共有している．したがって，

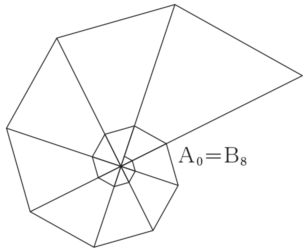
$$\cdots,\ K_{n-16},\ K_{n-8},\ K_n,\ K_{n+8},\ K_{n+16},\ \cdots$$

は $\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OC}_n$ 内の原点以外をおおいつくす．このようにして $\angle\mathrm{A}_0\mathrm{OC}_0$，

$\angle A_1OC_1$, $\angle A_2OC_2$, …, $\angle A_7OC_7$ をおおいつくすから

$$\cdots,\ K_{-2},\ K_{-1},\ K_0,\ K_1,\ K_2,\ \cdots$$

は平面上の原点以外をおおいつくす．



同様に，$t=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$ のときも，K_n と K_{n+8} が辺 A_nD_n と $B_{n+8}C_{n+8}$ を共有するから，平面上の原点以外をおおいつくす．

よって，求める C_0 の座標は

$$t=\frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} \text{ のとき } (2^{\frac{7}{4}},\ 3\cdot2^{\frac{7}{4}}),\quad t=\frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} \text{ のとき } (2^{\frac{5}{4}},\ 3\cdot2^{\frac{5}{4}}).\qquad \cdots(\text{答})$$

$100+50i=50(2+i)=50a_0$.

$t=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$ のとき $r^8=16t^8=4$.

$$(r^8)^m \leqq 50<(r^8)^{m+1} \text{ つまり，} 4^m \leqq 50<4^{m+1}$$

をみたす整数 m を求める．$4^2=16<50<4^3=64$ から $m=2$.

よって，$r^{16}<50<r^{24}$.

よって，(100, 50) は半直線 OA_0 上の線分 $A_{16}A_{24}$，つまり，線分 $A_{16}B_{16}=D_{15}C_{15}$ 上の点である．

したがって，(100, 50) は K_{15}，K_{16} に含まれる．

$t=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$ のとき $r^8=16t^8=4^{-1}$.

$$(r^8)^{m+1} \leqq 50<(r^8)^m \text{ つまり，} 4^{-m-1} \leqq 50<4^{-m}$$

をみたす整数 m を求める．$4^2=16<50<4^3=64$ から $-m-1=2$．$m=-3$

よって，$r^{-16}<50<r^{-24}$．よって，(100, 50) は半直線 OA_0 上の線分 $A_{-16}A_{-24}$，つまり，線分 $A_{-16}B_{-16}=D_{-17}C_{-17}$ 上の点である．

したがって，(100, 50) は K_{-17}，K_{-16} に含まれる．

まとめて，

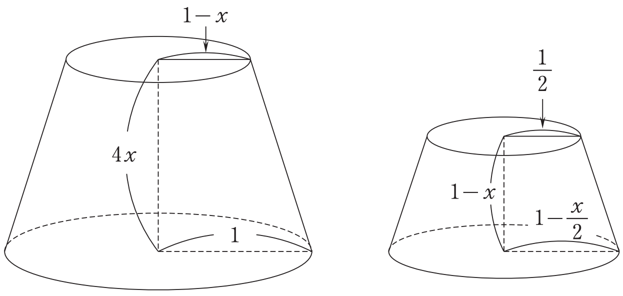
$$\begin{cases} C_0(2^{\frac{7}{4}},\ 3\cdot2^{\frac{7}{4}}) \text{ のとき，(100, 50) は } K_{15},\ K_{16} \text{ に含まれ，} \\ C_0(2^{\frac{5}{4}},\ 3\cdot2^{\frac{5}{4}}) \text{ のとき，(100, 50) は } K_{-17},\ K_{-16} \text{ に含まれる．} \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

（注）　この時期は教科書で複素数平面を扱っているので，解答も複素数で答えている．

2000 年　前期・文科

第 1 問

図のように底面の半径 1，上面の半径 $1-x$，高さ $4x$ の直円すい台 A と，底面の半径 $1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径 $\dfrac{1}{2}$，高さ $1-x$ の直円すい台 B がある。ただし，$0 \leqq x \leqq 1$ である。A と B の体積の和を $V(x)$ とするとき，$V(x)$ の最大値を求めよ。



分　野

数学Ⅱ：整式の微分，**数学B**：立体図形

考え方

円錐台の体積は延長してできる 2 つの円錐の体積の差として求められる．ただし，円柱になるときは別途計算しなければならない．

【解答】

A，B のそれぞれの体積を V_A，V_B とする．ただし，高さが 0 の場合体積は 0 とする．

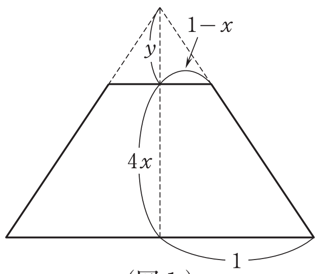
$0<x<1$ のとき，

A について，右の（図 1 ）により，

$$y:(1-x)=(y+4x):1.$$

よって，$y=4(1-x)$.

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2(y+4x)-\frac{1}{3}\pi(1-x)^2 y \\ &= \frac{1}{3}\pi\{4-4(1-x)^3\} \\ &= \frac{1}{3}\pi(4x^3-12x^2+12x). \end{aligned}$$



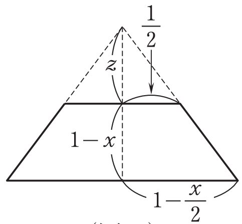
（図 1 ）

B について，右の（図 2 ）により，

$$z:\frac{1}{2}=(z+1-x):\left(1-\frac{x}{2}\right).$$

よって，$z=1$.

$$\begin{aligned} V_B &= \frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{x}{2}\right)^2(z+1-x)-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot z \\ &= \frac{1}{3}\pi\left\{\frac{1}{4}(2-x)^3-\frac{1}{4}\right\} \\ &= \frac{1}{12}\pi(-x^3+6x^2-12x+7). \end{aligned}$$



（図 2 ）

よって

$$V(x)=V_A+V_B=\frac{\pi}{12}(15x^3-42x^2+36x+7). \quad \cdots①$$

$x=0$ のときは $V_A=0$，$V_B=\frac{7}{12}\pi$，$x=1$ のときは $V_A=\frac{4}{3}\pi$，$V_B=0$ となり，これらは ① をみたすので，① は $0\leqq x\leqq 1$ で定義できる．

$$V'(x)=\frac{\pi}{4}(15x^2-28x+12)=\frac{\pi}{4}(5x-6)(3x-2).$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗		↘	

よって，$V(x)$ は $x=\frac{2}{3}$ で最大となる．

最大値は

$$V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{151}{108}\pi. \quad \cdots(答)$$

（注）　連続的な変化なので，円板，円錐，円柱も円錐台の特別な場合として考えることができる．

第 2 問

xy 平面内の領域

$$-1\leqq x\leqq 1,\quad -1\leqq y\leqq 1$$

において

$$1-ax-by-axy$$

の最小値が正となるような定数 a，b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域，**数学Ⅰ**：関数

考え方

与式は x，y についての 1 次式だから，最小になるのは x，y がそれぞれ -1 か 1 のとき．あとは丹念に場合分けをする．

【解答】

$$-1\leqq x\leqq 1, \quad \cdots①$$
$$-1\leqq y\leqq 1. \quad \cdots②$$

$F=1-ax-by-axy$ とおく．

y を ② の範囲で固定する．

このとき，F は x の関数となり，x に関して整理すると，

$$F=-a(1+y)x-by+1.$$

② のとき，$1+y\geqq 0$ に注意すると，

(i)　$a\geqq 0$ のとき，

$-a(1+y)\leqq 0$ となるから，F は単調減少となり，① の範囲において，$x=1$ で最小となる．その最小値は

$$-a(1+y)-by+1=-(a+b)y+1-a. \quad \cdots③$$

次に y を変数として考える．③ のグラフを考えると，傾き $-(a+b)$ の直線になる．

(i-a)　$a+b \geqq 0$ のとき，

③ は ② の範囲で単調に減少するから，$y=1$ で最小となる．その最小値は

$$-(a+b)+1-a=-2a-b+1.$$

(i-b)　$a+b<0$ のとき，

③ は ② の範囲で単調に増加するから，$y=-1$ で最小となる．その最小値は

$$(a+b)+1-a=b+1.$$

(ii)　$a<0$ のとき，

$-a(1+y) \geqq 0$ となるから，F は単調増加となり，① の範囲において，$x=-1$ で最小となる．その最小値は

$$a(1+y)-by+1=(a-b)y+1+a. \quad \cdots④$$

次に y を変数として考える．④ のグラフを考えると，傾き $(a-b)$ の直線になる．

(ii-a)　$a-b \geqq 0$ のとき，

④ は ② の範囲において単調に増加するから，$y=-1$ で最小となる．その最小値は

$$-(a-b)+1+a=b+1.$$

(ii-b)　$a-b<0$ のとき，

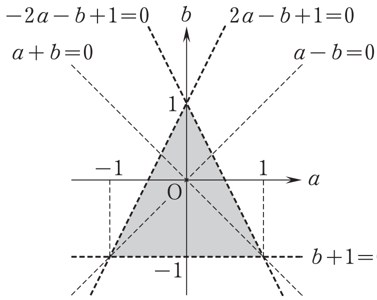
先ほどの最小値は ② の範囲において単調に減少するから，$y=1$ で最小となる．その最小値は

$$(a-b)+1+a=2a-b+1.$$

したがって，最小値が正になる a，b の条件は，次のようになる．

$$\begin{cases} -2a-b+1>0 & (a \geqq 0,\ a+b \geqq 0), \\ b+1>0 & (a \geqq 0,\ a+b<0), \\ b+1>0 & (a<0,\ a-b \geqq 0), \\ 2a-b+1>0 & (a<0,\ a-b<0). \end{cases}$$

以上を ab 平面上に図示すると次図の網掛部のようになる．(ただし，境界は含まない)



…(答)

(注)　x についても y についても単調なのだから $(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ のどこかで最小になる．

これらすべての点で正であればよい．

$$\therefore \quad 1-2a-b>0, \quad 1+b>0, \quad 1+2a-b>0, \quad 1+b>0.$$

これを図示すれば上図のようになる．

第3問

正四面体の各頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1秒ごとに他の3つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ で表す。

$$P_1(0)=\frac{1}{4},\quad P_2(0)=\frac{1}{2},\quad P_3(0)=\frac{1}{8},\quad P_4(0)=\frac{1}{8}$$

とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を求めよ。

分　野

数学 I ：確率，　**数学 A** ：数列，漸化式

考え方

漸化式を立てて，それを解く．確率の和が1であることを利用する．

【解答】

題意から

$$\begin{cases} P_1(n+1)= \frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n)+\frac{1}{3}P_4(n), & \cdots① \\ P_2(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_3(n)+\frac{1}{3}P_4(n), & \cdots② \\ P_3(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_4(n), & \cdots③ \\ P_4(n+1)=\frac{1}{3}P_1(n)+\frac{1}{3}P_2(n)+\frac{1}{3}P_3(n). & \cdots④ \end{cases}$$

動点 X はつねにどこかの頂点にあるから

$$P_1(n)+P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)=1. \qquad \cdots⑤$$

①，⑤ より

$$P_1(n+1)=\frac{1}{3}\{P_2(n)+P_3(n)+P_4(n)\}=\frac{1}{3}\{1-P_1(n)\}.$$

$$\therefore\quad P_1(n+1)-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left\{P_1(n)-\frac{1}{4}\right\}.$$

$$\therefore\quad P_1(n)-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left\{P_1(0)-\frac{1}{4}\right\}.$$

$P_1(0)=\frac{1}{4}$ より $P_1(n)-\frac{1}{4}=0.$

$$\therefore\quad P_1(n)=\frac{1}{4}. \qquad \cdots(答)$$

同様に ②，⑤ から

$$P_2(n+1)=\frac{1}{3}\{1-P_2(n)\}.\quad \therefore\quad P_2(n)-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{3}\right)^n\left\{P_2(0)-\frac{1}{4}\right\}.$$

$P_2(0)=\frac{1}{2}$ より

$$P_2(n)-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\therefore\quad P_2(n)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \qquad \cdots(答)$$

（参考）③，④，⑤ と $P_3(0)=P_4(0)=\frac{1}{8}$ より，$P_3(n)=P_4(n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$

第 4 問

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点 $P(\alpha)$，$Q(\beta)$ を考える。$P(\alpha)$，$Q(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $R(w)$ とする。ただし，複素数 γ が表す点 C を $C(\gamma)$ とかく。このとき，

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$ が中心 $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである。」

を示せ。

分　野

数学B：複素数平面

考え方

$P(\alpha)$，$Q(\beta)$ を通る直線上に $R(w)$ がある条件は $\dfrac{w-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数であることである.

また OR が PQ に垂直な条件は $\dfrac{w}{\beta-\alpha}$ が純虚数（または 0）であることである.

このことから，P，Q が中心 $A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある条件 $\left|\alpha-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\left|\beta-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ を導く.

【解答】

$\alpha \neq 0$，$\beta \neq 0$，$\alpha \neq \beta$ の下で考える.

点 $R(w)$ が直線 PQ 上にあるから $\dfrac{w-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数.

$$\therefore\quad \frac{w-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\overline{w}-\overline{\alpha}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}.$$

つまり

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})w-(\beta-\alpha)\overline{w}-\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=0 \qquad \cdots①$$

をみたす.

点 $R(w)$ は O を通って $\overrightarrow{PQ}$ に垂直な直線上の点であるから，$\dfrac{w}{\beta-\alpha}$ は純虚数（または 0）である.

$$\therefore\quad \frac{w}{\beta-\alpha}+\frac{\overline{w}}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=0.$$

つまり

$$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})w+(\beta-\alpha)\overline{w}=0 \qquad \cdots②$$

をみたす.

①，② から

$$w=\frac{1}{2}\,\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}
w=\alpha\beta &\iff \frac{1}{2}\,\frac{\alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta}{\overline{\beta}-\overline{\alpha}}=\alpha\beta\\
&\iff \alpha\overline{\beta}-\overline{\alpha}\beta=2\alpha\beta(\overline{\beta}-\overline{\alpha})\\
&\iff \left(|\alpha|^2-\frac{1}{2}\overline{\alpha}\right)\beta=\alpha\left(|\beta|^2-\frac{1}{2}\overline{\beta}\right)\\
&\iff \left(|\alpha|^2-\frac{1}{2}\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\right)\beta=\alpha\left(|\beta|^2-\frac{1}{2}\overline{\beta}-\frac{1}{2}\beta\right). \qquad \cdots(*)
\end{aligned}$$

となる．ここで，α，β の係数は

$$|\alpha|^2-\frac{1}{2}\overline{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha=\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{1}{4},\quad |\beta|^2-\frac{1}{2}\overline{\beta}-\frac{1}{2}\beta=\left|\beta-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{1}{4}$$

であり，ともに実数である．

$w=\alpha\beta$ のとき(*)において，α，β の係数の少なくとも一方が 0 でないとすると，O，P(α)，Q(β) は一直線上にあることになり，直線 PQ は原点を通る．したがって O から下ろして垂線の足 R は原点になる．これは $w=\alpha\beta=0$ となり P，Q が原点と異なるという題意に反する．

$$\therefore\quad \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{1}{4}=\left|\beta-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{1}{4}=0.$$

つまり，P，Q は $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にある．

また，(*)より P，Q が A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあるとき，$w=\alpha\beta$ であることは明らか．

（証明終り）

【別解 1】

$$\alpha\neq 0,\quad \beta\neq 0.$$

R は原点 O から直線 l へ下ろした垂線の足だから $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QR}}$（または R=O，R=P，R=Q）．

複素数で表すと

$$w\perp(w-\alpha),\quad w\perp(w-\beta)\quad（または，w=0,\ w=\alpha,\ w=\beta）.\qquad \cdots①$$

まず，$w=\alpha\beta$ のとき P，Q が A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることを示す．

$w=\alpha\beta\neq 0$．① より $\dfrac{w-\alpha}{w}=\dfrac{\alpha\beta-\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{\beta-1}{\beta}$，$\dfrac{w-\beta}{w}=\dfrac{\alpha\beta-\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ は純虚数または 0．

$$\therefore\quad \frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}}=0,\quad \frac{\beta-1}{\beta}+\frac{\overline{\beta}-1}{\overline{\beta}}=0.$$

$$\therefore\quad 2\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}=0,\quad 2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}=0.$$

$$\therefore\quad \left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

よって P(α)，Q(β) は $\mathrm{A}\left(\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にある．（証明終り）

次に P，Q が A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあるとき，$w=\alpha\beta$ であることを示す．

P(α)，Q(β) が A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあるから，

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\quad \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha}=0,\quad 2\beta\overline{\beta}-\beta-\overline{\beta}=0.$$

$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ より

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}+\frac{\overline{\alpha}-1}{\overline{\alpha}}=0,\quad \frac{\beta-1}{\beta}+\frac{\overline{\beta}-1}{\overline{\beta}}=0.$$

よって，$\dfrac{\alpha-1}{\alpha}=\dfrac{\alpha\beta-\beta}{\alpha\beta}$，$\dfrac{\beta-1}{\beta}=\dfrac{\alpha\beta-\alpha}{\alpha\beta}$ は純虚数または 0．

$\gamma=\alpha\beta$ とすると，「$\dfrac{\gamma-\beta}{\gamma}$ は純虚数または 0」かつ「$\dfrac{\gamma-\alpha}{\gamma}$ は純虚数または 0」．

$\alpha\neq 1$ かつ $\beta\neq 1$ ならば

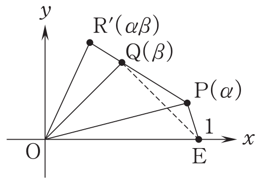
$$\therefore\quad \gamma-\beta\perp\gamma,\quad \gamma-\alpha\perp\gamma.$$

したがって，$\gamma=\alpha\beta$ を表す点は原点 O から直線 PQ へ下ろして垂線の足 R に他ならない．よって，$w=\alpha\beta$.

また，$\alpha=1$ ならば $\beta\neq1$ で $\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ $\therefore$ $w=\beta=\alpha\beta$. $\beta=1$ のときも同様に $w=\alpha=\alpha\beta$.

以上から $w=\alpha\beta$ である． （証明終り）

(注) 図形的にいうと $\mathrm{R}'(\alpha\beta)$，E(1) という点を取ると $\triangle\mathrm{OEP}$ と $\triangle\mathrm{OQR}'$，$\triangle\mathrm{OEQ}$ と $\triangle\mathrm{OPR}'$ は相似になる．



したがって，$\angle\mathrm{OR'P}=\angle\mathrm{OQE}$，$\angle\mathrm{OR'Q}=\angle\mathrm{OPE}$.

R' が直線 PQ の垂線の足のときそれぞれの式の左辺は 90° であり，P，Q が OE を直径とする円 $\left(\text{A を中心とする半径 } \frac{1}{2} \text{ の円}\right)$ 周上にあるときそれぞれの式の右辺は 90° なる．

したがって，$\mathrm{R}'(\alpha\beta)$ が直線 PQ の垂線の足 R(w) であることと，P，Q が A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円周上にあることは同値.

【別解 2】

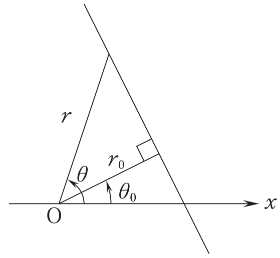
l は O を通らないとする．α，β，w を極形式で書く．

$$\alpha=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad \beta=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),\quad w=r_0(\cos\theta_0+i\sin\theta_0).$$

l すなわち OR に垂直で R を通る直線上の点 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ について

$$r\cos(\theta-\theta_0)=r_0$$

が成り立つ．



α，β がこれをみたすから

$$\begin{cases} r_1\cos(\theta_1-\theta_0)=r_0, \\ r_2\cos(\theta_2-\theta_0)=r_0. \end{cases} \quad \cdots①$$

$$w=\alpha\beta \iff \begin{cases} r_0=r_1r_2, \\ \theta_0=\theta_1+\theta_2+2n\pi \quad (n \text{ は整数}). \end{cases}$$

① で $w=\alpha\beta\neq0$ から $r_1\neq0$，$r_2\neq0$ だから

$$\begin{cases} r_1\cos\{\theta_1-(\theta_1+\theta_2)\}=r_1r_2, \\ r_2\cos\{\theta_2-(\theta_1+\theta_2)\}=r_1r_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos(\theta_2)=r_2, \\ \cos(\theta_1)=r_1. \end{cases}$$

$$\iff \alpha,\ \beta \text{ は円 } r=\cos\theta \text{ 上にある．}$$

$r=\cos\theta$ は A を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円に他ならない． （証明終り）

逆に α，β が円 $r=\cos\theta$ 上にあるとき，① に $r_1=\cos\theta_1$，$r_2=\cos\theta_2$ を代入して r_0 を消去することにより，

$$\cos\theta_1\cos(\theta_1-\theta_0)=\cos\theta_2\cos(\theta_2-\theta_0).$$

積和公式から

$$\cos(2\theta_1-\theta_0)=\cos(2\theta_2-\theta_0).$$

さらに和積公式から

$$\sin(\theta_1-\theta_2)\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)=0.$$

(i) $\sin(\theta_1-\theta_2)=0$ のとき，α，β が円 $r=\cos\theta$ 上にあることから $-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\theta_2<\frac{\pi}{2}$ とおくことができる．ところがこうすると $\theta_1=\theta_2$ したがって，$r_1=r_2$ となり $\alpha\neq\beta$ に矛盾する．

(ii) $\sin(\theta_1+\theta_2-\theta_0)=0$ のとき，$\theta_0=\theta_1+\theta_2+(2m+1)\pi$ とすると，① で $\cos(\theta_1-\theta_0)=-\cos\theta_2<0$ となり $r_1>0$，$r_0>0$ に矛盾する．

$$\therefore\quad \theta_0=\theta_1+\theta_2+2n\pi. \quad \therefore\quad r_0=r_1\cos\theta_2=r_1r_2.$$

よって，$w=\alpha\beta$ がいえた． （証明終り）

2000 年　前期・理科

第 1 問

AB＝AC，BC＝2 の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。

分　野

数学C：二次曲線，楕円，**数学Ⅱ**：整式の微分

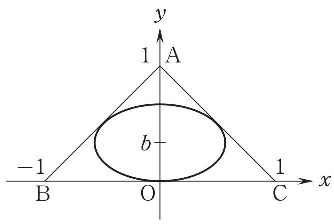
考え方

BC が座標軸に平行になるように適当に座標をとり，3 辺に接する条件を求める．

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の面積は πab である．

【解答】

A(0, 1)，B(−1, 0)，C(1, 0) となるように座標軸を定める．



題意をみたす楕円を E とする．

E は辺 BC に接し，y 軸対称だからその方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1 \quad (a>0,\ b>0) \qquad \cdots①$$

とおける．

E と 2 辺 AB：$y=x+1$，AC：$y=-x+1$ が接する条件を求める．

$y=\pm x+1$ を ① に代入して得られる x の方程式は

$$\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)x^2\pm 2(1-b)x+1-2b=0.$$

接する条件はこれが重解を持つこと．

$$\therefore\quad \frac{1}{4}(\text{判別式})=(1-b)^2-\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)(1-2b)=\frac{b^2}{a^2}(a^2+2b-1)=0.$$

$$\therefore\quad b=\frac{1}{2}(1-a^2).$$

ここで，E の面積を $S(a)$ とおくと

$$S(a)=\pi ab=\frac{\pi}{2}a(1-a^2). \quad (0<a<1)$$

$$S'(a)=\frac{\pi}{2}(1-3a^2).$$

a	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$S'(a)$		＋	0	−	
$S(a)$		↗	最大	↘	

$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$S(a)$ は最大値

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \cdots(\text{答})$$

をとる．

(注)　このとき，$b=\dfrac{1}{3}$．楕円の中心は三角形 ABC の重心．

第２問

（文科　第４問と同じ）

第３問

$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0\leqq x\leqq a$ を n 等分する点の集合

$$\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$$

の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c, \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h) \end{cases}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

ただし，$h=\dfrac{a}{n}$，$c>0$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて，p_k を求めよ。

(2)　$g(a)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c=2,\ 1,\ \dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフをかけ。

分　野

数学A：数列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

誘導にしたがって，$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}$ とおくとき，与方程式を p_k で表すと，$\{p_k\}$ に関する漸化式になる．それを解けばよい．

p_k から $f_n(kh)$ にもどし，$k=n$ とすれば $f_n(a)$ になる．

【解答】

(1)　与式を p_k で表すと，$p_0=\dfrac{1}{c}$ で，

$$\frac{\dfrac{1}{p_{k+1}}-\dfrac{1}{p_k}}{h}=\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\frac{1}{p_{k+1}}.$$

変形して，

$$p_{k+1}=(1-h)p_k+h.$$

$p_{k+1}-1=(1-h)(p_k-1)$．$\{p_k-1\}$ は公比 $1-h$ の等比数列．

$$p_k-1=(1-h)^k\left(\frac{1}{c}-1\right).$$

$$\therefore\quad p_k=(1-h)^k\left(\frac{1}{c}-1\right)+1=\frac{(1-h)^k(1-c)+c}{c}.\qquad\cdots(答)$$

(2)　(1)より，

$$f_n(kh)=\frac{c}{(1-h)^k(1-c)+c}.$$

$kh=a$ となるのは $k=n$ のとき，$n=\dfrac{a}{h}$ より

$$f_n(a)=\frac{c}{(1-h)^{\frac{a}{h}}(1-c)+c}.$$

$\lim_{n\to\infty}h=0$．$\lim_{h\to 0}(1-h)^{\frac{a}{h}}=e^{-a}$ より，

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=\frac{c}{e^{-a}(1-c)+c}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　$c=2$ のとき，$g(x)=\dfrac{2}{2-e^{-x}}$.

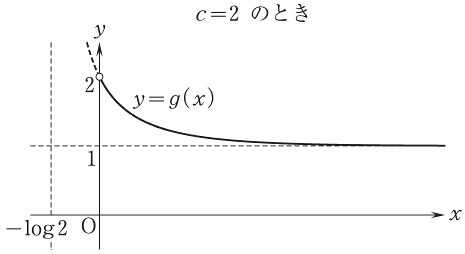
$x>0$ のとき，$2>1>e^{-x}$ で，$g(x)$ は減少する．$g(0)=2$，$\lim_{x\to\infty}g(x)=1$.

$c=1$ のとき，$g(a)=1$ で定数値関数.

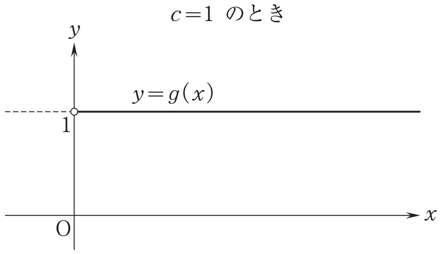
$$c=\frac{1}{4} \text{ のとき，} g(x)=\frac{\frac{1}{4}}{e^{-x}\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{3e^{-x}+1}.$$

$g(x)$ は増加する．$g(0)=\dfrac{1}{4}$．$\lim_{x\to\infty}g(x)=1$.

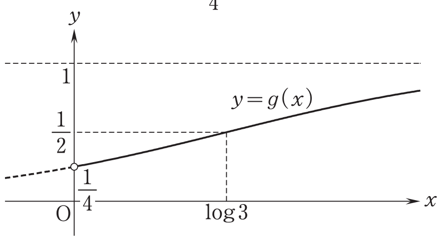
$c=2$ のとき



$c=1$ のとき



$c=\dfrac{1}{4}$ のとき



(注)　$c=2$ のとき，$x\leqq 0$ も含めて考えると，$x=-\log 2$ で分母が 0 となり漸近線 $x=-\log 2$ をもつ.

$c=\dfrac{1}{4}$ のとき，$g'(x)=\dfrac{3e^{-x}}{(3e^{-x}+1)^2}$，$g''(x)=\dfrac{3e^{-x}(3e^{-x}-1)}{(3e^{-x}+1)^3}$ から変曲点 $\left(\log 3,\ \dfrac{1}{2}\right)$ をもつことがわかる．ここまで要求はされていないであろう.

第4問

座標平面上を運動する3点P，Q，Rがあり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}: x=\cos t,\quad y=\sin t$$
$$\mathrm{Q}: x=1-vt,\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{R}: x=1-vt,\quad y=1$$

ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 点Pと線分QRが時刻0から 2π までの間ではぶつからない。

(2) 点Pと線分QRがただ一度だけぶつかる。

分 野

数学Ⅲ：微分法，方程式への応用

考え方

tx 平面上に点P，線分QRを図示すると見通しがよい．この場合，線分QRの x 座標が $-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$ の範囲で，しかもPが減少しているときに，点Pと線分QRの x 座標が一致したならPはRQにぶつかる．

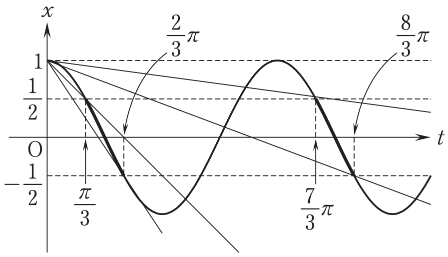
【解答】

(1) 線分QRが通過する領域は $x\leqq 1$，$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq 1$.

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，Pがこの領域を通過するのは，$\frac{\pi}{3}\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$.

Q，Rの x 座標は等しいから，この時間帯にPとQの x 座標が一致すれば，Pは線分QRとぶつかる．

$x=\cos t$ のグラフの $\frac{\pi}{3}\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi$ の部分と交わらなく，$(0,\ 1)$ を通る直線の傾き $-v$ $(v>0)$ の範囲が求めるもの．



グラフから $(0,\ 1)$ と $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ を通る直線の傾きは

$-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3}}=-\dfrac{3}{2\pi}$，$(0,\ 1)$ と $\left(\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{2}\right)$ を通る直線の傾きは

$-\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}\pi}=-\dfrac{9}{4\pi}$.

よって，求める v の範囲は

$$0<v<\frac{3}{2\pi},\quad v>\frac{9}{4\pi}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $\frac{\pi}{3}+2n\pi\leqq t\leqq\frac{2}{3}\pi+2n\pi$ の範囲でぶつかる v の範囲は，

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{3}+2n\pi}=\frac{3}{2(6n+1)\pi}\leqq v\leqq\frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}\pi+2n\pi}=\frac{9}{4(3n+1)\pi}.$$

$a_n=\dfrac{3}{2(6n+1)\pi}$，$b_n=\dfrac{9}{4(3n+1)\pi}$ とおき，n に対して，v のとりうる範囲 $[a_n,\ b_n]$ を I_n とおく．

$I_0=\left[\dfrac{3}{2\pi},\ \dfrac{9}{4\pi}\right]$ と $I_1=\left[\dfrac{3}{14\pi},\ \dfrac{9}{16\pi}\right]$ は重ならないが，I_1 と $I_2=\left[\dfrac{3}{26\pi},\ \dfrac{9}{28\pi}\right]$ は重なる部分がある．

a_n，b_n はともに n について減少する．

$n\geqq 1$ のとき，

$$b_{n+2}-a_n=\frac{9}{2(6n+14)\pi}-\frac{9}{2(18n+3)\pi}>0$$

となり，I_n，I_{n+1}，I_{n+2} が重なる部分がある．したがって，I_{n+1} の全範囲は I_n か I_{n+2} のいずれかと重なる．

したがって，I_n $(n\geqq 2)$ のみに含まれる v の範囲は存在しない．

したがって，点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる．v の範囲は，

$$\frac{9}{28\pi}<v\leqq\frac{9}{16\pi},\quad \frac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{4\pi}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１） tx 平面上で $x=-\dfrac{1}{2}$ における $x=\cos t$ の接線の傾きは $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ で，$-\dfrac{9}{4\pi}$ より小さい．

したがって，$(0,\ 1)$ から $x=\cos t$ に引いた接線が $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$ の範囲で接することはない．

（注２） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2(6n+1)\pi}=0$ だから，$v\to 0$ の直線は無数の n に対して $\dfrac{3}{2(6n+1)\pi}\leqq v\leqq\dfrac{9}{4(3n+1)\pi}$ の範囲で $x=\cos t$ と交わる．

第５問

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字はたがいに異なり，どの２つのけたの数字の和も９にならない。」

ただし，S の要素は10進法で表す。また，１けたの正の整数は S に含まれるとする。

このとき次の問いに答えよ。

(1) S の要素でちょうど４けたのものは何個あるか。

(2) 小さいほうから数えて2000番目の S の要素を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：個数

考え方

０から９までの数のうち２数の和が９になる組は５組．したがって，５桁以上で条件をみたすものはない．k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 桁の場合，５組から k 組を選び，それぞれの組の中から１個ずつ数字を選び，１列に並べると考えればよい．ただし桁の先頭に０が来ないようにする．

【解答】

(1) 和が９になる数字の組み合せは $(0,\ 9)$，$(1,\ 8)$，$(2,\ 7)$，$(3,\ 6)$，$(4,\ 5)$ の５組．これらの同じ組に属するものは一方があれば他方は存在しない．０が先頭にあるものも含めて４けたの数は

$${}_5P_4 2^4=120\cdot 16=1920 \text{ 個}.$$

０が先頭にある４けたの数は

$${}_4P_3 2^3=24\cdot 8=192 \text{ 個}.$$

よって4けたのSの要素は

$$1920-192=1728 \text{ 個.}$$ …(答)

(2) 1けたのSの要素は9個.

2けたのSの要素は

$${}_5\mathrm{P}_2 2^2-{}_4\mathrm{P}_1 2=20\cdot4-4\cdot2=72 \text{ 個.}$$

3けたのSの要素は

$${}_5\mathrm{P}_3 2^3-{}_4\mathrm{P}_2 2^2=60\cdot8-12\cdot4=432 \text{ 個.}$$

よって，3けた以下のSの要素は

$$9+72+432=513 \text{ 個.}$$

1が先頭にある4けたのSの要素も，2が先頭にある4けたのSの要素も，…，9が先頭にある4けたのSの要素も192個ある.

1から7までが先頭にある4けたのSの要素は $192\times7=1344$ 個したがって8000以下のSの要素は $513+1344=1857$ 個.

先頭が80で4けたのSの要素は ${}_3\mathrm{P}_2 2^2=24$. 同様に，先頭が82，83，84，85，86のSの要素も24個. したがって，8700以下のSの要素の個数は $1857+24\times6=2001$ 個.

2001番目は8697.

2000番目は8695. …(答)

第6問

(1) a，b，cを正の実数とするとき，

$$\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&z\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を満たす実数x，y，zをa，b，cで表せ。

(2) a，b，cが $1\leqq a\leqq2$，$1\leqq b\leqq2$，$1\leqq c\leqq2$ の範囲を動くとき，(1)のx，y，zを座標とする点(x, y, z)が描く立体をKとする。立体Kを平面 $y=t$ で切った切り口の面積を求めよ。

(3) この立体Kの体積を求めよ。

分　野

数学C：行列，**数学Ⅲ**：積分法，体積

考え方

3×3 行列の積から，a，b，cとx，y，zの関係式は容易に求められる.

$y=t$ とおいたとき，x，zはa，b（またはb, c）で表わされる.

$x+z=b$ になることに注意し，さらに，tに場合分けがあることに注意して断面積を計算する.

【解答】

(1) 与式の成分を計算して，

$$\begin{pmatrix}1&a+c&ab\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y&yz\\0&1&x+z\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

よって，

$$a+c=y,\quad ab=yz,\quad b=x+z.$$

これを，x，y，z について解いて，

$$x=\frac{bc}{a+c},\quad y=a+c,\quad z=\frac{ab}{a+c}.$$ …(答)

(2) $y=t$ のとき，$t=a+c$．$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq c\leqq 2$ から $2\leqq t\leqq 4$．また，$t-2\leqq a=t-c\leqq t-1$ から $2\leqq t\leqq 3$ のとき $1\leqq a\leqq t-1$，$3\leqq t\leqq 4$ のとき，$t-2\leqq a\leqq 2$.

$$x=\frac{b(t-a)}{t},\quad z=\frac{ab}{t}.$$

$$x+z=b.$$

(i) $2\leqq t\leqq 3$ のとき，$1\leqq a\leqq t-1$ から

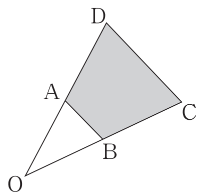
$$\frac{b}{t}\leqq x\leqq\frac{(t-1)b}{t}=b-\frac{b}{t}.$$

$(x,\ z)$ は端点が $\left(\frac{b}{t},\ b-\frac{b}{t}\right)$，$\left(b-\frac{b}{t},\ \frac{b}{t}\right)$ の線分．$1\leqq b\leqq 2$ から

端点はそれぞれ線分 $z=(t-1)x\ \left(\frac{1}{t}\leqq x\leqq\frac{2}{t}\right)$，$z=\frac{x}{t-1}\ \left(1-\frac{1}{t}\leqq x\leqq 2-\frac{2}{t}\right)$ を動く．

したがって，$(x,\ z)$ が動く範囲は 4 点

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{t},\ 1-\frac{1}{t}\right),\quad \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{t},\ \frac{1}{t}\right),\quad \mathrm{C}\left(2-\frac{2}{t},\ \frac{2}{t}\right),\quad \mathrm{D}\left(\frac{2}{t},\ 2-\frac{2}{t}\right)$$



を頂点とする等脚台形の周及び内部を動く．

O を原点とすると三角形 OCD の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\left(2-\frac{2}{t}\right)^2-\left(\frac{2}{t}\right)^2\right|=\frac{2}{t}(t-2).$$

A，B は OD，OC の中点だから三角形 OAB の面積は三角形 OCD の面積の $\frac{1}{4}$．よって，台形 ABCD の面積は

$$台形\ \mathrm{ABCD}=\frac{3}{4}\triangle\mathrm{OCD}=\frac{3}{2t}(t-2).$$

(ii) $3\leqq t\leqq 4$ のとき，$t-2\leqq a\leqq 2$ から

$$\frac{2b}{t}\leqq x\leqq\frac{(t-2)b}{t}=b-\frac{2b}{t}.$$

$(x,\ z)$ は端点が $\left(\frac{2b}{t},\ b-\frac{2b}{t}\right)$，$\left(b-\frac{2b}{t},\ \frac{2b}{t}\right)$ の線分．$1\leqq b\leqq 2$ から

端点はそれぞれ線分 $z=\frac{t-2}{2}x\ \left(\frac{2}{t}\leqq x\leqq\frac{4}{t}\right)$，$z=\frac{2}{t-2}x\ \left(1-\frac{2}{t}\leqq x\leqq 2-\frac{4}{t}\right)$ を動く．

したがって，$(x,\ z)$ が動く範囲は 4 点

$$\mathrm{A}\left(1-\frac{2}{t},\ \frac{2}{t}\right),\quad \mathrm{B}\left(\frac{2}{t},\ 1-\frac{2}{t}\right),\quad \mathrm{C}\left(\frac{4}{t},\ 2-\frac{4}{t}\right),\quad \mathrm{D}\left(2-\frac{4}{t},\ \frac{4}{t}\right)$$

を頂点とする等脚台形の周及び内部を動く．

O を原点とすると三角形 OCD の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\left(2-\frac{4}{t}\right)^2-\left(\frac{4}{t}\right)^2\right|=\frac{2}{t}(4-t).$$

A，B は OD，OC の中点だから三角形 OAB の面積は三角形 OCD の面積の $\frac{1}{4}$．よって，台形 ABCD の面積は

$$台形\ \mathrm{ABCD}=\frac{3}{4}\triangle\mathrm{OCD}=\frac{3}{2t}(4-t).$$

以上から立体 K を $y=t$ で切った切り口の面積は

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2t}(t-2)\ \ (2\leqq t\leqq 3),\\[2mm] \dfrac{3}{2t}(4-t)\ \ (3\leqq t\leqq 4).\end{cases}\qquad\cdots(答)$$

（注） a，b，c を x，y，z で表し，$1\leqq a\leqq 2$，$1\leqq b\leqq 2$，$1\leqq c\leqq 2$ とすると

$$1\leqq a=\frac{yz}{x+z}\leqq 2,\quad 1\leqq b=x+z\leqq 2,\quad 1\leqq c=\frac{xy}{x+z}\leqq 2$$

となる．$y=t$ とすると xz 平面上の不等式は

$$2\leqq t\leqq 3\ のとき\ \frac{x}{t-1}\leqq z\leqq (t-1)x,\quad 1\leqq x+z\leqq 2$$

$$3\leqq t\leqq 4\ のとき\ \left(\frac{t}{2}-1\right)x\leqq z\leqq \frac{x}{\dfrac{t}{2}-1},\quad 1\leqq x+z\leqq 2$$

となる．これは**【解答】**の等脚台形と同じである．このように解いてもよい．

(3) 求める体積は

$$V=\int_2^3\frac{3}{2t}(t-2)\,dt+\int_3^4\frac{3}{2t}(4-t)\,dt=\frac{3}{2}\int_2^3\left(1-\frac{2}{t}\right)dt+\frac{3}{2}\int_3^4\left(\frac{4}{t}-1\right)dt$$

$$=\frac{3}{2}\Big[t-2\log t\Big]_2^3+\frac{3}{2}\Big[4\log t-t\Big]_3^4=\frac{3}{2}(1-2\log 3+2\log 2+4\log 4-4\log 3-1)$$

$$=\frac{3}{2}(10\log 2-6\log 3)=15\log 2-9\log 3.\qquad\cdots(答)$$

2000 年　後期・理科 I 類

第 1 問

k を正の整数とし，x を変数とする k 次多項式 $P_k(x)$ について次の条件

$$(\mathrm{C})\begin{cases} P_k(x)-P_k(x-1)=x^{k-1}, \\ P_k(0)=0 \end{cases}$$

を考える。ただし，$x^0=1$ と定める。このとき，次の問に答えよ。

(1)　$k=1$，2 に対し，$P_k(x)$ を求めよ。

(2)　すべての $k\geqq 3$ に対し，条件 (C) をみたす $P_k(x)$ が存在し，しかもただ一つであることを示せ。

(3)　正整数 k に対し，k 次の多項式 $Q_k(x)$ を次の条件が成立するように定める。

$$\begin{cases} Q_k(0)=Q_k(1)=\cdots=Q_k(k-1)=0, \\ Q_k(k)=1 \end{cases}$$

このとき，k 個の整数 c_1，c_2，$\cdots$，c_k がそれぞれただ一つ存在して

$$P_k(x)=\sum_{j=1}^{k}c_jQ_j(x)$$

と表されることを示せ。

分　野

数学 A：整式，数列

考え方

x を整数に限れば $P_k(x)=P_k(0)+\sum_{j=1}^{x}\{P_k(j)-P_k(j-1)\}=\sum_{j=1}^{x}j^{k-1}$ である．$P_k(x)$ は多項式で x は無数にある自然数について定まるから実数全体に拡張される．

$Q_k(x)$（$k=1$, 2, $\cdots$）は $Q_k(0)=0$ で次数は異なるから，$P_k(x)=\sum_{j=1}^{k}c_jQ_j(x)$ とかけることは容易に示せる．

【解答】

(1)　x が正の整数の範囲で考えると，

$$P_k(x)=P_k(0)+\sum_{j=1}^{x}\{P_k(j)-P_k(j-1)\}=\sum_{j=1}^{x}j^{k-1}.$$

$k=1$ のとき，$P_1(x)=\sum_{j=1}^{x}1=x$．$P_1(x)$ は確かに 1 次多項式である．

この式はすべての正整数 x で成り立つ．無数の実数に対して定まる多項式はただ 1 通りだから，多項式 $P_1(x)=x$．　…(答)

$k=2$ のとき，$P_2(x)=\sum_{j=1}^{x}j=\dfrac{1}{2}x(x+1)$．$P_2(x)$ は確かに 2 次多項式である．

この式はすべての正整数 x で成り立つ．無数の実数に対して定まる多項式はただ 1 通りだから，多項式 $P_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$．　…(答)

(2)　(1) と同様に，任意の正整数に対して

$$P_k(x)=\sum_{j=1}^{x}j^{k-1}.$$

でただ 1 通りに定まる．

$P_k(x)$ が k 次多項式であることは次のようにして数学的帰納法で証明される．

(I)　$k=1$，2 のときは (1) で証明済み．

(II) $k=1, 2, 3, \cdots, m$ のとき $P_k(x)$ は x の k 次多項式であることが既に証明されているとする．
整数 x に対し，$(x+1)^{m+1}-x^{m+1}$ は x の m 次多項式である．

$$\sum_{j=1}^{x}\{(j+1)^{m+1}-j^{m+1}\}=(x+1)^{m+1}-1$$

は x の $m+1$ 次の多項式である．

一方 $(x+1)^{m+1}-x^{m+1}$ は m 次多項式であるから，これを $\sum_{i=1}^{m+1}a_i x^{i-1}$ $(a_{m+1}\neq 0)$ とおく．

$\sum_{j=1}^{x}j^{i-1}=P_i(x)$ $(i=1, 2, 3, \cdots, m)$ は i 次多項式であるから，

$$\sum_{j=1}^{x}\{(j+1)^{m+1}-j^{m+1}\}=\sum_{j=1}^{x}\sum_{i=1}^{m+1}a_i j^{i-1}=\sum_{i=1}^{m+1}a_i\sum_{j=1}^{x}j^{i-1}=\sum_{i=1}^{m+1}a_iP_i(x).$$

ただし，$P_{m+1}(x)=\sum_{j=1}^{k}j^m$ が多項式であることは未証明.

よって，$(x+1)^{m+1}-1=\sum_{i=1}^{m+1}a_iP_i(x)$.

よって，

$$a_{m+1}P_{m+1}(x)=(x+1)^{m+1}-1-\sum_{i=1}^{m}a_iP_i(x).$$

$P_i(x)$ $(i=1, 2, 3, \cdots, m)$ は x の i 次多項式で $(x+1)^{m+1}$ は $m+1$ 次多項式だから右辺は $m+1$ 次多項式．よって $a_{m+1}\neq 0$ で，$P_{m+1}(x)$ は x の $m+1$ 次多項式である．

以上から $P_k(x)$ はすべての自然数 k に対してすべての正整数 x に対して，ただ1通りに定まる k 次多項式である．無数の実数に対して定まる多項式はただ1通りだから，整数以外の x に対しても $P_k(x)$ はただ1通りに定まる．

したがって，すべての $k\geqq 3$ に対し，条件(C)をみたす k 次多項式 $P_k(x)$ がただ一つ存在する．

（証明終り）

(3) $P_k(x)$ は k 次多項式で，$Q_j(x)$ は j 次多項式だから $\sum_{j=1}^{k}c_jQ_j(x)$ も k 次多項式である．

したがって，$k+1$ 個の実数 $x=0, 1, 2, \cdots, k$ に対して

$$P_k(x)=\sum_{j=1}^{k}c_jQ_j(x) \qquad \cdots(*)$$

が成り立つように c_j が定められればよい．

$x=0$ のとき $P_k(0)=0$，$Q_j(0)=0$ $(j=1, 2, 3, \cdots, k)$ だから，(*)は成り立つ．

$x=1$ のとき，$Q_1(1)=1$，　$Q_k(1)=0$ $(k=2, 3, 4, \cdots, k)$ だから $P_k(1)=c_1Q_1(1)=c_1$ より $c_1=P_k(1)$.

$x=1, 2, 3, \cdots, m$ で(*)が成り立つように c_j $(j=1, 2, 3, \cdots, m)$ が定まっているとする．

$x=m+1$ のとき，(*)が成り立つとすると

$$P_k(m+1)=\sum_{j=1}^{m}c_jQ_j(m+1)+c_{m+1}Q_{m+1}(m+1)+\sum_{j=m+2}^{k}c_jQ_j(m+1),$$

$Q_j(m+1)=0$ $(j\geqq m+2)$，$Q_{m+1}(m+1)=1$ だから，

$$c_{m+1}=P_k(m+1)-\sum_{j=1}^{m}c_jQ_j(m+1)$$

として，c_{m+1} は定まる．

このようにして，c_j $(j=1, 2, 3, \cdots, k)$ は順次定まる．

よって，それらの c_j を使って，$P_k(x)=\sum_{j=1}^{k}c_jQ_j(x)$ と表される．（証明終り）

（注 1） $Q_j(x)=Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)$ とおけて，$Q_j(j)=Aj(j-1)(j-2)\cdots1=Aj!=1$ だから，$Q_j(x)=\frac{1}{j!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-j+1)$.

（注2）　$\{c_j\}$ は k によって異なる．

（注3）　任意の $f(0)=0$ となる k 次の多項式 $f(x)$ は $f(x)=\sum_{j=1}^{k} d_j Q_j(x)$ とかける．

（注4）　多項式の一意性．

2つの n 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ があり，$n+1$ 個以上の異なる数 x_1，x_2，x_3，…，x_{n+1}，…について $f(x)=g(x)$ ならば，2つの多項式 $f(x)$ と $g(x)$ は等しい．

（証明）

$f(x)-g(x)$ はたかだか n 次の多項式で $x=x_1$，x_2，x_3，…，x_n で0になるから，因数定理により，

$$f(x)-g(x)=A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$$

とかける．ただし，$f(x)-g(x)$ がたかだか n 次式であり，$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)$ が n 次式であることから，A は定数である．

$x=x_{n+1}$ においても $f(x)-g(x)=0$ となるから，

$$f(x_{n+1})-g(x_{n+1})=A(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_3)\cdots(x_{n+1}-x_n)=0.$$

x_{n+1} は x_1，x_2，x_3，…，x_n のいずれとも異なるから

$(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2)(x_{n+1}-x_3)\cdots(x_{n+1}-x_n)\neq 0$．よって，$A=0$．

以上から

$$f(x)-g(x)=0 \text{ すなわち } f(x)=g(x).$$

この結果から，$f(x)$，$g(x)$ が k 次の多項式のとき，$x=0, 1, 2, \cdots, k$（$k+1$ 個）で，$f(x)=g(x)$ ならば，2つの多項式は一致する．

また，2つの多項式 $f(x)$，$g(x)$ がすべての自然数 n について一致するなら $f(x)=g(x)$ である．なぜなら，自然数 n の個数は無数だから，（多項式の次数 $+1$）より大きいからである．この場合2つの多項式 $f(x)$，$g(x)$ の次数は必然的に等しくなければならない．

本解答ではこれらのことを繰り返し使っている．

第2問

正整数 l を与える。各正整数 n に対して，関数

$$y=x^l\sin nx,\quad 0\leqq x\leqq 2\pi$$

のグラフと x 軸で囲まれる図形を C_n とする。

(1)　C_n を x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を V_n とするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty} V_n$$

を求めよ。

(2)　C_n を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を W_n とするとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty} W_n$$

を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，数列の極限

考え方

(1) は普通に積分できそうであるが，$\int_0^{2\pi} x^{2l}\cos 2nx\,dx$ という項が出てくる．この形は部分積分を繰り返して値が求められる形であるが，1回だけ部分積分して，$-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x^{2l-1}\sin 2nx\,dx$ まで示しあとは

$n \to \infty$ でこの項が 0 に収束することを示せばよい．

(2) は $\sin nx$ が $x=\dfrac{m}{n}\pi$ で符号が変化するので，曲線 C_n は x 軸と何度も繰り返し交わるので体積計算は複雑になる．C_n の $\dfrac{m}{n}\pi \leqq x \leqq \dfrac{m+1}{n}\pi$ 部分と x 軸が囲む部分を y 軸回転して得られる体積の和を求めることになる．この積分はいわゆるバウムクーヘン積分 $2\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi} x|f(x)|\,dx$ を使って計算することになる．

この公式は【解答】で示す通り，y で積分する部分を x による積分に置換し，部分積分すると導かれる．

更にその積分のうち $\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi} x^l \cos x\,dx$ の部分の和が $n \to \infty$ に対して 0 になることを示す．

また残りの部分の和の極限は区分求積として考えることにより求められる．

【解答】

(1)　$f(x)=x^l \sin nx$ とおく．

$$V_n=\pi\int_0^{2\pi}\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}x^{2l}\sin^2 nx\,dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}x^{2l}(1+\cos 2nx)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}x^{2l}\,dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}x^{2l}\cos 2nx\,dx.$$

ここで，

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}x^{2l}\,dx=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^{2l+1}}{2l+1}\right]_0^{2\pi}=\frac{2^{2l}\pi^{2l+2}}{2l+1}.$$

$I_n=\int_0^{2\pi}x^{2l}\cos 2nx\,dx$ とおくと，

$$I_n=\left[\frac{x^{2l}}{2n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi}-\frac{l}{n}\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\sin 2nx\,dx=-\frac{l}{n}\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\sin 2nx\,dx.$$

$$|I_n|\leqq\frac{l}{n}\int_0^{2\pi}|x^{2l-1}\sin 2nx|\,dx\leqq\frac{l}{n}\int_0^{2\pi}x^{2l-1}\,dx=\frac{1}{2n}\left[x^{2l}\right]_0^{2\pi}=\frac{2^{2l-1}\pi^{2l}}{n}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2l-1}\pi^{2l}}{n}=0$ だから，ハサミウチの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$.

よって，

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{2^{2l}\pi^{2l+2}}{2l+1}+0=\frac{2^{2l}\pi^{2l+2}}{2l+1}.$$ …(答)

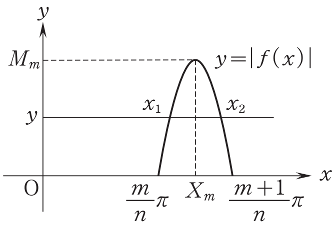
(2)　$f(x)=x^l\sin nx=0$ となる x は $nx=m\pi$，$0\leqq x\leqq 2\pi$ から $x=\dfrac{m}{n}\pi$ ($0\leqq m\leqq 2n$，m は整数).

C_n の $\dfrac{m}{n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{m+1}{n}\pi$ の部分を c_m とする．

$f'(x)=lx^{l-1}\sin nx+nx^l\cos nx=0$ のとき，$\dfrac{n}{l}x=-\tan nx$.

$-\tan nx$ は $x=\dfrac{m}{n}\pi$ で 0 で $\dfrac{m}{n}\pi-\dfrac{\pi}{2n}<x<\dfrac{m}{n}\pi+\dfrac{\pi}{2n}$ の範囲で $+\infty$ から $-\infty$ へ単調に減少し，$\dfrac{n}{l}x$ は増加するから，$\dfrac{m}{n}\pi-\dfrac{\pi}{2n}<x<\dfrac{m}{n}\pi$ の範囲に $f'(x)=0$ となる x が存在する．$x>0$ の範囲で考えて，$\dfrac{m+1}{n}\pi-\dfrac{\pi}{2n}<x<\dfrac{m+1}{n}\pi$ の範囲にある $f'(x)=0$ となる x を X_m とする．

したがって $y=f(x)$ の $\dfrac{m}{n}\pi<x<\dfrac{m+1}{n}\pi$ の部分は定符号で，$x=X_m$ で $|f(x)|$ は最大値 $M_m=|f(X_m)|$ をとり，$x=X_m$ 以外では極値をとらない．



c_m を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積を w_m とする．

y $(0\leqq y\leqq M_m)$ を定数としたとき，$y=|f(x)|$ をみたす x $\left(\frac{m}{n}\pi\leqq x\leqq\frac{m+1}{n}\pi\right)$ は2個ある．これらを x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ とする．c_m において，$|y|=(-1)^m y$ であることに注意して，

$$\begin{aligned}
w_m&=(-1)^m\left\{\pi\int_0^{M_m}{x_2}^2\,dy-\pi\int_0^{M_m}{x_1}^2\,dy\right\}\\
&=(-1)^m\left\{\pi\int_{\frac{m+1}{n}\pi}^{X_m}x^2\frac{dy}{dx}\,dx-\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{X_m}x^2\frac{dy}{dx}\,dx\right\}\\
&=(-1)^{m+1}\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^2\frac{dy}{dx}\,dx=(-1)^{m+1}\left\{\pi\Big[x^2y\Big]_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}-2\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}xy\,dx\right\}\\
&=(-1)^m2\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}xy\,dx=(-1)^m2\pi\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^{l+1}\sin nx\,dx \qquad\cdots(*)\\
&=(-1)^m2\pi\left\{\left[x^{l+1}\left(-\frac{1}{n}\right)\cos nx\right]_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}+\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}\frac{l+1}{n}x^l\cos nx\,dx\right\}\\
&=\frac{2\pi}{n}\left\{\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)^{l+1}+\left(\frac{m}{n}\pi\right)^{l+1}\right\}+(-1)^m2\pi\frac{l+1}{n}\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^l\cos nx\,dx.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}W_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=0}^{2n-1}w_m$ である．

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{m=0}^{2n-1}(-1)^m2\pi\frac{l+1}{n}\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^l\cos nx\,dx\right|&\leqq\sum_{m=0}^{2n-1}2\pi\frac{l+1}{n}\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^l\,dx=2\pi\frac{l+1}{n}\int_0^{2\pi}x^l\,dx\\
&=2\pi\frac{1}{n}\Big[x^{l+1}\Big]_0^{2\pi}=\frac{(2\pi)^{l+2}}{n}.
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2\pi)^{l+2}}{n}=0$ だから，ハサミウチの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{2n-1}(-1)^m2\pi\frac{l+1}{n}\int_{\frac{m}{n}\pi}^{\frac{m+1}{n}\pi}x^l\cos nx\,dx=0.$$

区分求積の考えから，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{2n-1}\frac{2\pi}{n}\left\{\left(\frac{m+1}{n}\pi\right)^{l+1}+\left(\frac{m}{n}\pi\right)^{l+1}\right\}&=2\pi\left\{\int_0^2(x\pi)^{l+1}\,dx+\int_0^2(x\pi)^{l+1}\,dx\right\}\\
&=4\pi^{l+2}\left[\frac{x^{l+2}}{l+2}\right]_0^2=\frac{2^{l+4}\pi^{l+2}}{l+2}.
\end{aligned}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}W_n=\frac{2^{l+4}\pi^{l+2}}{l+2}. \qquad\cdots(答)$$

（注） (*) はいわゆるバウムクーヘン積分である．この解答ではこれを前提とせずに問題に則して証明して使っている．ただこの問題に関する限り，証明なしに解答しても，以後の計算の重さからいってとがめることはできないのではないか。

第3問

背番号1から5までを順に付けた5人が，何も置かれていないテーブルに向かっている。最初5人は各自3枚のコインを持っている。それを背番号順に必ず1枚または2枚テーブルの上に置いてゆく。ただし，手もとに2枚以上のコインがあるときに1枚だけコインを置く確率を p とし，p は人によらず一定とする。

背番号5の人が置き終わったところ（一巡目が終わったところ）で，再び背番号1の人から順に手もとに残ったコインをテーブルに置いてゆく。

(1) 一巡目が終わったとき，テーブルの上に7枚のコインが置かれている確率 Q を求めよ。また，その Q を最大にする p の値と，そのときの Q の値を求めよ。

(2) 一巡目を終えるとき，背番号5の人が，テーブル上に7枚目のコインを置く確率 R を求めよ。また，その R を最大にする p の値を求めよ。

(3) 二巡目が終わったときのテーブルの上のコインの数の期待値を求めよ。

分 野

数学Ⅰ：確率，期待値，**数学Ⅱ**：整式の微分

考え方

(2)で背番号5の人が7枚目のコインを置く場合は(1)の場合の他に背番号5の人が2枚のコインを置き，その1枚目がちょうど7枚目になことがあることに注意.

(3)の場合，教科書的には「$\sum$(置かれるコインの枚数)×(起こる確率)」であるが，各人は独立にコインを置くから，それぞれが置くコインの枚数の期待値を求めてそれを加えてもよい．この場合各人が置くコインの枚数の期待値は等しいからそれを5倍すればよい.

【解答】

(1) 一巡目で7枚のコインが置かれるのは1枚置いた人が3人，2枚置いた人が2人の場合である．よって，

$$Q={}_5C_3p^3(1-p)^2=10p^3(1-p)^2. \qquad \cdots(答)$$

$$\frac{dQ}{dp}=Q'=30p^2(1-p)^2-20p^3(1-p)=10p^2(1-p)\{3(1-p)-2p\}=10p^2(1-p)(3-5p).$$

p	0	$\cdots$	$\frac{3}{5}$	$\cdots$	1
Q'		$+$	0	$-$	
Q		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，Q を最大にする p は $\dfrac{3}{5}$. $\cdots$(答)

そのときの Q は

$$10\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}. \qquad \cdots(答)$$

(2) (1)の場合背番号5の人が7枚目のコインを置く.

この他に背番号4までの人が合わせて6枚のコインを置き，背番号5の人が2枚のコインを置く場合がある.

その確率は ${}_4C_2p^2(1-p)^3=6p^2(1-p)^3$．よって，

$$R=10p^3(1-p)^2+6p^2(1-p)^3=2p^2(1-p)^2\{5p+3(1-p)\}=2p^2(1-p)^2(2p+3). \qquad \cdots(答)$$

$$\frac{dR}{dp}=R'=4p(1-p)^2(2p+3)-4p^2(1-p)(2p+3)+4p^2(1-p)^2=-4p(1-p)(5p^2+3p-3).$$

これが $0<p<1$ で0になるのは $p=\dfrac{-3\pm\sqrt{69}}{10}$．$0<p<1$ より $p=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}$.

p	0	$\cdots$	$\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}$	$\cdots$	1
R'		$+$	0	$-$	
R	0	$\nearrow$		$\searrow$	

以上より，R を最大にする p の値は $p=\dfrac{-3+\sqrt{69}}{10}$.　…(答)

(3)　1 人の人がテーブルの上に 3 枚のコインを置かないのは 2 回とも 1 枚のコインを置く場合でその確率は p^2.

置かれているコインの枚数を X とすると，

X	10	11	12	13	14	15
確率	${}_5C_0p^{10}$	${}_5C_1p^8(1-p^2)$	${}_5C_2p^6(1-p^2)^2$	${}_5C_3p^4(1-p^2)^3$	${}_5C_4p^2(1-p^2)^4$	${}_5C_5(1-p^2)^5$
	p^{10}	$5p^8(1-p^2)$	$10p^6(1-p^2)^2$	$10p^4(1-p^2)^3$	$5p^2(1-p^2)^4$	$(1-p^2)^5$

よって，期待値は

$$10p^{10}+11\times5p^8(1-p^2)+12\times10p^6(1-p^2)^2+13\times10p^4(1-p^2)^3+14\times5p^2(1-p^2)^4+15(1-p^2)^5=5(3-p^2).$$

…(答)

(3) の【別解】

1 人の人が置く枚数は 2 枚の確率が p^2 で 3 枚の確率が $1-p^2$ だから，その期待値は

$2p^2+3(1-p^2)=3-p^2$.

5 人の期待値の和が求めるもの．よって，求める期待値は

$$5(3-p^2).$$

…(答)

2001年　前期・文科

第1問

半径rの球面上に4点A，B，C，Dがある。四面体ABCDの各辺の長さは，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=2$ を満たしている。このときrの値を求めよ。

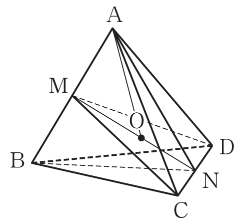
分　野

数学Ⅰ：空間図形

考え方

中学の知識で解きうる．対称性から中心はAB，CDの中点を結ぶ線分上にある．あとは三平方の定理を用いる．

【解答】



2辺AB，CDの中点をM，Nとするとこの四面体は2平面ABN，CDMについてそれぞれ面対称である．したがって，この球の中心は直線MN上にある．

三角形ACDが正三角形で1辺の長さが2だから，$\mathrm{AN}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

対称性から $\mathrm{BN}=\sqrt{3}$．また，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$.

したがって，三角形ABNは1辺の長さが$\sqrt{3}$の正三角形.

したがって，$\mathrm{MN}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.

中心をO，$\mathrm{OM}=x$ とおくと，直角三角形OAMにおいて

$$r^2=\mathrm{OA}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=x^2+\frac{3}{4}. \quad \cdots①$$

$\mathrm{ON}=\frac{3}{2}-x$ より，直角三角形OCNにおいて

$$r^2=\mathrm{OC}^2=\mathrm{ON}^2+\mathrm{CN}^2=\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+1^2=x^2-3x+\frac{13}{4}. \quad \cdots②$$

①，②より，

$$x^2+\frac{3}{4}=x^2-3x+\frac{13}{4}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{5}{6}.$$

$$\therefore \quad r=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}. \quad \cdots(答)$$

第2問

時刻0に原点を出発した2点A，Bがxy平面上を動く。点Aの時刻tでの座標は$(t^2,\ 0)$で与えられる。点Bは，最初はy軸上をy座標が増加する方向に一定の速さ1で動くが，点C$(0,\ 3)$に到達した後は，その点からx軸に平行な直線上をx座標が増加する方向に同じ速さ1で動く。

$t>0$ のとき，三角形ABCの面積を $S(t)$ とおく。

(1)　関数

$$S(t)\ (t>0)$$

のグラフの概形を描け。

(2) u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数

$$M(u)\ (u>0)$$

のグラフを描け。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

考え方

$t=3$ で場合分けすれば，面積は容易に求まる．その増減を調べれば，最大値も求まる．

【解答】

(1) B の座標は $\begin{cases}(0,\ t) & (0<t\leqq 3),\\ (t-3,\ 3) & (t\geqq 3).\end{cases}$

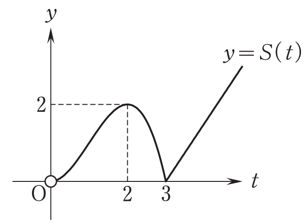
(i) $0<t\leqq 3$ のとき，$S(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot t^2=\dfrac{1}{2}(3-t)t^2$.

(ii) $t\geqq 3$ のとき，$S(t)=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot 3=\dfrac{3}{2}(t-3)$.

よって，

$$S(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(3-t)t^2 & (0<t\leqq 3),\\[2mm] \dfrac{3}{2}(t-3) & (t\geqq 3).\end{cases}\qquad S'(t)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}(2-t)t & (0<t\leqq 3),\\[2mm] \dfrac{3}{2} & (t\geqq 3).\end{cases}$$

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$S'(t)$	(0)	$+$	0	$-$		$+$
$S(t)$	(0)	↗		↘	0	↗



$S(2)=2$. よって $y=S(t)$ のグラフは右図の太線.

(2) $0<t\leqq 2$ では $S(t)$ は単調に増加するから，$0<u\leqq 2$ のとき $S(t)$ $(0<t\leqq u)$ の最大値は

$$M(u)=S(u)=\frac{1}{2}(3-u)u^2.$$

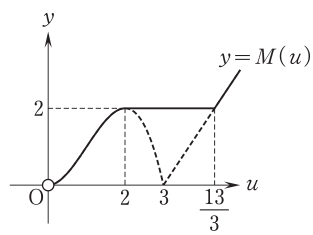
$t\geqq 3$ で $S(t)=2$ となるのは $\dfrac{3}{2}(t-3)=2$ より，$t=\dfrac{13}{3}$.

$2\leqq u\leqq\dfrac{13}{3}$ のとき，$S(t)$ $(0<t\leqq u)$ の最大値は

$$M(u)=S(2)=2.$$

$u\geqq\dfrac{13}{3}$ のとき，$S(t)$ $(0<t\leqq u)$ の最大値は

$$M(u)=S(u)=\frac{3}{2}(t-3).$$



以上から，$y=M(u)$ のグラフは右図の太線.

(注) $t=3$ のとき ABC は三角形をなさないが $S(3)=0$ とした.

第３問

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある２点Ａ，Ｂを次のように動かす。

表が出た場合：点Ａの座標が点Ｂの座標より大きいときは，ＡとＢを共に正の方向に１動かす。そうでないときは，Ａのみ正の方向に１動かす。

裏が出た場合：点Ｂの座標が点Ａの座標より大きいときは，ＡとＢを共に正の方向に１動かす。そうでないときは，Ｂのみ正の方向に１動かす。

最初２点Ａ，Ｂは原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返してＡとＢを動かしていった結果，Ａ，Ｂの到達した点の座標をそれぞれ a，b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：場合の数，**数学Ａ**：数列，漸化式

考え方

題意の把握が難しい．実験してみることも大切．

座標の差が０か１しかないことに気づけばあとは標準的．

【解答】

(1) n $(n=1, 2, \cdots)$ 回の試行の後のＡ，Ｂの座標をそれぞれ，a_n，b_n とおく．

次の表から $-1 \leqq a_n-b_n \leqq 1$ であることが帰納的に導かれる．

	$a_n-b_n=1$	$a_n-b_n=0$	$a_n-b_n=-1$
場合の数	Y_n	X_n	Z_n
表	$a_{n+1}-b_{n+1}=1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=0$
裏	$a_{n+1}-b_{n+1}=0$	$a_{n+1}-b_{n+1}=-1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=-1$

最初は原点にあるから $(a_0, b_0)=(0, 0)$ と考えてよい．したがって，$a_0-b_0=0$．上の表から a_n-b_n は 1，0，-1 以外にはならないことがわかる．

$a_n-b_n=1$ である場合の数を Y_n，$a_n-b_n=-1$ である場合の数を Z_n とおく（$X_0=1$，$Y_0=Z_0=0$ とする）．

$$X_n+Y_n+Z_n=2^n, \quad X_{n+1}=Y_n+Z_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

だから

$$X_{n+1}=2^n-X_n. \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $X_0=1$ を考慮．$p_n=\dfrac{X_n}{2^n}$ とおくと

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2}.$$

$$p_0=1, \quad p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right).$$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列．

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(p_0-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore \quad p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore \quad X_n=2^n p_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}(-1)^n. \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad \cdots(答)$$

第 4 問

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁(ご)石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒石が少なくとも一つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

分　野

数学A：論理

考え方

個数を少なくして実験してみるとわかりよい．k 番目の黒石の右にある白石の個数は増加または横ばいである．k 番目の黒石の右にある黒石は 1 個ずつ増加する．そのことから証明できる．

【解答】

左から n ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 181$) 番目の黒石の左側にある白石の個数を $f(n)$ とする．

この $f(n)$ は $0\leqq f(n)\leqq f(n+1)\leqq 180$ という性質をもつ．

条件をみたすのは $f(n)=n-1$ という関係が成り立つとき．

条件をみたす n ($n=1,\ 2,\ \cdots,\ 181$) が存在しないとすると，

$$1\leqq f(1)\leqq 180, \quad f(n)\neq n-1 \quad (n=2,\ 3,\ \cdots,\ 181)$$

$f(1)\leqq f(2)\neq 1$ より $2\leqq f(2)\leqq 180$.

以下同様にして，$k-1\leqq f(k-1)\leqq f(k)\neq k-1$ より $k\leqq f(k)\leqq 180$ が順次成り立つ．

ところが $n=180$ のとき $180\leqq f(180)\leqq 180$ から $f(180)=180$ となる．

このとき，$f(180)=180\leqq f(181)\leqq 180$ から $f(181)=180$ だがこれは $f(181)\neq 180$ と矛盾する．

したがって，条件をみたす n が存在しないことはない．つまり，条件をみたす黒石は少なくとも一つ存在する．（証明終り）

【別解 1】

(i) 一番左の石が黒石のときその黒石とその右側の石をすべて取り除くと碁石は残らないので，白石と黒石の個数は一致して題意をみたす．

(ii) 一番右の石が黒石のときその黒石の右側には石がないのでその黒石だけが取り除かれて，残りは白石 180 個と黒石 180 個で個数が一致して題意をみたす．

(iii) 両端が白石のとき，k 番目 ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 181$) の黒石とその右側の石をすべて取り除いたとき残った黒石の個数から白石の個数を引いた差を $g(k)$ とする．

左端の石が白石だから 1 番目の黒石から右側の石をすべて取り除くと，1 個以上の白石だけになるから $g(1)<0$.

右端の石が白石だから 181 番目の黒石から右側の石をすべて取り除くと，1 個の黒石と 1 個以上の白石を取り除くから $g(181)>0$.

k 番目の黒石と $k+1$ 番目の黒石の間に w_k ($w_k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) 個の白石があるとすると，k 番目の黒石の右側の石をすべて取り除く場合と比べると，$k+1$ 番目の黒石の右側の石をすべて取り除く場合を比較すると，$k+1$ 番目の黒石の右側の石をすべて取り除く場合の方が白石が w_k 個，黒石が 1 個多

い．したがって，$g(k+1)=g(k)-w_k+1$.

$g(1)<0$，$g(181)>0$ であるから全体としては増加するはずである．ところが $g(k+1)-g(k) \leqq 1$ であるから増加する場合は 1 ずつしか増加しない．したがって，増加する途中で 0 になることが必ずある．したがって題意をみたす．

したがって，黒石とそれより右にある石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となることが必ずある．（証明終り）

【別解 2】　河合塾公表解答

一番左が黒石のとき，その一番左の碁石が題意をみたす．したがって，以下では左端が白石である場合を考える．

左から i 番目（$i=1, 2, 3, \cdots, 361$）の碁石を含めてその左にある黒石の個数を x_i，白石の個数を y_i，$a_i=x_i-y_i$ とすると，

$$a_i=\begin{cases} a_{i-1}+1 & (i \text{ 番目が黒石のとき}), \\ a_{i-1}-1 & (i \text{ 番目が白石のとき}). \end{cases} \qquad \cdots①$$

ところで，

$$a_1=x_1-y_1=0-1=-1<0, \qquad \cdots②$$

$$a_{361}=x_{361}-y_{361}=181-180=1>0. \qquad \cdots③$$

① から a_i は $+1$ または -1 ずつ変化し，② から $a_1<0$，③ から $a_{361}>0$ だから，

$$a_{j-1}=0, \quad a_j=1$$

となる j が少なくとも 1 つ存在する．その j 番目の石は黒石で，1 番目から $j-1$ 番目までの碁石は黒白同数ある．この j 番目の石が題意をみたす．

以上より題意は示された．（証明終り）

2001 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ一つ定まるための実数 a，b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

$\sin(x+y)$，$\cos(x+y)$ を加法定理で展開し，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy=S$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy=C$ とおくと，$f(x)=A\sin x+B\cos x$ の形にかける．これを使って A，B 係数の連立方程式を解く．

【解答】

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{a}{2\pi}\left\{\sin x\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy+\cos x\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy\right\}\\
&\quad+\frac{b}{2\pi}\left\{\cos x\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy+\sin x\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy\right\}+\sin x+\cos x\\
&=\left\{\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy+1\right\}\sin x\\
&\quad+\left\{\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy+1\right\}\cos x.
\end{aligned}$$

$$S=\int_0^{2\pi}\sin y f(y)\,dy,\quad C=\int_0^{2\pi}\cos y f(y)\,dy,$$

$$A=\frac{a}{2\pi}C+\frac{b}{2\pi}S+1,\quad B=\frac{a}{2\pi}S+\frac{b}{2\pi}C+1 \qquad \cdots①$$

とおくと，$f(x)=A\sin x+B\cos x$ で

$$S=\int_0^{2\pi}\sin x(A\sin x+B\cos x)\,dx=\int_0^{2\pi}(A\sin^2 x+B\sin x\cos x)\,dx,$$

$$C=\int_0^{2\pi}\cos x(A\sin x+B\cos x)\,dx=\int_0^{2\pi}(A\sin x\cos x+B\cos^2 x)\,dx.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin x\cos x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{4}\Big[-\cos 2x\Big]_0^{2\pi}=0.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}=\pi.$$

$$\therefore\quad S=A\pi,\quad C=B\pi.$$

① より，

$$A=\frac{a}{2}B+\frac{b}{2}A+1,\quad B=\frac{a}{2}A+\frac{b}{2}B+1.$$

$$(2-b)A-aB=2,\quad -aA+(2-b)B=2. \qquad \cdots ②$$

$$\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$(b-2)^2-a^2 \neq 0$ のとき，

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\frac{1}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix} 2-b & a \\ a & 2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{2(2-b+a)}{(b-2)^2-a^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{2}{2-b-a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって，$f(x)$ は連続で，

$$f(x)=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x).$$

$b-2=a$ のとき，② の 2 式は $-aA-aB=2$ となり，A，B は定まらない．

$b-2=-a$ のとき，② の 2 式は $aA-aB=2$，$-aA+aB=2$ となり矛盾する．

よって，題意をみたす $f(x)$ がただ 1 つ存在する条件は $(b-2)^2 \neq a^2$ で，そのとき，

$$f(x)=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x). \qquad \cdots(\text{答})$$

第 3 問

実数 $t>1$ に対し，xy 平面の点

$$\mathrm{O}(0,\ 0),\quad \mathrm{P}(1,\ 1),\quad \mathrm{Q}\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$$

を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき

$$c(t)=\frac{b(t)}{a(t)}$$

とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。

分　野

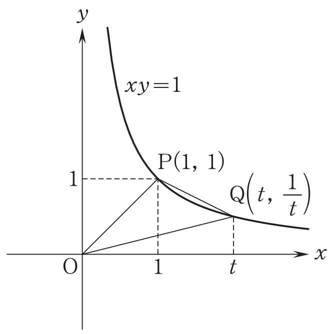
数学Ⅲ：微分法

考え方

$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ は容易に求められる．$c'(t)<0$ を示すには，$c'(t)$ の分子を $f(t)$ とおき，$f'(t)$，$f''(t)$，$f'''(t)$ まで求めなければならない．

【解答】

三角形 OPQ の面積は $a(t)=\frac{1}{2}\left|t-\frac{1}{t}\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$.



P，Q から x 軸に下した垂線の足をそれぞれ H，K とする．

$$b(t)=\int_1^t \frac{1}{x}\,dx+\triangle\mathrm{OPH}-\triangle\mathrm{OQK}$$

$$=\Big[\log|x|\Big]_1^t+\frac{1}{2}1\times1-\frac{1}{2}t\times\frac{1}{t}=\log t.$$

よって，

$$c(t)=\frac{\log t}{\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\frac{2t\log t}{t^2-1}.$$

$$c'(t)=\frac{2(\log t+1)(t^2-1)-4t^2\log t}{(t^2-1)^2}=-2\frac{(t^2+1)\log t-t^2+1}{(t^2-1)^2}.$$

$f(t)=(t^2+1)\log t-t^2+1$ とおき，$t>1$ において $f(t)>0$ を示せばよい．

$$f'(t)=2t\log t+\frac{t^2+1}{t}-2t=2t\log t-t+\frac{1}{t}.$$

$$f''(t)=2\log t+2-1-\frac{1}{t^2}.$$

$$f'''(t)=\frac{2}{t}+\frac{2}{t^3}>0.$$

よって，$f''(t)$ は $t>1$ で増加し，$f''(1)=0$ だから，$f''(t)>0$.

$f'(t)$ は $t>1$ で増加し，$f'(1)=0$ だから，$f'(t)>0$.

$f(t)$ は $t>1$ で増加し，$f(1)=0$ だから $f(t)>0$.

よって，$c'(t)=-2\dfrac{f(t)}{(t^2-1)^2}<0$.

よって，$c(t)$ は減少する． （証明終り）

（注） $\displaystyle\lim_{t\to1}c(t)=\lim_{t\to1}\frac{2t}{t+1}\frac{\log t}{t-1}=1.$ $\displaystyle\lim_{t\to\infty}c(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{2\frac{\log t}{t}}{1-\frac{1}{t^2}}=0.$

第 4 問

複素数平面上の点 a_1，a_2，…，a_n，… を

$$\begin{cases} a_1=1, \quad a_2=i, \\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \end{cases}$$

により定め

$$b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とおく。ただし，i は虚数単位である。

(1) 3 点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

分　野

数学B：複素数平面

考え方

a_1，a_2，a_3，a_4 を具体的に求めて，b_1，b_2，b_3 を求めれば，直交座標で円 C の方程式が定まる．これを使って円 C の複素方程式も定まる．

b_n が円 C 上にある条件から，b_{n+1} が円 C 上にあることを示せばよい．

【解答】

(1) $a_1=1$，$a_2=i$，$a_3=a_1+a_2=1+i$，$a_4=a_2+a_3=1+2i$.

よって，

$$b_1=\frac{a_2}{a_1}=i,\quad b_2=\frac{a_3}{a_2}=-i+1,\quad b_3=\frac{a_4}{a_3}=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i.$$

b_1，b_2，b_3 をそれぞれ直交座標で表すと $(0,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

この3点を通る円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおくと，3点を通ることから，

$$\begin{cases} 1+b+c=0, \\ 2+a-b+c=0, \\ \frac{5}{2}+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+c=0. \end{cases}$$

これを解くと，$a=-1$，$b=0$，$c=-1$.

円の方程式は $x^2+y^2-x-1=0$. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{5}{4}$.

中心は複素数平面上の点 $\frac{1}{2}$，半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$. …(答)

(2) (1)の円 C の複素方程式は $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$ である．また，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}+a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{b_n}.$$

b_n が円 C の周上にあるとき b_{n+1} も円 C の周上にあることを示せばよい．

b_n が円 C の周上にあるとき

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned}\left|b_{n+1}-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{5}{4}&=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{b_n}\right|^2-\frac{5}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b_n}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\overline{b_n}}\right)-\frac{5}{4} \\ &=\frac{1}{4}+\frac{1}{2b_n}+\frac{1}{2\overline{b_n}}+\left|\frac{1}{b_n}\right|^2-\frac{5}{4}=-1+\frac{1}{2b_n}+\frac{1}{2\overline{b_n}}+\left|\frac{1}{b_n}\right|^2 \\ &=\frac{-|b_n|^2+\frac{1}{2}\overline{b_n}+\frac{1}{2}b_n+1}{|b_n|^2}=\frac{-\left(b_n-\frac{1}{2}\right)\left(\overline{b_n}-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{4}}{|b_n|^2} \\ &=-\frac{\left|b_n-\frac{1}{2}\right|^2-\frac{5}{4}}{|b_n|^2}=0.\end{aligned}$$

よって，b_{n+1} も円 C の周上にある．

b_1 は当然円 C 上にあるから，すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は円 C の周上にある． （証明終り）

第5問

容量1リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m\geqq 4$ で空（から）のビーカーは無い。入っている水の総量は1リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ一つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。

このとき，水の入っているビーカーが2個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを一つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを一つ選ぶ。

(c)　次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1)　$x<\dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水が入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2)　$x>\dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水が入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。

分　野

数学A：論理

考え方

まずは題意の把握が必要．特別な知識はいらないが具体的に実験してみることが大切．ビーカーが3個になるまでどのように変化するか，3個のときどのように変化するかを考える．

【解答】

x リットル入っているビーカーをXとする．

(1)　Xが操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えることは，操作の途中で少なくとも1回Xが(a)または(b)で選ばれることを意味する．

もしビーカーが3個になるまでXが1回も選ばれなかったとする．そのとき他のビーカーに入っている水の量を y リットル，z リットルとすると，$x+y+z=1$ で $x<\dfrac{1}{3}$ だから $\dfrac{y+z}{2}>\dfrac{1}{3}$ となり，Xより多く水が入っている他のビーカーが存在することになり，Xは(a)または(b)で選ばれ，取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることになる．

したがって，Xは操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えている．（証明終り）

(2)　ビーカーが m $(m\geqq 4)$ 個のとき，(a)で選ばれるビーカーをAとし，Aに入っている水の量を a リットル，(b)で選ばれるビーカーをBとし，Bに入っている水の量を b リットル，その他のビーカーを Y_k $(k=1, 2, \cdots, m-3)$ とし，Y_k に入っている水の量を y_k $(y_1\leqq y_2\leqq\cdots\leqq y_{m-3})$ リットルとする．

水の総量は1リットルだから

$$a+b+y_1+y_2+\cdots+y_{m-3}+x=1.$$

一方 $a\leqq b\leqq y_1\leqq y_2\leqq\cdots\leqq y_{m-3}\leqq x$ だから，

$$a+b\leqq 2y_1\leqq 2(1-a-b-x).\quad \therefore\quad a+b\leqq\frac{2}{3}(1-x)<\frac{2}{5}<x$$

となりビーカーAの水をBに入れてもXの水の量を上回ることはない．

したがって，ビーカーが3個のときも水の量が最大なのはXである．したがって，次の操作でXが空になって取り除かれることも水の量が増えることもない．また，その操作でビーカーは2個になるから操作は終了する．したがって，Xは最後まで x リットルの水が入ったままで残る．（証明終り）

（注）　最後にXが他のビーカーより水の量が少ないことはありうる．

第6問

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある2点A，Bを次のように動かす。

表が出た場合：点Aの座標が点Bの座標より大きいときは，AとBを共に正の方向に1動かす。そうでないときは，Aのみ正の方向に1動かす。

裏が出た場合：点Bの座標が点Aの座標より大きいときは，AとBを共に正の方向に1動かす。そうでないときは，Bのみ正の方向に1動かす。

最初2点A，Bは原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返してAとBを動かしていった結果，A，Bの到達した点の座標をそれぞれ a，b とする。

(1) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2) X_n を求めよ。

(3) n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。

分　野

数学A：数列，漸化式，**数学Ⅰ**：確率，期待値

考え方

題意の把握が難しい．実験してみることも大切．

座標の差が0か1しかないことに気づけば(2)までは標準的．

(3)については各回に a が増える期待値を考える．

【解答】

(1) n ($n=1, 2, \cdots$) 回の試行の後のA，Bの座標をそれぞれ，a_n，b_n とおく．

次の表から $-1 \leqq a_n-b_n \leqq 1$ であることが帰納的に導かれる．

	$a_n-b_n=1$	$a_n-b_n=0$	$a_n-b_n=-1$
場合の数	Y_n	X_n	Z_n
表	$a_{n+1}-b_{n+1}=1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=0$
裏	$a_{n+1}-b_{n+1}=0$	$a_{n+1}-b_{n+1}=-1$	$a_{n+1}-b_{n+1}=-1$

最初は原点にあるから $(a_0, b_0)=(0, 0)$ と考えてよい．したがって，$a_0-b_0=0$．上の表から a_n-b_n は1，0，-1 以外にはならないことがわかる．

$a_n-b_n=1$ である場合の数を Y_n，$a_n-b_n=-1$ である場合の数を Z_n とおく（$X_0=1$，$Y_0=Z_0=0$ とする）．

$$X_n+Y_n+Z_n=2^n,\quad X_{n+1}=Y_n+Z_n\quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

だから

$$X_{n+1}=2^n-X_n.\quad (n=0, 1, 2, \cdots) \qquad \cdots(答)$$

(2) $X_0=1$ を考慮．$p_n=\dfrac{X_n}{2^n}$ とおくと

$$\frac{X_{n+1}}{2^{n+1}}=-\frac{1}{2}\frac{X_n}{2^n}+\frac{1}{2}.$$

$$p_0=1,\quad p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right).$$

数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列．

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(p_0-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore\quad p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\therefore\quad X_n=2^np_n=\frac{1}{3}\cdot 2^n+\frac{2}{3}(-1)^n.\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$ …(答)

(3) (2)の p_n は n 回コインを投げたとき，$a=b$ となる確率である．

ここで，確率変数 W_k ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$) を

$$W_k=\begin{cases}1 & (k\text{ 回目に A が正方向に 1 だけ進むとき}),\\ 0 & (\text{それ以外のとき})\end{cases}$$

とする．

求めるものは $a=W_1+W_2+\cdots+W_n$ の期待値 $E(a)$ である．

$$E(a)=E(W_1+W_2+\cdots+W_n)=E(W_1)+E(W_2)+\cdots+E(W_n)$$ …①

$k-1$ 回までの状態とその確率，k 回目に A の座標が増える確率を表にすると次のよう．

状態	$a_{k-1}-b_{k-1}=1$	$a_{k-1}-b_{k-1}=0$	$a_{k-1}-b_{k-1}=-1$
確率	$\frac{1}{2}(1-p_{k-1})$	p_{k-1}	$\frac{1}{2}(1-p_{k-1})$
A の座標が増える確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

以上より

$$E(W_k)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-p_{k-1}}{2}+\frac{1}{2}p_{k-1}+1\cdot\frac{1-p_{k-1}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_{k-1}.$$

よって，① から，

$$E(a)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_{k-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right\}=\frac{2}{3}n-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

…(答)

(注) $a_k-b_k=1$ となる確率と $a_k-b_k=-1$ となる確率が等しいことは，A，B の動かし方の対称性よりわかる．

なお，これは

$$\begin{cases}Y_{n+1}=X_n+Y_n,\\ Z_{n+1}=X_n+Z_n\end{cases}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

より

$$Y_{n+1}-Z_{n+1}=Y_n-Z_n=\cdots=Y_0-Z_0=0$$

となることからもわかる．

2001 年　後期・理科 I 類

第 1 問

任意の自然数 $n \geqq 2$ に対して，常に不等式

$$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geqq \frac{i}{10}$$

が成立するような最大の整数 i を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：数列の極限，**数学 I**：不等式

考え方

$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1\right)$ とみると，この数列は n について単調に減少することがわかる．

したがって，$1-\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1\right) \geqq \frac{i}{10}$ をみたす最大の整数 i を求める．

和を求められる適当な数列でハサミウチをして，$1-\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1\right)$ のおおよその値を求める．

【解答】

$$n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}=1-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1\right).$$

$$\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}\,(\sqrt{k^2-1}+k)}>0$$

だから，与式の左辺は n について減少する．したがって，$n-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}} \geqq \frac{i}{10}$ をみたす最大の整数 i が求めるものである．

$$2k^2-\sqrt{k^2-1}\,(\sqrt{k^2-1}+k)=k^2+1-k\sqrt{k^2-1}=\frac{k}{k+\sqrt{k^2-1}}+1=\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}+1.$$

$k \geqq 2$ で

$$\frac{1}{2}<1<2k^2-\sqrt{k^2-1}\,(\sqrt{k^2-1}+k)<2.$$

よって，

$$\frac{1}{2k^2-\frac{1}{2}}<\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}-1=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}\,(\sqrt{k^2-1}+k)}<\frac{1}{2k^2-2}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k^2-\frac{1}{2}}&=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2k^2-2}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{8}.$$

よって，

$$1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}<\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)=1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^2-1}\,(\sqrt{k^2-1}+k)}<1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$
$$\frac{6}{10}<\frac{5}{8}<\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)<\frac{2}{3}<\frac{7}{10}$$

より，$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\right)\geqq\frac{i}{10}$ をみたす最大の整数 i は 6 である．

よって，求める整数 i は 6 である． …(答)

【別解】 河合塾公表解答

$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$，$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ とおく．

このとき，$S_n=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{8}}+\cdots+\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$．$x>1$ のとき $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}$ だから $f(x)$ は単調に減少する．$k\geqq2$ のとき，

$$\int_k^{k+1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx<\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}<\int_{k-1}^{k}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

$$S_n>\frac{2}{\sqrt{3}}+\int_3^{n+1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}+\left[\sqrt{x^2-1}\right]_3^{n+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}-\sqrt{8}+\sqrt{n^2+2n}. \quad\cdots①$$

$$S_n<\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{8}}+\int_3^{n}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{8}}+\left[\sqrt{x^2-1}\right]_3^{n}=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{8}}+\sqrt{n^2-1}. \quad\cdots②$$

①，② から $n\geqq3$ のとき，

$$n-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}}-\sqrt{n^2-1}<n-S_n<n-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{8}-\sqrt{n^2+2n}.$$

$$A_n=n-S_n,\quad B_n=n-\sqrt{n^2-1}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}},\quad C_n=n-\sqrt{n^2+2n}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{8}$$

とおくと，$B_n<A_n<C_n$．

$$B_n=\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}}$$

は減少数列で

$$\lim_{n\to\infty}B_n=-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{8}}=0.61\cdots>\frac{6}{10}$$

だから $n\geqq3$ のとき，$A_n>\frac{6}{10}$．

$$C_n=\frac{-2n}{n+\sqrt{n^2+2n}}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{8}.$$
$$\lim_{n\to\infty}C_n=-1-\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{8}=0.67\cdots.$$

よって，$n\geqq3$ で常に $A_n\geqq\frac{7}{10}$ になることはない．

$$A_2=2-\frac{2}{\sqrt{3}}=0.84\cdots \geqq \frac{6}{10}.$$

したがって，$n \geqq 2$ のすべての自然数 n に対して，$A_n \geqq \dfrac{i}{10}$ となる最大の整数は 6.　…(答)

第2問

⑴　図 1 のように，等間隔 h で格子状に互いに直交する 2 組の無数の平行線が引いてある平面が与えられている。その上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，この円がちょうど 2 本の線と交わる確率 p を求めよ。

⑵　図 2 のように，半径 $\sqrt{2}+1$ の円が重複なく，かつ隣り合う円と接して無数に敷き詰められた平面がある。この上に半径 1 の円 C を無作為に落とすとき，その円 C が平面上のちょうど 3 つの円と交わる確率 q を求めよ。

ただし，解答にあたり次のことを用いてよい。

平面上に共に原点 O を始点とする一次独立な 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ を考え，点 O と $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ の 3 つのベクトルの終点の 4 点を頂点とする平行四辺形を E とする。E の領域 F に対して，F を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の整数係数の一次結合 $m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$ によって平行移動したもの全体の和集合を D とする。即ち記号で書くと

$$D=\{\boldsymbol{x}+m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b} | \boldsymbol{x}\in F,\ m\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{Z}\}$$

とおく。ここで，$\boldsymbol{Z}$ は整数全体を表す。

このとき平面に 1 点 P を無作為に落とすとき，その点が D 内に落ちる確率は，F の面積の平行四辺形 E の面積に対する比になっている。

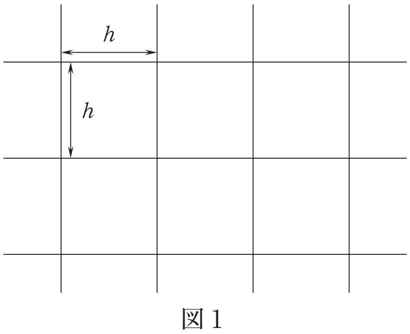


図 1

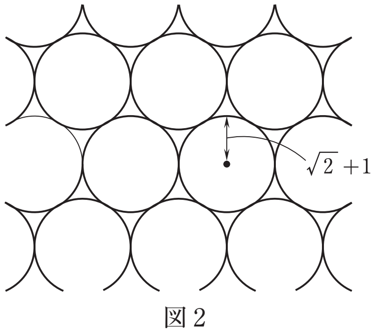


図 2

分　野

数学 I：確率，**数学 A**：平面図形

考え方

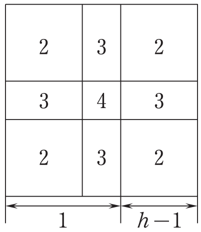
⑴は平行線で囲まれた正方形，⑵は 3 つの円の中心が作る正三角形を単位として，それぞれ無数に敷き詰められていると考える．その 1 単位の中で条件をみたす円 C の中心が存在する範囲を図示し，単位の面積に対するその面積の比が求めるものである．

【解答】

⑴　円の中心を含む正方形で考える．直線 l と半径 1 の円が交わる（共有点をもつ）条件は中心から直線までの距離が 1 以下のとき．

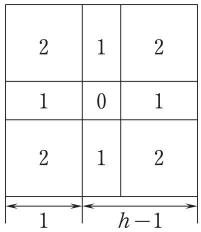
(i)　$h \leqq 1$ のとき中心をどのようにとっても円は平行な 2 直線と共有点をもつ．よって円は 4 直線以上と常に交わる．したがって，ちょうど 2 本の直線と交わる確率は 0.

(ii) $1<h\leqq 2$ のとき，1つの正方形の内部にある中心の位置と交点の個数を図示すると右図のようになる．



ちょうど2本の直線と交わる領域の面積は $4(h-1)^2$ だから求める確率は $\dfrac{4(h-1)^2}{h^2}$.

(iii) $h>2$ のとき，1つの正方形の内部にある中心の位置と交点の個数を図示すると右図のようになる．



ちょうど2本の直線と交わる領域の面積は4だから求める確率は $\dfrac{4}{h^2}$.

よって，

$$p=\begin{cases} 0 & (h\leqq 1), \\ \dfrac{4(h-1)^2}{h^2} & (1<h\leqq 2), \\ \dfrac{4}{h^2} & (h>2). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

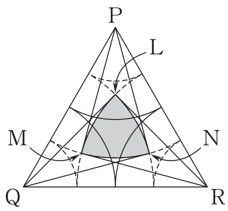
(2) 互いに接する3円の中心P，Q，Rを頂点とする正三角形PQRの内部で考える．正三角形PQRの1辺の長さは $2(\sqrt{2}+1)$，正三角形PQRの面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\{2(\sqrt{2}+1)\}^2=\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)^2$.

半径 $1+\sqrt{2}$ の円と半径1の円が交わる条件は

$$\sqrt{2}\leqq(\text{中心間距離})\leqq 2+\sqrt{2}.$$

正三角形PQRの1辺に対する高さは $2(\sqrt{2}+1)\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)>2+\sqrt{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ だから，正三角形PQRの内部に円 C の中心があるとき円 C はP，Q，Rを中心とする円以外の円とは交わらない．

正三角形PQR内でP，Q，Rを中心とする3円と円 C が交わるような円 C の中心の存在範囲は右図網かけ部．Q，Rを中心とする半径 $2+\sqrt{2}$ の2円の三角形PQR内での交点をL，R，Pを中心とする半径 $2+\sqrt{2}$ の2円の三角形PQR内での交点をM，P，Qを中心とする半径 $2+\sqrt{2}$ の2円の三角形PQR内での交点をNとする．



三角形LQRにおいて，$LQ=LR=2+\sqrt{2}$ で $QR=2(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}\,LQ$ だから三角形LQRは直角二等辺三角形．したがって，$\angle LRP=\angle QRP-\angle QRL=60^\circ-45^\circ=15^\circ$．同様に $\angle QRM=15^\circ$ だから $\angle LRM=60^\circ-2\times 15^\circ=30^\circ$．同様に $\angle MPN=\angle NQL=30^\circ$．また，$MN=2(2+\sqrt{2})\sin 15^\circ$ である．

弓形MNの面積は

$$\text{扇形 PMN}-\triangle\text{PMN}=\frac{1}{12}(2+\sqrt{2})^2\pi-\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2\frac{1}{2}=\frac{\pi-3}{12}(2+\sqrt{2})^2.$$

また正三角形LMNの面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\{2(2+\sqrt{2})\sin 15^\circ\}^2=\sqrt{3}(2+\sqrt{2})^2\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{2})^2(2-\sqrt{3}).$$

よって，条件をみたす領域の面積は

$$3\times\frac{\pi-3}{12}(2+\sqrt{2})^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{2})^2(2-\sqrt{3})=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6).$$

よって求める確率は

$$q=\frac{\dfrac{(2+\sqrt{2})^2}{4}(\pi+2\sqrt{3}-6)}{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)^2}=\frac{\pi+2\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+1-\sqrt{3}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注）　求める確率を問題文では平行四辺形の面積に対する比で定義しているが，(2)において，隣接する4つの円の中心が作る平行四辺形（菱形）は短い方の対角線について対称であるから，条件をみたす点が作る図形が菱形に占める面積比と対角線で分割された2つの正三角形に占める面積比はそれぞれ等しい．【解答】は正三角形に占める比を計算した．

第3問

整数を係数とする2次多項式 $f(x)$ で2次の項の係数が正であるものが与えられている。任意の実数 x に対して，平面上の原点を中心とし半径が1である単位円 C 上の点 $\mathrm{P}(x)$ を

$$\mathrm{P}(x)=(\cos 2\pi f(x),\ \sin 2\pi f(x))$$

によって定める。円周 C の弧 I で長さが L $(0<L<2\pi)$ であるものを固定する。

そのとき各自然数 k に対して区間 $[k,\ k+1]$ の部分

$$\{x \mid k \leqq x \leqq k+1,\ \mathrm{P}(x) \in I\}$$

は互いに交わらない有限個の区間の和集合になっているので，それらの区間の長さの総和を T_k であらわす。このとき，

$$\lim_{k\to\infty} T_k=\frac{L}{2\pi}$$

を証明せよ。

分　野

数学A：数列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

$f(x)$ は x^2 の係数が正だから十分大きな x に対して $k \leqq x \leqq k+1$ の範囲で単調に増加し，$f(x)$ のとる範囲は大きくなる．したがって点 $\mathrm{P}(x)$ は単位円 C のまわりを何周もする．そのうち条件をみたす x の範囲の和を求める．

和の極限は適当に不等式ではさんでハサミウチに持ち込む．

【解答】

$f(x)=a(x-p)^2+q$ とおき，

$$I=\{\mathrm{P}(\theta) \mid (\cos\theta,\ \sin\theta),\ \alpha \leqq \theta \leqq \alpha+L,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi\}$$

とする．

$\mathrm{P}(x) \in I$ である条件は $\alpha+2n\pi \leqq 2\pi f(x) \leqq \alpha+L+2n\pi$ をみたす n が存在することである．つまり，

$$\frac{\alpha}{2\pi}+n \leqq a(x-p)^2+q \leqq \frac{\alpha}{2\pi}+\frac{L}{2\pi}+n.$$

$\dfrac{\alpha}{2\pi}-q=A$，$\dfrac{L}{2\pi}=\lambda$ とおくと，$x>p$ の範囲で $0<\lambda<1$ で

$$\sqrt{A+n} \leqq \sqrt{a}\,(x-p) \leqq \sqrt{A+\lambda+n}.$$

このとき n に対する x の区間の長さは

$$\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A})=\frac{\lambda}{\sqrt{a}\,(\sqrt{n+A+\lambda}+\sqrt{n+A})}.$$

よって，$0<\lambda<1$ から

$$\frac{\lambda}{\sqrt{a}\,(\sqrt{n+A+1}+\sqrt{n+A})}<\frac{\lambda}{\sqrt{a}\,(\sqrt{n+A+\lambda}+\sqrt{n+A})}$$
$$<\frac{\lambda}{\sqrt{a}\,(\sqrt{n+A+\lambda}+\sqrt{n+A+\lambda-1})}.$$

$$\therefore\quad \frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+1}-\sqrt{n+A})<\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A})$$
$$<\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A+\lambda-1}). \qquad \cdots①$$

$0<\lambda<1$ であるから，$\sqrt{n+A+\lambda}<\sqrt{n+A+1}$.

$x=k$ に対して，

$$\sqrt{n_k+A}\leqq\sqrt{a}\,(k-p)<\sqrt{n_k+A+1}$$

をみたす整数を n_k とする．このとき点 $\mathrm{P}(k)$ は C 上で α を起点として，n_k 周し，更に，そこから一周以内にある．

したがって，

$$a(k-p)^2-1<n_k+A\leqq a(k-p)^2. \qquad \cdots②$$

$a>0$ だから $k>p$ のとき n_k は増加し，十分大きな n に対して

$$\sqrt{n+A+1}-\sqrt{n+A}=\frac{1}{\sqrt{n+A+1}+\sqrt{n+A}}\to 0$$

だから，十分大きな k に対して $n_k<n_{k+1}$.（n_k 周目から n_{k+1} 周目まで $P(x)$ は何周もする）

よって，T_k は条件をみたす区間の総和である．十分大きな k に対して

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A})\leqq T_k\leqq\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}}\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A}).$$

$$\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A})>\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}-1}\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+1}-\sqrt{n+A}) \qquad (①\text{から})$$
$$=\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n_{k+1}+A}-\sqrt{n_k+A+1})$$
$$>\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\{\sqrt{a(k-p+1)^2-1}-\sqrt{a(k-p)^2+1}\} \qquad (②\text{から})$$
$$=\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\cdot\frac{2a(k-p)+a-2}{\sqrt{a(k-p+1)^2-1}+\sqrt{a(k-p)^2+1}}$$
$$=\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}\right)^2-\dfrac{1}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{1}{ak^2}}}.$$

また，

$$\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}}\frac{1}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A})<\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}}\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n+A+\lambda}-\sqrt{n+A+\lambda-1}) \qquad (①\text{より})$$
$$=\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{n_{k+1}+A+\lambda}-\sqrt{n_k+A+\lambda-1})$$
$$<\frac{\lambda}{\sqrt{a}}(\sqrt{a(k+1-p)^2+\lambda}-\sqrt{a(k-p)^2+\lambda-2}) \qquad (②\text{より})$$
$$<\frac{\lambda}{\sqrt{a}}\cdot\frac{a(2k-2p+1)+2}{\sqrt{a(k+1-p)^2+\lambda}+\sqrt{a(k-p)^2+\lambda-2}}$$
$$=\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda-2}{ak^2}}}.$$

以上から，

$$\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}\right)^2-\dfrac{1}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{1}{ak^2}}}<T_k$$

$$<\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda-2}{ak^2}}}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}\right)^2-\dfrac{1}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{1}{ak^2}}}=\lambda.$$

$$\lim_{k\to\infty}\lambda\cdot\frac{2-2\dfrac{p}{k}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{2}{ak}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{k}-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda}{ak^2}}+\sqrt{\left(1-\dfrac{p}{k}\right)^2+\dfrac{\lambda-2}{ak^2}}}=\lambda.$$

ハサミウチの原理から

$$\lim_{k\to\infty}T_k=\lambda=\frac{L}{2\pi}.$$

（証明終り）

（注） 結果は円周に対する弧の長さの比であった．

x が大きくなるにしたがって，x が $[k,\ k+1]$ にあるときにＰが動く範囲はどんどん大きくなり，円 C を何周もするようになる．Ｐが動いた範囲は何周かと，その端数になるが，端数は x が大きくなるにしたがって，全体に占める割合は小さくなる．したがって，Ｐが通過する L の部分の長さの比は円周に対する L の長さの比に限りなく近づく．

2002 年　前期・文科

第 1 問

2 つの放物線

$$y=2\sqrt{3}\,(x-\cos\theta)^2+\sin\theta,$$
$$y=-2\sqrt{3}\,(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるような θ の範囲を求めよ。

ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

分　野

数学 I ：2 次関数，**数学 II** ：三角関数

考え方

2 式から y を消去．実数解をもつ三角不等式を解く．

【解答】

$$y=2\sqrt{3}\,(x-\cos\theta)^2+\sin\theta, \qquad \cdots①$$
$$y=-2\sqrt{3}\,(x+\cos\theta)^2-\sin\theta \qquad \cdots②$$

とおく．$\dfrac{①-②}{2}$ より

$$0=2\sqrt{3}\,(x^2+\cos^2\theta)+\sin\theta.\quad 2\sqrt{3}\,x^2=2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}.$$

異なる実数解をもつ条件は

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}=(2\sin\theta+\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\theta-2)>0.$$

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ だから，$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$．よって，

$$2\sin\theta+\sqrt{3}<0.\quad \sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$0°\leqq\theta<360°$ より，これをみたす θ の範囲は

$$240°<\theta<300°. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを

$$a_nx+b_n$$

とおく。

(1)　数列 a_n，b_n，$n=1, 2, 3, \cdots$，は

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n, \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

を満たすことを示せ。

(2)　$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，a_n，b_n は共に正の整数で，互いに素であることを証明せよ。

分　野

数学 A ：整数，剰余，数学的帰納法

考え方

数学的帰納法で証明する．a_{n+1}，b_{n+1} の最大公約数が a_n，b_n の最大公約数と一致することを示す．

【解答】

(1) x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $Q_n(x)$ とおくと,

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n.$$

このとき,

$$x^{n+2}=x(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx^2+b_nx=(x^2-x-1)\{xQ_n(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n.$$

よって, x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りは

$$a_{n+1}x+b_{n+1}=(a_n+b_n)x+a_n.$$

よって,

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n, \\ b_{n+1}=a_n. \end{cases}$$ （証明終り）

(2) 数学的帰納法で証明する.

(I) $n=1$ のとき $x^2=(x^2-x-1)+x+1$.
x^2 を x^2-x-1 で割った余りは $x+1$. よって, $a_1=b_1=1$.
よって, a_1, b_1 は共に正の整数で, 互いに素である.

(II) $n=k$ のとき, a_k, b_k は共に正の整数で, 互いに素であるとする.
$a_k>0$, $b_k>0$ から

$$a_{k+1}=a_k+b_k>0, \quad b_{k+1}=a_k>0.$$

a_{k+1}, b_{k+1} の最大公約数を g とし, $a_{k+1}=ag$, $b_{k+1}=bg$ (a, b は整数) とおくと,

$$a_k=b_{k+1}=bg, \quad b_k=a_{k+1}-b_{k+1}=ag-bg=(a-b)g.$$

よって, g は a_k, b_k の公約数. a_k, b_k は互いに素だから, $g=1$. よって, a_{k+1}, b_{k+1} は互いに素.

以上から, $n=1, 2, 3, \cdots$ に対して, a_n, b_n は共に正の整数で, 互いに素である. （証明終り）

第3問

2つの関数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx,$$
$$g(x)=px^3+qx^2+rx$$

が次の5つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0), \quad f(-1)=-1, \quad f'(-1)=0,$$
$$g(1)=3, \quad g'(1)=0$$

ここで, $f(x)$, $g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで, 定積分

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_0^1\{g''(x)\}^2dx$$

の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

ただし, $f''(x)$, $g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$, $g'(x)$ の導関数を表す。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分, 整式の積分

考え方

6つの係数 a, b, c, p, q, r について5つの条件があるから1つの係数で他の係数は表される. したがって, $\int_0^{-1}\{f''(x)\}^2dx+\int_0^1\{g''(x)\}^2dx$ は1文字の関数になる.

【解答】

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c,\quad g'(x)=3px^2+2qx+r.$$

与えられた条件から，

$$f'(0)=g'(0)\ \text{より}\quad c=r\ \cdots①.$$

$$f(-1)=-a+b-c=-1\ \cdots②,\quad f'(-1)=3a-2b+c=0\ \cdots③.$$

$$g(1)=p+q+r=3\ \cdots④,\quad g'(1)=3p+2q+r=0\ \cdots⑤.$$

②＋③ より，$2a-b=-1$．よって，$b=2a+1$．③ より $c=a+2$．

⑤－④ より，$2p+q=-3$．よって，$q=-3-2p$．

①，④ より，$p+(-3-2p)+(a+2)=3$．よって，$p=a-4$，$q=5-2a$．

$$f''(x)=6ax+2b,\quad g''(x)=6px+2q.$$

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{0}(6ax+2b)^2dx=\int_{-1}^{0}(36a^2x^2+24abx+4b^2)\,dx$$

$$=\Big[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\Big]_{-1}^{0}=12a^2-12ab+4b^2.$$

$b=2a+1$ を代入して

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx=4(a^2+a+1). \qquad \cdots⑥$$

$$\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=\int_{0}^{1}(6px+2q)^2dx=\Big[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\Big]_{0}^{1}$$

$$=12p^2+12pq+4q^2.$$

$p=a-4$，$q=5-2a$ を代入して

$$\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=12(a-4)^2+12(a-4)(5-2a)+4(5-2a)^2=4(a^2-5a+13). \qquad \cdots⑦$$

⑥，⑦ より，

$$\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx=8(a^2-2a+7)=8\{(a-1)^2+6\}.$$

よって，$a=1$ のとき，与式は最小になる．

このとき，

$$a=1,\quad b=3,\quad c=3,\quad p=-3,\quad q=3,\quad r=3.$$

よって，

$$f(x)=x^3+3x^2+3x,\quad g(x)=-3x^3+3x^2+3x. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$，$n \geqq 1$ であるとする。

分　野

数学A：論理，論証問題

考え方

赤い点から円周上の他の点まで進むとき途中端点の色が異なる線分が偶数個あるか奇数個あるかで他の点の色が定まることに注目．

【解答】

1 個の赤い点から反時計回りに一周する．

両端の点の色が異なる弧は次の 2 通りある．

(A)　両端の点の色が反時計回りに赤青の順になっている弧．

(B)　両端の点の色が反時計回りに青赤の順になっている弧．

両端が同じ色の点である弧を無視すれば

(A)，(B)，(A)，(B)，(A)，(B)，…，(A)，(B)

の順に並ぶ．最後は赤に戻るから (B) で終る．

したがって，(A) の弧と (B) の弧は同数であり，その合計個数は偶数である．　（証明終り）

【別解】

最初に赤青の点が 1 個ずつ合計 2 個の点が円周上にある場合を考える．このとき両端の点の色が異なる弧の個数は 2 個で偶数ある．

いくつかの点が円周上にあるとき，もう 1 個の点を付け加えることを考える．付け加えられる点は既にある 2 点の間に入ると考える．赤点を付け加えるとき，

(i)　隣りあう 2 個の赤点の間に入るとき，条件をみたす弧の個数は変わらない．

(ii)　隣りあう赤点と青点の間に入るとき，条件をみたす弧の個数は変わらない．

(iii)　隣りあう 2 個の青点の間に入るとき，新しく付け加えられた点の両側の弧が条件をみたすから，条件をみたす弧の個数が 2 個増える．

青点を付け加えるときも同様に 2 個の赤点の間に入るときだけ条件をみたす弧の個数が 2 個増える．

よって，条件をみたす弧の個数は，はじめ 2 個であり点を 1 個付け加えるごとに 0 個もしくは 2 個ずつ増えてゆくので，常に偶数個である．

以上から条件をみたす弧の合計個数は常に偶数である．　（証明終り）

2002 年　前期・理科

第 1 問

2 つの放物線

$$y=2\sqrt{3}\,(x-\cos\theta)^2+\sin\theta,$$
$$y=-2\sqrt{3}\,(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2 次関数，**数学Ⅱ**：三角関数

考え方

2 式から y を消去．実数解をもつ三角不等式を解く．

【解答】

$$y=2\sqrt{3}\,(x-\cos\theta)^2+\sin\theta, \qquad \cdots①$$
$$y=-2\sqrt{3}\,(x+\cos\theta)^2-\sin\theta \qquad \cdots②$$

とおく．$\dfrac{①-②}{2}$ より

$$0=2\sqrt{3}\,(x^2+\cos^2\theta)+\sin\theta. \quad 2\sqrt{3}\,x^2=2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}.$$

異なる実数解をもつ条件は

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}=(2\sin\theta+\sqrt{3})(\sqrt{3}\sin\theta-2)>0.$$

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ だから，$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$．よって，

$$2\sin\theta+\sqrt{3}<0. \quad \sin\theta<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

これをみたす θ の範囲は，n を任意の整数として

$$\frac{4}{3}\pi+2n\pi<\theta<\frac{5}{3}\pi+2n\pi. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 3 問

xyz 空間内の原点 O(0, 0, 0) を中心とし，点 A(0, 0, -1) を通る球面を S とする。S の外側にある点 P(x, y, z) に対し，OP を直径とする球面と S の交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下した垂線の足をそれぞれ Q，R とする。このとき，

$$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{AR}$$

であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ。

分　野

数学B：空間図形，**数学Ⅱ**：整式の積分，体積

考え方

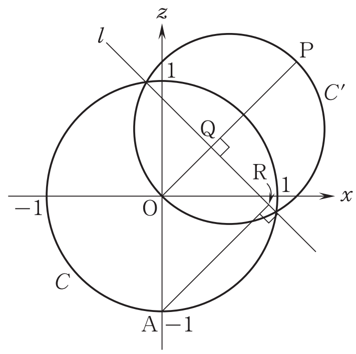
空間の問題であるが z 軸とPを含む平面内で考えればよい．

Pの存在範囲は得られた領域を z 軸について回転してできる．

【解答】

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対して，Pと z 軸を含む平面での切り口にQ，Rはあり，点Pの動く範囲 V は z 軸を軸とする回転体である．そこで，V を xz 平面で切った切り口を考える．

$$\mathrm{P}(\alpha,\ 0,\ \gamma)\quad(\alpha^2+\gamma^2>1)$$



とし，球面 S，OPを直径とする球面を xz 平面で切った切り口を C，C' とすると，xz 平面上で，

$$C\ :x^2+z^2=1, \qquad \cdots ①$$

$$C'\ :\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(z-\frac{\gamma}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\gamma^2}{4} \qquad \cdots ②$$

$$(つまり，x^2+z^2-\alpha x-\gamma z=0)$$

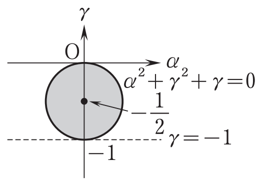
である．L と xz 平面との交線 l の方程式は，①と②の差をとって，

$$\alpha x+\gamma z=1.$$

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}=\frac{\alpha^2+\gamma^2-1}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}},\quad \mathrm{AR}=\frac{|-\gamma-1|}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2}}.$$

$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{AR}$ より，

$$\alpha^2+\gamma^2-1\leqq|\gamma+1|. \qquad \cdots ③$$



(i)　$\gamma+1<0$ のとき，

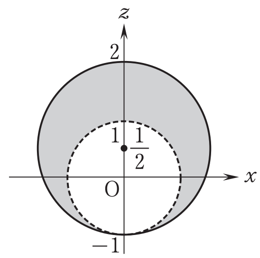
③は $\alpha^2+\gamma^2+\gamma\leqq0$ となり，$\gamma+1<0$ をみたさない．

(ii)　$\gamma+1\geqq0$ のとき，

③は $\alpha^2+\gamma^2-\gamma\leqq2$ となる．

$$\therefore\quad \alpha^2+\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}.$$

$\alpha^2+\gamma^2>1$ であるから，V は次図の網掛け部を z 軸のまわりに回転した立体である．



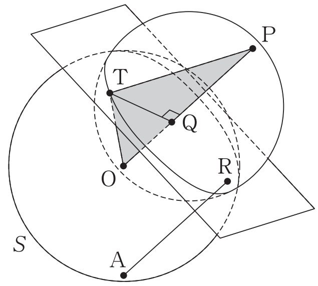
したがって，V は

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}\ かつ\ x^2+y^2+z^2>1. \qquad \cdots(答)$$

また V の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot1^3=\frac{19\pi}{6}<\frac{19\times3.15}{6}<10. \qquad (証明終り)$$

【別解】



OP を直径とする球面と S の交点のひとつを T とする．点 Q は線分 OP 上の点であり，直角三角形 OQT と OTP が相似である．

OP$=a$ とおくと，

$$\mathrm{OT}:\mathrm{OQ}=\mathrm{OP}:\mathrm{OT}.\quad \therefore\quad \mathrm{OQ}=\frac{1}{a}.\quad \mathrm{PQ}=a-\frac{1}{a}.\qquad \cdots①$$

また，AR$/\!/$OP により，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

$\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=\frac{1}{a}:a=1:a^2$ により，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{a^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}.\quad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(k-\frac{1}{a^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから，

$$\left\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(k-\frac{1}{a^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0.$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-z$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=a^2$ により

$$-z+\left(k-\frac{1}{a^2}\right)\cdot a^2=0.\quad \therefore\quad k=\frac{z+1}{a^2}.$$

したがって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|=|k\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\frac{|z+1|}{a^2}\cdot a=\frac{|z+1|}{a}.\qquad \cdots②$$

①，② を条件 PQ$\leqq$AR に用いて，

$$a-\frac{1}{a}\leqq\frac{|z+1|}{a}.\quad \therefore\quad a^2-1\leqq|z+1|.$$

$\mathrm{OP}=a=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ により

$$x^2+y^2+z^2-1\leqq|z+1|.$$

(i) $z+1<0$ のとき，

$$x^2+y^2+z^2-1\leqq-z-1.\quad \therefore\quad x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{1}{4}.$$

このとき，

「平面 $z=-1$ の下側」かつ「球面 $x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ 上またはその内部」

となるが，このような $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

(ii) $z+1\geqq0$ のとき，

$$x^2+y^2+z^2-1\leqq z+1.\quad \therefore\quad x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}.$$

このとき，

「平面 $z=-1$ 上またはその上側」かつ「球面 $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ 上またはその内部」

であり，このような $(x,\ y,\ z)$ の条件は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}.$$

以上 (i)，(ii) より，V は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\leqq\frac{9}{4}\ \text{かつ}\ x^2+y^2+z^2>1.\qquad \cdots(答)$$

また V の体積は，

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{19\pi}{6}<\frac{19\times 3.15}{6}<10.$$ （証明終り）

【参考解】

O を中心とし，A を通る球面 S の方程式は $x^2+y^2+z^2=1$. …①

P$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ に対し OP を直径とする球面 S' の方程式は

$$x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)=0,$$

すなわち，

$$x^2-\alpha x+y^2-\beta y+z^2-\gamma z=0. \quad \cdots②$$

S と S' は必ず交点をもつので，①−② より得られる

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=1$$

が平面 L の方程式である．

ここで，「点と平面の距離の公式」を用いると，

$$\mathrm{PQ}=\frac{|\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \mathrm{AR}=\frac{|-\gamma-1|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

条件より，P は S の外部にあるので

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>1.$$

これより，

$$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{AR} \iff |\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1|\leqq|\gamma+1| \iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1\leqq|\gamma+1|.$$

以下**【別解】**と同様.

（注） この解答を**【参考解】**とした理由は当時「点と平面の距離の公式」は教科書になかったからである.

第 4 問

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 P$(0,\ a)$ をとる。関数

$$y=\frac{x^2}{x^2+1}$$

のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 O$(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

接線方向と，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の向きがわかれば直交条件から a は接点の x 座標 t の関数になる.

【解答】

Q の座標を $\left(t,\ \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)$ とする.

$y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ から，Q における接線の傾きは $\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$.

接線に平行なベクトルは $\vec{l}=\left(1,\ \dfrac{2t}{(t^2+1)^2}\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(t,\ \dfrac{t^2}{t^2+1}-a\right)$.

PQ が接線と垂直なとき,

$$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t+\frac{2t^3}{(t^2+1)^3}-a\frac{2t}{(t^2+1)^2}=0.$$

$t\neq 0$ のとき,

$$a=\frac{(t^2+1)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}.$$

$X=t^2$ とおくと,$X>0$.

$$f(X)=\frac{(X+1)^2}{2}+\frac{X}{X+1}$$

とおくと,$X>0$ で

$$f'(X)=X+1+\frac{1}{(X+1)^2}=\frac{(X+1)^3+1}{(X+1)^2}>0.$$

$f(0)=\dfrac{1}{2}$. よって,$X>0$ のとき,$f(X)>\dfrac{1}{2}$.

求める a の範囲は

$$a>\frac{1}{2}.$$ …(答)

【別解】

$g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ とおくと,$g'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

$t\neq 0$ のとき,点 $(t,\ g(t))$ における法線の方程式は

$$y=-\frac{(t^2+1)^2}{2t}(x-t)+\frac{t^2}{t^2+1}.$$

y 切片は $\dfrac{(t^2+1)^2}{2}+\dfrac{t^2}{t^2+1}$.

$$a=\frac{(t^2+1)^2}{2}+\frac{t^2}{t^2+1}$$

をみたす t が存在する条件が求めるものである.以下**【解答】**と同じ.

第5問

Oを原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，をとる。また，$z$ 軸上 $z\geqq 0$ の部分に点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが1になるようにとる。三角錐（すい）$\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$$

を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，区分求積，体積，**数学B**：空間図形

考え方

P_k は直線 $x+y=1$ 上にあることから $\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の面積は容易に求められる．また，$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=1$ から OQ_k の長さを求めれば，V_k は求められる．

体積の和の極限は区分求積の形をしているから積分に直してその和を求める．

【解答】

Q_k の座標を $(0,\ 0,\ q_k)$ とすると，

$$\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k{}^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+q_k{}^2=1$$

から，

$$q_k=\sqrt{2\frac{k}{n}-2\frac{k^2}{n^2}}.$$

P_k，P_{k+1} は直線 $x+y=1$，$z=0$ 上にあるから，

$$\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}}{n}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}.$$

よって，

$$V_k=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\cdot\mathrm{OQ}_k=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{n}\sqrt{2\frac{k}{n}-2\frac{k^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx.$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$ は半円 $0\leqq y\leqq\sqrt{x-x^2}$ すなわち $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2\leqq\dfrac{1}{4}$ の，$y\geqq 0$ の面積に等しいからその値は $\dfrac{1}{2}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{\pi}{8}$.

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\,\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

第6問

N を正の整数とする。$2N$ 個の項からなる数列

$$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$$

を

$$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$$

という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし，b_i の次に a_i，a_i の次に b_{i+1} が来るようなものになる。また，数列 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において，数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。

たとえば，$N=3$ のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ をシャッフルすると $\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$ となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$ である。

(1) 数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ を3回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1\leqq k\leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し，$f(k)-2k$ は $2N+1$ で割り切れることを示せ。

(3) n を正の整数とし，$N=2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ にもどることを証明せよ。

分　野

数学A：写像，整数

考え方

「シャッフル」というが同じ置換を繰り返しているにすぎない．

$f(k)$ は $2k$ を $2N+1$ で割った余りであることに注目する．

【解答】

(1) $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ を1回シャッフルすると $\{5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 3,\ 8,\ 4\}$，もう1回シャッフルすると $\{7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2\}$，更にもう1回シャッフルすると $\{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$ となる．

求める数列は，　$\{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$．　…(答)

(2) $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ に対して，$f(k)=\begin{cases} 2k & (1\leqq k\leqq N), \\ 2k-2N-1 & (N+1\leqq k\leqq 2N). \end{cases}$

よって，$f(k)-2k=\begin{cases} 0 & (1\leqq k\leqq N), \\ -(2N+1) & (2N+1\leqq k\leqq 2N) \end{cases}$. したがって，$f(k)-2k$ は任意の整数 k に対して $2N+1$ で割り切れる．

(3) $1\leqq f(k)\leqq 2N$ であるから，(2)の結果は $f(k)$ が $2k$ を $2N+1$ で割った余りに他ならないことを示している．ただし，$1\leqq k\leqq 2N$ であるから，$f(k)$ が0になることはない．

m 回シャッフルしたときに k が現れる位置は $2^m k$ を $2N+1$ で割った余りの位置である．

$2n$ 回シャッフルすると，k が現れる位置は $2^{2n}k$ を $2N+1$ で割った余りの位置である．

$N=2^{n-1}$ のとき，$2N+1=2^n+1$ であるから，$2^{2n}k=(2N-1)(2N+1)k+k$ となり $2N+1$ で割った余りは k である．したがって，k が現れる位置は k であり，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ にもどる．

(証明終り)

2002 年　後期・理科 I 類

第 1 問

実数全体で定義された関数 $f(x)=xe^{-x^3}$ を考える。

(1) $f(x)$ の増減・凹凸を調べ $f(x)$ のグラフの概形を図示せよ。

(2) 正の数 C に対して $y=f(x)$ と x 軸，および $x=C$ で囲まれた領域を D_1 とする。D_1 を x 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積を $V_1(C)$ とおくとき

$$\lim_{C\to\infty} V_1(C)$$

を求めよ。

(3) $y=f(x)$ の $x\geqq 0$ における最大値を M とするとき，$y=f(x)$ と y 軸，および $y=M$ で囲まれた領域を D_2 とおく。D_2 を y 軸のまわりに回転させてえられる立体の体積 V_2 を求めよ。

分　野

数学 III：積分法，微分法，関数の極限

考え方

基本に忠実に増減凹凸を調べ，x 軸，y 軸に関する回転体の体積を求める．

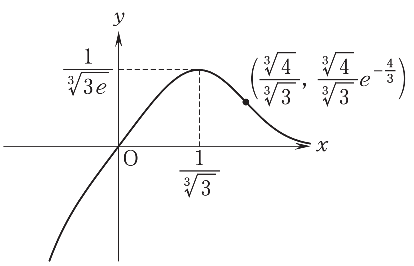
【解答】

(1)
$$f'(x)=e^{-x^3}-3x^3e^{-x^3}=(1-3x^3)e^{-x^3}.$$
$$f''(x)=(-9x^2)e^{-x^3}+(1-3x^3)(-3x^2)e^{-x^3}=-3x^2(4-3x^3)e^{-x^3}.$$

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$	∞	$+$		$+$	0	$-$		$-$	(0)
$f''(x)$	$-\infty$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	(0)
$f(x)$	$-\infty$	↗		↗		↘		↘	(0)

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{3e}},\quad f\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}\right)=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3e^4}},\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

図示すると下図太線.



（注） グラフを描く上で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}xe^{-x^3}=0$ を既知として扱ったが，$x>0$ で $e^{x^3}>1+x^3$ から $x>0$ で $0<xe^{-x^3}<\dfrac{x}{1+x^3}$ から容易に導かれる．ここでは軽く扱った．

(2) $V_1(C)=\pi\displaystyle\int_0^C x^2e^{-2x^3}dx$．$u=x^3$ とおくと，

$$V_1(C)=\pi\int_0^{C^3}e^{-2u}\frac{du}{3}=\frac{\pi}{3}\left[-\frac{1}{2}e^{-2u}\right]_0^{C^3}=\frac{\pi}{6}(1-e^{-2C^3}).$$

$$\lim_{C\to\infty} V_1(C)=\frac{\pi}{6}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　(1) より　$M=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3e}}$.

$$\begin{aligned} V_2&=\pi\int_0^M x^2\,dy=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} x^2 f'(x)\,dx \\ &=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} x^2(1-3x^3)e^{-x^3}\,dx=\pi\int_0^{\frac{1}{3}}(1-3u)e^{-u}\,\frac{du}{3} \\ &=\frac{\pi}{3}\left\{\Big[-(1-3u)e^{-u}\Big]_0^{\frac{1}{3}}-\int_0^{\frac{1}{3}}3e^{-u}du\right\} \\ &=\frac{\pi}{3}\left(3e^{-\frac{1}{3}}-2\right). \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

第2問

xyz 空間において次のような3つの互いに合同な長方形 L_1，L_2，L_3 を考える。

- L_1 は xy 平面に含まれ，$P_1(a, b, 0)$，$Q_1(-a, b, 0)$，$R_1(-a, -b, 0)$，$S_1(a, -b, 0)$ を頂点とする。
- L_2 は yz 平面に含まれ，$P_2(0, a, b)$，$Q_2(0, -a, b)$，$R_2(0, -a, -b)$，$S_2(0, a, -b)$ を頂点とする。
- L_3 は zx 平面に含まれ，$P_3(b, 0, a)$，$Q_3(b, 0, -a)$，$R_3(-b, 0, -a)$，$S_3(-b, 0, a)$ を頂点とする。

ここで $a>b>0$ とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\triangle P_1P_2P_3$ の面積，および $\triangle P_1P_2P_3$ と原点Oの距離を求めよ。

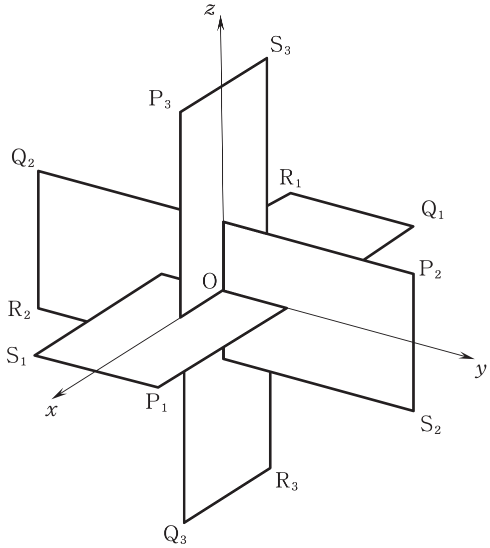
(2) 四面体 $OP_1P_2P_3$ および四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積をそれぞれ求めよ。

(3) L_1，L_2，L_3 の12頂点から3点を選び三角形をつくる。このとき $\triangle P_1P_2P_3$ または $\triangle P_1P_2S_2$ と合同な三角形が20個えられる。これらの三角形で囲まれる二十面体を D とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ なる θ に対して

$$a=\cos\theta,\quad b=\sin\theta$$

とおくとき，D の体積 V を $t=\tan\theta$ の関数 $V(t)$ として表せ。

(4) $0<t<1$ において $V(t)$ は最大値をとることを示し，そのときの t の値を求めよ。



分　野

数学B：空間図形，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

三角形 $P_1P_2P_3$ は正三角形で，$OP_1=OP_2=OP_3$ だから1辺の長さと，Oと重心の距離がわかれば，面積，Oとの距離，四面体 $OP_1P_2P_3$ の体積は求められる．

四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積は三角形 OP_2S_2 が yz 平面にあるからこれを底面として求める．

20個の面とOを結んでできる20個の四面体のうち8個は四面体 $OP_1P_2P_3$ と合同であり，12個は四面体 $OP_1P_2S_2$ と合同である．

あとは誘導に従って，体積を t で表し増減を調べればよい．

【解答】

(1) $P_1P_2=P_2P_3=P_3P_1=\sqrt{a^2+(a-b)^2+b^2}$ だから三角形 $P_1P_2P_3$ は1辺の長さが $\sqrt{2a^2-2ab+2b^2}$ の正三角形．その面積は

$$\frac{1}{2}(2a^2-2ab+2b^2)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-ab+b^2). \qquad \cdots(\text{答})$$

三角形 $P_1P_2P_3$ の重心をGとすると，$OP_1=OP_2=OP_3$ だから平面 $P_1P_2P_3$ とOの距離はOG．
$G\left(\dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{a+b}{3}\right)$ だから平面 $P_1P_2P_3$ とOの距離は

$$OG=\frac{a+b}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 四面体 $OP_1P_2P_3$ の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle P_1P_2P_3\cdot OG=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2-ab+b^2)\frac{a+b}{\sqrt{3}}=\frac{1}{6}(a^2-ab+b^2)(a+b)=\frac{a^3+b^3}{6}. \qquad \cdots(\text{答})$$

三角形 OP_2S_2 は yz 平面内の三角形で，$P_2S_2=2b$ を底辺とすると高さは a．よって，$\triangle OP_2S_2=ab$．
四面体 $OP_1P_2S_2$ の底面を三角形 OP_2S_2 とすると，高さは a．よって，四面体 $OP_1P_2S_2$ の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle OP_2S_2\cdot a=\frac{a^2b}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) P_1P_2 と長さが等しい線分は

P_1P_2，P_2P_3，P_3P_1，P_1S_2，P_2S_3，P_3S_1，P_1Q_3，P_2Q_1，P_3Q_2，Q_1R_3，Q_2R_1，Q_3R_2，
Q_1S_3，Q_2S_1，Q_3S_2，Q_1S_2，Q_2S_3，Q_3S_1，R_1R_2，R_2R_3，R_3R_1，R_1S_3，R_2S_1，R_3S_2

の24個，P_2S_2 と長さ $2b$ が等しい線分は

P_1S_1，P_2S_2，P_3S_3，Q_1R_1，Q_2R_2，Q_3R_3

の6個．

正三角形 $P_1P_2P_3$ と合同な三角形は

$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1S_2Q_3$，$\triangle P_2S_3Q_1$，$\triangle P_3S_1Q_2$，$\triangle Q_1S_2R_3$，$\triangle Q_2S_3R_1$，$\triangle Q_3S_1R_2$，$\triangle R_1R_2R_3$

の8個，三角形 $P_1P_2S_2$ と合同な三角形は

$\triangle P_3P_1S_1$，$\triangle P_1P_2S_2$，$\triangle P_2P_3S_3$，$\triangle Q_3P_1S_1$，$\triangle Q_1P_2S_2$，$\triangle Q_2P_3S_3$，
$\triangle R_3Q_1R_1$，$\triangle R_1Q_2R_2$，$\triangle R_2Q_3R_3$，$\triangle S_3Q_1R_1$，$\triangle S_1Q_2R_2$，$\triangle S_2Q_3R_3$

の12個．合計20個．

この二十面体の体積は

$$V=8\frac{a^3+b^3}{6}+12\frac{a^2b}{3}=\frac{4}{3}(a^3+b^3+3a^2b).$$

$a=\cos\theta$，$b=\sin\theta$ とおくと，

$$V=\frac{4}{3}(\cos^3\theta+\sin^3\theta+3\cos^2\theta\sin\theta)=\frac{4}{3}\cos^3\theta(1+3\tan\theta+\tan^3\theta).$$

$t=\tan\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$．

$$V(t)=\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}^3}(t^3+3t+1). \qquad \cdots(\text{答})$$

(4) $$V'(t)=\frac{4}{3}\left\{-\frac{3}{2}\frac{2t}{\sqrt{t^2+1}^5}(t^3+3t+1)+\frac{1}{\sqrt{t^2+1}^3}(3t^2+3)\right\}=\frac{-4(t^2+t-1)}{\sqrt{t^2+1}^5}.$$

$0<t<1$ の範囲で増減を調べる．$t^2+t-1=0$ の解は $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$．

$0<t<1$ より，$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$．この t を t_0 とおくと，

t	(0)	$\cdots$	t_0	$\cdots$	(1)
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$V(t)$ は $0<t<1$ の範囲に最大値をもつ．

そのときの t は
$$t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注）　最大のとき，$P_1P_2=P_2S_2$ となるからこの二十面体は正二十面体である．

第３問

区間 $[0, 1]$ において関数 $f(x)$ を
$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(x\leqq\dfrac{1}{2}\right), \\ -2x+2 & \left(x>\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$
とおく。$0\leqq a_1\leqq 1$ をみたす実数 a_1 を初期値として数列 $\{a_n\}$ を
$$a_n=f(a_{n-1}) \quad (n=2, 3, \cdots)$$
で定める。このとき次の問に答えよ。

(1)　$f(b)=b$ をみたす，$0\leqq b\leqq 1$ なる実数 b をすべて求めよ。

(2)　a_4 が (1) で求めた b の値の１つに等しくなるような初期値 a_1 をすべて求めよ。

(3)　条件「ある $n\geqq 1$ に対して，a_n が (1) で求めた b の値の１つに等しくなる」をみたす初期値 a_1 はどのような実数としてあらわされるか。

(4)　初期値 a_1 が (3) の条件をみたさないとき，$a_n\geqq\dfrac{3}{4}$ となるような $n\geqq 1$ が存在することを示せ。

(5)　数列 $\{a_n\}$ が収束するために初期値 a_1 がみたすべき必要十分条件を求めよ。

分　野

数学Ｂ：数列，数学的帰納法，**数学Ⅲ**：数列の極限，関数の合成

考え方

a_n が (1) の b に等しくなれば以後 $a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=b$ となる．したがって，$\{a_n\}$ は収束する．$\{a_n\}$ の何項目かで $a_n=b$ になれば $\{a_n\}$ は収束する．

(4) は a_n のすべての項が (1) の b にならないとき，$\{a_n\}$ は収束しないことを示している．

【解答】

(1)　$0\leqq b\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$f(b)=2b=b$ から，$b=0$．

$\dfrac{1}{2}<b\leqq 1$ のとき，$f(b)=-2b+2=b$ より，$b=\dfrac{2}{3}$．

以上より
$$b=0,\ \frac{2}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　a_n $(0 \leqq a_n \leqq 1)$ に対し，$a_n = f(a_{n-1})$ となる，a_{n-1} は

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2},\ 1 - \frac{a_n}{2} \quad \cdots①$$

の 2 個が存在する．

$a_4 = b = 0,\ \frac{2}{3}$ のとき，

$$a_3 = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1.$$

$$a_2 = 0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{6},\ 1.$$

$$a_1 = 0,\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{5}{12},\ \frac{1}{2},\ \frac{7}{12},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{12},\ 1. \quad \cdots(\text{答})$$

(3)　(2)の結果から $a_n = 0$ または $\frac{2}{3}$ $(n \geqq 2)$ となる a_1 は

$$\frac{m}{3 \cdot 2^{n-2}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{n-2}) \quad \cdots(*)$$

であると推定される．そのことを数学的帰納法で証明する．

(I)　$n = 2$ のとき，$a_2 = 0$ または $\frac{2}{3}$ になる a_1 は①から，

$$a_1 = 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1 \text{ つまり，} \frac{0}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3}$$

であるから，$\frac{m}{3}$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ と表される．よって(*)は成り立つ．

(II)　$n = k$ のとき(*)が成り立つとする．すなわち，$a_k = 0$ または $\frac{2}{3}$ となる a_1 は

$$\frac{m}{3 \cdot 2^{k-2}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2})$$

であるとする．

このとき，$a_{k+1} = 0$ または $\frac{2}{3}$ $(k \geqq 2)$ となるとき，a_2 は $a_k = 0$ または $\frac{2}{3}$ $(k \geqq 2)$ のときの a_1 と同じだから

$$a_2 = \frac{m}{3 \cdot 2^{k-2}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2}).$$

したがって

$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{m}{3 \cdot 2^{k-1}},\quad 1 - \frac{m}{3 \cdot 2^{k-1}} = \frac{3 \cdot 2^{k-1} - m}{3 \cdot 2^{k-1}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2}).$$

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2},\ 3 \cdot 2^{k-1} - m = 3 \cdot 2^{k-1},\ 3 \cdot 2^{k-1} - 1,\ 3 \cdot 2^{k-1} - 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2}$$

で，$m = m'$，$3 \cdot 2^{k-1} - m = m'$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-2})$$(m' = 3 \cdot 2^{k-2}$ は 2 重定義$)$とすることにより，

$$a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{m'}{3 \cdot 2^{k-1}} \quad (m' = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{k-1}).$$

よって，$n = k + 1$ のときも(*)が成り立つ．

(I)，(II)より(*)は 2 以上のすべての自然数 n について成り立つ．

すべての自然数 n に対して考えると，$a_n = b$ となるのは

$$a_1 = \frac{m}{3 \cdot 2^{n-2}} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3 \cdot 2^{n-2}). \quad \cdots(\text{答})$$

(4) $a_k \leqq \frac{1}{2}$ ならば $a_{k+1}=2a_k$ である．$a_1 \neq 0$ である．$0<a_1 \leqq \frac{1}{2}$ のとき，もし，$a_n>\frac{1}{2}$ となる項がなかったら，$a_n=2^{n-1}a_1$ となり，$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ となり，$a_n \leqq \frac{1}{2}$ に矛盾する．したがって，何項目かには $a_n>\frac{1}{2}$ となる．

初項を含めて初めて $\frac{1}{2}$ を超した項を a_n とする．

その a_n が $a_n \geqq \frac{3}{4}$ をみたすなら証明終り．

もし，$n \leqq k \leqq m$ において，$a_k>\frac{1}{2}$ で，$a_{m+1} \leqq \frac{1}{2}$ なら，$a_{m+1}=2-2a_m \leqq \frac{1}{2}$ だから，$a_m \geqq \frac{3}{4}$ でなければならない．したがって，$a_m \geqq \frac{3}{4}$ にならずに，$a_m \leqq \frac{1}{2}$ になることはない．

次に $\frac{1}{2}<a_n<\frac{3}{4}$ であり続けることができないことを示す．

$k \geqq n$ で常に $\frac{1}{2}<a_k<\frac{3}{4}$ であるとすると，

$$a_{k+1}=-2a_k+2. \quad a_{k+1}-\frac{2}{3}=-2\left(a_k-\frac{2}{3}\right).$$

したがって，$a_k-\frac{2}{3}=(-2)^{k-n}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$ となる．$a_n \neq \frac{2}{3}$ であるから $\lim_{k\to\infty}\left|a_k-\frac{2}{3}\right|=\infty$ となり，常に $\frac{1}{2}<a_k<\frac{3}{4}$ であることに矛盾する．したがって，第 n 項から何項目かには $a_k \geqq \frac{3}{4}$ となる項が存在する．

（証明終り）

(5) (4)で $a_k \geqq \frac{3}{4}$ とすると，$a_{k+1} \leqq \frac{1}{2}$.

$0<a_k \leqq \frac{1}{2}$ とすると，何項目かには $a_{k+l}>\frac{1}{2}$ の項が必ず存在する．

$\frac{1}{2}<a_k<\frac{3}{4}$ の項があれば何項目かには $a_{k+l} \geqq \frac{3}{4}$ となる項が存在する．

したがって，$a_k=b$ となる項がなければ，$\{a_n\}$ は収束しない．

また，$a_n=b$ となる項が存在するときはそれ以後のすべての項が b となり，$\{a_n\}$ は収束する．

以上より，数列 $\{a_n\}$ が収束するための初期値 a_1 は

$$a_1=\frac{m}{3\cdot 2^n} \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 3\cdot 2^n) \qquad \cdots(\text{答})$$

となる，m，n が存在することである．

（注） つまり，a_1 は $0 \leqq a_1 \leqq 1$ をみたす有理数で，これを既約分数で表したときの分母が $3\cdot 2^n$ の形をしているものである．

2003 年　前期・文科

第 1 問

a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，

$$f(x) \leqq 3x^2-1$$

このとき，積分 $I=\int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

分　野

数学 I ：2 次関数，**数学 II** ：整式の積分

考え方

a，b，c の 3 文字あるが，容易に 1 文字になる．また，(A) の条件からその 1 文字の範囲が制限され，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $y=g(x)=3x^2-1-f(x)$ の最小値が読み込める．

【解答】

条件 (A) から

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=-1, \\ f(1)=a+b+c=1, \\ f'(1)=2a+b \leqq 6. \end{cases}$$

よって，$b=1$，$c=-a$．$f(x)=ax^2+x-a$．また

$$a \leqq \frac{5}{2}. \qquad \cdots ①$$

$$g(x)=3x^2-1-f(x)=(3-a)x^2-x+a-1$$

とおく．① より $3-a>0$ なので，$y=g(x)$ は下に凸の放物線である．

$y=g(x)$ の軸：$x=\dfrac{1}{2(3-a)}$ において ① より

$$0<\frac{1}{2(3-a)} \leqq 1.$$

よって，条件 (B) をみたすのは，$g(x)=0$ の判別式 D が $D \leqq 0$ をみたすとき．

$$D=1-4(3-a)(a-1)=4a^2-16a+13.$$

$D \leqq 0$ より，

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{4+\sqrt{3}}{2}. \qquad \cdots ②$$

① かつ ② より，

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}. \qquad \cdots ③$$

$$I=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+1)\,dx=\frac{8}{3}a^2+2.$$

③ より $\dfrac{19-8\sqrt{3}}{4} \leqq a^2 \leqq \dfrac{25}{4}$.

よって，

$$\frac{4(11-4\sqrt{3})}{3} \leqq I \leqq \frac{56}{3}. \qquad \cdots (答)$$

第 2 問

a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a$$
$$3x+y \geqq b$$
$$x \geqq 0$$
$$y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域

考え方

領域は 4 直線またはそのいくつかを境界とする図形．丹念に場合分けする．

【解答】

直線 $x+3y=a$ の x 切片は a で y 切片は $\dfrac{a}{3}$.

直線 $3x+y=b$ の x 切片は $\dfrac{b}{3}$ で y 切片は b.

各直線の x 切片 0, a, $\dfrac{b}{3}$，および y 切片 0, $\dfrac{a}{3}$, b の大小で場合分けする．

また 2 直線 $x+3y=a$, $3x+y=b$ の交点の座標は $\left(\dfrac{-a+3b}{8}, \dfrac{3a-b}{8}\right)$.

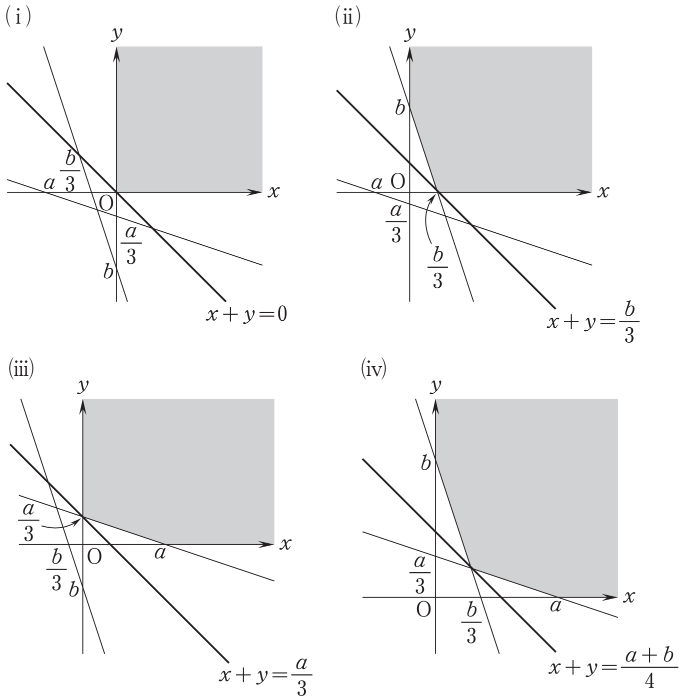
(i)　$a \leqq 0$, $b \leqq 0$ のとき領域 D は次図 (i) のようになる．

(ii)　$b \geqq 0$, $\dfrac{b}{3} \geqq a$ のとき領域 D は次図 (ii) のようになる．

(iii)　$a \geqq 0$, $\dfrac{a}{3} \geqq b$ のとき領域 D は次図 (iii) のようになる．

(iv)　$\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a$ のとき領域 D は次図 (iv) のようになる．

これらですべての場合である．



領域 D と直線 $x+y=k$ が共有点を持つような k の最小値が求めるもの．

(i) のとき $x+y$ が最小になるのは原点．このとき $x+y=0$．

(ii) のとき $x+y$ が最小になるのは $\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$．このとき，$x+y=\dfrac{b}{3}$．

(iii) のとき $x+y$ が最小になるのは $\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$．このとき，$x+y=\dfrac{a}{3}$．

(iv) のとき $x+y$ が最小になるのは $\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$．このとき，$x+y=\dfrac{a+b}{4}$．

以上から領域 D における $x+y$ の最小値は

$$\begin{cases} 0 & (a \leqq 0,\ b \leqq 0), \\ \dfrac{b}{3} & (b \geqq 0,\ b \geqq 3a), \\ \dfrac{a}{3} & (a \geqq 0,\ a \geqq 3b), \\ \dfrac{a+b}{4} & \left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

第 3 問

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の 2 つの実数解のうち，大きいものを α，小さいものを β とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく。

(1) s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

分　野

数学A：数列，漸化式，数学的帰納法，**数学B**：解と係数の関係

考え方

(2) の前半までは典型的．

s_n の 1 位数は書き出すことで見当をつけられる．$0<\beta<1$ から $0<\beta^n<1$ を利用．

【解答】

(1) $x^2-4x+1=0$ の 2 解が α，β $(\alpha>\beta)$ だから

$$\alpha=2+\sqrt{3}, \quad \beta=2-\sqrt{3}.$$

$$s_1=\alpha+\beta=4. \quad \cdots(\text{答})$$

また，α，β が与方程式の解であるから

$$\alpha^2=4\alpha-1, \quad \beta^2=4\beta-1.$$

$$\therefore \quad s_2=\alpha^2+\beta^2=(4\alpha-1)+(4\beta-1)=4(\alpha+\beta)-2=14. \quad \cdots(\text{答})$$

また

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=\alpha(4\alpha-1)+\beta(4\beta-1)=4(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)=52. \quad \cdots(\text{答})$$

同様に，$n \geqq 3$ 対して

$$\begin{aligned} s_n&=\alpha^n+\beta^n=\alpha^{n-2}(4\alpha-1)+\beta^{n-2}(4\beta-1) \\ &=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}-s_{n-2}. \end{aligned} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $s_n>0$ は，$\alpha>0$，$\beta>0$ から明らか．

また，s_1，s_2 が整数で，漸化式 $s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ $(n\geqq3)$ によって帰納的に定義される s_n はすべて整数．

よって，$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して s_n はすべて正の整数である．（証明終り）

s_1，s_2，s_3，$\cdots$ の1の位の数を書き出すと

$$4,\ 4,\ 2,\ 4,\ 4,\ 2,\ \cdots$$

となる．

s_{n-2}，s_{n-1} の1の位の数がそれぞれ4，4のとき，s_n の1の位は漸化式から $4\times4-4=12$ の1の位と同じ2であることが導かれる．

s_{n-2}，s_{n-1} の1の位の数がそれぞれ4，2のとき，s_n の1の位は漸化式から $4\times2-4=4$ の1の位と同じ4であることが導かれる．

s_{n-2}，s_{n-1} の1の位の数がそれぞれ2，4のとき，s_n の1の位は漸化式から $4\times4-2=14$ の1の位と同じ4であることが導かれる．

したがって，s_n の1の位の数は上に示したように4，4，2が繰り返される．

$2003=3\times667+2$ を3で割ると2余るから s_{2003} の1の位の数は $s_2=14$ と同じ4である．…(答)

(3) $s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$．

$0<\beta=2-\sqrt{3}<1$ だから，$0<\beta^{2003}<1$．

よって，$s_{2003}-1<s_{2003}-\beta^{2003}<s_{2003}$．

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ であり，s_{2003} の1の位の数が4だから α^{2003} 以下の最大整数は $s_{2003}-1$ でその1の位の数は3．…(答)

第4問

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1, 2, \cdots$ を定める。

(1) $X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) 各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3) 各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

分　野

数学Ｉ：確率，**数学Ａ**：数列，漸化式

考え方

出た目の数で割った余りを X_n とするのは珍しい．

丹念に場合分けする．17 を 1 ～ 6 で割った余りは，0，1，2，5 の 3 通り．0 は以後何で割っても余りは 0．1 を割った余りは 0 または 1．2 を割った余りは 0，2．5 を割った余りは 0，1，2，5．

これらのことを考慮する．

【解答】

17 を 1，2，3，4，5，6 で割った余りはそれぞれ，0，1，2，1，2，5．

また，ここに出てきた 0，1，2，5 を a，1，2，3，4，5，6 を b とし，a を b で割った余りを表にしたのが左の表，また，X_n に対して X_{n+1} がそれぞれ 0，1，2，5 になる確率を表にしたのが右の表である．

a ＼ b	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
2	0	0	2	2	2	2
5	0	1	2	1	0	5

X_n ＼ X_{n+1}	0	1	2	5	計
0	1	0	0	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	0	0	1
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1
5	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1) $X_3=0$ の余事象を考える．$X_3 \neq 0$ となるためには $X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$ でなければならない．

$X_1=1$ となる確率は $\frac{1}{3}$．このとき，$X_2=X_3=1$．その確率は $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{108}$．

$X_1=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$．このとき，$X_2=X_3=2$．その確率は $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$．

$X_1=5$ となる確率は $\frac{1}{6}$．このとき，(X_2, X_3) は次の 5 通りある．

$$(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 5).$$

それぞれの確率は

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{108},$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{108},$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{108},$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216},$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}.$$

よって，$X_3 \neq 0$ となる確率は

$$\frac{25}{108}+\frac{4}{27}+\frac{5}{108}+\frac{2}{108}+\frac{1}{108}+\frac{1}{216}+\frac{1}{216}=\frac{25}{54}.$$

よって，求める確率は

$$1-\frac{25}{54}=\frac{29}{54}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $X_n=5$ となる確率を p_n とおく.

$X_{n+1}=5$ となるのは $X_n=5$ のときだけで，$p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n$.

よって，$\{p_n\}$ は初項 $\frac{1}{6}$，公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列.

$$\therefore \quad p_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6^n}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) $X_n=1$ となる確率を q_n とする.

$X_{n+1}=1$ となるのは $X_n=1$ または，$X_n=5$ のとき.

$X_n=1$ のとき $X_{n+1}=1$ になる確率は $\frac{5}{6}$，$X_n=5$ のとき，$X_{n+1}=1$ となる確率は $\frac{1}{3}$ である.

以上から漸化式を立てると

$$q_{n+1}=\frac{5}{6}q_n+\frac{1}{3}p_n.$$

(2)の結果より

$$q_{n+1}=\frac{5}{6}q_n+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6^n}.$$

$Q_n=6^n q_n$ とおき両辺に 6^{n+1} をかけると，

$$Q_{n+1}=5\cdot Q_n+2. \quad Q_1=6q_1=2.$$

$$\therefore \quad Q_{n+1}+\frac{1}{2}=5\left(Q_n+\frac{1}{2}\right).$$

$$\therefore \quad Q_n+\frac{1}{2}=5^{n-1}\left(Q_1+\frac{1}{2}\right)=\frac{5^n}{2}.$$

$$\therefore \quad q_n=\frac{1}{6^n}\left(\frac{5^n}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}. \qquad \cdots(\text{答})$$

2003 年　前期・理科

第 1 問

a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，

$$f(x) \leqq 3x^2-1$$

このとき，積分 $I=\int_{-1}^{1}(f'(x))^2\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

分　野

数学 I ：2 次関数，**数学 II** ：整式の積分

考え方

a，b，c の 3 文字あるが，容易に 1 文字になる．また，(A) の条件からその 1 文字の範囲が制限され，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $y=g(x)=3x^2-1-f(x)$ の最小値が読み込める．

【解答】

条件 (A) から

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=-1, \\ f(1)=a+b+c=1. \end{cases}$$

よって，$b=1$，$c=-a$．$f(x)=ax^2+x-a$．

$$g(x)=3x^2-1-f(x)=(3-a)x^2-x+a-1$$

とおく．

(i)　$a \geqq 3$ のとき，$y=g(x)$ は直線または上に凸な放物線で，$g(-1)=3>0$，$g(1)=1>0$ なので，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲でつねに $g(x)>0$．よって，$f(x) \leqq 3x^2-1$ つまり条件 (B) をみたす．

(ii)　$a<3$ のとき，$y=g(x)$ は下に凸の放物線であり，軸の位置は：$x=\dfrac{1}{2(3-a)}>0$ である．

(ii-a)　$0<\dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1$ つまり，$a \leqq \dfrac{5}{2}$ のとき，

条件 (B) をみたすのは，$g(x)=0$ の判別式 D が $D \leqq 0$ をみたすとき．

$$D=1-4(3-a)(a-1)=4a^2-16a+13.$$

$D \leqq 0$ より，

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{4+\sqrt{3}}{2}.$$

$a \leqq \dfrac{5}{2}$ より，

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \frac{5}{2}.$$

(ii-b)　$\dfrac{5}{2}<a<3$ のとき，

$y=g(x)$ の軸は $x>1$ の範囲にある．

条件 (B) をみたすのは，$g(1) \geqq 0$ のときだが，$g(1)=1$ なので，つねにみたす．

(i)，(ii-a)，(ii-b) から条件 (B) をみたす a の値の範囲は $a \geqq \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$．

$$I=\int_{-1}^{1}(2ax+1)^2\,dx=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+1)\,dx=\frac{8}{3}a^2+2.$$

$a^2 \geqq \dfrac{19-8\sqrt{3}}{4}$ より，

$$I \geqq \frac{4(11-4\sqrt{3})}{3}. \qquad \cdots(答)$$

第2問

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$$

を表す点 P をとる。

(1) ∠APB を求めよ。

(2) 線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。

分　野

数学B：複素数平面

考え方

∠APB は $\dfrac{b-p}{a-p}$ の偏角を求めればよい．∠APB が定角になるので P の軌跡は円の一部になる．

【解答】

(1) A，B，P を表す複素数をそれぞれ a，b，p とすると，

$$a-p=6-\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=\frac{6\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}{(1-i)t-7}=\frac{-2(4+3i)t}{(1-i)t-7}.$$

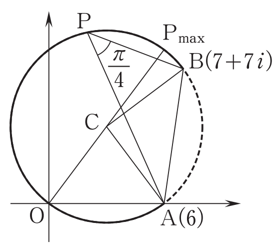
$$b-p=(7+7i)-\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=\frac{(7+7i)\{(1-i)t-7\}-14(t-3)}{(1-i)t-7}=\frac{-7(1+7i)}{(1-i)t-7}.$$

$$\frac{b-p}{a-p}=\frac{-7(1+7i)}{-2(4+3i)t}=\frac{7}{2t}(1+i)=\frac{7}{2t}\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right). \qquad \cdots①$$

$\dfrac{7}{2t}>0$ だから $\dfrac{b-p}{a-p}$ の偏角は $\dfrac{\pi}{4}$．よって，$\angle APB=\dfrac{\pi}{4}$． …(答)

(2) ① より，$\overrightarrow{PB}$ は $\overrightarrow{PA}$ を正方向に $\dfrac{\pi}{4}$ 回転したものと同じ向きである．したがって，P は AB より左側で円周角が $\dfrac{\pi}{4}$ の円周上を動く．

その中心を C とすると，中心角 ∠ACB は $\dfrac{\pi}{2}$ だから，三角形 ABC は直角二等辺三角形．$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を A を中心に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転して $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である．C を表す複素数を c とすると，



$$c-a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(b-a)=\frac{1}{2}(1+i)(1+7i)=-3+4i.$$

よって，

$$c=(-3+4i)+6=3+4i.$$

Pが円周上を動くとき，OPの長さが最大になるのはPがOC上にあるときである．

よって，kを実数として，

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=k(3+4i)$$

が成り立つときである．$t=3$ のとき，P$=$O であるから最大ではない．$t\neq3$ のとき，$k\neq0$ で，

$$\{(1-i)t-7\}(3+4i)=7t-21+(t-28)i=\frac{14(t-3)}{k}$$

は実数であるから，$t=28$．$t>0$ であるから，このときOPは最大になる．

$$t=28. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１） 複素数の計算だけから軌跡の方程式が円であることを示せる．

$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ とおくと，$t=\dfrac{7(z-6)}{(1-i)z-14}$．

tは実数だから，$\dfrac{7(z-6)}{(1-i)z-14}=\dfrac{7(\overline{z}-6)}{(1+i)\overline{z}-14}$．

これを整理すると

$$z\overline{z}-(3-4i)z-(3+4i)\overline{z}=0 \quad \therefore \quad |z-3-4i|=5$$

となる．これは点C$(3+4i)$を中心として原点を通る円を表す．

また，

$$t=\frac{1}{2}\left\{\frac{7(z-6)}{(1-i)z-14}+\frac{7(\overline{z}-6)}{(1+i)\overline{z}-14}\right\}>0$$

で，$z\overline{z}=(3-4i)z+(3+4i)\overline{z}$ を利用すると円の範囲を出すこともできる．

（注２） また，$|z|^2=\dfrac{14^2(t-3)^2}{(t-7)^2+t^2}$ を $f(t)$ とおき微分すると，$f'(t)=14^2\cdot\dfrac{-2(t-28)(t-3)}{\{(t-7)^2+t^2\}^2}$ となる．

$t>0$ における増減と極限から，$t=28$ で最大になることがわかる．

（注３） $t=28$ のとき，$p=2(3+4i)$．OPの最大値はPの軌跡の円の直径10である．

第３問

xyz空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径2の円を底面とし，点$(0,\ 0,\ 1)$を頂点とする円錐(すい)をAとする。

次に，平面 $z=0$ 上の点$(1,\ 0,\ 0)$を中心とする半径1の円をH，平面 $z=1$ 上の点$(1,\ 0,\ 1)$を中心とする半径1の円をKとする。HとKを2つの底面とする円柱をBとする。

円錐Aと円柱Bの共通部分をCとする。

$0\leqq t\leqq1$ を満たす実数tに対し，平面 $z=t$ によるCの切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ をθで表せ。

(2) Cの体積$\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，立体図形

考え方

$z=t$ における円錐，円柱の切り口は円だからその共通部分は2つの弓形になる．それぞれの弓形の中心角がわかればその面積がわかる．

体積を求める式が与えられているから，あとはθで置換積分すればよい

【解答】

(1) 平面 $z=t$ における，A，B の切り口は，それぞれ，

$$x^2+y^2\leqq 4(1-t)^2,\quad (x-1)^2+y^2\leqq 1$$

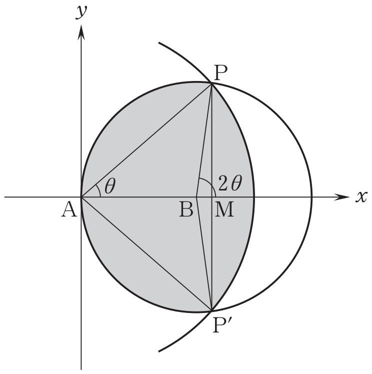
である．C の切り口はその共通部分である．

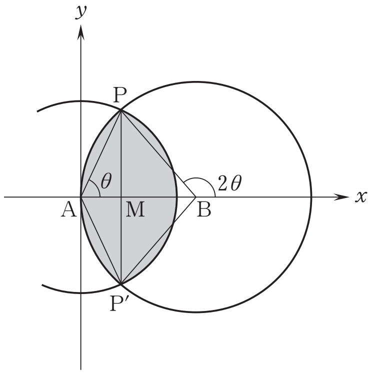
2円 $x^2+y^2=4(1-t)^2$ と $(x-1)^2+y^2=1$ の2交点を図のように，P，P$'$ とおくと，その x 座標を求める方程式は $(x^2+y^2)-\{(x-1)^2+y^2\}=4(1-t)^2-1$ より，$2x-1=4t^2-8t+3$，$x=2(1-t)^2$．

$t=1-\cos\theta$ から，$x=2\cos^2\theta$．

A$(0,\ 0,\ t)$，B$(1,\ 0,\ t)$，PP$'$ の中点を M$(2\cos^2\theta,\ 0,\ t)$ とおくと，$0\leqq 2\cos^2\theta\leqq 2$．

AP$=2(1-t)=2\cos\theta$，AM$=2\cos^2\theta$ から，$\angle$MAP$=\theta$．また，PM$=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$．





A の切り口のうち，$x\geqq 2\cos^2\theta$ の部分の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AP}^2 2\theta-\frac{1}{2}\mathrm{AP}^2\sin 2\theta=4\theta\cos^2\theta-2\cos^2\theta\sin 2\theta=2\theta(1+\cos 2\theta)-\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta.$$

BP$=1$，AB$-$AM$=1-2\cos^2\theta=-\cos 2\theta$．$x$ 軸正方向と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ のなす角は 2θ．

B の切り口のうち，$x\leqq 2\cos^2\theta$ の部分の面積は，2θ が $\dfrac{\pi}{2}$ より大きい場合も小さい場合も，

$$\frac{1}{2}\mathrm{BP}^2(2\pi-4\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{BP}^2\sin 4\theta=\pi-2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta.$$

よって，C の切り口の面積は

$$S(t)=2\theta(1+\cos 2\theta)-\sin 2\theta-\frac{1}{2}\sin 4\theta+\pi-2\theta+\frac{1}{2}\sin 4\theta$$

$$=\pi-\sin 2\theta+2\theta\cos 2\theta.\qquad\cdots(答)$$

(2) $t=1-\cos\theta$ から，$dt=\sin\theta\,d\theta$．

t	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \pi\,dt=\pi.\qquad\cdots①$$

$$\int_0^1 \sin 2\theta\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta-\cos 3\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin 3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.\qquad\cdots②$$

$$2\int_0^1 \theta\cos 2\theta\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos 2\theta \sin\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\sin 3\theta - \sin\theta)\, d\theta$$
$$= \left[-\frac{\theta}{3}\cos 3\theta + \theta\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta + \cos\theta\right) d\theta$$
$$= -\left[-\frac{1}{9}\sin 3\theta + \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\frac{1}{9}+1\right) = -\frac{10}{9}. \qquad \cdots③$$

①，②，③ から求める体積は

$$\pi - \frac{2}{3} - \frac{10}{9} = \pi - \frac{16}{9}. \qquad \cdots(答)$$

第 4 問

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち，大きいものを α，小さいものを β とする。
$n=1, 2, 3, \cdots$ に対し，

$$s_n = \alpha^n + \beta^n$$

とおく。

(1) s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。

分　野

数学A：数列，**数学B**：解と係数の関係

考え方

解と係数の関係から，s_1，s_2，s_3 および $\{s_n\}$ の漸化式は容易に求められる．

$|\beta|<1$ より，$\alpha^n+\beta^n$（整数）はほぼ α^n に等しくなる．β^n の符号には注意する必要がある．

【解答】

(1) $x^2-4x-1=0$ の 2 解が α，β（$\alpha>\beta$）だから

$$\alpha = 2+\sqrt{5}, \quad \beta = 2-\sqrt{5}.$$
$$s_1 = \alpha+\beta = 4. \qquad \cdots(答)$$

また，α，β が与方程式の解であるから

$$\alpha^2 = 4\alpha+1, \quad \beta^2 = 4\beta+1.$$
$$\therefore \quad s_2 = \alpha^2+\beta^2 = (4\alpha+1)+(4\beta+1) = 4(\alpha+\beta)+2 = 18. \qquad \cdots(答)$$

また

$$s_3 = \alpha^3+\beta^3 = \alpha(4\alpha+1)+\beta(4\beta+1) = 4(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta) = 76. \qquad \cdots(答)$$

同様に，$n \geqq 3$ 対して

$$s_n = \alpha^n+\beta^n = \alpha^{n-2}(4\alpha+1)+\beta^{n-2}(4\beta+1)$$
$$= 4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}) = 4s_{n-1}+s_{n-2}. \qquad \cdots(答)$$

(2) $-1<\beta=2-\sqrt{5}<0$ から $-1<\beta^3<0$.

よって，β^3 以下の最大整数は -1. $\cdots$(答)

(3) s_1，s_2 が正整数で，漸化式 $s_n=4s_{n-1}+s_{n-2}$（$n \geqq 3$）によって帰納的に定義される s_n はすべて正整数.

漸化式を使って，s_1，s_2，s_3，$\cdots$ の 1 の位の数を書き出すと

4，8，6，2，4，8，$\cdots$

となる．

s_{n-2}，s_{n-1} の 1 の位の数がそれぞれ 4，8 のとき，s_n の 1 の位は漸化式から $4\times8+4=36$ の 1 の位と同じ 6 である．

s_{n-2}，s_{n-1} の 1 の位の数がそれぞれ 8，6 のとき，s_n の 1 の位は漸化式から $4\times6+8=32$ の 1 の位と同じ 2 である．

s_{n-2}，s_{n-1} の 1 の位の数がそれぞれ 6，2 のとき，s_n の 1 の位は漸化式から $4\times2+6=14$ の 1 の位と同じ 4 である．

s_{n-2}，s_{n-1} の 1 の位の数がそれぞれ 2，4 のとき，s_n の 1 の位は漸化式から $4\times4+2=18$ の 1 の位と同じ 8 である．

したがって，s_n の 1 の位の数は上に示したように 4，8，6，2 が繰り返される．

$2003=4\times500+3$ を 4 で割ると 3 余るから s_{2003} の 1 の位の数は $s_3=76$ と同じ 6 である．
$s_{2003}=\alpha^{2003}+\beta^{2003}$.

2003 は奇数で，$-1<\beta=2-\sqrt{5}<0$ だから，$-1<\beta^{2003}<0$.

よって，$s_{2003}<\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}<s_{2003}+1$.

$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$ であり，s_{2003} の 1 の位の数が 6 だから α^{2003} 以下の最大整数は s_{2003} でその 1 の位の数は 6.　…(答)

第 5 問

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1) X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2) X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3) X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$$

を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

分　野

数学Ⅰ：確率，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

20 で割り切れる条件は 5 で割り切れ，かつ 4 で割り切れることである．

さいころの目においては，5 で割り切れることと 4 で割り切れることは独立でない．

【解答】

(1) X_n が 5 で割り切れるのは n 回のうち少なくとも 1 回 5 の目が出るときである．その余事象は n 回とも 5 以外が出る場合で，その確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ である．求める確率は

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
…(答)

(2) X_n が 4 で割り切れない場合を考える．

(i) n 回のうち偶数が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(ii) n 回のうち 2 または 6 が 1 回だけ出てあとは奇数である確率は

$$n\cdot\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

求める確率は

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \qquad \cdots(答)$$

(3) X_n が 20 で割り切れない場合を考える.

(i) n 回のうち 5 が 1 回も出ない確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

(ii) n 回のうち 5 は少なくとも 1 回出るが，偶数が 1 回も出ない確率は，出た目がすべて奇数の確率から，出た目がすべて 1 か 3 の確率を除いたもの.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(iii) n 回のうち 5 は少なくとも 1 回出て，2 または 6 が 1 回だけ出て，4 は 1 回も出ない場合. n 回のうち 2 または 6 が出る回を決めると，残りは (ii) と同様に考えればよい. その確率は

$$n\cdot\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}.$$

p_n は 1 から (i), (ii), (iii) の確率を引いたもの. よって,

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

よって,

$$1-p_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{2}{5}n\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{2}{5}n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{5}\right)^n+\frac{2}{5}n\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}-\frac{2}{5}n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right\}\right]
\end{aligned}$$

$|r|<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ だから,

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_n)=\log\frac{5}{6}. \qquad \cdots(答)$$

(注) 極限 $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$, $(-1<r<1)$ を無条件で使ってよいかどうかは明らかでないが，問題における軽重を考え既知のこととして使った.

なおこの証明は以下のよう.

$r=0$ のときは自明. $0<|r|<1$ のとき，$|r|=\frac{1}{1+\alpha}$, $\alpha>0$ とおけるから

$$n|r|^n=\frac{n}{(1+\alpha)^n}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2}=\frac{2}{(n-1)\alpha^2}$$

となり，$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)\alpha^2}=0$ とハサミウチの原理から $\lim_{n\to\infty}|r|^n=0$, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$. (証明終り)

第6問

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。

分 野

数学 I ：三角比，**数学 A** ：式と証明

考え方

正 n 角形の周と外接円の直径の比で近似する．$n=6$ のとき比が 3 であるから，$n>6$ で考える．n が大きいほど，$\pi=3.1415\cdots$ に近づくが，三角比が求めにくい n では比較できないから，$n=8,\ 12$ あたりで比較するのが妥当である．

【解答】

円周率とは直径に対する円周の長さの比である．2 点間の距離の最短コースは 2 点を結ぶ線分であるから，円に内接する正多角形の周の長さは円周より短い．

半径 r の円に内接する正八角形の周の長さを考える．

中心を O，1 辺を AB とすると，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{4}$ である．

三角形 OAB について余弦定理を用いると，

$$\mathrm{AB}^2=r^2+r^2-2r^2\cos\frac{\pi}{4}=(2-\sqrt{2})r^2,$$

したがって，正八角形の直径に対する周の長さの比は

$$\frac{8\sqrt{2-\sqrt{2}}\,r}{2r}=4\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}(4\sqrt{2-\sqrt{2}})^2-(3.05)^2&=32-16\sqrt{2}-9.3025=22.6975-16\sqrt{2}\\&>22.6975-16\times1.415=22.6975-22.64>0.\end{aligned}$$

よって，正八角形の周は直径の 3.05 倍より大きい．円周はそれより大きいから

$$\pi>3.05.$$

（証明終り）

【別解】

半径 r の円に内接する正 12 角形の周の長さを考える．

中心を O，1 辺を AB とすると，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{6}$ である．

$$\mathrm{AB}=2r\sin\frac{\pi}{12}=2r\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}r.$$

したがって，正 12 角形の直径に対する周の長さの比は

$$\frac{12\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}r}{2r}=3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)>3\times1.4(1.73-1)=3.066>3.05.$$

よって，正 12 角形の周は直径の 3.05 倍より大きい．円周はそれより大きいから

$$\pi>3.05.$$

（証明終り）

（注 1） $\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を既知として証明した．

（注 2） 直径に対する正 n 角形の周の比が 3.05 を超える最小の n は 8 である．

（注 3） この問題は当時の小学校指導要領で円周率を「3 としてよい」としていたことに対する批判と受け止められた．

π の値に関する問題（2003 年理科）

この問題は極めて短い問題文で

「円周率は 3.05 より大きいことを証明せよ.」

だけである．しかし，この問題には背景がある．

当時の小学校学習指導要領（ '89, '98 改訂）小学 5 年生算数には

「円周率としては 3.14 を用いるが，目的に応じて 3 を用いて処理できるように配慮するものとする。」

という文言が記されている．小数の計算を回避する目的なのかもしれないが，円周率を 3 にするのはいかにも乱暴な話に思える．円に内接する正 7 角形の周の長さは円周より大きいのかという疑問が起こりそうである．

このような中で出題されたのがこの問題である．この問題は受験生に対して出題した問題ではあるが，文部科学省に対しする抗議のようにも受け止められた．

問題としてもなかなか傑出した問題である．ノンヒントなので何を使って示すかを解答者自身が考えなければならない．円に内接する正多角形で，辺に対する中心角の三角関数の数値が計算でき，しかもある一定以上の角数をもつ多角形について，周の長さを円の半径と比較することにより 3.05 より大きいことを示すことが出来る．正 8 角形または正 12 角形あたりが妥当である．

面積で比較することもできるが，角数を大きくしなければならなくなる．

その後，2008 年（平成 20 年）の改訂では学習指導要領のこの部分は「円周率は 3.14 を用いるものとする」と改められた．この問題だけの影響ではないかもしれないが，文部科学省が多くの批判に応えた結果であることは間違いない．

2003 年　後期・理科 I 類

第 1 問

(1)　$x \geqq 0$ のとき，次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^3}{3!} \leqq \sin x \leqq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

(2)　曲線 $y=\sin x\,(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を考える。この立体を x 軸に垂直な $2n-1$ 個の平面によって体積が等しい $2n$ 個の部分に分割する。ただし n は 2 以上の自然数である。

(a)　これら $2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち，$\frac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\frac{\pi}{2}$ に最も近いものを a_n とする。このとき，

$$\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)$$

を求めよ。

(b)　$2n-1$ 個の平面と x 軸との交点の x 座標のうち最も小さいものを b_n とする。数列 $\{n^p b_n\}$ が $n \to \infty$ のとき 0 でない有限な値に収束するような実数 p の値を求めよ。また，p をそのようにとったとき

$$\lim_{n \to \infty} n^p b_n$$

を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法，数列の極限

考え方

(1) は両辺の差を x の関数として，その増減を調べることで証明する．

(2) は $a_n \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分，$0 \leqq c \leqq b_n$ の部分の体積が全体の $\frac{1}{n}$ であることから a_n，b_n に関する不等式を作る．

不等式を利用して $n\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)$，$n^p b_n$ のハサミウチを考える．

【解答】

(1)　$f(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)$，$g(x)=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right)-\sin x$ とおく．

$f'(x)=\cos x-1+\frac{3x^2}{3!}=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$．$f''(x)=-\sin x+x$．$f'''(x)=-\cos x+1$．

$f'''(x) \geqq 0$ より $f''(x)$ は増加関数．$x \geqq 0$ のとき，$f''(x) \geqq f''(0)=0$．

よって，$f'(x)$ は増加関数．$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq f'(0)=0$．

よって，$f(x)$ は増加関数．$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq f(0)=0$．

よって，$x-\frac{x^3}{3!} \leqq \sin x$．

$g'(x)=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cos x$．$g''(x)=-x+\frac{x^3}{3!}+\sin x$．

$g''(x)=f(x)$ だから，$x \geqq 0$ のとき，$g''(x) \geqq 0$．

よって，$g'(x)$ は増加関数．$x \geqq 0$ のとき，$g'(x) \geqq g'(0)=0$．

よって，$g(x)$ は増加関数．$x \geqq 0$ のとき，$g(x) \geqq g(0) = 0$．

よって，$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \geqq \sin x$．

以上より，$x \geqq 0$ のとき，

$$x - \frac{x^3}{3!} \leqq \sin x \leqq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}. \qquad \text{（証明終り）}$$

(2) 曲線 $y = \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を V とする．

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

これを体積が等しい $2n$ 個の部分に分けるから，1個の部分の体積は $\dfrac{V}{2n} = \dfrac{\pi^2}{4n}$．

(a) x 座標が $\dfrac{\pi}{2}$ より小さくかつ $\dfrac{\pi}{2}$ に最も近い平面 $x = a_n$ と $x = \dfrac{\pi}{2}$ の間の部分の体積は $\dfrac{\pi^2}{4n}$ だから，

$$\pi \int_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{4n}.$$

$a_n < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin^2 x$ は増加するから，

$$\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right)\sin^2 a_n < \int_{a_n}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4n} < \frac{\pi}{2} - a_n.$$

よって，

$$\frac{\pi}{4} < n\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right) < \frac{\pi}{4\sin^2 a_n}.$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi}{2}$ であるから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4\sin^2 a_n} = \frac{\pi}{4}$．

ハサミウチの原理により，

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right) = \frac{\pi}{4}. \qquad \cdots\text{（答）}$$

(b) 平面 $x = 0$ と x 座標が最も小さい平面 $x = b_n$ の間の部分の体積も $\dfrac{\pi^2}{4n}$ だから，

$$\pi \int_0^{b_n} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{b_n}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{b_n} = \frac{\pi}{2}\left(b_n - \frac{1}{2}\sin 2b_n\right) = \frac{\pi^2}{4n}.$$

よって，

$$\sin 2b_n = 2b_n - \frac{\pi}{n}.$$

(1) より，

$$2b_n - \frac{(2b_n)^3}{3!} < \sin 2b_n = 2b_n - \frac{\pi}{n} < 2b_n - \frac{(2b_n)^3}{3!} + \frac{(2b_n)^5}{5!}.$$

$$\frac{2^3}{3!} > \frac{\pi}{n{b_n}^3} > \frac{2^3}{3!} - \frac{2^5{b_n}^2}{5!}.$$

$$\frac{3}{4}\pi < n{b_n}^3 < \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1 - \frac{{b_n}^2}{5}}\pi.$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}\cdot n^{p-\frac{1}{3}}<n^p b_n<\sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{b_n{}^2}{5}}\pi}\cdot n^{p-\frac{1}{3}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{p-\frac{1}{3}}=\begin{cases}\infty & \left(p>\frac{1}{3}\right),\\ 1 & \left(p=\frac{1}{3}\right),\\ 0 & \left(p<\frac{1}{3}\right),\end{cases}$$

また $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ だから，ハサミウチの原理より

$$\lim_{n\to\infty} n^p b_n=\begin{cases}\infty & \left(p>\frac{1}{3}\right),\\ \sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi} & \left(p=\frac{1}{3}\right),\\ 0 & \left(p<\frac{1}{3}\right).\end{cases}$$

よって，

$$p=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty} n^p b_n=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\pi}.$$ …(答)

第 2 問

p，q，N，M を自然数とする。ただし $\sqrt{p}$ は自然数ではないとする。このとき次の問に答えよ。

(1) 自然数 ℓ に対してある整数 A，B があって

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{\ell}=A\sqrt{p}+B$$

と表せることを示せ。ただし $[\sqrt{p}]$ は $\sqrt{p}$ より小さい整数のうちで最大のものを表す。

(2) xy 平面において，x 座標および y 座標がともに整数であるような点を格子点という。このとき，直線 $y=\sqrt{p}\,x$ との距離が $\dfrac{1}{N}$ 以下で x 座標が N 以上であるような格子点が存在することを示せ。

(3) 双曲線 $y^2-px^2=q$ の上の点 P と格子点 Q で，線分 PQ の長さが $\dfrac{1}{M}$ 以下であるようなものが存在することを示せ。

(4) $p=5$，$q=2$，$M=100$ として(3)の条件をみたすような格子点 Q を一つ求めよ。すなわち，格子点 Q であって，双曲線 $y^2-5x^2=2$ の上の点 P を適当にとれば PQ の長さを $\dfrac{1}{100}$ 以下にすることができるようなものを一つ求めよ。ただし，$2.23606<\sqrt{5}<2.23607$ を用いてよい。

分　野

数学C：双曲線，**数学Ⅲ**：数列の極限，**数学A**：整数

考え方

(1) は数学的帰納法によって証明できる．

(2) は直線 $y=\sqrt{p}\,x$ と格子点 $(X,\ Y)$ の距離が $\dfrac{|\sqrt{p}\,X-Y|}{\sqrt{p+1}}$ について，
$|\sqrt{p}\,X-Y|=|(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{\ell}|$ となるような自然数の組 $(X,\ Y)$ をとって考える．$\ell\to\infty$ のとき，$X\to\infty$，$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}])^{\ell}\to 0$ となることを利用．

(3) は直線 $y=\sqrt{p}\,x$ は双曲線 $y^2-px^2=q$ の漸近線だから，同様なことがいえる．

【解答】

(1) 数学的帰納法で証明する．

(I) $\ell=1$ のとき，$A=1$，$B=-[\sqrt{p}\,]$ とおくと，

$$\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,]=A\sqrt{p}+B$$

となり，A，B は整数であるから条件をみたす A，B は存在する．

(II) $\ell=k$ のとき $(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^k=A\sqrt{p}+B$ をみたす整数 A，B が存在するとしてそれらをそれぞれ A_k，B_k とする．

このとき，

$$\begin{aligned}(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^{k+1}&=(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^k=(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])(A_k\sqrt{p}+B_k)\\&=(B_k-[\sqrt{p}\,]A_k)\sqrt{p}+(pA_k-[\sqrt{p}\,]B_k).\end{aligned}$$

よって，$A=B_k-[\sqrt{p}\,]A_k$，$B=pA_k-[\sqrt{p}\,]B_k$ とすれば，A，B は整数で，

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^{k+1}=A\sqrt{p}+B$$

と表せる．

(I)，(II) よりすべての自然数 ℓ に対して，それぞれ $(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell=A\sqrt{p}+B$ となる整数 A，B が存在する．（証明終り）

(2) (1) から

$$A_{\ell+1}=B_\ell-[\sqrt{p}\,]A_\ell,\quad B_{\ell+1}=pA_\ell-[\sqrt{p}\,]B_\ell,\quad A_1=1,\quad B_1=-[\sqrt{p}\,] \qquad \cdots①$$

をみたす $\{A_\ell\}$，$\{B_\ell\}$ に対して，

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell=A_\ell\sqrt{p}+B_\ell$$

が成り立ち，A_ℓ，B_ℓ は整数．

$$\alpha_\ell=(-1)^{\ell-1}A_\ell,\quad \beta_\ell=(-1)^\ell B_\ell$$

とおくと，① は

$$\alpha_{\ell+1}=\beta_\ell+[\sqrt{p}\,]\alpha_\ell,\quad \beta_{\ell+1}=p\alpha_\ell+[\sqrt{p}\,]\beta_\ell,\quad \alpha_1=1,\quad \beta_1=[\sqrt{p}\,]$$

となる．α_1，β_1，$[\sqrt{p}\,]$ はすべて自然数だから，帰納的に α_ℓ，β_ℓ は自然数．

α_ℓ，β_ℓ，$[\sqrt{p}\,]$ は正だから $\alpha_{\ell+1}>\alpha_\ell$，$\beta_{\ell+1}>\beta_\ell$．$\{\alpha_\ell\}$，$\{\beta_\ell\}$ は自然数の単調増加数列．

また，$|(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell|=|\alpha_\ell\sqrt{p}-\beta_\ell|$ で，$0<\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,]<1$ だから $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell=0$．

一方，$\{\alpha_\ell\}$ は単調増加な自然数の列だから $\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\alpha_\ell=\infty$．

したがって，十分大きい ℓ に対して $(X,\ Y)=(\alpha_\ell,\ \beta_\ell)$ となる点をとれば，直線 $y=\sqrt{p}\,x$ との距離

$$\frac{|\sqrt{p}\,X-Y|}{\sqrt{p+1}}=\frac{|\sqrt{p}\,\alpha_\ell-\beta_\ell|}{\sqrt{p+1}}=\frac{(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell}{\sqrt{p+1}}$$

の $\ell\to\infty$ の極限は 0 であるから，N をどのようにとっても，$y=\sqrt{p}\,x$ との距離 $\dfrac{(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell}{\sqrt{p+1}}$ を $\dfrac{1}{N}$ より小さくし，$X=\alpha_\ell$ を N より大きくすることができる．（証明終り）

(1) と (2) の前半の【別解】

(1) $(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell$ を二項展開する．

$$\begin{aligned}(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell&=\sum_{k=0}^{\ell}{}_\ell\mathrm{C}_k(-[\sqrt{p}\,])^{\ell-k}\sqrt{p}^{\,k}\\&=\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]}{}_\ell\mathrm{C}_{2m+1}(-[\sqrt{p}\,])^{\ell-2m-1}\sqrt{p}^{\,2m+1}+\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell}{2}\right]}{}_\ell\mathrm{C}_{2m}(-[\sqrt{p}\,])^{\ell-2m}\sqrt{p}^{\,2m}\\&=(-1)^{\ell-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]}{}_\ell\mathrm{C}_{2m+1}[\sqrt{p}\,]^{\ell-2m-1}p^m\sqrt{p}+(-1)^\ell\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell}{2}\right]}{}_\ell\mathrm{C}_{2m}[\sqrt{p}\,]^{\ell-2m}p^m\end{aligned}$$

から，

$$A=(-1)^{\ell-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell-1}{2}\right]}{}_\ell C_{2m+1}[\sqrt{p}\,]^{\ell-2m-1}p^m,\quad B=(-1)^{\ell}\sum_{m=0}^{\left[\frac{\ell}{2}\right]}{}_\ell C_{2m}[\sqrt{p}\,]^{\ell-2m}p^m \qquad \cdots②$$

とおけば，A，B は整数で，

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell=A\sqrt{p}+B.$$ （証明終り）

(2) ② の A，B はそれぞれ ℓ によって定まるから，それらを A_ℓ，B_ℓ とすると，

$$\alpha_\ell=(-1)^{\ell-1}A_\ell,\quad \beta_\ell=(-1)^\ell B_\ell$$

は共に正の整数つまり自然数である．

以下**【解答】**と同じ．

(3) $y^2-px^2=q$ のうち，$y=\sqrt{px^2+q}$ ($x\geqq 0$) の部分は $y=\sqrt{p}\,x$ を漸近線としてもつ．したがって十分大きな x に対して $y=\sqrt{p}\,x$ との距離は 0 に限りなく近づく．一方，$y=\sqrt{p}\,x$ に近い格子点も必ず存在するからうまく，P，Q をとれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\mathrm{PQ}=0$ となる．

(2) で使った，α_ℓ を使って，$y^2-px^2=q$ 上の点 P を $(\alpha_\ell,\ \sqrt{q+p\alpha_\ell{}^2})$ とする．格子点 Q を $(\alpha_\ell,\ \beta_\ell)$ とおき，$y=\sqrt{p}\,x$ 上の点 H を $(\alpha_\ell,\ \sqrt{p}\,\alpha_\ell)$ とおくと，

$$\mathrm{PH}=\sqrt{q+p\alpha_\ell{}^2}-\sqrt{p}\,\alpha_\ell=\frac{q}{\sqrt{q+p\alpha_\ell{}^2}+\sqrt{p}\,\alpha_\ell}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\mathrm{PH}=0$.

一方

$$\mathrm{QH}=|\beta_\ell-\sqrt{p}\,\alpha_\ell|=|(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^\ell|$$

だから，$\displaystyle\lim_{\ell\to\infty}\mathrm{QH}=0$.

$$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{PH}+\mathrm{QH}$$

より PQ も 0 に収束する．

したがって任意の M に対して，$\mathrm{PQ}<\dfrac{1}{M}$ となるようにできる． （証明終り）

(4) (3) において，$p=5$，$q=2$，$\alpha_\ell=x$ として考える．

$y=\sqrt{2+5x^2}$ 上の点 $(x,\ \sqrt{2+5x^2})$ と $y=\sqrt{5}\,x$ の距離は

$$\frac{\sqrt{2+5x^2}-\sqrt{5}\,x}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{2+5xr}+\sqrt{5}\,x}.$$

点 $(\alpha_\ell,\ \beta_\ell)$ と $y=\sqrt{5}\,x$ の距離は $\dfrac{(\sqrt{5}-2)^\ell}{\sqrt{6}}$.

$\alpha_1=1$，$\beta_1=2$，$\alpha_{\ell+1}=2\alpha_\ell+\beta_\ell$，$\beta_{\ell+1}=5\alpha_\ell+2\beta_\ell$ から，

$$(\alpha_2,\ \beta_2)=(4,\ 9),\quad (\alpha_3,\ \beta_3)=(17,\ 38),\quad (\alpha_4,\ \beta_4)=(72,\ 161).$$

Q を $(72,\ 161)$ とおき，P を $(72,\ \sqrt{2+5\times 72^2})$ とおき，H を $(72,\ 72\sqrt{5})$ とおくと，

$$\mathrm{QH}=|161-72\sqrt{5}|<161-72\times 2.23606=161-160.99632=0.00368.$$

$$\mathrm{PH}=\sqrt{2+5\times 72^2}-72\sqrt{5}=\frac{2}{\sqrt{2+5\times 72^2}+72\sqrt{5}}<\frac{1}{72\sqrt{5}}$$

$$<\frac{1}{72\times 2.236}=\frac{1}{160.992}<0.00623.$$

よって，

$$\mathrm{PQ}\leqq\mathrm{PH}+\mathrm{QH}<0.00991<\frac{1}{100}.$$ （証明終り）

よって，$\mathrm{P}(72,\ \sqrt{2+5\times 72^2})$，$\mathrm{Q}(72,\ 161)$ とおけばよい． …(答)

（注１） 実際に $\sqrt{2+5\times 72^2}$ を電卓計算すると 161.00310… となりとてもよい近似であることがわかる．

（注２） 本問の(1)の A，B は一意的である．本問では存在することだけが要求されているので，そのことには言及しなかったが，以下に簡単に説明する．

まず，$\sqrt{p}$ が無理数であることを示す．

$\sqrt{p}$ は自然数数でないから，これが有理数なら，

$$\sqrt{p}=\frac{m}{n}\quad (m,\ n \text{ は互いに素な自然数})$$

とおける．よって，

$$pn^2=m^2 \qquad \cdots③$$

とおける．p を素因数分解して，

$$p=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots.\quad (p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots \text{ は素数，} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots \text{ は自然数})$$

とおくと，$\sqrt{p}$ が自然数ではないから α_1，α_2，α_3，$\cdots$ のうちに奇数のものが存在する．それを改めて α_1 とすると，③ において素数 p_1 の指数は左辺が奇数で右辺は偶数となり矛盾する．したがって，$\sqrt{p}$ は無理数．

次に，$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^{\ell}=A\sqrt{p}+B$ の A，B がただ１通りであることを示す．

$(A,\ B)\fallingdotseq(A',\ B')$ で，

$$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^{\ell}=A\sqrt{p}+B=A'\sqrt{p}+B'$$

となる整数の組，$(A,\ B)$，$(A',\ B')$ があるとする．

$A=A'$ とすると，$B=B'$ となり，$(A,\ B)\fallingdotseq(A',\ B')$ に反する．

$A\fallingdotseq A'$ とすると，$\sqrt{p}=-\dfrac{B-B'}{A-A'}$ となり，$\sqrt{p}$ が無理数であることと矛盾する．

よって，$(\sqrt{p}-[\sqrt{p}\,])^{\ell}=A\sqrt{p}+B$ となる整数の組 $(A,\ B)$ があるならばそれはただ１通りである．

第３問

(1) すべての n について $a_n\geqq 2$ であるような数列 $\{a_n\}$ が与えられたとして，数列 $\{x_n\}$ に関する漸化式

(A) $$x_{n+2}-a_{n+1}x_{n+1}+x_n=0\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(A)をみたし，$x_0=0$，$x_m=1$ であるような数列 $\{x_n\}$ がただ一つ存在することを示せ。また，この数列について

$$0<x_n<1\quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

が成り立つことを示せ。ただし m は３以上とする．

(2) 数列 $\{a_n\}$ と正の定数 b が与えられ，すべての n について $a_n\geqq 1+b$ が成り立つと仮定して，数列 $\{y_n\}$ に関する漸化式

(B) $$y_{n+2}-a_{n+1}y_{n+1}+by_n=0\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。このとき，自然数 m を一つ決めて固定すれば，漸化式(B)をみたし，$y_0=0$，$y_m=1$ であるような数列 $\{y_n\}$ がただ一つ存在して

$$0<y_n<1\quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

が成り立つことを示せ。ただし m は３以上とする．

(3) c を２より大きな定数として，すべての n について $a_n\geqq c$ が成り立つと仮定する。このとき，c から決まる m によらない正の定数 r で $r<1$ をみたすものが存在し，(1)で得られた数列 $\{x_n\}$ は

$$x_n<r^{m-n}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

をみたすことを示せ。

分　野

数学A：数列，不等式の証明

考え方

$x_0=0$ のとき，数列 $\{x_n\}$ は x_1 と数列 $\{a_n\}$ によって定まる．

$x_0=0$ だから，$x_n=A_nx_1$ とおくと，$\{A_n\}$ は $\{a_n\}$ によってのみ定まる．

$\{A_n\}$ は正の単調増加数列になる．そのことを証明すれば(1)は容易に証明される．

(2)はほぼ同様に考える．

(3)では $rA_{n+1}>A_n$ となる正の定数 r (<1) が存在する．この r を用いて証明する．

【解答】

(1)　$x_0=0$ のとき，

$$x_2=a_1x_1,\quad x_3=a_2x_2-x_1=(a_1a_2-1)x_1,$$
$$x_4=a_3x_3-x_2=\{a_3(a_1a_2-1)-a_1\}x_1=(a_1a_2a_3-a_3-a_1)x_1,\ \cdots.$$

(A)をみたす数列 $\{x_n\}$ に対して，$A_1=1$，x_k $(2\leqq k\leqq m)$ に対して，$x_k=A_kx_1$ をみたし，a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{k-1} で定まる A_k が存在することを数学的帰納法で示す．

(I)　$k=2$ のとき $x_2=a_1x_1$ だから $A_2=a_1$ とおけば，A_2 は a_1 で表されている．

(II)　$k=l$，$l-1$ のとき $x_l=A_lx_1$ で，A_l は a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{l-1} で定まり，$x_{l-1}=A_{l-1}x_1$ で，A_{l-1} は a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{l-2} で定まるとする．

$$x_{l+1}=a_lx_l-x_{l-1}=(a_lA_l-A_{l-1})x_1.$$
$$A_{l+1}=a_lA_l-A_{l-1}$$

とすると，$x_{l+1}=A_{l+1}x_1$ とかける．

よって，$x_k=A_kx_1$ とかける．

また $A_1=1$，$A_2=a_1\geqq2>1$，および，$A_{k+1}=a_kA_k-A_{k-1}$ すなわち $A_{k+1}-A_k=(a_k-1)A_k-A_{k-1}$ から，$k=1$，2，3，$\cdots$ に対して，$A_{k+1}>A_k>0$ がいえる．

なぜなら，$k=1$ のときは明らか，$k=l$ のとき $A_{l+1}>A_l>0$ なら

$$A_{l+2}-A_{l+1}=(a_{l+1}-1)A_{l+1}-A_l\geqq A_{l+1}-A_l>0.$$

よって，$A_m\neq0$．よって，$x_m=A_mx_1$．$x_m=1$ のとき，$x_1=\dfrac{1}{A_m}$．よって x_0，x_1 が定まり，$\{x_n\}$ もただ1通りに定まる．　（証明終り）

$x_m=1>0$，$A_m>0$ だから，$x_1>0$．$0<A_1<A_2<A_3<\cdots<A_m$ で $x_k=A_kx_1$ だから，

$$0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_m=1$$

よって，

$$0<x_n<1\quad(n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1).$$

（証明終り）

(2)　(1)と同様に，$y_n=B_ny_1$，（B_n は a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_{n-1}，b で定められる）となる B_n が存在し，

$$B_{n+2}-a_nB_{n+1}+bB_n=0$$

をみたす．ただし，$B_1=1$，$B_2=a_1$．

$$B_{n+2}-B_{n+1}=(a_n-1)B_{n+1}-bB_n$$

から，$0<B_n<B_{n+1}$ を証明する．

$n=1$ のとき $a_1\geqq b_1+1>1$ より，明らか．$0<B_n<B_{n+1}$ のとき，

$$B_{n+2}-B_{n+1}=(a_n-1)B_{n+1}-bB_n\geqq b(B_{n+1}-B_n)>0.$$

よって，$B_m>0$．よって，$y_m=B_my_1$．$y_m=1$ から $y_1=\dfrac{y_m}{B_m}=\dfrac{1}{B_m}$．$y_0$，$y_1$ が定まるから数列 $\{y_n\}$ もただ1通りに定まる．　（証明終り）

$y_m=1>0$，$B_m>0$ だから，$y_1>0$．$0<B_1<B_2<B_3<\cdots<B_m$ で $y_k=B_ky_1$ だから，

$$0<y_1<y_2<y_3<\cdots<y_m=1.$$

よって，

$$0<y_n<1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1).$$ （証明終り）

(3) $f(x)=x^2-cx+1$ とすると，$f(0)=1>0$，$f(1)=2-c<0$ より，$f(x)=0$ の2解を r，s として，$0<r<1<s$ とすることができる．ただし，$r+s=c$，$rs=1$．(1)の A_n について，

$$A_{n+2}-a_{n+1}A_{n+1}+A_n=0 \geqq A_{n+2}-cA_{n+1}+A_n=rsA_{n+2}-(r+s)A_{n+1}+A_n.$$

よって，

$$s(rA_{n+2}-A_{n+1}) \geqq rA_{n+1}-A_n.$$

$A_1=1$，$A_2=a_1 \geqq c=r+s$．　$rA_2-A_1=r(A_2-sA_1) \geqq r^2>0$.

よって，$n \geqq 1$ に対して

$$rA_{n+1}-A_n \geqq \frac{1}{s}(rA_n-A_{n-1}) \geqq \frac{1}{s^2}(rA_{n-1}-A_{n-2}) \geqq \cdots \geqq \frac{1}{s^{n-1}}(rA_2-A_1)>0.$$

よって，

$$rA_{n+1}-A_n>0.\ \text{すなわち}\ rA_{n+1}>A_n.$$

よって，

$$A_1=1<rA_2<r^2A_3<\cdots<r^{m-1}A_m.$$

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1$ のとき，$x_n=A_nx_1$，$r^{n-1}A_n<r^{m-1}A_m$ から

$$r^{n-1}x_n<r^{m-1}x_m=r^{m-1}. \quad \therefore \quad x_n<r^{m-n} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1).$$ （証明終り）

(3)の【別解】　河合塾公表解答

$a_n \geqq c>2$ および $x_{n+1}>x_n$ ($n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) に注意して，

$$x_{n+1}=\frac{x_{n+2}+x_n}{a_{n+1}}<\frac{x_{n+2}+x_{n+2}}{c}=\frac{2}{c}x_{n+2}.$$

$r=\dfrac{2}{c}$ とおくと，$r<1$ であり，

$$x_n<rx_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

$x_m=1$ より，

$$x_n<r^{m-n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1).$$ （証明終り）

2004 年　前期・文科

第 1 問

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P，Q，R が次の条件をみたしている。
△PQR は一辺の長さが a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。
このとき，a の値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：図形と方程式

考え方

P，Q，R の x 座標で PQ の傾きが $\sqrt{2}$ である条件，△PQR が正三角形である条件を表す．正三角形である条件は，回転行列または複素数を用いる．

【解答】

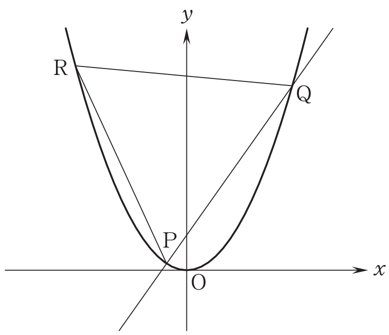
$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$，$\mathrm{R}(r,\ r^2)$ とおく．傾き $\sqrt{2}$ の直線上の 2 頂点，P，Q の x 座標の大小を $p<q$ として一般性を失わない．このとき，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(q-p)^2+(q^2-p^2)^2}=(q-p)\sqrt{1+(q+p)^2}=a.$$

直線 PQ の傾きは

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=p+q=\sqrt{2}. \quad \cdots①$$

$$\therefore\quad a=(q-p)\sqrt{3}. \quad \cdots②$$



①，② から

$$p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad q=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2\sqrt{3}}. \quad \cdots③$$

直線 PQ と x 軸のなす角を θ とすると，$\tan\theta=\sqrt{2}$.
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\pm 60^\circ$ 回転すると $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ になる．以下複号同順．
複素数平面上で

$$\begin{aligned}(r-p)+(r^2-p^2)i&=\{(q-p)+(q^2-p^2)i\}(\cos 60^\circ\pm i\sin 60^\circ)\\&=(q-p)\{1+(p+q)i\}\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i)=\frac{1}{2}(q-p)(1+\sqrt{2}\,i)(1\pm\sqrt{3}\,i)\\&=\frac{a}{2\sqrt{3}}\{1\mp\sqrt{6}+(\sqrt{2}\pm\sqrt{3})i\}.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad r-p=\frac{1\mp\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a,\quad r^2-p^2=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}a \quad \cdots④$$

$$\therefore\quad r+p=\frac{r^2-p^2}{r-p}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{3}}{1\mp\sqrt{6}}=-\frac{4\sqrt{2}\pm 3\sqrt{3}}{5}. \quad \cdots⑤$$

⑤−(④ の第 1 式) と ③ より，

$$-\frac{4\sqrt{2}\pm 3\sqrt{3}}{5}-\frac{1\mp\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}a=2p=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{a}{2\sqrt{3}}\right).$$

よって，

$$a=\frac{(\pm 9\sqrt{2}+3\sqrt{3})2\sqrt{3}}{5(\sqrt{6}\pm 1)}=\pm\frac{18}{5}.$$

$a>0$ より，

$$a=\frac{18}{5}. \quad \cdots(答)$$

第２問

a を正の実数とする。次の２つの不等式を同時にみたす点 (x, y) 全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2$$
$$y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値，最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域

考え方

D を xy 平面上の領域を図示し，直線 $x+y=k$ と共有点をもつ k の最大値，最小値が求めるもの．ただし，D は a によって最大，最小を与える a が異なるので場合分けが必要である．

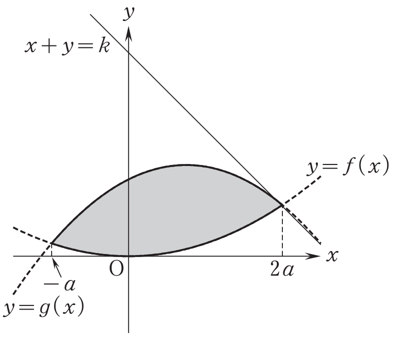
【解答】

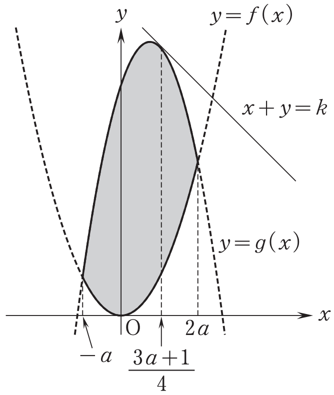
$f(x)=x^2$，$g(x)=-2x^2+3ax+6a^2$ とおく．

交点の x 座標を求める．

$$x^2=-2x^2+3ax+6a^2. \quad \therefore \quad x^2-ax-2a^2=0.$$
$$\therefore \quad (x-2a)(x+a)=0. \quad \therefore \quad x=-a, \quad x=2a.$$

領域 D と直線 $x+y=k$ が共有点を持つ最大の k が求める最大値である．





$g'(x)=-4x+3a=-1$ となるのは $x=\dfrac{3a+1}{4}$.

(i)　$0<a<\dfrac{1}{5}$ のとき，$2a<\dfrac{3a+1}{4}$.

よって，$x+y$ が最大になるのは，$x=2a$.

このとき，$x+y=2a+4a^2$.

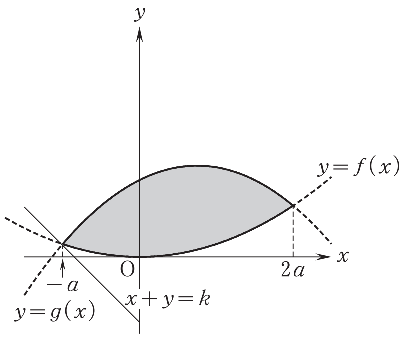
(ii)　$\dfrac{1}{5} \leqq a$ のとき，$x=\dfrac{3a+1}{4}$ で $x+y$ は最大になる．

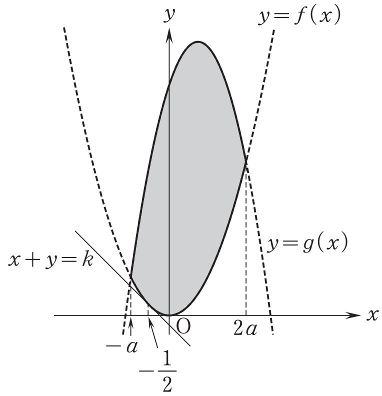
最大値は $x+y=\dfrac{3a+1}{4}-2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\dfrac{3a+1}{4}+6a^2=\dfrac{57a^2+6a+1}{8}$.

まとめて，最大値は

$$\begin{cases} 2a+4a^2 & \left(0<a<\dfrac{1}{5} \text{ のとき}\right) \\ \dfrac{57a^2+6a+1}{8} & \left(a \geqq \dfrac{1}{5} \text{ のとき}\right) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

領域 D と直線 $x+y=k$ が共有点を持つ最小の k が求める最小値である．





$f'(x)=2x=-1$ となるのは $x=-\dfrac{1}{2}$.

(i) $0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，$-a>-\dfrac{1}{2}$．よって，$x+y$ が最小になるのは，$x=-a$.

このとき，$x+y=-a+a^2$.

(ii) $\dfrac{1}{2}\leqq a$ のとき，$x=-\dfrac{1}{2}$ で $x+y$ は最小になる.

最小値は $x+y=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$.

まとめて，最小値は

$$\begin{cases} -a+a^2 & \left(0<a<\dfrac{1}{2}\ のとき\right) \\ -\dfrac{1}{4} & \left(a\geqq\dfrac{1}{2}\ のとき\right) \end{cases} \quad \cdots(答)$$

第3問

関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x$$
$$g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x)$$
$$h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(2) $g(x)=0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(3) $h(x)=0$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分

考え方

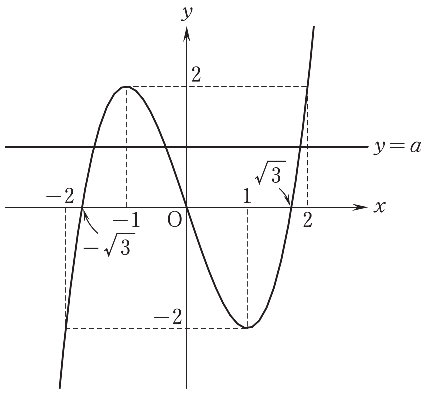
$g(x)=f(f(x))$，$h(x)=f(f(f(x)))$．$f(x)=0$ の 3 解が $x=0$，$\pm\sqrt{3}$ だから，$f(f(x))=0$ の解は，$f(x)=0$，$\pm\sqrt{3}$ の解である.

$f(x)=a$ が 3 実解をもつ a の範囲はその 3 解が含まれる範囲でもある．$h(x)=f(f(f(x)))=0$ の解の個数を考えるとき，このことを考慮するとよい.

【解答】

(1)　$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



$y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数が $f(x)=a$ をみたす x の個数.

表にすると

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	1	2	3	2	1

…(答)

(2)　$g(x)=0$ のとき，$g(x)=f(f(x))=0$，$f(x)=0$ の解は $x=\pm\sqrt{3}$，0 から，$g(x)=0$ のとき，$f(x)=\pm\sqrt{3}$，0

いずれも $-2<f(x)<2$ の範囲にあるから，(1)で $-2<a<2$ の場合に相当しそれぞれに対する，x の個数は 3 個．よって，求める解の個数は 9 個．　…(答)

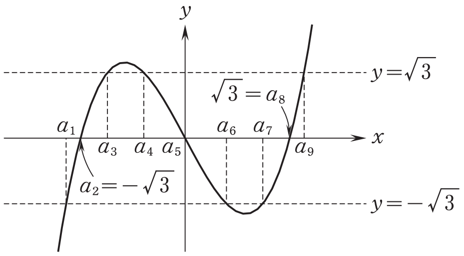
(3)　$h(x)=f(g(x))=g(f(x))=0$.

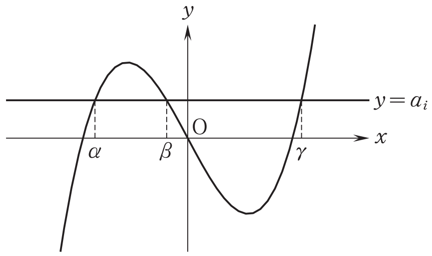
$f(x)=-2$ の解は $x=1$，1，-2，$f(x)=2$ の解は $x=-1$，-1，2 であるから，(1)で $-2<a<2$ のとき，$f(x)=a$ の 3 解はすべて $-2<x<2$ の範囲にある.

$g(x)=0$ のとき，$-2<f(x)<2$ だから，(2)の 9 解はすべて，$-2<x<2$ の範囲にある.

よって，$h(x)=g(f(x))=0$ に対して $f(x)$ は 9 個の異なる値をとる．それらを，a_i $(i=1, 2, 3, \cdots, 9)$ とすると，$-2<a_i<2$ だから，$f(x)=a_i$ はすべて $-2<x<2$ の範囲に異なる 3 個の実数解をもつ.

よって，$h(x)=0$ をみたす異なる実数 x の個数は 27 個ある.　…(答)





第 4 問

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並びは「黒白白」となる。さらに，2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並びは「黒白黒」となる。

(1)「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または

「白白黒」となる確率を p_n とする。

p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

注意：さいころは１から６までの目が等確率で出るものとする。

分　野

数学Ⅰ：確率，**数学Ａ**：数列，漸化式

考え方

１回に１枚裏返すから奇数回裏返せば奇数枚裏返る．このことに注意する．

【解答】

⑴　３回の操作のうち１，２が出たのが奇数回，３，４および５，６が出たのが偶数回の場合である．（ただし０は偶数である）

そのような目の出方を１と２，３と４，５と６をそれぞれ同一視しての回数をかきだすと，次の ①，②，③ の３つの場合だけになる．

出る目の回数

出た目	１，２	３，４	５，６
①	3	0	0
②	1	2	0
③	1	0	2

① は１通り，②，③ はそれぞれ３通りあるから場合の数を求めると，

$$1+3+3=7.$$

すべての場合の数は $3^3=27$ だから求める確率は

$$\frac{7}{27}.$$ …(答)

⑵　黒の枚数で考える．奇数回の操作では黒の枚数は奇数枚で，偶数回の操作では黒の枚数は偶数枚である．

$n=2k+1$ のとき，黒の枚数は奇数枚だから，求める場合の余事象は「黒黒黒」の場合である．したがって，「黒黒黒」である確率は $1-p_{2k+1}$ である．

１回だけの操作では必ず「黒白白」,「白黒白」,「白白黒」のいずれかになるから，$p_1=1$.（これは $k=0$ のときである）

この状態から２回の操作で「黒白白」,「白黒白」,「白白黒」のいずれかになる確率は，$\frac{7}{9}$.

「黒黒黒」の状態から２回の操作で「黒白白」,「白黒白」,「白白黒」のいずれかになる確率は，$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

よって，

$$p_{2k+3}=\frac{7}{9}p_{2k+1}+\frac{2}{3}(1-p_{2k+1})=\frac{1}{9}p_{2k+1}+\frac{2}{3}.$$

$$p_{2k+3}-\frac{3}{4}=\frac{1}{9}\left(p_{2k+1}-\frac{3}{4}\right)$$

から

$$p_{2k+1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{3}{4}.$$ …(答)

2004 年　前期・理科

第 1 問

（文科　第 1 問と同じ）

第 2 問

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1)　10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ。

(2)　10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。

分　野

数学 A：整数

考え方

2 桁以上の数の平方数の下 2 桁の数の和の奇偶性はもとの数の 1 位数だけで決まる．

平方数の下 4 桁の数がすべて等しくなる場合は，下 2 桁の数の和が偶数であることで絞り込める．あとは，場合分けして丹念に調べ，平方数の下 4 桁の数がすべて等しいときそれらが 0 の場合しかないことを示せる．

【解答】

(1)　10 の位のが p，1 の位が q である数の平方の 10 の位のが a，1 の位が b である数とする．

$$(10p+q)^2=100p^2+20pq+q^2$$

q^2 以外は 20 の倍数だから，$a+b$ が偶数なら q^2 の 10 の位の数と，1 の位の数の和も偶数．

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

$q=0, 1, \cdots, 9$ を 2 乗したとき，10 の位の数と，1 の位の数の和が偶数なのは 0，2，8．これらを 2 乗したものは 0，4，64．これの 1 の位の数が b であるから，b は 0 または 4 である．　（証明終り）

(2)　下 4 桁が $klmn$ である数の平方が問題の条件をみたしているとする．

平方数の 10 の位の数と 1 の位の数が等しいから，その和は偶数．

したがって，(1) から，1 の位の数は 0 か 4．

0 でないとすると，下 4 桁は 4444 である．したがって，$n=2$ または 8.

(i)　$n=2$ のとき，$(10m+2)^2=100m^2+40m+4$ の下 2 桁が 44 だから，$m=1$ または 6.

(i-a)　$m=1$ のとき，$(100l+12)^2=10000l^2+2400l+144$ より 100 の位は奇数になり下 3 桁が 444 になることはない．

(i-b)　$m=6$ のとき，$(100l+62)^2=10000l^2+12400l+3844$ より $l=4$ または $l=9$.

(i-b-ア)　$l=4$ のとき，$(1000k+462)^2=10^6k^2+924000k+213444$ より 1000 の位は奇数になり下 4 桁が 4444 になることはない．

(i-b-イ)　$l=9$ のとき，$(1000k+962)^2=10^6k^2+1924000k+925444$ より 1000 の位は奇数になり下 4 桁が 4444 になることはない．

(ii) $n=8$ のとき，$(10m+8)^2=100m^2+160m+64$ の下 2 桁が 44 だから，$m=3$ または 8.

(ii-a) $m=3$ のとき，$(100l+38)^2=10000l^2+7600l+1444$ の下 3 桁が 444 だから，$l=0$ または 5.

(ii-a-ア) $l=0$ のとき $(1000k+38)^2=1000000k^2+76000k+1444$ より 1000 の位は奇数になり下 4 桁が 4444 になることはない.

(ii-a-イ) $l=5$ のとき，$(1000k+538)^2=1000000k^2+1076000k+289444$ より 1000 の位は奇数になり下 4 桁が 4444 になることはない.

(ii-b) $m=8$ のとき，$(100l+88)^2=10000l^2+17600l+7744$ より 100 の位は奇数になり下 3 桁が 444 になることはない.

以上により，10 進法で平方数を表すとき，下 4 桁の数字は 4444 ではない.

したがって，平方数の下 4 桁の数字は 0000 である．したがって，10000 で割り切れる．（証明終り）

第 3 問

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の一点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

円内を転がる円周上の 1 点の軌跡が囲む部分の面積を考える．座標設定が必要だが，曲線の対称性から，円 C の中心を原点，曲線の中点が軸上にあるように設定する．

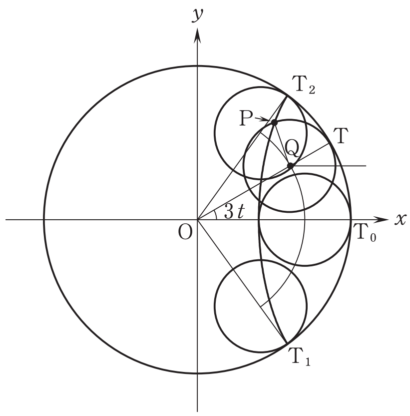
円板 D を転がすとき，$\overset{\frown}{\mathrm{TT_2}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であることを利用する．D の中心半径なす角を考えて P の座標を定める．

面積はパラメーターを使って積分する．

【解答】

円 C の中心を O，円板 D の中心を Q，その周上の点 P が最初に接する点を $\mathrm{T_1}$，次に接する点を $\mathrm{T_2}$ とする．円 C と，円板 D の周の長さの比が $10:3$ だから

$$\angle \mathrm{T_1OT_2}=\frac{3}{10}\times 2\pi=\frac{3}{5}\pi.$$



O を原点とし，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{T_1T_2}}$ の中点 $\mathrm{T_0}$ が x 軸上にあるように座標をとる.（図参照）

$t=0$ のとき Q が x 軸上にあるとして OQ と x 軸のなす角を $3t$ とする．このとき接点を T とする．

$\angle \mathrm{T_1OT_0}=\angle \mathrm{T_0OT_2}=\dfrac{3}{10}\pi$．$\angle \mathrm{T_0OT}=3t$ だから

$\angle \mathrm{TOT_2}=\dfrac{3}{10}\pi-3t.$

$\overset{\frown}{\mathrm{TT_2}}=3\pi-30t=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$．よって $\angle \mathrm{PQT}=\pi-10t$.

よって，QP が x 軸となす角は $3t+(\pi-10t)=\pi-7t$.

$\mathrm{OQ}=10-3=7$，$\mathrm{PQ}=3$ より，

Q の座標は $(7\cos 3t,\ 7\sin 3t)$．$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=3(\cos(\pi-7t),\ \sin(\pi-7t))=3(-\cos 7t,\ \sin 7t)$.

よって，点Pの座標は

$$(7\cos 3t-3\cos 7t,\ 7\sin 3t+3\sin 7t).$$

$-\dfrac{3}{10}\pi \leqq \angle \mathrm{T_0OT}=3t\leqq \dfrac{3}{10}\pi$ より，

$$-\frac{\pi}{10}\leqq t\leqq \frac{\pi}{10}.$$

点Pの軌跡と直線 $x=10\cos\dfrac{3}{10}\pi$ で囲まれた部分の面積を S_1 とする．

$$\begin{aligned}
S_1&=2\int_4^{10\cos\frac{3}{10}\pi} y\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{10}}(7\sin 3t+3\sin 7t)(7\cos 3t-3\cos 7t)'\,dt\\
&=42\int_0^{\frac{\pi}{10}}(7\sin 3t+3\sin 7t)(\sin 7t-\sin 3t)\,dt\\
&=42\int_0^{\frac{\pi}{10}}(4\sin 3t\sin 7t+3\sin^2 7t-7\sin^2 3t)\,dt\\
&=21\int_0^{\frac{\pi}{10}}(4\cos 4t-4\cos 10t-3\cos 14t+7\cos 6t-4)\,dt\\
&=21\Big[\sin 4t-\frac{2}{5}\sin 10t-\frac{3}{14}\sin 14t+\frac{7}{6}\sin 6t-4t\Big]_0^{\frac{\pi}{10}}\\
&=21\Big(\sin\frac{2}{5}\pi-\frac{2}{5}\sin\pi-\frac{3}{14}\sin\frac{7}{5}\pi+\frac{7}{6}\sin\frac{3}{5}\pi-\frac{2}{5}\pi\Big).
\end{aligned}$$

$\sin\dfrac{2}{5}\pi=\sin\dfrac{3}{5}\pi=-\sin\dfrac{7}{5}\pi$ だから

$$S_1=50\sin\frac{2}{5}\pi-\frac{42}{5}\pi.$$

円 C の内部で $x\geqq 10\cos\dfrac{3}{10}\pi$ の部分の面積を S_2 とすると，

$$S_2=\frac{1}{2}\times 10^2\times\frac{3}{5}\pi-\frac{1}{2}\times 10^2\sin\frac{3}{5}\pi=30\pi-50\sin\frac{2}{5}\pi.$$

点Pの軌跡と円 C（周）の $x\geqq 10\cos\dfrac{3}{10}\pi$ の部分で囲まれた図形の面積は

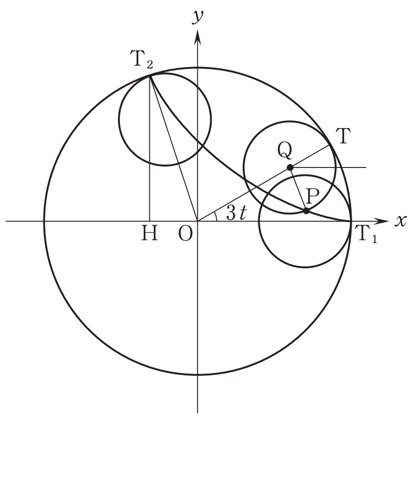
$$S_1+S_2=50\sin\frac{2}{5}\pi-\frac{42}{5}\pi+30\pi-50\sin\frac{2}{5}\pi=\frac{108}{5}\pi. \qquad \cdots(答)$$

円 C 内部の面積は $10^2\pi=100\pi$ だから，もう1つの部分の面積は

$$100\pi-\frac{108}{5}\pi=\frac{392}{5}\pi. \qquad \cdots(答)$$

（注） C と D が最初に接する点 $\mathrm{T_1}$ が x 軸上にあるように座標をとり，$\mathrm{T_2}$ から x 軸に下した垂線の足をHとして，Pの軌跡と $\mathrm{T_2H}$，$\mathrm{HT_1}$ で囲まれる部分の面積を S_3，円 C の内部で $x\geqq 10\cos\dfrac{3}{5}\pi$，$y\geqq 0$ の部分を S_4 とすると求める面積は S_4-S_3 となる．

この座標系で S_3 を積分計算で求める計算も上の S_1 を求める計算とほぼ同程度の計算になる．



第4問

関数 $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x$$
$$f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)$$
$$f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に，$n \geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ をみたす実数 x の個数を求めよ。

(3) n を3以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ をみたす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，**数学A**：数列

考え方

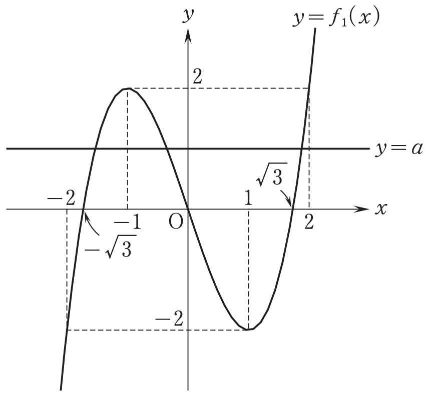
$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ である．

$f_1(x)=a$ が3実解をもつ a の範囲は $-2<a<2$ で，その3解が含まれる範囲も $-2<x<2$ である．$f_{n+1}(x)=f_n(f_1(x))=a$ の解の個数を考えるとき，このことを考慮するとよい．

【解答】

(1) $f_1{}'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1{}'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	↗	2	↘	-2	↗



$y=f_1(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数が $f_1(x)=a$ をみたす実数 x の個数．

実数 x の個数は下の表のようになる．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	1	2	3	2	1

…(答)

(2) $f_1(x)=-2$ の解は $x=1, 1, -2$，$f_1(x)=2$ の解は $x=-1, -1, 2$ であるから，

(1)で $|a|>2$ のとき，$f_1(x)=a$ の実数解は $|x|>2$ の範囲に1つあり，$|a|=2$ のとき $f_1(x)=a$ の2実解の1つは $|x|=2$ で他は $|x|=1<2$ である．$|a|<2$ のとき，$f_1(x)=a$ の3実解はすべて $|x|<2$ の範囲にある．

(i) $|a|>2$ のとき，$f_2(x)=f_1(f_1(x))=a$ なら，$f_1(x)$ は $|f_1(x)|>2$ をみたすただ1つの実数値をとる．

そのとき $f_1(x)=a_1$ とすると，$|a_1|>2$ だから(1)より x の実数値はただ1つである．

(ii) $a=\pm 2$（以下複号同順）のとき，$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\pm 2$ なら，$f_1(x)=\pm 2$ または $f_1(x)=\mp 1$.

(1)より，$f_1(x)=\pm 2$ に対して，x は2個，$f_1(x)=\mp 1$ に対して3個の x が存在する．

よって，$|a|=2$ のとき，$f_2(x)=a$ である実数 x は5個ある．

(iii) $|a|<2$ のとき，$f_2(x)=f_1(f_1(x))=a$ なら，$f_1(x)$ は $|f_1(x)|<2$ をみたす3つの実数値をとる．

そのいずれも(1)の $|a|<2$ の場合に相当するから，それぞれ，3実解をもつ．したがって，x の実数値は9個ある．

実数 x の個数は下の表のようになる．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	1	5	9	5	1

…(答)

(3) (＊) $f_n(x)=0$ の異なる実数解の個数が 3^n であり，それらはすべて $-2<x<2$ の範囲にある．

このことを数学的帰納法で証明する．

(I) $n=1$ のとき，

(1)より $f_1(x)=0$ の解は $x=0$，$x=\pm\sqrt{3}$ でその個数は3個であり，それらはすべて $-2<x<2$ の範囲にある．よって，(＊)は成り立つ．

(II) $n=k$ のとき(＊)が成り立つとする．

すなわち，$f_k(x)=0$ は $-2<x<2$ の範囲に 3^k 個の異なる実数解をもち，それ以外には実数解をもたないとする．

$$f_{k+1}(x)=f_k(f_1(x))=0$$

をみたす実数，$f_1(x)$ は 3^k 個ある．それらを a_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 3^k)$ とすると，それらはすべて $|a_i|<2$ である．

$f_{k+1}(x)=0$ の解は $f_1(x)=a_i$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 3^k)$ の全体である．$|a_i|<2$ だから $f_1(x)=a_i$ はそれぞれ異なる3個の実数解を $|x|<2$ の範囲にもち，これらの方程式は共通解をもたない．

よって，$f_{k+1}(x)=0$ の異なる実数解の個数は $3^k\times3=3^{k+1}$ 個である．よって，$n=k+1$ のときも(＊)をみたす．

よって，すべての自然数 n について，$f_n(x)=0$ をみたす異なる実数 x の個数は 3^n 個ある．

（証明終り）

(注) $f_n(x)=a$ の異なる実数解の個数は次の表のようになる．

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
個数	1	$\dfrac{3^n+1}{2}$	3^n	$\dfrac{3^n+1}{2}$	1

第5問

r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径1の球を A，点 P$(r,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径1の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし，球 A と球 B の和集合とは球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し，そのグラフの概形をかけ。

(2) $V=8$ となるとき，r の値はいくらか。四捨五入して小数第1位まで求めよ。

注意：円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ をみたす。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分，**数学Ⅲ**：体積

考え方

2球の中心が半径の和より遠いときは2球の体積の和．近いときは2球の交円を含む平面で分割してその一方の体積を2倍すればよい．

(2)は r の方程式を立て，増減を調べ近似計算を行う．

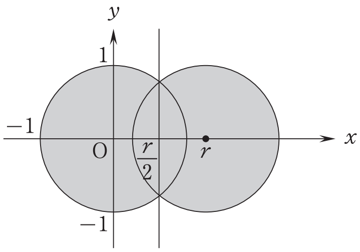
【解答】

(1) 球とは球体のことを意味すると解釈する．

$$A: x^2+y^2+z^2 \leqq 1,\quad B: (x-r)^2+y^2+z^2 \leqq 1.$$

共通部分が存在するのは $0<r\leqq 2$ のとき．

このとき，2つの球面の交線は円である，その円を含む平面は2つの球の中心を結ぶ線分の垂直二等分面で，その方程式は $x=\dfrac{r}{2}$.



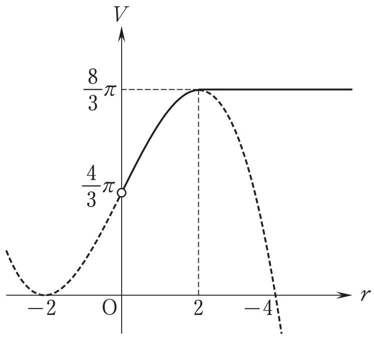
対称性から V は A の $x\leqq\dfrac{r}{2}$ の部分の体積の2倍.

$$V=2\int_{-1}^{\frac{r}{2}}\pi(1-x^2)\,dx=2\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{r}{2}}=\left(\frac{4}{3}+r-\frac{r^3}{12}\right)\pi.$$

共通部分が存在しない場合も含めて

$$V=\begin{cases}\left(\dfrac{4}{3}+r-\dfrac{r^3}{12}\right)\pi & (0<r\leqq 2 \text{ のとき}),\\[2mm] \dfrac{8}{3}\pi & (r>2 \text{ のとき}).\end{cases}$$ …(答)

V のグラフは下図太線部.



(2) $V=8$ のとき $0<r<2$ で,

$$\left(\frac{4}{3}+r-\frac{r^3}{12}\right)\pi=8.\quad r^3-12r-16+\frac{96}{\pi}=0.$$

$f(r)=r^3-12r-16+\dfrac{96}{\pi}$ とおく.

$0<r<2$ で $V\left(=8-\dfrac{f(r)}{12}\pi\right)$ は単調増加だから $f(r)$ は単調減少.

$30.47<\dfrac{96}{3.15}=30.47\cdots<\dfrac{96}{\pi}<\dfrac{96}{3.14}=30.57\cdots<30.58.$

$f(1.5)=(1.5)^3-18-16+\dfrac{96}{\pi}<-30.625+30.58<0.$

$f(1.45)=(1.45)^3-12\times1.45-16+\dfrac{96}{\pi}=3.04\cdots-33.4+\dfrac{96}{\pi}>-30.36+30.47>0.$

よって，$1.45<r<1.5$. r を四捨五入して小数第1位まで求めると，1.5. …(答)

第 6 問

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並びは「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並びは「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

分　野

数学 I：確率，**数学 A**：数列，漸化式

考え方

1 回に 1 枚裏返すから奇数回裏返せば奇数枚裏返る．このことを注意する．

【解答】

(1) 3 回の操作のうち 1，2 が出たのが奇数回，3，4 および 5，6 が出たのが偶数回の場合である．(ただし 0 は偶数である)

そのような目の出方を 1 と 2，3 と 4，5 と 6 をそれぞれ同一視しての回数をかきだすと，次の ①，②，③ の 3 つの場合だけになる．

出る目の回数

出た目	1，2	3，4	5，6
①	3	0	0
②	1	2	0
③	1	0	2

① は 1 通り，②，③ はそれぞれ 3 通りあるから場合の数を求めると，

$$1+3+3=7.$$

すべての場合の数は $3^3=27$ だから求める確率は

$$\frac{7}{27}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 黒の枚数で考える．奇数回の操作では黒の枚数は奇数枚で，偶数回の操作では黒の枚数は偶数枚である．

よって，n が偶数のとき「白黒白」となることはなく，n が奇数のとき「白白白」となることはない．求める確率を p_n とおく．

(i) n が偶数のとき，$n=2k$ とおく．

「白白白」の確率が p_{2k} だからその余事象，黒が 2 枚，つまり「白黒黒」または，「黒白黒」，「黒黒白」のいずれかである確率は $1-p_{2k}$.

最初「白白白」だから，$p_0=1$ としてよい．

「白白白」の状態から 2 回の操作で「白白白」になる確率は，$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

「白黒黒」または，「黒白黒」，「黒黒白」の状態から 2 回の操作で「白白白」になる確率は，$\dfrac{2}{9}$.

よって，

$$p_{2k+2}=\frac{1}{3}p_{2k}+\frac{2}{9}(1-p_{2k})=\frac{1}{9}p_{2k}+\frac{2}{9}.$$

これを解いて

$$p_{2k}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}.$$

(ii) $n=2k+1$ のとき，

「白白白」の状態から 1 回の操作で「白黒白」になる確率は $\dfrac{1}{3}$.

$n=2k$ のとき，「白黒黒」，「黒白黒」，「黒黒白」のいずれである確率も等しく，それぞれ $\dfrac{1-p_{2k}}{3}=\dfrac{1}{4}\left\{1-\left(\dfrac{1}{9}\right)^k\right\}$ である.

このうち，「白黒黒」，「黒黒白」の状態から 1 回の操作で「白黒白」になる確率は $\dfrac{1}{3}$.「黒白黒」から「白黒白」になることはない.

よって，

$$p_{2k+1}=\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}\right\}+\frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}\right]=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{9}\right)^k+\frac{1}{4}.$$

以上の結果を n で表すと，

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4} & (n\text{ が偶数}),\\[2mm] \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\dfrac{1}{4} & (n\text{ が奇数}).\end{cases}$$ …(答)

【別解 1】

真ん中の札の色は無視して両端の色で分類する．真ん中の札を＊で表す．n 回の試行の後，白＊白となる確率を a_n，白＊黒または黒＊白となる確率を b_n，黒＊黒となる確率を c_n とする.

このとき，

$$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n,\\[2mm] b_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{2}{3}c_n,\\[2mm] c_{n+1}=\qquad\quad \dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{3}c_n.\end{cases}$$

となる.

ここで $a_n+b_n+c_n=1$ から

$$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}c_n, & \cdots①\\[2mm] b_{n+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}b_n, & \cdots②\\[2mm] c_{n+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}a_n. & \cdots③\end{cases}$$

となる.

始める前の状態を a_0，b_0，c_0 とすると

$$a_0=1,\quad b_0=0,\quad c_0=0.$$ …④

②，④ から

$$b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

①−③ から

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n-c_n).$$

④ から

$$a_n-c_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$a_n+c_n=1-b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

これらを加えて 2 で割って

$$a_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$a_{2m}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}.$$

$$a_{2m-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m-1}.$$

【別解 2】

白黒逆転したものを同一視して考える．n 回の試行の後，白白白または黒黒黒となる確率を p_n とし，白黒白または黒白黒となる確率を q_n とする．

このとき，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n), \quad q_{n+1}=\frac{1}{3}(1-q_n).$$

始める前の状態を p_0，q_0 とすると $p_0=1$，$q_0=0$.

これを解くと

$$p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$q_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

偶数回の操作の後の黒板の個数は偶数個，奇数回の操作の後の黒板の個数は奇数個だから，白白白となるのは偶数回の試行の後．白黒白となるのは奇数回の試行の後．

よって

$$p_{2m}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m}.$$

$$q_{2m-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{2m-1}.$$

2004 年　後期・理科Ⅰ類

第 1 問

r は正の実数とし，角 θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。xy 平面の原点 O を P_0，$(1,\ 0)$ を P_1 として，点 P_2，P_3，… を以下の条件 (a)，(b)，(c) が $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して満たされるようにとる。

(a)　$P_{n+1}P_{n+2}=rP_nP_{n+1}$，

(b)　$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}=\theta$，

(c)　点 P_n，P_{n+2}，P_{n+3} は同一直線上にある。

このとき次の問に答えよ。

(1)　r を θ を用いて表せ。

(2)　点 P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。複素数 $z_n=x_n+y_ni$ を θ を用いて表せ。

(3)　数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であることを証明せよ。

以下 $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ を，それぞれ θ の関数と考えて，$\alpha(\theta)$，$\beta(\theta)$ とおく。

(4)　極限値

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\alpha(\theta),\quad \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\beta(\theta)$$

をそれぞれ求めよ。

(5)　$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における $\beta(\theta)$ の最大値を求めよ。

分　野

数学B：複素数平面，**数学A**：数列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

まず図を描いて考える．図からも r と θ の関係は読める．点列 $\{P_n\}$ は螺旋状に並ぶ．$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ はすべて相似である．このような図形は複素数平面上に複素数の等比数列が描く図形である．

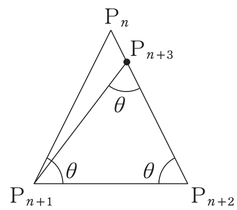
複素数の等比数列が収束する条件は公比 r の絶対値について $|r|<1$ が成り立つことである．

$\alpha(\theta)$，$\beta(\theta)$ が求められれば以下は難しくない．

【解答】

(1)　(a) から線分の長さの列 $\{P_nP_{n+1}\}$ は公比 r の等比数列．$P_0P_1=1$ だから，$P_nP_{n+1}=r^n$．

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ だから $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ は三角形をなし，$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}$ は鋭角．



(a) より，$P_{n+1}P_{n+2}=r^{n+1}$．

(b) より，$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}=\theta$．

(c) より，P_{n+3} は直線 P_nP_{n+2} 上にある．

また (a)，(b) より，$P_{n+2}P_{n+3}=r^{n+2}$，$\angle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}=\theta$．

P_{n+3} が P_{n+2} について，P_n の反対側にあるとすると $\angle P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}$ は $\angle P_{n+1}P_{n+2}P_n$ の外角になるが，$\angle P_nP_{n+1}P_{n+2}=\angle P_{n+1}P_{n+2}P_n=\theta$ となるので錯角が等しくなり，$P_nP_{n+1}/\!/P_{n+2}P_{n+3}$ となる．(c) P_n，P_{n+2}，P_{n+3} が同一直線上にあることから P_{n+1} も同じ直線上になければならなくなり，$P_nP_{n+1}P_{n+2}$ は三角形をなすことに矛盾する．したがって，P_{n+3} は半直線 $P_{n+2}P_n$ 上にある．

三角形 $P_nP_{n+1}P_{n+2}$ において

$$\theta=\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}=\angle \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n}=\angle \mathrm{P}_{n}\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$$

となるので，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$ の二等辺三角形．よって，

$$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}:\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}=1:2\cos\theta=1:r.$$

よって，$r=2\cos\theta$. …(答)

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ の大きさを $r=2\cos\theta$ 倍にして，向きを $\pm(\pi-\theta)$ だけ変更したものである．以下複号同順．

複素数で表すと，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=2\cos\theta[\cos\{\pm(\pi-\theta)\}+i\sin\{\pm(\pi-\theta)\}](z_{n+1}-z_n).$$

複素数に関する等比数列と考えて $l=2\cos\theta\{\cos(\pi-\theta)\pm i\sin(\pi-\theta)\}=-2\cos\theta(\cos\theta\mp i\sin\theta)$ とおくと，

$$z_{n+1}-z_n=l^n(z_1-z_0)=l^n.$$

$$\begin{aligned}
z_n&=z_0+\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}l^{n-1}\\
&=\frac{1-l^n}{1-l}=\frac{1-(-2\cos\theta)^n(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)}{1+2\cos\theta(\cos\theta\mp i\sin\theta)}\\
&=\frac{1-(-2\cos\theta)^n(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)}{1+2\cos^2\theta\mp i2\sin\theta\cos\theta}\\
&=\frac{1-(-2\cos\theta)^n(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)}{2+\cos 2\theta\mp i\sin 2\theta}.
\end{aligned}$$ …(答)

(注) 分母を実数にすると，

$$\begin{aligned}
z_n&=\frac{\{1-(-2\cos\theta)^n(\cos n\theta\mp i\sin n\theta)\}(2+\cos 2\theta\pm i\sin 2\theta)}{(2+\cos 2\theta)^2+\sin^2 2\theta}\\
&=\frac{\{1-(-2\cos\theta)^n\cos n\theta\}(2+\cos 2\theta)-(-2\cos\theta)^n\sin n\theta\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}\\
&\quad\pm i\frac{\{1-(-2\cos\theta)^n\cos n\theta\}\sin 2\theta+(-2\cos\theta)^n\sin n\theta(2+\cos 2\theta)}{5+4\cos 2\theta}\\
&=\frac{2+\cos 2\theta-(-2\cos\theta)^n\{2\cos n\theta+\cos(n-2)\theta\}}{5+4\cos 2\theta}\\
&\quad\pm i\frac{\sin 2\theta+(-2\cos\theta)^n\{2\sin n\theta+\sin(n-2)\theta\}}{5+4\cos 2\theta}.
\end{aligned}$$

よって，

$$x_n=\frac{2+\cos 2\theta-(-2\cos\theta)^n\{2\cos n\theta+\cos(n-2)\theta\}}{5+4\cos 2\theta},$$

$$y_n=\pm\frac{\sin 2\theta+(-2\cos\theta)^n\{2\sin n\theta+\sin(n-2)\theta\}}{5+4\cos 2\theta}.$$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $0<\cos\theta<1$．$\sin 2\theta>0$，$2+\cos 2\theta>0$．また，$(\cos n\theta, \sin n\theta)$ は $(0, 0)$ にはならない．

以上から $2\cos\theta>1$ のとき，$n\to\infty$ で z_n は発散する．

$r=2\cos\theta=1$ のとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$．$z_n=z_{n+3}$．$\{z_n\}$ は周期 3 をもつ．$z_0=0$，$z_1=1$ だから収束しない．

$|l|=|2\cos\theta|<1$ つまり $0<\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}l^n=0$.

よって，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき z_n は収束し，

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-l}=\frac{1}{1+2\cos\theta(\cos\theta\mp i\sin\theta)}=\frac{1}{2+\cos 2\theta\mp i\sin 2\theta}=\frac{2+\cos 2\theta\pm i\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}.$$

よって，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束して，

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{2+\cos 2\theta}{5+4\cos 2\theta},\quad \lim_{n\to\infty} y_n=\frac{\pm\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}.$$

よって，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束するための必要十分条件は $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である．（証明終り）

（注１） y_n の極限の正負は y_2 の正負と同じである．

（注２） 複素数列 $\{z_n\}$ において，その実部，虚部の数列をそれぞれ $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ とする．

$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ の極限がともに収束することを，複素数列 $\{z_n\}$ が収束するという．そうでないとき，$\{z_n\}$ は発散するという．

(4) (3) より

$$\alpha(\theta)=\frac{2+\cos 2\theta}{5+4\cos 2\theta},\quad \beta(\theta)=\frac{\pm\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}.$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\alpha(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\frac{2+\cos 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{2-\frac{1}{2}}{5-\frac{4}{2}}=\frac{1}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\beta(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}+0}\frac{\pm\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}=\frac{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}{5-\frac{4}{2}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{6}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(5) $\beta(\theta)$ が最大になるのは $\beta(\theta)>0$ のとき．$\beta(\theta)=\dfrac{\sin 2\theta}{5+4\cos 2\theta}$ のみを考える．

$$\beta'(\theta)=\frac{10\cos 2\theta+8}{(5+4\cos 2\theta)^2}.$$

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{2}{3}\pi<2\theta<\pi$，$-1<\cos 2\theta<-\dfrac{1}{2}$.

$\cos 2\theta=-\dfrac{4}{5}$ となる θ を k とおくと，$\sin 2k=\dfrac{3}{5}$.

θ	$\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\cdots$	k	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\beta'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\beta(\theta)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって，$\beta(\theta)$ の最大値は

$$\beta(k)=\frac{\frac{3}{5}}{5-4\cdot\frac{4}{5}}=\frac{1}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z_n=\frac{1}{2+\cos 2\theta+i\sin 2\theta}$ の逆数 $2+\cos\theta\pm i\sin\theta$ の軌跡は原点を通らない円である．

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるからその一部である．

複素数平面上で原点を通らない円周上の点の逆数の軌跡がまた円になることが知られている．

$$\alpha(\theta)+i\beta(\theta)=\frac{1}{2+\cos 2\theta\pm i\sin\theta}$$

の軌跡も円である．実際

$$\left(\alpha(\theta)-\frac{2}{3}\right)^2+\beta(\theta)^2=\frac{1}{9}\ \left(\frac{1}{2}<\alpha(\theta)<1\right)$$

である．

第２問

集合 A，B を $A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$，$B=\{0,\ 1\}$ とし，N を３以上の整数とする。また，各項が０または１からなる数列を01数列と呼ぶことにする。

01数列 a_1，a_2，…，a_N に対し，A から B への写像 f を用いて，新しい01数列 b_1，b_2，…，b_N を

$$b_1=f(a_1),\quad b_2=f(2a_1+a_2),$$
$$b_k=f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)\quad (k=3,\ 4,\ \cdots,\ N)$$

と定め，b_1，b_2，…，b_N は a_1，a_2，…，a_N から f によって得られるという。ただし，A から B への写像 f とは，A の各要素 x に対して B の要素 $f(x)$ をただひとつ対応させる規則をさすものとする。

次の問に答えよ。

(1) A から B への写像は，全部で何通りあるか。

(2) $f(0)=f(3)=f(4)=f(7)=0$，$f(1)=f(2)=f(5)=f(6)=1$，であるとき，

$$b_k=\frac{1}{2}\{1+(-1)^k\}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

となるような01数列 a_1，a_2，…，a_N を求めよ。

(3) A から B への写像 f が，条件

(P) $$f(2m)\neq f(2m+1)\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

を満たすとする。このような f は何通りあるか。

(4) A から B への写像 f が条件(P)を満たすならば，どのような N 項からなる01数列も，ある01数列 a_1，a_2，…，a_N から f によって得られることを示せ。

分　野

数学A：数列，整数

考え方

(2)で具体的な数列を理解できれば一般的な仕組みが理解できる．

数列を１つ１つ定めながら考えるとよい．

【解答】

(1) A の要素が８個あり，それぞれに対応する B の要素が２個ずつなので写像の個数は $2^8=256$ 通り．

…(答)

(2) $f(n)=0$ となる n を $n=4a+2b+c$ とし，a，b，$c\in\{0,\ 1\}$ で表すと

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1).$$

$f(n)=1$ となる n を $n=4a+2b+c$ とし，a，b，$c\in\{0,\ 1\}$ で表すと

$$(a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 0).$$

$f(n)=0$ となる A の要素 n はすべて，$b=c$ で，$f(n)=1$ となる A の要素はすべて，$b\neq c$ である．

$b_k=\dfrac{1}{2}\{1+(-1)^k\}$ であるから，k が奇数のとき $b_k=0$ で，k が偶数のとき，$b_k=1$ である．

$f(a_1)=b_1=0$ より，$a_1=0$．$f(2a_1+a_2)=f(a_2)=b_2=1$ だから $a_2=1$．

$k \geqq 3$ のとき，$f(4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k)=b_k$ だから，k が奇数のとき，$a_{k-1}=a_k$, k が偶数のとき，$a_{k-1} \neq a_k$.

したがって，a_1，a_2，…，a_N は 0，1，1，0，0，1，1，0，… となる．すなわち，

$$a_{4l+1}=a_{4l+4}=0, \quad a_{4l+2}=a_{4l+3}=1 \quad (l \text{ は負でない整数})$$

である．なぜなら，このようにとれば，k が奇数のとき，すなわち，$k=4l+1$，$4l+3$ のとき，$a_{4l}=a_{4l+1}=0$，$a_{4l+2}=a_{4l+3}=1$ となり，$a_{k-1}=a_k$ をみたし，k が偶数のとき，すなわち，$k=4l+2$, $4l+4$ のとき，$a_{4l+1}=0$，$a_{4l+2}=1$，$a_{4l+3}=1$，$a_{4l+4}=0$ となり，$a_{k-1} \neq a_k$ をみたす．

よって，

$$a_{4l+1}=a_{4l+4}=0, \quad a_{4l+2}=a_{4l+3}=1 \quad (l \text{ は負でない整数}). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) $f(2m)$ を定めれば $f(2m+1)$ も定まるので，$m=0$, 1, 2, 3 の 4 数に対して $f(2m)$ を定めればよい．$f(2m) \in B$ であるから，それぞれ，2 通り決めることができる．

よって，求める個数は $2^4=16$ 通りである． …(答)

(4) $f(0) \neq f(1)$，$f(2) \neq f(3)$，$f(4) \neq f(5)$，$f(6) \neq f(7)$ だから

$$\{f(0),\ f(1)\}=\{f(2),\ f(3)\}=\{f(4),\ f(5)\}=\{f(6),\ f(7)\}=\{0,\ 1\}=B.$$

である．

b_1，b_2，…，b_N が定まっているとする．

$a_1 \in \{0,\ 1\}$ で $f(a_1)=b_1 \in B=\{f(0),\ f(1)\}$ だから，$f(a_1)=f(0)$ または $f(a_1)=f(1)$ の一方のみが成り立つ．このことから，$f(a_1)=f(0)$ なら $a_1=0$，$f(a_1)=f(1)$ なら $a_1=1$ と定まる．

$a_1=0$ のとき $2a_1+a_2=a_2 \in \{0,\ 1\}$ である．$f(a_2)=b_2 \in B=\{f(0),\ f(1)\}$ だから，$f(a_2)=f(0)$ または $f(a_2)=f(1)$ の一方のみが成り立つ．このことから，$f(a_2)=f(0)$ なら $a_2=0$，$f(a_2)=f(1)$ なら $a_2=1$ と定まる．

$a_1=1$ のとき $2a_1+a_2=2+a_2 \in \{2,\ 3\}$ である．$f(2+a_2)=b_2 \in B=\{f(2),\ f(3)\}$ だから，$f(2+a_2)=f(2)$ または $f(2+a_2)=f(3)$ の一方のみが成り立つ．このことから，$f(2+a_2)=f(2)$ なら $a_2=0$，$f(2+a_2)=f(3)$ なら $a_2=1$ と定まる．

$k \geqq 3$ のとき，$2a_{k-2}+a_{k-1}=m$ とおくと，$m \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ である．

このとき，$4a_{k-2}+2a_{k-1}+a_k=2m+a_k \in \{2m,\ 2m+1\}$ である．

$f(2m) \neq f(2m+1)$ だから $\{f(2m),\ f(2m+1)\}=B$.

$f(2m+a_k)=b_k \in B=\{f(2m),\ f(2m+1)\}$ だから，$f(2m+a_k)=f(2m)$ または $f(2m+a_k)=f(2m+1)$ の一方のみが成り立つ．

このことから，$f(2m+a_k)=f(2m)$ なら $a_k=0$，$f(2m+a_k)=f(2m+1)$ なら $a_k=1$ と定まる．

このようにして，a_1，a_2，…，a_N は順次定まる．

したがって，どのような N 項からなる 01 数列も，ある 01 数列 a_1，a_2，…，a_N から f によって得られる． （証明終り）

第3問

xy 平面に点 $(-1,\ 0)$ を中心とする半径1の円 A と，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径1の円 B をとる。円 A の内部を D，円 B の内部を E とする。

次の問に答えよ。

(1) 点 $(-1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ における円 A の接線を ℓ とする。円 B の接線 m が ℓ と直交するとき，ℓ と m の交点 P の座標を θ を用いて表せ。

(2) 領域 D にも E にも重ならないように1辺の長さが2の正方形を xy 平面内で動かすとき，この正方形が通りえない部分の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：図形と方程式，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

正方形が通りえない領域の境界の一部は直交する2接線の交点の軌跡である．

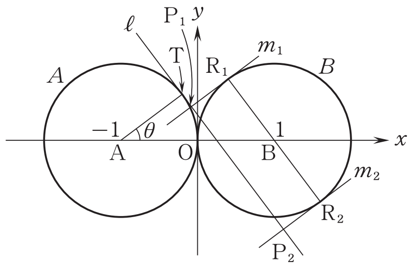
交点の座標をパラメーター表示して積分する．他の部分の面積は難しくない．

【解答】

(1) $A:(x+1)^2+y^2=1$，$B:(x-1)^2+y^2=1$.

点 $\mathrm{T}(-1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ における円 A の接線は

$$\ell:\cos\theta(x+1)+(\sin\theta)y=1.$$



この直線の法線ベクトルの1つは $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ だから，円 B の接線でこれに垂直な接線の接点 $\mathrm{R}_i(i=1,\ 2)$ は $(1\mp\sin\theta,\ \pm\cos\theta)$（$i=1$ のとき複号の上，$i=2$ のとき複号の下を表す）．以下，複号同順で接線の方程式は

$$m:\mp\sin\theta(x-1)\pm(\cos\theta)y=1.$$

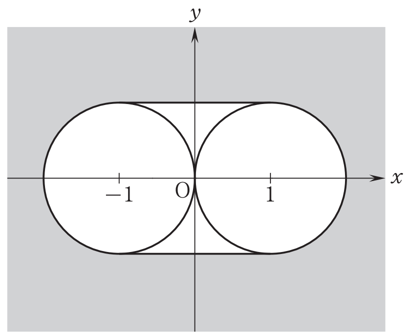
$$\begin{cases}(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1-\cos\theta,\\ -(\sin\theta)x+(\cos\theta)y=\pm1-\sin\theta.\end{cases}\quad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ \pm1-\sin\theta\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-\cos\theta\\ \pm1-\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\mp\sin\theta-\cos2\theta\\ \sin\theta\pm\cos\theta-\sin2\theta\end{pmatrix}.$$

よって，交点の座標は

$$\mathrm{P}_i(\cos\theta\mp\sin\theta-\cos2\theta,\ \sin\theta\pm\cos\theta-\sin2\theta)\ \text{（複号同順）}.$$ …(答)

(2) まず2円の共通外接線 $y=\pm1$ の接点 $(1,\ 1)$ と $(-1,\ 1)$ および，$(1,\ -1)$，$(-1,\ -1)$ を結ぶ2線分および，円 A の $x\leqq-1$ 部分，円 B の $x\geqq1$ 部分で囲まれた領域の外側は正方形が通りうることは明らか．

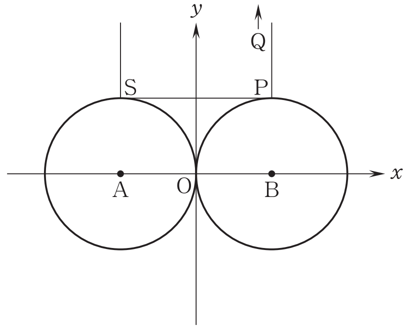


また，円 A，B の中心をそれぞれ A，B とよぶ．

対称性から第1象限の部分だけを考える．

まず，辺の長さが2の正方形をPQRSとし，Sを$(-1,\ 1)$に，Pを$(1,\ 1)$におき，Q，Rを$y>1$においた状態から，辺PSが円Aに点$\mathrm{T}(-1+\cos\theta,\ \sin\theta)$で接し，点Pが円$B$上にあるか，辺PQが円$B$に接し，Pが第1象限内にあるようにすべらせる．$\mathrm{B}(1,\ 0)$から円$A$にひいた接線のうち$A$と$y>0$で接するものを$t$とし，その接点を$\mathrm{T}_0$とする．$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AT}_0=1$で，$\mathrm{AT}_0\perp\mathrm{BT}_0$だから$t$と$x$軸となす角は$\dfrac{\pi}{6}$である．$t$の方程式は$y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$．接点$\mathrm{T}_0$の座標は$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{T}_0$は$\theta=\dfrac{\pi}{3}$のときのTである．

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{AT}}$に注意する．

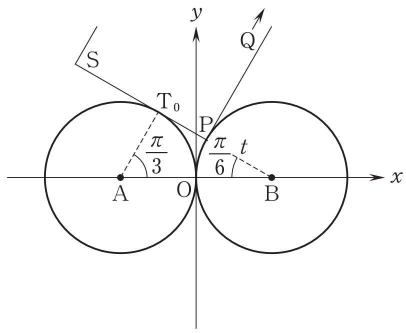


(i) $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$のとき，Tにおける$A$の接線$\ell$は$t$より上の点で円$B$に交わる．その交点のうちTに近い方にPをとれば，

$\angle\mathrm{ABP}$は$\dfrac{\pi}{6}$より大きく，$\angle\mathrm{BAT}$も$\dfrac{\pi}{3}$より大きい．

$\overrightarrow{\mathrm{AT}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$から，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$のなす角は鋭角で線分PQは円$B$の外にある．

Pがy軸上にあるとき，対称性から辺PQとy軸のなす角は$\dfrac{\pi}{4}$である．



(ii) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$のとき，Tにおける接線$\ell$は$t$より下の点で円$B$に交わる．その交点のうちTに近い方にP′をとれば，

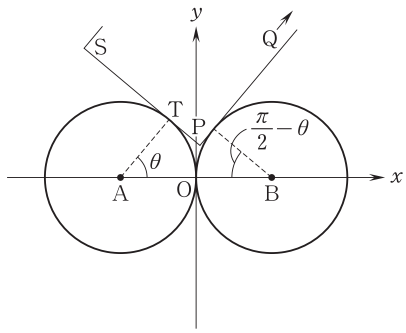
$\angle\mathrm{ABP'}$は$\dfrac{\pi}{6}$より小さく，$\angle\mathrm{BAT}$も$\dfrac{\pi}{3}$より小さい．したがって，正方形は辺PQ上で円Bと接する．

(ii)の場合PSが(1)のℓで，PQが(1)のm，交点Pが(1)のPと考えればよい．ただし，mのy切片は正の方をとるから，

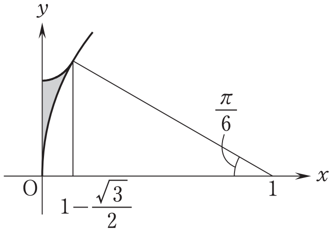
$$m：-\sin\theta(x-1)+(\cos\theta)y=1.$$

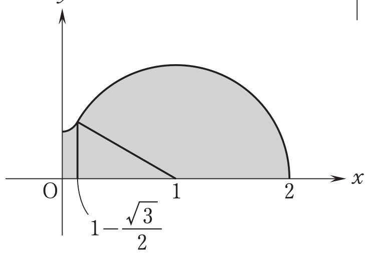
とする．したがってPの座標は

$$\mathrm{P}(\cos\theta-\sin\theta-\cos2\theta,\ \sin\theta+\cos\theta-\sin2\theta).$$



したがって，第1象限で円板E以外に求める領域に含まれるのは，Pの軌跡と円Bとy軸に囲まれた領域．第1象限で面積を求める部分のうち$x\geqq1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$の部分は扇形と三角形に分けられる．





Pの軌跡と直線$x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，x軸y軸で囲まれた領域の面積を求める．

$$\int_0^{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin\theta+\cos\theta-\sin 2\theta)(\cos\theta-\sin\theta-\cos 2\theta)'\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\sin\theta+\cos\theta-\sin 2\theta)(-\sin\theta-\cos\theta+2\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\{-(\sin\theta+\cos\theta)^2+3(\sin\theta+\cos\theta)\sin 2\theta-2\sin^2 2\theta\}\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{-(1+\sin 2\theta)+\frac{3}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta+\sin\theta+\sin 3\theta)-1+\cos 4\theta\right\}d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left\{-2+\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{3}{2}\cos\theta-\sin 2\theta+\frac{3}{2}\sin 3\theta-\frac{3}{2}\cos 3\theta+\cos 4\theta\right\}d\theta$$

$$=\left[-2\theta-\frac{3}{2}\cos\theta+\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}\cos 3\theta-\frac{1}{2}\sin 3\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\pi-\frac{3}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

第 1 象限の他の部分は三角形と扇形．求める面積のうち第 1 象限の部分の面積は

$$-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

求める面積はこの 4 倍．

$$\pi-2+3\sqrt{3}.$$ …(答)

2005 年　前期・文科

第 1 問

$f(x)$ を $f(0)=0$ をみたす 2 次関数とする。a，b を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x \leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

a，b をいろいろ変化させ

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx$$

が最小になるようにする。このとき，

$$g(-1)=f(-1),\quad g(1)=f(1)$$

であることを示せ。

分　野

数学Ⅱ：整式の積分，整式の微分，**数学Ⅰ**：2 次関数

考え方

$f(x)=px^2+qx$ とおき，与条件をみたすように a，b を求めれば，自然に答を得る．

【解答】

$f(x)$ は $f(0)=0$ をみたす 2 次関数だから $f(x)=px^2+qx$ とおける．

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx=\int_{-1}^{0}(2px+q-a)^2\,dx+\int_{0}^{1}(2px+q-b)^2\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\{4p^2x^2+4p(q-a)x+(q-a)^2\}\,dx+\int_{0}^{1}\{4p^2x^2+4p(q-b)x+(q-b)^2\}\,dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}p^2x^3+2p(q-a)x^2+(q-a)^2x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{4}{3}p^2x^3+2p(q-b)x^2+(q-b)^2x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}p^2-2p(q-a)+(q-a)^2+\frac{4}{3}p^2+2p(q-b)+(q-b)^2=(a+p-q)^2+(b-p-q)^2+\frac{2}{3}p^2.$$

これが最小になるのは $a=-p+q$，$b=p+q$ のとき．

このとき，

$$g(-1)=-a=p-q,\quad f(-1)=p-q,\quad g(1)=b=p+q,\quad f(1)=p+q.$$

よって，

$$g(-1)=f(-1),\quad g(1)=f(1).$$

（証明終り）

（注）　$f'(x)$ は $-1 \leqq x \leqq 1$ で 1 次式であり，$g'(x)$ は $-1 \leqq x<0$，$0 \leqq x \leqq 1$ の区間で定数である．

$$\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx,\quad \int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2\,dx$$

が最小になるように，a，b を選ぶと，a，b はそれぞれの積分区間の中央つまり，$x=-\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}$ で $f'(x)-g'(x)=0$ となる値である．

このとき，$f'(x)-g'(x)$（1 次式）をこの区間で定積分すると 0 になる．

したがって，

$$f(-1)-g(-1)=f(0)-g(0)=0=f(1)-g(1)$$

である．

第2問

3以上9999以下の奇数 a で，a^2-a が10000で割り切れるものをすべて求めよ。

分　野

数学A：整数

考え方

$10000=2^4\cdot 5^4$ で a は奇数，a，$a-1$ が互いに素などの条件で絞り込んでゆく．

【解答】

$a^2-a=a(a-1)$．a と $a-1$ は互いに素．$10000=2^4 5^4$．aは奇数．

$1\leqq a\leqq 9999<10000$ だから，$a-1$ が10000で割り切れることはない．

a と $a-1$ は互いに素で，a は奇数だから a は $5^4=625$ で割り切れ，$a-1$ は $2^4=16$ で割り切れる．

$a=625m$，$a-1=16n$ とする．$625=16\times 39+1$ から

$$(16\times 39+1)m-1=16n \iff 16(39m-n)=1-m.$$

$k=n-39m$ とおくと，k は整数で，$m=16k+1$．よって，

$$39(16k+1)-n=-k \iff n=625k+39.$$

$$0<a=625m=625(16k+1)=10000k+625\leqq 9999 \text{ から } k=0.$$

よって，

$$a=625. \qquad \cdots(\text{答})$$

第3問

0以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2次方程式

考え方

s，t が正または0で，$s^2+t^2=1$ から $u=s+t$ のとり得る範囲がわかり，与方程式の係数は u でかける．

u の範囲から x の範囲を求めるには，その方程式を u の方程式とみて，係数の条件から求める．

【解答】

$s+t=u\ (\geqq 0)$ とおく．$s^2+t^2=u^2-2st=1$ から，$st=\dfrac{1}{2}(u^2-1)\geqq 0$.

$(s-t)^2=u^2-4st=2-u^2\geqq 0$ より，$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$.

このとき，

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=x^4-2ux^2+2-u^2=0.$$

$F(X)=X^2-2uX+2-u^2$ とおくと，$\dfrac{1}{4}$ 判別式$=2u^2-2\geqq 0$，軸 $X=u\geqq 1$，$F(0)=2-u^2\geqq 0$ より，$F(X)=0$ は正または0の2解をもつ．

したがって，与えられた x の4次方程式 $F(x^2)=0$ は異なる4つの実数解をもつ．

すなわち，虚数解はもたない．

これを，u の2次方程式とみて，$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ の解をもつ実数 x の条件を求める．

$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2$ とおく．$f'(u)=2u+2x^2>0$ から $f(u)$ は単調増加．
$f(1)\leqq 0$ かつ $f(\sqrt{2})\geqq 0$ が条件．

$$f(1)=-x^4+2x^2-1=-(x^2-1)^2\leqq 0.$$

また，

$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}\,x^2-x^4=(\sqrt{8}-x^2)x^2\geqq 0.$$

よって，

$$-\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq \sqrt[4]{8}. \quad \cdots(\text{答})$$

（注）　実はこの方程式は解けて，解は $x=\pm\sqrt{s}\pm\sqrt{t}$（複号任意）である．三角関数になおして数学Ⅲの微分を使えば容易であろうが，文系向けの解答にはならない．

第４問

N を１以上の整数とする。数字 1，2，…，N が書かれたカードを１枚ずつ，計 N 枚用意し，甲，乙のふたりが次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が１枚カードをひく。そのカードに書かれた数を a とする。ひいたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう１回カードをひくかどうか選択する。ひいた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。ひいたカードはもとに戻す。ひかなかった場合は，$b=0$ とする。
　$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は，乙が１枚カードをひく。そのカードに書かれた数を c とする。ひいたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は，乙はもう１回カードをひく。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝とする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が２回目にカードをひかないことにしたときに，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が２回目にカードをひくことにしたときに，甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

　ただし，各カードがひかれる確率は等しいものとする。

分　野

数学Ⅰ：確率

考え方

どちらが有利かは問われていない．２回目に甲が引かないときと，引くときの甲の勝つ確率が求められている．

甲が引かないとき，cd 平面上に甲が勝つ場合を図示すると，確率はつかみやすい．

甲が引くときは b によって甲が勝つ確率は変るが，$a+b\leqq N$ である限り，甲の勝つ可能性があり，その確率は，$a+b$ を甲が引かなかった場合の a と同じに扱えばよい．

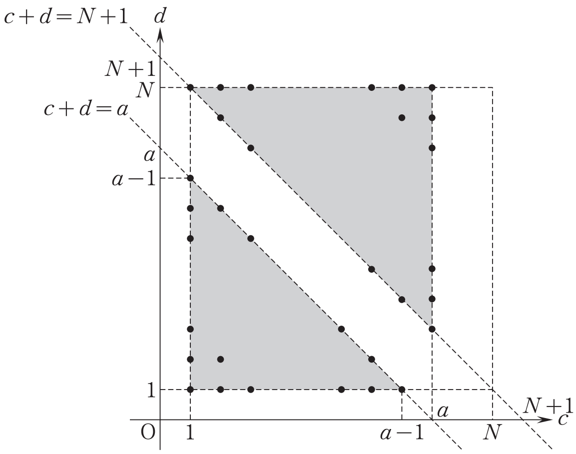
【解答】

(1)　甲が２回目のカードを引かなかった場合．

甲が勝つ場合は，

$$a\geqq c \text{ かつ「} a\geqq c+d \text{ または } c+d\geqq N+1\text{」}$$

これを cd 平面上に図示すると次図．ただし，(iii)のとき，乙は２回目のカードを引かないが，$1\leqq d\leqq N$ として図示した．



この場合，甲が勝つ確率は，

$$\frac{a}{N}\cdot\left(1-\frac{N-a}{N}\right)=\frac{a^2}{N^2}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　甲が 2 回目のカードを引き，$a+b \leqq N$ であるとき，$a+b$ によって，甲の勝つ確率が決まる．その確率は (1) と同様に考えればよいから $\dfrac{(a+b)^2}{N^2}$.

甲が 2 回目に b を引く確率は $\dfrac{1}{N}$ だから，甲が勝つ確率は

$$\sum_{b=1}^{N-a}\frac{(a+b)^2}{N^2}\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N^3}\sum_{b=1}^{N-a}(b^2+2ab+a^2)$$

$$=\frac{1}{N^3}\left\{\frac{1}{6}(N-a)(N-a+1)(2N-2a+1)+(N-a)(N-a+1)a+(N-a)a^2\right\}$$

$$=\frac{(N-a)}{6N^3}\{2N^2+(2a+3)N+(2a+1)(a+1)\}. \qquad \cdots(答)$$

2005 年　前期・理科

第 1 問

$x>0$ に対し $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x)=\frac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，**数学 A**：数列，漸化式

考え方

まず，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ とかけることを示す．厳密には数学的帰納法で示すことになるが，$f^{(k)}(x)$ が上のようにかけるとき，微分して，$f^{(k+1)}(x)$ が同様にかけることを示せばよい．その示す過程でそのまま漸化式が導かれる．

$a_{n+1}=(n+1)a_n+c_n$ の形の漸化式は両辺を $(n+1)!$ で割る．この問題では，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+c_n$ の形をしているから $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割って $A_n=\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}$ とおけば，数列 $\{A_n\}$ の階差数列が定まり，$\{A_n\}$ を求めることができる．

【解答】

(1) $f^{(0)}(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とすると $a_0=0$，$b_0=1$ とおける．

$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ とおけるとすると，

$$f^{(k+1)}(x)=f^{(k)\prime}(x)=\{(a_k+b_k\log x)x^{-(k+1)}\}'=\frac{b_k}{x}\cdot x^{-(k+1)}-(k+1)(a_k+b_k\log x)x^{-(k+2)}$$

$$=\frac{b_k-(k+1)a_k-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}.$$

よって，$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおける．

数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して，

$$f^{(n)}(x)=\frac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$$

と表せる．　　（証明終り）

漸化式は

$$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n,\quad b_{n+1}=-(n+1)b_n. \qquad \cdots(\text{答})$$

とおける．

(2) $b_{n+1}=-(n+1)b_n$ の両辺を $(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\frac{b_n}{n!}.$$

よって，数列 $\left\{\dfrac{b_n}{n!}\right\}$ は初項 $\dfrac{b_0}{0!}=1$，公比 -1 の等比数列．よって，

$$\frac{b_n}{n!}=(-1)^n \quad \text{すなわち} \quad b_n=(-1)^n n!.$$

$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$ の両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\frac{a_n}{(-1)^n n!}-\frac{1}{n+1} \iff \frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}-\frac{a_n}{(-1)^n n!}=-\frac{1}{n+1}.$$

これは数列 $\left\{\dfrac{a_n}{(-1)^n n!}\right\}$ の階差数列が $\left\{-\dfrac{1}{n+1}\right\}$ であることを意味する．よって，$a_0=0$ から，

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!}=a_0-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}=-h_n.$$

$$a_n=(-1)^{n-1}n!\,h_n. \quad b_n=(-1)^n n! \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問

$|z|>\dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w=z^2-2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，

$$T=\left\{w \,\middle|\, w=z^2-2z \text{ ならば } |z|\leqq\frac{5}{4}\right\}$$

とする。このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

分　野

数学B：複素数平面

考え方

$|z|>\dfrac{5}{4}$ から考えるより対偶をとって，$w=z^2-2z$ から考えるほうが考えやすい．

$z^2-2z-w=0$ を 2 次方程式とみる点が難しい．

【解答】

$$z^2-2z=w$$

を z の 2 次方程式とみてその 2 解を α，β とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=2, \quad \alpha\beta=-w.$$

$\beta=2-\alpha$ だから，2 解が $|z|\leqq\dfrac{5}{4}$ である条件を α で表すと

$$|\alpha|\leqq\frac{5}{4}, \quad |2-\alpha|\leqq\frac{5}{4}.$$

また，

$$|w|=|\alpha^2-2\alpha|=|\alpha||\alpha-2|.$$

よって，

$$|w|\leqq\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}.$$

等号は $|\alpha|=|\alpha-2|=\dfrac{5}{4}$ のとき，すなわち

$$\alpha=1\pm\frac{3}{4}i, \quad \beta=2-\alpha=1\mp\frac{3}{4}i \quad (\text{複号同順})$$

のとき成り立つ．よって，$|w|$ が最大になるとき，

$$w=-\alpha\beta=-\left(1\pm\frac{3}{4}i\right)\left(1\mp\frac{3}{4}i\right)=-\frac{25}{16}.$$ …(答)

第３問

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$$

とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\frac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\frac{1}{2}$ であれば，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

であることを示せ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，数列の極限，**数学A**：数列，漸化式

考え方

(1) は $f'(x)$ の増減は $f''(x)$ で求められる．これを使えば，$f'(x)$ のとり得る範囲が求められる．

(2) は定型的．$\dfrac{|x_{n+1}-1|}{|x_n-1|}$ が 1 より小さい定数以下であることが示せればよい．

【解答】

(1)
$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}-xe^{-2(x-1)}=\frac{1}{2}\{1+(1-2x)e^{-2(x-1)}\}.$$
$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}-(1-2x)e^{-2(x-1)}=-2(1-x)e^{-2(x-1)}.$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\quad f'(1)=0,\quad \lim_{x\to\infty}f'(x)=\frac{1}{2}.$$

x	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	0	↗	$\left(\frac{1}{2}\right)$

よって，$x>\frac{1}{2}$ ならば，$0\leqq f'(x)<\frac{1}{2}$. (証明終り)

(2) $f'(x)\geqq 0$ から $x_n>\frac{1}{2}$ のとき，$x_{n+1}=f(x_n)\geqq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1+e}{4}>\frac{1}{2}$.

よって，$x_0>\frac{1}{2}$ ならすべての自然数 n について，$x_n>\frac{1}{2}$.

$f(1)=1$ より，$x_n=1$ となる項があれば，$x_m=1$ $(m\geqq n)$ だからこの部分証明終り．

$x_n\neq 1$，$x_n>\frac{1}{2}$ のとき，平均値の定理より x_n と 1 の間に $\dfrac{f(x_n)-1}{x_n-1}=f'(c)$ をみたす c があり，

$c>\frac{1}{2}$ より，$0\leqq f'(c)<\frac{1}{2}$．よって，$0\leqq\dfrac{f(x_n)-1}{x_n-1}<\frac{1}{2}$.

$$\therefore \quad 0 \leqq |x_{n+1}-1| = |f(x_n)-1| < \frac{1}{2}|x_n-1|.$$

$$\therefore \quad 0 \leqq |x_n-1| < \frac{1}{2}|x_{n-1}-1| < \left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-1| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1|.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_0-1| = 0.$$

ハサミウチの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-1| = 0. \quad \text{よって，} \lim_{n\to\infty}x_n = 1.$$

（証明終り）

（注）　$0 < x_0 \leqq \frac{1}{2}$ のとき $0 < x \leqq \frac{1}{2}$ で $f(x) > \frac{3}{2}x$ だから，$x_{n-1} < \frac{1}{2}$ の限り $x_n > \left(\frac{3}{2}\right)^n x_0$ となる．したがって，何項目かは $x_n > \frac{1}{2}$ となる．それ以後は(2)と同様に考えればよいから $0 < x_0$ の範囲で $\lim_{n\to\infty}x_n = 1$.

第 4 問

（文科　第 2 問と同じ）

第 5 問

（文科　第 4 問と同じ）

第6問

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2$$
$$y^2+z^2 \geqq r^2$$
$$z^2+x^2 \leqq r^2$$

をみたす点全体からなる立体の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積

考え方

立体 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ y^2+z^2 \geqq r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases}$ は立体 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases}$ から，立体 $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ y^2+z^2 < r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases}$ の部分を除いた部分.

体積では等号を気にしなくてよい.

【解答】

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ y^2+z^2 \geqq r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases} \iff 「\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ x^2+z^2 \leqq r^2 \end{cases} \text{かつ} \begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ y^2+z^2 < r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases} \text{でない}」$$

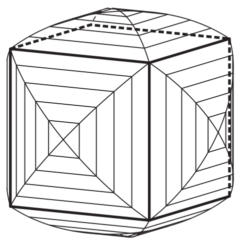
$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ x^2+z^2 \leqq r^2 \end{cases}$ をみたす点全体からなる立体を D_1 とし，その体積を V_1 とする．x を固定した断面は

$$-\sqrt{r^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-x^2}, \quad -\sqrt{r^2-x^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-x^2}.$$

断面積は $4(r^2-x^2)$.

$$V_1=\int_{-r}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx=8\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r=\frac{16}{3}r^3.$$

$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq r^2, \\ y^2+z^2 < r^2, \\ z^2+x^2 \leqq r^2 \end{cases}$ をみたす点全体からなる立体を D_2 とし，その体積を V_2 とする．D_2 は 8 つの頂点 $\left(\pm\frac{r}{\sqrt{2}}, \pm\frac{r}{\sqrt{2}}, \pm\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$（複号任意）を頂点とする立方体に，その各面の外側にそれぞれ合同な立体を付け加えたものである.（右図）



$$V_2=(r\sqrt{2})^3+6\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx=2\sqrt{2}\,r^3+24\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^{r}=2\sqrt{2}\,r^3+16r^3-10\sqrt{2}\,r^3=16r^3-8\sqrt{2}\,r^3.$$

求める体積は

$$V_1-V_2=\frac{16}{3}r^3-(16r^3-8\sqrt{2}\,r^3)=\frac{8}{3}(3\sqrt{2}-4)r^3. \quad \cdots(\text{答})$$

【別解】

x 軸に垂直に切った切り口を考えると，

$$-\sqrt{r^2-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-x^2}, \quad -\sqrt{r^2-x^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-x^2}, \quad y^2+z^2 \geqq r^2.$$

切り口は $(\pm\sqrt{r^2-x^2}, \pm\sqrt{r^2-x^2})$（複号任意）を 4 頂点とする正方形から，円板 $y^2+z^2 \leqq r^2$ を除いたもの.

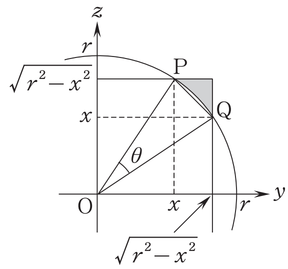
$r \geqq \sqrt{r^2-x^2}$ だから，円板は正方形から必ずはみ出る，

$r \leqq \sqrt{2(r^2-x^2)} \iff -\frac{r}{\sqrt{2}} \leqq x \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$ のとき，正方形は円板からはみ出る.

よって，$0 \leqq x \leqq \frac{r}{\sqrt{2}}$ のとき，$y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分にある切り口は

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad z=\sqrt{r^2-x^2},\quad y^2+z^2=r^2$$

を境界とする領域．$\mathrm{P}(x,\sqrt{r^2-x^2})$，$\mathrm{Q}(\sqrt{r^2-x^2},x)$ とおき，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とおくと，内積を考えることによって，



$$\cos\theta=\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{r^2},\quad \sin\theta=\frac{r^2-2x^2}{r^2}.$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{r}{\sqrt{2}}$ より，$x=\dfrac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sin\theta}$.

断面積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-x^2}-x)^2-\frac{1}{2}r^2\theta+\frac{1}{2}r^2\sin\theta=\frac{1}{2}(r^2-2x\sqrt{r^2-x^2})-\frac{1}{2}r^2\theta+\frac{1}{2}(r^2-2x^2)$$

$$=(r^2-x^2)-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{1}{2}r^2\theta.$$

求める体積を V とすると，

$$V=8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{(r^2-x^2)-x\sqrt{r^2-x^2}-\frac{1}{2}r^2\theta\right\}dx.$$

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}(r^2-x^2)\,dx=\frac{5r^3}{6\sqrt{2}}.$$

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}x\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{r^2}{2}}\sqrt{r^2-X}\,\frac{dX}{2}=\left[-\frac{1}{3}\sqrt{r^2-X}^{\,3}\right]_0^{\frac{r^2}{2}}=\frac{r^3}{3}-\frac{r^3}{6\sqrt{2}}.$$

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{r}{2\sqrt{2}}\frac{-\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \dfrac{r}{\sqrt{2}} \\ \hline \theta & \dfrac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array}.$$

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\theta\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{2\sqrt{2}}\frac{\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\,d\theta=\frac{r}{\sqrt{2}}\left[-\theta\sqrt{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{r}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{r}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin\theta}\,d\theta=\frac{r}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\sqrt{2}\,r\left[\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=(2-\sqrt{2})\,r.$$

以上から

$$V=8\left\{\frac{5r^3}{6\sqrt{2}}-\frac{r^3}{3}+\frac{r^3}{6\sqrt{2}}-\frac{r^2}{2}(2-\sqrt{2})\,r\right\}=\frac{8}{3}(3\sqrt{2}-4)\,r^3.$$ …(答)

2005 年　後期・理科 I 類

第 1 問

xy 平面の原点を O として，2 点 P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$，Q$(1,\ 0)$ をとる。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。点 A は線分 PQ 上を，また点 B は線分 OQ 上を動き，線分 AB は △OPQ の面積を二等分しているとする。このような線分 AB で最も短いものの長さを ℓ とおき，これを θ の関数と考えて

$$\ell^2=f(\theta)$$

と表す。

(1)　線分 AQ の長さを a，BQ の長さを b とすると，

$$ab=\sin\frac{\theta}{2}$$

が成立することを示せ。

(2)　$\mathrm{PQ}\geqq\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}$ のそれぞれの場合について，$f(\theta)$ を θ を用いて表せ。

(3)　関数 $f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ で微分可能であることを示し，そのグラフの概形を描け。また，$f(\theta)$ の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

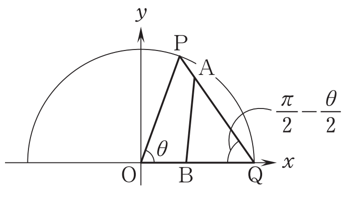
(1) は容易．(2) において角が与えられているとき，面積が一定である三角形の対辺の長さが最小になるのは対辺の両端が角の頂点からの距離が等しいときである．三角形 OPQ の場合，AB の長さが最小になるのが $a=b$ とすることができる場合とそうでない場合がある．できない場合は A$=$P のとき，最小になる．

(3) は $\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}$ のときの $\theta=\alpha$ で微分可能であることを示す．微分の定義にしたがって，$\alpha+0$ と $\alpha-0$ の極限が一致すればよい．

$f(\theta)$ のグラフを描いたり最大値を求めることは難しくない．

【解答】

(1)　三角形 OPQ の面積は $\dfrac{1}{2}\sin\theta$.



よって，三角形 QAB の面積は $\dfrac{1}{4}\sin\theta$.

一方，$\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\pi-\theta}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$.

よって，三角形 QAB の面積は $\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{2}ab\cos\dfrac{\theta}{2}$.

よって，

$$\frac{1}{4}\sin\theta=\frac{1}{2}ab\cos\frac{\theta}{2}\iff ab=\sin\frac{\theta}{2}.$$

（証明終り）

(2)　余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=a^2+b^2-2ab\sin\frac{\theta}{2}=a^2+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{a^2}-2\sin^2\frac{\theta}{2}. \quad \cdots①$$

これを $g(a)$ とおくと，$g'(a)=2a-\dfrac{2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{a^3}$.

$a>0$ において，$g(a)$ は $a=\sqrt{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ で極小になる関数.

a のとりうる値の範囲は(1)から $\sin\dfrac{\theta}{2}\leqq a\leqq \mathrm{PQ}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$.

$\sin\dfrac{\theta}{2}\leqq\sqrt{\sin\dfrac{\theta}{2}}$ は $\sin\dfrac{\theta}{2}\leqq 1$ よりつねに成り立つ.

$$\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}\leqq 2\sin\frac{\theta}{2} \iff \frac{1}{4}\leqq\sin\frac{\theta}{2}.$$

(i) $\mathrm{PQ}\geqq\dfrac{1}{2}$ すなわち $\sin\dfrac{\theta}{2}\geqq\dfrac{1}{4}$ のとき，ℓ^2 が最小になるのは

$$a=b=\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}\ \left(\leqq 2\sin\frac{\theta}{2}=\mathrm{PQ}\right).$$

よって，① より，

$$\ell^2=f(\theta)=2\sin\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\right). \quad \cdots(\text{答})$$

(ii) $\mathrm{PQ}<\dfrac{1}{2}$ すなわち $\sin\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{1}{4}$ のとき，① より ℓ^2 が最小になるのは

$$a=2\sin\frac{\theta}{2}=\mathrm{PQ}\ \left(<\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}}\right),\quad b=\frac{1}{2}.$$

よって，① より，

$$\ell^2=f(\theta)=4\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}-2\sin^2\frac{\theta}{2}=2\sin^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}. \quad \cdots(\text{答})$$

(3) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{4}$，$(0<\alpha<\pi)$ をみたす角を α とする.

(2) より

$$f(\theta)=\begin{cases} 2\sin\dfrac{\theta}{2}\left(1-\sin\dfrac{\theta}{2}\right) & (\theta\geqq\alpha \text{ のとき}), \\ 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{4} & (\theta<\alpha \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\theta\neq\alpha$ のとき微分可能であることは明らか. $f(\alpha)=\displaystyle\lim_{\theta\to\alpha-0}f(\theta)=\frac{3}{8}$ より $f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ で連続.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{2\sin\dfrac{\alpha+h}{2}\left(1-\sin\dfrac{\alpha+h}{2}\right)-2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{2\left(\sin\dfrac{\alpha+h}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(1-\sin\dfrac{\alpha+h}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{h}{4}\right)\sin\dfrac{h}{4}\left(1-\sin\dfrac{\alpha+h}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\dfrac{h}{4}}\\&=\cos\frac{\alpha}{2}\left(1-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}\left(1-2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{\sqrt{15}}{8}.\end{aligned}$$

$2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}$ だから

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\left(2\sin^2\dfrac{\alpha+h}{2}+\dfrac{1}{4}\right)-\left(2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}\frac{2\left(\sin\dfrac{\alpha+h}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha+h}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{h}{4}\right)\sin\dfrac{h}{4}\left(\sin\dfrac{\alpha+h}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\dfrac{h}{4}}$$

$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}=2\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

よって

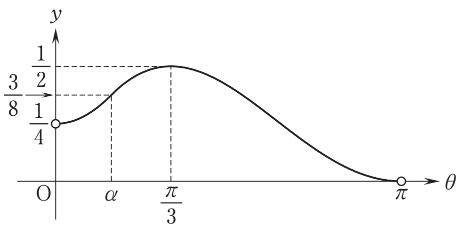
$$\lim_{h\to+0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

であるから，$f(\theta)$ は $0<\theta<\pi$ のとき（$\theta=\alpha$ も含めて）微分可能である．（証明終り）

$$\lim_{\theta\to\alpha}f'(\theta)=\frac{\sqrt{15}}{8}\text{ でもあるから，}f'(\theta)=\begin{cases}\left(1-2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\dfrac{\theta}{2} & (\theta\geqq\alpha\text{ のとき}),\\ 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} & (\theta<\alpha\text{ のとき}).\end{cases}$$

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$	(0)	$+$	$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$	$+$	0	$-$	(0)
$f(\theta)$	$\left(\dfrac{1}{4}\right)$	↗	$\dfrac{3}{8}$	↗	$\dfrac{1}{2}$	↘	(0)

グラフの概形は下図太線部．



…(答)

よって，$f(\theta)$ の最大値は

$$\frac{1}{2}.$$

…(答)

第 2 問

10 枚のカードに 1 から 10 までの数が 1 つずつ書かれている。これらのカードを用いた次のようなゲームを考える。r を自然数とする。このゲームは最大 r ラウンドからなり，第 1 ラウンドから始まる。各ラウンドで，プレーヤーは，10 枚のカードから 1 枚のカードを抜き出し，その数を見てから，「停止」または「続行」のいずれかを選択する。「停止」を選択した場合は，そのラウンドでゲームは終了し，最後に抜き出したカードに書かれた数が得点となる。「続行」を選択した場合は，抜き出したカードをもとにもどして，次のラウンドを実行する。最終ラウンドでは，「停止」しか選択できず，そのラウンドで抜き出したカードに書かれた数が得点となる。ただし，各ラウンドで，どのカードも等しい確率 $\dfrac{1}{10}$ で抜き出されるものとする。

抜き出したカードに書かれた数 x によって「停止」または「続行」を選択する規則を，そのラウンドにおける戦略という。戦略はラウンドごとに，0 または 1 の値をとる関数

$$f(x) \quad (x=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

によって，$f(x)=0$ ならば「続行」，$f(x)=1$ ならば「停止」と定める。

(1) k は $1 \leqq k < 10$ を満たす自然数とする。関数 $f_k(x)$ を

$$f_k(x)=\begin{cases} 0 & (1 \leqq x \leqq k), \\ 1 & (k < x \leqq 10) \end{cases}$$

とする。すべてのラウンドで，$f_k(x)$ によって定まる戦略を採用したときの得点の期待値を，r と k で表せ。

(2) ラウンド数 r が 2 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドでの戦略を与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

(3) ラウンド数 r が 3 のとき，得点の期待値が最大となるような，第 1 ラウンドおよび第 2 ラウンドでの戦略をそれぞれ与え，そのときの得点の期待値を求めよ。

分　野

数学 I ：確率，期待値

考え方

続行するか，停止するかはそれぞれの場合の得点の期待値を比較する．

2 回以上判断するときは続行したときの期待値は，次回からの判断はそれまで調べた戦略の中の最適な戦略を選ぶとして考える．

【解答】

(1) 1 回の試行で $1 \leqq x \leqq k$ の数 x が書かれたカードが取り出される確率は $\dfrac{k}{10}$. $k < x \leqq 10$ の数 x が書かれたカードが取り出される確率は $\dfrac{10-k}{10}$.

得点 X が $1 \leqq X = x \leqq k$ であるのは $r-1$ ラウンドまですべてのラウンドで $1 \leqq x \leqq k$ の数 x が書かれたカードが取り出され，最終ラウンドでも，$1 \leqq X = x \leqq k$ の数 x が書かれたカードが取り出される場合である．

その確率は $\left(\dfrac{k}{10}\right)^{r-1}\dfrac{1}{10}$.

得点 X が $k < X \leqq 10$ であるのは上記以外の場合で，その確率は $1-\left(\dfrac{k}{10}\right)^{r}$.

そのうち，どの得点である確率も同じだから，$1 \leqq X = x \leqq k$ である確率は $\left\{1-\left(\dfrac{k}{10}\right)^{r}\right\}\dfrac{1}{10-k}$.

期待値は

$$E_k=\sum_{x=1}^{k}\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\frac{x}{10}+\sum_{x=k+1}^{10}\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}\frac{x}{10-k}$$
$$=\frac{k(k+1)}{2}\left(\frac{k}{10}\right)^{r-1}\frac{1}{10}+\frac{10-k}{2}(k+11)\left\{1-\left(\frac{k}{10}\right)^{r}\right\}\frac{1}{10-k}$$
$$=\frac{k+11}{2}-5\left(\frac{k}{10}\right)^{r}.$$
…(答)

(2) $r=2$ のときの期待値は，(1)で $r=2$ のとき

$$E_k=\frac{k+11}{2}-5\left(\frac{k}{10}\right)^{2}=\frac{110+10k-k^2}{20}=\frac{135-(k-5)^2}{20}.$$

得点の期待値が最大となるのは $f_5(x)$ で定まる戦略を採用したときで，その得点の期待値は $\frac{27}{4}$.

…(答)

(3) $r=3$ のとき，第2ラウンドの戦略は(2)と同様に $k=5$ とすればよい．

第1ラウンドで $f_k(x)$ で定まる戦略を採用したとき，得点の期待値は

$$\frac{k}{10}\cdot\frac{27}{4}+\sum_{x=k+1}^{10}\frac{x}{10}=\frac{27k}{40}+\frac{(10-k)(k+11)}{20}=\frac{220+25k-2k^2}{40}.$$

よって，k が $\frac{25}{4}$ に最も近い整数は $k=6$.

得点の期待値が最大となるのは第1ラウンドで $f_6(x)$ で定まる戦略を採用し，第2ラウンドで $f_5(x)$ で定まる戦略を採用したときで，その得点の期待値は $\frac{149}{20}$. …(答)

(注) 次のように考えてもよい．

最終ラウンドでの得点の期待値は $\frac{11}{2}$

最終ラウンドの1回前では $\frac{11}{2}$ より小さい数のカード，すなわち，5以下のカードが抜き出されたら「続行」し，6以上のカードが抜きだされたら「停止」を選択する．すなわち，戦略 $f_5(x)$ をとる．このときの得点の期待値は，

$$\frac{6+7+8+9+10}{10}+\frac{11}{2}\times\frac{5}{10}=\frac{27}{4}$$

最終ラウンドの2回前では $\frac{27}{4}$ より小さい数のカード，すなわち，6以下のカードが抜き出されたら「続行」し，7以上のカードが抜きだされたら「停止」を選択する．すなわち，戦略 $f_6(x)$ をとる．このときの得点の期待値は，

$$\frac{7+8+9+10}{10}+\frac{27}{4}\times\frac{6}{10}=\frac{149}{20}$$

このように最終ラウンドから逆算して戦略を決めてゆけばよい．

同様な計算によると，もし，r が大きい数なら，最終ラウンドの1回前から逆順に

$f_5(x)$，$f_6(x)$，$f_7(x)$ を2回，$f_8(x)$ を5回

という作戦をとればよい．最終ラウンドの10回前以前は $f_9(x)$ で定まる戦略をとればよい．すなわち，10が書かれたカードが出るまで何度でも繰り返すという戦略が妥当になる．

第3問

a は実数で，$-\dfrac{1}{2} \leqq a < 2$ を満たすとする。xy 平面の領域 D，E を

$$D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$$
$$E : a \leqq x \leqq a+1$$

で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。

(1) $S(a)$ を定積分で表せ。

(2) 導関数 $S'(a)$ を a の関数として求めよ。

(3) $S(a)$ を最大にするような実数 a を解にもつ4次方程式

$$3x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0 \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は整数})$$

を求めよ。

(4) (3)で求めた方程式で，$x = \sqrt{2}\,t$ とおき，さらに

$$z = t - \frac{1}{t}$$

とすることにより，この方程式を z についての2次方程式として表せ。

(5) $S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。

分　野

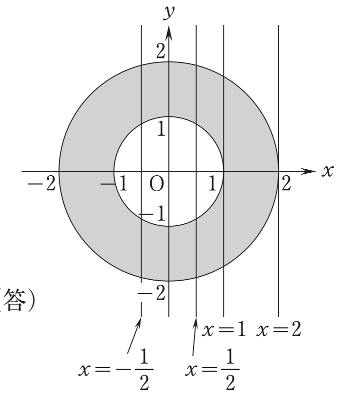
数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

場合分けがありそれぞれについて $S(a)$，$S'(a)$ を計算しなければならないので少々面倒である．しかし，$S'(a)$ は D の $x = a+1$ の切り口の長さから $x = a$ の切り口の長さを引いたものになる．

4次方程式はこのままでは解けないが，誘導にしたがって変形することにより，z の2次方程式になり，解ける．a の範囲に注意しながら a を求めることになる．

【解答】



(1) D の周の方程式は

$y = \pm\sqrt{4-x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$，$y = \pm\sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$．

それぞれの x の範囲と E の x の範囲を考えて，

$$S(a) = \begin{cases} 2\displaystyle\int_a^{a+1} (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2})\,dx & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq a < 0 \text{ のとき}\right), \\ 2\displaystyle\int_a^{a+1} \sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_a^1 \sqrt{1-x^2}\,dx & (0 \leqq a < 1 \text{ のとき}), \\ 2\displaystyle\int_a^2 \sqrt{4-x^2}\,dx & (1 \leqq a < 2 \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)の式を微分して，

$$S'(a) = \begin{cases} 2\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{1-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\} & \left(-\dfrac{1}{2} \leqq a < 0 \text{ のとき}\right), \\ 2\{\sqrt{4-(a+1)^2} - \sqrt{4-a^2} + \sqrt{1-a^2}\} & (0 \leqq a < 1 \text{ のとき}), \\ -2\sqrt{4-a^2} & (1 \leqq a < 2 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$\cdots$(答)

(3) $f(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$f(x)$ は偶関数で，$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ であるから，x の絶対値が大きいほど，$f(x)$ は大きい．

(i) $-\dfrac{1}{2} \leqq a < 0$ のとき，

$|a+1|=a+1\geqq -a=|a|$ だから $f(a+1)-f(a)\geqq 0$．よって，

$$S'(a)=2\{f(a+1)-f(a)\}\geqq 0.$$

(ii) $1\leqq a<2$ のとき，

$$S'(a)=-2\sqrt{4-a^2}<0.$$

(iii) $0\leqq a<1$ のとき，

$$S''(a)=2\left(\frac{-(a+1)}{\sqrt{4-(a+1)^2}}-\frac{-a}{\sqrt{4-a^2}}+\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)<0.$$

なぜなら，真ん中の項の絶対値は前後の項の絶対値より小さい．

よって，$S'(a)$ は減少関数で，$S'(0)=2(\sqrt{3}-1)>0$，$S'(1)=-2\sqrt{3}<0$．

よって，この範囲の 1 点で，$S'(a)=0$ となり，そのとき，$S(a)$ は最大となる．

その，a を x とおくと，

$$\sqrt{4-(x+1)^2}-\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1-x^2}=0.$$
$$\sqrt{4-(x+1)^2}+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{4-x^2}.$$
$$4-(x+1)^2+1-x^2+2\sqrt{4-(x+1)^2}\sqrt{1-x^2}=4-x^2.$$
$$2\sqrt{4-(x+1)^2}\sqrt{1-x^2}=(x+1)^2-1.$$
$$4\{4-(x+1)^2\}(1-x^2)=\{(x+1)^2-1\}^2.$$
$$3x^4+4x^3-20x^2-8x+12=0.$$

…(答)

(4) $x=\sqrt{2}\,t$ とおくと，

$$12t^4+8\sqrt{2}\,t^3-40t^2-8\sqrt{2}\,t+12=0.$$

$t\neq 0$ だから，

$$3t^2+2\sqrt{2}\,t-10-\frac{2\sqrt{2}}{t}+\frac{3}{t^2}=0.$$

$z=t-\dfrac{1}{t}$ とおくと，$t^2+\dfrac{1}{t^2}=z^2+2$．よって，

$$3(z^2+2)+2\sqrt{2}\,z-10=0 \iff 3z^2+2\sqrt{2}\,z-4=0.$$

…(答)

(5) (4) の解は $z=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{14}}{3}$．

$0<t=\dfrac{a}{\sqrt{2}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ より，$z=t-\dfrac{1}{t}<0$．

よって，$z=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{14}}{3}$．

$$z=t-\frac{1}{t}=\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{a}.\quad a^2-\sqrt{2}\,za-2=0.$$

よって，

$$a=\frac{\sqrt{2}\,z\pm\sqrt{2z^2+8}}{2}.$$

$a>0$ より

$$a=\frac{\sqrt{2}\,z+\sqrt{2z^2+8}}{2}=\frac{-1-\sqrt{7}+\sqrt{26+2\sqrt{7}}}{3}.$$

…(答)

第7章

2006~2014(平成18~平成26)年

後期試験数学の廃止

7.1　第 7 次指導要領改訂（2006 年）

第 7 次指導要領改訂は小学校で 1998 年から準備され，高校では 2003 年から実施され，入試には 2006 年から実施された．

基本的には数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，数学Ｂ，数学Ｃの枠組みは変化がなかった．ただ数学Ａは教科内の選択は行わず，３単元すべてを学んで単位とした．そのためこの時期のセンター試験「数学Ⅰ・数学Ａ」は選択問題がなく，数学Ⅰと数学Ａの融合問題が出題可能であった．

単元としては「数と式」が数学Ⅰになり，「場合の数と確率」が数学Ａに入れ替わった．また，「数列」が数学Ｂに移動．「数と式」は数学Ⅰと数学Ⅱに分けられた．

数学Ⅲでは「曲線長」が退場した．

数学Ｂに表計算ソフトを扱う「統計とコンピュータ」が登場した．

記憶に残る問題・特徴的な問題（2006〜2007）

2006 年　文科第 3 問，理科第 4 問は不定方程式 $x^n+y^n+z^n=xyz(0<x\leqq y\leqq z)$ で，文科は $n=1$，3，理科は $n=2$ の場合が問題になっている．一見関連がありそうだが，実はそれぞれ独立な問題．$n=2$ の場合は Markov の不定方程式（通常は右辺が $3xyz$）であり無数の解が帰納的に導かれる．$n=1$ の場合は容易に解け，$n\geqq 3$ のときは解が存在しない．これらが問題になった．

2007 年　理科第 3 問は放物線上にある線分を $1:2$ に内分点の存在範囲．中点の存在範囲を求める問題は見たことがあるが，$1:2$ という不均等な比の点の存在範囲を求める問題は珍しい．

2007 年　理科第 6 問は積分による不等式の証明と，それを使って $\log 2$ の値を評価する問題．証明した不等式が直接は使えないように設定されている．

このころ　あんなこと・こんなこと

タイでタクシン首相追放（2006 年）．

北朝鮮初核実験（2006 年）．

2006 年　前期・文科

第 1 問

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。

分　野

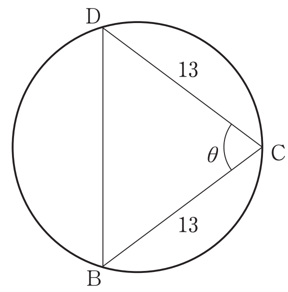
数学 I ：三角比

考え方

BC，CD の長さが与えられていることを利用する．

【解答】

$\angle \mathrm{BCD}=\theta$ $(0^\circ<\theta<180^\circ)$ とおく．



三角形 BCD について正弦定理を用いて，

$$\sin B=\sin D=\frac{13}{2\times\dfrac{65}{8}}=\frac{4}{5}$$

よって，$\cos B=\cos D=\dfrac{3}{5}$．よって，

$$\mathrm{BD}=2\mathrm{BC}\cos B=2\times 13\times\frac{3}{5}=\frac{78}{5}.$$

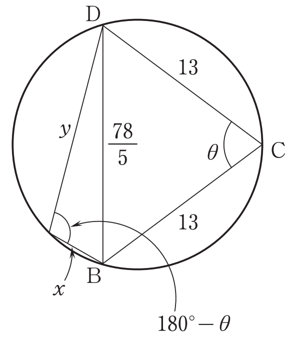
$\theta=\pi-2B$ から，

$$\cos\theta=\cos(\pi-2B)=2\sin^2 B-1=\frac{7}{25}.$$

$\mathrm{AB}=x$，$\mathrm{DA}=y$ とおくと，周の長さが 44 から $x+y=44-13-13=18$．

$$x+y=18. \quad \cdots①$$

三角形 ABD について余弦定理．



$$\mathrm{BD}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{DA}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DA}\cos(180^\circ-\theta).$$

$$\frac{78^2}{5^2}=x^2+y^2+2xy\frac{7}{25}.$$

$$78^2=25(x^2+y^2)+14xy=25\{(x+y)^2-2xy\}+14xy.$$

① より，

$$78^2=90^2-36xy.\quad 36xy=90^2-78^2.$$

$$xy=56. \quad \cdots②$$

①，② より，x，y は t の 2 次方程式

$$t^2-18t+56=0. \quad \cdots③$$

の 2 解で，③ を解くと，

$$(t-4)(t-14)=0.$$

$$t=4,\ 14.$$

したがって，

$$\mathrm{AB}=4,\ \mathrm{DA}=14,\ \text{または},\ \mathrm{AB}=14,\ \mathrm{DA}=4. \quad \cdots(\text{答})$$

第2問

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて3個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n \geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。

分　野

数学A：確率

考え方

×の位置によって確率が異なることに注意して丹念の場合分けする．

【解答】

(1) 表示された記号を順に並べて考える．

最初が×で最後が○で間に×が1個以内，○が1個並ぶ．

間の×がないときの確率は $(1-p)p$，×が2番目のときの確率は $(1-p)p^2$ でそれ以外の場合（×が3番目のときのみ）の確率は $(1-p)^3$ である．

よって，

$$P_2=(1-p)p+(1-p)p^2+(1-p)^3=(1-p)\{p+p^2+(1-p)^2\}=(1-p)(1-p+2p^2). \quad \cdots(答)$$

(2) 最初が×で最後が○で間に×が1個以内，○が2個並ぶ．

間の×がないときの確率は $(1-p)p^2$，×が2番目のときの確率は $(1-p)p^3$ でそれ以外の場合は2通りあって，それぞれの確率は $(1-p)^3p$ である．

よって，

$$P_3=(1-p)p^2+(1-p)p^3+2(1-p)^3p=(1-p)p\{p+p^2+2(1-p)^2\}=(1-p)p(2-3p+3p^2). \quad \cdots(答)$$

(3) 最初が×で最後が○で間に×が1個以内，○が $n-1$ 個が並ぶ．

間の×がないときの確率は $(1-p)p^{n-1}$，×が2番目のときの確率は $(1-p)p^n$ でそれ以外の場合は $n-1$ 通りあって，それぞれの確率は $(1-p)^3p^{n-2}$ である．

よって，

$$\begin{aligned}P_n&=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}=(1-p)p^{n-2}\{p+p^2+(n-1)(1-p)^2\}\\&=(1-p)p^{n-2}\{(n-1)-(2n-3)p+np^2\}=(1-p)p^{n-2}\{n(1-p)^2-1+3p\}. \quad \cdots(答)\end{aligned}$$

（注）(1)，(2)，(3) は同時に解ける．

第3問

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式

$$x^n+y^n+z^n=xyz \quad \cdots①$$

を考える。

(1) $n=1$ のとき，① を満たす正の整数の組 (x, y, z) で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2) $n=3$ のとき，① を満たす正の整数の組 (x, y, z) は存在しないことを示せ。

分 野

数学Ⅰ：整数，**数学A**：式と証明

考え方

(1) は最大数 z と xyz で比較．

(2) は同次式になるので $X=\dfrac{x}{z}$, $Y=\dfrac{y}{z}$ の方程式として考える．

【解答】

(1) $n=1$ のとき，① を

$$x+y+z=xyz \quad (0<x \leqq y \leqq z) \quad \cdots①_1$$

とする．

よって，

$$xyz=x+y+z \leqq z+z+z=3z. \text{ よって，} 1 \leqq xy \leqq 3.$$

よって，$xy=1$, 2, 3.

$xy=1$ のとき，$x=y=1$．このとき $①_1$ の左辺は $2+z$，右辺は z となり矛盾．

$xy=2$ のとき，$x=1$, $y=2$．よって，$①_1$ より，$3+z=2z$．よって，$z=3$．これは $x \leqq y \leqq z$ をみたす．

$xy=3$ のとき，$x=1$, $y=3$．よって，$①_1$ より，$4+z=3z$．よって，$z=2$．これは $x \leqq y \leqq z$ をみたさない．

よって，$①_1$ をみたす正の整数の組 (x, y, z) は1組だけで

$$(1, 2, 3). \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $n=3$ のとき，① を

$$x^3+y^3+z^3=xyz \quad \cdots①_3$$

とする．

$0<x \leqq y \leqq z$ とする．

$$X=\frac{x}{z}, \quad Y=\frac{y}{z}$$

とおくと，

$$X^3+Y^3+1=XY \quad (0<X \leqq Y \leqq 1). \quad \cdots②$$

をみたす X, Y が存在しないことを示せばよい．

$F=X^3+Y^3+1-XY$ とおくき，Y を固定して，X で微分．

$$\frac{dF}{dX}=3X^2-Y \leqq 3Y^2-Y=Y(3Y-1).$$

$0<Y \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，F は X の変化に対して単調減少．$X=Y$ のとき，

$$F=2Y^3-Y^2+1=2Y^3+(1-Y^2)>0.$$

$Y>\dfrac{1}{3}$ のとき，$X=\sqrt{\dfrac{Y}{3}}$ で F は極小かつ最小になる．このとき，

$$F=\sqrt{\frac{Y^3}{3^3}}+Y^3+1-\sqrt{\frac{Y}{3}}\,Y=Y^3-2\sqrt{\frac{Y^3}{3^3}}+1.$$

$Z=\sqrt{\dfrac{Y^3}{3^3}}$ とおくと，

$$F=27Z^2-2Z+1=26Z^2+(Z-1)^2>0.$$

よって F は常に正だから $F=0$ にはならない．したがって，②，$①_3$ は成り立たない．

したがって，$①_3$ をみたす x，y，z は存在しない．（証明終り）

(2)の【別解１】

$$x^3+y^3+z^3=xyz \qquad \cdots①_3$$

とし，$0<x\leqq y\leqq z$ とする．

$x^3+y^3+z^3=xyz\leqq z^3$．よって，$x^3+y^3\leqq 0$.

これは $x>0$，$y>0$ と矛盾する．

よって，$0<x\leqq y\leqq z$ のとき，$①_3$ をみたす x，y，z は存在しない．また，他の場合も同様である．

したがって，$①_3$ をみたす x，y，z は存在しない．（証明終り）

(2)の【別解２】

$$x^3+y^3+z^3=xyz, \qquad \cdots①_3$$

とすると，

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=-2xyz. \qquad \cdots③$$

ここで $x>0$，$y>0$，$z>0$ のとき，

$$(③\text{ の左辺})=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0.$$

一方，

$$(③\text{ の右辺})=-2xyz<0.$$

よって，③ は成り立たない．よって，$①_3$ をみたす x，y，z は存在しない．（証明終り）

（注）　$n\geqq 4$ のとき，正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ について，

$$x^n+y^n+z^n\geqq x^3+y^3+z^3>xyz$$

であるから，① をみたす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しない．

第4問

θ は，$0^\circ<\theta<45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，三角関数，倍角公式，**数学Ⅰ**：絶対値を含む関数

考え方

丹念に場合分けして増減を調べる．

【解答】

$0^\circ<\theta<45^\circ$ より，$0^\circ<2\theta<90^\circ$，$0<\cos 2\theta<1$.

$-1\leqq x\leqq 1$ より

$$f(x)=(x+1)^3+|x-\cos 2\theta|^3-(x-1)^3=6x^2+2+|x-\cos 2\theta|^3.$$

(i)　$-1\leqq x<\cos 2\theta$ のとき，

$$f(x)=6x^2+2-(x-\cos 2\theta)^3.$$

$$f'(x)=12x-3(x-\cos 2\theta)^2=-3\{x^2-2(2+\cos 2\theta)x+\cos^2 2\theta\}$$
$$=-3\{(x-2-\cos 2\theta)^2-4(1+\cos 2\theta)\}=-3\{(x-2-\cos 2\theta)^2-8\cos^2\theta\}.$$

$x=2+\cos 2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta$ で $f'(x)=0$.

$$f'(-1)=-3(1+\cos 2\theta)^2-12<0,\quad f'(\cos 2\theta)=12\cos 2\theta>0.$$

(ii)　$\cos 2\theta\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$f(x)=6x^2+2+(x-\cos 2\theta)^3.$$

$x>0$ より，

$$f'(x)=12x+3(x-\cos 2\theta)^2>0.$$

x	-1	$\cdots$	$2+\cos 2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta$	$\cdots$	$\cos 2\theta$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		↘	最小	↗		↗	

よって，最小値を与える x は

$$2+\cos 2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta=2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1=(\sqrt{2}\cos\theta-1)^2.\qquad\cdots(答)$$

2006年　前期・理科

第1問

Oを原点とする座標平面上の4点P_1，P_2，P_3，P_4で，条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}\quad (n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_2が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，P_3はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　P_1，P_2，P_3が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，P_4もこの円周上にあることを示せ。

分　野

数学Ⅱ：平面座標，**数学B**：ベクトル

考え方

ベクトルにこだわらず図形的な位置を考える．

【解答】

P_nの座標を$(x_n,\ y_n)$とおく．

(1)　与式から

$$x_1+x_3=\frac{3}{2}x_2,\quad y_1+y_3=\frac{3}{2}y_2.$$

P_1，P_2が曲線 $xy=1$ 上にあるから，$y_1=\dfrac{1}{x_1}$，$y_2=\dfrac{1}{x_2}$.

$$x_3=\frac{3}{2}x_2-x_1,\quad y_3=\frac{3}{2x_2}-\frac{1}{x_1}.$$

よって，$x_3y_3=1$ とすると，

$$x_3y_3=\left(\frac{3}{2}x_2-x_1\right)\left(\frac{3}{2x_2}-\frac{1}{x_1}\right)=\frac{13}{4}-\frac{3}{2}\left(\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}\right)=1.$$

$\dfrac{x_2}{x_1}=k$ とおくと，

$$\frac{13}{4}-\frac{3}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)=1.\quad k^2-\frac{3}{2}k+1=0.$$

これを，kについての2次方程式とすると，

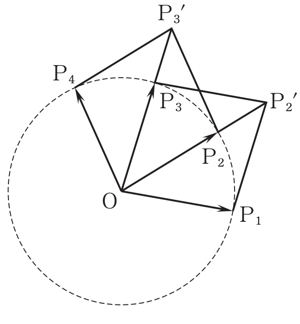
$$(\text{判別式})=\frac{9}{4}-4<0.$$

よって，$x_3y_3=1$ となることはない．したがって，P_3はこの曲線上にはない．　（証明終り）

(2)　P_1，P_2，P_3が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとすると，

$$\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_3},\quad |\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$$

から，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}$は$\angle P_1OP_3$の角の二等分線上にある．



$\overrightarrow{OP_2'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}$ とすると，菱形の対角線と辺のなす関係から

$$OP_1=OP_2=1.\quad OP_2'=OP_3'=\frac{3}{2},$$

$$\angle P_1OP_2'=\angle P_3OP_2'=\angle P_2OP_3'.$$

よって，

$$\triangle \mathrm{OP_1P_2'} \equiv \triangle \mathrm{OP_2P_3'}.\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_3}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_2'}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_1}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP_4}}=\overrightarrow{\mathrm{OP_3'}}-\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$$

より

$$\triangle \mathrm{OP_2'P_3} \equiv \triangle \mathrm{OP_3'P_4}.$$

よって $\mathrm{OP_4}=\mathrm{OP_3}=1$．よって $\mathrm{P_4}$ も円 $x^2+y^2=1$ 上にある．（証明終り）

第２問

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて３個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。

分　野

数学Ａ：確率

考え方

×の位置によって確率が異なることに注意して丹念の場合分けする．

【解答】

(1)　表示された記号を順に並べて考える．

最初が×で最後が○で間に×が１個以内，○が１個並ぶ．

間の×がないときの確率は $(1-p)p$，×が２番目のときの確率は $(1-p)p^2$ でそれ以外の場合（×が３番目のときのみ）の確率は $(1-p)^3$ である．

よって，

$$P_2=(1-p)p+(1-p)p^2+(1-p)^3=(1-p)\{p+p^2+(1-p)^2\}=(1-p)(1-p+2p^2).\quad \cdots(\text{答})$$

(2)　最初が×で最後が○で間に×が１個以内，○が $n-1$ 個が並ぶ．

間の×がないときの確率は $(1-p)p^{n-1}$，×が２番目のときの確率は $(1-p)p^n$ でそれ以外の場合は $n-1$ 通りあって，それぞれの確率は $(1-p)^3p^{n-2}$ である．

よって，

$$\begin{aligned}P_n&=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}=(1-p)p^{n-2}\{p+p^2+(n-1)(1-p)^2\}\\&=(1-p)p^{n-2}\{(n-1)-(2n-3)p+np^2\}=(1-p)p^{n-2}\{n(1-p)^2-1+3p\}.\quad \cdots(\text{答})\end{aligned}$$

（注）　$n=1,\ 2$ のときも同じ式で表される．

第３問

Ｏを原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 m：$y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと，原点Ｏは直線 $y=1$ 上の，第１象限

の点Qに移り，y 軸上の点Pは直線 m 上の，第1象限の点Rに移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点Pが存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。

分 野

数学Ⅱ：図形の移動

考え方

(1)の結果が意外と複雑な形になる．丹念に結果を利用する．

【解答】

(1) 線分OQの垂直二等分線が ℓ でその傾きが α だから，OQの傾きは $-\dfrac{1}{\alpha}$.

Qは $y=1$ 上にあるからその座標は $(-\alpha,\ 1)$.

ℓ はOQの中点を通るから，その方程式は

$$y=\alpha\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{2}=\alpha x+\frac{1+\alpha^2}{2}.$$

Rの座標を $(r,\ (\tan\theta)r)$ とするとRはP$(0,\ p)$ と ℓ に関して対称であるから

$$\frac{(\tan\theta)r+p}{2}=\alpha\frac{r}{2}+\frac{1+\alpha^2}{2},\quad \alpha\frac{(\tan\theta)r-p}{r}=-1.$$

$$(\tan\theta-\alpha)r=1-p+\alpha^2,\quad (\alpha\tan\theta+1)r=\alpha p.$$

r を消去すると，

$$(\tan\theta-\alpha)\alpha p=(\alpha\tan\theta+1)(1-p+\alpha^2).$$

よって，

$$\tan\theta=\frac{1-p+(1+p)\alpha^2}{(2p-1-\alpha^2)\alpha}.$$ …(答)

(2) $\tan\dfrac{\theta}{3}=t$ とおく．原点を通り ℓ に垂直な直線は $y=-\dfrac{1}{\alpha}x$．これが，$y=tx$ に一致するとき，$\alpha=-\dfrac{1}{t}$.

(1)の結果に代入すると

$$\tan\theta=\frac{1-p+(1+p)\dfrac{1}{t^2}}{\left(2p-1-\dfrac{1}{t^2}\right)\left(-\dfrac{1}{t}\right)}=-\frac{(1-p)t^2+(1+p)}{(2p-1)t^2-1}t.$$

一方，

$$\tan\theta=\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}+\tan\dfrac{2\theta}{3}}{1-\tan\dfrac{\theta}{3}\tan\dfrac{2\theta}{3}}=\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}}{1-\tan\dfrac{\theta}{3}\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}}=\frac{3\tan\dfrac{\theta}{3}-\tan^3\dfrac{\theta}{3}}{1-3\tan^2\dfrac{\theta}{3}}=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$$

よって，

$$-\frac{(1-p)t^2+(1+p)}{(2p-1)t^2-1}t=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}.$$

が，任意の t に対して成り立つ p を求めればよい．

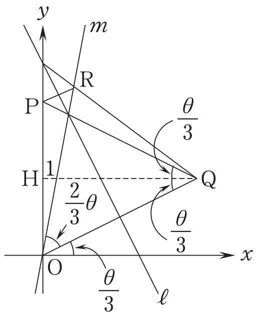
$$-\{(1-p)t^2+(1+p)\}t(1-3t^2)=(3t-t^3)\{(2p-1)t^2-1\}.$$

$$(p-2)t^5+2(p-2)t^3+(p-2)t=0.\quad (p-2)(t^2+1)^2t=0.$$

任意の t に関して成り立つ条件は $p=2$.

よって，与条件をみたす点Pは存在し，その y 座標は $p=2$. …(答)

(2)の【別解】



Q，Rが ℓ について，O，Pの対称点だから，$\angle\mathrm{PQO}=\angle\mathrm{ROQ}$.

Rは $m: y=(\tan\theta)x$ 上の点だから x 軸とORのなす角は θ.

Qは $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ 上の点だから x 軸とOQのなす角は $\dfrac{\theta}{3}$.

よって，$\angle\mathrm{ROQ}=\theta-\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{2}{3}\theta$.

よって，$\angle\mathrm{PQO}=\dfrac{2}{3}\theta$.

一方，Qの y 座標は1だから $\mathrm{H}(0,\ 1)$ とすると，QHは x 軸に平行．錯角の関係から $\angle\mathrm{OQH}=\dfrac{\theta}{3}$.

よって，$\angle\mathrm{OQH}=\angle\mathrm{HQP}=\dfrac{\theta}{3}$. よって，QHは $\angle\mathrm{OQP}$ の二等分線であり，QからOPへ下した垂線．

よって，三角形QOPは $\mathrm{QO}=\mathrm{QP}$ の二等辺三角形．よって，HはOPの中点．よって，Pの座標は $(0,\ 2)$.

このことは θ によらないからこの点が与条件をみたす点Pである．また，その y 座標は $p=2$. …(答)

第4問

次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x，y，z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x\leqq y\leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y\leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。

分　野

数学Ⅰ：整数，**数学A**：式と証明

考え方

(2)は(3)のためのヒント．

【解答】

$$x^2+y^2+z^2=xyz. \quad \cdots①$$

(1) ①を z の2次方程式とみると

$$z^2-xyz+x^2+y^2=0.$$

z が実数（自然数）だから

$$(\text{判別式})=(xy)^2-4(x^2+y^2)\geqq 0.\quad 4(x^2+y^2)\leqq x^2y^2.$$

$x^2>0$ より，

$$4y^2<4(x^2+y^2)\leqq x^2y^2.\ \text{よって，}\ 4<x^2.$$

よって，$2<x\leqq y\leqq 3$ より $x=y=3$.

このとき，① より

$$z^2-9z+18=(z-3)(z-6)=0.$$

よって，

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3),\ (3,\ 3,\ 6). \qquad \cdots(答)$$

(1) の**【別解】**

$0<y\leqq3$ より，$y=1,\ 2,\ 3$.

(i) $y=1$ のとき，$y=x=1$. ① より

$$z^2-z+2=0.$$

これは実数解をもたない.

(ii) $y=2$ のとき，① より

$$z^2-2xz+4+x^2=(z-x)^2+4=0.$$

これも実数解をもたない.

(iii) $y=3$ のとき，① より

$$z^2-3xz+9+x^2=0.$$

$$(判別式)=9x^2-4(9+x^2)=5x^2-36\geqq0. \quad 4<\frac{36}{5}\leqq x^2\leqq9.$$

x は整数だから，$x=3$.

以下**【解答】**と同じ. （別解終り）

(2) ① で，$y=b$，$z=c$ とすると

$$x^2-bcx+b^2+c^2=0. \qquad \cdots①'$$

$(a,\ b,\ c)$ が条件 (A) をみたすとき，$x=a$ は ①′ の解である.

2 次方程式 ①′ の $x=a$ 以外の解を $x=z$ とすると，解と係数の関係から

$$a+z=bc. \quad z=bc-a.$$

このとき，$az=abc-a^2=b^2+c^2$ で解と係数の関係を確かにみたしている.

よって，z は ①′ のもう 1 つの解であり，整数である.

ここで，$0<a\leqq b\leqq c$ より，

$$z-c=bc-a-c\geqq bc-2c=c(b-2).$$

(1) より，$3\leqq b\leqq c$ であるから $c(b-2)>0$. よって，$b\leqq c<z$.

よって，$z=bc-a$ とすると，$(b,\ c,\ z)$ が条件 (A) をみたす解として存在する. （証明終り）

(3) 背理法で証明.

条件 (A) をみたす組 $(x,\ y,\ z)$ の個数が有限個しかないとする.

解の個数が有限個だとすると，条件 (A) をみたす組の z の最大値が存在する. それを z_M とし，$z=z_M$ である組を $(x_M,\ y_M,\ z_M)$ とする.

このとき，(2) から $z=y_Mz_M-x_M$ とした，$(y_M,\ z_M,\ z)$ も条件 (A) をみたす. しかし，$z_M<z$ だから，z_M が条件 (A) をみたす組の z の最大値であることに矛盾する.

したがって，条件 (A) をみたす組 $(x,\ y,\ z)$ は無数にある. （証明終り）

（注） x，y，z を 3 で割った余りを考えると，x，y，z すべては 3 で割り切れなければならない.

$x=3X$，$y=3Y$，$z=3Z$ とすると，

$$X^2+Y^2+Z^2=3XYZ$$

となる. 整数の組 $(X,\ Y,\ Z)$ を求める問題は Markov の方程式と呼ばれ本問の結果のように無数の対称な解を順次生成することが知られている. すべての解が $(1,\ 1,\ 1)$ から生成されるかどうかは未解決.

第 5 問

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(1+a_n)^2} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。

$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

分 野

数学Ⅲ：数列の極限

考え方

a_n と b_n の関係を利用する．数列の和を積分で評価．

【解答】

(1) 与式より，

$$b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{(1+a_n)^2}{a_n}=\frac{1}{a_n}+2+a_n=b_n+2+\frac{1}{b_n}.$$

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=2.$

$$b_n>2n \quad (n\geqq 2) \qquad \cdots(*)$$

を数学的帰納法で証明する．

(Ⅰ) $n=2$ のとき，

$$b_2=b_1+2+\frac{1}{b_1}=2+2+\frac{1}{2}>4.$$

よって，(*) は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$ のとき，(*) が成り立つとする．すなわち，

$$b_k>2k.$$

$$b_{k+1}=b_k+2+\frac{1}{b_k}>2k+2+\frac{1}{b_k}>2(k+1).$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ) より，$n>1$ のとき，$b_n>2n$ が成り立つ． （証明終り）

(2) (1) より，$0<a_n<\dfrac{1}{2n}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$．

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)<\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$
$$<\frac{1}{2n}\left(1+\int_1^n\frac{1}{x}\,dx\right)=\frac{1}{2n}\left(1+\Big[\log x\Big]_1^n\right)=\frac{1}{2n}(1+\log n).$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}(1+\log n)=0.$

ハサミウチの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0. \qquad \cdots(答)$$

(3) 与式より，

$$b_{n+1}=b_n+2+a_n.\quad a_n=b_{n+1}-b_n-2.$$

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$$
$$=\frac{1}{n}\{(b_2-b_1-2)+(b_3-b_2-2)+(b_4-b_3-2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n-2)\}$$
$$=\frac{1}{n}(b_{n+1}-b_1-2n).$$

(2) より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(b_{n+1}-b_1-2n)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{n}-2=0.$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2.\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}na_{n+1}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(注) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ の証明.

$x>1$ のとき，$0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ より，

$$0<\int_1^n\frac{1}{x}\,dx=\log n<\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2(\sqrt{n}-1).$$

よって，

$$0<\frac{1}{n}\log n<\frac{2}{n}(\sqrt{n}-1)=\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n}\right)=0.$$

ハサミウチの原理から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0.\qquad(\text{証明終り})$$

第6問

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数を持つことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ1つ存在することを示せ。

(2) 前問 (1) で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27}g(x)\,dx$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法

考え方

$f(x)$ が単調で，値域が $(-\infty,\ \infty)$ であることを示す.

$g(x)=f^{-1}(x)$ のとき，$y=g(x) \iff x=f(y)$．区間 $(a,\ b)$ で単調なら

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} yf'(y)\,dy$$

図で考えれば，$f(x)$ の積分と $g(x)$ の積分の関係がわかる．

【解答】

(1) $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$．$X=e^x$ と置くと，$f(x)=\dfrac{12(X^3-3X)}{X^2-1}$．これを $F(X)$ とおく．

$x>0$ より $X>1$．

$$F'(X)=\frac{12\{(X^3-3X)'(X^2-1)-(X^3-3X)(X^2-1)'\}}{(X^2-1)^2}$$
$$=\frac{12\{(3X^2-3)(X^2-1)-(X^3-3X)(2X)\}}{(X^2-1)^2}$$
$$=\frac{12(X^4+3)}{(X^2-1)^2}.$$

よって，$X>1$ のとき，$F'(X)>0$．よって，$F(X)$ は X の単調増加関数．

$X=e^x$ は x の単調増加関数だから，$f(x)$ は x の単調増加関数．

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$．

よって，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ1つ存在する．

よって，$f(x)$ は実数全体を定義域とする逆関数を持つ．（証明終り）

(2) $y=g(x)$ とすると，$x=f(y)$．$\dfrac{dx}{dy}=f'(y)$．

$e^y=Y$ とおくと，$x=8$ のとき，

$$8=\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}=\frac{12(Y^3-3Y)}{Y^2-1}.$$
$$3Y^3-2Y^2-9Y+2=0.\quad (Y-2)(3Y^2+4Y-1)=0.$$

よって，$Y=2$，$\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$．

このうち，$Y>1$ となるのは，$e^y=Y=2$．$g(8)=y=\log 2$．

$x=27$ のとき，

$$27=\frac{12(e^{3y}-3e^y)}{e^{2y}-1}=\frac{12(Y^3-3Y)}{Y^2-1}.$$
$$4Y^3-9Y^2-12Y+9=0.\quad (Y-3)(4Y^2+3Y-3)=0.$$

よって，$Y=3$，$\dfrac{-3\pm\sqrt{57}}{8}$．

このうち，$Y>1$ となるのは，$e^y=Y=3$．$g(27)=y=\log 3$．

$y=g(x)$ より $\begin{array}{c|ccc} x & 8 & \longrightarrow & 27 \\ \hline y & \log 2 & \longrightarrow & \log 3 \end{array}$ 求める積分は

$$\int_8^{27} g(x)\,dx=\int_{\log 2}^{\log 3} yf'(y)\,dy=\Big[yf(y)\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3} f(y)\,dy$$

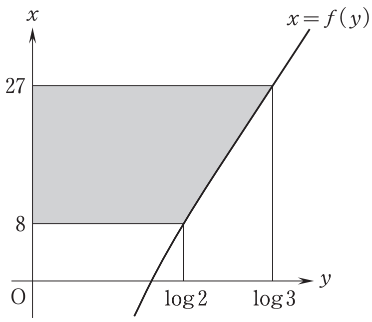
$$=\log 3\,f(\log 3)-\log 2\,f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3}\frac{12(e^{3y}-3e^{y})}{e^{2y}-1}\,dy$$

$$=27\log 3-8\log 2-\int_2^3\frac{12(Y^2-3)}{Y^2-1}dY$$

$$=27\log 3-8\log 2-12\int_2^3\left(1-\frac{1}{Y-1}+\frac{1}{Y+1}\right)dY$$

$$=27\log 3-8\log 2-12\Big[Y-\log|Y-1|+\log|Y+1|\Big]_2^3$$

$$=39\log 3-20\log 2-12. \qquad \cdots(\text{答})$$



2006 年　後期・理科 I 類

第 1 問

xy 平面上で t を変数とする媒介変数表示

$$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=t+2t^2 \end{cases}$$

で表される曲線を C とする。

次の問に答えよ。

(1)　$t \neq -1$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を t の式で表せ。

(2)　曲線 C 上で

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$$

を満たす点 A の座標を求めよ。

(3)　曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ を点 $(X,\ Y)$ に移す移動が

$$\begin{cases} X=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x-y) \\ Y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(x+2y) \end{cases}$$

で表されているとする。このとき，Y を X を用いて表せ。

(4)　曲線 C の概形を xy 平面上に描け。

分野

数学Ⅲ：微分法，**数学 C**：一次変換

考え方

前半はパラメータ微分の基本.

後半の変換は回転であることがわかれば，図示する曲線が斜めの放物線であることがわかる.

【解答】

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=2+2t$，$\dfrac{dy}{dt}=1+4t$. よって，$t \neq -1$ のとき，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+4t}{2(1+t)}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1+4t}{2(1+t)}=-\dfrac{1}{2}$. よって，

$$1+4t=-(1+t).\quad t=-\frac{2}{5}.$$

よって，

$$x=2\left(-\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)^2=-\frac{16}{25},\quad y=\left(-\frac{2}{5}\right)+2\left(-\frac{2}{5}\right)^2=-\frac{2}{25}.$$

よって，

$$\mathrm{A}\left(-\frac{16}{25},\ -\frac{2}{25}\right). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　$X=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{2(2t+t^2)-(t+2t^2)\}=\dfrac{3t}{\sqrt{5}}$. $Y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{(2t+t^2)+2(t+2t^2)\}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(4t+5t^2)$.

$t=\dfrac{\sqrt{5}}{3}X$ から

$$Y=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{4\left(\frac{\sqrt{5}}{3}X\right)+5\left(\frac{\sqrt{5}}{3}X\right)^2\right\}=\frac{5}{9}\sqrt{5}\,X^2+\frac{4}{3}X. \qquad \cdots(答)$$

(4) $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおけるから，

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とかける．したがって点 $(X,\ Y)$ は点 $(x,\ y)$ を原点を中心に θ 回転した点である．このことに注意する．

$Y=\dfrac{5}{9}\sqrt{5}\,X^2+\dfrac{4}{3}X$ は原点を通る放物線で，$Y=\dfrac{5}{9}\sqrt{5}\left(X+\dfrac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2-\dfrac{4}{5\sqrt{5}}$ から，軸は $X=-\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$ で頂点は $\left(-\dfrac{6}{5\sqrt{5}},\ -\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\right)$ である．

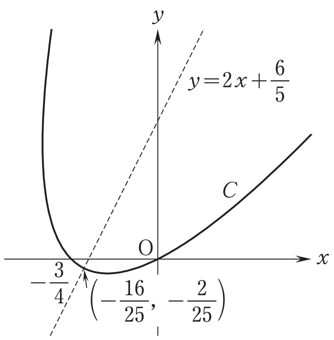
$X=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)=-\dfrac{6}{5\sqrt{5}}$ から，xy 平面における軸の方程式は $2x-y=-\dfrac{6}{5}$ であり，

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\left\{-\frac{2}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}=-\frac{2}{25}\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

から，xy 平面上での頂点の座標は $\left(-\dfrac{16}{25},\ -\dfrac{2}{25}\right)$ である．

また x 切片は原点のほか $t=-\dfrac{1}{2}$ のときで $x=-\dfrac{3}{4}$.

曲線 C の概形は下図の太線部.



$\cdots$(答)

(注) 曲線 C の概形としてどこまで要求されているかわからないのでとりあえず軸，頂点，x 切片を示した．これらと，放物線であることを前提とすれば曲線は決定される．一般に「図を描け」という設問にはどこまで描かなければならないかは明示されない．それは図示を求める問題の宿命のように思える．そのために図示を求める問題の出題が差し控えられるとしたらそれは違うと思う．ただ，解答者によって，図示のポイントは異なることが想像される．

上記の解答でにはこれ以上は不要かと思われるが，このほか幾つかの点および方程式を示すことができる．

原点以外の y 切片 $(0,\ 6)$，x の最小点 $(-1,\ 1)$，y の最小点 $\left(-\dfrac{7}{16},\ -\dfrac{1}{8}\right)$，

焦点 $\left(-\dfrac{11}{20},\ \dfrac{1}{10}\right)$，　準線 $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{8}$.

第2問

a を正の実数，θ を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。xyz 空間において，点 $(a, 0, 0)$ と点 $(a+\cos\theta, 0, \sin\theta)$ を結ぶ線分を，x 軸のまわりに1回転させてできる曲面を S とする。さらに，S を y 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を V とする。

次の問に答えよ。

(1) V を a と θ を用いて表せ。

(2) $a=4$ とする。V を θ の関数と考えて，V の最大値を求めよ。

分野

数学Ⅲ：積分法，**数学B**：空間図形

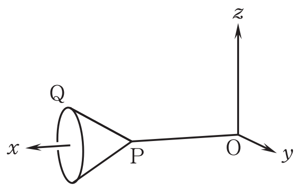
考え方

線分の x 軸のまわりの回転体は円錐であるがそれが見えなくても，線分をパラメータで表し，$y=s$ における y 軸からの最大最小を求めれば積分できる．

【解答】

(1) $\mathrm{P}(a, 0, 0)$，$\mathrm{Q}(a+\cos\theta, 0, \sin\theta)$ とする．線分PQ上の点をRとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(a+t\cos\theta, 0, t\sin\theta) \quad (0 \leqq t \leqq 1).$$



Rの x 座標の範囲は $a \leqq x \leqq a+\cos\theta$.

$x=a+t\cos\theta$ における S の断面は円 C_t：$y^2+z^2=t^2\sin^2\theta$.

y 軸に垂直な断面 $y=s$ を考える．交わる条件は $s^2 \leqq t^2\sin^2\theta$.

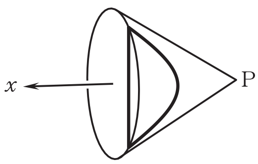
$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq t \leqq 1$ から，$-\sin\theta \leqq s \leqq \sin\theta$.

$\theta=0$ のとき $s=0$ なので $V=0$. 以下では $0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．

$y=s$ と円 C_t の交点は，$(a+t\cos\theta, s, \pm\sqrt{t^2\sin^2\theta-s^2})$

中心 $(0, s, 0)$ との距離を r とおくと，

$$r^2=(a+t\cos\theta)^2+t^2\sin\theta-s^2=a^2+2at\cos\theta+t^2-s^2.$$



r は t について単調に増加する．$0 \leqq t \leqq 1$，$s^2 \leqq t^2\sin^2\theta$ から

$\dfrac{|s|}{\sin\theta} \leqq t \leqq 1$.

よって，

$$\left(a+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}|s|\right)^2 \leqq r^2 \leqq a^2+2a\cos\theta+1-s^2.$$

求める立体は xz 平面について対称で，$y=s$ $(\geqq 0)$ における断面は2重の円の間の部分．その面積は

$$\pi\left\{a^2+2a\cos\theta+1-s^2-\left(a+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}s\right)^2\right\}=\pi\left(2a\cos\theta+1-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}as-\frac{1}{\sin^2\theta}s^2\right).$$

よって，

$$\begin{aligned} V&=2\pi\int_0^{\sin\theta}\left(2a\cos\theta+1-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}as-\frac{1}{\sin^2\theta}s^2\right)ds \\ &=2\pi\left(2a\cos\theta\sin\theta+\sin\theta-a\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{3}\sin\theta\right) \\ &=2\pi\left(a\cos\theta+\frac{2}{3}\right)\sin\theta. \end{aligned}$$

$\theta=0$ の場合も含めて

$$V=2\pi\left(a\cos\theta+\frac{2}{3}\right)\sin\theta. \qquad \cdots(答)$$

(2) $a=4$ のとき，$V=2\pi\left(4\cos\theta+\frac{2}{3}\right)\sin\theta=\frac{4}{3}\pi(3\sin2\theta+\sin\theta)$ を $V(\theta)$ とおく．

$$V'(\theta)=\frac{4}{3}\pi(6\cos2\theta+\cos\theta)=\frac{4}{3}\pi(12\cos^2\theta+\cos\theta-6)=\frac{4}{3}\pi(4\cos\theta+3)(3\cos\theta-2).$$

$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ をみたす α をとると，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$V'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$V(\theta)$	0	↗		↘	

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$．$\sin2\alpha=\frac{4\sqrt{5}}{9}$．

よって V の最大値は

$$V(\alpha)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\frac{20\sqrt{5}}{9}\pi. \qquad \cdots(答)$$

(注) 円錐の底面上の任意の点と原点Oの距離は $\sqrt{a^2+1+2a\cos\theta}$ で一定であるから底面の円は球面上を動く．一方円錐の側面のうち回転軸（z 軸）に最も近いのは円錐の母線のうち，xz 平面上にあるものである．

したがって，この円錐が作る立体は球体を2つの円錐台でくり抜いた図形である．

第3問

数列の和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

などについて，次のような一般的な考察をしてみよう。

p，n を自然数とする。

(1) $p+1$ 次の多項式 $S_p(x)$ があって，数列の和 $\sum_{k=1}^{n}k^p$ が $S_p(n)$ と表されることを示せ。

(2) q を自然数とする。(1)の多項式 $S_1(x)$，$S_3(x)$，$\cdots$，$S_{2q-1}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)=x^q(x+1)^q$$

が恒等式となるような定数 a_1，$\cdots$，a_q を q を用いて表せ。

(3) q を2以上の自然数とする。(1)の多項式 $S_2(x)$，$S_4(x)$，$\cdots$，$S_{2q-2}(x)$ に対して，

$$\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)=x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)$$

が恒等式となるような定数 c と b_1，$\cdots$，b_{q-1} を q を用いて表せ。

(4) p を3以上の奇数とする。このとき，

$$\frac{d}{dx}S_p(x)=pS_{p-1}(x)$$

を示せ。

分　野

数学B：数列

考え方

累乗和を表す多項式に関する問題である．(1)は数学的帰納法であるが証明すべき事柄の表現がなれない形であることと，n の $p+1$ 次であることを示すという，やや抽象的な事柄を証明しなければならないという難しさがある．

(4)は(2)の多項式を微分して(3)の多項式になるようにして，あとは再び数学的帰納法を用いる．かなり繁雑である．

【解答】

(1)　数学的帰納法で証明する．

(I)　$p=0$ のとき $\sum_{k=1}^{n}1=n$ だから，$S_0(x)=x$ とすれば $S_0(x)$ は1次の多項式で，$\sum_{k=1}^{n}1=S_0(n)$ と表すことができる．

(II)　$0 \leqq p \leqq m$ のすべての p について，$\sum_{k=1}^{n}k^p=S_p(n)$ となる $p+1$ 次の多項式 $S_p(x)$ が存在するとする．

このとき，任意の m 次以下の多項式 $f(x)=\sum_{l=0}^{m}c_l x^l$ について，$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m}c_l k^l=\sum_{l=0}^{m}c_l S_l(n)$．

$S_l(n)$ は n の $l+1$ 次の多項式だから，$\sum_{k=1}^{n}f(k)$ は n の $(m+1)$ 次以下の多項式である．

特に，k の多項式，$(k+1)^{m+2}-k^{m+2}$ は k の $(m+1)$ 次の多項式で，k^{m+1} の係数は $m+2$ であるから，$(k+1)^{m+2}-k^{m+2}-(m+2)k^{m+1}$ は k の m 次以下の多項式である．これを $f(k)$ とおく．

このとき，$(k+1)^{m+2}-k^{m+2}=(m+2)k^{m+1}+f(k)$．

$$\sum_{k=1}^{n}\{(k+1)^{m+2}-k^{m+2}\}=(n+1)^{m+2}-1$$

であり，また，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{(m+2)k^{m+1}+f(k)\}&=(m+2)\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+\sum_{k=1}^{n}f(k)\\&=(m+2)\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+\{n\text{ の }(m+1)\text{ 次以下の多項式}\}\end{aligned}$$

であるから，$(n+1)^{m+2}-1=(m+2)\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}+\{n\text{ の }(m+1)\text{ 次以下の多項式}\}$．よって，

$$\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=\frac{1}{m+2}[(n+1)^{m+2}-1-\{n\text{ の}(m+1)\text{ 次以下の多項式}\}]$$

とかける．

右辺は n の多項式で，$\frac{1}{m+2}n^{m+2}$ の項の次数が最高だから n の $m+2$ 次の多項式である．

よって，$\sum_{k=1}^{n}k^{m+1}=S_{m+1}(n)$ とおくと，$S_{m+1}(n)$ は n の $m+2$ 次の多項式である．

したがって，$p=m+1$ のときも $p+1$ 次の多項式 $S_p(x)$ によって，$\sum_{k=1}^{n}k^p=S_p(n)$ とかける．

(I)，(II)より，すべての自然数 p について，$\sum_{k=1}^{n}k^p$ は $p+1$ 次の多項式 $S_p(x)$ によって，

$\sum_{k=1}^{n}k^p=S_p(n)$ と表すことができる．　（証明終り）

（注）　(1)の結果は任意の x の n 次の多項式 $f(x)$ が $S_0(x)$，$S_1(x)$，…，$S_{n-1}(x)$ によって，

$f(x)=\sum_{j=0}^{n-1}c_j S_j(x)$ の形でただ1通に表されることを意味している．

(2) (1) から，$S_{2j-1}(n)=\sum_{k=1}^{n}k^{2j-1}$．よって，$S_{2j-1}(n)-S_{2j-1}(n-1)=n^{2j-1}$．

つまり，$S_{2j-1}(x)-S_{2j-1}(x-1)=x^{2j-1}$．

$$\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)-\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x-1)=\sum_{j=1}^{q}a_jx^{2j-1}. \qquad \cdots①$$

一方，題意をみたす a_j について

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)-\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x-1)&=x^q(x+1)^q-(x-1)^qx^q\\&=x^q\sum_{l=0}^{q}({}_q\mathrm{C}_lx^{q-l}-{}_q\mathrm{C}_lx^{q-l}(-1)^l)=\sum_{l=0}^{q}\{1-(-1)^l\}{}_q\mathrm{C}_lx^{2q-l}.\end{aligned}$$

この和は l が奇数の項，すなわち，$2q-l$ が奇数の項だけ残る．よって，$2q-l=2j-1$ とおくと，$0\leqq l\leqq q$ から，$\dfrac{q+1}{2}\leqq j\leqq q$ についての和と考えればよい．よって，

$$\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)-\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x-1)=2\sum_{\frac{q+1}{2}\leqq j\leqq q}{}_q\mathrm{C}_{2q-2j+1}x^{2j-1}=2\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]+1}^{q}{}_q\mathrm{C}_{2j-q-1}x^{2j-1}. \qquad \cdots②$$

ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

①，② の係数を比較すると，

$$a_j=0\ \left(1\leqq j\leqq \frac{q}{2}\right),\quad a_j=2{}_q\mathrm{C}_{2j-q-1}\ \left(\frac{q+1}{2}\leqq j\leqq q\right). \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) (1) から，$S_{2j}(n)=\sum_{k=1}^{n}k^{2j}$．よって，$S_{2j}(n)-S_{2j}(n-1)=n^{2j}$．つまり，$S_{2j}(x)-S_{2j}(x-1)=x^{2j}$．

$$\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)-\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x-1)=\sum_{j=1}^{q-1}b_jx^{2j}. \qquad \cdots③$$

一方，題意をみたす b_j について

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)-\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x-1)&=x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q)-(x-1)^{q-1}x^{q-1}\{c(x-1)+q\}\\&=cx^q(x+1)^{q-1}-cx^{q-1}(x-1)^q+qx^{q-1}(x+1)^{q-1}-qx^{q-1}(x-1)^{q-1}\\&=cx^q\sum_{l=0}^{q-1}{}_{q-1}\mathrm{C}_lx^{q-l-1}-cx^{q-1}\sum_{l=0}^{q}{}_q\mathrm{C}_lx^{q-l}(-1)^l\\&\quad+qx^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}{}_{q-1}\mathrm{C}_lx^{q-l-1}-qx^{q-1}\sum_{l=0}^{q-1}{}_{q-1}\mathrm{C}_lx^{q-l-1}(-1)^l\\&=c\sum_{l=0}^{q-1}{}_{q-1}\mathrm{C}_lx^{2q-l-1}-c\sum_{l=0}^{q}{}_q\mathrm{C}_l(-1)^lx^{2q-l-1}+q\sum_{l=1}^{q}{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}x^{2q-l-1}\\&\quad+q\sum_{l=1}^{q}{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}(-1)^lx^{2q-l-1}\qquad(l\text{ の番号を }1\text{ だけ変更})\\&=\sum_{l=1}^{q-1}\{c\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_l-c\cdot{}_q\mathrm{C}_l(-1)^l+q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}+q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}(-1)^l\}x^{2q-l-1}\\&\quad+\{-c(-1)^q+q+q(-1)^q\}x^{q-1}.\end{aligned}$$

③ と恒等的に等しいためには，この式は x の偶数次の項だけからならなければならない．x^{2q-3} の係数は

$$c\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_2-c\cdot{}_q\mathrm{C}_2+2q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_1=(q-1)(2q-c)=0.$$

$q\geqq 2$ から，

$$c=2q. \qquad \cdots(\text{答})$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)-\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x-1)\\&=\sum_{l=1}^{q-1}\{2q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_l-2q\cdot{}_q\mathrm{C}_l(-1)^l+q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}+q\cdot{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}(-1)^l\}x^{2q-l-1}+\{q-q(-1)^q\}x^{q-1}\end{aligned}$$

$$=q\sum_{l=1}^{q-1}\{2{}_{q-1}\mathrm{C}_l+{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}+{}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}(-1)^l-2{}_q\mathrm{C}_l(-1)^l\}x^{2q-l-1}+q\{1-(-1)^q\}x^{q-1}.$$

$${}_{q-1}\mathrm{C}_l=\frac{(q-1)!}{l!(q-l-1)!}=\frac{q-l}{q}\,\frac{q!}{l!(q-l)!}=\frac{q-l}{q}{}_q\mathrm{C}_l,$$

$${}_{q-1}\mathrm{C}_{l-1}=\frac{(q-1)!}{(l-1)!(q-l)!}=\frac{l}{q}\,\frac{q!}{l!(q-l)!}=\frac{l}{q}{}_q\mathrm{C}_l.$$

よって，

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)-\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x-1)&=q\sum_{l=1}^{q-1}\left\{2\frac{q-l}{q}+\frac{l}{q}+\frac{l}{q}(-1)^l-2(-1)^l\right\}{}_q\mathrm{C}_lx^{2q-l-1}+q\{1-(-1)^q\}x^{q-1}\\&=\sum_{l=1}^{q-1}(2q-l)\{1-(-1)^l\}{}_q\mathrm{C}_lx^{2q-l-1}+q\{1-(-1)^q\}x^{q-1}\\&=\sum_{l=1}^{q}(2q-l)\{1-(-1)^l\}{}_q\mathrm{C}_lx^{2q-l-1}.\end{aligned}$$

この和は l が奇数の項，すなわち，$2q-l-1$ が偶数の項だけ残る．よって，$2q-l-1=2j$ とおくと，$1\leqq l\leqq q$ から，$\dfrac{q-1}{2}\leqq j\leqq q-1$ についての和と考えればよい．よって，

$$\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x)-\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x-1)=2\sum_{\frac{q-1}{2}\leqq j\leqq q-1}(2j+1){}_q\mathrm{C}_{2q-2j-1}x^{2j}=2\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}(2j+1){}_q\mathrm{C}_{2j-q+1}x^{2j}.$$

③ と係数を比較すると，

$$b_j=0\ \left(j\leqq\frac{q}{2}-1\right),\quad b_j=2(2j+1){}_q\mathrm{C}_{2j-q+1}\ \left(\frac{q-1}{2}\leqq j\leqq q-1\right).\qquad\cdots(答)$$

(4)　まず，$\dfrac{d}{dx}\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)$ を考える．(3) の結果と (2) より，

$$\frac{d}{dx}x^q(x+1)^q=qx^{q-1}(x+1)^q+qx^q(x+1)^{q-1}=qx^{q-1}(x+1)^{q-1}(2x+1)=x^{q-1}(x+1)^{q-1}(cx+q).$$

よって，(3) より，

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}(x)=\sum_{j=1}^{q}a_jS_{2j-1}{}'(x)=\sum_{j=1}^{q-1}b_jS_{2j}(x).$$

(2)，(3) の結果より

$$\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]+1}^{q}2{}_q\mathrm{C}_{2j-q-1}S_{2j-1}{}'(x)=\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}2{}_q\mathrm{C}_{2j-q+1}S_{2j+1}{}'(x)=\sum_{j=\left[\frac{q}{2}\right]}^{q-1}2(2j+1){}_q\mathrm{C}_{2j-q+1}S_{2j}(x).\qquad\cdots④$$

これがすべての 2 以上の自然数 q で成り立つことを使って，数学的帰納法によって (3) より，

$$S_{2j+1}{}'(x)=(2j+1)S_{2j}(x)\quad(j\text{ は自然数})\qquad\cdots(*)$$

を証明する．

(I)　$j=1$ のとき，④ で $q=2$ とすると，和は $j=1$ のみになるので，

$$4\cdot S_3{}'(x)=4\cdot3S_2(x).\quad\therefore\quad S_3{}'(x)=3S_2(x).$$

(II)　$j\leqq k$ において，(*) が成り立つとする．

④ で $q=k+2$ とすると，

$$\sum_{j=\left[\frac{k+2}{2}\right]}^{k+1}2{}_{k+2}\mathrm{C}_{2j-k-1}S_{2j+1}{}'(x)=\sum_{j=\left[\frac{k+2}{2}\right]}^{k+1}2(2j+1){}_{k+2}\mathrm{C}_{2j-k-1}S_{2j}(x).$$

$j\leqq k$ で $S_{2j+1}{}'(x)=(2j+1)S_{2j}(x)$ が成り立つから，この式の $j\leqq k$ の項は両辺一致する．したがって，$j=k+1$ の項も一致して，

$$2{}_{k+2}\mathrm{C}_{k+1}S_{2k+3}{}'(x)=2(2k+3){}_{k+2}\mathrm{C}_{k+1}S_{2k+2}(x).\quad\therefore\quad S_{2k+3}{}'(x)=(2k+3)S_{2k+2}(x).$$

よって (*) は $j=k+1$ のときも成り立つ．

(I)，(II) より，すべての自然数 j について，$S_{2j+1}{}'(x)=(2j+1)S_{2j}(x)$ が成り立つ．つまり，3 以上の奇数 p について，

$$S_p{}'(x)=pS_{p-1}(x)$$

が成り立つ．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終り）

（注）　p が 2 以上の偶数のときは $S_2(x)'=\left\{\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)\right\}'=x(x+1)+\frac{1}{6}=2S_1(x)+\frac{1}{6}$ のように

$$\frac{d}{dx}S_{2j}(x)=(2j)S_{2j-1}(x)+b_{2j}$$

となり，定数項 b_{2j} がつく．

$b_{2j-1}=0$ とすれば，p が 2 以上の整数のとき，

「$\dfrac{d}{dx}S_p(x)=(2j)S_{p-1}(x)+b_p$ が成り立つ．」

としてもよい．$|b_{2j}|$ をベルヌーイ数という．

2007 年　前期・文科

第 1 問

連立不等式

$$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0,\quad y+x^2-2x-3\leqq 0$$

の表す領域を D とする。

(1)　D を図示せよ。

(2)　D の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域，整式の積分

考え方

最初の不等式は $y=|x^2-5|-4$ と x 軸の間の部分を表し，2 番目の不等式は放物線の下側を表す．共通部分が図示できれば面積は容易に求められる．

【解答】

(1)　$y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ の表す領域は y 軸について対称であるから，$x\geqq 0$ で考えればよい．

(i)　$0\leqq x\leqq\sqrt{5}$ のとき，

$$y\{y+(x^2-5)+4\}=y(y+x^2-1)\leqq 0.$$

(i-a)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$0\leqq y\leqq 1-x^2$.

(i-b)　$1<x\leqq\sqrt{5}$ のとき，$1-x^2\leqq y\leqq 0$.

(ii)　$x>\sqrt{5}$ のとき，

$$y\{y-(x^2-5)+4\}=y(y-x^2+9)\leqq 0.$$

(ii-a)　$\sqrt{5}<x\leqq 3$ のとき，$x^2-9\leqq y\leqq 0$.

(ii-b)　$x>3$ のとき，$0\leqq y\leqq x^2-9$.

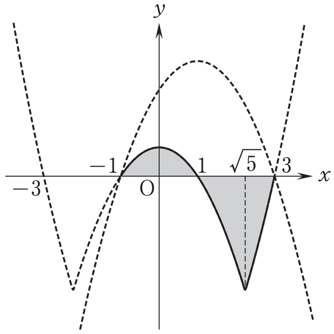
一方，

$$y+x^2-2x-3\leqq 0$$
$$\iff y\leqq -x^2+2x+3=-(x-3)(x+1).$$

また，

$$(-x^2+2x+3)-(-x^2+1)=2(x+1).$$
$$(x^2-9)-(-x^2+2x+3)$$
$$=2x^2-2x-12=2(x-3)(x+2).$$

以上から D を図示すると右図網掛部．境界を含む．



…(答)

(2)　求める面積は

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}(x^2-1)\,dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}(-x^2+9)\,dx$$
$$=\frac{2^3}{6}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^{\sqrt{5}}+\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_{\sqrt{5}}^{3}$$
$$=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}.$$

…(答)

第2問

r は $0<r<1$ をみたす実数，n は2以上の整数とする。平面上に与えられた1つの円を，次の条件①，②をみたす2つの円で置き換える操作(P)を考える。

① 新しい2つの円の半径の比は $r:1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

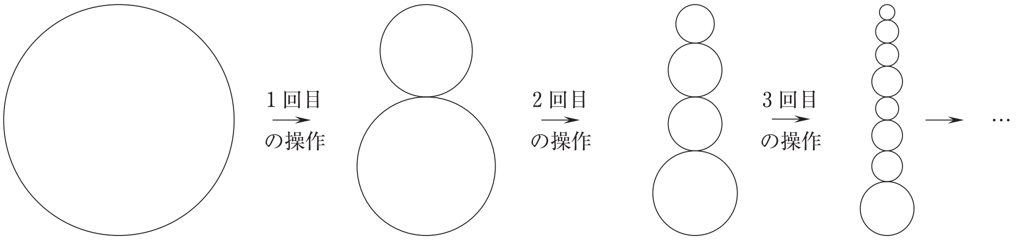
② 新しい2つの円は互いに外接し，もとの円に内接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に，平面上に半径1の円を描く。

・次に，この円に対して操作(P)を行い，2つの円を得る（これを1回の操作という）。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作(P)を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1\leqq k\leqq n-1)$。



(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2回目の操作で得られる4つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。

分　野

数学B：数列，**数学A**：平面図形

考え方

1回の操作で周および面積が何倍になるかを考えればよい．

【解答】

半径が R の円にこの操作をしたとき新たにできる2つの円の半径はそれぞれ，Rr，$R(1-r)$ である．

操作前の円の周は $2\pi R$ で，操作後にできた2円の周の和は $2\pi Rr+2\pi R(1-r)=2\pi R$ であるから，操作後の2円の周の和はもとの円の周と同じである．

また，操作後にできた2円の面積の和は $\pi R^2r^2+\pi R^2(1-r)^2=\pi R^2\{r^2+(1-r)^2\}$ であるから，もとの円の面積の $2r^2-2r+1$ 倍である．

(1) n 回操作しても周の長さの和は変わらないから，その和は最初の円の周の長さ $2\pi\times1=2\pi$ である．
…(答)

(2) 2回の操作で最初の円の面積 $\pi\times1^2=\pi$ の $(2r^2-2r+1)^2$ 倍になるから，その面積の和は

$$\pi(2r^2-2r+1)^2.$$
…(答)

(3) n 回の操作では最初の円の面積 π の $(2r^2-2r+1)^n$ 倍になるから，その面積の和は

$$\pi(2r^2-2r+1)^n.$$
…(答)

【別解】

最初半径1の円が1個ありそれが以下のような半径の円に分岐する．

1

1 回目　r［1 個］　$1-r$［1 個］

2 回目　r^2［1 個］　$r(1-r)$［2 個］　$(1-r)^2$［1 個］

3 回目　r^3［1 個］　$r^2(1-r)$［3 個］　$r(1-r)^2$［3 個］　$(1-r)^3$［1 個］

…　…　…　…　…

n 回目にできる半径が $r^k(1-r)^{n-k}$ の円は ${}_n\mathrm{C}_k$ 個である．

(1)　2^n 個の円の周の和は $2\pi\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k r^k(1-r)^{n-k}=2\pi\{r+(1-r)\}^n=2\pi.$ …(答)

(2)　4 個の円の面積の和は $\pi\{r^4+2\times r^2(1-r)^2+(1-r)^4\}=\pi(2r^2-2r+1)^2.$ …(答)

(3)　2^n 個の円の面積の和は $\pi\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\{r^k(1-r)^{n-k}\}^2=\pi\{r^2+(1-r)^2\}^n=\pi(2r^2-2r+1)^n.$ …(答)

第 3 問

正の整数の下 2 桁(けた)とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば 2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。

分　野

数学 I：整数

考え方

下 2 桁は 100 で割った余りである．m^4 の下 2 桁は 1 位の数だけで決まる．ここまでわかれば，あとは書き出すだけ．

【解答】

m の下 2 桁を ab，つまり m の 1 の位の数を b，十の位の数を a とすると，

$$m=100c+10a+b \quad (a,\ b,\ c \text{ は負でない整数で，} a,\ b \text{ は 9 以下})$$

とかける．

$5m^4$ の下 2 桁は $5(10a+b)^4$ の下 2 桁と同じで，$5(40ab^3+b^4)$ の下 2 桁と同じ．結局 $5b^4$ の下 2 桁と同じである．

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2 の下 2 桁	00	01	04	09	16	25	36	49	64	81
b^4 の下 2 桁	00	01	16	81	56	25	96	01	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	00	05	80	05	80	25	80	05	80	05

以上から現れる数は

$$0,\ 5,\ 25,\ 80.$$ …(答)

(注)　周期が 10 であることは

$$5(m+10)^4-5m^4=5\{(m+10)-m\}\{(m+10)+m\}\{(m+10)^2+m^2\}=100(m+5)\{(m+10)^2+m^2\}$$

からも読み取れる．

第4問

表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みのゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは，最初0とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ1のブロックを1つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ0に戻す。

n を正の整数，m を $0 \leqq m \leqq n$ をみたす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で，n 回の硬貨投げを独立に2度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。

分 野

数学A：確率

考え方

ブロックの高さは最後に裏が出てからの回数である．裏が出れば，それ以前にどの順で裏表が出たかに関わらず高さが0になるから，裏が出た時点から確率を考えればよい．

【解答】

(1) 高さが n であるのは，n 回続けて表が出た場合で，その確率は p^n

高さが m $(0 \leqq m < n)$ であるのは $m+1$ 回前に裏が出てそれ以後 m 回続けて表が出た場合で，その確率は $p^m(1-p)$.

よって，

$$p_m=\begin{cases} p^n & (m=n \text{ のとき}), \\ p^m(1-p) & (0 \leqq m < n \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) 表が出続けたとしてもブロックの高さは n だから，ブロックの高さは常に n 以下．よって，$q_n=1$.

$m<n$ のとき，

$$q_m=\sum_{k=0}^{m} p_k=\sum_{k=0}^{m} p^k(1-p)=\sum_{k=0}^{m}(p^k-p^{k+1})=1-p^{m+1}.$$

よって，

$$q_m=\begin{cases} 1 & (m=n) \\ 1-p^{m+1} & (0 \leqq m < n \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(3) 高い方の高さが m であるのは，「1度目に高さ m を出し，2度目の高さが m 以下である場合」と，「1度目の高さが m 以下で，2度目に高さ m を出す場合」の確率の和から，重複している「1度目も，2度目も高さが m である場合」の確率を引けばよい．すなわち．

$$r_m=2p_mq_m-p_m{}^2$$

である．

$m=n$ のとき，

$$2p^n \cdot 1-(p^n)^2=2p^n-p^{2n}=p^n(2-p^n).$$

$m<n$ のとき，

$$2p_mq_m-p_m{}^2=2p^m(1-p)(1-p^{m+1})-p^{2m}(1-p)^2=p^m(1-p)(2-p^m-p^{m+1}).$$

よって，求める確率は

$$r_m=\begin{cases} p^n(2-p^n) & (m=n \text{ のとき}) \\ p^m(1-p)(2-p^m-p^{m+1}) & (0 \leqq m < n \text{ のとき}) \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

（注）(3)の確率は2度とも高さが m 以下で，2度とも高さが $m-1$ 以下でない場合の確率

$$q_m{}^2-q_{m-1}{}^2$$

で計算してもよい．

2007 年　前期・理科

第 1 問

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

分　野

数学Ⅱ：整式，**数学Ⅰ**：整数

考え方

2 つの整式の積の n 次以下の項は，2 つの整式の n 次以下の部分の積の n 次以下の項と等しい．

【解答】

$$P(x)=a_Nx^N+a_{N-1}x^{N-1}+a_{N-2}x^{N-2}+\cdots+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$=\sum_{m=0}^{N}a_mx^m \qquad (N\geqq n)$$

とする．

まず，$k=1$ の場合を証明する．

$$(x+1)P(x)=a_Nx^{N+1}+(a_N+a_{N-1})x^N+(a_{N-1}+a_{N-2})x^{N-1}$$
$$+\cdots+(a_n+a_{n-1})x^n+(a_{n-1}+a_{n-2})x^{n-1}+\cdots+(a_2+a_1)x^2+(a_1+a_0)x+a_0$$
$$=a_Nx^N+\sum_{m=1}^{N-1}(a_m+a_{m-1})x^m+a_0.$$

$(x+1)P(x)$ の n 次以下の項の係数

$$b_m=a_m+a_{m-1}\quad(1\leqq m\leqq n),\quad b_0=a_0$$

がすべて整数であるとする．

まず $a_0=b_0$ は整数．

a_l $(0\leqq l<m)$ が整数なら，$a_{l+1}=b_{l+1}-a_l$ だから a_{l+1} も整数．

よって，帰納的にすべての m $(0\leqq m\leqq n)$ について，a_m は整数．

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数．

よって，

$(x+1)P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数なら，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数．

…(*)

(*) を繰り返し使うと，$(x+1)^kP(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数なら，$(x+1)^{k-1}P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数，$(x+1)^{k-2}P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数，…，$P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数．（証明終り）

第2問

n を2以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点O, P_0, P_1, …, P_n があり，次の2つの条件をみたしている。

① $\angle P_{k-1}OP_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$, $\angle OP_{k-1}P_k=\angle OP_0P_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $P_{k-1}P_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ とおくとき，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：数列の極限

考え方

$\triangle OP_{k-1}P_k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$ はすべて相似だから対応する辺の長さは等比数列になる.

【解答】

$\angle P_0OP_1=\angle P_{k-1}OP_k=\dfrac{\pi}{n}$, $\angle OP_0P_1=\angle OP_{k-1}P_k$ $(2\leqq k\leqq n)$ だから,

$\triangle OP_0P_1 \backsim \triangle OP_{k-1}P_k$ $(2\leqq k\leqq n)$.

よって,

$$\frac{OP_1}{OP_0}=\frac{OP_2}{OP_1}=\frac{OP_3}{OP_2}=\cdots=\frac{OP_{k+1}}{OP_k}=\cdots=1+\frac{1}{n}.$$

だから，$OP_k=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k$. $\triangle OP_0P_1$ と $\triangle OP_{k-1}P_k$ の相似比は $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$.

よって，$a_k=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}a_1$. よって,

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}a_1=\frac{a_1\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}}{1+\frac{1}{n}-1}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}na_1.$$

余弦定理より,

$$a_1{}^2=P_0P_1{}^2=OP_0{}^2+OP_1{}^2-2\cdot OP_0\cdot OP_1\cos\frac{\pi}{n}=1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n}$$
$$=2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}=4\sin^2\frac{\pi}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_1{}^2=\lim_{n\to\infty}\left\{4n^2\sin^2\frac{\pi}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)+1\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\pi^2+1\right\}=\pi^2+1.$$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty}na_1=\sqrt{\pi^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-1\right\}=e-1$ より

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right\}na_1=(e-1)\sqrt{\pi^2+1}. \qquad \cdots(答)$$

第3問

座標平面上の2点P，Qが，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分PQを1：2に内分する点Rが動く範囲を D とする。ただし，P=Q のときは R=P とする。

(1) a を $-1\leqq a\leqq 1$ をみたす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域

考え方

P，Qの x 座標 p，q についての条件を $a=\dfrac{2p+q}{3}$ から q を消去．q の範囲から導かれる p の範囲と，もともとの p の範囲の共通部分が p が動く範囲．そのときの b のとりうる範囲を求めればよい．

【解答】

(1) 点Pの座標を $(p,\ p^2)$，点Qの座標を $(q,\ q^2)$ とおくと，線分PQを1：2に内分する点Rの座標は $\left(\dfrac{2p+q}{3},\ \dfrac{2p^2+q^2}{3}\right)$．

点 $(a,\ b)$ が D に属するための条件は，

$$a=\frac{2p+q}{3},\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\quad(-1\leqq p\leqq 1,\ -1\leqq q\leqq 1)$$

をみたす p，q が存在することである．

$q=3a-2p$ と表されるから，

$$b=\frac{2p^2+(3a-2p)^2}{3}=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2.$$

右辺を $f(p)$ とおくと，$f(p)$ は p の2次関数で，$p=a$ で最小になる．

$-1\leqq q\leqq 1$ より，$\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3a+1}{2}$．

この p の範囲と，$-1\leqq p\leqq 1$ の共通部分における b のとりうる値の範囲を考える．

$-1\leqq a\leqq 1$ のとき，$\dfrac{3a-1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{3a+1}{2}$．よって，$\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3a+1}{2}$ の範囲に必ず $p=a$ が含まれる．

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2,\quad f(a)=a^2,$$
$$f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3a^2-2a+1}{2}.\quad f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3a^2+2a+1}{2}.$$

(i) $\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき，$0\leqq\dfrac{3a-1}{2}\leqq 1\leqq\dfrac{3a+1}{2}$．

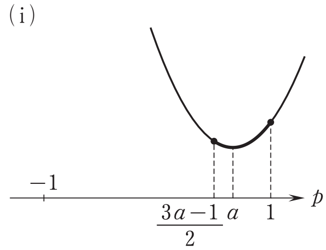
よって，p のとり得る値の範囲は $\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq 1$．

$$f(1)-f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3}{2}(a-1)^2\geqq 0.$$

よって，b のとりうる値の範囲は

$$f(a)=a^2\leqq b\leqq f(1)=3a^2-4a+2.$$

(i)



(ii) $-\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$-1<\dfrac{3a-1}{2}$，$\dfrac{3a+1}{2}<1$．

よって，p のとり得る値の範囲は $\dfrac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3a+1}{2}$．

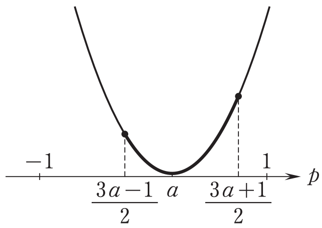
$$f\left(\frac{3a+1}{2}\right)-f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=2a.$$

(ii-a)　$0\leqq a<\dfrac{1}{3}$ のとき，$f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)\geqq f\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$.

よって，b のとりうる値の範囲は

$$f(a)=a^2\leqq b\leqq f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3a^2+2a+1}{2}.$$

(ii-a)

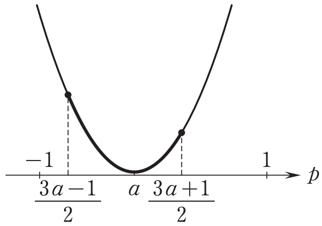


(ii-b)　$-\dfrac{1}{3}<a<0$ のとき，$f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)<f\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)$.

よって，b のとりうる値の範囲は

$$f(a)=a^2\leqq b\leqq f\left(\frac{3a-1}{2}\right)=\frac{3a^2-2a+1}{2}.$$

(ii-b)



(iii)　$-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{3a-1}{2}\leqq -1\leqq \dfrac{3a+1}{2}\leqq 0$.

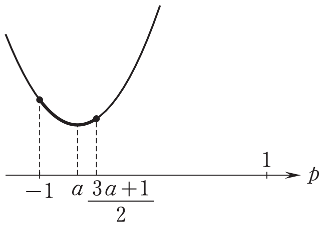
よって，p のとり得る値の範囲は $-1\leqq p\leqq \dfrac{3a+1}{2}$.

$$f(-1)-f\left(\frac{3a+1}{2}\right)=\frac{3}{2}(a+1)^2\geqq 0.$$

よって，b のとりうる値の範囲は

$$f(a)=a^2\leqq b\leqq f(-1)=3a^2+4a+2.$$

(iii)

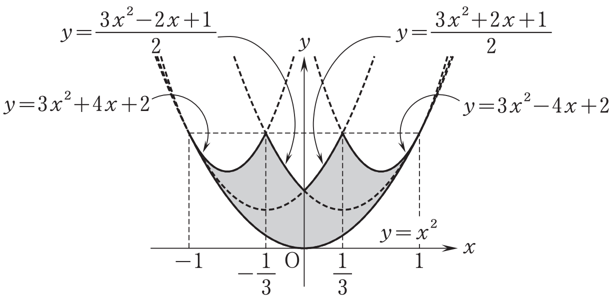


以上をまとめて，b のとり得る値の範囲すなわち点 R が D に属するための b の条件は

$$\begin{cases} a^2\leqq b\leqq 3a^2-4a+2 & \left(\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq 1 \text{ のとき}\right), \\ a^2\leqq b\leqq \dfrac{3a^2+2a+1}{2} & \left(0\leqq a<\dfrac{1}{3} \text{ のとき}\right), \\ a^2\leqq b\leqq \dfrac{3a^2-2a+1}{2} & \left(-\dfrac{1}{3}<a<0 \text{ のとき}\right), \\ a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2 & \left(-1\leqq a\leqq -\dfrac{1}{3} \text{ のとき}\right). \end{cases}$$

…(答)

(2)　図示すると下図網掛部境界を含む.



…(答)

(1) の【別解】

点 P の座標を $(p,\ p^2)$，点 Q の座標を $(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ を 1：2 に内分する点 R の座標を $(a,\ b)$ とすると，

$$a=\frac{2p+q}{3},\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}.$$

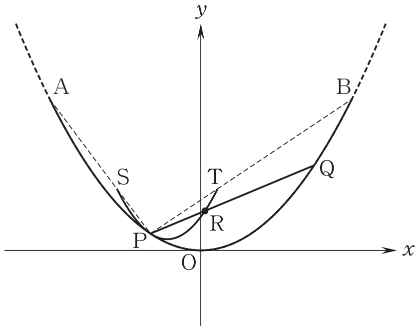
ただし，$-1\leqq p\leqq 1$，$-1\leqq q\leqq 1$.

$q=3a-2p$ と表されるから，

$$b=\frac{2p^2+(3a-2p)^2}{3}=3\left(a-\frac{2}{3}p\right)^2+\frac{2}{3}p^2.$$

また，$-1\leqq q\leqq 1$ より $\dfrac{2p-1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{2p+1}{3}$.

点 P を固定したとき，点 Q が $y=x^2$ 上で $A(-1,\ 1)$ から $B(1,\ 1)$ まで動いてできる点 R の軌跡を C_p とする．



$$C_p：y=3\left(x-\frac{2}{3}p\right)^2+\frac{2}{3}p^2.\quad \left(\frac{2p-1}{3}\leqq x\leqq\frac{2p+1}{3}\right)$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}p\right)^2+\frac{2}{3}p^2-x^2=2(x-p)^2$$

から C_p は $x=p$ で $y=x^2$ に接する．

また，

$$C_{-1}：y=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\quad \left(-1\leqq x\leqq-\frac{1}{3}\right),$$

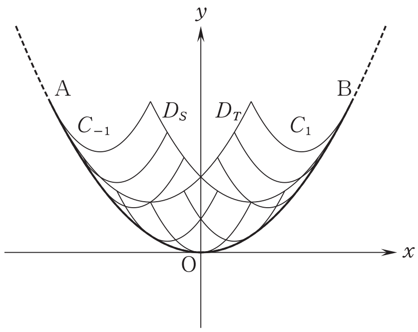
$$C_1：y=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}.\quad \left(\frac{1}{3}\leqq x\leqq 1\right).$$

この C_p の端点を S，T とすると，

$$S\left(\frac{2p-1}{3},\ 3\left(\frac{2p-1}{3}-\frac{2}{3}p\right)^2+\frac{2}{3}p^2\right)=\left(\frac{2p-1}{3},\ \frac{2}{3}p^2+\frac{1}{3}\right),$$

$$T\left(\frac{2p+1}{3},\ 3\left(\frac{2p+1}{3}-\frac{2}{3}p\right)^2+\frac{2}{3}p^2\right)=\left(\frac{2p+1}{3},\ \frac{2}{3}p^2+\frac{1}{3}\right)$$

で，x^2 の係数は p によって変らず，頂点に対する端点の位置も変わらないから，C_p は p が変化することによって平行移動する．



$(c,\ d)=\left(\dfrac{2p\mp1}{3},\ \dfrac{2}{3}p^2+\dfrac{1}{3}\right)$ とすると，

$$p=\frac{3c\pm1}{2},\quad d=\frac{2}{3}\left(\frac{3c\pm1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\left(c\pm\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}.$$

$-1\leqq p\leqq 1$ も考慮して，S，T の軌跡をそれぞれ D_S，D_T とすると，

$$D_S：y=\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\quad \left(-1\leqq x\leqq\frac{1}{3}\right),$$

$$D_T：y=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\quad \left(-\frac{1}{3}\leqq x\leqq 1\right).$$

したがって，軌跡 C_p は両端が D_S，D_T 上にあり，$y=x^2$ に接しながら動く．そのとき C_p が動く範囲が求めるものである．

よって，C_p が動く範囲は，$y=x^2$ の上側で，C_1 と D_T または C_{-1} と D_S の下側の部分．（式省略）

第4問

以下の問いに答えよ。

(1) 実数 a に対し，2次の正方行列 A，P，Q が，5つの条件 $A=aP+(a+1)Q$，$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=O$，$QP=O$ をみたすとする。ただし $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ である。このとき，$(P+Q)A=A$ が成り立つことを示せ。

(2) a は正の数として，行列 $A=\begin{pmatrix}a&0\\1&a+1\end{pmatrix}$ を考える。この A に対し，(1)の5つの条件をすべてみたす行列 P，Q を求めよ。

(3) n を2以上の整数とし，$2\leqq k\leqq n$ をみたす整数 k に対して $A_k=\begin{pmatrix}k&0\\1&k+1\end{pmatrix}$ とおく。行列の積 $A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2$ を求めよ。

分 野

数学C：行列，**数学B**：数列

考え方

$P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=QP=O$ なら，$\{\alpha P+\beta Q\}\{\gamma P+\delta Q\}=\alpha\gamma P+\beta\delta Q$

$(P+Q)A=A$ で A^{-1} が存在することから，$P+Q=E$.

【解答】

(1) $P^2=P$，$Q^2=Q$，$PQ=QP=O$ より，

$$PA=P\{aP+(a+1)Q\}=aP^2+(a+1)PQ=aP. \quad \cdots①$$

$$QA=Q\{aP+(a+1)Q\}=aQP+(a+1)Q^2=(a+1)Q. \quad \cdots②$$

①，② より

$$(P+Q)A=aP+(a+1)Q=A.$$

（証明終り）

(2) $P=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix}t&u\\v&w\end{pmatrix}$ とする.

$$PA=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\1&a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pa+q&q(a+1)\\ra+s&s(a+1)\end{pmatrix}.$$

$$aP=a\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap&aq\\ar&as\end{pmatrix}.$$

① より，

$$pa+q=ap,\quad q(a+1)=aq,\quad ra+s=ar,\quad s(a+1)=as.$$

よって，$q=s=0$. $P=\begin{pmatrix}p&0\\r&0\end{pmatrix}$.

$P^2=P$ より，$\begin{pmatrix}p^2&0\\pr&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&0\\r&0\end{pmatrix}$.

よって，$p^2=p$，$pr=r$. よって，$p=1$ または $P=O$.

$$QA=\begin{pmatrix}t&u\\v&w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\1&a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ta+u&u(a+1)\\va+w&w(a+1)\end{pmatrix}.$$

$$(a+1)Q=(a+1)\begin{pmatrix}t&u\\v&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a+1)t&(a+1)u\\(a+1)v&(a+1)w\end{pmatrix}.$$

② より，

$$ta+u=(a+1)t,\quad u(a+1)=(a+1)u,\quad va+w=(a+1)v,\quad w(a+1)=(a+1)w.$$

よって，$u=t$，$w=v$．$Q=\begin{pmatrix} t & t \\ v & v \end{pmatrix}$．

$Q^2=Q$ より，$\begin{pmatrix} t^2+tv & t^2+tv \\ vt+v^2 & vt+v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & t \\ v & v \end{pmatrix}$．

よって，$t(t+v-1)=0$，$v(t+v-1)=0$．よって，$t+v=1$ または $Q=O$．

$P=O$ とすると，$A=(a+1)Q$．$A\neq O$ より，$Q\neq O$，$Q=\begin{pmatrix} t & t \\ v & v \end{pmatrix}$．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+1)t & (a+1)t \\ (a+1)v & (a+1)v \end{pmatrix}.$$

$a+1>1$ と 1-2 成分の式から $t=0$．ところが，これは $a>0$ と 1-1 成分の式に矛盾する．

$Q=O$ とすると，$A=aP$．$A\neq O$ より，$P\neq O$，$P=\begin{pmatrix} p & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}$．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap & 0 \\ ar & 0 \end{pmatrix}.$$

2-2 成分の式は $a+1>1$ と矛盾する．

よって，$P\neq O$，$Q\neq O$．よって，$p=1$，$t+v=1$．

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} t & t \\ 1-t & 1-t \end{pmatrix}.$$

$$PQ=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & t \\ 1-t & 1-t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & t \\ rt & rt \end{pmatrix}.$$

$PQ=O$ より，$t=0$．よって，$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$．

$$QP=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+r & 0 \end{pmatrix}.$$

$QP=O$ より，$r=-1$．

以上より

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \cdots(答)$$

(2)の【別解】　河合塾公表解答

$\det A=a(a+1)>0$ だから，A^{-1} が存在する．(1)で証明した結果に右から A^{-1} をかけることから，$P+Q=E$．

$$(a+1)E-A=\{(a+1)P+(a+1)Q\}-\{aP+(a+1)Q\}=P \text{ から}$$

$$P=\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，

$$Q=E-P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　(1)の a を k としたものが A_k だから，

$$A_k=kP+(k+1)Q.$$

$$A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2=\{nP+(n+1)Q\}\{(n-1)P+nQ\}\{(n-2)P+(n-1)Q\}\cdots\{2P+3Q\}.$$

P，Q は可換で，P のみの積，Q のみの積以外は O だから展開して残る項は $P^{n-1}=P$ の項と，$Q^{n-1}=Q$ の項のみ．

よって，

$$A_nA_{n-1}A_{n-2}\cdots A_2=n(n-1)(n-2)\cdots 2P+(n+1)n(n-1)\cdots 3Q=n!P+\frac{(n+1)!}{2}Q$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2n! & 0 \\ (n+1)!-2n! & (n+1)! \end{pmatrix}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第5問

（文科　第4問と同じ）

第6問

以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ をみたす実数 x，a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1) を利用して，次を示せ。

$$0.68<\log 2<0.71$$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

(1) は単純に微分して比較してもよいが，図形的にも示すことができる．

(2) では $\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt=\log 2$ となる a，x をとっても，証明できない．$\log 2$ を 2 つの log の和に直しそれぞれについて (1) の不等式を応用することがポイント．

【解答】

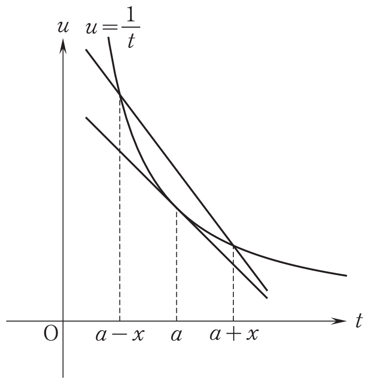
(1)　以下で，直線，曲線は tu 平面上で考える．$t>0$ のとき，

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2},\quad \frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{t}=\frac{2}{t^3}>0.$$

$t=a$ におけるの曲線 $u=\dfrac{1}{t}$ の接線の方程式は

$$u=-\frac{1}{a^2}(t-a)+\frac{1}{a}.$$

また，2 点 $\left(a-x,\ \dfrac{1}{a-x}\right)$，$\left(a+x,\ \dfrac{1}{a+x}\right)$ を通る直線の傾きは



$$\frac{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{a-x}}{a+x-(a-x)}=-\frac{1}{(a+x)(a-x)}.$$

$\left(a-x,\ \dfrac{1}{a-x}\right)$, $\left(a+x,\ \dfrac{1}{a+x}\right)$ を通る直線の方程式は

$$u=-\frac{1}{(a+x)(a-x)}(t-a-x)+\frac{1}{a+x}=-\frac{1}{(a+x)(a-x)}t+\frac{2a}{(a-x)(a+x)}.$$

$\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{1}{t}>0$ だから，$a-x\leqq t\leqq a+x$ における直線と曲線の上下関係から，

$$-\frac{1}{a^2}(t-a)+\frac{1}{a}\leqq\frac{1}{t}\leqq-\frac{1}{(a+x)(a-x)}t+\frac{2a}{(a-x)(a+x)}.$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\left\{-\frac{1}{a^2}(t-a)+\frac{1}{a}\right\}dt=\left[-\frac{1}{2a^2}(t-a)^2+\frac{1}{a}t\right]_{a-x}^{a+x}=\frac{2x}{a}.$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\left\{-\frac{1}{(a+x)(a-x)}t+\frac{2a}{(a-x)(a+x)}\right\}dt=\left[-\frac{1}{2(a+x)(a-x)}t^2+\frac{2a}{(a-x)(a+x)}t\right]_{a-x}^{a+x}$$

$$=-\frac{1}{2(a+x)(a-x)}\cdot 4ax+\frac{2a}{(a-x)(a+x)}\cdot 2x=\frac{2xa}{(a-x)(a+x)}=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right).$$

よって.

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right).$$ （証明終り）

（注） 2つの1次関数の積分は台形の面積であり，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt$ は曲線と2直線 $t=a-x$，$t-a+x$ および t 軸が囲む部分の面積である．したがって，この不等式はこの部分と2つの台形の包含関係と面積の大小関係とみてもよい．

(1) の【別解】

(1)

$f(x)=\dfrac{2x}{a}$，$g(x)=\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt$，$h(x)=x\left(\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)$ とおくと，

$$f(0)=g(0)=h(0)=0.$$

$$f'(x)=\frac{2}{a},\quad g'(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}=\frac{2a}{a^2-x^2},$$

$$h'(x)=\frac{1}{x+a}+\frac{1}{a-x}+x\left(\frac{-1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right).$$

$$g'(x)-f'(x)=\frac{2a}{a^2-x^2}-\frac{2}{a}=\frac{2x^2}{a(a^2-x^2)}>0,$$

$$h'(x)-g'(x)=x\left(\frac{-1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\right)=\frac{4ax^2}{(a^2-x^2)^2}>0.$$

よって，$g(x)-f(x)$，$h(x)-g(x)$ は増加し，$x>0$ だから

$$g(x)-f(x)>g(0)-f(0)=0,\quad h(x)-g(x)>h(0)-g(0)=0.$$

よって，$f(x)<g(x)<h(x)$．よって題意はみたされた． （証明終り）（別解終り）

(2) $a=\dfrac{5}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}$ とすると，$a+x=3$，$a-x=2$.

(1) の結果から

$$\frac{2}{5}<\log\frac{3}{2}<\frac{5}{12}.$$ …①

$a=\dfrac{7}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}$ とすると，$a+x=4$，$a-x=3$.

(1)の結果から

$$\frac{2}{7}<\log\frac{4}{3}<\frac{7}{24}. \qquad \cdots②$$

①，② を加えて

$$\frac{24}{35}<\log 2<\frac{17}{24}.$$

$$\frac{24}{35}=0.68\cdots,\quad \frac{17}{24}=0.70\cdots$$

よって，

$$0.68<0.68\cdots<\log 2<0.70\cdots<0.71. \quad \therefore \quad 0.68<\log 2<0.71$$

となり，題意は示された．（証明終り）

（注１） $\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt=\Big[\log t\Big]_{a-x}^{a+x}=\log\frac{a+x}{a-x}$. $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ とすると，$a=3x$.

これを，(1)の結果に適用すると．

$$\frac{2}{3}=0.66\cdots<\log 2<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0.75$$

となり求める不等式の証明にならない．

（注２） 与不等式は $\dfrac{x}{a}$ によって定まる不等式だから，(2)で $x=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{5}{2}$ としたが，$x=1$，$a=5$ としても同じ不等式をうる．$x=\dfrac{1}{2}$，$a=\dfrac{7}{2}$ についても，$x=1$，$a=7$ としてもよい．

（注３） $x=\sqrt{2}-1$，$a=\sqrt{2}+1$ として与不等式に代入すると，

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}=2(3-2\sqrt{2})<\log\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

をうる．これを２倍すると

$$4(3-2\sqrt{2})=0.686\cdots<\log 2<\frac{\sqrt{2}}{2}=0.707\cdots$$

となり**【解答】**より精度のよい近似をうる．

2007 年　後期・理科Ⅰ類

第1問

xy 平面の曲線 $C：xy^2=4$ 上に1点 $\mathrm{P}_0(x_0,\ y_0)$ $(y_0>0)$ をとる。P_0 における C の接線と C との共有点のうち，P_0 と異なるものを $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$ とする。また P_1 における C の接線と C との共有点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。

次の問に答えよ。

(1)　P_1，P_2 の座標を y_0 を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の面積を T とし，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ および曲線 C で囲まれた領域の面積を S とする。$\dfrac{T}{S}$ の値を求めよ。

(3)　$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ が直角となるような y_0 の値を求めよ。

(4)　前問(3)で求めた y_0 に対し，$\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の外接円の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法，**数学B**：ベクトル，内積

考え方

面積 S を求める部分の計算は面倒だが，それ以外は難しくない．

【解答】

(1)　$x_0=\dfrac{4}{{y_0}^2}$．$y^2+x2yy'=0$ より，$y'=-\dfrac{y}{2x}$．P_0 における接線の方程式は

$$y=-\frac{y_0}{\frac{8}{{y_0}^2}}\left(x-\frac{4}{{y_0}^2}\right)+y_0=-\frac{{y_0}^3}{8}x+\frac{3}{2}y_0.$$

$xy^2=4$ との交点の y 座標を求める方程式は，$x=\dfrac{4}{y^2}$ から

$$y=-\frac{{y_0}^3}{8}\frac{4}{y^2}+\frac{3}{2}y_0.$$

$$2y^3-3y_0y^2+{y_0}^3=(y-y_0)^2(2y+y_0)=0.$$

$y\neq y_0$ より，$y=y_1=-\dfrac{1}{2}y_0$．同様に $y_2=-\dfrac{1}{2}y_1=\dfrac{1}{4}y_0$．よって，

$$x_1=\frac{4}{{y_1}^2}=\frac{16}{{y_0}^2},\quad x_2=\frac{64}{{y_0}^2}.$$

$$\mathrm{P}_1\left(\frac{16}{{y_0}^2},\ -\frac{y_0}{2}\right),\quad \mathrm{P}_2\left(\frac{64}{{y_0}^2},\ \frac{y_0}{4}\right).$$ …(答)

(2)

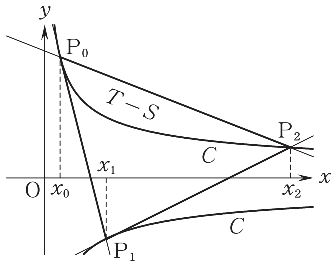
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0}=\left(\frac{4}{{y_0}^2},\ y_0\right)-\left(\frac{16}{{y_0}^2},\ -\frac{y_0}{2}\right)=\left(-\frac{12}{{y_0}^2},\ \frac{3}{2}y_0\right).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\left(\frac{64}{{y_0}^2},\ \frac{y_0}{4}\right)-\left(\frac{16}{{y_0}^2},\ -\frac{y_0}{2}\right)=\left(\frac{48}{{y_0}^2},\ \frac{3}{4}y_0\right).$$

$$T=\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\frac{1}{2}\left|\frac{48}{{y_0}^2}\frac{3}{2}y_0+\frac{12}{{y_0}^2}\frac{3}{4}y_0\right|=\frac{81}{2y_0}.$$

$T-S$ は台形の面積から C と x 軸と $x=x_0$，$x=x_2$ で囲まれた部分の面積を引いたものである．

$$T-S=\frac{1}{2}(y_0+y_2)(x_2-x_0)-\int_{x_0}^{x_2}\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(y_0+\frac{y_0}{4}\right)\left(\frac{64}{{y_0}^2}-\frac{4}{{y_0}^2}\right)-\left[4\sqrt{x}\,\right]_{x_0}^{x_2}$$
$$=\frac{75}{2y_0}-4\sqrt{x_2}+4\sqrt{x_0}$$
$$=\frac{75}{2y_0}-4\sqrt{\frac{64}{{y_0}^2}}+4\sqrt{\frac{4}{{y_0}^2}}=\frac{27}{2y_0}.$$



$$S=T-(T-S)=\frac{54}{2y_0}.$$

よって，

$$\frac{T}{S}=\frac{81}{54}=\frac{3}{2}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　$\angle P_0P_1P_2$ が直角だから，

$$\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=-\frac{12}{{y_0}^2}\frac{48}{{y_0}^2}+\frac{9}{8}{y_0}^2=0.$$

よって，${y_0}^6=2^9$．よって，

$$y_0=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}. \qquad \cdots(答)$$

(4)　$\angle P_0P_1P_2$ が直角だから，P_0P_2 が直径.

$$\overrightarrow{P_0P_2}=\left(\frac{64}{{y_0}^2},\ \frac{y_0}{4}\right)-\left(\frac{4}{{y_0}^2},\ y_0\right)=\left(\frac{60}{{y_0}^2},\ -\frac{3}{4}y_0\right)=\left(\frac{15}{2},\ -\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$
$$|\overrightarrow{P_0P_2}|^2=\frac{225}{4}+\frac{9}{2}=\frac{243}{4}.$$

外接円の面積は

$$\pi\frac{|\overrightarrow{P_0P_2}|^2}{4}=\frac{243}{16}\pi. \qquad \cdots(答)$$

第 2 問

次の問に答えよ。

(1)　実数を成分とする行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $(a^2+b^2\neq 0)$ に対し，

$$B=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$$

とおく。行列 B は

$$B=\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

の形であることを示し，$r+t$，$rt-s^2$ を a，b，c を用いて表せ。

(2)　前問(1)において $r^2+s^2\geqq a^2+b^2$ が成り立つことを示せ。

(3)　実数 a_n，b_n，c_n $(n=0, 1, 2, \cdots)$ を次のように定める。

$n=0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$n \geqq 1$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ -b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

(ア) $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ を示せ。

(イ) $\lim_{n\to\infty} a_n$，$\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

分　野

数学C：行列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

(1)は A と $P^{-1}AP$ は行列式 $a_nc_n-b_n{}^2$，対角和 a_n+c_n が不変であること，(2)は $a_n{}^2+b_n{}^2$ が増加することを示す問題である．

$\dfrac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ が1より小さい正数より小さいことが示せれば，$\lim_{n\to\infty} b_n=0$ となる．

【解答】

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} B&=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ b(a+c) & ac-b^2 \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a^3+2ab^2+b^2c & -b^3+abc \\ -b^3+abc & -ab^2+a^2c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって，行列 B は $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ の形である．

$$r=\frac{a^3+2ab^2+b^2c}{a^2+b^2},\quad s=\frac{-b(b^2-ac)}{a^2+b^2},\quad t=\frac{-a(b^2-ac)}{a^2+b^2} \qquad \cdots①$$

から

$$r+t=\frac{a^3+2ab^2+b^2c-a(b^2-ac)}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2+b^2c+a^2c}{a^2+b^2}=a+c. \qquad \cdots(答)$$

$$\begin{aligned} rt-s^2&=\frac{-a(a^3+2ab^2+b^2c)(b^2-ac)}{(a^2+b^2)^2}-\frac{b^2(b^2-ac)^2}{(a^2+b^2)^2} \\ &=\frac{\{-a(a^3+2ab^2+b^2c)-b^2(b^2-ac)\}(b^2-ac)}{(a^2+b^2)^2}=ac-b^2. \end{aligned} \qquad \cdots(答)$$

(2)

$$\begin{aligned} (r^2+s^2)-(a^2+b^2)&=\frac{(a^3+2ab^2+b^2c)^2+b^2(b^2-ac)^2-(a^2+b^2)^3}{(a^2+b^2)^2} \\ &=\frac{b^2(a^2+b^2)c^2+2a(a^2+b^2)b^2c+(a^2+b^2)(a^4+3a^2b^2+b^4)-(a^2+b^2)^3}{(a^2+b^2)^2} \\ &=\frac{b^2(a+c)^2}{a^2+b^2}\geqq 0. \end{aligned}$$

よって，$r^2+s^2\geqq a^2+b^2$.　（証明終り）

(3)(ア)　(1)より，

$$a_n+c_n=a_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a_0+c_0=3. \qquad \cdots②$$

$$a_nc_n-b_n{}^2=a_{n-1}c_{n-1}-b_{n-1}{}^2=\cdots=a_0c_0-b_0{}^2=1. \qquad \cdots③$$

(2) より，

$$a_n{}^2+b_n{}^2 \geqq a_{n-1}{}^2+b_{n-1}{}^2 \geqq \cdots \geqq a_0{}^2+b_0{}^2=2. \qquad \cdots ④$$

① で $r=a_{n+1}$，$s=b_{n+1}$，$t=c_{n+1}$，$a=a_n$，$b=b_n$，$c=c_n$ とおけるから

$$|b_{n+1}|=\left|-\frac{b_n{}^2-a_nc_n}{a_n{}^2+b_n{}^2}b_n\right|=\frac{1}{a_n{}^2+b_n{}^2}|b_n| \leqq \frac{1}{2}|b_n|.$$

よって，

$$0<|b_n| \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0|=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

ハサミウチの原理から

$$\lim_{n\to\infty}|b_n|=0. \text{ よって } \lim_{n\to\infty}b_n=0.$$ （証明終り）

(イ) ② より，$c_n=3-a_n$，③ より $a_n(3-a_n)-b_n{}^2=1$．$b_n{}^2=-a_n{}^2+3a_n-1$.

よって，解の公式から

$$a_n=\frac{3\pm\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}.$$

④ より，$a_n{}^2+b_n{}^2=3a_n-1 \geqq 2$．$a_n \geqq 1$.

(ア) から，$n \geqq 1$ のとき，$b_n{}^2<1$ だから $5-4b_n{}^2>1$，$\dfrac{3-\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}<1$．よって，

$$a_n=\frac{3+\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\sqrt{5-4b_n{}^2}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(3-a_n)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第3問

N を2以上の自然数とする。$x_1 \leqq \cdots \leqq x_N$ をみたす実数 x_1，…，x_N に対し，実数 k_n，p_n，q_n（$n=0, 1, 2, \cdots$）を次の手続きで定める。

(A)　$k_0=1$，$p_0=x_1$，$q_0=x_N$

(B)　n が奇数のとき，

$$k_n \text{ は } x_i \leqq \frac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2} \text{ をみたす } x_i \text{ の個数,}$$

$$p_n=p_{n-1}, \quad q_n=q_{n-1}$$

(C)　n が偶数（$n \geqq 2$）のとき

$$k_n=k_{n-1},$$

$$p_n=\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_n} x_i, \quad q_n=\frac{1}{N-k_n}\sum_{i=k_n+1}^{N} x_i$$

　ただし $k_n=0$ または $k_n=N$ となったら，その時点で手続きを終了する。

　$x_1<x_N$ であるとき，次の問に答えよ。

(1)　すべての自然数 n について

$$1 \leqq k_n \leqq N-1 \text{ かつ } x_1 \leqq p_n < q_n \leqq x_N$$

が成り立つことを示せ。

(2)　実数 J_n（$n=0, 1, 2, \cdots$）を

$$J_n=\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2+\sum_{j=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2$$

と定めると，すべての自然数 n に対して $J_n \leqq J_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　n が十分に大きいとき，$J_n=J_{n-1}$，$p_n=p_{n-1}$，$q_n=q_{n-1}$，$k_n=k_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

分　野

数学B：数列，数学的帰納法

考え方

題意をしっかり把握すること．(1)の証明は数学的帰納法であるが，奇数のときと，偶数のときに場合分けして帰納してゆくことになる．またそのときにおいても，与条件を1つ1つ確認しながら進めること．

【解答】

(1)　数学的帰納法で証明．証明すべき式を(＊)とおく．

(I)　$n=0$ のとき，(A)から，

$$1 \leqq k_0=1 \leqq N-1, \quad x_1 \leqq p_0=x_1, \quad q_0=x_N \leqq x_N, \quad x_1<x_N$$

より，(＊)をみたす．

(II-a)　$n=2m$ のとき(＊)をみたすとする．すなわち，

$$1 \leqq k_{2m} \leqq N-1, \quad x_1 \leqq p_{2m} < q_{2m} \leqq x_N$$

とする．

(B)から，$p_{2m+1}=p_{2m}$，$q_{2m+1}=q_{2m}$ よって，

$$x_1 \leqq p_{2m+1} < q_{2m+1} \leqq x_N.$$

$$x_1 \leqq p_{2m+1} < \frac{1}{2}(p_{2m+1}+q_{2m+1}) < q_{2m+1} \leqq x_N$$

x_i の個数は N なので，(B)から $0 \leqq k_{2m+1} \leqq N$．$x_1 < \dfrac{p_{2m+1}+q_{2m+1}}{2} < x_N$ だから

$x_i \leqq \dfrac{p_{2m+1}+q_{2m+1}}{2}$ となる x_i の中に x_1 は必ず入り，x_N は必ず入らない．

したがって，$k_{2m+1} \neq 0$，$k_{2m+1} \neq N$．よって，

$$1 \leqq k_{2m+1} \leqq N-1.$$

以上から $n=2m+1$ のとき(*)は成り立つ．

(II-b)　$n=2m-1$ のとき(*)をみたすとする．すなわち，

$$1 \leqq k_{2m-1} \leqq N-1, \quad x_1 \leqq p_{2m-1} < q_{2m-1} \leqq x_N$$

とする．

(C)から，$k_{2m}=k_{2m-1}$．よって，$1 \leqq k_{2m} \leqq N-1$．

また，(C)から，p_{2m} は x_1，x_2，x_3，…，$x_{k_{2m}}$ の平均で，q_{2m} は $x_{k_{2m}+1}$，$x_{k_{2m}+2}$，$x_{k_{2m}+3}$，…，x_N の平均である．よって，

$$x_1 \leqq p_{2m} \leqq x_{k_{2m}} \leqq x_{k_{2m}+1} \leqq q_{2m} \leqq x_N$$

もし，$p_{2m}=q_{2m}$ とすると，$p_{2m}=x_{k_{2m}}=x_{k_{2m}+1}=q_{2m}$ となり，x_1，x_2，x_3，…，$x_{k_{2m}}$ の平均 p_{2m} が最大数 $x_{k_{2m}}$ に等しいから，$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_{k_{2m}}=p_{2m}$ でなければならない．また，同様に，$x_{k_{2m}+1}$，$x_{k_{2m}+2}$，$x_{k_{2m}+3}$，…，x_N の平均 q_{2m} が最小数 $x_{k_{2m}+1}$ に等しいから，
$q_{2m}=x_{k_{2m}+1}=x_{k_{2m}+2}=x_{k_{2m}+3}=\cdots=x_N$ でなければならない．したがって，$x_1=x_N$ となり問題の条件に反する．

よって，

$$x_1 \leqq p_{2m} < q_{2m} \leqq x_N.$$

以上から $n=2m$ のとき(*)は成り立つ．

(I)，(II-a)，(II-b)から(*)はすべての自然数 n について成り立つ．　（証明終り）

(2)
$$J_n=\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2+\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i-q_n)^2+\sum_{i=1}^{k_n}\{(x_i-p_n)^2-(x_i-q_n)^2\}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}(x_i-q_n)^2+\sum_{i=1}^{k_n}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n).$$

(i)　n が偶数のとき，(C)から，$k_{n-1}=k_n$．

$$\sum_{i=1}^{k_n}x_i=k_np_n, \quad \sum_{i=k_n+1}^{N}x_i=(N-k_n)q_n.$$

$$\begin{aligned}
J_{n-1}-J_n&=\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_{n-1})^2+\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_{n-1})^2-\sum_{i=1}^{k_n}(x_i-p_n)^2-\sum_{i=k_n+1}^{N}(x_i-q_n)^2\\
&=\sum_{i=1}^{k_n}(2x_i-p_n-p_{n-1})(p_n-p_{n-1})+\sum_{i=k_n+1}^{N}(2x_i-q_n-q_{n-1})(q_n-q_{n-1})\\
&=2(p_n-p_{n-1})\sum_{i=1}^{k_n}x_i-k_n({p_n}^2-{p_{n-1}}^2)+2(q_n-q_{n-1})\sum_{i=k_n+1}^{N}x_i-(N-k_n)({q_n}^2-{q_{n-1}}^2)\\
&=2k_n(p_n-p_{n-1})p_n-k_n({p_n}^2-{p_{n-1}}^2)+2(N-k_n)(q_n-q_{n-1})q_n-(N-k_n)({q_n}^2-{q_{n-1}}^2)\\
&=k_n({p_n}^2-2p_{n-1}p_n+{p_{n-1}}^2)+(N-k_n)({q_n}^2-2q_nq_{n-1}+{q_{n-1}}^2)\\
&=k_n(p_n-p_{n-1})^2+(N-k_n)(q_n-q_{n-1})^2 \geqq 0.
\end{aligned}$$

よって，$J_{n-1} \geqq J_n$．等号成立条件は $k_n>0$，$N-k_n>0$ より $p_{n-1}=p_n$，$q_{n-1}=q_n$．

(ii)　n が奇数のとき，(B)から，$p_{n-1}=p_n$，$q_{n-1}=q_n$．

$$\begin{aligned}
J_{n-1}-J_n&=\sum_{i=1}^{N}(x_i-q_n)^2+\sum_{i=1}^{k_{n-1}}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n)-\sum_{i=1}^{N}(x_i-q_n)^2-\sum_{i=1}^{k_n}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n)\\
&=\sum_{i=1}^{k_{n-1}}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n)-\sum_{i=1}^{k_n}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n).
\end{aligned}$$

(ii-a)　$k_{n-1}<k_n$ のとき，

$$J_{n-1}-J_n=-\sum_{i=k_{n-1}+1}^{k_n}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n).$$

(B)より，$1 \leqq i \leqq k_n$ では $x_i \leqq \dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}=\dfrac{p_n+q_n}{2}$．また，平均の大小から $p_n<q_n$．

よって，$(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n) \leqq 0$．よって，$J_{n-1} \geqq J_n$．

(ii-b)　$k_{n-1}=k_n$ のときは $J_{n-1}-J_n=0$.

(ii-c)　$k_{n-1}>k_n$ のとき，

$$J_{n-1}-J_n=\sum_{i=k_n+1}^{k_{n-1}}(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n).$$

(B)より，$k_n<i\leqq N$ では $x_i>\dfrac{p_{n-1}+q_{n-1}}{2}=\dfrac{p_n+q_n}{2}$. また，平均の大小から $p_n<q_n$.

よって，$(2x_i-p_n-q_n)(q_n-p_n)>0$. よって，$J_{n-1}>J_n$.

よって，$J_{n-1}\geqq J_n$.

以上より，すべての自然数 n について，$J_n\leqq J_{n-1}$.　（証明終り）

(3)　$1\leqq k_n\leqq N-1$ から k_n のとり得る値の個数は有限個である．またその k_n から p_n，q_n も決まるので，J_n の個数も有限個である．

(2)から $\{J_n\}$ は広義単調減少数列であるから，十分大きな n に対して，J_n は一定値をとる．よって，十分大きな n に対して，$J_n=J_{n-1}$.　（証明終り）

(2)(i)から，n が偶数のとき，$J_n=J_{n-1}$ とすると，$p_n=p_{n-1}$，$q_n=q_{n-1}$.

また，(B)から，$(p_{n-1},\ q_{n-1})=(p_{n-2},\ q_{n-2})$. よって，$(p_n,\ q_n)=(p_{n-1},\ q_{n-1})=(p_{n-2},\ q_{n-2})$.

よって，(B)により $(p_{n-2},\ q_{n-2})$（$n-2$ は偶数）から定まる $k_{n-1}=k_n$ と $(p_n,\ q_n)$ から定まる k_{n+1} は等しい．

(C)から $k_n=k_{n+1}$ であるから，$k_n=k_{n-1}$.

このとき，(B)から，$(p_{n+1},\ q_{n+1})=(p_n,\ q_n)$. また，上から $k_n=k_{n+1}$. (2)（ii −2）から $J_{n+1}=J_n$.

以上から十分大きい n について，

$$J_n=J_{n-1},\quad p_n=p_{n-1},\quad q_n=q_{n-1},\quad k_n=k_{n-1}.$$　（証明終り）

（注）　数列 $\{a_n\}$ において，$n_1<n_2$ が成り立つならば，必ず $a_{n_1}\geqq a_{n_2}$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は広義単調減少数列であるという．

7.2　後期試験数学の廃止（2008 年）

2008 年に東大後期試験の仕組みが改正された．それまで文科は論文Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，理科は総合科目Ⅰ，Ⅱと数学，物理，化学，生物からの選択であったのが，全学（理Ⅲ以外）総合科目Ⅰ，Ⅱ，Ⅲを課す形になった．その結果後期試験の数学はなくなった．

総合科目Ⅱはそれまで理Ⅰのみを対象としてきたため数学と物理の知識を問う問題が主であったが，以後ほとんど数学的テーマの応用問題になった．なお後期試験自体は 2015 年まで実施された．

記憶に残る問題・特徴的な問題（2008〜2014）

2008 年　文科第 3 問は初等幾何的な軌跡の問題でかなりの難問だった．

2009 年　文科第 2 問，理科第 1 問は⑴，⑵は共通で，理科は⑶が付け加わる．⑴，⑵は Fermat の小定理の証明，⑶は ${}_{2m}\mathrm{C}_1$，${}_{2m}\mathrm{C}_2$，…，${}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}$ の最大公約数が 1 または 2 であることの証明．有名ではあるが受験生にとっては難しかったのではないか．

2009 年　理科第 5 問．$0.9999^{100}<0.99<0.9999^{101}$ を証明する問題．

⑴で $(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(-1<x<1,\ x\neq 0)$ を証明する．この証明も簡単ではないが，この結果を上手に利用することがポイント．

2009 年　理科第 6 問．正三角形の 3 頂点から中心方向に向かった 3 つの点が互いに近づくとき，中心から 3 点までの距離の最大値を評価する問題．問題文を理解することから困難さを感じた．重厚長大な問題で，前々年までの後期試験の拾遺問題のようだった．

2010 年　文理第 3 問は⑴，⑵が共通で⑶は理科のみの問題．コインを投げてその結果に従ってボールを 2 つの箱の間で移動する問題．ボールが一方の箱だけに入らないための条件が場合によって変化するところが面白い．

2011 年　文理第 2 問は数列の形で出題されているが，内容的には連分数展開に関する問題．⑴は 2 回で巡回する連分数，⑵は各項が等しくなる連分数．理科のみ⑶があり，有理数は有限回で連分数が終了することの証明が求められている．

2012 年　文科第 3 問，理科第 2 問は共通．確率の問題で，9 個の部屋を移動する球に関する問題．一見複雑そうに見えるが，2 秒ごとに 3 つの部屋のどれかに移動することとを考えれば漸化式が立つ．

2012 年　理科で行列の問題が 2 題出題された．

2013 年　理科第 5 問は与不等式をみたす条件から，3 連続自然数の積で，桁の数字に 1 が 99 個並んだ部分があるものが存在することを証明する問題である．しかし，$A(n)=n(n+1)(n+2)$，$\mathit{\Delta} A=A(n)-A(n-1)$ とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathit{\Delta} A}{A(n)}=0$ だから上位何桁でも任意の数字の列を作ることがが可能なので，誘導に従わない方が容易であった．

2014 年　文科第 4 問，理科第 5 問は漸化式 $a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$ で与えられる a_n を 17 で割った余り b_n に関する問題である．一見平凡に見えるが，$(b_n,\ b_{n+1})\longmapsto(b_{n+1},\ b_{n+2})$ という写像の周期性や可逆性を問うているので，複雑系のセル・オートマトンに関する問題だと思われる．

このころ　あんなこと・こんなこと

リーマンショック（2008 年）．

鳩山由紀夫内閣（2009 年）以後，菅，野田と民主党政権が続くが短命で終る．

東日本大震災（2011 年）．

第 2 次安倍内閣（2012 年）　長期政権になる．

思い出す曲「また君に恋してる」（2009 年）．

2008 年　前期・文科

第 1 問

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ をみたす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$$

が成立しているとする。このとき定積分

$$S=\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分，解と係数の関係

考え方

最初の積分で，α，β の関係を求め，次の積分を α だけで表し，その最大値を求める．

【解答】

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-(\alpha+\beta)\frac{x^2}{2}+\alpha\beta x\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}+2\alpha\beta=1.$$

よって，$\alpha\beta=\dfrac{1}{6}$．$\beta=\dfrac{1}{6\alpha}$ $(\alpha>0)$．

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ より，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{1}{6\alpha}$．よって，$0<\alpha \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$．

このとき，

$$\begin{aligned} S&=\int_{0}^{\alpha}\left\{x^2-\left(\alpha+\frac{1}{6\alpha}\right)x+\frac{1}{6}\right\}dx=\left[\frac{x^3}{3}-\left(\alpha+\frac{1}{6\alpha}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right]_{0}^{\alpha} \\ &=\frac{\alpha^3}{3}-\left(\alpha+\frac{1}{6\alpha}\right)\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha}{6}=-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha}{12}. \end{aligned}$$ …(答)

$0<\alpha \leqq \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ から

$$\frac{dS}{d\alpha}=-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\alpha^2\right) \geqq 0.$$

よって S が最大になるのは $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$．

最大値は

$$S=-\frac{1}{6\times 6\sqrt{6}}+\frac{1}{12\sqrt{6}}=\frac{1}{18\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{108}.$$ …(答)

第２問

白黒２種類のカードがたくさんある。そのうち４枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手持ちの４枚の中から１枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている４枚のカードは，白黒それぞれ２枚であったとする。以下の(1)，(2)に答えよ。

(1)　操作(A)を４回繰り返した後に初めて，４枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，４枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

分　野

数学Ａ：確率

考え方

奇数回の操作の後はいずれかの色のカードを３枚他の色のカードが１枚となっている．偶数回の操作の後まで４枚とも同じ色に１度もならないなら，手元に２色のカードが２枚ずつある．２回の操作で，最初の状態へ戻る確率は一定なので，偶数回の操作の後まで４枚とも同じ色に１度もならない確率は等比数列となる．

【解答】

手持ちのカードの状態は，次の３通りである．

(i)　白黒各２枚，(ii)　３枚が同じ色で他の１枚は別の色，(iii)　４枚とも同じ色．

(i)のとき操作(A)で必ず(ii)になる．

(ii)のとき，操作(A)の結果 $\dfrac{3}{4}$ の確率で(i)となり，$\dfrac{1}{4}$ の確率で(iii)になる．

したがって，２回の操作をセットで考えると，(i)から確率 $\dfrac{3}{4}$ で(ii)に戻り，$\dfrac{1}{4}$ で(iii)となる．

(1)　操作(A)を４回繰り返した後初めて(iii)になる確率は

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　状態(iii)になるのは必ず操作(A)を偶数回繰り返した後である．

よって，n が奇数のとき初めて(iii)になる確率は０.

n が偶数で，$n=2m$ のとき，初めて(iii)になる確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^{m-1}}{4^m}.$$

よって，操作(A)を n 回繰り返した後初めて４枚とも同じ色のカードになる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数のとき}), \\ \dfrac{3^{\frac{n}{2}-1}}{4^{\frac{n}{2}}} & (n\text{ が偶数のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(答)$$

第3問

座標平面上の3点 A$(1,\ 0)$, B$(-1,\ 0)$, C$(0,\ -1)$ に対し,

$$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}$$

をみたす点Pの軌跡を求めよ。ただし $\mathrm{P}\neq\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。

分　野

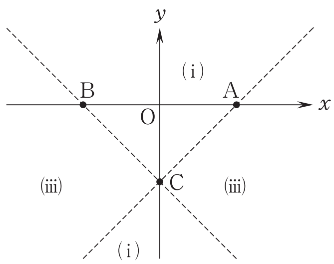
数学Ⅱ：軌跡，**数学A**：平面図形，**数学Ⅰ**：三角比

考え方

$\angle$APC と $\angle$BPC がPCの同じ側にある場合と，反対側にある場合がある．また△APC，△BPC において，AC$=$BC，PC が共通，$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}$ から，$\triangle \mathrm{APC}\equiv\triangle \mathrm{BPC}$ とは限らないが，$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PBC}$ または $\angle \mathrm{PAC}+\angle \mathrm{PBC}=\pi$ である．それぞれについて，軌跡を考える．

【解答】

$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}=\theta$ とおく．直線AC，BCのどちら側にPがあるかについて場合分けする．



破線上が(ii)

(i)　Pが $y>x-1$，$y>-x-1$ または $y<x-1$，$y<-x-1$ にあるとき，CPについてA，Bは反対側にある．

三角形APC，三角形BPCについて正弦定理を用いて，

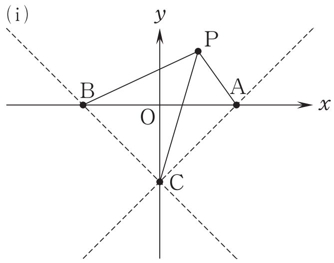
$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{PC}}{\sin\angle \mathrm{PAC}},\quad \frac{\mathrm{BC}}{\sin\theta}=\frac{\mathrm{PC}}{\sin\angle \mathrm{PBC}}.$$

$\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ から，$\sin\angle \mathrm{PAC}=\sin\angle \mathrm{PBC}$.

よって，$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PBC}$ または $\angle \mathrm{PAC}+\angle \mathrm{PBC}=\pi$.

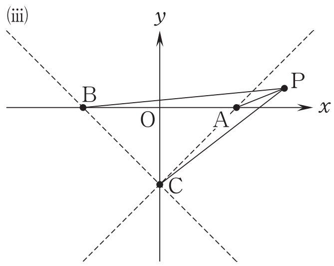
$\angle \mathrm{PAC}=\angle \mathrm{PBC}$ のとき，$\triangle \mathrm{PAC}\equiv\triangle \mathrm{PBC}$（2角と1辺が等しい）．よって，Pは$y$軸上の点C以外を動く．またこのとき，$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}$ を確かにみたす．

$\angle \mathrm{PAC}+\angle \mathrm{PBC}=\pi$ のとき，Pは三角形ABCの外接円周上で，A，B，C以外を動く．またこのとき，$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}$ を確かにみたす．



(ii)　Pが $y=x-1$ または $y=-x-1$ 上で，A，B，C以外にあるとき，$\angle$APC，$\angle$BPCの一方は0で他方は0でないから与式が成り立つことはない．

(iii)　Pが $y>x-1$，$y<-x-1$ または $y<x-1$，$y>-x-1$ にあるとき，A，BはPCについて同じ側にある．したがって，$\angle \mathrm{APC}=\angle \mathrm{BPC}$ のときA，B，Pは一直線上になければならない．よって，Pはx軸上にある．

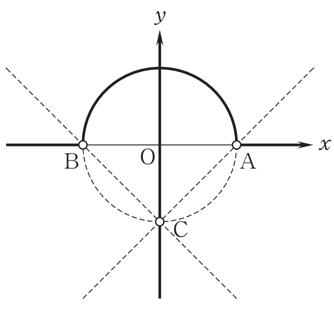


以上より，点Pの軌跡は，

$$x=0\ (y\neq-1),\quad x^2+y^2=1\ (y>0),\quad y=0\ (x<-1,\ x>1).$$

…(答)

図示すると下図太線部．白丸は除く．



【別解 1】 tan の加法定理

計算で求めるなら，tan の加法定理を使うことが考えられる．

AP，BP，CP と x 軸正方向のなす角を α，β，γ， P の座標を $(x,\ y)$ とおく．

$x \neq 0$，± 1 のとき，傾き $\tan\alpha = \dfrac{y}{x-1}$，$\tan\beta = \dfrac{y}{x+1}$，$\tan\gamma = \dfrac{y+1}{x}$ から，

$|\tan(\alpha-\gamma)| = |\tan(\beta-\gamma)|$ を $(x,\ y)$ の方程式として求める．PC に対して PA，PB がどちら側にあるかで場合分けをする．

(i) $y > x-1$，$y > -x-1$ または $y < x-1$，$y < -x-1$ のとき，$\tan(\beta-\gamma) = -\tan(\alpha-\gamma)$．

$$\frac{\dfrac{y}{x+1} - \dfrac{y+1}{x}}{1 + \dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y+1}{x}} = -\frac{\dfrac{y}{x-1} - \dfrac{y+1}{x}}{1 + \dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y+1}{x}}.$$

これを整理すると

$$x(x^2 + y^2 - 1) = 0.$$

(ii) $y > x-1$，$y < -x-1$ または $y < x-1$，$y > -x-1$ のとき，$\tan(\beta-\gamma) = \tan(\alpha-\gamma)$．

$$\frac{\dfrac{y}{x+1} - \dfrac{y+1}{x}}{1 + \dfrac{y}{x+1}\cdot\dfrac{y+1}{x}} = \frac{\dfrac{y}{x-1} - \dfrac{y+1}{x}}{1 + \dfrac{y}{x-1}\cdot\dfrac{y+1}{x}}.$$

これを整理すると

$$y\{x^2 + (y+1)^2\} = 0.$$

P $\neq$ C だから $(x,\ y) \neq (0,\ -1)$．よって，$y = 0$．

（$y = \pm x - 1$ の場合については**【解答】**と同様に存在しない）

$x = 0$，± 1 のときも含めて，求める軌跡は，

$$\begin{cases} x = 0 & (y \neq -1), \\ x^2 + y^2 = 1 & (y > 0), \\ y = 0 & (x < -1,\ x > 1). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

図省略．

【別解 2】 初等幾何

(i) PC について，A，B が同じ側にあるとき，

A $\neq$ B だから，∠APC＝∠BPC ならば，A，B，P は一直線上にあり，P は線分 AB の外分点．よって，P は x 軸上の $x < -1$，$x > 1$ の範囲を動く．またこのとき，∠APC＝∠BPC はみたされる．

(ii) PC について，A，B が反対側にあるとき，

PC について，B を線対称移動した点を B′ とすると，∠APC＝∠B′PC であるから，A，B′，P は一直線上にある．

AC＝B′C であるから，B′ は C を中心として，A を通る円と直線 PA の交点である．したがって，B′＝A または，三角形 CAB′ は二等辺三角形をなす．

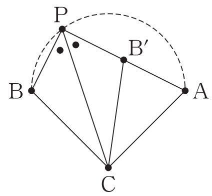
(ii-a) B′＝A のとき，B は PC について，A＝B′ の対称点．

よって，AP＝BP よって，P の軌跡は AB の垂直二等分線すなわち y 軸．ただし，題意より，C は除かれる．

このとき，∠APC＝∠BPC はみたされる．

(ii-b)　三角形 CAB′ が二等辺三角形のとき，

$$\angle \mathrm{CAB'}=\angle \mathrm{CB'A}.\ よって,\ \angle \mathrm{PAC}+\angle \mathrm{PB'C}=\pi.$$



ただし，B′ は半直線 PA 上になければならないから CP>CA でなければならない．

$$\angle \mathrm{PAC}+\angle \mathrm{PBC}=\pi$$

であるから，四角形 PACB は円に内接する．

したがって，P は三角形 ABC の外接円上の C を含まない弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$（両端を除く）上を動く．

したがって，P は $x^2+y^2=1$，$y>0$ を動く．

このとき，∠APC＝∠BPC はみたされる．

以上より，

$$y=0\ (x<-1,\ 1<x),\quad x=0\ (x\neq -1),\quad x^2+y^2=1\ (y>0). \quad \cdots(答)$$

図省略.

【別解 3】　ベクトル

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-1,\ y),\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x+1,\ y),\quad \overrightarrow{\mathrm{CP}}=(x,\ y+1).$$

∠APC＝∠BPC より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{CP}}|}.$$

よって，

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}})|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}})|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|.$$

$$\{(x-1)x+y(y+1)\}\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\{(x+1)x+y(y+1)\}\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

両辺の符号を考えると，

$$\{(x-1)x+y(y+1)\}\{(x+1)x+y(y+1)\}$$
$$=\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right\}\geqq 0 \quad \cdots①$$

かつ，

$$\{(x-1)x+y(y+1)\}^2\{(x+1)^2+y^2\}=\{(x+1)x+y(y+1)\}^2\{(x-1)^2+y^2\}.$$
$$(x^2+y^2+y-x)^2(x^2+y^2+1+2x)=(x^2+y^2+y+x)^2(x^2+y^2+1-2x).$$
$$\{(x^2+y^2+y)^2+x^2-2x(x^2+y^2+y)\}(x^2+y^2+1+2x)=\{(x^2+y^2+y)^2+x^2+2x(x^2+y^2+y)\}(x^2+y^2+1-2x).$$
$$-x(x^2+y^2+y)(x^2+y^2+1)+x\{(x^2+y^2+y)^2+x^2\}=0.$$
$$-x\{(x^2+y^2)^2+(y+1)(x^2+y^2)+y\}+x\{(x^2+y^2)^2+2y(x^2+y^2)+y^2+x^2\}=0.$$
$$xy(x^2+y^2-1)=0. \quad \cdots②$$

①，② をみたすうち，A，B，C を除いた部分が求めるもの．　…(答)

図省略.

【別解 4】　余弦定理

AP＝a，BP＝b，CP＝c とおき，cos∠APC＝cos∠BPC を余弦定理で表すと，AC＝BC＝$\sqrt{2}$ だから

$$\frac{a^2+c^2-2}{2ac}=\frac{b^2+c^2-2}{2bc}.$$

よって，

$$(a-b)(c^2-ab-2)=0.$$

よって，$a=b$ または $c^2-ab-2=0$.

(i)　$a=b$ のとき，つまり AP＝BP のとき，P の軌跡は線分 AB の垂直二等分線．つまり y 軸．ただし，C は除く．

(ii) $c^2-ab-2=0$ のとき，P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，

$$x^2+(y+1)^2-\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}-2=0.$$

$$x^2+(y+1)^2-2=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}.$$

よって，$x^2+(y+1)^2-2\geqq 0$ かつ，

$$\{x^2+(y+1)^2-2\}^2=\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}.$$

$$(x^2+y^2+2y-1)^2=(x^2+y^2+1)^2-4x^2.$$

$$y(x^2+y^2-1)=0.$$

よって，($y=0$ または $x^2+y^2=1$) かつ $x^2+(y+1)^2\geqq 2$.

以上をまとめると**【解答】**のようになる.

図省略.

第 4 問

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1=p,\quad b_1=p+1 \\ a_{n+1}=a_n+pb_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \\ b_{n+1}=pa_n+(p+1)b_n & (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n-\frac{n(n-1)}{2}p^2-np,\quad b_n-n(n-1)p^2-np-1$$

(2) p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。

分　野

数学B：数列，漸化式，**数学 I**：整数

考え方

$A_n=a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np$，$B_n=b_n-n(n-1)p^2-np-1$ などとおき，割り切れるかどうか数学的帰納法で調べる.

【解答】

(1) $A_n=a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np$，$B_n=b_n-n(n-1)p^2-np-1$ とおく.

a_n，b_n，A_n，B_n が整数であることは帰納的に明らか.

与漸化式から

$$\begin{cases} a_{n+1}-\dfrac{(n+1)n}{2}p^2-(n+1)p \\ \quad =a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np+p\{b_n-n(n-1)p^2-np-1\}+n(n-1)p^3, \\ b_{n+1}-(n+1)np^2-(n+1)p-1 \\ \quad =p\left\{a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np\right\}+(p+1)\{b_n-n(n-1)p^2-np-1\}+\dfrac{3}{2}n(n-1)p^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{n+1}=A_n+pB_n+n(n-1)p^3, \\ B_{n+1}=pA_n+(p+1)B_n+3\cdot\dfrac{1}{2}n(n-1)p^3. \end{cases} \qquad \cdots①$$

$$A_1=p-0p-p=0,\quad B_1=p+1-0p^2-p-1=0.$$

よって，$n=1$ のとき，A_1，B_1 ともに p^3 で割り切れる．

また ① より，A_k，B_k がともに p^3 で割り切れるなら A_{k+1}，B_{k+1} も p^3 で割り切れる．

数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して

$$A_n=a_n-\frac{n(n-1)}{2}p^2-np,\quad B_n=b_n-n(n-1)p^2-np-1$$

は p^3 で割り切れる．　（証明終り）

(2)　$A_p=a_p-\dfrac{p(p-1)}{2}p^2-p^2$ が p^3 で割り切れるから，$a_p-A_p=\dfrac{p(p-1)}{2}p^2+p^2$ が p^2 で割り切れるが，p^3 で割り切れないことを示せばよい．

$\dfrac{p(p-1)}{2}p^2+p^2=\left\{\dfrac{p(p-1)}{2}+1\right\}p^2$ は $\dfrac{p(p-1)}{2}$ が整数であることから a_p-A_p は p^2 で割り切れる．

また，p^3 で割り切れるとすると，$\dfrac{p(p-1)}{2p}+\dfrac{1}{p}=\dfrac{p-1}{2}+\dfrac{1}{p}$ が整数でなければならないが，p は3以上の奇数であるから，$\dfrac{p-1}{2}$ は整数で，$\dfrac{1}{p}$ は0と1の間にあり，整数ではありえない．

よって，p^3 では割り切れない．

以上により，$\dfrac{p(p-1)}{2}p^2+p^2$ は p^2 で割り切れるが，p^3 で割り切れない．

したがって，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 で割り切れない．　（証明終り）

2008年　前期・理科

第1問

座標平面の点 $(x,\ y)$ を $(3x+y,\ -2x)$ へ移す移動 f を考え，点 P が移る行き先を $f(\mathrm{P})$ と表す。f を用いて直線 $l_0,\ l_1,\ l_2,\ \cdots$ を以下のように定める。

・l_0 は直線 $3x+2y=1$ である。

・点 P が l_n 上を動くとき，$f(\mathrm{P})$ が描く直線を l_{n+1} とする $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$。

以下 l_n を1次式を用いて $a_nx+b_ny=1$ と表す。

(1)　$a_{n+1},\ b_{n+1}$ を $a_n,\ b_n$ で表せ。

(2)　不等式 $a_nx+b_ny>1$ が定める領域を D_n とする。$D_0,\ D_1,\ D_2,\ \cdots$ すべてに含まれるような点の範囲を図示せよ。

分　野

数学C：一次変換，**数学B**：数列，**数学Ⅱ**：不等式と領域，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

(1)は直線の移動の基本的な問題である．

(2)ではその直線を境界とした領域の共通部分が問われている．これらの領域は原点の反対側ととらえる．直線は定点を通過する．共通部分の境界まで注意する．

【解答】

(1)　P の座標を $(s,\ t)$，$f(\mathrm{P})$ の座標を $(X,\ Y)$ とおく．

(i)　$b_n\neq 0$ のとき，$l_n：y=-\dfrac{a_n}{b_n}x+\dfrac{1}{b_n}$.

l_n 上の点 $\mathrm{P}\left(s,\ -\dfrac{a_n}{b_n}s+\dfrac{1}{b_n}\right)$ の移る行き先

$$f(\mathrm{P})=\left(3s-\frac{a_n}{b_n}s+\frac{1}{b_n},\ -2s\right)=\left(\frac{3b_n-a_n}{b_n}s+\frac{1}{b_n},\ -2s\right).$$

$X=\dfrac{3b_n-a_n}{b_n}s+\dfrac{1}{b_n}$，$Y=-2s$ から s を消去．

$$X=-\frac{3b_n-a_n}{2b_n}Y+\frac{1}{b_n}.\quad b_nX+\left(-\frac{a_n}{2}+\frac{3}{2}b_n\right)Y=1.$$

Y はすべての実数をとって変化するから，

$$l_{n+1}：b_nx+\frac{3b_n-a_n}{2}y=1.$$

(ii)　$b_n=0$ のとき，l_n が直線だから $a_n\neq 0$.

$l_n：x=\dfrac{1}{a_n}$. l_n 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a_n},\ t\right)$ の移る行き先 $f(\mathrm{P})=\left(\dfrac{3}{a_n}+t,\ -\dfrac{2}{a_n}\right)$.

X はすべての実数をとって変化するから，

$$l_{n+1}：y=-\frac{2}{a_n}.\quad -\frac{a_n}{2}y=1.$$

まとめて，

$$l_{n+1}：b_nx+\left(-\frac{a_n}{2}+\frac{3}{2}b_n\right)y=1.$$

よって，

$$a_{n+1}=b_n,\quad b_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n.\qquad\cdots(答)$$

(2) $a_0=3$，$b_0=2$ である．よって，$b_1=\dfrac{3}{2}$.

$a_n=b_{n-1}$ より

$$b_{n+1}-\frac{3}{2}b_n+\frac{1}{2}b_{n-1}=0.$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(b_n-b_{n-1}).\quad b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=b_n-\frac{1}{2}b_{n-1}.$$

$$b_{n+1}-b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n(b_1-b_0)=-\frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=b_1-\frac{1}{2}b_0=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}.\quad b_n=1+\frac{1}{2^n}.$$

$$a_n=b_{n-1}=1+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

領域 D_n の境界は直線 l_n.

$$l_n:\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)x+\left(1+\frac{1}{2^n}\right)y=1.\quad l_n:x+y-1+\frac{1}{2^n}(2x+y)=0.$$

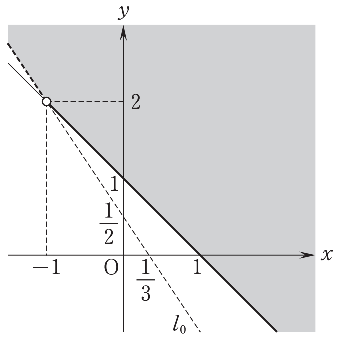
よって，l_n は $(-1,\ 2)$ を通る直線であり，y 切片 $y_n=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2^n}}$ は $y_0=\dfrac{1}{2}$ から単調に増加し，

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=1$ である．

領域 D_n は l_n について原点と反対側．よって，D_0，D_1，D_2，… すべてに含まれる領域は

$$3x+2y>1,\quad x+y\geqq 1.$$

図示すると下図斜線部．境界は太実線部を含み，網掛部と白丸は除く．



…(答)

第2問

白黒2種類のカードがたくさんある。そのうちk枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手持ちのk枚の中から1枚を，等確率$\dfrac{1}{k}$で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1)　最初に白2枚，黒2枚，合計4枚のカードをもっているとき，操作(A)をn回繰り返した後に初めて，4枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　最初に白3枚，黒3枚，合計6枚のカードをもっているとき，操作(A)をn回繰り返した後に初めて，6枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

分　野

数学A：確率

考え方

(1)では偶数回の操作の後まで4枚とも同じ色に1度もならないなら，手元に2色のカードが2枚ずつある．2回の操作で，最初の状態へ戻る確率は一定なので，偶数回の操作の後まで4枚とも同じ色に1度もならない確率は等比数列となる．

(2)では奇数回の操作の後まで6枚とも同じ色に1度もならないなら，手元に2色のカードが4枚と2枚ある．2回の操作で，最初の状態または4枚と2枚が逆の状態へ戻る確率は一定なので，奇数回の操作の後まで6枚とも同じ色に1度もならない確率は等比数列となる．

【解答】

(1)　手持ちのカードの状態は，次の3通りである．

(i)　白黒各2枚，(ii)　3枚が同じ色で他の1枚は別の色，(iii)　4枚とも同じ色．

(i)のとき操作(A)で必ず(ii)になる．

(ii)のとき，操作(A)の結果$\dfrac{3}{4}$の確率で(i)となり，$\dfrac{1}{4}$の確率で(iii)になる．

したがって，2回の操作をセットで考えると，(i)から確率$\dfrac{3}{4}$で(i)に戻り，$\dfrac{1}{4}$で(iii)となる．

状態(iii)になるのは必ず操作(A)を偶数回繰り返した後である．

よって，nが奇数のとき初めて(iii)になる確率は0.

nが偶数で，$n=2m$ のとき，初めて(iii)になる確率は

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3^{m-1}}{4^m}.$$

よって，操作(A)をn回繰り返した後初めて4枚とも同じ色のカードになる確率は

$$\begin{cases} 0 & (n\text{ が奇数のとき}), \\ \dfrac{3^{\frac{n}{2}-1}}{4^{\frac{n}{2}}} & (n\text{ が偶数のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　手持ちのカードの状態は，次の4通りである．

(a)　白黒各3枚，(b)　4枚が同じ色で他の2枚は別の色，

(c)　5枚が同じ色で他の1枚は別の色，(d)　6枚とも同じ色．

(a)のとき操作(A)で必ず(b)になる．

(b)のとき，操作(A)の結果$\dfrac{2}{3}$の確率で(a)となり，$\dfrac{1}{3}$の確率で(c)になる．

(c) のとき，操作 (A) の結果 $\frac{5}{6}$ の確率で (b) となり，$\frac{1}{6}$ の確率で (d) になる．

1 回目の操作 (A) の後は必ず (b) になる．

ここから，2 回の操作をセットで考えると，(b) から確率 $\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{17}{18}$ で (b) に戻り，$\frac{1}{18}$ で (d) となる．

状態 (d) になるのは必ず操作 (A) を奇数回繰り返した後である．

よって，n が偶数のとき初めて (d) になる確率は 0.

n が奇数で，$n=2m+1$ ($m\geqq 1$) のとき，初めて (d) になる確率は

$$\left(\frac{17}{18}\right)^{m-1}\cdot\frac{1}{18}=\frac{17^{m-1}}{18^m}.$$

よって，操作 (A) を n 回繰り返した後初めて 6 枚とも同じ色のカードになる確率は

$$\begin{cases}\dfrac{17^{\frac{n-3}{2}}}{18^{\frac{n-1}{2}}} & (n\text{ が 3 以上の奇数のとき}),\\ 0 & (n\text{ が偶数または 1 のとき}).\end{cases}\qquad \cdots(\text{答})$$

第 3 問

(1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。G_1，G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部を含むものとし，各辺の長さは 1 とする。

分　野

数学 B：ベクトル，空間図形，**数学 II**：整式の積分，**数学 III**：体積

考え方

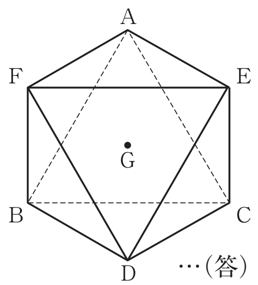
底面に平行な断面をとって考える．断面は六角形で回転軸との交点を中心とする円に内接する．その円が回転体の断面積である．

【解答】

(1) 上底面の正三角形および下底面の正三角形は平行で，それを垂直上方から見るからこの 2 面はもとの正三角形と合同に見える．

線分 G_1G_2 の中点を G とすると，線分 G_1G_2 は底面に垂直で，G は正八面体の相対する頂点を結ぶ線分の中点．

よって，この八面体を真上から見た図は G を中心とする正六角形になる．図示すると右図．



…(答)

(2) G_1 を原点，$G_2(0,\ 0,\ h)$ ($h>0$) とおく．1 辺の長さが 1 の正三角形の重心と頂点の距離は $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

下底面の三角形の頂点を $A\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$，$B\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}},\ 0\right)$，$C\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}},\ 0\right)$ とおき，上底面の三角形の頂点を $D\left(0,\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ h\right)$，$E\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ h\right)$，$F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\sqrt{3}},\ h\right)$ とおく．

$\mathrm{AF}=\mathrm{BF}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=\mathrm{CE}=\mathrm{AE}=1$ より，$h=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

平面 $z=t\ \left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ による正八面体の断面は六角形.

AF，BF，BD，CD，CE，AE との交点を P，Q，R，S，T，U とおくと，

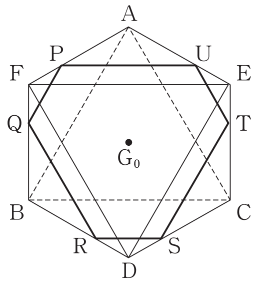
$$\mathrm{P}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{t}{2\sqrt{2}},\ t\right),\quad \mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),$$

$$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t,\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{t}{2\sqrt{2}},\ t\right),\quad \mathrm{S}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t,\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{t}{2\sqrt{2}},\ t\right),$$

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\quad \mathrm{U}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}t,\ \frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{t}{2\sqrt{2}},\ t\right).$$

線分 $\mathrm{G_1G_2}$ と平面 $z=t$ の交点 $\mathrm{G_0}(0,\ 0,\ t)$ と P，Q，R，S，T，U の距離はすべて等しく，

$$\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{6}}+\frac{t^2}{2}}.$$



求める体積は

$$\int_0^h \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{6}}+\frac{t^2}{2}\right)dt=\pi\left(\frac{h}{3}-\frac{h^2}{2\sqrt{6}}+\frac{h^3}{6}\right)$$

$$=\frac{5}{9\sqrt{6}}\pi=\frac{5\sqrt{6}}{54}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

第4問

放物線 $y=x^2$ 上に2点 P，Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

分 野

数学Ⅱ：軌跡，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

P，Q の x 座標をそれぞれ p，q とおくと，中点の座標は p，q の対称式で表される．これを使って，M の軌跡が求められる．軌跡の y 座標を x 座標の関数として考えるとき，L によってその増減が変る．

【解答】

(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく．中点 M の座標は $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$.

PQ の傾きは，$m=\dfrac{p^2-q^2}{p-q}=p+q$．M の y 座標は $h=\dfrac{p^2+q^2}{2}$.

$$pq=\frac{(p+q)^2-(p^2+q^2)}{2}=\frac{m^2-2h}{2}.$$

$$\begin{aligned}L^2&=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}=\{(p+q)^2-4pq\}\{1+(p+q)^2\}\\&=\{m^2-2(m^2-2h)\}(1+m^2)=(4h-m^2)(1+m^2).\end{aligned}$$

よって，

$$h=\frac{m^2}{4}+\frac{L^2}{4(m^2+1)}. \qquad \cdots(答)$$

(2) $t=m^2$ とおき，$h=f(t)$ とおくと，$t\geqq 0$，

$$f(t)=\frac{t}{4}+\frac{L^2}{4(t+1)}. \quad f'(t)=\frac{1}{4}-\frac{L^2}{4(t+1)^2}=\frac{(t+1+L)(t+1-L)}{4(t+1)^2}.$$

(i) $0<L\leqq 1$，$t\geqq 0$ のとき常に $f'(t)\geqq 0$.

よって，$f(t)$ の最小値は $f(0)=\dfrac{L^2}{4}$.

(ii) $L>1$ のとき，

t	0	$\cdots$	$L-1$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

よって，$f(t)$ の最小値は $f(L-1)=\dfrac{L-1}{4}+\dfrac{L^2}{4L}=\dfrac{2L-1}{4}$.

以上より，h の最小値は $\begin{cases}\dfrac{L^2}{4} & (0<L\leqq 1 \text{ のとき}),\\[2mm] \dfrac{2L-1}{4} & (L>1 \text{ のとき}).\end{cases}$ $\cdots$(答)

第5問

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{ 個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば $\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが 3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。

分　野

数学B：数列，**数学 I**：整数

考え方

$\boxed{n}$ は等比数列の和であり，$\boxed{3^{m+1}}$ は $\boxed{3^m}$ で割り切れる.

n を 27 で割った余りが b のとき，$\boxed{n}$ を $\boxed{27}$ で割った余りも $\boxed{b}$ である.

これらのことを利用する.

【解答】

(1) 数学的帰納法で証明する.

(I) $m=0$ のとき，$\boxed{3^0}=\boxed{1}=\dfrac{10^1-1}{9}=1$ は $3^0=1$ で割り切れるが $3^1=3$ では割り切れない.

(II) $m=k$ のとき，$\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが 3^{k+1} では割り切れないとする.

$$\boxed{3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9}=\frac{(10^{3^k})^3-1}{9}=\frac{10^{3^k}-1}{9}\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}$$

$$=\boxed{3^k}(1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{ 個}}1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{ 個}}1).$$

$\boxed{3^k}$ は 3^k で割り切れるが 3^{k+1} では割り切れない．

また，$1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{個}}1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{個}}1$ は各桁の数の和は 3 だから 3 で割り切れるが，9 では割り切れない．

以上より，$\boxed{3^{k+1}}=\boxed{3^k}(1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{個}}1\overbrace{000\cdots0}^{3^k-1\text{個}}1)$ は 3^{k+1} で割り切れるが，3^{k+2} では割り切れない．

(I)，(II) から m が 0 以上の整数のとき，$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れない．

（証明終り）

(2) n が 27 で割り切れるとき，$n=27a$（a は自然数）とおく．

$$\boxed{n}=\frac{10^{27a}-1}{9}=\frac{10^{27}-1}{9}\{(10^{27})^{a-1}+(10^{27})^{a-2}+(10^{27})^{a-3}+\cdots+(10^{27})+1\}.$$

$\dfrac{10^{27}-1}{9}=\boxed{27}=\boxed{3^3}$ は (1) より，$3^3=27$ で割り切れる．よって，$\boxed{n}$ は 27 で割り切れる．

次に $\boxed{n}$ が 27 で割り切れるとする．n を 27 で割った商を a，余りを b とすると，$n=27a+b$（a，b は負でない整数，$0\leqq b\leqq 26$）．

$$\boxed{n}=\frac{10^{27a+b}-1}{9}=\frac{10^{27a+b}-10^b+10^b-1}{9}=\frac{10^{27a}-1}{9}\cdot 10^b+\frac{10^b-1}{9}=10^b\boxed{27a}+\boxed{b}.$$

第 1 項は 27 で割り切れる．したがって，$\boxed{b}$ は 27 で割り切れる．

$0\leqq b\leqq 26$．$b>0$ のとき，$\boxed{b}=\overbrace{111\cdots1}^{b\text{個}}$ の各桁の和は b．

これが 27 で割り切れるなら，b は 9 で割り切れなければならない．

$b\neq 0$ のとき，$b=9$ または $b=18$．

$b=9$ のとき，(1) より，$\boxed{9}$ は 27 で割り切れない．

$b=18$ のとき，$\boxed{18}=\overbrace{111\cdots1}^{18\text{個}}=\boxed{9}(1\overbrace{000\cdots0}^{8\text{個}}1)$．

$1\overbrace{000\cdots0}^{8\text{個}}1$ は各桁の和が 2 だから 3 で割り切れない．したがって，$\boxed{18}$ は 27 で割り切れない．

よって，$b=9$，18 のとき，$\boxed{n}$ は 27 で割り切れない．つまり $b\neq 0$ のとき $\boxed{n}$ は 27 で割り切れない．

よって，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるためには n は 27 で割り切れなければならない．

以上より，n が 27 で割り切れることは $\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件である．（証明終り）

第 6 問

座標平面において，媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x=\cos 2t \\ y=t\sin t \end{cases} \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

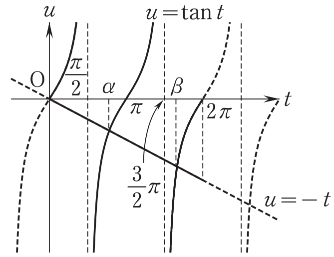
考え方

x，y の t による増減を考え，曲線の概形をとらえる．

同じ x 座標をとる t を使って積分する．

【解答】

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t.$$



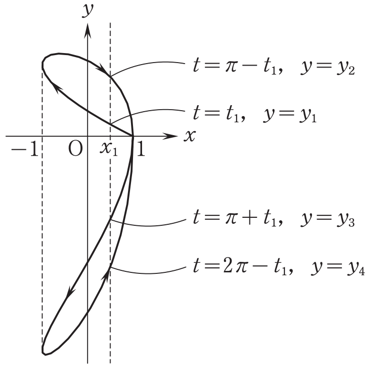
$\dfrac{dx}{dt}=0$ となる t は 0，$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$，2π.

$\dfrac{dy}{dt}=0$ のとき，$\tan t=-t$.

$0<t\leqq 2\pi$ の範囲で $\tan t=-t$ をみたす t は 2 つある．その 2 つの t を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$ の範囲にある.

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
x	1	↘	-1	↗		↗	1	↘	-1	↗		↗	1
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗		↘	0	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↘		↗	0
$(x,\ y)$	$(1,\ 0)$	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	↓	↘	→	↗	↑

図示すると右図.



$-1\leqq x_1\leqq 1$ をみたす x_1 に対して，$x_1=\cos 2t_1$ $\left(0\leqq t_1\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたす t_1 をとると，$\cos 2t=x_1$ となる t は t_1，$\pi-t_1$，$\pi+t_1$，$2\pi-t_1$ である．したがって，この曲線と直線 $x=x_1$ の交点の y 座標は

$t_1\sin t_1$，$(\pi-t_1)\sin t_1$，$-(\pi+t_1)\sin t_1$，$-(2\pi-t_1)\sin t_1$

である．これらを順に y_1，y_2，y_3，y_4 とおくと，その大小は

$$y_4=-(2\pi-t_1)\sin t_1<y_3=-(\pi+t_1)\sin t_1<0,$$
$$0<y_1=t_1\sin t_1<y_2=(\pi-t_1)\sin t_1$$

である.

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1}\{(y_2-y_1)+(y_3-y_4)\}\,dx\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\{(\pi-t)\sin t-t\sin t-(\pi+t)\sin t+(2\pi-t)\sin t\}(-2\sin 2t)\,dt\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2t)\sin^2 t\cos t\,dt.\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \sin^2 t\cos t\,dt=\frac{\sin^3 t}{3}+C$ より，

$$\begin{aligned}S&=8\left[(\pi-2t)\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t}{3}\,dt=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt\\&=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\sin t\,dt=\frac{16}{3}\left[-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{9}.\end{aligned}$$

…(答)

2009 年　前期・文科

第 1 問

座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし，b は正の実数とする。

(1)　a，b を t を用いて表せ。また，t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，b の最大値を求めよ。

分　野

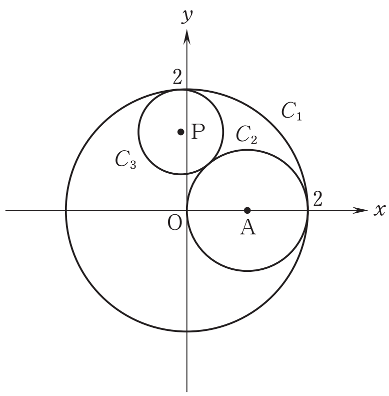
数学 II：図形と方程式

考え方

外接条件，内接条件は中心間距離と 2 円の半径の和，差によって決まる．b は t によって表される．t のとり得る値の範囲に注意.

【解答】

原点を O，点 $(1,\ 0)$ を A，点 $(a,\ b)$ を P とおく．



(1)　$\mathrm{OP}+t=2$，$\mathrm{AP}-t=1$ だから，

$$a^2+b^2=(2-t)^2,\quad (a-1)^2+b^2=(t+1)^2.$$

よって

$$a^2-(a-1)^2=(2-t)^2-(t+1)^2.$$

$$2a-1=-6t+3.\quad a=-3t+2.$$

$$b^2=(2-t)^2-(-3t+2)^2=-8t^2+8t.$$

よって，

$$a=-3t+2,\quad b=\sqrt{-8t^2+8t}.\qquad \cdots(答)$$

b は正の実数であるから $-8t^2+8t>0$．よって，

$$0<t<1.\qquad \cdots(答)$$

(2)　$b^2=-8\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+2.$

よって，$0<b\leqq\sqrt{2}$.

よって，b の最大値は $\sqrt{2}$.　$\cdots$(答)

(注)　$\mathrm{OP}+\mathrm{AP}$ は常に 3 だから，P の軌跡は O，A を焦点とし，長軸の長さが 3 の楕円の上半分

楕円の中心は OA の中点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半長軸の長さは $\dfrac{\mathrm{OP}+\mathrm{PA}}{2}=\dfrac{3}{2}$，中心と焦点の距離は $\dfrac{1}{2}$，半短軸の長さは $\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}$.

P の軌跡の方程式と不等式は

$$\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}+\frac{y^2}{2}=1\quad (y>0).$$

第2問

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$${}_m\mathrm{C}_1,\quad {}_m\mathrm{C}_2,\quad \cdots,\quad {}_m\mathrm{C}_{m-1}$$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m=m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，k^m-k が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

分　野

数学A：二項係数，**数学 I**：整数，**数学B**：数学的帰納法

考え方

p が素数なら $q!$ $(q<p)$ は p で割り切れない．

また $(k+1)^m-(k+1)-(k^m-k)=(k+1)^m-k^m-1$ は ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ で表されることを利用．

【解答】

(1)　$m=2$ のときは，ただ1つの二項係数 ${}_2\mathrm{C}_1=2$ だけを考えればよいから明らかに正しい．以下，$m \geqq 3$ のときについて考える．

${}_m\mathrm{C}_1=m$ なので，他の ${}_m\mathrm{C}_k$ $(2 \leqq k \leqq m-1)$ がすべて m の倍数であることを示せばよい．

$${}_m\mathrm{C}_k=\frac{m}{k}\cdot\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-k+1)}{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots 1}=\frac{m}{k}\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

より，$k\cdot{}_m\mathrm{C}_k=m\cdot{}_{m-1}\mathrm{C}_{k-1}$ となるから，$k\cdot{}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数である．

いま，m は素数，$2 \leqq k \leqq m-1$ であるから，k は m と互いに素である．

よって，${}_m\mathrm{C}_k$ は m の倍数となる．（証明終り）

(2)(I)　$k=1$ のときは，$k^m-k=1^m-1=0$ であるから，明らかに d_m で割り切れる．

(II)　k $(\geqq 1)$ に対して，k^m-k が d_m で割り切れると仮定する．

二項定理によって，

$$\begin{aligned}(k+1)^m-(k+1)&=1+({}_m\mathrm{C}_1k+{}_m\mathrm{C}_2k^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}k^{m-1})+k^m-k-1\\&=(k^m-k)+({}_m\mathrm{C}_1k+{}_m\mathrm{C}_2k^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}k^{m-1})\end{aligned}$$

となるが，k^m-k は帰納法の仮定によって d_m で割り切れる．

また，d_m が ${}_m\mathrm{C}_j$ $(1 \leqq j \leqq m-1)$ の最大公約数ということから，${}_m\mathrm{C}_2k+{}_m\mathrm{C}_2k^2+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}k^{m-1}$ も d_m で割り切れる．

したがって，$(k+1)^m-(k+1)$ も d_m で割り切れる．

以上から数学的帰納法により，すべての自然数 k に対して k^m-k は d_m で割り切れる．（証明終り）

第3問

スイッチを1回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が1個，等確率$\dfrac{1}{4}$で出てくる機械がある。2つの箱LとRを用意する。次の3種類の操作を考える。

(A)　1回スイッチを押し，出てきた玉をLに入れる。

(B)　1回スイッチを押し，出てきた玉をRに入れる。

(C)　1回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，Lになければその玉をLに入れ，Lにあればその玉をRに入れる。

(1)　LとRは空であるとする。操作(A)を5回おこない，さらに操作(B)を5回おこなう。このときLにもRにも4色すべての玉が入っている確率P_1を求めよ。

(2)　LとRは空であるとする。操作(C)を5回おこなう。このときLに4色すべての玉が入っている確率P_2を求めよ。

(3)　LとRは空であるとする。操作(C)を10回おこなう。このときLにもRにも4色すべての玉が入っている確率をP_3とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$を求めよ。

分　野

数学A：確率

考え方

求める確率を次のように読み替える．

(1)は5回の試行で4色の玉がそれぞれ少なくとも1回出る確率の2乗．

(2)は5回の試行で4色の玉がそれぞれ少なくとも1回出る確率．

(3)は10回の試行で4色の玉がそれぞれ少なくとも2回出る確率．

【解答】

(1)　箱Lに4色すべての玉が入っているのは，5回の操作(A)において，ある色の玉2回，他の3色の玉が1回ずつ出るときである．

2回出る玉の色は赤，青，黄，白の4通りあるから，箱Lに4色すべての玉が入っている確率は

$$4\times\frac{5!}{2!1!1!1!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=4\times\frac{15}{4^4}.$$

また，箱Rに4色すべての玉が入っている確率は箱Lに4色すべての玉が入っている確率に等しいから，求める確率は，

$$P_1=\left\{4\times\frac{15}{4^4}\right\}^2=\frac{15^2}{4^6}=\frac{225}{4096}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　操作(C)を5回行い，すべての玉が少なくとも1回出る確率が求めるもの．これは，操作(A)を5回行った場合，すべての玉が少なくとも1回出る確率に等しい．

$$P_2=4\times\frac{15}{4^4}=\frac{15}{64}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(3)　(C)を10回行い，すべての玉が少なくとも2回出る確率が求めるもの．

考えられる場合は，次の(i)，(ii)である．

(i)　ある色が4回出て，他が2回ずつ出る場合．

例えば赤が4回，他の色が2回ずつ出る確率は，

$$\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

他の色が4回出る場合も等しいから，ある色が4回出て，他が2回ずつ出る確率は，

$$4\times\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

(ii) 2 色が 3 回ずつ出て，残り 2 色が 2 回ずつ出る場合.

例えば赤，青が 3 回出て，黄，白が 2 回出る確率は

$$\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

3 回出る玉の種類は ${}_4C_2=6$ 通りあるから，2 色が 3 回ずつ出て，残り 2 色が 2 回ずつ出る確率は，

$$6\times\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}.$$

したがって，

$$P_3=4\times\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}+6\times\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{3\times 10!}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

よって，

$$\frac{P_3}{P_1}=\frac{3\times 10!}{48}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\cdot\frac{4^6}{15^2}=\frac{63}{16}.$$ …(答)

第4問

2次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し

$$S=\int_0^2 |f'(x)|\,dx$$

を考える。

(1) $f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2) $f(0)=0$，$f(2)=2$ をみたしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

分野

数学II：整式の微分，整式の積分

考え方

丹念に場合分けして積分する．また，最小値は相加平均・相乗平均の関係を利用する．

【解答】

(1) $f'(x)=2ax+b$．$f(0)=0$ より，$c=0$．$f(2)=2$ より，$4a+2b=2$．よって，$b=1-2a$．

また，$f'(x)=2ax+1-2a$ より，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ となる x は $x=1-\dfrac{1}{2a}$．

(i) $a=0$ のとき，$f'(x)=1$．

$$S=\int_0^2 1\,dx=2.$$

(ii) $a>0$ のとき，$1-\dfrac{1}{2a}<1$．

(ii-a) $1-\dfrac{1}{2a}\leqq 0$ のとき，すなわち，$0<a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき．

$$S=\int_0^2 (2ax+1-2a)\,dx=2.$$

(ii-b) $0<1-\dfrac{1}{2a}<1$ のとき，すなわち，$a>\dfrac{1}{2}$ のとき．

$$S=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}(2ax+1-2a)\,dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2(2ax+1-2a)\,dx=\frac{(2a-1)^2}{4a}+\frac{(2a+1)^2}{4a}=\frac{4a^2+1}{2a}.$$

(iii) $a<0$ のとき，$1<1-\dfrac{1}{2a}$．

(iii-a) $1<1-\dfrac{1}{2a}<2$ のとき，すなわち，$a<-\dfrac{1}{2}$ のとき．

$$S=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}(2ax+1-2a)\,dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2(2ax+1-2a)\,dx=-\frac{(2a-1)^2}{4a}-\frac{(2a+1)^2}{4a}=-\frac{4a^2+1}{2a}.$$

(iii-b) $1-\dfrac{1}{2a}\geqq 2$ のとき，すなわち，$-\dfrac{1}{2}\leqq a<0$ のとき．

$$S=\int_0^2 (2ax+1-2a)\,dx=2.$$

以上より，

$$S=\begin{cases} 2 & \left(-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}\right), \\ \dfrac{4a^2+1}{2a} & \left(a>\dfrac{1}{2}\right), \\ -\dfrac{4a^2+1}{2a} & \left(a<-\dfrac{1}{2}\right). \end{cases}$$ …(答)

(2) $\dfrac{4a^2+1}{2a}\left(a>\dfrac{1}{2}\right)$ と $-\dfrac{4a^2+1}{2a}\left(a<-\dfrac{1}{2}\right)$ は $\dfrac{4a^2+1}{2|a|}\left(|a|>\dfrac{1}{2}\right)$ とまとめられ，相加平均・相乗平均の関係から

$$2|a|+\frac{1}{2|a|}\geqq 2.$$

$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$S=2$ であることも含めて，S の最小値は 2. …(答)

（注） $f'(x)=2a(x-1)+1$ だから，$y=f'(x)$ のグラフは直線で，点 $(1,\ 1)$ を通る．$-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$\displaystyle\int_0^2|f'(x)|\,dx$ は $\dfrac{1}{2}\{(\text{上底})+(\text{下底})\}=1$，高さ 2 の台形の面積だから常に 2.

任意の a に対して $\displaystyle\int_0^2 f'(x)\,dx=2$ で，$|a|>\dfrac{1}{2}$ のとき $f'(x)<0$ になる部分が存在するから，$\displaystyle\int_0^2|f'(x)|\,dx>2$ となる．

2009 年　前期・理科

第 1 問

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数

$$ {}_mC_1,\quad {}_mC_2,\quad \cdots,\quad {}_mC_{m-1} $$

を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m=m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，k^m-k が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。

分　野

数学 A：二項係数，**数学 I**：整数

考え方

(1) は p が素数なら $q!$ $(q<p)$ は p で割り切れない.

(2) は $(k+1)^m-(k+1)-(k^m-k)=(k+1)^m-k^m-1$ は ${}_mC_1$，${}_mC_2$，$\cdots$，${}_mC_{m-1}$ で表されることを利用.

(3) は $k=d_m-1$ とおくことがポイント.

【解答】

(1)　$m=2$ のときは，ただ一つの二項係数 ${}_2C_1=2$ だけを考えればよいから，明らかに正しい．以下，$m\geqq 3$ のときを考える.

${}_mC_1=m$ なので，他の ${}_mC_k$ $(2\leqq k\leqq m-1)$ がすべて m の倍数であることを示せばよい.

$$ {}_mC_k=\frac{m}{k}\cdot\frac{(m-1)(m-2)(m-3)\cdots(m-k+1)}{(k-1)(k-2)(k-3)\cdots 1}=\frac{m}{k}\cdot{}_{m-1}C_{k-1} $$

より，$k\cdot{}_mC_k=m\cdot{}_{m-1}C_{k-1}$ となるから，$k\cdot{}_mC_k$ は m の倍数である.

いま，m は素数，$2\leqq k\leqq m-1$ であるから，k は m と互いに素である.

よって，${}_mC_k$ は m の倍数となる.　（証明終り）

(2)(I)　$k=1$ のときは，$k^m-k=1^m-1=0$ であるから，明らかに d_m で割り切れる.

(II)　k $(\geqq 1)$ に対して，k^m-k が d_m で割り切れると仮定する.

二項定理によって，

$$ \begin{aligned}(k+1)^m-(k+1)&=1+({}_mC_1k+{}_mC_2k^2+\cdots+{}_mC_{m-1}k^{m-1})+k^m-k-1\\ &=(k^m-k)+({}_mC_1k+{}_mC_2k^2+\cdots+{}_mC_{m-1}k^{m-1})\end{aligned} $$

となるが，k^m-k は帰納法の仮定によって d_m で割り切れる.

また，d_m が ${}_mC_j$ $(1\leqq j\leqq m-1)$ の最大公約数ということから，${}_mC_1k+{}_mC_2k^2+\cdots+{}_mC_{m-1}k^{m-1}$ も d_m で割り切れる.

したがって，$(k+1)^m-(k+1)$ も d_m で割り切れる.

以上から数学的帰納法により，すべての自然数 k に対して k^m-k は d_m で割り切れる.（証明終り）

(3)　(2) において $k=d_m-1$ とおけば，$(d_m-1)^m-(d_m-1)$ は d_m で割り切れる.（(注) (2) は $k=0$ でも成り立つから，$d_m=1$ の場合も結果は正しい.）

一方，二項定理で展開すれば，m が偶数であることから

$$ \begin{aligned}(d_m-1)^m-(d_m-1)&=(d_m{}^m-{}_mC_1d_m{}^{m-1}+{}_mC_2d_m{}^{m-2}+\cdots-{}_mC_{m-1}d_m+1)-(d_m-1)\\ &=(d_m\text{の倍数})+2\end{aligned} $$

となるから，2 が d_m で割り切れることになる．よって，d_m は 2 の約数なので，$d_m=1$ または $d_m=2$ である．（証明終り）

(3) の【別解】

m は偶数なので $m=2n$（n は自然数）とおける．

二項定理より，

$$(1+1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}.$$
$$(1-1)^{2n}={}_{2n}\mathrm{C}_0-{}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_2-\cdots-{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n}.$$

辺々を引いて 2 で割れば，

$$2^{2n-1}={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+{}_{2n}\mathrm{C}_5+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}$$

となる．右辺は d_{2n} で割り切れるから，左辺の 2^{2n-1} も d_{2n} で割り切れる．

よって，d_{2n} は 2^{2n-1} の約数であり，d_{2n} に含まれる素因数は（あるとしても）2 のみである．

一方，(2) において $k=2$ とすれば，$2^{2^n}-2$ は d_{2n} で割り切れる．つまり，d_{2n} は

$$2^{2^n}-2=2(2^{2^n-1}-1)=2\times(\text{奇数})$$

の約数である．よって，d_{2n} に含まれる素因数 2 の個数は高々 1 個である．したがって，$d_{2n}=1$ または $d_{2n}=2$ である．（証明終り）

（注）$d_m=2$ となるのは $m=2^n$（n は自然数）のときのみである．

第 2 問

実数を成分にもつ行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と実数 r，s が下の条件 (i)，(ii)，(iii) をみたすとする。

(i) $s>1$

(ii) $A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$

(iii) $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0$

このとき以下の問に答えよ。

(1) $B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を a，c，r，s を用いて表せ。

(2) $B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}w_n=0$ を示せ。

(3) $c=0$ かつ $|a|<1$ を示せ。

分　野

数学C：行列，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

B は容易に求められる．

z_n，w_n が x_n，y_n の 1 次結合で表せれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}w_n=0$ は導かれる．

$s>1$ だから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s^n=\infty$ となることと，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}z_n=0$ となることから a，c が制約される．

【解答】

(1) $A\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$ だから

$$ar+b=sr,\quad cr+d=s.$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ar+b \\ c & cr+d \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & sr \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-rc & 0 \\ c & s \end{pmatrix}.$$ …(答)

(2) $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ から，

$$\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}=B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}A^n\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_n-ry_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

よって，

$$z_n=x_n-ry_n,\quad w_n=y_n.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ から

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-ry_n)=0.\quad \lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$ （証明終り）

(3) $a-rc=\alpha$ とおくと，$B=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ c & s \end{pmatrix}$.

帰納的に

$$B^n=\begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ w_n & s^n \end{pmatrix}\quad （ただし，w_n=c(\alpha^{n-1}+s\alpha^{n-2}+s^2\alpha^{n-3}+\cdots+s^{n-1})）.$$

$$\left(\begin{array}{l} \because\quad B^{l+1}=B^lB=\begin{pmatrix} \alpha^l & 0 \\ w_l & s^l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ c & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha^{l+1} & 0 \\ w_l\alpha+s^lc & s^{l+1} \end{pmatrix}, \\ \qquad w_l\alpha+s^lc=c(\alpha^{l-1}+s\alpha^{l-2}+s^2\alpha^{l-3}+\cdots+s^{l-1})\alpha+s^lc=w_{l+1}. \end{array}\right)$$

$z_n=\alpha^n$ とすれば，$B^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_n \\ w_n \end{pmatrix}$ をみたす.

$c\neq 0$ とすると，$s>1$ より

$$\lim_{n\to\infty}w_n=\lim_{n\to\infty}cs^{n-1}\left\{1+\frac{\alpha}{s}+\left(\frac{\alpha}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\alpha}{s}\right)^{n-1}\right\}=\pm\infty$$

となり，(2)に矛盾する．よって，$c=0$. （証明終り）

よって，$\alpha=a$. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$ から $|a|<1$. （証明終り）

第3問

（文科　第3問と同じ）

第 4 問

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\},$$
$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の回りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\lim\limits_{a\to\infty} V(a)$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，関数の極限

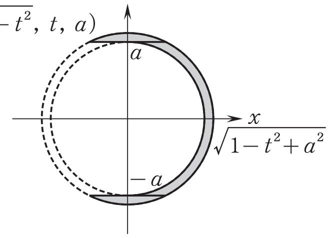
考え方

(1) は結局 1 回転したときの体積の半分であり一定である．

(2) は $V(a)-W(a)=U(a)$ の極限が 0 であることを示すことになる．$U(a)$ を求めることもできるが，適当に評価ができればよい．

【解答】

(1) 平面 $y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切った回転体の断面は右図，網掛け部．



外側の円の半径は $\sqrt{1-t^2+a^2}$ で内側の円の半径は a である．

断面の $x\geqq 0$ の部分の面積は

$$\frac{\pi}{2}\{(1-t^2+a^2)-a^2\}=\frac{\pi}{2}(1-t^2).$$

求める体積は

$$W(a)=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}(1-t^2)\,dt=\pi\int_{0}^{1}(1-t^2)\,dt=\pi\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $x<0$ の部分の断面積を $S(t)$ とする．

$x<0$ の 2 つの部分のそれぞれの面積は，それに外接する長方形の面積より小さいから，

$$S(t)<2\sqrt{1-t^2}\left(\sqrt{1-t^2+a^2}-a\right)<2\left(\sqrt{1+a^2}-a\right)=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}+a}<\frac{1}{a}.$$

よって $x<0$ の部分の体積を $U(a)$ とすると，

$$U(a)=\int_{-1}^{1}S(a)\,dt<\frac{2}{a}.$$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{2}{a}=0$$

だから

$$\lim_{a\to\infty}U(a)=0.$$

$$V(a)=W(a)+U(a)$$

だから，

$$\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{a\to\infty}(W(a)+U(a))=\frac{2}{3}\pi. \qquad \cdots(\text{答})$$

(注) $x<0$ の 2 つの部分をつなぐと，半径 $\sqrt{1+a^2}$ の球面を中心から a の距離にある平面で切った立体のうち小さい方に一致させられる．その体積は

$$U(a)=\pi\int_a^{\sqrt{a^2+1}}(a^2+1-t^2)\,dt=\pi\left[(a^2+1)t-\frac{t^3}{3}\right]_a^{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=\pi\left\{\frac{2}{3}\sqrt{a^2+1}^{\,3}-(a^2+1)a+\frac{a^3}{3}\right\}=\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{a^2+1}^{\,3}-\frac{2}{3}a^3-a\right)$$
$$=\pi\frac{\left\{2\sqrt{a^2+1}^{\,3}\right\}^2-(2a^3+3a)^2}{3\left(2\sqrt{a^2+1}^{\,3}+2a^3+3a\right)}=\pi\frac{3a^2+4}{3\left(2\sqrt{a^2+1}^{\,3}+2a^3+3a\right)}$$
$$=\pi\frac{\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{a^3}}{3\left(2\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}^{\,3}+2+\dfrac{3}{a^2}\right)}\xrightarrow{a\to\infty}0.$$

第 5 問

(1) 実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ をみたすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

分　野

数学Ⅲ：微分法，**数学Ⅱ**：対数不等式

考え方

(1) は対数の差をとって，微分して比較する．分数形が出てくるが，分子の正負を考える．

(2) は $x=\pm 0.01$ とおき，$0.99\times 1.01=0.9999$ を利用する．

【解答】

(1) $f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ $(-1<x<1,\ x\neq 0)$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\log(1-x)=\frac{\log(1+x)}{x}-(1-x)\frac{\log(1-x)}{-x}.$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log(1+x)}{x}-(1-x)\frac{\log(1-x)}{-x}\right)=1-1=0.$$

$g(x)=\begin{cases}xf(x) & (x\neq 0),\\ 0 & (x=0)\end{cases}$ とすると，$-1<x<1$ で $g(x)$ は連続．

$$g(x)=\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)$$

だから，2 回微分可能．

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)-1.$$

$$g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}=\frac{(1+x)^2-(1-x)}{(1+x)^2(1-x)}=\frac{(x+3)x}{(1+x)^2(1-x)}.$$

$-1<x<1$ の範囲で $g''(x)$ は $x=0$ のとき 0 で，$x>0$ のとき正で，$x<0$ のとき負．

$g'(0)=0$ だから，$g'(x)$ は $x\neq 0$ のとき正．

$g(x)$ は単調増加で，$g(0)=0$ だから，$g(x)$ は $x>0$ のとき正で，$x<0$ のとき負．

よって，$x\neq 0$ のとき $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ は正.

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ だから，

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}. \qquad \text{（証明終り）}$$

(2) (1)で $x=-0.01$ とおくと

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=(1.01)^{101},\quad (1+x)^{\frac{1}{x}}=0.99^{-100}.$$

よって，

$$(1.01)^{101}<0.99^{-100}.$$

両辺を 0.99^{101} 倍すると，

$$(1.01\times 0.99)^{101}=0.9999^{101}<0.99.$$

(1)で $x=0.01$ とおくと，

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=(0.99)^{-99},\quad (1+x)^{\frac{1}{x}}=1.01^{100}.$$

よって，

$$(0.99)^{-99}<1.01^{100}.$$

両辺を 0.99^{100} 倍すると，

$$0.99<(1.01\times 0.99)^{100}=0.9999^{100}.$$

よって，

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}. \qquad \text{（証明終り）}$$

第6問

平面上の2点P，Qの距離を$d(\mathrm{P},\mathrm{Q})$と表すことにする。平面上に点Oを中心とする一辺の長さが1000の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に3点$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$を，$d(\mathrm{A}_n,\mathrm{B}_n)=1$ $(n=1,2,3)$ となるようにとる。また，

$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\quad \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\quad \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\quad \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\quad \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,2,3$ のそれぞれに対して，時刻0にA_nを出発し，$\overrightarrow{e_n}$の向きに速さ1で直進する点を考え，時刻tにおけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1) ある時刻tで $d(\mathrm{P_1}(t),\mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル$\overrightarrow{a_1}$とのなす角度をθとおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度θ_1，θ_2，θ_3を $\theta_1=\angle \mathrm{B_1A_1A_2}$，$\theta_2=\angle \mathrm{B_2A_2A_3}$，$\theta_3=\angle \mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。αを $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ をみたす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲をαを用いて表せ。

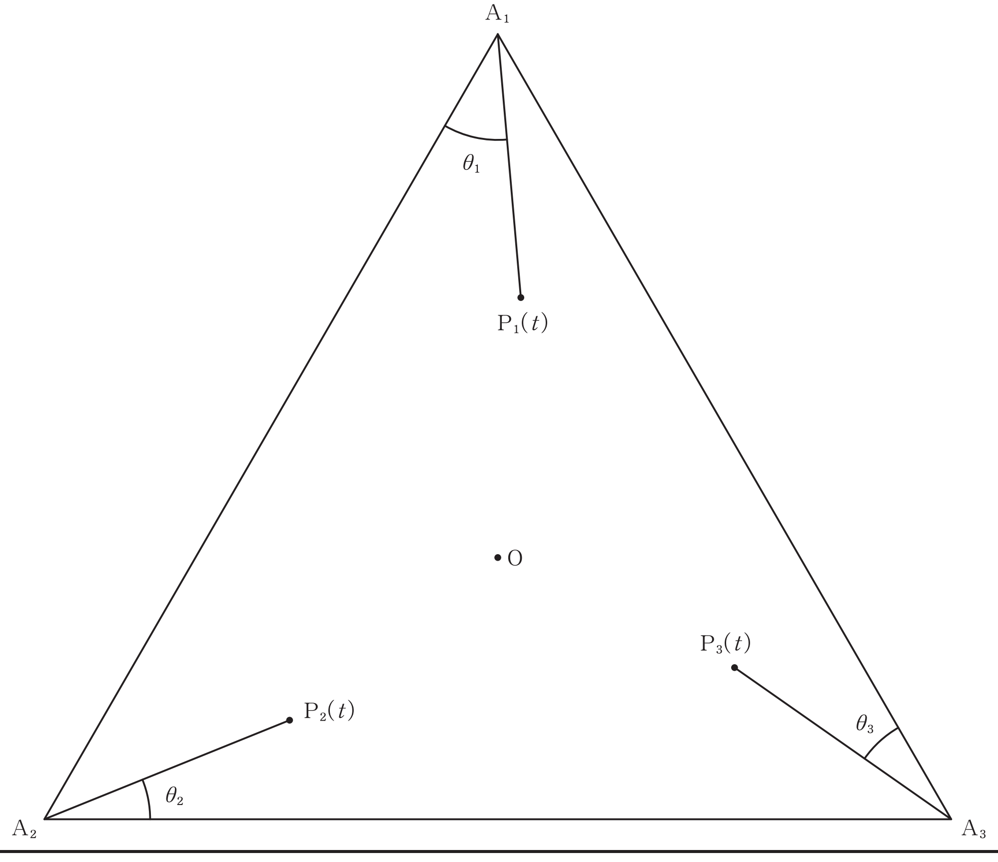
(3) 時刻t_1，t_2，t_3のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\quad d(\mathrm{P_3}(t_2),\mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\quad d(\mathrm{P_1}(t_3),\mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\mathrm{O})\leqq 3,\quad d(\mathrm{P_2}(T),\mathrm{O})\leqq 3,\quad d(\mathrm{P_3}(T),\mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。



分　野

数学B：ベクトル，内積，**数学A**：平面図形，**数学Ⅱ**：三角関数，和積公式

考え方

問題文が長いので，題意を把握するのに時間を要する．あちこちの角度を考えて，与条件を考える．

1つ1つ十分に意味を考えながら，α を使って評価をしてゆく．

1辺の長さが1000で点間の距離が1位のことを扱っているから，問題で問われている $\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はほぼ正三角形の中心Oの近くにあると考えてよい．

したがって，θ_i はほぼ $\dfrac{\pi}{6}$ であり，$d(\mathrm{A}_i,\ \mathrm{P}_i)$ はほぼ $d(\mathrm{A}_i,\ \mathrm{O})=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ と等しいと考えてよい．

【解答】

(1)　A_1 を始点として考える．時刻 t において，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1P_1}}=t\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{\mathrm{A_1P_2}}=\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2}.$$
$$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}=\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}).$$

$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ のなす角が θ だから

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|^2&=|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})|^2=|\overrightarrow{a_1}|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})+t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\\&=|\overrightarrow{a_1}|^2-2t|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\cos\theta+t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\\&=(|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|t-|\overrightarrow{a_1}|\cos\theta)^2+|\overrightarrow{a_1}|^2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|$ の最小値は，$|\overrightarrow{a_1}|\sin\theta=1000|\sin\theta|$.

$d(\mathrm{P}_1(t),\ \mathrm{P}_2(t))\leqq 1$ となる時刻 t が存在するためには $|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}|$ の最小値が1以下であることが必要十分．よって，

$$1000|\sin\theta|\leqq 1.\quad |\sin\theta|\leqq\frac{1}{1000}.$$
（証明終り）

(2)　$\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{e_1}$ のなす角は θ_1．$\overrightarrow{a_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ のなす角は $\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)$.

また，$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ のなす角は $\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta_1-\theta_2\right)$.

$\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})=|\overrightarrow{a_1}|\left\{\cos\theta_1+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)\right\}=|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\cos\theta$ より，

$$\cos\theta_1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta_2\right)=\sqrt{2+2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta_1-\theta_2\right)}\cos\theta.$$
$$2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\cos\theta.$$

$0<\theta_1<\dfrac{\pi}{3}$，$0<\theta_2<\dfrac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)>0$．$|\sin\theta|\leqq\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ より，

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)=\cos\theta\geqq\cos\alpha.$$

よって，

$$-\alpha\leqq\frac{\pi}{6}-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\leqq\alpha.$$
$$\frac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\frac{\pi}{3}+2\alpha.$$
…(答)

(3)　$d(\mathrm{P}_2(t_1),\ \mathrm{P}_3(t_1))\leqq 1$，$d(\mathrm{P}_3(t_2),\ \mathrm{P}_1(t_2))\leqq 1$，$d(\mathrm{P}_1(t_3),\ \mathrm{P}_2(t_3))\leqq 1$ と(2)より，

$$-2\alpha\leqq\theta_2+\theta_3-\frac{\pi}{3}\leqq 2\alpha,\quad -2\alpha\leqq\theta_3+\theta_1-\frac{\pi}{3}\leqq 2\alpha,\quad -2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2-\frac{\pi}{3}\leqq 2\alpha.$$

$$
\begin{array}{rrl}
 & -2\alpha \leqq & -\theta_2-\theta_3+\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\alpha \\
 & -2\alpha \leqq & \theta_3+\theta_1-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\alpha \\
+) & -2\alpha \leqq & \theta_1+\theta_2-\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\alpha \\
\hline
 & -6\alpha \leqq & 2\theta_1-\dfrac{\pi}{3} \leqq 6\alpha
\end{array}
$$

よって，

$$\left|2\theta_1-\frac{\pi}{3}\right| \leqq 6\alpha. \qquad \cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1O}}|=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}=a$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1O}}\cdot\overrightarrow{a_1}=\frac{3}{2}a^2, \quad \overrightarrow{\mathrm{A_1O}}\cdot\overrightarrow{e_1}=a\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{6}\right).$$

時刻 t において

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{A_1P_1}}-\overrightarrow{\mathrm{A_1O}}|^2=|t\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{\mathrm{A_1O}}|^2=t^2-2a\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{6}\right)t+a^2.$$

$t=a$ とすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|^2=2a^2\left\{1-\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=2^2a^2\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{\pi}{12}\right).$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|=\left|2a\sin\left(\frac{\theta_1}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right|.$$

一方，① より，$\left|\dfrac{\theta_1}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right| \leqq \dfrac{3}{2}\alpha$ だから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}| \leqq 2a\sin\frac{3}{2}\alpha.$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ だから，

$$
\begin{aligned}
3\sin\alpha-2\sin\frac{3}{2}\alpha &= 6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-2\left(3\sin\frac{\alpha}{2}-4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(3\cos\frac{\alpha}{2}-3+4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-4\cos^2\frac{\alpha}{2}+3\cos\frac{\alpha}{2}+1\right) \\
&= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+4\cos\frac{\alpha}{2}\right)>0.
\end{aligned}
$$

よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}| \leqq 2a\sin\frac{3}{2}\alpha<3a\sin\alpha=\frac{3a}{1000}=\sqrt{3}<3.$$

したがって，$T=a=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ ととれば，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}|<3$ となり，同様に，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}|<3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP_3}}|<3$ すなわち

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})<3, \quad d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})<3, \quad d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})<3$$

となり，題意は示された．　　　　（証明終り）

2010 年　前期・文科

第 1 問

O を原点とする座標平面上に点 A$(-3,\ 0)$ をとり，$0° < \theta < 120°$ の範囲にある θ に対して，次の条件 (i)，(ii) をみたす 2 点 B，C を考える。

(i)　B は $y>0$ の部分にあり，$\mathrm{OB}=2$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=180°-\theta$ である。

(ii)　C は $y<0$ の部分にあり，$\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{BOC}=120°$ である。

ただし，△ABC は O を含むものとする。

以下の問 (1)，(2) に答えよ。

(1)　△OAB と △OAC の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0°<\theta<120°$ の範囲で動かすとき，△OAB と △OAC の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：三角関数，合成公式，**数学Ⅰ**：三角比

考え方

△OAB と △OAC の面積を θ で表せればよいが，初等幾何的にも扱える．

【解答】

$\angle\mathrm{AOB}=180°-\theta$ で，A は x 軸負方向にあるから，OB と x 軸正方向のなす角は θ．点 B と x 軸の距離は $\mathrm{OB}\sin\theta=2\sin\theta$，

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot 2\sin\theta=3\sin\theta.$$

O は三角形 ABC の内部にあるから，C は OB について A と反対側にある．OC と x 軸正方向のなす角は負方向に $120°-\theta$．点 C と x 軸の距離は $\mathrm{OC}\sin(120°-\theta)=\sin(120°-\theta)$．

$$\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\sin(120°-\theta)=\frac{3}{2}\sin(120°-\theta)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta.$$

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAC}$ のとき，

$$3\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\frac{3}{4}\sin\theta.\quad \frac{9}{4}\sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta.$$

よって，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．　$\therefore\quad \theta=30°$．　…(答)

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}=3\sin\theta+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta+\dfrac{3}{4}\sin\theta=\dfrac{3}{4}(5\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)$．

これを S として，合成すると，

$$S=\frac{3}{4}\sqrt{28}\sin(\theta+\alpha)=\frac{3}{2}\sqrt{7}\sin(\theta+\alpha).$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ とする．

△OAB と △OAC の面積の和の最大値は $\dfrac{3}{2}\sqrt{7}$．　…(答)

そのとき，$\theta+\alpha=90°$ だから，

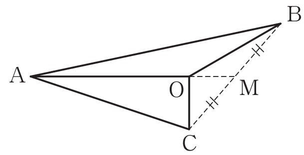
$$\sin\theta=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5}{14}\sqrt{7}.$$　…(答)

【別解】

三角形 OBC の形は不変.

(1) 辺 BC の中点を M とすると，△OAB＝△OAC のとき，M は直線 OA，つまり，x 軸上にある．このときの θ は ∠BOM.

$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot1\cdot\cos120^\circ=-1$.



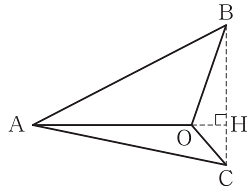
$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot2\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OB}||2\overrightarrow{OM}|}=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2}}$$

$$=\frac{2^2-1}{2\sqrt{2^2-2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$0<\theta<120^\circ$ から，$\theta=30^\circ$. …(答)

(2) O から BC に下した垂線の足を H とすると，△OAB＋△OAC が最大になるとき，BC⊥OA すなわち，H は x 軸上にあり，$\theta=\angle$BOH.



$\mathrm{BC}=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2}=\sqrt{7}$.

$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OC}\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OH}$ から，$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

このとき，

$$\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{BC}=\frac{3}{2}\sqrt{7}.$$ …(答)

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{OB}}=\frac{\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{OH}^2}}{\mathrm{OB}}=\frac{\sqrt{2^2-\frac{3}{7}}}{2}=\frac{5}{14}\sqrt{7}.$$ …(答)

第 2 問

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して

$$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$$

が x についての恒等式になるような定数 a，b，c の組をすべて求めよ。

分 野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分

考え方

そのまま積分して係数を比較すればよい.

【解答】

$$f(x+1)=x^2+(a+2)x+a+b+1.$$
$$f'(x)=2x+a.$$

$$c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt = c\int_0^1 (3x^2+4xt)(2t+a)\,dt$$
$$= c\int_0^1 \{3(2t+a)\}x^2+4(2t^2+at)x\}\,dt$$
$$= c\left[3(t^2+at)x^2+4\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right)x\right]_0^1$$
$$= 3c(a+1)x^2+2c\left(\frac{4}{3}+a\right)x.$$

$f(x+1)=c\int_0^1 (3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が恒等的に成り立つ条件は

$$\begin{cases} 3c(a+1)=1, \\ 2c\left(\dfrac{4}{3}+a\right)=a+2, \\ 0=a+b+1. \end{cases}$$

$$a+2=\frac{2c\left(\frac{4}{3}+a\right)}{3c(a+1)}=\frac{2(4+3a)}{9(a+1)}$$

から，

$$9(a+1)(a+2)=2(4+3a).\quad 9a^2+21a+10=0.\quad (3a+2)(3a+5)=0.$$

よって，$a=-\frac{2}{3},\ -\frac{5}{3}$.

これらから，

$$(a,\ b,\ c)=\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 1\right),\ \left(-\frac{5}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right).$$ …(答)

第 3 問

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0\leqq z\leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)に答えよ。

(1) $m\geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

一方の箱が空になると以後ボールの移動はなくなる．毎回 $\frac{1}{2}$ の確率でいずれかの箱が空になる．
m 回の操作の結果を 1 回目の操作の結果と残り $m-1$ 回の操作の結果によって決まると考える．

【解答】

(1) $z=0$ のときと $z=30$ のときは $K(z)=0$ となり，以後ボールの移動はなくなる．

$1\leqq x\leqq 15$ のとき，操作で表が出れば，z は $2x$ となり，裏が出ると z は 0 となる．

$16\leqq x\leqq 30$ のとき，操作で表が出れば，z は 30 となり，裏が出ると z は $x-(30-x)=2x-30$ となる．

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 であるのは，1 回目の操作で表が出て，次の $m-1$ 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 であるか，1 回目の操作で裏が出て，次の $m-1$ 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 であるかのいずれかである．

したがって，

$$P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x)+\dfrac{1}{2}\times 0=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0\leqq x\leqq 15\ \text{のとき}),\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16\leqq x\leqq 30\ \text{のとき}).\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より

$$P_{2m}(10)=\frac{1}{2}P_{2m-1}(20)=\frac{1}{4}P_{2m-2}(10)+\frac{1}{4}.$$

よって，

$$P_{2m}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{2m-2}(10)-\frac{1}{3}\right).$$

よって，数列 $\left\{P_{2m}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．よって，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(P_2(10)-\frac{1}{3}\right).$$

$P_2(10)$ は 2 回の操作で $z=30$ になる確率だから，$\dfrac{1}{4}$.

よって，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}.\quad\cdots(\text{答})$$

第4問

C を半径1の円周とし，A を C 上の1点とする。3点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P，Q，R の速さは，それぞれ m，1，2 であるとする。（したがって，Q は C をちょうど一周する。）ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ をみたす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

分　野

数学Ⅱ：三角関数，**数学Ⅰ**：整数

考え方

中心角 ∠QOR，∠ROP によって決まる．PR が斜辺だから ∠ROP は π の奇数倍，∠QOR は $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍が同時に成り立つとき，△PQR は直角二等辺三角形になる．

【解答】

時刻 t における，中心角はそれぞれ $\angle \mathrm{AOQ}=t$，$\angle \mathrm{AOP}=mt$，$\angle \mathrm{AOR}=-2t$.

$0\leqq t\leqq 2\pi$．$\angle \mathrm{QOR}=3t$，$\angle \mathrm{ROP}=(m+2)t$.

PR が斜辺の直角二等辺三角形になるのは

$$\begin{cases} \angle \mathrm{QOR}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi & (n\text{ は整数}), \\ \angle \mathrm{ROP}=\pi+2N\pi & (N\text{ は整数}) \end{cases}$$

のとき．すなわち，

$$\begin{cases} 3t=\dfrac{2n+1}{2}\pi & (n\text{ は整数}), & \cdots① \\ (m+2)t=(2N+1)\pi & (N\text{ は整数}). & \cdots② \end{cases}$$

① と $0<t<2\pi$ より $t=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi$.

また，m が $1\leqq m\leqq 10$ をみたす整数であることにも注意.

(i) $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，② より，$\dfrac{m+2}{6}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 0)$.

(ii) $t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，② より，$\dfrac{m+2}{2}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 1)$，$(8,\ 2)$.

(iii) $t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，② より，$\dfrac{5(m+2)}{6}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 2)$.

(iv) $t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき，② より，$\dfrac{7(m+2)}{6}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 3)$.

(v) $t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき，② より，$\dfrac{3(m+2)}{2}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 4)$，$(8,\ 7)$.

(vi) $t=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき，② より，$\dfrac{11(m+2)}{6}\pi=(2N+1)\pi$．よって，$(m,\ N)=(4,\ 5)$.

以上より，

$$(m,\ t)=\left(4,\ \frac{k}{6}\pi\right)\ (k=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11),\quad \left(8,\ \frac{k}{2}\pi\right)\ (k=1,\ 3). \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） m，t の制限を無視し一般に考えると，

$$(m,\ t)=\left(12n+4,\ \frac{2l+1}{6}\pi\right),\quad \left(12n+8,\ \frac{2l+1}{2}\pi\right),\quad \left(12n,\ \frac{2l+1}{2}\pi\right)$$

ただし，n，l は整数.

2010 年　前期・理科

第 1 問

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

分　野

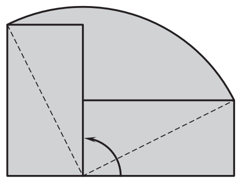
数学Ⅱ：整式の微分，**数学Ⅰ**：立体図形，**数学Ⅱ**：多変数の処理

考え方

底面積は a，c の対称式で表されるから，体積は $(a-c)^2$ と b で表される．b を固定したとき，$(a-c)^2$ を変化して，次に b を変化させる．

【解答】

(1)　求める立体の断面は長さが a，c の長方形を 1 つの頂点の周りに 90° 回転したときにこの長方形が通過する部分と同じであり，その面積は扇形と 2 つの直角三角形の面積の和で



$$\frac{\pi(a^2+c^2)}{4}+ac.$$

よって，V の体積も V と書くことにすると，

$$V=\frac{\pi}{4}(a^2+c^2)b+abc. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$a^2+c^2=\dfrac{(a+c)^2+(a-c)^2}{2}$，$ac=\dfrac{(a+c)^2-(a-c)^2}{4}$.

よって，

$$V=\frac{\pi}{8}\{(a+c)^2+(a-c)^2\}b+\frac{(a+c)^2-(a-c)^2}{4}b=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(a+c)^2b+\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)(a-c)^2b.$$

b を固定したとき，$(a+c)^2=(1-b)^2$.

$(a-c)^2$ のとりうる値の範囲は $0\leqq(a-c)^2<(1-b)^2$．よって，

$$\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)(1-b)^2b\leqq V<\frac{\pi}{4}(1-b)^2b.$$

$f(b)=(1-b)^2b$ とおくと，$f'(b)=(1-b)(1-3b)$ から，$0<f(b)\leqq f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{27}$.

よって，V のとりうる値の範囲は

$$0<V<\frac{\pi}{27}. \qquad \cdots(答)$$

第2問

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$

分　野

数学Ⅲ：積分法，**数学Ⅱ**：不等式の証明

考え方

(1) は $\displaystyle\int_0^1(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$ を利用．

$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx$ は計算できる．その結果を利用して不等式を証明する．

(1) の【解答】

k が自然数で，$0\leqq x\leqq 1$ のとき，

$$\frac{1-x}{k}\geqq\frac{1-x}{k+x}\geqq\frac{1-x}{k+1}$$

で，$0\leqq x\leqq 1$ で常に等号が成り立つことはないから，

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+1}\,dx<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\int_0^1\frac{1-x}{k}\,dx.$$

$\displaystyle\int_0^1(1-x)\,dx=\frac{1}{2}$ だから

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}.$$

（証明終り）

(1) の【別解】

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx=\int_0^1\left(\frac{k+1}{k+x}-1\right)dx=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1.$$

k を実数として，$f(k)=\dfrac{1}{2k}-[(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1]$ とおく．

$$f'(k)=-\frac{1}{2k^2}-\{\log(k+1)-\log k\}-(k+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\{\log(k+1)-\log k\}.$$

$$f''(k)=-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k}=\frac{1}{k^3(k+1)}>0.$$

$f'(k)$ は増加関数で，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}f'(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\log\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}=0$ だから，$f'(k)<0$.

よって，$f(k)$ は減少関数．$\displaystyle\lim_{k\to\infty}f(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2k}+(k+1)\log\left(1-\frac{1}{k+1}\right)+1\right\}=0$ だから，$f(k)>0$.

また，$g(k)=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1-\dfrac{1}{2(k+1)}$ とおく．

$$g'(k)=\{\log(k+1)-\log k\}+(k+1)\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$=\{\log(k+1)-\log k\}-\frac{1}{k}+\frac{1}{2(k+1)^2}.$$

$$g''(k)=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^3}=\frac{2k+1}{k^2(k+1)^3}>0.$$

$g'(k)$ は増加関数で，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}g'(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\}=0$ だから，$g'(k)<0$.

よって，$g(k)$ は減少関数．$\displaystyle\lim_{k\to\infty}g(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{-(k+1)\log\left(1-\frac{1}{k+1}\right)-1-\frac{1}{2(k+1)}\right\}=0$ だから，

$g(k)>0$.

よって，

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx<\frac{1}{2k}.$$ （証明終り）

(2) の【解答】

$$\int_0^1\frac{1-x}{k+x}\,dx=\int_0^1\left(\frac{k+1}{k+x}-1\right)dx=(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1.$$

(1) より

$$\frac{1}{2(k+1)}<(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}-1<\frac{1}{2k}.$$

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k(k+1)}.$$

$$\frac{1}{2k(k+1)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}.$$

$$\frac{1}{2(k+1)^2}>\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}.$$

よって，

$$\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}<\log(k+1)-\log k-\frac{1}{k+1}<\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}.$$

$$\log\frac{m}{n}=\log m-\log n=\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}.$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}.$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right\}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}=\frac{m-n}{2mn}.$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\left\{\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}\right\}=\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2(m+1)}=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}.$$

以上より，

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}.$$ （証明終り）

第3問

2つの箱LとR，ボール30個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン1枚を用意する。x を0以上30以下の整数とする。Lに x 個，Rに $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱Lに入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱Rから箱Lに，裏が出れば箱Lから箱Rに，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱Lのボールの個数が30である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。以下の問(1)，(2)，(3)に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

一方の箱が空になると以後ボールの移動はなくなる．毎回 $\dfrac{1}{2}$ の確率でいずれかの箱が空になる．

m 回の操作の結果を1回目の操作の結果と残り $m-1$ 回の操作の結果によって決まると考える．

【解答】

(1) $z=0$ のときと $z=30$ のときは $K(z)=0$ となり，以後ボールの移動はなくなる．

$1 \leqq x \leqq 15$ のとき，操作で表が出れば，z は $2x$ となり，裏が出ると z は0となる．

$16 \leqq x \leqq 30$ のとき，操作で表が出れば，z は30となり，裏が出ると z は $x-(30-x)=2x-30$ となる．

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が30であるのは，1回目の操作で表が出て，次の $m-1$ 回の操作の後，箱 L のボールの個数が30であるか，1回目の操作で裏が出て，次の $m-1$ 回の操作の後，箱 L のボールの個数が30であるかのいずれかである．

したがって，

$$P_m(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x)+\dfrac{1}{2}\times 0=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x) & (0 \leqq x \leqq 15 \text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)=\dfrac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\dfrac{1}{2} & (16 \leqq x \leqq 30 \text{ のとき}).\end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)より

$$P_{2m}(10)=\frac{1}{2}P_{2m-1}(20)=\frac{1}{4}P_{2m-2}(10)+\frac{1}{4}.$$

よって，

$$P_{2m}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{2m-2}(10)-\frac{1}{3}\right).$$

よって，数列 $\left\{P_{2m}(10)-\dfrac{1}{3}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列である．よって，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(P_2(10)-\frac{1}{3}\right).$$

$P_2(10)$ は2回の操作で $z=30$ になる確率だから，$\dfrac{1}{4}$.

よって，

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\}. \qquad \cdots(答)$$

(3)　(1) より

$$P_{4m}(6)=\frac{1}{2}P_{4m-1}(12)=\frac{1}{4}P_{4m-2}(24)=\frac{1}{8}P_{4m-3}(18)+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4m-4}(6)+\frac{3}{16}.$$

よって，

$$P_{4m}(6)-\frac{1}{5}=\frac{1}{16}\left(P_{4m-4}(6)-\frac{1}{5}\right).$$

よって，数列 $\left\{P_{4m}(6)-\frac{1}{5}\right\}$ は公比 $\frac{1}{16}$ の等比数列である．よって，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}\left(P_{4}(6)-\frac{1}{5}\right).$$

$P_4(6)$ は 4 回の操作で $z=30$ になる確率だから，$\frac{3}{16}$.

よって，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=-\frac{1}{80}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}.$$

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^{n}\right\}. \qquad \cdots(答)$$

第 4 問

O を原点とする座標平面上の曲線

$$C : y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$$

と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

$\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1=\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ を使うと，求める図形の面積は曲線と $y=y_1$，$y=y_2$ および y 軸で囲まれた部分の面積と等しくなる．したがって，逆関数を y で積分する．

【解答】

(1)　$\mathrm{P}_i(x_i,\ y_i)$ を通る x 軸に平行な直線は $y=y_i$．この直線と $y=x$ の交点 H_i の座標は $(y_i,\ y_i)$.

線分 $\mathrm{P}_i\mathrm{H}_i$ の長さは $|y_i-x_i|$．O と直線 $y=y_i$ の距離は $|y_i|$.

$$y=\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+2}>\frac{x}{2}+\frac{x}{2}=x, \quad \therefore \quad y-x=-\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+2}>0$$

から，$x_i<y_i$，$0<y_i$．よって，$\triangle\mathrm{OP}_i\mathrm{H}_i$ の面積は

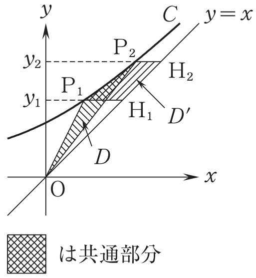
$$\frac{1}{2}(y_i - x_i)y_i = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_i + \sqrt{\frac{1}{4}{x_i}^2+2}\right)\left(\frac{1}{2}x_i + \sqrt{\frac{1}{4}{x_i}^2+2}\right) = 1.$$

よって,

$$\triangle \mathrm{OP_1H_1} = \triangle \mathrm{OP_2H_2} = 1$$

で 2 つの三角形の面積は等しい. (証明終り)

⑵ C の $x_1 \leqq x \leqq x_2$ 部分と, $\mathrm{P_1O}$, $\mathrm{P_2O}$ で囲まれた部分を D とし, D に $\triangle \mathrm{OP_2H_2}$ を加え, $\triangle \mathrm{OP_1H_1}$ を除いた部分を D' とすると, D と D' の面積は等しい.



$f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ の逆関数を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}x}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+8}+x}{2\sqrt{x^2+8}} > 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}t^2+2}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{2}t + \sqrt{\frac{1}{4}t^2+2}} = 0.$$

$y>0$ のとき,

$$y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2+2} \iff \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2 \iff y^2 - xy = 2 \iff x = y - \frac{2}{y}.$$

求める面積は D' の面積に等しく, これを y について積分すれば,

$$\int_{y_1}^{y_2}\left\{y - \left(y - \frac{2}{y}\right)\right\}dy = \int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}\,dy = \Big[2\log y\Big]_{y_1}^{y_2} = 2\log\frac{y_2}{y_1}. \quad \cdots(\text{答})$$

第 5 問

(文科　第 4 問と同じ)

第 6 問

四面体 OABC において, 4 つの面はすべて合同であり, $\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=\sqrt{7}$, $\mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

⑴ 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

⑵ $0<t<1$ をみたす実数 t に対して, 線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t とおく。2 点 P_t, Q_t を通り, 平面 L に垂直な平面を M とするとき, 平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

⑶ t が $0<t<1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。

分　野

数学 B ：ベクトル, 空間図形, **数学 I** ：2 次関数

考え方

(1) は基本.

(2) はまず，断面が C を通るときの t の値と断面積を求める.

t が他の値をとるとき，断面は C を通るときの断面の三角形と相似な三角形か，相似な三角形から，もう 1 つの相似な三角形を除いてできる台形になる.

それらの相似比がわかれば断面積は求まる.

【解答】

4 つの面が合同であるから

$$\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=2,\quad \mathrm{CA}=\mathrm{OB}=\sqrt{7},\quad \mathrm{BC}=\mathrm{OA}=3.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2)=\frac{3^2+7-2^2}{2}=6,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2)=\frac{3^2+2^2-7}{2}=3,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2)=\frac{7+2^2-3^3}{2}=1.$$

(1)　H は平面 OAB 上にあるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とかける.

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直だから，CH⊥OA，CH⊥OB.

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=9\alpha+6\beta-3=0. \qquad \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=6\alpha+7\beta-1=0. \qquad \cdots②$$

①，② から

$$\alpha=\frac{5}{9},\quad \beta=-\frac{1}{3}.$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}. \qquad \cdots(答)$$

(2)　P_t，Q_t は OA，OB 各々を $t:1-t$ に内分するから，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ は辺 AB に平行で，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=2^2-\frac{5^2}{9^2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{3^2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=4-\frac{25}{9}+\frac{20}{9}-\frac{7}{9}=\frac{8}{3}.$$

H が直線 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ 上にあるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{5}{9t}\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}-\frac{1}{3t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}$$

から，

$$\frac{5}{9t}-\frac{1}{3t}=1.\quad t=\frac{2}{9}.$$

このとき，$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$ の長さは，$\mathrm{AB}\cdot t=\frac{4}{9}$.

$$S\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{27}.$$

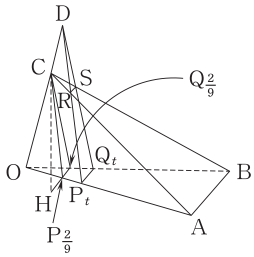
平面 M と直線 OC の交点を D とすると，$\triangle\mathrm{DP}_t\mathrm{Q}_t \backsim \triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ で，$\mathrm{OC}:\mathrm{OD}=\frac{2}{9}:t$ だから，

$$\triangle\mathrm{DP}_t\mathrm{Q}_t=\frac{81}{4}t^2S\left(\frac{2}{9}\right)=\frac{81}{4}t^2\cdot\frac{4\sqrt{6}}{27}=3\sqrt{6}\,t^2.$$

(i) $0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ のとき，

$$S(t)=\triangle \mathrm{DP}_t\mathrm{Q}_t=3\sqrt{6}\,t^2.$$

(ii) $\dfrac{2}{9}\leqq t<1$ のとき，平面 M と線分 CA，CB 各々との交点を R，S とする．$\triangle\mathrm{DRS}\backsim\triangle\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}$ で，



$$\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}:\mathrm{DP}_t=\frac{2}{9}:t,\quad \mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}:\mathrm{RP}_t=\frac{7}{9}:1-t$$

から，

$$\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}}=\frac{\mathrm{DP}_t-\mathrm{RP}_t}{\mathrm{CP}_{\frac{2}{9}}}=\frac{9}{2}t-\frac{9}{7}(1-t)=\frac{81}{14}t-\frac{9}{7}.$$

$$S(t)=\triangle\mathrm{DP}_t\mathrm{Q}_t-\triangle\mathrm{DRS}=3\sqrt{6}\,t^2-\left(\frac{81}{14}t-\frac{9}{7}\right)^2\frac{4\sqrt{6}}{27}=(8t-1)(1-t)\frac{12}{49}\sqrt{6}.$$

以上から

$$S(t)=\begin{cases}3\sqrt{6}\,t^2 & \left(0<t\leqq\dfrac{2}{9}\right),\\[2mm] \dfrac{12}{49}\sqrt{6}\,(8t-1)(1-t) & \left(\dfrac{2}{9}\leqq t<1\right).\end{cases}\qquad\cdots(答)$$

(3) $0<t\leqq\dfrac{2}{9}$ では $S(t)$ は単調に増加する．

$$(8t-1)(1-t)=-8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{49}{32}$$

だから，$\dfrac{2}{9}\leqq t<1$ では $t=\dfrac{9}{16}$ で $S(t)$ は最大になる．最大値は

$$S\left(\frac{9}{16}\right)=\frac{49}{32}\cdot\frac{12}{49}\sqrt{6}=\frac{3}{8}\sqrt{6}.\qquad\cdots(答)$$

2011 年　前期・文科

第 1 問

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\quad f(-1)=-1,\quad \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

を全て満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx$$

を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分

考え方

与条件を使って文字を 1 つに絞り込み，最小値を与える条件を求める．

【解答】

$$f(1)=a+b+c+d=1,\quad f(-1)=-a+b-c+d=-1$$

より，

$$a+c=1,\quad b+d=0. \qquad \cdots①$$

$$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=\left[\frac{b}{3}x^3+\frac{c}{2}x^2+dx\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}b+2d=1.$$

これと，① から，

$$b=-\frac{3}{4},\quad d=\frac{3}{4},\quad c=1-a.$$

よって，

$$f(x)=ax^3-\frac{3}{4}x^2+(1-a)x+\frac{3}{4}.$$

$$f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}x+1-a.\quad f''(x)=6ax-\frac{3}{2}.$$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2\,dx=36a^2\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\,dx-18a\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x\,dx+\frac{9}{4}\int_{-1}^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}.$$

よって，$a=-\frac{1}{4}$ のとき，つまり，

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4} \qquad \cdots(答)$$

のとき，I は最小値

$$\frac{81}{32} \qquad \cdots(答)$$

をとる．

第２問

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

分　野

数学B：数列，**数学Ⅰ**：整数

考え方

(1)は a_1，a_2 を求めると，$\sqrt{2}-1$ になることから，一般に $a_n=\sqrt{2}-1$ となることが予想される．

(2)は $a_1=a_2$ となる a を求める．

【解答】

(1)
$$a_n=\sqrt{2}-1 \qquad \cdots(*)$$
と推定．

(Ⅰ)　$1<a=\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle a \rangle=\sqrt{2}-1$．よって，(*)は成り立つ．

(Ⅱ)　$a_k=\sqrt{2}-1$ とすると，
$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$
よって，$2<\dfrac{1}{a_k}<3$．よって，
$$a_{k+1}=\left\langle \frac{1}{a_k} \right\rangle=(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1.$$
よって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

(Ⅰ)，(Ⅱ)よりすべての自然数 n に対して $a_n=\sqrt{2}-1$．

求める数列は $\{a_n\}$ はすべての項が $\sqrt{2}-1$ の恒等数列．　…(答)

(2)　$a_2=a$ であれば，帰納的にすべての自然数 n について，$a_{n+1}=a_n$ となり，$a_n=a$ となる．

$\dfrac{1}{3} \leqq a_1 = a < 1$ だから $1<\dfrac{1}{a_1} \leqq 3$．

$\dfrac{1}{a_1}$ の整数部分，つまり，$m \leqq \dfrac{1}{a_1} < m+1$ をみたす整数を m とすると，$m=1, 2, 3$．

$m=1$ のとき，
$$a_2=\frac{1}{a_1}-1. \quad a=\frac{1}{a}-1. \quad a^2+a-1=0. \quad \text{よって } a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$
$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ から $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

$m=2$ のとき，
$$a_2=\frac{1}{a_1}-2. \quad a=\frac{1}{a}-2. \quad a^2+2a-1=0. \quad \text{よって } a=-1\pm\sqrt{2}.$$
$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ から $a=\sqrt{2}-1$．

$m=3$ のとき，$a=a_1=\dfrac{1}{3}$ だが，$a_2=\left\langle\dfrac{1}{a_1}\right\rangle=0$ で $a_2 \neq a$.

以上より，

$$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \sqrt{2}-1. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） $a \geqq \dfrac{1}{3}$ という条件がなければ，$a=\dfrac{\sqrt{m^2+4}-m}{2}$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ または $a=0$.

第 3 問

p，q を 2 つの正の整数とする。整数 a，b，c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\quad b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような a，b，c を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べかえたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;c])=p-q-(a+b)$$

とおく。

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c])=-q$ となるものの個数を求めよ。
　また，$w([a,\ b\ ;c])=p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p=q$ の場合を考える。

(2) s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c])=-p+s$ となるものの個数を求めよ。

分　野

数学A：個数，**数学 I**：不等式，整数，**数学B**：数列

考え方

題意を読み解く力が試される.

【解答】

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p,\quad b \leqq c \leqq a, \qquad \cdots(*)$$

$$w([a,\ b\ ;c])=p-q-(a+b) \qquad \cdots①$$

とおく.

(1) $w([a,\ b\ ;c])=-q$ のとき，① から

$$p-q-(a+b)=-q.\quad p=a+b.$$

(*) より，

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq a+b.\quad 0 \leqq b \leqq 0,\quad 0 \leqq a.$$

よって，$b=0$. $a=p$. よって，a，b の値は定まる.

c は $b \leqq c \leqq a$ つまり，$0 \leqq c \leqq p$ の範囲を動く.

よって，c の取りうる値の個数は $p+1$ 個. よって，$[a,\ b\ ;c]$ の個数は

$$p+1 \text{ 個}. \qquad \cdots(\text{答})$$

$w([a,\ b\ ;c])=p$ のとき，① から

$$p-q-(a+b)=p.\quad q=-a-b.$$

(*) より，

$$a+b \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p.\quad 0 \leqq a \leqq 0,\ b \leqq 0.$$

よって，$a=0$. $b=-q$. よって，a，b の値は定まる.

c は $b \leqq c \leqq a$ つまり，$-q \leqq c \leqq 0$ の範囲を動く．

よって，c の取りうる値の個数は $q+1$ 個．よって，$[a,\ b\ ;\ c]$ の個数は

$$q+1 \text{ 個}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $q=p$ から (*)，① は

$$-p \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad b \leqq c \leqq a, \qquad \cdots(**)$$
$$w([a,\ b\ ;\ c]) = -(a+b)$$

となる．

$w([a,\ b\ ;\ c]) = -p+s$ より，

$$-p+s=-a-b. \quad b=p-s-a.$$

(**) に代入して，

$$-p \leqq p-s-a \leqq 0 \leqq a \leqq p, \quad p-s-a \leqq c \leqq a.$$
$$p-s \leqq a \leqq 2p-s, \quad 0 \leqq a \leqq p.$$

$p-s \geqq 0$ から

$$p-s \leqq a \leqq p.$$

ただし，$p-s \leqq p$ から $0 \leqq s \leqq p$.

$p-s-a \leqq c \leqq a$ だから，c の個数は $2a-p+s+1$ 個.

a は $p-s \leqq a \leqq p$ の範囲を動き，$\{2a-p+s+1\}$ は等差数列をなし，項数は $s+1$，初項は $p-s+1$，末項は $p+s+1$ だから，その和は

$$\frac{s+1}{2}\{(p-s+1)+(p+s+1)\}=(s+1)(p+1). \qquad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：軌跡

考え方

α，β の対称性と実数条件を考える．

【解答】

直線 QR の傾きは $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\alpha+\beta$.

QR の中点は $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

$\alpha+\beta=0$ とすると，Q，R は y 軸について対称．P は y 軸上にないから，P，Q，R は PQ=PR の二等辺三角形をなさない．よって，$\alpha+\beta \neq 0$.

QR の垂直二等分線は

$$y=-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}.$$

これが，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通るから，

$$\frac{1}{4}=-\frac{1}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}.$$

$$\frac{2}{\alpha+\beta}=1+2(\alpha^2+\beta^2). \qquad \cdots①$$

三角形 PQR の重心は

$$\mathrm{G}(X,\ Y)=\left(\frac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{3},\ \frac{\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}}{3}\right).$$

$$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2},\quad \alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}\quad \left(X\fallingdotseq\frac{1}{6}\right).$$

① に代入して，

$$\frac{2}{3X-\frac{1}{2}}=1+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right).\quad \frac{4}{6X-1}=6Y+\frac{1}{2}.$$

$$Y=\frac{2}{3(6X-1)}-\frac{1}{12}. \qquad \cdots②$$

α，β は実数で，$\alpha\fallingdotseq\beta$ だから，

$$(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2=2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2>0$$

整理して，

$$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}.$$

② より，

$$\frac{2}{3(6X-1)}-\frac{1}{12}>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}.$$

$$(6X-1)^2+4-\frac{16}{6X-1}<0.$$

$X>\frac{1}{6}$ のとき，

$$(6X-1)^3+4(6X-1)-16=\{(6X-1)-2\}\{(6X-1)^2+2(6X-1)+8\}=3(2X-1)\{(6X)^2+7\}<0$$

より，

$$\frac{1}{6}<X<\frac{1}{2}.$$

$X<\frac{1}{6}$ のとき，

$$(6X-1)^3+4(6X-1)-16=3(2X-1)\{(6X)^2+7\}>0.$$

これをみたす X は存在しない．

以上より X の取りうる値の範囲は

$$\frac{1}{6}<X<\frac{1}{2}.$$

以上から点 G の軌跡は

$$y=\frac{2}{3(6x-1)}-\frac{1}{12}\quad \left(\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}\right). \qquad \cdots(答)$$

2011 年　前期・理科

第 1 問

座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする。

⑴　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

⑵　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。

分　野

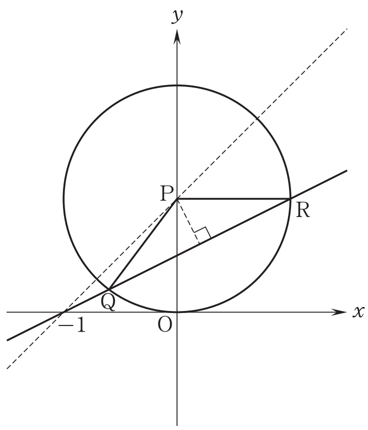
数学Ⅱ：点と直線の距離，**数学Ⅲ**：微分法，分数関数

考え方

点 P と直線 $y=a(x+1)$ との距離 d を求めれば面積は容易に求められる.

$S(a)$ について微分しても最大になる a を求めることができるが，図形的には ∠QPR が直角のときに最大になることは明らか.

【解答】



⑴　点 P と $y=a(x+1)$ つまり $ax-y+a=0$ の距離 d は，

$0<a<1$ より，

$$d=\frac{|a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}.$$

QR の長さは

$$2\sqrt{1-d^2}=2\sqrt{1-\frac{(a-1)^2}{a^2+1}}=\frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}.$$

$$S(a)=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot d=\frac{(1-a)\sqrt{2a}}{a^2+1}.$$ …(答)

⑵　$0<a<1$ のとき，$S(a)=\dfrac{(1-a)\sqrt{2a}}{a^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}\,(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}})}{a^2+1}$.

$$S'(a)=\frac{\sqrt{2}\left\{\left(\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}\right)(a^2+1)-(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}})\cdot 2a\right\}}{(a^2+1)^2}=\frac{(a+1)(a^2-4a+1)}{\sqrt{2a}\,(a^2+1)^2}.$$

a	(0)	…	$2-\sqrt{3}$	…	(1)
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$	(0)	↗		↘	(0)

よって，$S(a)$ を最大にする a は

$$a=2-\sqrt{3}.$$ …(答)

⑵ の【別解】

$\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}=1$ だから，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}\sin\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{1}{2}\sin\angle\mathrm{QPR}$.

よって，∠QPR が直角，つまり $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{PR}$ のとき，$S(a)$ は最大になる.

そのとき，QR の中点を M とすると，$\mathrm{PM}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

すなわち，P と直線 $y=a(x+1)$ の距離は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる.

$$\frac{|1-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.\quad a^2-4a+1=0.$$

$a=2\pm\sqrt{3}$．$0<a<1$ より，

$$a=2-\sqrt{3}. \qquad \cdots(答)$$

（注）$S(a)$ が最大のとき，$\mathrm{A}(-1,\ 0)$ とすると，$\dfrac{\mathrm{PM}}{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{2}$ だから，$\angle\mathrm{PAM}=\dfrac{\pi}{6}$.

よって，$a=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\dfrac{\pi}{12}$.

第2問

実数 x の小数部分を，$0\leqq y<1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x\rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

（i）$a_1=\langle a\rangle$

（ii）$\begin{cases} a_n\neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1}=\left\langle \dfrac{1}{a_n}\right\rangle \\ a_n=0 \text{ のとき，} a_{n+1}=0 \end{cases}$

(1) $a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2) 任意の自然数 n に対して $a_n=a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3) a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a=\dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n=0$ であることを示せ。

分　野

数学B：数列，**数学I**：整数

考え方

(2)は $a_2=a_1$ となる a を求める．

(3)は割ったときの余りの列が減少することからいえる．

【解答】

(1)
$$a_n=\sqrt{2}-1 \qquad \cdots(*)$$

と推定．

(I) $1<a=\sqrt{2}<2$ より，$a_1=\langle a\rangle=\sqrt{2}-1$．よって，(*)は成り立つ．

(II) $a_k=\sqrt{2}-1$ とすると，

$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1.$$

よって，$2<\dfrac{1}{a_k}<3$．よって，

$$a_{k+1}=\left\langle\frac{1}{a_k}\right\rangle=(\sqrt{2}+1)-2=\sqrt{2}-1.$$

よって，$n=k+1$ のときも(*)は成り立つ．

(I)，(II)よりすべての自然数 n に対して $a_n=\sqrt{2}-1$.

求める数列は $\{a_n\}$ はすべての項が $\sqrt{2}-1$ の恒等数列． $\cdots$(答)

(2) $a_2=a$ であれば，帰納的にすべての自然数 n について，$a_{n+1}=a_n$ となり，$a_n=a$ となる．

$\dfrac{1}{3} \leqq a_1 = a < 1$ だから $1 < \dfrac{1}{a_1} \leqq 3$.

$\dfrac{1}{a_1}$ の整数部分，つまり，$m \leqq \dfrac{1}{a_1} < m+1$ をみたす整数を m とすると，$m=1, 2, 3$.

$m=1$ のとき，

$$a_2 = \frac{1}{a_1} - 1.\quad a = \frac{1}{a} - 1.\quad a^2 + a - 1 = 0.\quad \text{よって}\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ から $a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$m=2$ のとき，

$$a_2 = \frac{1}{a_1} - 2.\quad a = \frac{1}{a} - 2.\quad a^2 + 2a - 1 = 0.\quad \text{よって}\ a = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ から $a = \sqrt{2} - 1$.

$m=3$ のとき，$a = a_1 = \dfrac{1}{3}$ だが，$\left\langle \dfrac{1}{a_1} \right\rangle = 0$ で $a_2 \neq a$.

以上より，

$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\quad \sqrt{2} - 1. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) a_n が 0 でない有理数のとき，a_n の逆数も，また，その逆数から整数を引いた，a_{n+1} も有理数.

また，$a_n=0$ のとき $a_{n+1}=0$（有理数），よって a_n が有理数のとき a_{n+1} も有理数．したがって，a が有理数のとき，すべての a_n は有理数.

$a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$（p_n，q_n は互いに素な自然数）とする.

$0 \leqq a_n < 1$ だから，$0 \leqq p_n < q_n$.

$p_n \neq 0$ のとき，

$$a_{n+1} = \frac{q_n}{p_n} - N = \frac{q_n - Np_n}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \left(\text{ただし，}N\ \text{は}\ \frac{1}{a_n}\ \text{の整数部分}\right).$$

p_n，q_n は互いに素だから，p_n，$q_n - Np_n$ も互いに素．よって，$p_{n+1} = q_n - Np_n$，$q_{n+1} = p_n$.

よって，$0 < q_{n+1} < q_n$.

もし，$a_q > 0$ とすると，$q_{q+1} > 0$.

$a = \dfrac{p}{q}$ で，p，q は公約数をもつかもしれないから，a の小数部分 $\langle a \rangle = a_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ の分母との間には $q_1 \leqq q$ という関係が成り立つ．よって，

$$q \geqq q_1 > q_2 > q_3 > \cdots > q_{q+1}.$$

よって，$q-1 \geqq q_2$，$q-2 \geqq q_3$，$\cdots q-k \geqq q_{k+1}$，$\cdots$，$0 \geqq q_{q+1}$ となる．これは $q_{q+1} > 0$ と矛盾する.

したがって，$a_q = 0$．$a_q = 0$ なら $a_{q+1} = a_{q+2} = \cdots = 0$.

よって，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ である． （証明終り）

第３問

L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1)　$u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2)　$0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分

$$f(a)=\int_a^1 \sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$$

を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，関数の極限，微分法，曲線長

考え方

積分 $f(a)=\displaystyle\int_a^1\sqrt{1+\left(\frac{L}{t}\right)^2}\,dt$ を導くまでは自然．$\sqrt{1+\left(\dfrac{L}{t}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}$ だから $s=\sqrt{t^2+L^2}$ とおく．

【解答】

(1)　$\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通るから半径が t．$\angle\mathrm{QOP}=\dfrac{L}{t}$.

よって，Q の座標は $\left(t\cos\dfrac{L}{t},\ t\sin\dfrac{L}{t}\right)$.

$$u(t)=t\cos\frac{L}{t},\quad v(t)=t\sin\frac{L}{t}.\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)　$u'(t)=\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}$，$v'(t)=\sin\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}$.

$$\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2=\left(\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}\right)^2+\left(\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}\right)^2=1+\left(\frac{L}{t}\right)^2.$$

よって，

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{1+\left(\frac{L}{t}\right)^2}\,dt.$$

$s=\sqrt{t^2+L^2}$ とおくと，$t=\sqrt{s^2-L^2}$，$2s\,ds=2t\,dt$.

t	a	$\longrightarrow$	1
s	$\sqrt{a^2+L^2}$	$\longrightarrow$	$\sqrt{1+L^2}$

$$\begin{aligned}
f(a)&=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\frac{s^2}{s^2-L^2}\,ds=\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\left(1+\frac{L}{2}\frac{1}{s-L}-\frac{L}{2}\frac{1}{s+L}\right)ds\\
&=\left[s+\frac{L}{2}\log(s-L)-\frac{L}{2}\log(s+L)\right]_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{1+L^2}}\\
&=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+\frac{L}{2}\log(\sqrt{1+L^2}-L)-\frac{L}{2}\log(\sqrt{a^2+L^2}-L)\\
&\quad-\frac{L}{2}\log(\sqrt{1+L^2}+L)+\frac{L}{2}\log(\sqrt{a^2+L^2}+L)\\
&=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}-L\log(\sqrt{1+L^2}+L)+L\log(\sqrt{a^2+L^2}+L)-L\log a.\qquad\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

($(\sqrt{1+L^2}+L)(\sqrt{1+L^2}-L)=1$，$(\sqrt{a^2+L^2}+L)(\sqrt{a^2+L^2}-L)=a^2$ であることを使った.)

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to+0}\{\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}-L\log(\sqrt{1+L^2}+L)+L\log(\sqrt{a^2+L^2}+L)\}$

$=\sqrt{1+L^2}-L-L\log(\sqrt{1+L^2}+L)+L\log(2L)$

は有限.

よって,

$$\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=\lim_{a\to+0}\left\{\frac{\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}-L\log(\sqrt{1+L^2}+L)+L\log(\sqrt{a^2+L^2}+L)}{\log a}-L\right\}=-L.$$

…(答)

(注) この時期, 曲線長は高校の範囲外だったが, (2) のように問えばとりあえず範囲内. 実質的に曲線長の問題.

第 4 問

(文科 第 4 問と同じ)

第 5 問

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p,\quad b\leqq c\leqq a$$

を満たすものを考え, このような a, b, c を $[a,\ b\ ;\ c]$ の形に並べかえたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;\ c]$ に対して

$$w([a,\ b\ ;\ c])=p-q-(a+b)$$

とおく。

(1) $(p,\ q)$ パターンのうち, $w([a,\ b\ ;\ c])=-q$ となるものの個数を求めよ。

　また, $w([a,\ b\ ;\ c])=p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下 $p=q$ の場合を考える。

(2) s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;\ c])=-p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。

分　野

数学A：個数, **数学 I**：不等式, 整数, **数学B**：数列

考え方

題意を読み解く力が試される.

【解答】

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p,\quad b\leqq c\leqq a, \qquad \cdots(*)$$

$$w([a,\ b\ ;\ c])=p-q-(a+b) \qquad \cdots①$$

とおく.

(1) $w([a,\ b\ ;\ c])=-q$ のとき, ① から

$$p-q-(a+b)=-q.\quad p=a+b.$$

(*) より,

$$-q\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq a+b.\quad 0\leqq b\leqq 0,\quad 0\leqq a.$$

よって, $b=0$. $a=p$. よって, a, b の値は定まる.

c は $b\leqq c\leqq a$ つまり, $0\leqq c\leqq p$ の範囲を動く.

よって, c の取りうる値の個数は $p+1$ 個. よって, $[a,\ b\ ;\ c]$ の個数は

$$p+1 \text{ 個}.$$ …(答)

$w([a,\ b\ ;\ c])=p$ のとき，① から

$$p-q-(a+b)=p. \quad q=-a-b.$$

(*) より，

$$a+b\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p. \quad 0\leqq a\leqq 0,\ b\leqq 0.$$

よって，$a=0$．$b=-q$．よって，a，b の値は定まる．

c は $b\leqq c\leqq a$ つまり，$-q\leqq c\leqq 0$ の範囲を動く．

よって，c の取りうる値の個数は $q+1$ 個．よって，$[a,\ b\ ;\ c]$ の個数は

$$q+1 \text{ 個}.$$ …(答)

(2) $q=p$ から (*)，① は

$$-p\leqq b\leqq 0\leqq a\leqq p, \quad b\leqq c\leqq a,$$ …(**)

$$w([a,\ b\ ;\ c])=-(a+b)$$

となる．

$w([a,\ b\ ;\ c])=-p+s$ より，

$$-p+s=-a-b. \quad b=p-s-a.$$

(**) に代入して，

$$-p\leqq p-s-a\leqq 0\leqq a\leqq p, \quad p-s-a\leqq c\leqq a.$$

$$p-s\leqq a\leqq 2p-s, \quad 0\leqq a\leqq p.$$

(i) $s<0$ のとき，$p<p-s$ より，a が存在しないので $(p,\ p)$ パターンは存在しない．

(ii) $0\leqq s\leqq p$ のとき，$0\leqq p-s$，$p\leqq 2p-s$ より，

$$p-s\leqq a\leqq p.$$

$p-s-a\leqq c\leqq a$ だから，c の個数は $2a-p+s+1$ 個．

a は $p-s\leqq a\leqq p$ の範囲で動き，$\{2a-p+s+1\}$ は等差数列をなし，項数は $s+1$，初項は $p-s+1$，末項は $p+s+1$ だから，その和は

$$\frac{s+1}{2}\{(p-s+1)+(p+s+1)\}=(s+1)(p+1).$$

(iii) $p<s\leqq 2p$ のとき，$p-s<0$，$2p-s<p$ より，

$$0\leqq a\leqq 2p-s.$$

$p-s-a\leqq c\leqq a$ だから，c の個数は $2a-p+s+1$ 個．

a は $0\leqq a\leqq 2p-s$ の範囲で動き，$\{2a-p+s+1\}$ は等差数列をなし，項数は $2p-s+1$，初項は $-p+s+1$，末項は $3p-s+1$ だから，その和は

$$\frac{2p-s+1}{2}\{(-p+s+1)+(3p-s+1)\}=(2p-s+1)(p+1).$$

(iv) $s>2p$ のとき，$2p-s<0$ より，a が存在しないので $(p,\ p)$ パターンは存在しない．

(i)〜(iv) から，求める個数は

$$\begin{cases}(p+1)(s+1) & (0\leqq s\leqq p \text{ のとき}),\\ (p+1)(2p-s+1) & (p<s\leqq 2p \text{ のとき}).\end{cases}$$ …(答)

(3) $(p,\ p)$ パターンの個数は，

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)=(p+1)\frac{p+1}{2}(p+2)+(p+1)\frac{p}{2}(p+1)=(p+1)^3.$$

…(答)

第6問

⑴ x，y を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする2次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

⑵ 次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

⑶ 次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数 t に対して，

$$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$$

が成り立つ。

V の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の積分，**数学Ⅲ**：体積，**数学Ⅰ**：2次関数，2次不等式

考え方

t の2次関数について，丹念に場合分けをして領域を求める．

【解答】

⑴
$$f(t)=x\left(t+\frac{y}{2x}\right)^2-\frac{y^2}{4x}.$$

$0\leqq t\leqq 1$ における $f(t)$ の最大値を M，最小値を m とすると，

$$M=\begin{cases} f(1)=x+y & (y\geqq -x \text{ のとき}), \\ f(0)=0 & (y<-x \text{ のとき}). \end{cases}$$

$$m=\begin{cases} f(0)=0 & (y>0 \text{ のとき}), \\ f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=-\dfrac{y^2}{4x} & (-2x\leqq y\leqq 0 \text{ のとき}), \\ f(1)=x+y & (y<-2x \text{ のとき}). \end{cases}$$

よって，最大値と最小値の差は

$$M-m=\begin{cases} -x-y & (y<-2x \text{ のとき}), \\ \dfrac{y^2}{4x} & (-2x\leqq y<-x \text{ のとき}), \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x} & (-x\leqq y\leqq 0 \text{ のとき}), \\ x+y & (y>0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots(答)$$

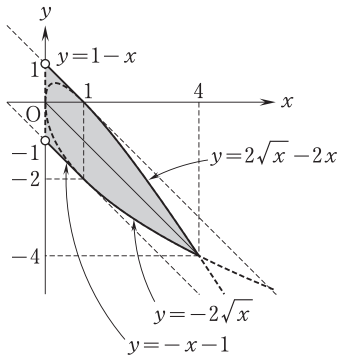
⑵ 与条件は $0\leqq t\leqq 1$ の範囲の全ての実数について，$0\leqq f(t)+z\leqq 1$ が成り立つ z が存在することであるから，$0\leqq m+z$，$M+z\leqq 1$ が成り立つ z が存在することである．

すなわち，$-m\leqq z\leqq 1-M$ となる z が存在することであるから，$-m\leqq 1-M$．したがって，$M-m\leqq 1$ が条件．

(1) から

$$\begin{cases} -x-y\leqq 1 & \iff y\geqq -x-1 & (y<-2x \text{ のとき}), \\ \dfrac{y^2}{4x}\leqq 1 & \iff y\geqq -2\sqrt{x} & (-2x\leqq y<-x \text{ のとき}), \\ x+y+\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1 & \iff y\leqq 2\sqrt{x}-2x & (-x\leqq y\leqq 0 \text{ のとき}), \\ x+y\leqq 1 & \iff y\leqq 1-x & (y>0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

これらと $x>0$ より，図示すると右図網掛部．



(3) 求める体積は (2) の範囲で，$-m\leqq z\leqq 1-M$ の範囲である．

$x=u$ における断面積 $S(u)$ は $1-(M-m)$ を y について積分したものである．

$0\leqq u\leqq 1$ だから，

$$\begin{aligned} S(u)&=\int_{-u-1}^{-2u}(1+u+y)\,dy+\int_{-2u}^{-u}\left(1-\frac{y^2}{4u}\right)dy+\int_{-u}^{0}\left(1-u-y-\frac{y^2}{4u}\right)dy+\int_{0}^{1-u}(1-u-y)\,dy \\ &=\left[\frac{(y+u+1)^2}{2}\right]_{-u-1}^{-2u}+\left[y-\frac{y^3}{12u}\right]_{-2u}^{-u}+\left[(1-u)y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{12u}\right]_{-u}^{0}+\left[-\frac{(y+u-1)^2}{2}\right]_{0}^{1-u} \\ &=\frac{(1-u)^2}{2}+u-\frac{7u^2}{12}+u-\frac{7u^2}{12}+\frac{(1-u)^2}{2} \\ &=(1-u)^2+2u-\frac{7u^2}{6}=1-\frac{u^2}{6}. \end{aligned}$$

よって，V の体積は

$$\int_0^1\left(1-\frac{u^2}{6}\right)du=\left[u-\frac{u^3}{18}\right]_0^1=\frac{17}{18}. \qquad \cdots(\text{答})$$

2012 年　前期・文科

第 1 問

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2 次方程式

考え方

y の 2 次方程式として整理し，y が実数である条件を x の不等式として表し，それを解く．

【解答】

与方程式を y について整理すると，

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0.$$

この方程式の判別式を D とすると，y は実数だから

$$D=(4x+5)^2-4\cdot 3\cdot(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73\geqq 0.$$

よって，x のとりうる実数の範囲は

$$\frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}.$$

よって，x の最大値は

$$\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}.$$

…(答)

第 2 問

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(1,\ 0)$，C$(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：直線の方程式，**数学A**：相加平均・相乗平均の関係

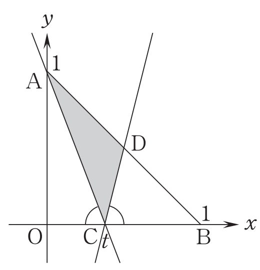
考え方

三角形の面積が t の分数式になる．

分母が 1 次式の分数式は分母の式で整理して考える．

結局相加平均・相乗平均の関係を用いる．

【解答】



直線 AC の傾きが $-\dfrac{1}{t}$ だから，$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ から，直線 DC の傾きは $\dfrac{1}{t}$．よって，直線 DC の方程式は $y=\dfrac{1}{t}(x-t)=\dfrac{1}{t}x-1$.

直線 AB の方程式は $y=1-x$.

よって，D の座標は $\left(\dfrac{2t}{t+1},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$.

よって，

$$\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{OAB}-\triangle\mathrm{OAC}-\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}(1-t)\frac{1-t}{1+t}$$
$$=\frac{t(1-t)}{1+t}=3-\left\{(t+1)+\frac{2}{t+1}\right\}.$$

$0<t<1$ から，相加平均・相乗平均の関係を使って，

$$t+1+\frac{2}{t+1}\geqq 2\sqrt{2}.$$

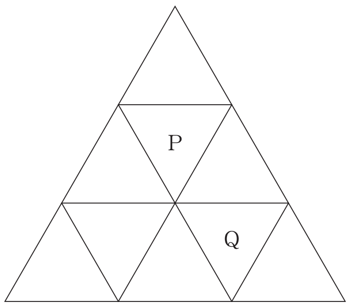
等号は $t=\sqrt{2}-1$ のときに成り立つ．このとき，たしかに t は $0<t<1$ をみたす．

よって，$\triangle$ACD の面積の最大値は

$$3-2\sqrt{2}.$$ …(答)

第3問

図のように，正三角形を9つの部屋に辺で区切り，部屋P，Qを定める。1つの球が部屋Pを出発し，1秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋Qにある確率を求めよ。



分　野

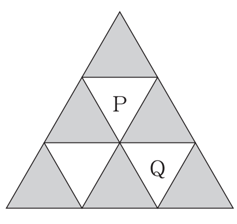
数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

三角形の部屋の位置によって球の移動の仕方が異なる．また，奇数秒後に球がある可能性がある部屋と偶数秒後に球がある可能性のある部屋が異なるので場合分けして考える．これらを考慮して漸化式を立てる．

確率の和が1であることを使うと球が n 秒後にQにある確率だけの漸化式にすることができ，これを解けばよい．

【解答】



辺を共有する隣の部屋へ移動するから，Pから偶数回の移動では図の白い部屋に移動し，奇数回の移動では図の網掛けをした部屋へ移動する．もうひとつの白い部屋をRとする．

最初Pの部屋にあった球が2回の移動でQに移動する確率は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ である．P，Q，Rから2回の移動で異なる部屋へ移動する確率は $\frac{1}{6}$ である．

最初Pの部屋にあった球が2回の移動でRに移動する確率も $\frac{1}{6}$ であるから2回の移動でPに戻る確

率は $1-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ である．P，Q，R から 2 回の移動で同じ部屋へ移動する確率は $\frac{2}{3}$ である．

(i) n が奇数のとき，球が Q にある確率は 0.

(ii) n が偶数のとき，$n=2m$ とする．2 秒後に球が Q にある確率を q_m とする．球が P または R にある確率は $1-q_m$ である．

$$q_{m+1}=\frac{2}{3}q_m+\frac{1}{6}(1-q_m)=\frac{1}{2}q_m+\frac{1}{6}.$$

$$q_{m+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(q_m-\frac{1}{3}\right)$$

から $\left\{q_m-\frac{1}{3}\right\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列.

したがって，$q_1=\frac{1}{6}$ より

$$q_m-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(q_1-\frac{1}{3}\right).\quad q_m=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot2^m}.$$

以上より，球が n 秒後に部屋 Q にある確率は

$$\begin{cases}0 & (n\text{ が奇数のとき}),\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3\cdot2^{\frac{n}{2}}} & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases}$$ …(答)

第 4 問

座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。s，t は実数とし，$t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする。

(1) l_1，l_2 の方程式を求めよ。

(2) a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ。

分 野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分，**数学Ⅰ**：2 次関数

考え方

目的ははっきりしているが計算が繁雑なので丁寧に計算すること.

(2) の最後の「$(s,\ t)$ を全て求めよ」は存在しない場合を含めて軌跡を求めている.

【解答】

(1) $y'=2x$ だから $y=x^2+1$ 上の点 $(u,\ u^2+1)$ における接線の方程式は

$$y=2u(x-u)+u^2+1=2ux-u^2+1.$$ …①

この接線が点 $(s,\ t)$ を通るときこの直線が，l_1，l_2 である．その接点の x 座標は ① に $(x,\ y)=(s,\ t)$ を代入してできる u についての 2 次方程式

$$u^2-2su+t-1=0$$

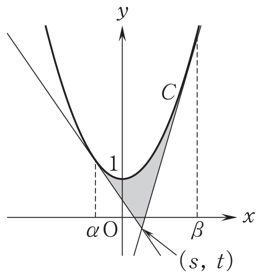
の 2 解．$t<0$ より，この方程式は異なる 2 実解 $u=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$ をもつ.

① は $y=2u(x-s)+t$ ともかけるから，l_1，l_2 の方程式は

$$y=(2s\pm2\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t.$$ …(答)

(2) l_1，l_2 の接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

$\beta-s=s-\alpha=\sqrt{s^2-t+1}$.



放物線 C，直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積は

$$\int_\alpha^s\{x^2+1-(2\alpha x-\alpha^2+1)\}\,dx+\int_s^\beta\{x^2+1-(2\beta x-\beta^2+1)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2\,dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_\alpha^s+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_s^\beta=\frac{2}{3}(\sqrt{s^2-t+1})^3.$$

これが a に等しいとき，

$$a=\frac{2}{3}(\sqrt{s^2-t+1})^3.$$

$t<0$，$s^2\geqq 0$ より，$a>\dfrac{2}{3}$.

よって，

$$\begin{cases} 0<a\leqq\dfrac{2}{3} \text{ のとき } (s,\ t) \text{ は存在しない.} \\ a>\dfrac{2}{3} \text{ のとき } (s,\ t) \text{ の全体は放物線 } t=s^2-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}+1 \text{ の } t<0 \text{ をみたす部分.} \end{cases}$$

…(答)

(注) $a>\dfrac{2}{3}$ のとき，s の範囲は

$$-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}.$$

2012 年　前期・理科

第 1 問

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2 \leqq 1, \quad x \geqq \frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

分　野

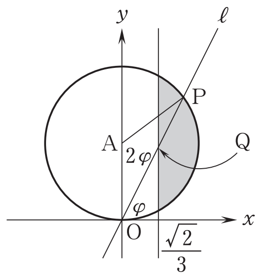
数学Ⅱ：図形と方程式，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

直線の傾きあるいは角度を与えれば L を与えられる.

あとは，L を微分して考える.

【解答】



円 C：$x^2+(y-1)^2=1$ の中心を $\mathrm{A}(0,\ 1)$，ℓ と C の交点のうち原点 O と異なる点を P，ℓ と直線 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ との交点を Q とする.

ℓ と x 軸のなす角を φ とおくと，接線と弦のなす角と中心角の関係から $\angle\mathrm{OAP}=2\varphi$．よって $\mathrm{OP}=2\sin\varphi$.

x 軸と ℓ のなす角が φ だから，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\dfrac{1}{\cos\varphi}$.

したがって D と ℓ の共通部分が線分になるのは $\mathrm{OP}>\mathrm{OQ}$ のときで，その線分の長さは

$$L=\mathrm{PQ}=2\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi}.$$

$\mathrm{OP}>\mathrm{OQ}$ となるのは $\sin 2\varphi>\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ のとき，$0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin 2\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となる角 α をとると，$2\alpha<2\varphi<\pi-2\alpha$ つまり，

$$\alpha<\varphi<\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

$$L=f(\varphi)=2\sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi}\quad\left(\alpha<\varphi<\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

とすると，

$$f'(\varphi)=2\cos\varphi-\frac{\sqrt{2}\sin\varphi}{3\cos^2\varphi}=\frac{\sqrt{2}\,(3\sqrt{2}\cos^3\varphi-\sin\varphi)}{3\cos^2\varphi}.$$

$f'(\varphi)=0$ とすると，$18\cos^6\varphi=\sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi$.

$$18\cos^6\varphi+\cos^2\varphi-1=(3\cos^2\varphi-1)(6\cos^4\varphi+2\cos^2\varphi+1)=0$$

$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ だから，$\sin\varphi>0$，$\cos\varphi>0$．$f'(\varphi)>0$ ならば，$3\sqrt{2}\cos^3\varphi>\sin\varphi$．$18\cos^6\varphi>\sin^2\varphi$．$(3\cos^2\varphi-1)(6\cos^4\varphi+2\cos^2\varphi+1)>0$．$3\cos^2\varphi>1$.

$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる角を θ とすると，

φ	(α)	$\cdots$	θ	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$
$f'(\varphi)$		$+$	0	$-$	
$f(\varphi)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって，線分 PQ の長さ $L=f(\varphi)$ を最大にする φ に対して $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$．$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$．

よって，L の最大値は

$$2\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

このとき，

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad \cdots(\text{答})$$

【別解】

ℓ：$y=mx$ とおき，直線 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ との交点を Q，原点を O とすると，$\mathrm{OQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+m^2}$．

ℓ と円 $x^2+(y-1)^2=1$ の交点の x 座標を求める方程式は

$$x^2+(mx-1)^2=1.\quad (1+m^2)x^2-2mx=0.$$

よって，交点の x 座標は 0，$\dfrac{2m}{1+m^2}$．O と異なる交点を P とすると，$\mathrm{OP}=\dfrac{2m}{\sqrt{1+m^2}}$．

$\mathrm{OP}>\mathrm{OQ}$ のとき，

$$\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}>\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+m^2}.\quad m^2-3\sqrt{2}\,m+1<0.$$

よって，$\alpha=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$，$\beta=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$ とおくと，$\alpha<m<\beta$．

このとき，

$$L=\mathrm{PQ}=\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{1+m^2}=\frac{-\sqrt{2}\,(m^2-3\sqrt{2}\,m+1)}{3\sqrt{1+m^2}}.$$

$$\frac{dL}{dm}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{(2m-3\sqrt{2})\sqrt{1+m^2}-(m^2-3\sqrt{2}\,m+1)\dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}}{1+m^2}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{m^3+m-3\sqrt{2}}{\sqrt{1+m^2}^{\,3}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{(m-\sqrt{2})(m^2+\sqrt{2}\,m+3)}{\sqrt{1+m^2}^{\,3}}.$$

$m^2+\sqrt{2}\,m+3=\left(m+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{5}{2}>0$.

また，$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\sqrt{2}<\sqrt{2}<\beta=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\sqrt{2}$．

m	(α)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(β)
$\dfrac{dL}{dm}$		$+$	0	$-$	
L	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

よって，L が最大のとき，$m=\tan\theta=\sqrt{2}$．

L の最大値は

$$\frac{-\sqrt{2}\,(\sqrt{2}^2-3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+1)}{3\sqrt{1+\sqrt{2}^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$ …(答)

このとき，

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ …(答)

第２問

（文科　第３問と同じ）

第３問

座標平面上で２つの不等式

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2,\quad \frac{x^2}{4}+4y^2\leqq\frac{1}{8}$$

によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と１の大小を判定せよ。

分　野

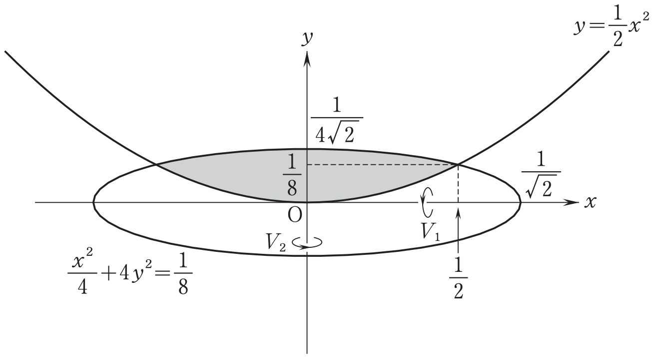
数学Ⅱ：整式の積分，**数学Ⅲ**：体積

考え方

解き方に迷う事はないと思われるが，計算が繁雑になるので，しっかり丁寧に計算する事.

【解答】

(1)



$y=\dfrac{1}{2}x^2$，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2=\dfrac{1}{8}$ の交点の y 座標を求める方程式は

$$\frac{y}{2}+4y^2=\frac{1}{8}.\quad 32y^2+4y-1=(4y+1)(8y-1)=0.$$

$y\geqq0$ より交点は $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$.

$$V_1=\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{1}{32}-\frac{x^2}{16}\right)-\frac{1}{4}x^4\right\}dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x}{32}-\frac{x^3}{48}-\frac{x^5}{20}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{11}{480}\pi. \qquad \cdots(答)$$

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{8}}2y\,dy+\pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy$$

$$=\pi\Big[y^2\Big]_0^{\frac{1}{8}}+\pi\left[\frac{y}{2}-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{4\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi-\frac{7}{192}\pi. \qquad \cdots(答)$$

(2) $\dfrac{V_2}{V_1}-1=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{24}\pi-\dfrac{7}{192}\pi}{\dfrac{11}{480}\pi}-1=\dfrac{40\sqrt{2}-57}{22}.$

$(40\sqrt{2})^2-57^2=3200-3249=-49<0$ より，

$$\frac{V_2}{V_1}<1. \qquad \cdots(答)$$

（注） 最後の部分は $\sqrt{2}=1.4142\cdots$ から $40\sqrt{2}-57=56.568\cdots-57<0$ として導いてもよい．

また $\dfrac{V_2}{V_1}$ と 1 の大小を V_2 と V_1 の大小とみて $V_2-V_1<0$ をいってもよい．

第 4 問

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

分　野

数学 I ：整数

考え方

(1) は連続した自然数が互いに素であるという事実に着眼する．

(2) はその上に連続した n 個の自然数の積の大小関係を利用する．

【解答】

(1) 連続した 2 自然数 m，$m+1$ は互いに素である．

なぜなら m，$m+1$ の公約数を a とおくと，$m=ab$，$m+1=ac$（b，c は自然数）とおける．ところが，$1=(m+1)-m=a(c-b)=1$ となり，$a=1$ でなければならない．したがって，m，$m+1$ の公約数は 1 のみ，すなわち m，$m+1$ は互いに素である．

したがって，$m(m+1)$ が n 乗数なら，m，$m+1$ はともに n 乗数でなければならない．したがって，$m=k^n$，$m+1=l^n$（k，l は自然数）とおけるはずである．ところがこのとき，

$$l^n-k^n=(l-k)(l^{n-1}+l^{n-2}k+l^{n-3}k^2+\cdots+k^{n-1})=1$$

であるが，k，l は自然数なので $l^{n-1}+l^{n-2}k+l^{n-3}k^2+\cdots+k^{n-1}\geqq n\geqq 2$ となり 1 の約数であることと矛盾する．

したがって，連続した 2 個の自然数の積が n 乗数になることはない． （証明終り）

(2) n 個（$n\geqq 3$）の自然数を a，$a+1$，$a+2$，$\cdots$，$a+n-1$ とし，その積を

$N=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$ とする．

このとき，$a^n<N<(a+n-1)^n$．

N が n 乗数だとすると $N=(a+k)^n$（k は自然数で $1\leqq k\leqq n-2$）．

N は $a+k+1$ を約数とするが $a+k+1$ は $N=(a+k)^n$ と互いに素である．これは矛盾である．

したがって，連続した n 個の自然数の積が n 乗数になることはない．（証明終り）

第5問

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の条件(D)を満たすとする。

(D) A の成分 a，b，c，d は整数である。また，平面上の4点 $(0,0)$，(a,b)，$(a+c,b+d)$，(c,d) は，面積1の平行四辺形の4つの頂点をなす。

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 行列 BA と $B^{-1}A$ も条件(D)を満たすことを示せ。

(2) $c=0$ ならば，A に B，B^{-1} のどちらかを左から次々にかけることにより，4個の行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ のどれかにできることを示せ。

(3) $|a|\geqq|c|>0$ とする。BA，$B^{-1}A$ の少なくともどちらか一方は，それを $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とすると

$$|x|+|z|<|a|+|c|$$

を満たすことを示せ。

分　野

数学C：行列

考え方

平行四辺形の面積は $|ad-bc|=1$ だから $\det A=\pm1$ の行列の集合を考えればよい．

(2)(3) は成分計算により，A から BA，$B^{-1}A$ がどのように変化するかを見ればよい．

【解答】

$(0,0)$，(a,b)，$(a+c,b+d)$，(c,d) を4頂点とする平行四辺形の面積は $|ad-bc|$．

これが1だから $ad-bc=\pm1$．

A に対して $ad-bc$ を $\det A$ と書くと，$\det A=\pm1$．これが条件(D)である．

また，$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$．

(1)
$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

よって，$\det(BA)=(a+c)d-(b+d)c=ad-bc=\pm1$．

$$B^{-1}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-c & b-d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

よって，$\det(B^{-1}A)=(a-c)d-(b-d)c=ad-bc=\pm1$．

以上から行列 BA，$B^{-1}A$ は条件(D)をみたす．

(2) $c=0$ のとき，A が(D)をみたすとすると，$ad=\pm1$．

a，d は整数だから $a=\pm 1$，$d=\pm 1$（複号任意）．

$$BA=\begin{pmatrix} a & b+d \\ 0 & d \end{pmatrix},\quad B^{-1}A=\begin{pmatrix} a & b-d \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

BA，$B^{-1}A$ は A の 1-2 成分以外をそのままにして，1-2 成分の b を $b\pm d$ で置換えたもの．
$d=\pm 1$ で b は整数だから，何回か繰り返すと b は 0 になる．

よって，A に B または B^{-1} のどちらかを左から次々にかけると，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ つまり，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のどれかになる．　（証明終り）

(3) $BA=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，$|x|+|z|=|a+c|+|c|$.

$B^{-1}A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと，$|x|+|z|=|a-c|+|c|$.

$|a|\geqq|c|>0$ だから $|a-c|<|a|<|a+c|$ または $|a+c|<|a|<|a-c|$.
よって，BA または $B^{-1}A$ の少なくとも一方は $|x|+|z|<|a|+|c|$ をみたす．　（証明終り）

（注）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $c\neq 0$ のとき，自然数 n に対して $B^{-n}=(B^{-1})^n$，$B^0=E$（単位行列）とし，整数 n に対して，$B^nA=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とすると，上の結果から，$c_n=c$ で，$|a_n|<|c|$ となる n が存在することがいえる．さらに，$B^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B^nA=\begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix}$ だから，$|a_n|\leqq\frac{1}{2}|c|$ となる n が存在することもいえる．これらのことは，a，b，c，d が整数であることには関らない．

第6問

2×2 行列 $P=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$\mathrm{Tr}(P)=p+s$$

と定める。

a，b，c は $a\geqq b>0$，$0\leqq c\leqq 1$ を満たす実数とする。行列 A，B，C，D を次で定める。

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} a^c & 0 \\ 0 & b^c \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} b^{1-c} & 0 \\ 0 & a^{1-c} \end{pmatrix}$$

また実数 x に対し $U(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 各実数 t に対して，x の関数

$$f(x)=\mathrm{Tr}\left(\left(U(t)AU(-t)-B\right)U(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}U(-x)\right)$$

の最大値 $m(t)$ を求めよ。（ただし，最大値をとる x を求める必要はない。）

(2) すべての実数 t に対し

$$2\mathrm{Tr}\left(U(t)CU(-t)D\right)\geqq\mathrm{Tr}\left(U(t)AU(-t)+B\right)-m(t)$$

が成り立つことを示せ。

分　野

数学C：行列，**数学Ⅱ**：三角関数，和積公式

考え方

一見複雑そうに見えるが，$U(t)AU(-t)$ の計算結果を何度も使えばよい.

三角関数の計算力が必要である.

最後の部分は $|\cos t|$ の 2 次関数あるいは因数分解して 2 つの 1 次関数の積としてその正負を見きわめられる.

【解答】

(1) $$U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t\end{pmatrix}.$$
$$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t-b & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t-a\end{pmatrix}$$
$$=(a-b)\begin{pmatrix}\cos^2 t & \sin t\cos t\\ \sin t\cos t & -\cos^2 t\end{pmatrix}$$
$$=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1+\cos 2t & \sin 2t\\ \sin 2t & -1-\cos 2t\end{pmatrix}.$$
$$U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos^2 x-\sin^2 x & 2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}.$$
$$\Bigl(U(t)AU(-t)-B\Bigr)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)$$
$$=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1+\cos 2t & \sin 2t\\ \sin 2t & -1-\cos 2t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}$$
$$=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}\cos 2x+\cos 2(t-x) & \sin 2x-\sin 2(t-x)\\ -\sin 2x+\sin 2(t-x) & \cos 2x+\cos 2(t-x)\end{pmatrix}.$$

よって，
$$f(x)=\mathrm{Tr}\left(\Bigl(U(t)AU(-t)-B\Bigr)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}U(-x)\right)=(a-b)\{\cos 2x+\cos 2(t-x)\}.$$

和積公式から
$$f(x)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t).$$

$a\geqq b$ より，$f(x)$ の最大値は $m(t)=2(a-b)|\cos t|$.　…(答)

(2) $$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix}a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t\\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^{1-c} & 0\\ 0 & a^{1-c}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^cb^{1-c}\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-a^{1-c}b^c)\sin t\cos t\\ (a^cb^{1-c}-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+a^{1-c}b^c\cos^2 t\end{pmatrix}.$$

よって，
$$2\mathrm{Tr}\Bigl(U(t)CU(-t)D\Bigr)=2(a+b)\sin^2 t+2(a^cb^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t.$$
$$U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t+b & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t+a\end{pmatrix}.$$

よって，
$$\mathrm{Tr}\Bigl(U(t)AU(-t)+B\Bigr)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|.$$

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{Tr}\Big(U(t)CU(-t)D\Big)-\Big\{\mathrm{Tr}\Big(U(t)AU(-t)+B\Big)-m(t)\Big\}\\
&\qquad=\{2(a+b)\sin^2 t+2(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t\}-\{2(a+b)-2(a-b)|\cos t|\}\\
&\qquad=2(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c-a-b)\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|\\
&\qquad=-2(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|.
\end{aligned}$$

$0<b\leqq a$，$0\leqq c\leqq 1$ より，$a^c-b^c\geqq 0$，$a^{1-c}-b^{1-c}\geqq 0$.

この関数は $|\cos t|$ の 2 次関数で，$|\cos t|^2$ の係数が負または 0 で，$0\leqq|\cos t|\leqq 1$ だから $|\cos t|=0$ または $|\cos t|=1$ のときに最小になる．$|\cos t|=0$ のときは 0．$|\cos t|=1$ のときは

$$2(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c-a-b)+2(a-b)=2\{(a^c-b^c)b^{1-c}+(a^{1-c}-b^{1-c})b^c\}\geqq 0.$$

だから常に

$$-2(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|\geqq 0.$$

よって，

$$2\mathrm{Tr}\Big(U(t)CU(-t)D\Big)\geqq\mathrm{Tr}\Big(U(t)AU(-t)+B\Big)-m(t).$$

（証明終り）

（注） 最後の部分は，

$$2\{-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})|\cos t|+(a-b)\}|\cos t|$$

とすると，$0\leqq|\cos t|\leqq 1$ で $-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})\leqq 0$ だから，

$$\begin{aligned}
-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})|\cos t|+(a-b)&\geqq-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})+(a-b)\\
&=\{(a^c-b^c)b^{1-c}+(a^{1-c}-b^{1-c})b^c\}\geqq 0.
\end{aligned}$$

として，

$$2\{-(a^c-b^c)(a^{1-c}-b^{1-c})|\cos t|+(a-b)\}|\cos t|\geqq 0$$

を示してもよい．

2013年　前期・文科

第1問

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点Oを通る傾き t の直線を ℓ とし，C と ℓ がO以外に共有点をもつとする。C と ℓ の共有点をO，P，Qとし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それらの共有点の1つが接点である場合は，O，P，Qのうち2つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，高次方程式

考え方

$g(t)$ を求めるところまでは自然．絶対値をつけて考える．極値については計算が複雑になるので，割り算などの利用を考える．絶対値について場合分けがあるので注意．

【解答】

ℓ：$y=tx$．C との交点の x 座標は

$$x(x-1)(x-3)=tx$$

の解．Oは必ず交点だから，P，Qの交点の x 座標は方程式，

$$(x-1)(x-3)=(x-2)^2-1=x^2-4x+3=t$$

の2解．

実数解をもつ条件は，$t \geqq -1$．P，Q の x 座標を α，β とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha\beta=3-t.$$

傾きと線分長の関係から，

$$g(t)=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\alpha||\beta|(t^2+1)=|3-t|(t^2+1).$$

(i)　$t>3$ のとき，

$$g(t)=t^3-3t^2+t-3.\quad g'(t)=3t^2-6t+1.$$

$t>3$ では $g'(t)>0$．極値をとらない．

(ii)　$-1 \leqq t \leqq 3$ のとき，

$$g(t)=-t^3+3t^2-t+3.\quad g'(t)=-3t^2+6t-1.$$

$t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ で極値をとる．

増減は次のよう．

x	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$
$g(t)$	8	↘		↗		↘	0	↗

$-1 \leqq t \leqq 3$ のとき，

$$g(t)=-\left(t^2-2t+\frac{1}{3}\right)(t-1)+\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}$$

から，

$$g\left(\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\frac{8}{3}=\frac{36\pm4\sqrt{6}}{9}\quad（複号同順）.$$

以上から，

$g(t)$ は $t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ で極小値 $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$，$t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$ で極大値 $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$，$t=3$ で極小値 0 をとる．

…(答)

第 2 問

座標平面上の 3 点

$$\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\quad \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),\quad \mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 PA−AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和

$$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$$

は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：平面座標，**数学C**：二次曲線

考え方

内容的には**数学C**（当時），二次曲線の問題であるがその知識を前提とはしていない．

長さを求めるとき，当然平方根で求めるが，開けるようになっている．平方根の正負を確かめ，長さを求める．長さが求まればあとは容易．

【解答】

(1)
$$\mathrm{PA}^2=a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2=2a^2+3+2\sqrt{2(a^2+1)}=(\sqrt{2(a^2+1)}+1)^2.$$
$$\mathrm{AQ}^2=a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2=2a^2+3-2\sqrt{2(a^2+1)}=(\sqrt{2(a^2+1)}-1)^2.$$

$0 \leqq a \leqq 1$ から

$$\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}=(\sqrt{2(a^2+1)}+1)-(\sqrt{2(a^2+1)}-1)=2.$$

よって，PA−AQ は a によらず一定で 2．　…(答)

(2) $0 \leqq a \leqq 1$ において，$\dfrac{\sqrt{2}}{8}a^2<\sqrt{a^2+1} \leqq \sqrt{2}$ であるから，A はつねに放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ より上にあり，(B の y 座標)≦(A の y 座標)≦(Q の y 座標)$=\sqrt{2}$ である．

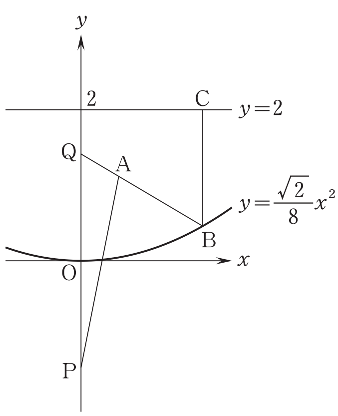
B の座標を $\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とおくとき，

$$\mathrm{BC}=2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2,$$

$$\mathrm{QB}^2=t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2$$

から，

$$\mathrm{BC}+\mathrm{QB}=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)=2+\sqrt{2}.$$



これと (1) から

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=(\mathrm{PA}-\mathrm{AQ})+(\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC})\\&=(\mathrm{PA}-\mathrm{AQ})+(\mathrm{QB}+\mathrm{BC})\\&=2+(2+\sqrt{2})=4+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

よって，PA＋AB＋BC は a によらず一定で $4+\sqrt{2}$．　…(答)

（注） A の軌跡 $y=\sqrt{x^2+1}$ は双曲線の上半分で，P，Q はその焦点である．また，Q は放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ の焦点であり，準線は P を通り x 軸に平行な直線である．

数学C（当時）の知識を使えば，双曲線の上半分にある点 A について，PA＞QA で，PA－AQ は 2 頂点間の距離（主軸の長さ）2 に等しい．

B から放物線の準線へ下した垂線の足を D とおくと，BD＝BQ．準線と $y=2$ は平行だから，CD の長さは常に一定で，$2+\sqrt{2}$．

B が $y\leqq 2$ にある限り，BQ＋BC＝CD＝$2+\sqrt{2}$ である．

第3問

a，b を実数の定数とする。実数 x，y が

$$x^2+y^2\leqq 25,\quad 2x+y\leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。

分　野

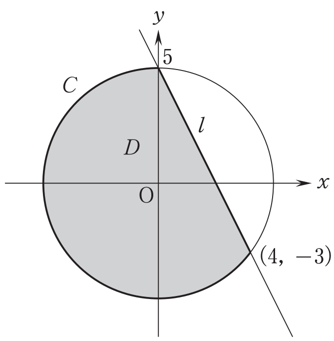
数学Ⅱ：不等式と領域

考え方

z は「(点$(a,\ b)$からの距離の 2 乗)＋(定数)」の形をしている．点$(a,\ b)$からの距離が最小な D の点で z は最小になる．$(a,\ b)$ が D 内も含めてどこにあるかによって最小値が場合分けされる．

どのような場合があるかを丹念に調べ，場合分けして答える．

【解答】



$x^2+y^2\leqq 25$，$2x+y\leqq 5$ が表す領域を D とする．

C：$x^2+y^2=25$ と l：$2x+y=5$ の交点は $(0,\ 5)$ と $(4,\ -3)$．

D は右図網掛部，境界を含む．

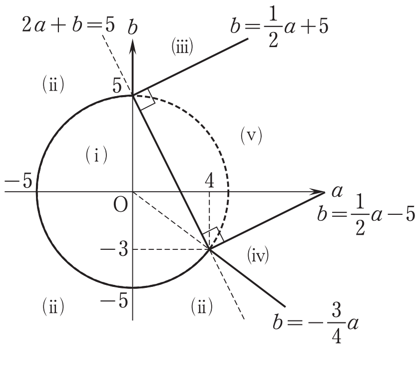
$z=x^2+y^2-2ax-2by$ は点 P$(a,\ b)$ を中心とする

円 S：$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2+z$

を表す．

したがって，S と D が共有点をもつ最小の z が求めるもの．

$m=$(P と D の距離の最小値) とすると，z の最小値は $m^2-(a^2+b^2)$ である．



(i) $a^2+b^2\leqq 25$，$2a+b\leqq 5$ のとき，

点 P は領域 D 内にある．

距離が最小になるのは $(x,\ y)=(a,\ b)$ のときで，

$m=0$ だから z の最小値は

$$-a^2-b^2.$$

(ii) $a^2+b^2>25$ かつ「$a\leqq 0$ または $b\leqq -\dfrac{3}{4}a$」のとき，

S と D が接するとき，接点は C 上の点．

$m=\sqrt{a^2+b^2}-5$ だから，z の最小値は

$$(\sqrt{a^2+b^2}-5)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}.$$

(iii) $a>0$, $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき，

S と D が接するとき，接点は $(0,\ 5)$．z の最小値は

$$0^2+5^2-2a\times 0-2b\times 5=25-10b.$$

(iv) $b>-\frac{3}{4}a$, $b \leqq \frac{1}{2}a-5$ のとき，

S と D が接するとき，接点は $(4,\ -3)$．z の最小値は

$$4^2+(-3)^2-2a\times 4-2b\times(-3)=25-8a+6b.$$

(v) $2a+b>5$, $\frac{1}{2}a-5<b<\frac{1}{2}a+5$ のとき，

S と D が接するとき，接点は l 上の点．

$m=\frac{2a+b-5}{\sqrt{5}}$ だから，z の最小値は

$$\frac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25).$$

以上，(i)〜(v) より求める最小値は

$$\begin{cases} -a^2-b^2 & (a^2+b^2 \leqq 25,\ 2a+b \leqq 5 \text{ のとき}), \\ 25-10\sqrt{a^2+b^2} & \left(a^2+b^2>25 \text{ かつ「} a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\frac{3}{4}a \text{」のとき}\right), \\ 25-10b & \left(a>0,\ b \geqq \frac{1}{2}a+5 \text{ のとき}\right), \\ 25-8a+6b & \left(b>-\frac{3}{4}a,\ b \leqq \frac{1}{2}a-5 \text{ のとき}\right), \\ \frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25) & \left(2a+b>5,\ \frac{1}{2}a-5<b<\frac{1}{2}a+5 \text{ のとき}\right). \end{cases}$$

…(答)

第4問

A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii) B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

分　野

数学A：確率

考え方

裏がでるとコインは移動するだけで得点はない．裏が奇数回出た後表が出ると B の得点になり，偶数回出た後表が出ると A の得点になる．

得点のとり方が複雑だが，A の得点が 2 点なので，AA，ABA，BAA の順で得点する場合だけであることに注目して場合分けして確率を計算する．

【解答】

裏が出続ける限りコインは A と B の間を往復する．最初どちらかが得点するまでは A は奇数回目にコインをもち，B は偶数回目にコインをもつ．A または B が表を出して得点すると，A が偶数回目にコインをもち，B が奇数回目にコインをもつようになる．このように得点があるたびに A，B のもつ回数の偶奇がかわる．

(i) B が得点しないで，A が 2 回得点する場合．

A が最初に得点するのは奇数回目，2 回目は偶数回目．

$n=2m$ のとき，A が初めて表を出す場合は，1，3，5，…，$2m-1$ 回目の m 通り考えられる．

その確率は

$$m\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^{n+1}}.$$

(ii) A が先に得点し，B が次に得点し，最後に A が得点する場合．

A が最初に得点するのは奇数回目，B が次に得点するのは奇数回目，A が最後に得点するのも奇数回目である．

$n=2m+1$ のとき，n より小さい正の奇数は m 個あるから，$m\geqq 2$ で，場合の数は ${}_m\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}m(m-1)$ 通り．

その確率は

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}.$$

(iii) B が先に得点して，A が次に得点し，最後に A が得点する場合．

B が最初に得点するのは偶数回目，A が次に得点するのも偶数回目，A が最後に得点するのは奇数回目である．

$n=2m+1$ のとき，n より小さい正の偶数は m 個あるから，$m\geqq 2$ で，場合の数は ${}_m\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}m(m-1)$ 通り．

その確率は

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}.$$

A が勝利するのはこれ以外ない．

n が偶数回のときは (i) のみ，奇数回のときは (ii) と (iii) のときがあるから，$n=1$，3 の場合も含めて

$$p(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき}),\\[2ex] \dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases}$$

…(答)

2013 年　前期・理科

第 1 問

実数 a，b に対し平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\ y_n)$ を

$$(x_0,\ y_0)=(1,\ 0)$$

$$(x_{n+1},\ y_{n+1})=(ax_n-by_n,\ bx_n+ay_n)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，次の条件 (i)，(ii) がともに成り立つような $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(i)　$\mathrm{P}_0=\mathrm{P}_6$

(ii)　P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なる。

分　野

数学 C：行列，一次変換

考え方

行列の形で出題されていないが，一次変換の問題であり，変換は回転と相似拡大の合成変換である．そのことに気が付けば答は見えてくる．

【解答】

$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ で，与条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=A\overrightarrow{\mathrm{P}_n}$$

と表される．

$a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$ $(r\geqq 0)$ とおくと，$A=r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$．

(i) から

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_6}=A^6\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=r^6\begin{pmatrix} \cos 6\theta & -\sin 6\theta \\ \sin 6\theta & \cos 6\theta \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}.$$

$$r^6\begin{pmatrix} \cos 6\theta \\ \sin 6\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

よって，

$$r^6=1,\quad 6\theta=2n\pi\quad (n \text{ は整数}).$$

$r\geqq 0$ より，

$$r=1,\quad \theta=\frac{n}{3}\pi\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

$n=0$ のとき $A=E$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ となり，(ii) に反する．

$n=2,\ 4$ のとき，$3\theta=n\pi$ $(n=2,\ 4)$ となるから，$A^3=E$．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ となり，(ii) に反する．

$n=3$ のとき，$2\theta=2\pi$ となり，$A^2=E$．よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ となり，(ii) に反する．

$n=1$ のとき，

$$\mathrm{P}_0(1,\ 0),\quad \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_3(-1,\ 0),\quad \mathrm{P}_4\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_5\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

で，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なり (ii) をみたす．

$n=5$ のとき，

$$\mathrm{P}_0(1,\ 0),\quad \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_2\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_3(-1,\ 0),\quad \mathrm{P}_4\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \mathrm{P}_5\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

で，P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 は相異なり (ii) をみたす．

以上より，$n=1$，5．よって，

$$(a,\ b)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad \cdots(答)$$

第2問

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x}$$

$$g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど3つ持つような a をすべて求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法

考え方

$f(x)=g(x)$ を変形して，$a=F(x)$ の形にすると見通しがよい．

【解答】

$x>0$ だから，$f(x)=g(x) \iff a=\dfrac{\cos x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x}$.

$F(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}-\dfrac{\sin x}{x}$ とおく．

$$F'(x)=\frac{(-\sin x)x^2-(\cos x)(2x)}{x^4}-\frac{(\cos x)x-\sin x}{x^2}=\frac{-(x^2+2)\cos x}{x^3}.$$

よって，$F'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{2n+1}{2}\pi$（n は負でない整数）．

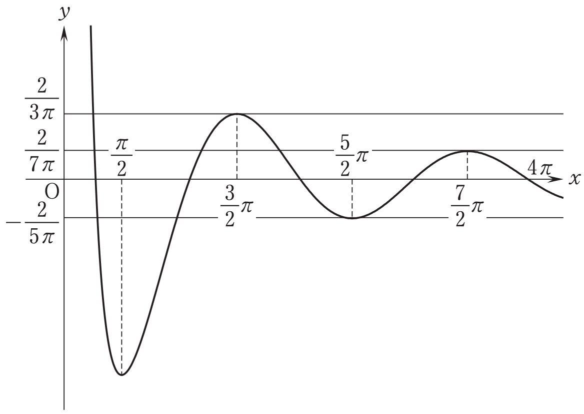
$$F\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)=-\frac{2(-1)^n}{(2n+1)\pi}.$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$	4π	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		$\cdots$
$F(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{2}{\pi}$	↗	$\frac{2}{3\pi}$	↘	$-\frac{2}{5\pi}$	↗	$\frac{2}{7\pi}$	↘	0	$\cdots$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}F(x)=+\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}F(x)=0$.

極値の絶対値 $\left|F\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)\right|=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$ は単調に減少する．

$y=F(x)$ のグラフは次頁の図のよう．



よって，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど3つ持つような a は

$$a=-\frac{2}{5\pi},\quad \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第3問

A，Bの2人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが1枚あり，最初はAがそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i) Aがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればAに1点与え，コインはAがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，AはコインをBに渡す。

(ii) Bがコインを持っているときは，コインを投げ，表が出ればBに1点与え，コインはBがそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，BはコインをAに渡す。

そしてA，Bのいずれかが2点を獲得した時点で，2点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点でAは1点，Bは2点を獲得しているのでBの勝利となる。

(1) A，Bあわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときにAの勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学Ⅲ**：無限級数

考え方

(1)は文科第4問と共通．

和の極限は奇数番目までと偶数番目まででは式の形が異なるが $p(2m)\to 0$ となるから，奇数番目までの和を求めればよい．

$p(2m)\to 0$ を導くとき，$\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2^{2m}}=0$ を使うことになる．これを導くには，二項係数と比較することによって示す方法はよく使われる．

$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めるとき，$\lim_{m\to\infty}\frac{m^2}{2^{2m}}=0$ を使うことになる．$\frac{m}{2^m}$ の極限を使えば容易に示せる．

$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めるとき，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\text{の2次式}}{r^n}$ の形の和を求めなければならない．

もちろん部分和を求めることになる．分子が n の１次式のときは，等差数列×等比数列 の和を求める方法を使う．分子が n の２次式のときは同じ方法を２回行うと等比数列の和の形が現れる．それを使う．

【解答】

(1) 裏が出続ける限りコインはＡとＢの間を往復する．最初どちらかが得点するまではＡは奇数回目にコインをもち，Ｂは偶数回目にコインをもつ．ＡまたはＢが表を出して得点すると，Ａが偶数回目にコインをもち，Ｂが奇数回目にコインをもつようになる．このように得点があるたびにＡ，Ｂのもつ回数の偶奇がかわる．

(i) Ｂが得点しないで，Ａが２回得点する場合．

Ａが最初に得点するのは奇数回目，２回目は偶数回目．

$n=2m$ のとき，Ａが初めて表を出す場合は，1，3，5，…，$2m-1$ 回目の m 通り考えられる．

その確率は

$$m\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n}{2^{n+1}}.$$

(ii) Ａが先に得点し，Ｂが次に得点し，最後にＡが得点する場合．

Ａが最初に得点するのは奇数回目，Ｂが次に得点するのは奇数回目，Ａが最後に得点するのも奇数回目である．

$n=2m+1$ のとき，n より小さく正の奇数は m 個あるから，$m\geqq 2$ で，場合の数は

${}_mC_2=\frac{1}{2}m(m-1)$ 通り．

その確率は

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}.$$

(iii) Ｂが先に得点して，Ａが次に得点し，最後にＡが得点する場合．

Ｂが最初に得点するのは偶数回目，Ａが次に得点するのも偶数回目，Ａが最後に得点するのは奇数回目である．

$n=2m+1$ のとき，n より小さい正の偶数は m 個あるから，$m\geqq 2$ で，場合の数は

${}_mC_2=\frac{1}{2}m(m-1)$ 通り．

その確率は

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{(n-1)(n-3)}{2^{n+3}}.$$

Ａが勝利するのはこれ以外ないから，$n=1,\ 3$ の場合も含めて

$$p(n)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-3)}{2^{n+2}} & (n\text{ が奇数のとき}),\\[2mm] \dfrac{n}{2^{n+1}} & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) m を自然数とするとき，$p(2m)=\frac{m}{2^{2m}}$，$p(2m+1)=\frac{m(m-1)}{2^{2m+1}}$.

$$0<p(2m)=\frac{m}{2^{2m}}<\frac{1+m}{2^{2m}}<\frac{(1+1)^m}{2^{2m}}=\frac{1}{2^m}$$

でハサミウチの原理から，$\lim_{m\to\infty}p(2m)=0$.

$p(2m)+p(2m+1)=\frac{m(m+1)}{2^{2m+1}}$，$p(1)=0$ から，

$$\sum_{k=1}^{2m+1}p(k)=\sum_{l=1}^{m}\frac{l(l+1)}{2^{2l+1}}.$$

これを $P(m)$ とおくと，

$$\begin{array}{rl}
4P(m)= & \dfrac{1\cdot 2}{2}+\dfrac{2\cdot 3}{2^3}+\dfrac{3\cdot 4}{2^5}+\cdots+\dfrac{m(m+1)}{2^{2m-1}} \\
-)\ P(m)= & \qquad\quad \dfrac{1\cdot 2}{2^3}+\dfrac{2\cdot 3}{2^5}+\cdots+\dfrac{(m-1)m}{2^{2m-1}}+\dfrac{m(m+1)}{2^{2m+1}} \\
\hline
3P(m)= & \dfrac{2\cdot 1}{2}+\dfrac{2\cdot 2}{2^3}+\dfrac{2\cdot 3}{2^5}+\cdots+\dfrac{2m}{2^{2m-1}}-\dfrac{m(m+1)}{2^{2m+1}} \\
= & \displaystyle\sum_{l=0}^{m-1}\frac{l+1}{2^{2l}}-\frac{m(m+1)}{2^{2m+1}}
\end{array}$$

$Q(m)=\displaystyle\sum_{l=0}^{m-1}\frac{l+1}{2^{2l}}$ とおくと，

$$\begin{array}{rl}
4Q(m)= & \dfrac{1}{2^{-2}}+\dfrac{2}{2^0}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{m}{2^{2(m-2)}} \\
-)\ Q(m)= & \qquad\quad \dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{m-1}{2^{2(m-2)}}+\dfrac{m}{2^{2(m-1)}} \\
\hline
3Q(m)= & 4+1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2(m-2)}}-\dfrac{m}{2^{2(m-1)}} \\
= & \displaystyle\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{2^{2l-2}}-\frac{m}{2^{2m-2}} \\
= & \dfrac{16}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^m}\right)-\dfrac{m}{2^{2m-2}}=\dfrac{16}{3}-\dfrac{16}{3}\dfrac{1}{2^{2m}}-\dfrac{m}{2^{2m-2}}
\end{array}$$

よって，

$$\begin{aligned}
P(m)&=\frac{1}{3}Q(m)-\frac{m(m+1)}{3\cdot 2^{2m+1}}=\frac{16}{27}-\frac{16}{27\cdot 2^{2m}}-\frac{m}{9\cdot 2^{2m-2}}-\frac{m(m+1)}{3\cdot 2^{2m+1}} \\
&=\frac{16}{27}-\frac{16}{27\cdot 2^{2m}}-\frac{11m}{9\cdot 2^{2m+1}}-\frac{m^2}{3\cdot 2^{2m+1}}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2^{2m}}=\lim_{m'\to\infty}\frac{\frac{m'}{2}}{2^{m'}}=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{2^m}=0$ だから，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{m^2}{2^{2m}}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{2^m}\right)^2=0.$

よって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m+1}p(n)=\lim_{m\to\infty}P(m)=\frac{16}{27}$，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{2m+2}p(n)=\lim_{m\to\infty}\{P(m)+p(2m+2)\}=\frac{16}{27}$ だから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}. \qquad \cdots(答)$$

（注）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{m}{2^m}=0$ については **2003 年理科　第 5 問**の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n\ (|r|<1)$ と同様に既知として扱った．また，その証明については同問の（注）を参照されたい．

第 4 問

$\triangle$ABC において $\angle$BAC$=90°$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$$

を満たすとする。

(1)　$\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。
(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。

分　野

数学B：ベクトル，**数学Ⅰ**：三角比

考え方

(1) は3つの単位ベクトルの和が $\vec{0}$ となるから，それらのなす角は $\frac{2}{3}\pi$ である．

(2) はいろいろ方法がある．PA$=a$，PB$=b$，PC$=c$ とおき，$ab+bc+ca$，$a^2+b^2+c^2$ を面積や余弦定理で出すと，後は文字を1つずつ消去してゆくだけ．

【解答】

(1)　3つのベクトル $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$ は単位ベクトルであるから，これらの和が $\vec{0}$ になるのは3つのベクトルが正三角形の3辺を表すベクトルになる．したがって，3つのベクトルは互いに $\frac{2}{3}\pi$ をなす．

よって，

$$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{APC}=\frac{2}{3}\pi. \qquad \cdots(答)$$

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおく．

△ABC の面積に関して △ABC$=$△PBC$+$△PCA$+$△PAB が成り立つから

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}ca\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって，

$$2=bc+ca+ab. \qquad \cdots①$$

一方，三平方の定理から，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=2$ であり，△PBC，△PCA，△PAB に関する余弦定理から

$$4=b^2+c^2+bc, \qquad \cdots②$$
$$3=c^2+a^2+ca, \qquad \cdots③$$
$$1=a^2+b^2+ab. \qquad \cdots④$$

②$+$③$+$④，① から

$$8=2(a^2+b^2+c^2)+(bc+ca+ab)=2(a^2+b^2+c^2)+2.$$

よって，

$$a^2+b^2+c^2=3.\quad (a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(bc+ca+ab)=7. \qquad (① より)$$
$$\therefore\quad a+b+c=\sqrt{7}. \qquad \cdots⑤$$

②$-$③，⑤ から，

$$1=b^2-a^2+c(b-a)=(b-a)(a+b+c)=\sqrt{7}(b-a).$$
$$b-a=\frac{1}{\sqrt{7}}.\quad a=b-\frac{1}{\sqrt{7}} \qquad \cdots⑥$$

③$-$④，⑤ から，

$$2=c^2-b^2+a(c-b)=(c-b)(a+b+c)=\sqrt{7}(c-b).$$
$$c-b=\frac{2}{\sqrt{7}}.\quad c=b+\frac{2}{\sqrt{7}}. \qquad \cdots⑦$$

⑥，⑦ を ⑤ に代入して，

$$\left(b-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+b+\left(b+\frac{2}{\sqrt{7}}\right)=3b+\frac{1}{\sqrt{7}}=\sqrt{7}.$$

よって，

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad a=\frac{1}{\sqrt{7}},\quad c=\frac{4}{\sqrt{7}}.$$

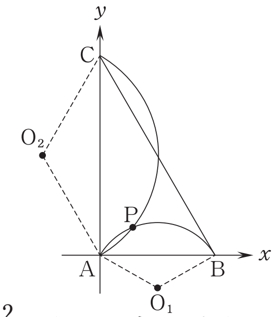
つまり，

$$|\overrightarrow{PA}|=\frac{1}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{PB}|=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{PC}|=\frac{4}{\sqrt{7}}. \qquad \cdots(答)$$

(2) の【別解 1】 座標の利用

考え方

$\angle BAC$ が直角だから A を原点とする座標系をとる．$\angle APB$，$\angle APC$ が $\frac{2}{3}\pi$ だから円周角の関係から P が存在する円が定まる．2 円の交点のうち A と異なる点が P である．P の座標が定まれば，PA，PB，PC の長さは自然に定まる．



A(0, 0)，B(1, 0)，C$(0, \sqrt{3})$ のように座標をおく．

$\angle APB=\frac{2}{3}\pi$ だから，$y<0$ の範囲で，$AO_1=BO_1$ で，$\angle AO_1B=\frac{2}{3}\pi$ となる点 O_1 をとると，P は O_1 を中心とする A，B を通る円周上にある．O_1 の座標は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ で円 O_1 の方程式は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}.\quad x^2-x+y^2+\frac{1}{\sqrt{3}}y=0. \qquad \cdots①$$

また，$\angle APC=\frac{2}{3}\pi$ だから，$x<0$ の範囲で，$AO_2=CO_2$ で，$\angle AO_2C=\frac{2}{3}\pi$ となる点 O_2 をとると，P は O_2 を中心とする A，C を通る円周上にある．O_2 の座標は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 O_2 の方程式は

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1.\quad x^2+x+y^2-\sqrt{3}\,y=0. \qquad \cdots②$$

P は 2 円 O_1，O_2 の交点．②−① より，$2x-\frac{4}{\sqrt{3}}y=0$．$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x$．① に代入して，

$$x=0,\quad x=\frac{2}{7}.$$

P は 2 円の交点のうち A と異なる点だから，その座標は

$$P\left(\frac{2}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right).$$

よって，

$$|\overrightarrow{PA}|=\frac{1}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{PB}|=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{PC}|=\frac{4}{\sqrt{7}}. \qquad \cdots(答)$$

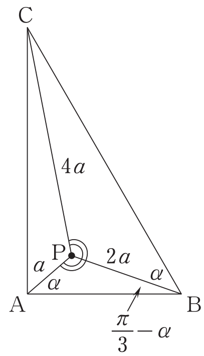
(2) の【別解 2】 三角形の相似と正弦定理

考え方

三角形の内角の和と，角の大きさの関係を比較すると，$\triangle PAB \backsim \triangle PBC$ で相似比は 1 : 2 であることに気付く．この関係と正弦定理から PA，PB，PC が求められる．

このような点Pがとれたとし，$\angle\mathrm{PAB}=\alpha$ とすると，

$$\angle\mathrm{ABP}=\frac{\pi}{3}-\angle\mathrm{PAB}=\frac{\pi}{3}-\alpha,\quad \angle\mathrm{PBC}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{ABP}=\alpha.$$



$\triangle\mathrm{ABP}$ と $\triangle\mathrm{BCP}$ において，$\angle\mathrm{PAB}=\angle\mathrm{PBC}$，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}=\frac{2}{3}\pi$ だから，$\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{BCP}$．相似比は $\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=1:2$．よって，$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=1:2$．

$\mathrm{PA}=a$

とおくと，$\mathrm{PB}=2a$．また，$\mathrm{PC}=4a$．

正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{2a}{\sin\alpha}.$$

よって，

$$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\alpha,\quad 2a=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha.$$

これと，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ から，

$$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a=\frac{1}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2a=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad |\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=4a=\frac{4}{\sqrt{7}}.$$

…(答)

第5問

次の命題Pを証明したい。

命題P　次の条件(a)，(b)をともに満たす自然数（1以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する3つの自然数の積である。

(b)　A を10進法で表したとき，1が連続して99回現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題Pを証明せよ。

分　野

数学Ⅰ：2次不等式，整数，**数学A**：論証問題

考え方

(1)は x の2次不等式になるので容易．

(2)のポイントは $\underbrace{111\cdots1}_{99\text{個}}$ が3で割り切れるから，これを $3y$ とおくことである．

x を 10^n として，n を十分大きくすると，$3y$ の前後に0が並ぶ数を作ることができる．

【解答】

(1)
$$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-(x^3+3yx^2)=(x+y)^3-(x+y)-(x^3+3yx^2)$$
$$=(3y^2-1)x+y^3-y>0.$$

y は自然数で，x は正の実数のとき，$3y^2-1>0$，$y^3-y\geqq 0$ より，上の不等式は常に成り立つ．

$\{x^3+(3y+1)x^2\}-(x+y-1)(x+y)(x+y+1)=x^2-(3y^2-1)x-y^3+y>0.$

$f(x)=x^2-(3y^2-1)x-y^3+y$ とおくと，$f(0)\leqq 0$ だから，

$$x>\frac{3y^2-1+\sqrt{(3y^2-1)^2+4(y^3-y)}}{2}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) (1)で $\underbrace{111\cdots1}_{99\text{個}}=111\times(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96})=3\cdot37(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96}).$

$y=37(1+10^3+10^6+\cdots+10^{96})$，$x=10^n$（$n$ は自然数）とおくと，

$$x^3+3yx^2=1\underbrace{000\cdots0}_{3n\text{個}}+\underbrace{111\cdots1}_{99\text{個}}\underbrace{000\cdots0}_{2n\text{個}}.$$

$n\geqq 100$ とすると，

$$x^3+3yx^2=1\underbrace{000\cdots0}_{n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots1}_{99\text{個}}\underbrace{000\cdots0}_{2n\text{個}}$$

となる．

$$x^3+3yx^2+x^2=1\underbrace{000\cdots0}_{n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots1}_{98\text{個}}2\underbrace{000\cdots0}_{2n\text{個}}.$$

$$x^3+(3y+1)x^2-1=1\underbrace{000\cdots0}_{n-99\text{個}}\underbrace{111\cdots1}_{99\text{個}}\underbrace{999\cdots9}_{2n\text{個}}.$$

よって，

$$x^3+3yx^2<N<x^3+(3y+1)x^2$$

をみたす自然数は1が連続して99個現れる自然数である．

したがって，このように x，y を与えれば連続した3つの自然数の積 $(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$ は10進法で表すと1が連続して99個現れる数である．よって命題Pは証明された．（証明終り）

(2)の【別解】 (1)と関係なく

連続する3つの自然数の積を $A(n)=n(n+1)(n+2)$ とする．

$$\frac{A(n+1)-A(n)}{A(n)}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)-n(n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{3}{n}$$

$n>3\times10^{99}$ のとき，n を1だけ増やした $A(n)$ の増え分は $A(n)$ の $\dfrac{1}{10^{99}}$ 倍以下となる．したがって，$A(n)$ と $A(n+1)$ の桁が等しければ，$A(n+1)$ の上位99桁は $A(n)$ の上位99桁と等しいか99桁目が1多いかのいずれかである．また桁が1増えたときは $A(n)$ の上位99桁は9が99個，$A(n+1)$ の上位99桁は先頭が1で以下0が98個並ぶ．

$A(n)\to\infty$ であるから，$n>3\times10^{99}$ のとき，$A(n)$ の上位99桁は $1\underbrace{000\cdots00}_{98\text{個}}$ から $\underbrace{999\cdots99}_{99\text{個}}$ までのすべての数の並びをとりながら増加する．したがって，$A(n)$ のうち上位99桁がすべて1であるものも存在する．（証明終り）

第6問

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点 A$(-1, 1, 0)$，B$(1, 1, 0)$，C$(1, -1, 0)$，D$(-1, -1, 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1) $0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2) V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，**数学B**：空間座標

考え方

AB 上の点 P$(p, 1, 0)$ を BD について回転して P がみたすべき方程式を求め，p を消去することで，AB を回転してできる円錐の方程式がえられる．

$x=t$，z を固定して，y の範囲を求めこれを z で積分すれば断面積をうる．

円錐の $x=t$ における切り口は放物線になる．

【解答】

(1) 辺 AB 上の点 P$(p, 1, 0)$ $(-1\leqq p\leqq 1)$ から BD へ下した垂線の足は H$\left(\dfrac{p+1}{2}, \dfrac{p+1}{2}, 0\right)$.

PH$=\dfrac{1-p}{\sqrt{2}}$ である．

P を BD を軸に回転するときに，P が描く図形の方程式は

$$x+y=p+1,\quad \left(x-\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{p+1}{2}\right)^2+z^2=\frac{(1-p)^2}{2}.$$

これは辺 BC 上の点 $(1, p, 0)$ も通る．

p を消去すると

$$z^2=2(x-1)(y-1)\quad (0\leqq x+y\leqq 2). \qquad \cdots①$$

辺 AD を BD について回転してできる図形は，① と $x+y=0$ について対称であるから，

$$z^2=2(x+1)(y+1).\quad (-2\leqq x+y\leqq 0)$$

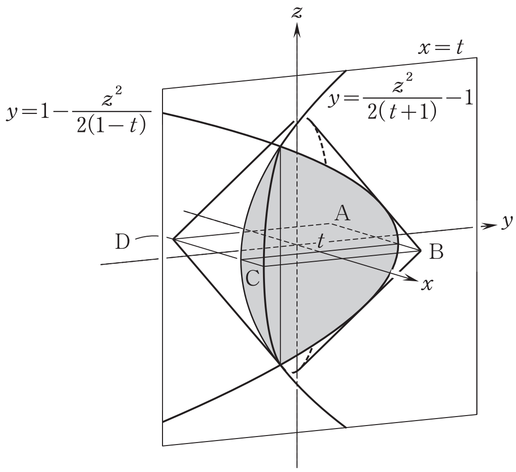
V_1 はこれらで囲まれた図形である．

$x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ における断面は z を固定すると，

$$z^2\leqq -2(1-t)(y-1).\quad (-t\leqq y\leqq 2-t),$$
$$z^2\leqq 2(t+1)(y+1).\quad (-2-t\leqq y\leqq -t).$$

$x=t$，$z=z$ における y の範囲は

$$\frac{z^2}{2(t+1)}-1\leqq y\leqq 1-\frac{z^2}{2(1-t)}. \qquad \cdots②$$



z の範囲は $z^2\leqq 2(1-t^2)$.

$-\sqrt{2(1-t^2)}\leqq z\leqq \sqrt{2(1-t^2)}$.

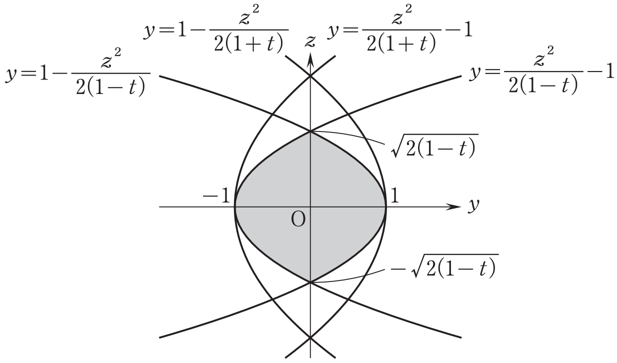
よって，

$$\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right)-\left(\frac{z^2}{2(t+1)}-1\right)\right\}dz=\frac{1}{1-t^2}\int_{-\sqrt{2(1-t^2)}}^{\sqrt{2(1-t^2)}}\{2(1-t^2)-z^2\}dz$$

$$=\frac{1}{6(1-t^2)}\{2\sqrt{2(1-t^2)}\}^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}. \quad \cdots(\text{答})$$

(2)　V_2 は V_1 と yz 平面について対称だから，$x=t(-1\leqq t\leqq 1)$ における V_2 の断面は

$$\frac{z^2}{2(1-t)}-1\leqq y\leqq 1-\frac{z^2}{2(t+1)}.\quad \cdots③$$



②，③ の共通部分は $t\geqq 0$ のとき，

$$\frac{z^2}{2(1-t)}-1\leqq y\leqq 1-\frac{z^2}{2(1-t)}.$$

よって，$t\geqq 0$ のとき，断面積は

$$\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right)-\left(\frac{z^2}{2(1-t)}-1\right)\right\}dz$$

$$=\frac{1}{1-t}\int_{-\sqrt{2(1-t)}}^{\sqrt{2(1-t)}}\{2(1-t)-z^2\}dz$$

$$=\frac{1}{6(1-t)}\{2\sqrt{2(1-t)}\}^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}.$$

平面 $x=0$ について対称であることを考慮すると，求める体積は，

$$2\int_0^1\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32\sqrt{2}}{9}.\qquad\cdots(答)$$

2014 年　前期・文科

第 1 問

以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2 次関数，**数学Ⅱ**：整式の微分

考え方

(1)は平方完成，(2)は微分法で最大最小を求める．

【解答】

(1)　$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t.$

よって，$f(x)$ の最大値は $t^3-9t^2+15t.$　…(答)

(2)

$$g(t)=t^3-9t^2+15t.$$

$$g'(t)=3t^2-18t+15=3(t-5)(t-1).$$

t	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		↗		↘		↗

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{31}{4}\sqrt{2}-\frac{9}{2}.\quad g(5)=-25.$$

$$g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-g(5)=-\frac{31}{4}\sqrt{2}+\frac{41}{2}>\frac{41}{2}-\frac{31}{2}>0.$$

よって，$g(t)$ の最小値は $g(5)=-25.$　…(答)

第 2 問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さら

に2回目の操作で赤球が出たとすると，袋Uの中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋Uの中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

1回目の操作のあとは，袋の中身は白球 a，赤球1個か，全部白球の2通りの場合になるから漸化式を立ててそれを解けばよい.

【解答】

(1) 最初に袋の中には白球 $a+2$ 個と赤球1個が入っているから赤球が取り出される確率は

$$p_1=\frac{1}{a+3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

1回目に赤球が取り出された場合袋の中には白球が $a+2$ 個入っているだけだから，2回目に赤球が取り出されるのは，1回目に白球が取り出される場合だけである．その確率は $\frac{a+2}{a+3}$.

1回目に白球が取り出されたとき，(i)により，袋の中には白球が a 個，赤球が1個入っている．よって，2回目に赤球が取り出される確率 $p_2=\frac{a+2}{a+3}\cdot\frac{1}{a+1}=\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$. $\cdots$(答)

(2) (ii)から赤球が取り出された直後には，袋の中には白球だけが入っている．したがって，n $(\geqq 2)$ 回目に赤球が取り出されるのは，直前の回に白球が取り出された場合だけ.

n $(\geqq 1)$ 回目の操作の後に袋の中に白球 a 個と赤球1個が入っている確率を x_n とする.

n 回の操作の後それ以外の場合は(ii)より袋の中には白球だけが入っている．その確率は $1-x_n$．この場合は次の回には白球を取り出す.

$x_1=\frac{a+2}{a+3}$ であり，

$$x_{n+1}=\frac{a}{a+1}x_n+(1-x_n)=-\frac{1}{a+1}x_n+1.$$

$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}x_n$ であるから，$n \geqq 2$ のとき，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}x_n=\frac{1}{a+1}\left(-\frac{1}{a+1}x_{n-1}+1\right)=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}.$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{a+2}=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right).$$

$\left\{p_n-\frac{1}{a+2}\right\}$ は $n \geqq 2$ で等比数列をなす.

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\left(p_2-\frac{1}{a+2}\right)=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\left(\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}-\frac{1}{a+2}\right) \quad ((1)\text{ より})$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}\frac{1}{(a+2)(a+3)}.$$

よって，$n \geqq 2$ において，

$$p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） 漸化式は p_{n+1} が直前に赤球をとらなかった場合の $\dfrac{1}{a+1}$ 倍であることから $p_{n+1}=\dfrac{1}{a+1}(1-p_n)$ として立てられる．この考え方ではこの漸化式は $n\geqq 1$ で定義されるから，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ を使える．

第3問

座標平面の原点をOで表す。

線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く。このとき，線分PQの通過する領域を D とする。

(1) s を $-3\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域，2次方程式の理論，**数学Ⅰ**：2次関数

考え方

OP＋OQ＝6 はP，Qの x 座標の差で容易に表される．Pの x 座標 p で，直線PQの方程式は立つ．線分PQはその一部分であり，P，Qの動く範囲と合わせて p のとりうる値の範囲が定まる．

直線の方程式の $(x,\ y)$ を $(s,\ t)$ で表せば，t は s を含む，p の2次関数となるから，t のとりうる値の範囲は s の式として表される．

【解答】

(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}\,p)$ $(0\leqq p\leqq 2)$，$\mathrm{Q}(-q,\ \sqrt{3}\,q)$ $(0\leqq q\leqq 3)$ とおくと，$\mathrm{OP}=2p$，$\mathrm{OQ}=2q$．

OP＋OQ＝6 より，$2(p+q)=6$．$p+q=3$．よって，$q=3-p$．

$0\leqq q=3-p\leqq 3$ と p についての条件とあわせて $0\leqq p\leqq 2$．

直線PQの方程式は

$$y=\frac{\sqrt{3}\,(p-q)}{p+q}(x-p)+\sqrt{3}\,p=\frac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,x-\frac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3}.$$

このうち線分PQは $-q=p-3\leqq x\leqq p$．

点 $(s,\ t)$ を通るとき，

$$t=\frac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,s-\frac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3},\quad p-3\leqq s\leqq p.$$

これを p で整理すると，

$$t=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,p^2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,(s+3)p-\sqrt{3}\,s=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}. \qquad \cdots①$$

$$0\leqq p\leqq 2,\quad s\leqq p\leqq s+3. \qquad \cdots②$$

① の右辺を $f(p)$ とおくと，② における $f(p)$ のとりうる値の範囲が t の範囲．$t=f(p)$ のグラフは上に凸の放物線で，軸は $p=\dfrac{s+3}{2}$ にある．

(i) $0\leqq s+3\leqq 2$ すなわち，$-3\leqq s\leqq -1$ のとき，$0\leqq p\leqq s+3$．$f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(0)=f(s+3)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right).\quad -\sqrt{3}\,s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(ii) $s\leqq 0$，$2\leqq s+3$ すなわち，$-1\leqq s\leqq 0$ のとき，$0\leqq p\leqq 2$．$1\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$ であるから $f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(0) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right). \quad -\sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(iii) $0 \leqq s$，$\dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ すなわち，$0 \leqq s \leqq 1$ のとき，$s \leqq p \leqq 2$.

$s \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq 2$，$\dfrac{s+2}{2} < \dfrac{s+3}{2}$ であるから $f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right). \quad \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

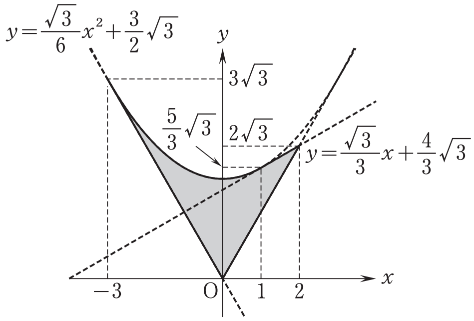
(iv) $s \leqq 2$，$2 \leqq \dfrac{s+3}{2}$ すなわち，$1 \leqq s \leqq 2$ のとき，$s \leqq p \leqq 2$. $f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2). \quad \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

まとめて，t のとりうる範囲は

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & (-3 \leqq s \leqq 0 \text{ のとき}), \\ \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & (0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき}), \\ \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3} & (1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots(\text{答})$$

(2) $(s, t)=(x, y)$ とし，(1)の範囲を図示すると下図網掛部（境界を含む）.



(1)の【別解】

直線 PQ 方程式を導くところまで**【解答】**と同じ.

直線 PQ の方程式は $y=\dfrac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,x-\dfrac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3}$.

線分 PQ は $p=0$ のとき，$(0, 0)$ と $(-3, 3\sqrt{3})$ を結ぶ線分で，$0<p \leqq 2$ のとき直線 PQ のうち $y \geqq \sqrt{3}\,x$，$y \geqq -\sqrt{3}\,x$ の部分.

$(x, y)=(s, t)$ として，直線 PQ の方程式を p で整理すると，

$$2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}\,t+3s=0$$

左辺を $g(p)$ とおき，2 次方程式 $g(p)=0$ が $0<p \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ条件を求める.

$$g(0)=\sqrt{3}\,t+3s, \quad g(2)=\sqrt{3}\,t-s-4.$$

(a) $g(0)g(2)<0$ または $g(2)=0$ のとき，すなわち，

$$(\sqrt{3}\,t+3s)(\sqrt{3}\,t-s-4)<0 \text{ または } \sqrt{3}\,t-s-4=0 \quad \cdots ③$$

のとき，$g(s)=0$ は $0<p \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ.

(b) $g(0)=0$ のとき，$\sqrt{3}\,t+3s=0$. よって，$g(p)=2p^2-2(s+3)p=2p(p-s-3)$.

$0<s+3 \leqq 2$ のとき，$-3<s \leqq -1$. つまり

$$\sqrt{3}\,t+3s=0, \quad -3<s \leqq -1. \quad \cdots ④$$

(c) $0<p<2$ の範囲に $g(p)=0$ が重解を含む 2 個の解をもつ条件を求める.

(ア) $\dfrac{1}{4}$(判別式)$=(s+3)^2-2(\sqrt{3}\,t+3s)$

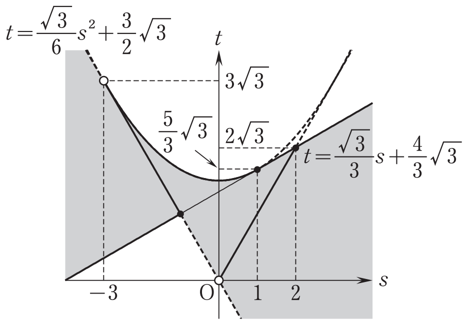
$$=s^2+9-2\sqrt{3}\,t \geqq 0. \quad \cdots⑤$$

(イ) $u=g(p)$ の軸は $p=\dfrac{s+3}{2}$. これが $0<p<2$ にあることから

$$0<\frac{s+3}{2}<2 \iff -3<s<1. \quad \cdots⑥$$

(ウ) $g(0)=\sqrt{3}\,t+3s>0$, $g(2)=\sqrt{3}\,t-s-4>0$. $\cdots⑦$

⑤, ⑥, ⑦ をすべてみたすことが条件.



$0<p\leqq 2$ のとき, 直線 PQ が通過する範囲は ③ または ④ または (⑤, ⑥, ⑦). (上図)

線分 PQ が通過する部分はこのうち, $t\geqq\sqrt{3}\,s$, $t\geqq-\sqrt{3}\,s$ の部分に, $p=0$ のときの線分すなわち $(0,\ 0)$ と $(-3,\ 3\sqrt{3})$ を結ぶ線分を加えたもの.

まとめると**【解答】**のようになる.

第 4 問

r を 0 以上の整数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\quad a_2=r+1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また, 素数 p を 1 つとり, a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし, 0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し, b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$, $p=17$ の場合に, 10 以下のすべての自然数 n に対して, b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して,

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\quad b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき, $b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

分　野

数学 I : 整数, **数学 B** : 数列, 漸化式

考え方

(1) は剰余を考えれば自明だが, 証明を求められているのでしっかり論述すること.

(2) は順次書き出せば同じ数が繰り返しでてくることがわかる.

(3) は少し難しい. 漸化式から b_n-b_m を b_{n+1}, b_{n+2} で表し, p が素数であることをどう使うかを考える.

【解答】

(1) a_n は帰納的に整数である. a_n を p で割った余りが b_n だから, 商を q_n とすると, $a_n=pq_n+b_n$ とかける.

b_1, b_2 は a_1, a_2 をそれぞれ p で割った余りである.

$$\begin{aligned} a_{n+2}&=a_{n+1}(a_n+1)=(pq_{n+1}+b_{n+1})(pq_n+b_n+1) \\ &=p\{q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n\}+b_{n+1}(b_n+1). \end{aligned}$$

$q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n$ は整数だから, $p\{q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n\}$ の部分は p で割り切れる. したがって, a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する.

(2) $a_1=2$，$a_2=2+1=3$ から $b_1=2$，$b_2=3$．

$$b_2(b_1+1)=3\times3=9,\quad b_3=9.\quad b_3(b_2+1)=9\times4=36=17\times2+2,\quad b_4=2.$$

$$b_4(b_3+1)=2\times10=20=17+3,\quad b_5=3.$$

$\{b_n\}$ の直前 2 項が 2，3 なら次の項は 9，直前 2 項が 3，9 なら次の項は 2，直前 2 項が 9，2 なら次の項は 3 である．

したがって，$\{b_n\}$ は 2，3，9 を繰り返す．

よって，n が 10 以下なら，

$$b_1=2,\quad b_2=3,\quad b_3=9,\quad b_4=2,\quad b_5=3,\quad b_6=9,\quad b_7=2,\quad b_8=3,\quad b_9=9,\quad b_{10}=2.$$ …(答)

（注） $b_{3m+1}=2$，$b_{3m+2}=3$，$b_{3m+3}=9$．（$m=0$，1，2，…）．

(3) (1) より，b_{n+2}，b_{m+2} はそれぞれ $b_{n+1}(b_n+1)$，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りである．その商をそれぞれ，q，q' とおき，$b_{n+1}=b_{m+1}=R$，$b_{n+2}=b_{m+2}=S$ とおくと，

$$b_{n+1}(b_n+1)=R(b_n+1)=qp+b_{n+2}=qp+S,$$

$$b_{m+1}(b_m+1)=R(b_m+1)=q'p+b_{m+2}=q'p+S.$$

$$\therefore\quad \{R(b_n+1)-R(b_m+1)\}=R(b_n-b_m)=(qp+S)-(q'p+S)=(q-q')p.$$

$b_{n+1}=b_{m+1}=R>0$ だから，$0<R<p$．p は素数だから，R は p と互いに素．

したがって，b_n-b_m は p で割り切れなければならない．

b_n，b_m は p で割った余りだから $0\leqq b_n<p$，$0\leqq b_m<p$．よって，$-p<b_n-b_m<p$ より，$b_n-b_m=0$ つまり $b_n=b_m$． （証明終り）

（注） $\{b_n\}$ に関して，漸化式は $p\times p$ 個の集合から p 個の集合への写像すなわち有限個の写像であるから p^2 回の操作以前に循環する．

$b_{n+1}=b_{m+1}>0$ なら逆写像が存在するが，$b_{n+1}=0$ だと，b_n に関らず $b_{n+2}=0$ となる．したがって，$b_{n+1}=b_{n+2}=0$ のときは，b_n は特定できない．またこのとき，$b_N=0$（$N\geqq n+1$）となり以後循環する．

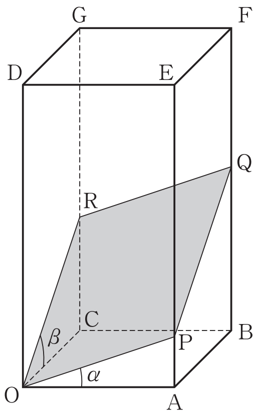
2014 年　前期・理科

第 1 問

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC-DEFG を考える。3 点 P，Q，R を，それぞれ辺 AE，辺 BF，辺 CG 上に，4 点 O，P，Q，R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，∠AOP を α，∠COR を β とおく。

(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。



分　野

数学 B：ベクトル，内積，立体図形，**数学 II**：三角関数，加法定理

考え方

OPQR は平行四辺形．面積はベクトルを使って求める．

tan の加法定理を使うと，$\tan\alpha\tan\beta$ を $\tan\alpha+\tan\beta$ で表せる．

【解答】

(1)　面 OAED∥面 CBFG，面 OCGD∥面 ABFE だから，O，P，Q，R が同一平面上にあるとき，OP∥RQ，OR∥PQ であり，四角形 OPQR は平行四辺形である．

OA 方向に x 軸，OC 方向に y 軸，OD 方向に z 軸をとると，$\overrightarrow{OP}=(1,\ 0,\ \tan\alpha)$，$\overrightarrow{OR}=(0,\ 1,\ \tan\beta)$ となる．

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2|\overrightarrow{OR}|^2-(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR})^2}=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$
$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}.$$
…(答)

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ から

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1.$$

$\tan\alpha+\tan\beta=x$ とおくと，

$$\tan\alpha\tan\beta=1-x.$$

$S=\dfrac{7}{6}$ のとき，(1) から

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+1=\frac{49}{36}.\quad \therefore\quad \tan^2\alpha+\tan^2\beta=\frac{13}{36}.$$

$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta=(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=x^2-2(1-x)=x^2+2x-2=\frac{13}{36}$$

より

$$x^2+2x-\frac{85}{36}=0.\quad 36x^2+72x-85=(6x+17)(6x-5)=0.$$

$x=\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{6}. \qquad \cdots(答)$$

$\tan\alpha\tan\beta=1-x=\frac{1}{6}$ から，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ は方程式

$$t^2-\frac{5}{6}t+\frac{1}{6}=\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)=0$$

の 2 解.

$0<\alpha\leqq\beta<\frac{\pi}{2}$ より，$0<\tan\alpha\leqq\tan\beta$ だから，

$$\tan\alpha=\frac{1}{3}. \qquad \cdots(答)$$

(注)　$\tan\beta=\frac{1}{2}$.

第 2 問

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(*)を考える。

(*)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(*)を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n\geqq3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式，**数学Ⅲ**：数列の極限

考え方

1 回目の操作のあとは，袋の中身は白球 a，赤球 1 個か，全部白球の 2 通りの場合になるから漸化式を立ててそれを解けばよい.

最後の極限は容易.

【解答】

(1)　最初に袋の中には白球 $a+2$ 個と赤球１個が入っているから赤球が取り出される確率は

$$p_1=\frac{1}{a+3}. \qquad \cdots(答)$$

１回目に赤球が取り出された場合袋の中には白球が $a+2$ 個入っているだけだから，２回目に赤球が取り出されるのは，１回目に白球が取り出される場合だけである．その確率は $\dfrac{a+2}{a+3}$.

１回目に白球が取り出されたとき，(i)により，袋の中には白球が a 個，赤球が１個入っている．よって，２回目に赤球が取り出される確率 $p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+1)(a+3)}$. $\qquad\cdots$(答)

(2)　(ii)から赤球が取り出された直後には，袋の中には白球だけが入っている．したがって，n ($\geqq 2$) 回目に赤球が取り出されるのは，直前の回に白球が取り出された場合だけ．

n ($\geqq 1$) 回目の操作の後に袋の中に白球 a 個と赤球１個が入っている確率を x_n とする．

n 回の操作の後それ以外の場合は(ii)より袋の中には白球だけが入っている．その確率は $1-x_n$. この場合は次の回には白球を取り出す．

$x_1=\dfrac{a+2}{a+3}$ であり，

$$x_{n+1}=\frac{a}{a+1}x_n+(1-x_n)=-\frac{1}{a+1}x_n+1.$$

$p_{n+1}=\dfrac{1}{a+1}x_n$ であるから，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}x_n=\frac{1}{a+1}\left(-\frac{1}{a+1}x_{n-1}+1\right)=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}.$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{a+2}=-\frac{1}{a+1}\left(p_n-\frac{1}{a+2}\right).$$

$\left\{p_n-\dfrac{1}{a+2}\right\}$ は $n\geqq 2$ で等比数列をなす．

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\left(p_2-\frac{1}{a+2}\right)=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\left(\frac{a+2}{(a+1)(a+3)}-\frac{1}{a+2}\right) \qquad ((1)より)$$

$$=\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-2}\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}=-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}\frac{1}{(a+2)(a+3)}.$$

よって，$n\geqq 2$ において，

$$p_n=\frac{1}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}. \qquad \cdots(答)$$

(注)　漸化式は p_{n+1} が直前に赤球をとらなかった場合の $\dfrac{1}{a+1}$ 倍であることから $p_{n+1}=\dfrac{1}{a+1}(1-p_n)$ として立てられる．この考え方ではこの漸化式は $n\geqq 1$ で定義されるから，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ を使える．

((注) 終り)

(3)　(2)の結果は $n=1$ のときにも成立する．等比数列の和の公式から，

$$\sum_{n=1}^{m}p_n=\frac{m}{a+2}-\frac{1}{(a+2)(a+3)}\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1+\frac{1}{a+1}}$$

$$=\frac{m}{a+2}-\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}.$$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=\lim_{m\to\infty}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m=0$ であることから，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n=\lim_{m\to\infty}\left[\frac{1}{a+2}-\frac{a+1}{(a+2)^2(a+3)}\left\{\frac{1}{m}-\frac{1}{m}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}\right]=\frac{1}{a+2}. \quad \cdots(答)$$

第3問

u を実数とする。座標平面上の2つの放物線

$$C_1 : y=-x^2+1$$
$$C_2 : y=(x-u)^2+u$$

を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a，b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ をみたすとき，C_1 と C_2 の共有点を $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし，共有点が1点のみのときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すものとする。

$$2|x_1y_2-x_2y_1|$$

を u の式で表せ。

(3) (2) で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分

$$I=\int_a^b f(u)\,du$$

を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

a，b は容易に求められる．$|x_1y_2-x_2y_1|$ は y_i を x_i で表せば，x_1x_2，$|x_1-x_2|$ の式で表すことができる．

(3) の積分は $\sqrt{-u^2-2u+2}$ の処理がポイント．$\sqrt{3-(u+1)^2}$ であるから，$\sqrt{a^2-x^2}$ の置換と同様の処理をすればよい．

【解答】

(1) 共有点の x 座標を求める方程式は

$$-x^2+1=(x-u)^2+u. \quad 2x^2-2ux+u^2+u-1=0. \quad \cdots①$$

実数解をもつ条件は

$$\frac{1}{4}(判別式)=u^2-2(u^2+u-1)=-u^2-2u+2\geqq 0.$$

よって，$-1-\sqrt{3}\leqq u\leqq -1+\sqrt{3}$．よって，

$$a=-1-\sqrt{3},\quad b=-1+\sqrt{3}. \quad \cdots(答)$$

(2) ① の2解が x_1，x_2．2解を u で表すと $x=\dfrac{u\pm\sqrt{-u^2-2u+2}}{2}$.

解と係数の関係および解の差から

$$x_1+x_2=u,\quad x_1x_2=\frac{u^2+u-1}{2},\quad |x_1-x_2|=\sqrt{-u^2-2u+2}. \quad \cdots②$$

$y_1=-x_1{}^2+1$，$y_2=-x_2{}^2+1$ だから

$$2|x_1y_2-x_2y_1|=2|x_1(-x_2{}^2+1)-x_2(-x_1{}^2+1)|=2|x_1-x_2||1+x_1x_2|.$$

② より，

$$2|x_1y_2-x_2y_1|=\sqrt{-u^2-2u+2}\,|2+u^2+u-1|=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}. \qquad \cdots(答)$$

(3)

$$f(u)=(u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}.$$

$\sqrt{-u^2-2u+2}=\sqrt{3-(u+1)^2}$．$u+1=\sqrt{3}\sin\theta$ とおくと，$\sqrt{-u^2-2u+2}=\sqrt{3}\cos\theta$.

$$u^2+u+1=(\sqrt{3}\sin\theta-1)^2+\sqrt{3}\sin\theta=3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1.$$

$\dfrac{du}{d\theta}=\sqrt{3}\cos\theta.$

u	$a \longrightarrow b$
θ	$-\dfrac{\pi}{2} \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

$$I=\int_a^b f(u)\,du=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)(\sqrt{3}\cos\theta)^2\,d\theta=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta+1)\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{3(1-\cos2\theta)+2\}(1+\cos2\theta)\,d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(5+2\cos2\theta-3\cos^22\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{5+2\cos2\theta-\frac{3}{2}(1+\cos4\theta)\right\}d\theta=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(7+4\cos2\theta-3\cos4\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\left[7\theta+2\sin2\theta-\frac{3}{4}\sin4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{21}{8}\pi. \qquad \cdots(答)$$

第4問

p，q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ をみたすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。

以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0<x_0<1$ をみたす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 x_n（$n=1, 2, 3, \cdots$）を，

$$x_n=f(x_{n-1})$$

によって順次定める。$p>q$ であるとき，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

となることを示せ。

(3)　$p<q$ であるとき，

$$c=f(c),\quad 0<c<1$$

をみたす実数 c が存在することを示せ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，数列の極限

考え方

(1) は容易．

(2) はハサミウチの原理をつかって数列の極限を求める．$0<\dfrac{x_n}{x_{n-1}}<r$（$0<r<1$）となる r が存在することが示せればよい．

(3) は $0<x<1$ の範囲に $f(x)>x$ となる x と $f(x)<x$ となる x が存在することをいえばよい．

【解答】

議論の都合上，$f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ を含む範囲で定義されていると考える．

(1) $1-p>0$，$x>0$，$1-x>0$，$1-e^{-qx}>0$ より，$f(x)>0$ は自明．

また，$p>0$，$x>0$，$1-x>0$，$e^{-qx}>0$ から $1-f(x)=px+(1-x)e^{-qx}>0$ も自明．

よって，$0<f(x)<1$． （証明終り）

(1)の【別解1】 河合塾公表解答2

$f'(x)=(1-p)-(1-e^{-qx})+(1-x)qe^{-qx}=-p+(1+q-qx)e^{-qx}$．

$$f''(x)=-qe^{-qx}-(1+q-qx)qe^{-qx}=-\{2+(1-x)q\}qe^{-qx}<0.$$

よって，$f'(x)$ は単調に減少する．

$$f'(0)=1-p+q>0,\quad f'(1)=-p+e^{-q}.$$

(i) $f'(1)=-p+e^{-q}\geqq 0$ のとき，$f'(x)>f'(1)\geqq 0$

よって，

$$f(0)=0<f(x)<f(1)=1-p<1.$$

(ii) $f'(1)=-p+e^{-q}<0$ のとき，$f'(x)$ は連続関数なので，中間値の定理から，$f'(a)=0$ $(0<a<1)$ となる a が存在する．

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

$f'(a)=0$ のとき，$p=(1+q-qa)e^{-qa}$．

$$f(a)=(1-p)a+(1-a)(1-e^{-qa})=1-\{1+qa(1-a)\}e^{-qa}<1$$

よって，

$$f(0)=0<f(x)\leqq f(a)<1.$$

以上より $0<f(x)<1$ $(0<x<1)$． （証明終り）

(1)の【別解2】 河合塾公表解答3

$0<1-p<1$，$0<1-e^{-qx}<1$ である．この2数を数直線上の点と考える．$0<x<1$ から，$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$ はこの2点を結ぶ線分を $(1-x):x$ に内分する点である．よって，$0<f(x)<1$． （証明終り）((1)の**【別解】**終り)

(2)の【解答】

$$x-f(x)=px-(1-x)(1-e^{-qx})=(p-q)x+(1-x)(e^{-qx}-1+qx)+qx^2.$$

$1-x>0$，$q>0$ で，$1+x\leqq e^x$ の x に $-qx$ を代入すると，$1-qx\leqq e^{-qx}$ となるから $e^{-qx}-1+qx\geqq 0$．よって，

$$x-f(x)>(p-q)x.\quad f(x)<(1-p+q)x.$$

$p>q$ のとき，

$$0<x_n=f(x_{n-1})<(1-p+q)x_{n-1}<(1-p+q)^2x_{n-2}<\cdots<(1-p+q)^nx_0.$$

$0<1-p+q<1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1-p+q)^nx_0=0.$$

ハサミウチの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$ （証明終り）

(2)の【別解】 河合塾公表解答2

帰納的に $0<x_n<1$ である．

$f'(x)$ は単調減少なので，$f'(0)>f'(x)>f'(1)$．

$f'(0)=1-p+q<1$ ($\because$ $p>q$)，$f'(1)=-p+e^{-q}>-1$ だから，$|f'(0)|$，$|f'(1)|$ のうち小さくない

方を M とすると $|f'(x)| \leqq M < 1$.

平均値の定理から，

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{f(x_{n-1}) - f(0)}{x_{n-1} - 0} = f'(b) \quad (0 < b < x_{n-1} < 1)$$

となる b が存在する．よって，

$$\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right| = |f'(b)| \leqq M.$$

よって，

$$|x_n| \leqq M|x_{n-1}| \leqq M^2|x_{n-2}| \leqq \cdots \leqq M^n|x_0|.$$

$\lim_{n\to\infty} M^n|x_0| = 0$ だから，ハサミウチの原理により，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n| = 0. \quad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

（証明終り）（(2) の**【別解】**終り）

(3) の**【解答】**

$f(x) - x = g(x)$ とおく．

$$g'(x) = -p - (1 - e^{-qx}) + q(1-x)e^{-qx} = -p - 1 + (1 + q - qx)e^{-qx}.$$

$$g''(x) = -q\{2 + (1-x)q\}e^{-qx} < 0.$$

よって，$g'(x)$ は単調減少．$g'(0) = q - p > 0$ で $g'(1) = -p - (1 - e^{-q}) < 0$ だから，$0 < x < 1$ の範囲に $g'(x) = 0$ となる x が存在する．その x を α とおく．

また，$g(0) = 0$，$g(1) = (1-p) - 1 = -p < 0$ だから

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$+$	↘	$-$

よって，$0 < \alpha < c < 1$ をみたすある c に対して $g(c) = 0$ すなわち $c = f(c)$ をみたす．（証明終り）

(3) の**【別解】　河合塾公表解答 3**

$g(x) = f(x) - x = -px + (1-x)(1 - e^{-qx})$ とおく．

与えられた不等式の x を qx で置き換えると，$1 + qx \leqq e^{qx}$．$1 + qx > 0$ より，$e^{-qx} \leqq \dfrac{1}{1+qx}$.

よって，

$$g(x) \geqq -px + (1-x)\left(1 - \frac{1}{1+qx}\right) = x \cdot \frac{q - p - (1+p)qx}{1+qx}.$$

よって，$0 < x < \dfrac{q-p}{(1+p)q}$ では $g(x) > 0$ である．

これと，$g(1) = -p < 0$ から中間値の定理により $g(c) = c$，$0 < c < 1$ をみたす c，すなわち

$$c = f(c), \quad 0 < c < 1$$

をみたす実数 c が存在する．（証明終り）

（注）　河合塾公表解答の 2, 3 は公表された解答番号です．

第5問

r を0以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\quad a_2=r+1,\quad a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を1つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0を p で割った余りは0とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある2つの相異なる自然数 n，m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\quad b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，$\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

分　野

数学Ⅰ：整数，**数学B**：数列，漸化式

考え方

(1)は剰余を考えれば自明だが，証明を求められているのでしっかり論述すること．

(2)は順次書き出せば同じ数が繰り返しでてくることがわかる．

(3)は少し難しい．漸化式から b_n-b_m を b_{n+1}，b_{n+2} で表し，p が素数であることをどう使うかを考える．

(4)については(3)の意味を考える．ともに0でない b_{m+1}，b_{m+2} が与えられたとき，b_m がただ1通りに定まる．そして，b_1，b_2，b_3，$\cdots$ に0がないことは $\{b_n\}$ が循環する数列であることを意味する．このことを考える．

【解答】

(1) a_n は帰納的に整数である．a_n を p で割った余りが b_n だから，商を q_n とすると，$a_n=pq_n+b_n$ とかける．

b_1，b_2 は a_1，a_2 をそれぞれ p で割った余りである．

$$\begin{aligned} a_{n+2}&=a_{n+1}(a_n+1)=(pq_{n+1}+b_{n+1})(pq_n+b_n+1)\\ &=p\{q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n\}+b_{n+1}(b_n+1). \end{aligned}$$

$q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n$ は整数だから，$p\{q_{n+1}(pq_n+b_n+1)+b_{n+1}q_n\}$ の部分は p で割り切れる．

したがって，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する．

(2) $a_1=2$，$a_2=2+1=3$ から $b_1=2$，$b_2=3$．

$$b_2(b_1+1)=3\times3=9,\quad b_3=9.\ b_3(b_2+1)=9\times4=36=17\times2+2,\quad b_4=2.$$

$$b_4(b_3+1)=2\times10=20=17+3,\quad b_5=3.$$

$\{b_n\}$ の直前2項が2，3なら次の項は9，直前2項が3，9なら次の項は2，直前2項が9，2なら次の項は3である．

したがって，$\{b_n\}$ は2，3，9を繰り返す．

よって，n が10以下なら，

$$b_1=2,\quad b_2=3,\quad b_3=9,\quad b_4=2,\quad b_5=3,\quad b_6=9,\quad b_7=2,\quad b_8=3,\quad b_9=9,\quad b_{10}=2.\quad \cdots(\text{答})$$

(注) $b_{3m+1}=2$，$b_{3m+2}=3$，$b_{3m+3}=9$．($m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$)．

(3) (1)より，b_{n+2}，b_{m+2} はそれぞれ $b_{n+1}(b_n+1)$，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りである．その商をそれぞれ，q，q' とおき，$b_{n+1}=b_{m+1}=R$，$b_{n+2}=b_{m+2}=S$ とおくと，

$$b_{n+1}(b_n+1)=R(b_n+1)=qp+b_{n+2}=qp+S,$$

$$b_{m+1}(b_m+1)=R(b_m+1)=q'p+b_{m+2}=q'p+S.$$

$$\therefore\ \{R(b_n+1)-R(b_m+1)\}=R(b_n-b_m)=(qp+S)-(q'p+S)=(q-q')p.$$

$b_{n+1}=b_{m+1}=R>0$ だから，$0<R<p$．p は素数だから，R は p と互いに素．

したがって，b_n-b_m は p で割り切れなければならない．

b_n，b_m は p で割った余りだから $0\leqq b_n<p$，$0\leqq b_m<p$．よって，$-p<b_n-b_m<p$ より，$b_n-b_m=0$ つまり $b_n=b_m$． （証明終り）

(4) a_2，a_3，a_4，… に p で割り切れる数が現れないということは，b_2，b_3，b_4，… に 0 が現れないことを意味する．

$\{b_n\}$ について考えると，漸化式は $(b_n,\ b_{n+1})$ から $(b_{n+1},\ b_{n+2})$ への写像であり，(3) から $b_{n+1}\neq 0$ のとき，$(b_{n+1},\ b_{n+2})$ から $(b_n,\ b_{n+1})$ が一意的に定まることを意味する．また $(b_n,\ b_{n+1})$ は $b_n=0$ となる要素が存在しないなら，$(p-1)\times(p-1)$ 個の要素からなる．したがって，$(b_2,\ b_3)$ から始まる

$$(b_2,\ b_3),\ (b_3,\ b_4),\ (b_4,\ b_5),\ \cdots,\ (b_{(p-1)^2+2},\ b_{(p-1)^2+3})$$

の $(p-1)^2+1$ 個の列の中には同じものがある．それらを $(b_n,\ b_{n+1})$，$(b_m,\ b_{m+1})$ $(n<m)$ とすると，$(b_n,\ b_{n+1})$ は $m-n$ を周期として循環している．(3) から $(b_n,\ b_{n+1})$ から逆に $(b_{n-1},\ b_n)$，$(b_{n-2},\ b_{n-1})$，… とたどることができるから，$(b_1,\ b_2)$ まで戻ることができる．

$(b_1,\ b_2)=(b_{1+m-n},\ b_{2+m-n})$ であるから，$b_1=b_{1+m-n}$ は 0 でない．よって a_1 は p の倍数ではない．

（証明終り）

（注） たとえば，$p=17$ で $(b_1,\ b_2)=(3,\ 4)$ とすると，b_n：3，4，16，12，0，0，… のように最終的に $(b_n,\ b_{n+1})=(0,\ 0)$ に帰着するものがある．このような場合，$b_n\neq 0$ であるからといって，(4) の例であるとはいえない．

$n=17$ の場合 $\{b_n\}$ が 2，3，9 の循環に帰着する場合以外のすべての場合について $(b_n,\ b_{n+1})=(0,\ 0)$ に帰着する．

第 6 問

座標平面の原点を O で表す。

線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ をみたす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域，2 次方程式の理論，**数学Ⅰ**：2 次関数

考え方

OP＋OQ＝6 は P，Q の x 座標の差で容易に表される．P の x 座標 p で，直線 PQ の方程式は立つ．線分 PQ はその一部分であり，P，Q の動く範囲と合わせて p のとりうる値の範囲が定まる．

直線の方程式の $(x,\ y)$ を $(s,\ t)$ で表せば，t は s を含む，p の 2 次関数となるから，t のとりうる値の範囲は s の式として表される．

【解答】

(1) $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}\,p)$ $(0\leqq p\leqq 2)$，$\mathrm{Q}(-q,\ \sqrt{3}\,q)$ $(0\leqq q\leqq 2)$ とおくと，$\mathrm{OP}=2p$，$\mathrm{OQ}=2q$．

OP＋OQ＝6 より，$2(p+q)=6$．$p+q=3$．よって，$q=3-p$．

$0\leqq q=3-p\leqq 2$ と p についての条件とあわせて $1\leqq p\leqq 2$．

直線 PQ の方程式は

$$y=\frac{\sqrt{3}\,(p-q)}{p+q}(x-p)+\sqrt{3}\,p=\frac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,x-\frac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3}.$$

このうち線分PQは $-q=p-3 \leqq x \leqq p$.

点 $(s,\ t)$ を通るとき，

$$t=\frac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,s-\frac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3},\quad p-3 \leqq s \leqq p.$$

これを p で整理すると，

$$t=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,p^2+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,(s+3)p-\sqrt{3}\,s=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}. \qquad \cdots①$$

$$1 \leqq p \leqq 2,\quad s \leqq p \leqq s+3. \qquad \cdots②$$

①の右辺を $f(p)$ とおくと，②における $f(p)$ のとりうる値の範囲が t の範囲．$t=f(p)$ のグラフは上に凸な放物線で，軸は $p=\dfrac{s+3}{2}$ にある．

(i) $\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ すなわち，$0 \leqq s \leqq 1$ のとき，$1 \leqq p \leqq 2$.

$\dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ であるから $f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(1) \leqq f(p) \leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right).\quad -\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

(ii) $1 \leqq s \leqq 2$ のとき，$s \leqq p \leqq 2$.

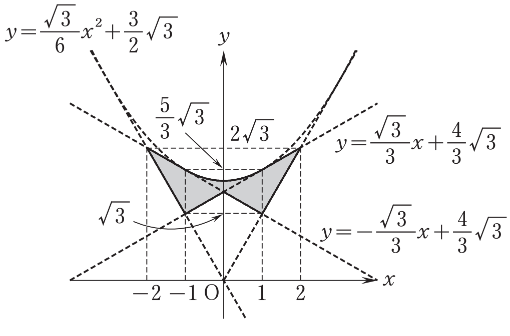
$2 \leqq \dfrac{s+3}{2}$ であるから $f(p)=t$ のとりうる値の範囲は

$$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2).\quad \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

まとめて，t のとりうる範囲は

$$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3} & (0 \leqq s \leqq 1 \text{ のとき}), \\ \sqrt{3}\,s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}s+\dfrac{4}{3}\sqrt{3} & (1 \leqq s \leqq 2 \text{ のとき}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) 与条件のPとQを取り換えても同じ領域になるから，D は y 軸対称で，(1)の範囲は D の $s \geqq 0$ の部分．$(s,\ t)=(x,\ y)$ とし，D を xy 平面に図示すると下図網掛部（境界を含む）



【別解】

直線PQ方程式を導くところまで**【解答】**と同じ．

直線PQの方程式は $y=\dfrac{2p-3}{3}\sqrt{3}\,x-\dfrac{2p(p-3)}{3}\sqrt{3}$.

線分PQは直線PQのうち $y \geqq \sqrt{3}\,x,\ y \geqq -\sqrt{3}\,x$ の部分．

求める範囲は $1 \leqq p \leqq 2$ のとき直線PQが通過する部分のうち，$y \geqq \sqrt{3}\,x,\ x \geqq 0$ の部分．

$(x,\ y)=(s,\ t)$ として，直線PQの方程式を p で整理すると，

$$2p^2-2(s+3)p+\sqrt{3}\,t+3s=0$$

左辺を $g(p)$ とおき，2 次方程式 $g(p)=0$ が $1\leqq p\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ条件を求める．

$$g(1)=\sqrt{3}\,t+s-4,\quad g(2)=\sqrt{3}\,t-s-4.$$

(a)　$g(1)g(2)\leqq 0$ のとき，

$$(\sqrt{3}\,t+s-4)(\sqrt{3}\,t-s-4)\leqq 0 \qquad \cdots③$$

のとき，$g(s)=0$ は $1\leqq p\leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 個の解をもつ．

(b)　$1<p<2$ の範囲に $g(p)=0$ が重解を含む 2 個の解をもつ条件を求める．

(ア)

$$\frac{1}{4}(\text{判別式})=(s+3)^2-2(\sqrt{3}\,t+3s)=s^2+9-2\sqrt{3}\,t\geqq 0. \qquad \cdots④$$

(イ)　$u=g(p)$ の軸は $p=\dfrac{s+3}{2}$．これが $1<p<2$ にあることから

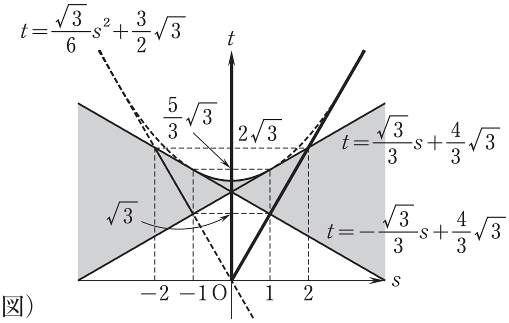
$$1<\frac{s+3}{2}<2 \iff -1<s<1. \qquad \cdots⑤$$

(ウ)

$$\begin{cases} g(1)=\sqrt{3}\,t+s-4>0, \\ g(2)=\sqrt{3}\,t-s-4>0 \end{cases}. \qquad \cdots⑥$$

④，⑤，⑥ をすべてみたすことが条件．

直線 PQ が通過する範囲は ③ または（④，⑤，⑥）．（右図）

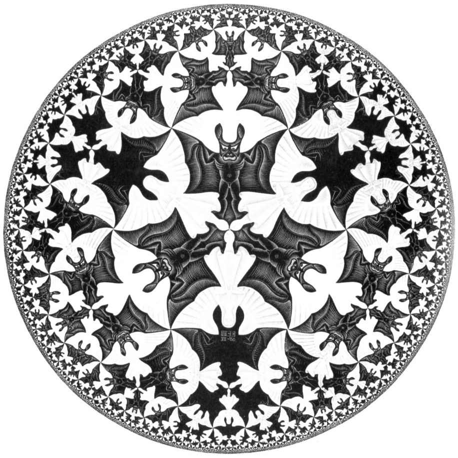


求める領域はこのうち，$t\geqq\sqrt{3}\,s$，$s\geqq 0$ の部分．

まとめると**【解答】**のようになる．

以下省略

エッシャーの絵とタイリング



右の絵は有名なエッシャーの絵「天国と地獄」です．この絵を見ていると何か不思議な調和感を感じるかもしれません．数学においては時としてこのような調和感が大切なことがあります．

さて，一般に平面上を同じ大きさの正多角形で各頂点に同じ個数の正多角形が並ぶようにして平面全体を埋め尽くす方法は，正三角形，正方形，正六角形の３通りしかないことはよく知られています．このようにして平面を埋め尽くすことをタイリングといいます．

これを球面上に置き換えてタイリングするとそれは正多面体が対応します．球面上に「正多角形」を描き，その各頂点に同じ個数の「正多角形」が並ぶように並べます．球面上の「正多角形」はいくつかの等しい長さの大円の弧で囲まれ，各弧の作る角がすべて等しいものをいいます．正多面体は正四面体，正六面体（立方体），正八面体，正十二面体，正二十面体の６個しかないことが知られています．

さて，エッシャーの絵はどうなっているかというと，天使の足元と，悪魔のしっぽの先が重なった点を頂点として悪魔と天使の体の中心線で結ぶと「四角形」ができます．その「四角形」は各頂点で６個ずつ並んでいます．その意味でエッシャーの絵はタイリングになっています．

悪魔と天使の翼の端を頂点とし，天使の顔の辺りを通る線で囲まれた「六角形」が各頂点で４個ずつ並んでいるとみることもできます．

この絵でもわかるようにこうすると端に行くほど小さい絵になってしまいます．

実はこの絵は二葉双曲面の一方の上に描かれたタイリングなのです．二葉双曲面上のある変換（ローレンツ変換）を球面における回転変換の様に定めることができます．その上で考えると，球面上で考えるときと同様に，すべての「四角形」または「六角形」が合同になります（合同とは適当な変換で重ね合わせることができることをいいます．そう考えると，これらの多角形は正多角形といってもよいでしょう）．そして，この絵はそれを等角写像という方法で平面に描いたものと同じなのです．

このような不思議な調和が数学を知らない人でもついこの絵にじっと見入ってしまう理由だと思います．

第8章

2015~2020(平成27~令和2)年

行列の消滅と新しい入試の時代へ

8.1　第 8 次指導要領改訂（2015 年），後期試験の廃止（2016 年）

第 8 次指導要領改訂は小学校で 2008 年から準備され，高校では 2012 年から実施され，入試には 2015 年から実施される．

いわゆる「ゆとり教育」に対する反省から教科内容の充実．

今回は「数学Ⅰ」,「数学Ⅱ」,「数学Ⅲ」,「数学Ａ」,「数学Ｂ」となり，「数学Ｃ」が廃止，「数学Ⅲ」に統合された．

また，「数学Ａ」は再び教科内の選択が行われるようになった．ただし，東大等多くの大学では全分野からの出題のままである．

単元としては，集合と論理が「数学Ⅰ」になり，また，データの分析が新たに「数学Ⅰ」に付け加わった．

「数学Ｃ」であった二次曲線が「数学Ⅲ」に移動，行列は廃止され，代りに複素数平面が「数学Ⅲ」に復活した．

また，「数学Ⅲ」では曲線長が復活した．

「数学Ａ」では期待値が扱われなくなった．

コンピュータ関係の単元は情報科に移行して数学科からは全く姿を消した．

記憶に残る問題・特徴的な問題（2015〜2020）

2015 年　文科第 4 問，理科第 2 問．ほぼ同じ問題．$\dfrac{1}{2}$ の確率で 2 文字 AA または他の 1 文字を並べるとき，n 番目の文字が何であるかを問う問題．ちょっと意表を突く問題であった．

2016 年　文科第 4 問．自然数列 $\{x_n\}$ が漸化式 $x_1=1$，$x_{n-1}=3^{x_n}$ で与えられているとき，x_n を 10 で割った余り（すなわち 1 位の数）を求める問題．実験的にアプローチすれば容易に答は得られるが，題材として面白い．

2018 年　理科第 5 問．複素数平面の軌跡の問題．カージオイドの反転が放物線になるという問題．内容的に面白い問題だが，受験生にとっては難問であったと思われる．

2018 年　理科第 6 問．空間の折線上を中心が動く球体が通過する領域の体積を求める問題．折線の第 1 辺を通過する領域と第 3 辺が通過する領域が共有部分を持ち，その共通部分が第 2 辺が通過する領域に含まれる場合が対象．十分注意してかからなければならない．

2019 年　理科第 3 問．下半分が正四角錐，上半分は斜め四角錐である八面体の断面に関する問題．注意深く立体を観察する力が試される．

2019 年　理科第 6 問．通常場合分けして解く問題だが，場合分けした結果が一致する．ちょっと不思議な問題．

2020 年　文理共通第 4 問．$2^m(0\leqq m<n)$ から異なる k 個選んで作る積の和を係数とする整式 $f_n(x)$ に関する問題．$f_n(x)$ をヒントなしで見つけるのが難しい．特に文系には酷な問題だったかもしれない．

このごろ　あんなこと・こんなこと（2015〜2020）

イギリス国民投票で EU 離脱へ（2016），天皇陛下「生前退位」の意思表明（2016），トランプ，アメリカ大統領に就任（2017），森友，加計問題（2017），熊本地震（2016），西日本豪雨（2018），北海道胆振地方地震（2018），新天皇即位（2019），世界的新型コロナウイルス，パンデミック（2020）．

思い出す曲「365 日の紙飛行機」(2016)．

2015 年　前期・文科

第 1 問

以下の命題 A，B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，ℓ が $5n+5m+3\ell=1$ をみたすならば，$10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つ。

分 野

数学 A：整数，**数学 I**：論証問題，**数学 II**：整式の微分

考え方

命題 A は移項して，$\dfrac{n^3}{26}+100-n^2$ の最小値の正負を調べる．最小値が正または 0 なら真，負ならその最小値を与える n が反例になる．

命題 B は ℓ，m，n がみたす 1 次方程式を使って，1 文字消去する．残りの 2 文字で与えられた，$10mn+3m\ell+3n\ell$ の最大値を考える．ℓ，m，n の 2 次式だから，平方完成を考えればよい．

【解答】

命題 A：偽．

$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ は $\dfrac{n^3}{26}-n^2+100 \geqq 0$ と同値である．

$f(x)=\dfrac{x^3}{26}-x^2+100$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{3}{26}x^2-2x$．

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{52}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	(0)	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$17<\dfrac{52}{3}=17+\dfrac{1}{3}<18$ だから正の整数 n について $f(n)$ が最小になるのは，$n=17$ のときか $n=18$ のとき．

$$f(17)=\frac{4913}{26}+100-289=-\frac{1}{26}.$$

$$f(18)=\frac{5832}{26}+100-324=\frac{4}{13}.$$

よって，$n=17$ が反例である．　　　　（反例）

（注）　A は偽命題だから，解答としては「$\dfrac{17^3}{26}+100-17^2=-\dfrac{1}{26}<0$．よって，$n=17$ が反例」だけでよい．$f(n)<0$ となる正の整数は $n=17$ のみである．

命題 B：真．

$5n+5m+3\ell=1$ のとき，$3\ell=1-5(m+n)$．

$$\begin{aligned}10mn+3m\ell+3n\ell&=10mn+(m+n)\{1-5(m+n)\}=-5m^2-5n^2+m+n\\&=-5\left(m-\frac{1}{10}\right)^2-5\left(n-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

m，n が整数の範囲でこれを最大にするのは $m=n=0$ のとき．このとき上式は0.

よって，

$$10mn+3m\ell+3n\ell \leqq 0.$$

ところが，$m=n=0$ のとき，$5n+5m+3\ell=3\ell=1$ となり，ℓ は整数にならないから等号は成り立たない．

よって，

$$10mn+3m\ell+3n\ell<0.$$

（証明終り）

第2問

座標平面上の2点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は1以下であるとする。次の条件(i)または(ii)をみたす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i) 頂点の x 座標の絶対値が1以上の2次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii) 点 A，P，B は同一直線上にある。

分　野

数学Ⅰ：2次関数，**数学Ⅱ**：整式の積分

考え方

P$(u,\ v)$ を固定して考える．2定点を通る条件から2次関数は1文字だけで与えられる．あとは与条件を丁寧に当てはめてゆくこと．

2定点を通る放物線の動きがとらえられると見通しがよい．

【解答】

点 P の座標を $(u,\ v)$ とおく．

(ii) が成り立つとき，

直線 AB：$y=-x$ の $-1\leqq x\leqq 1$ 部分に P があるから，$v=-u$ $(-1\leqq u\leqq 1)$.

(i) が成り立つとき，

A，P，B を通る放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ とおく．

A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ -1)$ を通るから，

$$\begin{cases} 1=a-b+c, & \cdots① \\ -1=a+b+c. & \cdots② \end{cases}$$

②−① から $b=-1$．① より，$c=-a$．よって，

$$y=ax^2-x-a=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}. \quad \cdots③$$

頂点の x 座標の絶対値が1以上だから

$$\left|\frac{1}{2a}\right|\geqq 1.\quad |2a|\leqq 1.\quad -\frac{1}{2}\leqq a\leqq \frac{1}{2}.\quad (a\neq 0) \quad \cdots④$$

P$(u,\ v)$ は ③ をみたすから，

$$v=au^2-u-a.\quad a(u^2-1)=u+v.$$

(i-a)　$u=\pm 1$ のとき，$v=-u$ だから，P$(\pm 1,\ \mp 1)$（複号同順）.

(i-b)　$-1<u<1$ のとき，$u^2-1<0$ だから，

$$a=\frac{u+v}{u^2-1}.\ ④ より，-\frac{1}{2}\leqq \frac{u+v}{1-u^2}\leqq \frac{1}{2}.$$

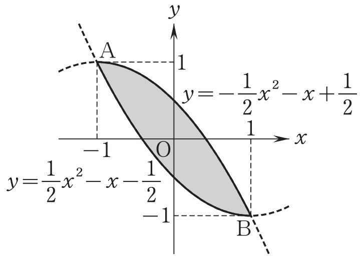
$$-\frac{1}{2}(1-u^2) \geqq u+v \geqq \frac{1}{2}(1-u^2).$$

$$-\frac{1}{2}u^2-u+\frac{1}{2} \leqq v \leqq \frac{1}{2}u^2-u-\frac{1}{2}.$$

(i-a), (i-b), (ii) から点 P(u, v) が存在する範囲は,

$$-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \leqq y \leqq \frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}.$$

図示すると右図網掛部，境界を含む.　…(答)



求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}.$$　…(答)

第3問

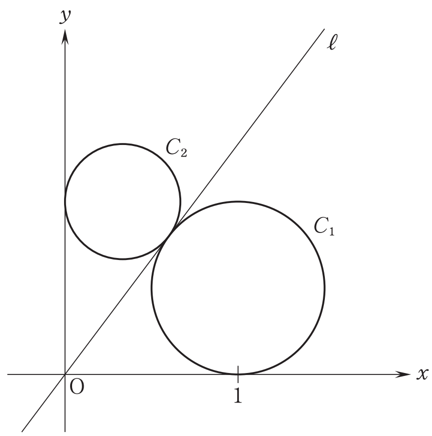
ℓ を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の3条件 (i), (ii), (iii) で定まる円 C_1, C_2 を考える。

(i)　円 C_1, C_2 は2つの不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1, C_2 は直線 ℓ と同一点で接する。

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1, 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 ℓ の方程式と，その最小値を求めよ。



分　野

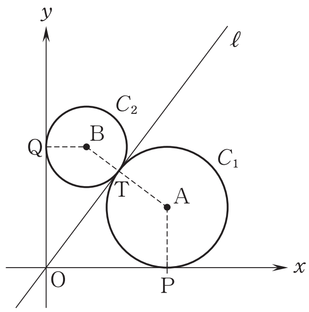
数学II：図形と方程式

考え方

定点から円に引いた接線2本の接線の長さ（定点と接点の距離）は等しいから，OP＝OT＝OQ. これで2円の中心の座標は r_1, r_2 でかける.

これと，C_1, C_2 が接する条件を使えば r_1, r_2 を求める方程式が導かれる.

【解答】



C_1 と x 軸，C_2 と y 軸，C_1，C_2 と ℓ の接点をそれぞれ，P，Q，T とおくと，OP$=$OT$=$OQ$=1$ だから，Q$(0, 1)$.

C_1 の中心 A は $(1, r_1)$，C_2 の中心 B は $(r_2, 1)$.

C_1，C_2 が接するから AB$=r_1+r_2$. よって，

$$(r_2-1)^2+(r_1-1)^2=(r_1+r_2)^2. \quad r_1r_2+r_1+r_2-1=0.$$

r_2 について解くと

$$r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}=-1+\frac{2}{r_1+1}.$$

よって，相加平均・相乗平均の関係から

$$8r_1+9r_2=8r_1-9+\frac{18}{r_1+1}=8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}-17\geqq 2\sqrt{18\cdot 8}-17=7.$$

等号は $8(r_1+1)=\sqrt{18\cdot 8}=12$ すなわち $r_1=\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ．このとき，$r_2=\dfrac{1}{3}$.

よって，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7. …(答)

よって，C_1，C_2 の中心は $\mathrm{A}\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ であり，接点 T は線分 AB を $r_1 : r_2=\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{3}=3 : 2$ に内分した点．T の座標は $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

ℓ は直線 OT だから，その方程式は

$$\ell : y=\frac{4}{3}x. \quad \cdots(\text{答})$$

第４問

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを１枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，コインを５回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，

AABBAAB

となる。このとき，左から４番目の文字は B，５番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を２以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

２つの AA のうち１番目を A_1，２番目を A_2 とし，A_1，A_2，B の次に何が並ぶかの確率を考える．n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおき漸化式を立てる．

【解答】

(1) n 回コインを投げた後には n 番目の文字は既に確定している．

表が出たときに文字列 AA を書くがその 1 番目の文字を A_1，2 番目の文字を A_2 とする．

n 番目の文字が A_1 である確率を p_n，n 番目の文字が A_2 である確率を q_n，n 番目の文字が B である確率を r_n とする．

$$p_1=r_1=\frac{1}{2},\quad q_1=0.$$

n 番目の文字が A_1 のとき，$n+1$ 番目の文字は A_2 であり，n 番目の文字が A_2 または B のとき，$n+1$ 番目の文字は $\frac{1}{2}$ の確率で A_1 または B である．

$n+1$ 番目の文字が A_1 である確率と B である確率は等しく $\frac{1}{2}(q_n+r_n)$ であり，A_2 である確率は p_n である．

よって，

$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n+r_n), \\ q_{n+1}=p_n, \\ r_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n+r_n). \end{cases}$$

$p_1=r_1$ かつ漸化式から $p_n=r_n$．また，$q_n=p_{n-1}$ だから，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+p_{n-1}).$$

$p_2=\frac{1}{2}(q_1+r_1)=\frac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}=\cdots=p_2+\frac{1}{2}p_1=\frac{1}{2}.$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right).$$

よって，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

n 番目の文字が A である確率は

$$p_n+q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n. \qquad \cdots(答)$$

(2) $n-1$ 番目の文字が A で n 番目の文字が B のとき，$n-1$ 番目の文字は A_2 である．

求める確率は，

$$\frac{1}{2}q_{n-1}=\frac{1}{2}p_{n-2}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}. \qquad \cdots(答)$$

理科　第 2 問　(1)の【別解】も参照．

2015 年　前期・理科

第 1 問

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C:\ y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

分　野

数学Ⅱ：不等式と領域

考え方

a による放物線の動きを見ようとすると難しい．

点 $(x,\ y)$ を固定して考えると，与方程式は a の 2 次方程式になっている．この方程式が $a>0$ の解をもつ $(x,\ y)$ の条件を求める．

また，与方程式の右辺の x を固定し，a の関数とみて，$a>0$ における y のとりうる範囲を微分法で求めてもよい．

【解答】

分母を払って整理．

$$4ay=4a^2x^2+1-4a^2.\quad 4(x^2-1)a^2-4ya+1=0.$$

$f(a)=4(x^2-1)a^2-4ya+1$ とおく．2 次方程式 $f(a)=0$ が正の解をもつ条件が求めるもの．

(i)　$x=\pm 1$ のとき，$4ya=1$．$a>0$ となる条件は $y>0$．

(ii)　$x^2-1>0$ のとき，$f(0)=1>0$ だから，正の a は存在するなら 2 個（重解も含めて）ある．

$f(a)$ のグラフの軸 $a=\dfrac{y}{2(x^2-1)}>0$ より，$y>0$．

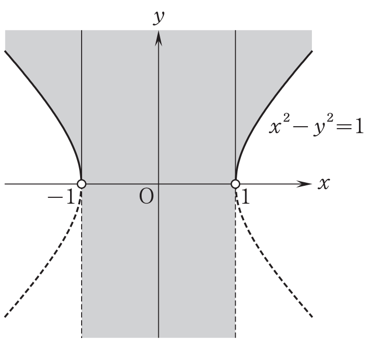
判別式は $4y^2-4(x^2-1)=4(y^2-x^2+1)\geqq 0$．

したがって，

$$x^2>1,\ y>0,\ x^2-y^2\leqq 1.$$

(iii)　$x^2-1<0$ のとき，$f(0)>0$ だから必ず条件をみたす a は存在する．

以上より条件をみたす点 $(x,\ y)$ の存在範囲は下図網掛部．境界は実線部を含み，破線部及び白丸は除く．



【別解】

右辺を a の関数とみて $g(a)=(x^2-1)a+\dfrac{1}{4a}$ とおく．

$\displaystyle\lim_{a\to+0} g(a)=+\infty$．

$$\lim_{a\to+\infty} g(a)=\begin{cases} +\infty & (x^2-1>0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x^2-1=0 \text{ のとき}), \\ -\infty & (x^2-1<0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

$$g'(a)=x^2-1-\frac{1}{4a^2}.$$

(i) $x^2-1\leqq 0$ のとき，$g'(a)<0$．よって，$g(a)$ は単調減少．

よって，y のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases} \text{全実数} & (x^2-1<0 \text{ のとき}), \\ y>0 & (x^2-1=0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(ii) $x^2-1>0$ のとき，

$x^2-1=\dfrac{1}{4a^2}$ のとき，すなわち，$a=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$ のとき，$g'(a)=0$ となる．

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}$	$\cdots$	∞
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	∞	$\searrow$		$\nearrow$	∞

$$g\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\right)=(x^2-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{x^2-1}=\sqrt{x^2-1}.$$

よって，y のとりうる値の範囲は

$$y\geqq\sqrt{x^2-1}.$$

以上から y のとりうる値の範囲は

$$\begin{cases} \text{全実数} & (-1<x<1 \text{ のとき}), \\ y>0 & (x=\pm 1 \text{ のとき}), \\ y\geqq\sqrt{x^2-1} & (x>1,\ x<-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

（図省略）

第 2 問

どの目も出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。

さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。

たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は，

AACDAAB

となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列，漸化式

考え方

B，C，D は等確率で独立に現れるから，「A 以外」として 1 まとめで考える．

2 つの AA のうち 1 番目を A_1，2 番目を A_2 とし，A_1，A_2，「A 以外」の次に何が並ぶかの確率を考える．n 番目の文字が A_1，A_2，「A 以外」である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおき漸化式を立てる．

【解答】

(1)　n 回さいころを投げた後には n 番目の文字は既に確定している．

表が出たときに文字列 AA を書くがその 1 番目の文字を A_1，2 番目の文字を A_2 とする．

n 番目の文字が A_1 である確率を p_n，n 番目の文字が A_2 である確率を q_n，n 番目の文字が A 以外である確率を r_n とする．

$$p_1=r_1=\frac{1}{2},\quad q_1=0.$$

n 番目の文字が A_1 のとき，$n+1$ 番目の文字は A_2 であり，n 番目の文字が A_2 または A 以外のとき，$n+1$ 番目の文字は $\frac{1}{2}$ の確率で A_1 または A 以外である．

$n+1$ 番目の文字が A_1 である確率と A 以外である確率は等しく $\frac{1}{2}(q_n+r_n)$ であり，A_2 である確率は p_n である．

よって，

$$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n+r_n), \\ q_{n+1}=p_n, \\ r_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n+r_n). \end{cases}$$

$p_1=r_1$ かつ漸化式から $p_n=r_n$．また，$q_n=p_{n-1}$ だから，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(p_n+p_{n-1}).$$

$p_2=\frac{1}{2}(q_1+r_1)=\frac{1}{4}$ で，

$$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=p_n+\frac{1}{2}p_{n-1}=\cdots=p_2+\frac{1}{2}p_1=\frac{1}{2}.$$

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right).$$

よって，

$$p_n-\frac{1}{3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}.$$

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

n 番目の文字が A である確率は

$$p_n+q_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}.$$ …(答)

(2)　$n-1$ 番目の文字が A で n 番目の文字が B のとき，$n-1$ 番目の文字は A_2 である．$n-1$ 番目の文字が A_2 であるとき，n 番目の文字が B である確率は $\frac{1}{6}$ である．

求める確率は，

$$\frac{1}{6}q_{n-1}=\frac{1}{6}p_{n-2}=\frac{1}{18}-\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}. \qquad \cdots(答)$$

(1)の【別解】 河合塾公表解答

左から n 番目の文字が A である確率を p_n とする．

左から $n+2$ 番目の文字が A であるとき最初に書かれている文字は A または A 以外である．

(i) 最初に書かれている文字が A であるとき，

その確率は $\frac{1}{2}$ である．また，2 番目にかかれる文字も A である．

このとき，$n+2$ 番目に書かれる文字が A である確率は，3 番目を新たな 1 番目と考えて n 番目に書かれる文字が A である確率に等しい．したがってその確率は p_n である．

(ii) 最初に書かれている文字が A でないとき，

その確率は $\frac{1}{2}$ である．

このとき，$n+2$ 番目に書かれる文字が A である確率は，2 番目を新たな 1 番目と考えて $n+1$ 番目に書かれる文字が A である確率に等しい．したがってその確率は p_{n+1} である．

よって，

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}p_{n+1}.$$

また，$p_1=\frac{1}{2}$，$p_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-p_1)=\frac{3}{4}$.

$$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n).$$

よって，

$$p_{n+1}-p_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(p_2-p_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \qquad \cdots①$$

また，

$$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=\cdots=p_2+\frac{1}{2}p_1=1. \qquad \cdots②$$

②−① から

$$\frac{3}{2}p_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

$$p_n=\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。

座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。

以下の問いに答えよ。必要であれば，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，積分法

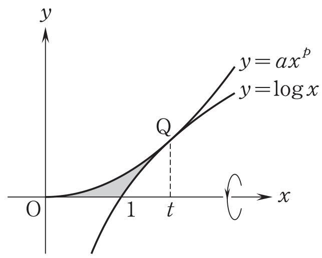
考え方

$y=ax^p$，$y=\log x$ の 0，$+\infty$ での振る舞い，あるいはそれぞれの凹凸を考えれば，2 曲線の共有点が 1 点のみであるのは 2 曲線が 1 点で接している場合である．$y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=t$ で接する条件は $f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$．

グラフの概形がかければ，回転体の体積を求める積分の立式は容易．

【解答】

対数 $\log x$ は自然対数であるとして解答する．



(1)
$$\lim_{x\to+0}(ax^p-\log x)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^p-\log x)=\lim_{x\to+\infty}x^p\left(a-\frac{\log x}{x^p}\right)=+\infty.$$

よって，$y=ax^p$ と $y=\log x$ のグラフがただ 1 点のみを共有するならば，2 曲線はその点で接する．

$f(x)=ax^p$，$g(x)=\log x$ とする．$f(x)$ も $g(x)$ も $x>0$ で微分可能である．

接点の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$．

$$at^p=\log t,\quad apt^{p-1}=\frac{1}{t}.$$

よって，第 2 式から $t^p=\dfrac{1}{ap}$．

第 1 式に代入して $\dfrac{1}{p}=\log t$．よって，Q の x 座標 t は

$$t=e^{\frac{1}{p}}.$$ …(答)

また，$t^p=e$ から $a=\dfrac{1}{ep}$． …(答)

(2) 求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^t a^2x^{2p}\,dx-\pi\int_1^t(\log x)^2\,dx.$$

$$\int_0^t x^{2p}\,dx=\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^t=\frac{t^{2p+1}}{2p+1}.$$

$$\int_1^t(\log x)^2\,dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_1^t-2\int_1^t x(\log x)\frac{1}{x}\,dx=t(\log t)^2-2\Big[x\log x-x\Big]_1^t$$
$$=t(\log t)^2-2t\log t+2t-2.$$

よって，

$$V=\pi a^2\frac{t^{2p+1}}{2p+1}-\pi\{t(\log t)^2-2t\log t+2t-2\}.$$

$t=e^{\frac{1}{p}}$，$a=\dfrac{1}{ep}$ から

$$V=\pi\frac{1}{e^2p^2}\frac{e^{2+\frac{1}{p}}}{2p+1}-\pi\left\{e^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p^2}-2e^{\frac{1}{p}}\frac{1}{p}+2e^{\frac{1}{p}}-2\right\}$$
$$=\pi\frac{e^{\frac{1}{p}}}{p^2(2p+1)}-\pi\left\{e^{\frac{1}{p}}\frac{1-2p+2p^2}{p^2}-2\right\}$$

$$=\pi e^{\frac{1}{p}}\frac{2(1-2p)}{1+2p}+2\pi. \qquad \cdots(答)$$

(3)　$V=2\pi$ のとき，

$$p=\frac{1}{2}. \qquad \cdots(答)$$

（注）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty\,(p>0)$ について．$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t}=0$ の証明は **1984 年理科　第 2 問**（注）で示した．

$x^p=t$ とおき，逆数をとれば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{\frac{1}{p}\log t}=\lim_{t\to\infty}\frac{p}{\frac{\log t}{t}}=\infty$ がいえる．

第 4 問

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\quad p_2=2,\quad p_{n+2}=\frac{p^2{}_{n+1}+1}{p_n}\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

(1)　$\dfrac{p^2{}_{n+1}+p^2{}_n+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2)　すべての $n=2,\,3,\,4,\,\cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3)　数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\quad q_2=1,\quad q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$$

すべての $n=1,\,2,\,3,\,\cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

分　野

数学B：数列，漸化式

考え方

(1)，(2) は与えられた式に与漸化式を当てはめることを考える．

(3) はその結果を使って，数学的帰納法で証明する．

【解答】

(1)
$$p_{n+2}{}^2+p_{n+1}{}^2+1=\frac{(p_{n+1}{}^2+1)^2}{p_n{}^2}+(p_{n+1}{}^2+1)=\frac{(p_{n+1}{}^2+1)(p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1)}{p_n{}^2}.$$

$$p_{n+2}p_{n+1}=\frac{(p_{n+1}{}^2+1)\,p_{n+1}}{p_n}.$$

よって，

$$\frac{p_{n+2}{}^2+p_{n+1}{}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{(p_{n+1}{}^2+1)(p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1)}{p_n{}^2}\cdot\frac{p_n}{(p_{n+1}{}^2+1)\,p_{n+1}}=\frac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}.$$

よって，$A_n=\dfrac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ とおくと，$A_{n+1}=A_n$ となるから $A_n=\dfrac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ は n によらず一定である．　（証明終り）

(2)　(1) より，

$$\frac{p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\frac{p_2{}^2+p_1{}^2+1}{p_2p_1}=\frac{2^2+1^2+1}{2\cdot 1}=3.$$

よって，

$$p_{n+1}{}^2+p_n{}^2+1=3p_{n+1}p_n. \qquad \cdots①$$

また，与漸化式と ① から

$$p_{n+1}+p_{n-1}=\frac{p_n{}^2+1}{p_{n-1}}+p_{n-1}=\frac{p_n{}^2+p_{n-1}{}^2+1}{p_{n-1}}=\frac{3p_np_{n-1}}{p_{n-1}}=3p_n. \qquad \cdots(答)$$

(3)

$$p_n=q_{2n-1} \qquad \cdots(*)$$

とおきこれを証明する．

$q_{n+3}=q_{n+2}+q_{n+1}$，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$ から，$q_{n+2}=q_{n+3}-q_{n+1}$，$q_n=q_{n+1}-q_{n-1}$．

これらを $q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ に代入すると $q_{n+3}-q_{n+1}=q_{n+1}+q_{n+1}-q_{n-1}$．よって，

$$q_{n+3}+q_{n-1}=3q_{n+1}. \qquad \cdots②$$

(Ⅰ) $q_1=1=p_1$，$q_3=q_2+q_1=2=p_2$ から $n=1$，2 で (*) は成り立つ．

(Ⅱ) $n=k$，$k-1$ で (*) が成り立つとすると，

$$p_k=q_{2k-1},\quad p_{k-1}=q_{2k-3}.$$

(2) の結果と ② から

$$p_{k+1}=3p_k-p_{k-1}=3q_{2k-1}-q_{2k-3}=q_{2k+1}.$$

よって，$n=k+1$ のときも (*) は成り立つ．

よって，すべての自然数 n について $p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ．（証明終り）

第 5 問

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

分　野

数学A：整数，**数学Ⅱ**：二項係数

考え方

$N!$ を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数を $f(N!)$ とおくと，

$$f(N!)=\left[\frac{N}{2}\right]+\left[\frac{N}{2^2}\right]+\left[\frac{N}{2^3}\right]+\cdots$$

である．

$M=m+n$ のとき，$f(M!)$ と $f(m!)+f(n!)$ が一致するかどうかを調べる．

そのために $\left[\frac{M}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]$ が成り立つ条件を調べる．

【解答】

自然数 N について $N=2^a\times$(奇数)（a は負でない整数）とかかれるとき，a を $f(N)$ で表すとする．$f(N)=0$ のとき N は奇数で，$f(N)>0$ のとき N は偶数である．

$f(N!)=\sum_{n=1}^{N}f(n)$ であるが，$f(N)$ は同時に，N 以下の正の

(偶数の個数)+(4 の倍数の個数)+(8 の倍数の個数)+(16 の倍数の個数)+…

でもある．以下では後者の考え方にしたがって考察する．

N 以下の正の偶数の個数は $\left[\frac{N}{2}\right]$ である．ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．

同様に N 以下で 2^k で割り切れる自然数の個数は $\left[\frac{N}{2^k}\right]$ である．

したがって，

$$f(N!)=\left[\frac{N}{2}\right]+\left[\frac{N}{2^2}\right]+\left[\frac{N}{2^3}\right]+\cdots$$

である．

${}_{2015}\mathrm{C}_m=\dfrac{2015!}{m!(2015-m)!}$ であるから，

$$f({}_{2015}\mathrm{C}_m)=f(2015!)-f(m!)-f((2015-m)!)$$

である．

まず，自然数 M が 2 つの自然数 m，n の和で表されるとき，$\left[\dfrac{M}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{2}\right]$ について調べる．

自然数 N について，

$$\left[\frac{N}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{N}{2} & (N\text{ が偶数のとき}),\\ \dfrac{N-1}{2} & (N\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

に注意する．

(i)　$M=m+n$ が奇数のとき，

$M=m+n$ なら m，n の一方は偶数，他方は奇数である．m を偶数，n を奇数として一般性を失わない．よって，

$$\left[\frac{M}{2}\right]=\frac{M-1}{2},$$

$$\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{m}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{m+n-1}{2}=\frac{M-1}{2}.$$

よって，

$$\left[\frac{M}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right].$$

(ii)　M が偶数のとき，$\left[\dfrac{M}{2}\right]=\dfrac{M}{2}$.

$M=m+n$ なら m，n の両方が偶数か，両方が奇数である．

(ii-a)　m，n が偶数のとき，

$$\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{m}{2}+\frac{n}{2}=\frac{m+n}{2}=\frac{M}{2}.$$

よって，

$$\left[\frac{M}{2}\right]=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right].$$

(ii-b)　m，n が奇数のとき，

$$\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{m+n}{2}-1=\frac{M}{2}-1.$$

よって，

$$\left[\frac{M}{2}\right]>\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{M}{2}\right]-1.$$

以上から $M=m+n$ のとき，$\left[\dfrac{N}{2}\right]$ と $\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{2}\right]$ は M が奇数であるか，m，n の一方が偶数のとき等しく，M が偶数で，m，n が奇数のとき $\left[\dfrac{M}{2}\right]$ が $\left[\dfrac{m}{2}\right]+\left[\dfrac{n}{2}\right]$ より 1 だけ大きい．

$\left[\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{N}{2^{k-1}}\right]\right]=\left[\dfrac{N}{2^k}\right]$ に注意すると，

$\left[\dfrac{M}{2^k}\right]$ と $\left[\dfrac{m}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n}{2^k}\right]$ について同様な関係が成り立つ．

つまり，$\left[\dfrac{M}{2^{k-1}}\right]$が奇数であるか，$\left[\dfrac{m}{2^{k-1}}\right]$，$\left[\dfrac{n}{2^{k-1}}\right]$の一方が偶数のとき等しく，$\left[\dfrac{M}{2^{k-1}}\right]$が偶数で，$\left[\dfrac{m}{2^{k-1}}\right]$，$\left[\dfrac{n}{2^{k-1}}\right]$ が奇数のとき $\left[\dfrac{M}{2^k}\right]$ が $\left[\dfrac{m}{2^k}\right]+\left[\dfrac{n}{2^k}\right]$ より 1 だけ大きい．

$$2015,\quad \left[\frac{2015}{2}\right]=1007,\quad \left[\frac{2015}{4}\right]=503,\quad \left[\frac{2015}{8}\right]=251,\quad \left[\frac{2015}{16}\right]=125,$$
$$\left[\frac{2015}{32}\right]=62.$$

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ において，$\left[\dfrac{2015}{2^{k-1}}\right]$は奇数だから，任意の m に対して，

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]=\left[\frac{m}{2^k}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]\quad (k\leqq 5).$$

$k=6$ のとき，$\left[\dfrac{2015}{32}\right]=62$ は偶数だから，$\left[\dfrac{m}{32}\right]$が奇数のときに限り

$$\left[\frac{2015}{32}\right]>\left[\frac{m}{32}\right]+\left[\frac{2015-m}{32}\right].$$

$\left[\dfrac{m}{32}\right]$が奇数になる最小の m は $m=32$.

(ア) $m\leqq 31$ のとき，$\left[\dfrac{m}{2^{k-1}}\right]=0$ $(k\geqq 6)$ で偶数であるから，$\left[\dfrac{2015}{2^{k-1}}\right]$が奇数であっても偶数であっても

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]=\left[\frac{m}{2^k}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^k}\right]\quad (k\geqq 6)$$

が成り立つ．

よって，任意の自然数 k に対して，

$$\left[\frac{2015}{2^k}\right]=\left[\frac{m}{2^k}\right]+\left[\frac{2015-m}{2^k}\right].$$

が成り立つ．したがって，

$$f({}_{2015}\mathrm{C}_m)=f(2015!)-f(m!)-f((2015-m)!)=0.$$

つまり，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数である．

(イ) $m=32$ のとき，$2015-32=1983$.

$$\left[\frac{2015}{32}\right]=62,\quad \left[\frac{32}{32}\right]=1,\quad \left[\frac{1983}{32}\right]=61.$$
$$\left[\frac{2015}{64}\right]=31>\left[\frac{32}{64}\right]+\left[\frac{1983}{32}\right]=0+30.$$

一般に，$\left[\dfrac{2015}{2^k}\right]\geqq\left[\dfrac{32}{64}\right]+\left[\dfrac{1983}{32}\right]$ であるから，

$$f({}_{2015}\mathrm{C}_{32})=f(2015!)-f(32!)-f((1983)!)\geqq 1.$$

つまり，${}_{2015}\mathrm{C}_{32}$ は偶数である．

よって，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数になる最小の m は

$$m=32.$$ …(答)

【別解】 河合塾公表解答

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{2015!}{m!(2015-m)!}=\frac{2015\cdot 2014\cdot 2013\cdot\cdots\cdot(2016-m)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m}.$$

$2016=2^5\cdot 63$ であることに注目．

$a_k=2016-k$ とおき，a_k と k を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数について考える．

(ア)　$1 \leqq k \leqq 31$ のとき，

$k=2^l r$（r は正の奇数）とおけて，$l=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

したがって，

$$a_k=2016-k=2^5\cdot 63-2^l r=2^l(2^{5-l}\cdot 63-r)$$

だから，a_k と k を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数は一致する.

(イ)　$k=32$ のとき，$a_k=2016-32=32\cdot(63-1)=64\cdot 31$.

よって，$\dfrac{a_{32}}{32}=62$ で偶数.

よって，$1 \leqq m \leqq 31$ のとき，

$${}_{2015}\mathrm{C}_m=\frac{a_1 a_2 a_3 \cdot \cdots \cdot a_m}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot m}$$

の分母，分子を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数は一致する.

${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は整数だから奇数である.

また，

$${}_{2015}\mathrm{C}_{32}=\frac{a_1 a_2 a_3 \cdot \cdots \cdot a_{32}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 32}={}_{2015}\mathrm{C}_{31}\cdot \frac{a_{32}}{32}=62\,{}_{2015}\mathrm{C}_{31}$$

は偶数.

よって，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数になる最小の m は 32 である.　…(答)

(参考)

$$\left[\frac{2015}{2}\right]+\left[\frac{2015}{2^2}\right]+\left[\frac{2015}{2^3}\right]+\left[\frac{2015}{2^4}\right]+\left[\frac{2015}{2^5}\right]+\left[\frac{2015}{2^6}\right]+\left[\frac{2015}{2^7}\right]+\left[\frac{2015}{2^8}\right]$$
$$+\left[\frac{2015}{2^9}\right]+\left[\frac{2015}{2^{10}}\right]+\left[\frac{2015}{2^{11}}\right]+\cdots$$
$$=1007+503+251+125+62+31+15+7+3+1=2005.$$

$$\left[\frac{32}{2}\right]+\left[\frac{32}{2^2}\right]+\left[\frac{32}{2^3}\right]+\left[\frac{32}{2^4}\right]+\left[\frac{32}{2^5}\right]+\cdots=16+8+4+2+1=31.$$

$2015-32=1983$

$$\left[\frac{1983}{2}\right]+\left[\frac{1983}{2^2}\right]+\left[\frac{1983}{2^3}\right]+\left[\frac{1983}{2^4}\right]+\left[\frac{1983}{2^5}\right]+\left[\frac{1983}{2^6}\right]+\left[\frac{1983}{2^7}\right]+\left[\frac{1983}{2^8}\right]$$
$$+\left[\frac{1983}{2^9}\right]+\left[\frac{1983}{2^{10}}\right]+\cdots$$
$$=991+495+247+123+61+30+15+7+3+1=1973.$$

$31+1973=2004$.

2015!，32!，1983! をそれぞれ素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数は 2005，31，1973. したがって，${}_{2015}\mathrm{C}_{32}$ を素因数分解したときに現れる素因数 2 の個数は $2005-31-1973=1$. したがって，${}_{2015}\mathrm{C}_{32}$ は偶数である.

第6問

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

分　野

数学Ⅲ：微分法，数列の極限

考え方

$|x|>\dfrac{1}{n}$ で $g(nx)=h(nx)=0$ であるから，(1)，(2)において与えられた積分は $|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ の範囲だけで考えればよく，$t=nx$ とおいて置換積分する．

(2)は部分積分すると，(1)の結果を応用できる．

【解答】

(1) $|nx|>1$ つまり $|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき，$g(nx)=0$ だから

$$\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)\,dx.$$

$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき，$g(nx)\geqq 0$ で $p\leqq f(x)\leqq q$ だから

$$pn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\,dx\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq qn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\,dx.$$

$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\,dx=\int_{-1}^{1}g(t)\,dt=\int_{-1}^{1}\frac{\cos(\pi t)+1}{2}\,dt=\left[\frac{\sin(\pi t)}{2\pi}+\frac{t}{2}\right]_{-1}^{1}=1.$$

よって，

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)\,dx\leqq q.$$

（証明終り）

(2) $|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき，$g'(x)=h(x)$ であるから $\dfrac{d}{dx}g(nx)=nh(nx)$.

$|x|>\dfrac{1}{n}$ で $h(nx)=0$ だから，

$$n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$$

$$= n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx$$

$$= -n\int_{-1}^{1} g(nx)\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}\,dx.$$

$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=\dfrac{1}{e^{-x-1}+1}$ とおくと，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ における $f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{n}-1}+1}\leqq f(x)\leqq\frac{1}{e^{-\frac{1}{n}-1}+1}.$$

(1) より，

$$-\frac{1}{e^{-\frac{1}{n}-1}+1}\leqq n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx\leqq-\frac{1}{e^{\frac{1}{n}-1}+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{-\frac{1}{n}-1}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{\frac{1}{n}-1}+1}\right)=-\frac{1}{e^{-1}+1}=-\frac{e}{1+e}.$$

よって，はさみうちの原理から，

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx=-\frac{e}{1+e}. \qquad \cdots(\text{答})$$

2016 年　文科

第 1 問

座標平面上の 3 点 $P(x,\ y)$，$Q(-x,\ -y)$，$R(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件をみたす点 $P(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。

分　野

数学A：平面図形，**数学B**：ベクトル，内積

考え方

鋭角三角形とは 3 つの角がすべて鋭角の三角形のことであるから，3 つの角が鋭角である条件を考えればよい．また鋭角である条件を求めるにはベクトルを使うか，座標を使う．

【解答】

$$\overrightarrow{QP}=2(x,\ y),\quad \overrightarrow{RP}=(x-1,\ y),\quad \overrightarrow{QR}(x+1,\ y).$$

$\angle P$，$\angle Q$，$\angle R$ が鋭角である条件は

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{RP}=2\{x(x-1)+y^2\}=2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}\right\}>0.$$

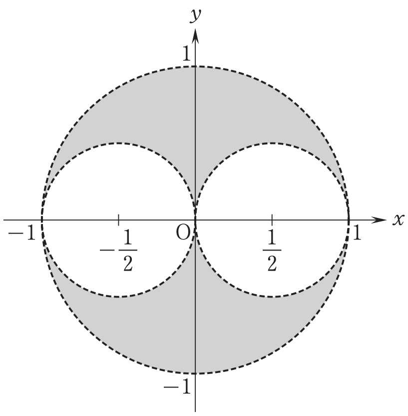
$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP}=2\{x(x+1)+y^2\}=2\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2-\frac{1}{4}\right\}>0.$$

$$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=-\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{QR}=-\{(x-1)(x+1)+y^2\}=-(x^2+y^2-1)>0.$$

よって，

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4},\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4},\quad x^2+y^2<1.$$

図示すると下図．



【別解】

$(x,\ y)$，$(-x,\ -y)$ を XY 平面上の座標と考える．$P\neq Q$ より，$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$.

直線 PQ の方程式は $yX-xY=0$.

P を通り PQ に垂直な直線は l：$x(X-x)+y(Y-y)=0$.

Q を通り PQ に垂直な直線は m：$x(X+x)+y(Y+y)=0$.

PQ を直径とする円の方程式は C：$X^2+Y^2=x^2+y^2$.

PQR が鋭角三角形である条件は $R(X,\ Y)$ が l，m より原点側，C の外側にあることである．

つまり，

$$x(X-x)+y(Y-y)<0,\quad x(X+x)+y(Y+y)>0,\quad X^2+Y^2>x^2+y^2.$$

$R(1,\ 0)$ から

$$x(1-x)-y^2<0,\quad x(1+x)+y^2>0,\quad 1>x^2+y^2.$$

以下省略

第２問

Ａ，Ｂ，Ｃの３つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，２連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　１試合目でＡとＢが対戦する。

(b)　２試合目で，１試合目の勝者と，１試合目で待機していたＣが対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は２以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする.

(1)　ちょうど５試合目でＡが優勝する確率を求めよ。

(2)　n を２以上の整数とする。ちょうど n 試合目でＡが優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下でＡが優勝する確率を求めよ。

分　野

数学Ａ：確率，**数学Ｂ**：数列

考え方

大相撲の巴戦に相当する確率．優勝チームが決まらないで $n-1$ 試合が続行され，n 試合目に優勝者が決まる確率を考える．n 試合目の優勝チームがどのチームかを考える．

【解答】

(1)　５試合目まで試合が行われるとき，２試合目以後４試合目まで待機していたチームが勝つことになる．

最初にＡチームが勝つと４試合目までの勝者はＡ，Ｃ，Ｂ，Ａとなり，５試合目はＡチームと，Ｃチームの試合になる．

したがって，５試合目にＡチームが優勝する確率は $\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$ である．

最初にＢチームが勝つと４試合目までの勝者はＢ，Ｃ，Ａ，Ｂとなり，５試合目はＢチームと，Ｃチームの試合になる．

この場合，５試合目にＡチームが優勝することはない．

よって，求める確率は $\dfrac{1}{32}$.　…(答)

(2)　最初にＡチームが勝ったとき，Ａチームが優勝するのは，2，5，8，…，$3l-1$（l は自然数）試合目である．そのとき優勝する確率は $\dfrac{1}{2^{3l-1}}$.

最初にＢチームが勝ったとき，Ａチームが優勝するのは，4，7，10，…，$3l+1$（l は自然数）試合目である．そのとき優勝する確率は $\dfrac{1}{2^{3l+1}}$.

それ以外にＡチームが優勝することはない．

よって，n 試合目にＡチームが優勝する確率は，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & (n \text{ が３の倍数でも１でもないとき}), \\ 0 & (n \text{ が３の倍数か１のとき}). \end{cases}$$
…(答)

(3) $3m$ 試合以前に A が優勝する確率は

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^{3l-1}}+\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{2^{3l+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{8^m}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1-\frac{1}{8^{m-1}}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{8^m}.\qquad\cdots(答)$$

第3問

座標平面上の 2 つの放物線

$$A:y=x^2$$
$$B:y=-x^2+px+q$$

が点 $(-1,\ 1)$ で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を実数とし，放物線 B を x 軸の正方向に $2t$，y 軸の正方向に t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅰ：2 次関数，**数学Ⅱ**：整式の微分，整式の積分

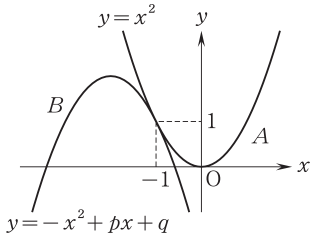
考え方

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=a$ で接する条件は，$f(a)=g(a)$，$f'(a)=g'(a)$.

$y=f(x)$ を x 軸の正の向きに b，y 軸の正の向きに c だけ平行移動して得られる曲線は $y=f(x-b)+c$.

$$-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}.$$

【解答】



(1) $f(x)=x^2$，$g(x)=-x^2+px+q$ とおくと，

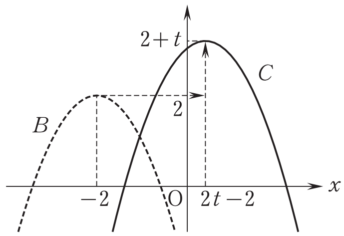
$f'(x)=2x$，$g'(x)=-2x+p$，$g(-1)=-1-p+q=f(-1)=1$，

$g'(-1)=2+p=f'(-1)=-2$.

よって，

$$p=-4,\quad q=-2.\qquad\cdots(答)$$

(2)
$$\begin{aligned}C:y&=g(x-2t)+t=-(x-2t)^2-4(x-2t)-2+t\\&=-x^2+(4t-4)x-4t^2+9t-2.\end{aligned}$$



$C:y=h(x)$ と A の交点の x 座標を求める方程式は

$$2x^2-4(t-1)x+4t^2-9t+2=0.$$

$$\frac{1}{4}(判別式)=4(t-1)^2-2(4t^2-9t+2)=-4t^2+10t.$$

A と C が異なる 2 点で交わる条件は $0<t<\dfrac{5}{2}$.

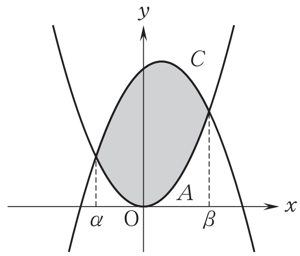
このとき，交点の x 座標は

$$\frac{2(t-1)\pm\sqrt{-4t^2+10t}}{2}.$$

これらを，α，β $(\alpha<\beta)$ とおく.

$$\beta-\alpha=\sqrt{-4t^2+10t}.$$

よって，



$$S(t)=\int_\alpha^\beta\{h(x)-f(x)\}\,dx=-2\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{3}\sqrt{-4t^2+10t}^{\,3}.$$

よって，$t\geqq\dfrac{5}{2}$ の場合も含めて，$t>0$ のとき，

$$S(t)=\begin{cases}0 & \left(t\geqq\dfrac{5}{2}\right)\\ \dfrac{1}{3}\sqrt{-4t^2+10t}^{\,3} & \left(0<t<\dfrac{5}{2}\right).\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

⑶　$t>0$ で最大になるのは，

$$-4t^2+10t=-4\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

が最大である $t=\dfrac{5}{4}$ のとき，$S(t)$ の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{25}{4}}^{\,3}=\dfrac{125}{24}.$ …(答)

第４問

以下の問いに答えよ。ただし，⑴については，結論のみを書けばよい。

⑴　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

⑵　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

⑶　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=3^{x_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。

分　野

数学A：整数，**数学B**：数列

考え方

⑴は書き出して類推すればよく，⑵も書き出して類推すればおおよそ交互に繰り返されることがわかる．⑵は証明まで要求されていることに注意．$3^2\equiv1\pmod 4$ の利用を考える．

⑶は少し難しいが⑴，⑵の結果を応用する．

$x_n=3^{x_{n-1}}$ を 10 で割った余り（1 位の数）は x_{n-1} を 4 で割った余りで決まり，$x_{n-1}=3^{x_{n-2}}$ を 4 で割った余りは x_{n-2} を 2 で割った余り（奇数か偶数か）で決まる．このように考えてゆけば x_{10} を 10 で割った余りは定まる．

【解答】

⑴　3^n の 1 の位の数（10 で割った余り）を書き出すと，

$$3,\ 9,\ 7,\ 1,\ 3,\ 9,\ 7,\ 1,\ \cdots$$

となる．したがって，

$$a_n=\begin{cases}3 & (n\text{ を 4 で割った余りが 1 のとき}),\\ 9 & (n\text{ を 4 で割った余りが 2 のとき}),\\ 7 & (n\text{ を 4 で割った余りが 3 のとき}),\\ 1 & (n\text{ が 4 で割りきれるとき}).\end{cases}\qquad\cdots(\text{答})$$

（注） (1) は結論のみを求めているから，書き出して類推すればよい．

証明するなら，$3^4=81$ であることを使って，3^{4m} を 10 で割った余り（1 位の数）が 1 であることを示し，これに，3，9，27 をかけることを考えればよい．

(2) $3^2=9\equiv 1 \pmod 4$ だから，

$$3^{2m}\equiv 1 \pmod 4 \quad 3^{2m+1}\equiv 3 \pmod 4.$$

したがって，

$$b_n=\begin{cases} 3 & (n\text{ が奇数のとき}), \\ 1 & (n\text{ が偶数のとき}). \end{cases}$$ …(答)

(3) x_n は 3^k（k は $k\geqq 0$ の整数）と表せるから奇数である．

x_n が奇数であるからすべての自然数 n について，(2) から $x_{n+1}=3^{x_n}$ は 4 で割って 3 余り，(1) より，$x_{n+2}=3^{x_{n+1}}$ は 10 で割って 7 余る．

したがって，3 以上の自然数 n について x_n を 10 で割った余りは 7.

よって，x_{10} を 10 で割った余りは 7. …(答)

（注） x_n を 10 で割った余りは，

1，3，7，7，7，…

2016 年　理科

第 1 問

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

分　野

数学Ⅲ：関数の極限，微分法

考え方

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ の増減を調べるのにそのまま微分するより対数をとってから微分した方が楽である．

【解答】

$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$，$g(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ とおく．

$$f(x)=x\log(x+1)-x\log x.$$

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+\frac{x}{x+1}-1=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}.$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0.$$

よって，$f'(x)$ は単調減少．

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

より，$f'(x)>0$．よって，$f(x)$ は単調増加．

$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$ より，$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$．

よって，$f(x)<1$．つまり，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e.$$

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}.$$

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}.$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{2x(x+1)-(2x+1)^2}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}>0.$$

よって，$g'(x)$ は単調増加．

$$\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\cdot\frac{2+\frac{1}{x}}{2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right\}=0$$

より，$g'(x)<0$．よって，$g(x)$ は単調減少．

$\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$ より，

$$\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1.$$

よって，$g(x)>1$．つまり，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e.$$

以上から，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}.$$

（証明終り）

（注）　$h(x)=(x+a)\{\log(x+1)-\log x\}\ (x>0)$ とすると，

$$h'(x)=\log(x+1)-\log x+\frac{a-1}{x+1}-\frac{a}{x}.$$

$$h''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{a-1}{(x+1)^2}+\frac{a}{x^2}=\frac{(2a-1)x+a}{x^2(x+1)^2}.$$

$\lim_{x\to\infty}h(x)=1$．$\lim_{x\to\infty}h'(x)=0$．

(i)　$a\leqq 0$ のとき，$h''(x)<0$．$h'(x)$ は単調減少．よって，$h'(x)>0$．$h(x)<1$．

(ii)　$0<a<\dfrac{1}{2}$ のとき，$h''(x)$ は $x=\dfrac{-a}{2a-1}$ で正から負に変り，$\lim_{x\to+0}h'(x)=-\infty$ だから，$h'(x)$ は $0<x<\dfrac{a}{1-2a}$ のある値 α で負から正に変る．$\lim_{x\to+0}h(x)=\infty$ から，$h(x)$ は 1 より大きい値から，1 より小さい値に変る．

(iii)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$h''(x)>0$．$h'(x)$ は単調増加．よって，$h'(x)<0$．$h(x)>1$．

以上から，すべての正の実数に対して $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}<e$ となる a の最大値が 0 で，$e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+a}$ となる a の最小値が $\dfrac{1}{2}$ であることがわかる．

第2問

A，B，C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。

分　野

数学A：確率，**数学B**：数列

考え方

大相撲の巴戦に相当する確率．優勝チームが決まらないで $n-1$ 試合が続行され，n 試合目に優勝者が決まる確率を考える．n 試合目の優勝チームがどのチームかを考える．A が優勝したときの対戦相手は 1 試合目で A が勝つか負けるかで決まる．

【解答】

(1) 最初に A チームが勝ったとき，A チームが優勝するのは，2，5，8，…，$3l-1$（l は自然数）試合目で，最後の対戦相手は C である．$3l-1$ 試合目に優勝する確率は $\dfrac{1}{2^{3l-1}}$.

最初に B チームが勝ったとき，A チームが優勝するのは，4，7，10，…，$3l+1$（l は自然数）試合目で，最後の対戦相手は B である．$3l+1$ 試合目に優勝する確率は $\dfrac{1}{2^{3l+1}}$.

それ以外に A チームが優勝することはない．

よって，n 試合目に A チームが優勝する確率は，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でも } 1 \text{ でもないとき}), \\ 0 & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数か } 1 \text{ のとき}). \end{cases}$$ …(答)

(2) $3m$ 試合以前に A が最後に C チームと戦って優勝する確率を P_{C} とする．

$$P_{\mathrm{C}}=\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^{3l-1}}=\frac{1}{4}\frac{1-\dfrac{1}{8^m}}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\frac{1}{8^m}.$$

$3m$ 試合以前に A が最後に B チームと戦って優勝する確率を P_{B} とする．

$$P_{\mathrm{B}}=\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{2^{3l+1}}=\frac{1}{16}\frac{1-\dfrac{1}{8^{m-1}}}{1-\dfrac{1}{8}}=\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\frac{1}{8^m}.$$

求める確率は

$$\frac{P_{\mathrm{B}}}{P_{\mathrm{B}}+P_{\mathrm{C}}}=\frac{\dfrac{1}{14}-\dfrac{4}{7}\dfrac{1}{8^m}}{\dfrac{2}{7}-\dfrac{2}{7}\dfrac{1}{8^m}+\dfrac{1}{14}-\dfrac{4}{7}\dfrac{1}{8^m}}=\frac{8^m-8}{5\cdot 8^m-12}.$$ …(答)

第 3 問

a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P_1}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P_2}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P_3}(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P_1Q}$，$\mathrm{P_2Q}$，$\mathrm{P_3Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ $\mathrm{R_1}$，$\mathrm{R_2}$，$\mathrm{R_3}$ として三角形 $\mathrm{R_1R_2R_3}$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

分　野

数学B：空間座標，**数学Ⅲ**：微分法

考え方

R_i（$i=1,\ 2,\ 3$）を求めるには Q と P_i の z 座標に注目する．

三角形 $R_1R_2R_3$ は xy 平面上の三角形で，$\overrightarrow{R_1R_2}\perp\overrightarrow{R_3R_1}$ である．

【解答】

xy 平面との交点は，P_1Q，P_2Q，P_3Q をそれぞれ，$1:a$，$1:a$，$3:a$ に外分する点である．

$$\overrightarrow{OR_1}=\frac{a\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OQ}}{a-1}=\frac{1}{a-1}(a,\ 0,\ 0),$$

$$\overrightarrow{OR_2}=\frac{a\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OQ}}{a-1}=\frac{1}{a-1}(a,\ a,\ 0),$$

$$\overrightarrow{OR_3}=\frac{a\overrightarrow{OP_3}-3\overrightarrow{OQ}}{a-3}=\frac{1}{a-3}(a,\ 0,\ 0).$$

$$\overrightarrow{R_1R_2}=\frac{a}{a-1}(0,\ 1,\ 0),$$

$$\overrightarrow{R_3R_1}=\left(\frac{a}{a-1}-\frac{a}{a-3}\right)(1,\ 0,\ 0)=\frac{2a}{(a-1)(3-a)}(1,\ 0,\ 0).$$

$\overrightarrow{R_1R_2}\perp\overrightarrow{R_3R_1}$ であるから，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a-1}\cdot\frac{2a}{(a-1)(3-a)}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}.$$

$$S'(a)=\frac{2a}{(a-1)^2(3-a)}-\frac{2a^2}{(a-1)^3(3-a)}+\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)^2}=\frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}.$$

a	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

よって，$a=2$ のとき，$S(a)$ は最小値，$S(2)=4$ をとる． …(答)

第4問

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

分　野

数学Ⅲ：複素数平面

【解答 1】

考え方

P(p)，Q(q)，R(r) を複素数平面上の点とするとき，$\angle QPR=\arg\left(\dfrac{q-p}{r-p}\right)$ であり，複素数 z に対して $|\arg(z)|$ が鋭角である条件は z の実数部分（実部）正であることである．また，$\left|\arg\dfrac{1}{z}\right|=|\arg z|$ にも注意．これらを使う．

ABC が三角形だから，$z(z-1)(z+1)\neq 0$.

$$\angle BAC=\left|\arg\frac{z^2-1}{z-1}\right|=|\arg(z+1)|,$$

$$\angle CBA=\left|\arg\frac{1-z}{z^2-z}\right|=\left|\arg\left(-\frac{1}{z}\right)\right|=|\arg(-z)|,$$

$$\angle \mathrm{ACB}=\left|\arg\frac{z-z^2}{1-z^2}\right|=\left|\arg\frac{z}{1+z}\right|=\left|\arg\left(1+\frac{1}{z}\right)\right|=\left|\arg\left(1+\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)\right|.$$

$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，$z+1$，$-z$，$1+\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ の実部は $x+1$，$-x$，$1+\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

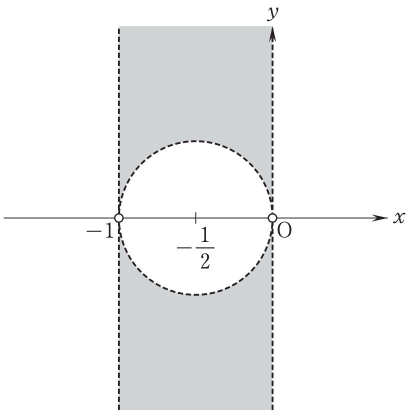
$\angle\mathrm{BAC}$，$\angle\mathrm{CBA}$，$\angle\mathrm{ACB}$ のすべてが鋭角である条件は

$$x+1>0,\quad -x>0,\quad 1+\frac{x}{x^2+y^2}>0.$$

整理して

$$x>-1,\quad x<0,\quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}.$$

図示すると下図網掛部，境界は除く．



…(答)

【解答 2】

考え方

複素数の扱いが苦手な人のために．3 辺の長さが a，b，c の三角形が鋭角三角形であるための条件

$$a^2<b^2+c^2,\quad b^2<c^2+a^2,\quad c^2<a^2+b^2.$$

を使う．

$$\mathrm{AB}=|z-1|,\quad \mathrm{BC}=|z||z-1|,\quad \mathrm{CA}=|1+z||z-1|$$

$z=1$ のときは 3 点 A，B，C が一致して三角形をなさない．以下，$z\neq 1$ で考える．

3 辺の比は $1:|z|:|1+z|$.

鋭角三角形である条件は

$$1<|z|^2+|z+1|^2,\quad |z|^2<1+|z+1|^2,\quad |z+1|^2<1+|z|^2.$$

$z=x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$$1<x^2+y^2+(x+1)^2+y^2,\quad x^2+y^2<1+(x+1)^2+y^2,\quad (x+1)^2+y^2<1+x^2+y^2.$$

$$2x^2+2y^2+2x>0,\quad 2x+2>0,\quad 2x<0.$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4},\quad x>-1,\quad x<0.$$

図省略．

（注） 3 辺の比が $1:|z|:|1+z|$ である三角形は -1，0，z を頂点とする三角形と考えられる．このことに気づけば図形的考察だけで答の図が得られる．

【解答 3】

考え方

鋭角である条件を直接示すならベクトルの内積をとるのが手っ取り早い．

$z=x+yi$ とおくと，$z^2=(x^2-y^2)+2xyi$.

A，B，C の座標は A$(1,\ 0)$，B$(x,\ y)$，C$(x^2-y^2,\ 2xy)$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x-1,\ y),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x^2-y^2-1,\ 2xy).$$

A$\neq$B から $(x,\ y)\neq(1,\ 0)$. よって，

$$(x-1)^2+y^2>0. \qquad \cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x-1)(x^2-y^2-1)+2xy^2=(x+1)\{(x-1)^2+y^2\}>0.$$

① から $x+1>0$. よって，

$$x>-1. \qquad \cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(x^2-y^2-x,\ 2xy-y),\quad \overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-x+1,\ -y).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-(x^2-y^2-x)(x-1)-y(2xy-y)=-x\{(x-1)^2+y^2\}>0.$$

① から $-x>0$. よって，

$$x<0. \qquad \cdots③$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-(x^2-y^2-1,\ 2xy),\quad \overrightarrow{\mathrm{CB}}=-(x^2-y^2-x,\ 2xy-y).$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}&=(x^2-y^2-1)(x^2-y^2-x)+2xy(2xy-y)=y^4+(2x^2-x+1)y^2+(x-1)^2x(x+1)\\&=\{y^2+(x-1)^2\}\{y^2+x(x+1)\}>0.\end{aligned}$$

① から $x(x+1)+y^2>0$. よって，

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}. \qquad \cdots④$$

②，③，④ を図示すればよい.（図省略）

第 5 問

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq0$ とする。

(1)　次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ。

分　野

数学A：整数

考え方

まずは題意の把握が必要である.

$0.a_1a_2\cdots a_k$ の個々の a_i が何であるかということはこの問題を通して重要ではない．$b=a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，b は k 桁以下の自然数になる．このことだけが使われる.

(1)，(2) では $\sqrt{n}$，$\sqrt{m}$ の小数部分の近似値が $\dfrac{b}{10^k}$ によって 10^{-k} 以下の範囲で与えられている.

そのときの，n，m の範囲を考えることが求められている.

(3) は $\sqrt{s}$ の小数部分が 0 でない有限小数になるから，$\sqrt{s}$ が整数でない有理数ではないことを示す問題

である．(1)，(2) とは無関係である．

【解答】

$0.a_1a_2a_3\cdots a_k=\dfrac{b}{10^k}$ とおくと b は $1\leqq b<10^k$ の自然数．

(1) 与条件は次のようになる．

$$\frac{b}{10^k}\leqq\sqrt{n}-10^k<\frac{b+1}{10^k}.$$

$$10^k+\frac{b}{10^k}\leqq\sqrt{n}<10^k+\frac{b+1}{10^k}.$$

$$10^{2k}+2b+\frac{b^2}{10^{2k}}\leqq n<10^{2k}+2(b+1)+\frac{(b+1)^2}{10^{2k}}.$$

$0<\dfrac{b}{10^k}<\dfrac{b+1}{10^k}\leqq1$ から

$$10^{2k}+2b+1\leqq n\leqq10^{2k}+2(b+1).$$

よって，

$$\begin{cases} n=10^{2k}+2b+1=10^{2k}+2\times a_1a_2a_3\cdots a_k+1 \text{ または} \\ n=10^{2k}+2b+2=10^{2k}+2\times a_1a_2a_3\cdots a_k+2. \end{cases}\quad\cdots(\text{答})$$

(2) 与条件は次のようになる．

$$\frac{b}{10^k}\leqq\sqrt{m}-p<\frac{b+1}{10^k}.$$

$$p+\frac{b}{10^k}\leqq\sqrt{m}<p+\frac{b+1}{10^k}.$$

$$p^2+\frac{2pb}{10^k}+\frac{b^2}{10^{2k}}\leqq m<p^2+\frac{2p(b+1)}{10^k}+\frac{(b+1)^2}{10^{2k}}.\quad\cdots①$$

$p\geqq5\cdot10^{k-1}$ だから，

$$\left(p^2+\frac{2p(b+1)}{10^k}+\frac{(b+1)^2}{10^{2k}}\right)-\left(p^2+\frac{2pb}{10^k}+\frac{b^2}{10^{2k}}\right)=\frac{2p}{10^k}+\frac{2b+1}{10^{2k}}>1.$$

よって，$p^2+\dfrac{2pb}{10^k}+\dfrac{b^2}{10^{2k}}$ と $p^2+\dfrac{2p(b+1)}{10^k}+\dfrac{(b+1)^2}{10^{2k}}$ の間には少なくとも 1 個の整数が存在する．

よって，① をみたす整数 m すなわち，与式をみたす整数 m は存在する．（証明終り）

(3) $[\sqrt{s}\,]+\dfrac{b}{10^k}$ は有理数である．

よって，$\sqrt{s}$ は有理数である．$\sqrt{s}=\dfrac{q}{p}$（p，q は互いに素な自然数）とおける．

よって，$p^2s=q^2$．よって，p^2 は q^2 の約数．

p，q は互いに素だから，$p=1$．よって，$s=q^2$．

よって $\sqrt{s}=q$．よって，$[\sqrt{s}\,]=q$．

よって，$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,]=0$．

$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,]=\dfrac{b}{10^k}$ とすると $1\leqq b<10^k$ に反する．

したがって，$\sqrt{s}-[\sqrt{s}\,]=0.a_1a_2a_3\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しない．（証明終り）

第6問

座標空間内を，長さ2の線分ABが次の2条件(a)，(b)をみたしながら動く。

(a)　点Aは平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点C(0, 0, 1)が線分AB上にある。

このとき，線分ABが通過することのできる範囲を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：積分法，体積，**数学B**：空間座標

考え方

z 軸とA，Cを含む平面上で考えればよいから，立体は z 軸に関する回転体である．

Aを x 軸上にとって考え，それを z 軸回転する．

【解答】

Aが x 軸上にあるときのBの位置を考える．

$A(a,\ 0,\ 0)$ とおくと，$AC=\sqrt{a^2+1} \leqq 2$ だから $0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$．

$\overrightarrow{AC}=(-a,\ 0,\ 1)$ だから，

$$\overrightarrow{AB}=\frac{2(-a,\ 0,\ 1)}{\sqrt{a^2+1}}.\quad \overrightarrow{OB}=\left(a-\frac{2a}{\sqrt{a^2+1}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{a^2+1}}\right).$$

z 軸について回転して考えればよいから，求める立体の $z=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}$ における断面は半径

$\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+1}}-a$ の円．

a を z で表すと，$a=\dfrac{\sqrt{4-z^2}}{z}$．

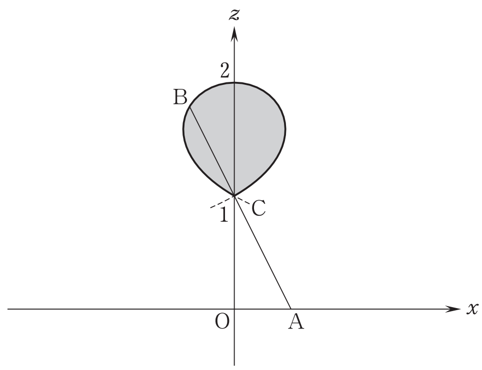
半径を z で表すと，$az-a=\dfrac{\sqrt{4-z^2}\,(z-1)}{z}$．

$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$，$z=\dfrac{2}{\sqrt{a^2+1}}$ から，$1 \leqq z \leqq 2$．

求める体積を V とすると，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_1^2\left(\frac{\sqrt{4-z^2}\,(z-1)}{z}\right)^2dz\\&=\pi\int_1^2\left(\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z}+3+2z-z^2\right)dz\\&=\pi\left[-\frac{4}{z}-8\log z+3z+z^2-\frac{z^3}{3}\right]_1^2\\&=\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right).\end{aligned}$$

…(答)



(注)　xz 平面上の断面図は右図のようである．

2017 年　文科

第 1 問

座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし，s, t は実数で，$0<s$, $0<t<1$ をみたすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる部分の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，整式の積分，**数学Ⅰ**：2 次関数

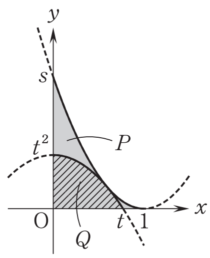
考え方

ただ 1 点を共有することはその点で接することである．この条件から，s は t で表される．

P, Q を積分で求める．$\dfrac{Q}{P}$ は t の整式になるから微分して増減を調べる．

【解答】

$$s(x-1)^2-(-x^2+t^2)=(s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$$



2 つの放物線の方程式の x^2 の係数が異なるから，A と B がただ 1 点を共有する条件は 2 つの放物線が接する場合である．

接する条件は

$$\frac{1}{4}(\text{判別式})=s^2-(s+1)(s-t^2)=(t^2-1)s+t^2=0.$$

$0<t<1$ より $t^2-1 \neq 0$.

$$s=\frac{t^2}{1-t^2}. \qquad \cdots ①$$

このときたしかに $s>0$.

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2\,dx=\frac{s}{3}.$$

$$Q=\int_0^t (-x^2+t^2)\,dx=\frac{2}{3}t^3.$$

よって，① より，

$$\frac{Q}{P}=\frac{2t^3}{s}=\frac{2t^3(1-t^2)}{t^2}=2(t-t^3).$$

これを $f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=2(1-3t^2).$$

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

$\dfrac{Q}{P}$ の最大値は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{4}{9}\sqrt{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

１辺の長さが１の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を２：１に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

分 野

数学Ｂ：ベクトル

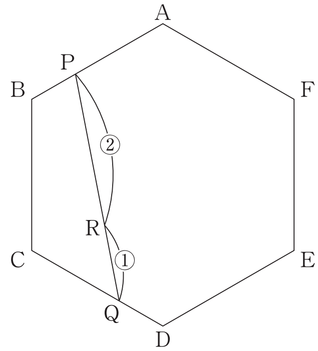
考え方

始点を A とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ がベクトル $\vec{a}$ および適当な１次独立な２つのベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ によって

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

の形で表されたら，点 R の存在範囲は平行四辺形の周および内部となり，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\vec{a}$ となるとき点 R はその１頂点であり，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は平行四辺形の隣り合う２辺を表すことがわかる．

【解答】



P は AB を $s:1-s$ $(0\leqq s\leqq 1)$ に，Q は CD を $t:1-t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ に内分するとする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

よって，

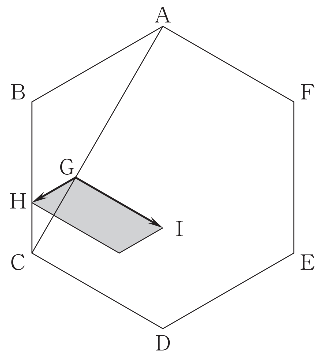
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{3}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

線分 AC を ２：１ に内分する点を G，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ をみたす点をそれぞれH, I とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AG}}+s\overrightarrow{\mathrm{AH}}+t\overrightarrow{\mathrm{AI}},\quad(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$$

と表されるから，点 R が通りうる範囲は

GH と GI を隣り合う２辺とする平行四辺形の周および内部．

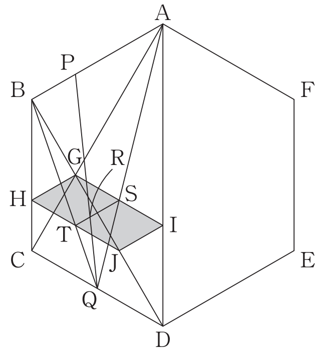


$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{3},\quad |\overrightarrow{\mathrm{GI}}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\frac{2}{3},\quad \angle\mathrm{HGI}=\angle\mathrm{BAF}=\frac{2}{3}\pi$$

であるから求める面積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{9}.\qquad\cdots(答)$$

【別解】



点 Q を固定して点 P を辺 AB 上を動かすとき，点 R は AQ，BQ をそれぞれ２：１に内分する点を両端とする線分 ST 上を動く．

ここで，Q を辺 CD 上を動かすと，S は AC，AD をそれぞれ２：１に内分する点を両端とする線分 GI 上を，T は BC，BD をそれぞれ２：１に内分する点を両端とする線分 HJ 上を動く．

したがって，点 R は平行四辺形 GHJI の周および内部を動く．（以下略）

第3問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点Pを考える。

(a) 最初に，点Pは原点Oにある。

(b) ある時刻で点Pが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その1秒後の点Pの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 最初から1秒後の点Pの座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2) 点Pが，最初から6秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

分　野

数学A：確率

考え方

点の座標を考えるとき，本問では座標の差 $s-t$ についての確率しか問うていない.

$(s,\ t)$ が $y-x=k$ 上にある1秒後に，$y-x=k+1$，$y-x=k-1$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動することに注目する.

【解答】

(1) 最初から1秒後の点Pの位置は $(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$ のいずれかでそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ の確率で起こる．このうち直線 $y-x=-1$ 上にあるのは，$(1,\ 0)$ と $(0,\ -1)$．したがって，$t-s=-1$ となる確率は $\dfrac{1}{2}$. …(答)

(2) 点Pが直線 $x-y=k$ 上にあるとき，1秒後には

(i) 事象A：点Pが直線 $y-x=k+1$ 上にある.

(ii) 事象B：点Pが直線 $y-x=k-1$ 上にある.

のいずれかが，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で起る.

はじめ $y-x=0$ 上にあり，6秒後に $y-x=0$ 上にあるのは，事象Aが3回，事象Bが3回起きたときである．その確率は

$${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}. \quad \cdots(答)$$

(注) n 秒後に直線 $y-x=k$（k は整数）にある確率は,

$$\begin{cases} \dfrac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k}{2}}}{2^n} & (n-k\ \text{が偶数かつ，}|k|\leqq n), \\ 0 & (n-k\ \text{が奇数のときまたは}\ |k|>n). \end{cases}$$

第4問

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問に答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

分　野

数学A：整数，**数学B**：数列，数学的帰納法

考え方

$-\dfrac{1}{p}=2-\sqrt{5}$ を q とおくと，$a_n=p^n+q^n$ となり，a_n は p，q の対称式になっている．こう考えると本問の見通しがよくなる．

(2)から a_n は3項間漸化式をみたす数列であることがわかる．

(3)は漸化式を用いて数学的帰納法で証明する．

(4)では a_n，a_{n+1} の最大公約数が a_{n+1}，a_{n+2} の最大公約数であることを証明することになるが，その証明には背理法を用いることになるので，数学的帰納法を逆にさかのぼって，a_{n+1} と a_n の最大公約数が a_1，a_2 の最大公約数に一致することの証明になる．

【解答】

(1)　$-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$．これを q とおく．

$$a_1=p+q=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4. \quad \cdots(答)$$

$$a_2=p^2+q^2=(9+4\sqrt{5})+(9-4\sqrt{5})=18. \quad \cdots(答)$$

(注)　答案としてはもちろん「$a_1=4$，$a_2=18$」だけでよい．

(2)　$pq=-1$．

$$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=(p^{n+1}+q^{n+1})+pq(p^{n-1}+q^{n-1})=a_{n+1}-a_{n-1}. \quad \cdots(答)$$

(3)　(1)，(2)より，

$$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}. \quad \cdots①$$

a_n が自然数であることを数学的帰納法で示す．

(Ⅰ)　$n=1$，2 のとき(1)より a_n は自然数である．

(Ⅱ)　$n=k$，$k-1$ $(k \geqq 2)$ のとき，a_n が自然数であるとすると，① より a_{k+1} も自然数である．

(Ⅰ)，(Ⅱ)より，すべての自然数 n に対し a_n は自然数である．　(証明終り)

(4)　(1)より a_1，a_2 の最大公約数は2であり，① と数学的帰納法により，a_n はすべて偶数である．

$a_n=2b_n$ とおくと，すべての自然数について，b_n は自然数である．

① より，

$$b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}. \quad \cdots②$$

ある自然数 n について，b_{n+1}，b_n が1より大きい公約数 p をもつとすると，$b_{n+1}=pc_{n+1}$，$b_n=pc_n$ となる自然数 c_{n+1}，c_n が存在し，② より

$$b_{n-1}=p(c_{n+1}-4c_n)$$

となる．したがって，p は b_n，b_{n-1} の公約数である．

上記の議論を続けると，b_1，b_2 は p (>1) を公約数としてもつことになる．

一方，$b_1=2$，$b_2=9$ の最大公約数は1である．これは矛盾である．

したがって，任意の自然数 n に対して，b_{n+1}，b_n は互いに素でなければならない．

以上から，a_{n+1}，a_n の最大公約数は2．　$\cdots$(答)

2017 年　理科

第 1 問

実数 a，b に対して
$$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$$
とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数
$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$
を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ。
また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

分　野

数学 I：2 次関数，**数学 II**：三角関数

考え方

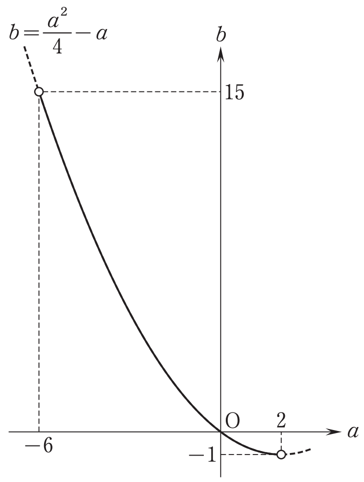
(1) $\cos n\theta$（n は自然数）は $\cos\theta$ の多項式で表される．$n=1,\ 2,\ 3$ については憶えていると思う．この結果を用いると $g(\theta)$ は a，b を係数に含む x の 2 次式になる．

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，$-1<x<1$ だから，$g(\theta)$ の最小値は開区間 $-1<x<1$ における 2 次関数の最小値である．

【解答】

(1) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\cos 2\theta=2\cos^2-1$ より，$f(\theta)$ を $x=\cos\theta$ で表すと，
$$f(\theta)=4x^3-3x+a(2x^2-1)+bx=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a. \qquad \cdots(答)$$
$g(\theta)$ を x で表すと，$x-1\neq 0$ より
$$g(\theta)=\frac{4(x^3-1)+2a(x^2-1)+(b-3)(x-1)}{x-1}$$
$$=4(x^2+x+1)+2a(x+1)+(b-3)=4x^2+(2a+4)x+2a+b+1. \qquad \cdots(答)$$

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，$-1<x<1$ である．
$G(x)=4x^2+(2a+4)x+2a+b+1$ が $-1<x<1$ の範囲で最小値 0 をとることが条件．
開区間であることから $y=G(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で x 軸に接することが条件．
$y=G(x)$ の軸は $-\dfrac{a+2}{4}$．これが $-1<x<1$ にあることから，
$$-6<a<2. \qquad \cdots①$$
$$\frac{1}{4}(判別式)=(a+2)^2-4(2a+b+1)=0 \iff b=\frac{a^2}{4}-a. \qquad \cdots②$$
①，② より，求める条件は
$$b=\frac{a^2}{4}-a \quad (-6<a<2). \qquad \cdots(答)$$
図示すると次図太線部，両端は含まない．



第２問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点Ｐを考える。

(a)　最初に，点Ｐは原点Ｏにある。

(b)　ある時刻で点Ｐが格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その１秒後の点Ｐの位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点Ｐが，最初から６秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点Ｐが，最初から６秒後に原点Ｏにある確率を求めよ。

分　野

数学Ａ：確率

考え方

傾きが１の直線群 $y=x+k$ と傾きが -1 の直線群 $y=-x+k'$ に分けて考えると，１秒後にはそれぞれ k，k' が１だけ異なる点へ移動する．それぞれの確率は独立に行われる．

また，６秒であるから，３秒後の位置と比較してもよい．

【解答】

(1)　点Ｐが直線 $x-y=k$ 上にあるとき，１秒後には

(i)　事象Ａ：点Ｐが直線 $y-x=k+1$ 上にある．

(ii)　事象 $\overline{\text{A}}$：点Ｐが直線 $y-x=k-1$ 上にある．

のいずれかが，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で起る．

はじめ $y-x=0$ 上にあり，６秒後に $y-x=0$ 上にあるのは，事象Ａが３回，事象 $\overline{\text{A}}$ が３回起きたときである．その確率は

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{20}{64}=\frac{5}{16}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　(1)と同様に点Ｐが直線 $x+y=k$ 上にあるとき，１秒後には

(a)　事象Ｂ：点Ｐが直線 $y+x=k+1$ 上にある．

(b)　事象 $\overline{\mathrm{B}}$：点Pが直線 $y+x=k-1$ 上にある．

のいずれかが，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で起こる．

事象Aと事象Bは独立に起こる．

はじめ $y+x=0$ 上にあり，6秒後に $y+x=0$ 上にあるのは，事象Bが3回，事象 $\overline{\mathrm{B}}$ が3回起きたときである．その確率は

$$\frac{5}{16}.$$

したがって，はじめ原点Oにあり，6秒後に原点Oにある確率は

$$\frac{5}{16}\cdot\frac{5}{16}=\frac{25}{256}. \quad\cdots(答)$$

（注）　n 秒後に点 $(k,\ l)$ （k，l は整数）にある確率は，

$$\begin{cases} \dfrac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n+k+l}{2}}\,{}_n\mathrm{C}_{\frac{n-k+l}{2}}}{2^{2n}} & (n-k-l \text{ が偶数かつ，} |k+l|\leqq n,\ |k-l|\leqq n), \\ 0 & (n-k-l \text{ が奇数のときまたは } |k+l|>n \text{ または，} |k-l|>n). \end{cases}$$

【別解1】

(1)　3秒後に点Pがいる直線を $x-y=k$ とする．

$k=-3,\ -1,\ 1,\ 3$ である確率はそれぞれ

$$\frac{1}{8},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{3}{8},\quad \frac{1}{8}$$

で，次の3秒で直線 $x-y=0$ に戻る確率はその直線に到る確率に等しいから求める確率は

$$\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{5}{16}. \quad\cdots(答)$$

(2)　3秒後に点Pがいる位置は

(i)　$(3,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(-3,\ 0)$，$(0,\ -3)$，

(ii)　$(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(-1,\ 2)$，$(-2,\ 1)$，$(-2,\ -1)$，$(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$，$(2,\ -1)$，

(iii)　$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(-1,\ 0)$，$(0,\ -1)$

のいずれか．

(i)の各点にある確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$.

(ii)の各点にある確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{3}{4^3}$.

(iii)の各点にある確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+3!\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{9}{4^3}$.

それぞれの点から次の3秒で原点に戻る確率は等しいから，6秒後に原点にある確率は

$$\frac{4\times1^2+8\times3^2+4\times9^2}{4^6}=\frac{25}{256}. \quad\cdots(答)$$

【別解2】

(1)　6秒後までに，$(m,\ n)$ から $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ への移動がそれぞれ a，b，c，d 回あったとする．

このとき，$a+b+c+d=6$ で点Pは点 $(a-c,\ b-d)$ にある．

6秒後に $y=x$ 上にあるなら，$a-c=b-d \iff a+d=b+c$.

よって，$a+d=b+c=3$.

$(a,\ d,\ b,\ c)=(3,\ 0,\ 3,\ 0)$ となる確率は $\dfrac{{}_6\mathrm{C}_3}{4^6}=\dfrac{5}{4^5}$. $\quad\cdots①$

$(a,\ d,\ b,\ c)=(3,\ 0,\ 2,\ 1)$ となる確率は $\dfrac{{}_6C_3\cdot{}_3C_2}{4^6}=\dfrac{15}{4^5}$. …②

$(a,\ d,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 2,\ 1)$ となる確率は $\dfrac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1\cdot{}_3C_2}{4^6}=\dfrac{45}{4^5}$. …③

$\{a,\ d\}=\{b,\ c\}=\{3,\ 0\}$ となる場合は $2^2=4$ 通りでそれぞれの確率は ① である.

$\{a,\ d\}=\{3\ \ 0\}$, $\{b,\ c\}=\{2,\ 1\}$ または $\{a,\ d\}=\{2,\ 1\}$, $\{b,\ c\}=\{3,\ 0\}$ となる場合は $2^2=8$ 通りでそれぞれの確率は ② である.

$\{a,\ d\}=\{b,\ c\}=\{2,\ 1\}$ となる場合は $2^2=4$ 通りでそれぞれの確率は ③ である.

よって，求める確率は

$$4\times\frac{5}{4^5}+8\times\frac{15}{4^5}+4\times\frac{45}{4^5}=\frac{5}{16}.$$

(2) 6 秒後に点 P が $(0,\ 0)$ にある条件は，$a=c$, $b=d$.

よって，$a+b=3$. 可能な場合は (1) の ①，③ の場合で，

$\{a,\ b\}=\{3,\ 0\}$ の場合，$\{a,\ b\}=\{2,\ 1\}$ の場合がそれぞれ 2 通りだから，求める確率は

$$2\times\left(\frac{5}{4^5}+\frac{45}{4^5}\right)=\frac{25}{256}. \quad \cdots(答)$$

第 3 問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くとき点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

分　野

数学Ⅲ：複素数平面

考え方

(1) 2 点 α, β を結ぶ線分の垂直二等分線を表す方程式は $|z-\alpha|=|z-\beta|$ である. また，点 γ を中心とする半径 r の円の方程式は $|z-\gamma|=r$ である.

z について，垂直二等分線の方程式を立て，$z=\dfrac{1}{w}$ から w の方程式にして，それを変形して円の方程式に直す.

(2) は同様に 2 点 β, β^2 を通る直線上を z が動くときの w の軌跡を求める. その直線のうち線分の部分を表す不等式を求め，それを w の不等式に直す. 求めた軌跡とその不等式との共通部分が求めるもの.

【解答】

(1) Oα の垂直二等分線上の点 z は

$$|z|=|z-\alpha|$$

をみたす.

$w=\dfrac{1}{z}$ だから，$w\neq0$ のとき，$z=\dfrac{1}{w}$. よって，

$$\frac{1}{|w|}=\left|\frac{1}{w}-\alpha\right|.$$

$$\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}.$$

よって，w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．（原点を除く）

よって，中心は $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径は $\dfrac{1}{|\alpha|}$.

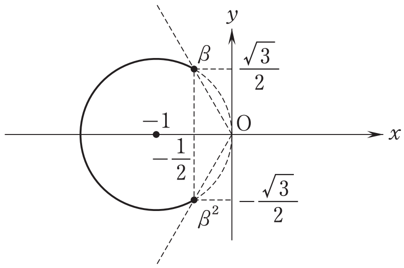
(2)　$\beta=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$.

よって，β，β^2 を結ぶ線分は点 -1 と原点を結ぶ線分の垂直二等分線上で，$120^\circ \leqq \arg z \leqq 240^\circ$ の部分である．

(1) より z が β，β^2 を通る直線上を動くとき，w は点 -1 を中心とする半径 1 の円周上を動く．

また，w の偏角は $-240^\circ \leqq \arg w \leqq -120^\circ$，すなわち，$120^\circ \leqq \arg w \leqq 240^\circ$ の範囲を動く．

図示すると，右図太線部，両端点を含む．



第 4 問

（文科　第 4 問と同じ）

第 5 問

k を実数とし，座標平面上で 2 つの放物線 C，D の共通接線について考える。

$$C：y=x^2+k$$
$$D：x=y^2+k$$

(1)　直線 $y=ax+b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし，$a \neq -1$ とする。

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：平面座標

考え方

2 次関数のグラフの接線の方程式を求める方法は微分法による方法と，判別式による方法があるが，共通接線の場合同じ直線に対して判別式が立てられるので，判別式による方法を使う．

(1) から k は a の関数として与えられる．(2) では $a=2$ から，k が定まるが，その k に対して a は 2 だけでなく，他の値もとる．a が 2 の他に 2 つの値をとることを示せばよい．

【解答】

(1)　$l：y=ax+b$ が共通接線のとき，l は C と接するから，

$$ax+b=x^2+k \text{ すなわち } x^2-ax+k-b=0$$

について

$$(\text{判別式})=a^2-4(k-b)=0 \text{ より } 4k-4b=a^2. \qquad \cdots①$$

また，l は D にも接するから $a\neq 0$ で $l: x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ だから，① と同様に

$$\frac{1}{a^2}-4\left(k+\frac{b}{a}\right)=0 \text{ より } 4(a^2k+ab)=1 \qquad \cdots②$$

①，② で $a\neq -1$ から

$$k=\frac{a^2-a+1}{4a}, \quad b=-\frac{a^3-a^2+a-1}{4a}=-\frac{(a-1)(a^2+1)}{4a}. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)　$a=2$ のとき，(1) から $k=\dfrac{3}{8}$.

この k を ①，② に代入すると，

$$\frac{3}{2}-4b=a^2, \quad \frac{3}{2}a^2+4ab=1.$$

b を消去して，

$$a^3-\frac{3}{2}a^2-\frac{3}{2}a+1=(a-2)\left(a-\frac{1}{2}\right)(a+1)=0.$$

よって，傾きは

$$2, \quad \frac{1}{2}, \quad -1.$$

y 切片は $b=\dfrac{3}{8}-\dfrac{a^2}{4}$ だから，

$$\begin{cases} a=2 \text{ のとき，} y \text{ 切片 } b=-\dfrac{5}{8}. \\ a=-\dfrac{1}{2} \text{ のとき } y \text{ 切片 } b=\dfrac{5}{16}. \\ a=-1 \text{ のとき } y \text{ 切片は } \dfrac{1}{8}. \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

(注)　$k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}$ つまり $a^2-(4k+1)a+1=0$ だから，$a\neq -1$ の共通接線が存在するのは

$$k<-\frac{3}{4}, \quad k\geqq \frac{1}{4}$$

のとき．$a=-1$ の共通接線は対称性から常に存在する．

また対称性から傾き a の共通接線が存在するとき，傾き $\dfrac{1}{a}$ の接線も存在する．したがって，$a\neq -1$ の共通接線が存在するとき，C，D は少なくとも 3 本の共通接線をもつ．a の方程式が 3 次方程式だから，3 本より多くの共通接線をもつことはない．

$k<-\dfrac{3}{4}$ の範囲は，C と D が異なる 4 点を共有する k の範囲であり，$k>\dfrac{1}{4}$ の範囲は，C と D が共有点をもたない範囲である．$k=\dfrac{1}{4}$ のとき，C と D は直線 $y=x$ に接する．$k=-\dfrac{3}{4}$ のとき，C と D は $y=x$ 上で接する傾き -1 の共通接線をもつ．

第 6 問

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0)

に対して，∠AOP を θ とおく。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。
(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。
(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

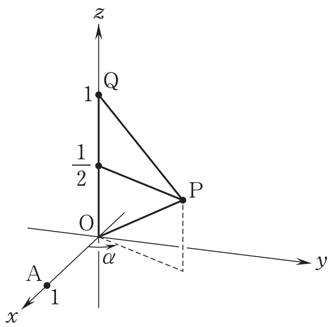
分 野

数学B：空間座標，**数学Ⅱ**：整式の積分，**数学Ⅲ**：体積

考え方

(1) は容易だが，このときの辺 OP の動きをよく捉えることが大切である．
(2) は $\mathrm{OQ}=1$ で Q が $x=0$ つまり yz 平面上を 1 回転することから，(1) で辺 OP が描いてできた図形を x 軸のまわりに 1 回転すればよいことがわかる．

【解答】



(1) P の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると，$\mathrm{OP}=\mathrm{PQ}=1$ から

$$x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

よって，$z=\dfrac{1}{2}$，$x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$.

よって，

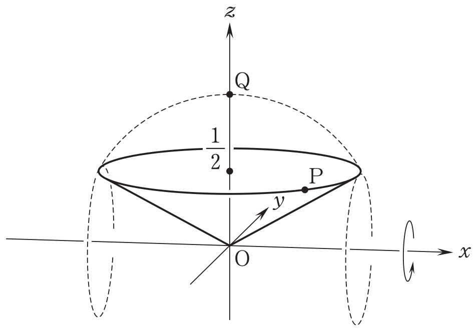
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \cdots(\text{答})$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\cos\theta=x$ だから，

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

よって，

$$30° \leqq \theta \leqq 150°. \quad \cdots(\text{答})$$



(2) Q が $x=0$ 上にあるとき，$\mathrm{OQ}=1$ より，Q は yz 平面内の単位円上にある．
例えば Q を $(0,\ 0,\ 1)$ で固定すると，P は OQ の垂直二等分面上の円を描き，辺 OP は円錐面を描く．
$\mathrm{OP}=1$ だから P が描く円は O を中心とする単位球面上にある．
Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，円錐面は $x^2+y^2=3z^2$ $\left(0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ である．
Q が yz 平面内で動くとき，この円錐は x 軸について 1 回転する．
x の範囲は (1) より $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．
$x=t$ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ における断面は 2 重の円で，外側の円は O からの距離が 1 の点すなわち単位球面上にあり，内側の円は Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき zx 平面上の点 $z=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 上の点である．
したがって求める立体は単位球から円錐をくり抜いた図形になる．その体積を V とおくと，

$$V=\pi\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left\{(1-t^2)-\frac{t^2}{3}\right\}dt=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}t^2\right)dt$$

$$=2\pi\left[t-\frac{4}{9}t^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi. \quad \cdots(\text{答})$$

2018 年　文科

第 1 問

座標平面上に放物線 C を

$$y=x^2-3x+4$$

で定め，領域 D を

$$y \geqq x^2-3x+4$$

で定める。原点をとおる 2 直線 l，m は C に接するものとする。

(1)　放物線 C 上を動く点 A と直線 l，m との距離をそれぞれ L，M とする。$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ が最小値をとるときの点 A の座標を求めよ。

(2)　次の条件をみたす点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

　条件：領域 D のすべての点 $(x,\ y)$ に対し不等式 $px+qy \leqq 0$ がなりたつ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，距離の公式，**数学Ⅰ**：絶対値

考え方

(1) は距離の公式を使えば $\sqrt{L}$，$\sqrt{M}$ は A の x 座標の 1 次関数の絶対値で表される．

(2) は丹念に場合分けをすればよい．$px+qy$ を内積とみれば見通しがよい．

【解答】

(1)　$f(x)=x^2-3x+4$ とおくと，$f'(x)=2x-3$.

点 $(s,\ s^2-3s+4)$ における C の接線の方程式は

$$y=(2s-3)(x-s)+s^2-3s+4=(2s-3)x-s^2+4.$$

これが原点を通るから，$s^2-4=0$. $s=\pm 2$.

一般性を失うことなく，2 接線を

$$l : y=-7x,\quad m : y=x$$

とする．

$\mathrm{A}(t,\ t^2-3t+4)$ とおくと，A は l，m より上にあることを考慮して，

$$L=\frac{t^2-3t+4+7t}{\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{(t+2)^2}{5\sqrt{2}},\quad M=\frac{t^2-3t+4-t}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{(t-2)^2}{\sqrt{2}}.$$

よって，

$$\sqrt{L}+\sqrt{M}=\frac{1}{\sqrt{5\sqrt{2}}}(|t+2|+\sqrt{5}\,|t-2|)=\begin{cases}\dfrac{(-1-\sqrt{5})t-2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (t<-2),\\[2ex] \dfrac{(1-\sqrt{5})t+2(1+\sqrt{5})}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (-2 \leqq t \leqq 2),\\[2ex] \dfrac{(1+\sqrt{5})t+2(1-\sqrt{5})}{\sqrt{5\sqrt{2}}} & (t>2)\end{cases}$$

よって，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ は $t \leqq 2$ で減少し，$t \geqq 2$ で増加する．したがって，これを最小にする点は

$$\mathrm{A}(2,\ 2).$$ …(答)

(2)　$px+qy \leqq 0$ を (*) とする．

(i)　$(p,\ q)=(0,\ 0)$ のとき，(*) は常に成り立つから与条件をみたす．

(ii)　$q=0$，$p \neq 0$ のとき，直線 $px+qy=0$ は y 軸に平行な直線だから，D のすべての点で (*) が成り立つことはない．

(iii) $q>0$ のとき，$px+qy \leqq 0$ は $y \leqq -\dfrac{p}{q}x$ と同値.

D 上で y 軸上の点は $y \geqq 4$ の範囲で，この部分では(*)をみたさない.

(iv) $q<0$ のとき，$px+qy \leqq 0$ は $y \geqq \dfrac{p}{|q|}x$ と同値.

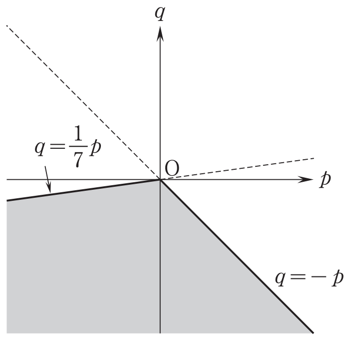
原点を通る C の接線が $y=-7x$，$y=x$ だから，D のすべての点で(*)をみたすのは，

$$-7 \leqq \frac{p}{|q|} \leqq 1 \quad つまり，\quad -7|q| \leqq p \leqq |q|$$

以上から，$(p,\ q)$ がみたすべき条件は，

$$q \leqq -p, \quad q \leqq \frac{p}{7}.$$

図示すると下図網掛部，境界を含む.



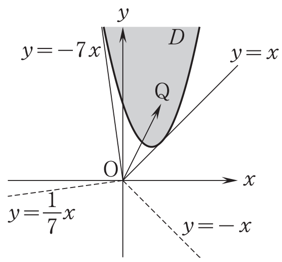
…(答)

(2)の【別解】

原点を O，D 上の点 $(x,\ y)$ を Q とすると，$px+qy=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$.

D は原点を含まないから $\mathrm{Q} \neq \mathrm{O}$.

よって，点 Q に対して $px+qy=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \leqq 0$ となることは $\mathrm{P}=\mathrm{O}$ または $\angle\mathrm{POQ} \geqq \dfrac{\pi}{2}$ であることである.



OP，OQ の長さに関係なく角度だけ考えればよい.

l，m に垂直な直線は $y=-x$，$y=\dfrac{1}{7}x$ である.

すべての Q に対して，$\mathrm{P}=\mathrm{O}$ または $\angle\mathrm{POQ} \geqq \dfrac{\pi}{2}$ となる P の存在範囲は

$$y \leqq -x, \quad かつ \quad y \leqq \frac{1}{7}x.$$

（図省略）

第 2 問

数列 a_1，a_2，… を

$$a_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める.

(1) a_7 と 1 の大小を調べよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<1$ をみたす n の範囲を求めよ。

(3)　a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ。

分　野

数学A：整数

考え方

(1), (2) は (3) のための誘導.

(1), (2) から a_n が途中から減少し，$a_7<1$ となるから，$n \leqq 7$ について a_n を具体的に求めればよい．特定の素因数に注目すると，a_n が整数でないことを少ない計算で確認することができる.

【解答】

(1)　$a_7=\dfrac{{}_{14}\mathrm{C}_7}{7!}=\dfrac{14!}{(7!)^3}=\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{7^2\cdot6^2\cdot5^2\cdot4^2\cdot3^2\cdot2^2\cdot1^1}=\dfrac{13\cdot11}{14\cdot15}<1.$

よって，

$$a_7<1. \quad \cdots(答)$$

(2)　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{(2n)!\{(n-1)!\}^3}{\{2(n-1)\}!(n!)^3}=\dfrac{2(2n-1)}{n^2}<1.$

$$n^2-2(n-1)=n^2-4n+2>0.$$

$n^2-4n+2=0$ の解は $n=2\pm\sqrt{2}$．よって $n<2-\sqrt{2}$，$n>2+\sqrt{2}$.

$n \geqq 2$ だから，n は 4 以上の整数.　$\cdots$(答)

(3)　(2) から a_n は $n=3$ で最大，以後減少.

$$a_1=\frac{2!}{(1!)^3}=2.\quad a_2=\frac{4!}{(2!)^3}=3$$

$a_3=\dfrac{6!}{(3!)^3}$，$a_4=\dfrac{8!}{(4!)^3}$ の分母，分子にある 3 の素因数はともにそれぞれ 3 個，2 個．よって，a_3，a_4 は整数でない.

$a_5=\dfrac{10!}{(5!)^3}$，$a_6=\dfrac{12!}{(6!)^3}$ の分母，分子にある 5 の素因数はともにそれぞれ 3 個，2 個．よって，a_5，a_6 は整数でない.

$a_7<1$ で，(2) より，$n \geqq 4$ で a_n は減少して正だから，$n \geqq 7$ で a_n が整数になることはない.

以上から

$$n=1,\ 2. \quad \cdots(答)$$

(参考)

$$a_3=\frac{10}{3},\quad a_4=\frac{35}{12},\quad a_5=\frac{21}{10},\quad a_6=\frac{77}{60},\quad a_7=\frac{143}{210}.$$

(3) の【別解】

$\dfrac{(2n)!}{n!}=(2n-1)(2n-3)\cdots1\times2^n$

よって，$\dfrac{(2n)!}{n!}$ に含まれる素因数 2 の個数はちょうど n 個.

一方 $n!$ に含まれる素因数 n の個数は $\dfrac{n-1}{2}$ 以上．特に $n \geqq 4$ のときは $\dfrac{n}{2}$ より大きい.

したがって，$n \geqq 4$ のとき，$(n!)^2$ に含まれる素因数 2 の個数は n より大きい．よって，$n \geqq 4$ のとき，$a_n=\dfrac{(2n)!/n!}{(n!)^2}$ の分母，分子は整数で，分母に含まれる素因数 2 の個数は分母の方が分子より多い．し

たがって，a_n は整数でない．

$a_1=2$，$a_2=3$，$a_3=\dfrac{10}{3}$ より，整数になるのは

$$n=1,\ 2. \qquad \cdots(答)$$

第3問

$a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。

(1) $x \geqq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するための，a についての条件を求めよ。

(2) 次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，方程式への応用

考え方

方程式 $f(x)=b$ の解は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の交点の x 座標である．

相異なる 3 実解をもつ条件は異なる 3 点で交わることであり，$\alpha<\beta<\gamma$ のとき，β は極大点と極小点の間の交点の x 座標である．

【解答】

(1) $f'(x)=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$.

$f(x)$ が $x \geqq 1$ で単調に増加する条件は $x \geqq 1$ で $f'(x) \geqq 0$ が常に成り立つことである．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

だから，

$$0<a \leqq 1. \qquad \cdots(答)$$

(2) $f(\pm a)=\mp 2a^3$ であるから，$f(x)=b$ が相異なる 3 実解をもつ条件は

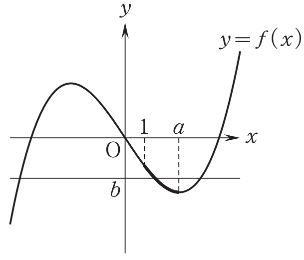
$$-2a^3<b<2a^3.$$

$y=f(x)$ のグラフを考えると，$-a<\beta<a$.

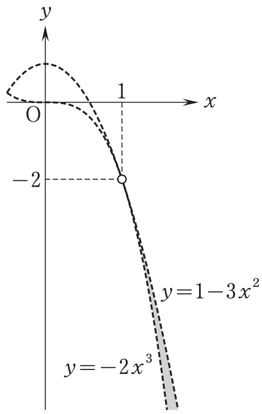
$1<\beta<a$ より $a>1$.

$f(1)=1-3a^2$. より，$y=b$ と $y=f(x)$ のグラフが $1<x<a$ で交る条件は

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2. \qquad \cdots(答)$$



図示すると次図網掛部，境界を含まない．



…(答)

（注） $y=-2x^3$ と $y=1-3x^2$ は点 $(1,\ -2)$ で接する．

第4問

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A$(1,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P が C 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

をみたす点 Q の軌跡を求めよ。

(2) 点 P が C 上を動き，点 R が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

をみたす点 S が動く領域を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：軌跡，点の存在領域，**数学B**：ベクトル

考え方

P と Q の対応関係を求め，P に関する条件を Q の条件として表すことができれば，Q の軌跡を求めることができる．

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とかけるから，(1) の Q の軌跡を平行移動すると考えればよい．

【解答】

(1) 点 P の座標を $(t,\ t^2)$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ とおき，Q の座標を $(X,\ Y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ から P と Q は 1 対 1 に対応する．

$$X=2t,\quad Y=2t^2.\quad \therefore\quad Y=2\left(\frac{X}{2}\right)^2=\frac{X^2}{2}.$$

また，$-1\leqq t\leqq 1$ より $-1\leqq \dfrac{X}{2}\leqq 1$，$-2\leqq X\leqq 2$.

よって，点 Q の軌跡は放物線の一部

$$y=\frac{x^2}{2}\quad (-2\leqq x\leqq 2).$$ …(答)

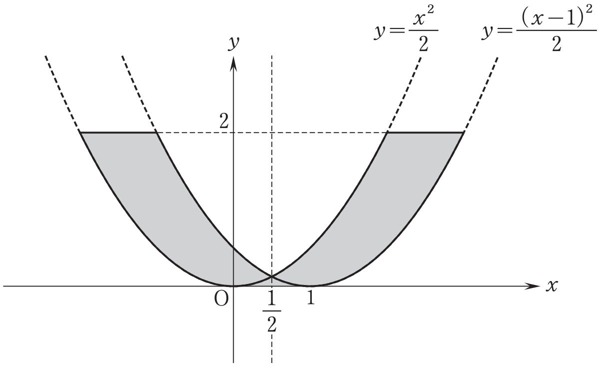
(2) 点 R の座標を $(s,\ 0)$ $(0\leqq s\leqq 1)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\ \text{から}\ \overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}.$$

よって，S は Q から $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(s,\ 0)$ $(0\leqq s\leqq 1)$ だけ平行移動した点である．よって，S の存在領域は

Qの軌跡を x 軸正方向に1以内の平行移動したものである．

図示すると下図網掛部，境界を含む．



この図形は $x=\frac{1}{2}$ について対称であり，$y=\frac{x^2}{2}$ $(x \geqq 0)$，$y=\frac{(x-1)^2}{2}$ $(x \geqq 1)$，$y=0$，$y=1$ で囲まれた部分の面積は，y で積分することを考えることにより2であることがわかる．

求める面積を T とすると，

$$T=2\left(2-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx\right)=2\left(2-\frac{1}{48}\right)=\frac{95}{24}. \qquad \cdots(答)$$

（注）　$T=2\left\{\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx+2-\int_1^3 \frac{(x-1)^2}{2}\,dx\right\}$ としても同じ結果をうる．

数学と囲碁・将棋

藤井聡太さんや仲邑菫さんの活躍でこのところ囲碁・将棋が話題になっています．

河合塾だけでなく数学を好む人には囲碁・将棋，特に囲碁好きの人が多いように思います．ルールが単純で奥が深いからかもしれません．

実は私は囲碁も将棋もやりません．小学生の時にルールを教えてもらったように思いますが，負けるのが嫌いでずっとやっていません．おかげ様でそれ以後負けていません．もちろん勝ってもいません．

さて，囲碁・将棋について，ある人が数学と同じだといっていました．レフェリーもアンパイアも審判も行司もいらないということです．確かに数学で解けた思うとき，誰かに判断を仰ぐことはまれです．もちろん，解けたと思ってから考え直すと不備が見つかることはあります．

しかし，たいていの場合解けたことは解けたことで，解けなかったことは解けなかったことと自ずからわかります．

また，あるとき，講師どうしの会話で囲碁・将棋のプロについて「よくもまあ，あんなことで食べていけるもんだなあ」と一人が言うと，もう一人が「俺たちだって大して変らないのじゃないか」といって大笑いしたことがあります（日本棋院の方，将棋連盟の方，ゴメンナサイ）．入試問題が解けた解けないで一喜一憂している我々も，囲碁・将棋に命を賭ける棋士たちと大差ないのかもしれません．「吹けば飛ぶような答案用紙に賭けた命を笑わば笑え」なんちゃって．

2018 年　理科

第 1 問

関数

$$f(x)=\frac{x}{\sin x}+\cos x \quad (0<x<\pi)$$

の増減表をつくり，$x\to+0$，$x\to\pi-0$ のときの極限を調べよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法，極限

考え方

どこまで求められているのかわからないので，$f(x)$ の増減と $f(x)$ の極限だけ求めたものを解答とする．

【解答】

$$f'(x)=\frac{1}{\sin x}-\frac{x\cos x}{\sin^2 x}-\sin x=\frac{\cos x(\sin x\cos x-x)}{\sin^2 x}=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}(\sin 2x-2x).$$

$0<x<\pi$ において，$\sin 2x<2x$，$\sin x>0$ から，

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

…(答)

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}+\cos x\right)=1+1=2.$$ …(答)

$y=\pi-x$ とすると，

$$f(x)=\frac{\pi-y}{\sin y}-\cos y.$$

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x)=\lim_{y\to+0}\left(\frac{\pi-y}{\sin y}-\cos y\right)=+\infty.$$ …(答)

(注)　$f(x)$ の極値および，$f'(x)$ の極限を調べる．これらは問われていないと判断した．

極小値は

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to\pi-0} \cos x(\sin 2x-2x)=2\pi\ (>0)$$

より，

$$\lim_{x\to\pi-0} f'(x)=+\infty$$

これらは容易に求められる．

$\lim_{x\to+0} f'(x)$ は容易ではない．

$$g(x)=\sin 2x-2x+\frac{4}{3}x^3$$

とおくと，$g(0)=0$，$g'(x)=2\cos 2x-2+4x^2$．

$g'(0)=0$，$g''(x)=-4\sin 2x+8x$．

$g''(0)=0$，$g'''(x)=-8\cos 2x+8=8(1-\cos 2x)>0$．

$g''(x)$ は増加関数だから，$0<x<\pi$ で $g''(x)>g''(0)=0$.

$0<x<\pi$ で $g'(x)$ は増加関数だから $g'(x)>g'(0)=0$.

$0<x<\pi$ で $g(x)$ は増加関数だから $g(x)>g(0)=0$.

よって，$0<x<\pi$ で $\sin 2x-2x>-\dfrac{4}{3}x^3$.

よって，

$$-\frac{4}{3}x^3<\sin 2x-2x<0.$$

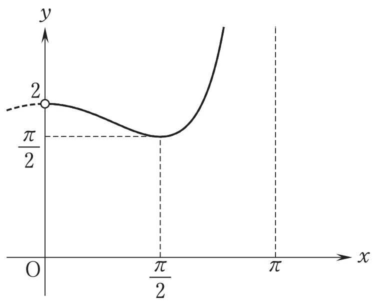
$$-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\cdot\frac{4}{3}x^3=-\frac{2}{3}x\cos x\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2<f'(x)<0.$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{2}{3}x\cos x\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=0$$

はさみうちの原理から

$$\lim_{x\to+0}f'(x)=0.$$

$y=f(x)$ のグラフは下図.



第2問

数列 a_1，a_2，$\cdots$ を

$$a_n=\frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める.

(1) $n\geqq 2$ とする。$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n\geqq 1$ と分子 q_n を求めよ。

(2) a_n が整数となる $n\geqq 1$ をすべて求めよ。

分　野

数学A：整数

考え方

(1) は (2) のためのヒントになっている．素因数 2 について考えることが重要.

【解答】

(1) $a_n=\dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!(n!)^2}$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(2n+1)!\,n!\{(n-1)!\}^2}{(n+1)!(n!)^2(2n-1)!}=\frac{2(2n+1)}{(n+1)n}.$$

n と $2n+1$，および $n+1$ と $2n+1$ は互いに素であり，$n(n+1)$ は偶数だから，

$$p_n=\frac{n(n+1)}{2},\quad q_n=2n+1. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) $a_1=3$，$a_2=5$.

(1) の q_n はすべて奇数であるが，$p_3=6$（偶数）である.

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{q_n}{p_n}\cdot\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{q_3}{p_3}\cdot\frac{q_2}{p_2}a_1$$

から，$a_n(n\geqq 3)$ の既約分母はすべて偶数で分子は奇数になる.

したがって，$n\geqq 3$ のとき，a_n は整数でない.

以上から

$$n=1,\ 2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(2) の**【別解】**

$$a_{n-1}-a_n=\frac{a_{n-1}}{n(n+1)}\{n(n+1)-2(2n-1)\}$$

$$n(n+1)-2(2n+1)=n^2-3n-2=\left(n-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{17}{4}.$$

よって，$n\geqq 4$ のとき，$a_{n-1}>a_n$.

$$a_1=3,\quad a_2=3\times\frac{5}{3}=5,\quad a_3=5\times\frac{7}{6}=\frac{35}{6},\quad a_4=\frac{35}{6}\,\frac{9}{10}=\frac{21}{4},$$

$$a_5=\frac{21}{4}\,\frac{11}{15}=\frac{77}{20},\quad a_6=\frac{77}{20}\,\frac{13}{21}=\frac{143}{60},\quad a_7=\frac{143}{60}\,\frac{15}{28}=\frac{143}{112},$$

$$a_8=\frac{143}{112}\,\frac{17}{36}=\frac{2431}{4032}\quad(<1).$$

a_8 から先は減少し，正だから，a_n が整数になることはない.

以上から

$$n=1,\ 2. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 3 問

放物線 $y=x^2$ のうち $-1\leqq x\leqq 1$ をみたす部分を C とする。座標平面上の原点 O と点 A(1, 0) を考える。$k>0$ を実数とする。点 P が C 上を動き，点 Q が線分 OA 上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点 R が動く領域の面積を $S(k)$ とする。

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k\to+0}S(k)$，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：軌跡，点の存在領域，**数学B**：ベクトル，**数学Ⅲ**：極限

考え方

P，Q を別々に動かして考える．$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ として，それぞれの動きがとらえられれば領域の概形がつかめる.

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおく.

Pの座標を(t, t^2) $(-1 \leqq t \leqq 1)$ とおき，Sの座標を(X, Y)とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ からPとSは1対1に対応する．

$$X = \frac{t}{k}, \quad Y = \frac{t^2}{k}. \quad \therefore \quad Y = \frac{(kX)^2}{k} = kX^2.$$

また，$-1 \leqq t \leqq 1$ より $-1 \leqq kX \leqq 1$，$-\dfrac{1}{k} \leqq X \leqq \dfrac{1}{k}$.

よって，点Sの軌跡は放物線の一部

$$y = kx^2 \quad \left(-\frac{1}{k} \leqq x \leqq \frac{1}{k}\right).$$

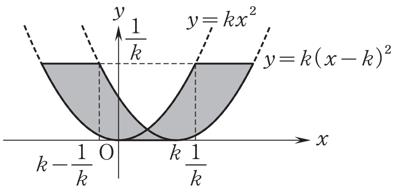
点Qの座標を$(s, 0)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (ks, 0), \quad (0 \leqq ks \leqq k).$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{OT}} \text{ から } \overrightarrow{\mathrm{SR}} = \overrightarrow{\mathrm{OT}}.$$

よって，Rの軌跡はSの軌跡をx軸正方向にkだけ平行移動して掃過する領域．

Sの軌跡は $y = kx^2 \left(-\dfrac{1}{k} \leqq x \leqq \dfrac{1}{k}\right)$ から，$y = k(x-k)^2 \left(k - \dfrac{1}{k} \leqq x \leqq k + \dfrac{1}{k}\right)$ まで移動する．

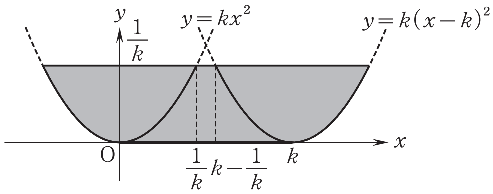
(i) $k - \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k}$ つまり $0 < k < \sqrt{2}$ のとき，図示すると下図網掛部，境界を含む．



この図形は $x = \dfrac{k}{2}$ について対称であり，$y = kx^2$ $(x \geqq 0)$，$y = k(x-k)^2$ $(x \geqq k)$，$y = 0$，$y = 1$ で囲まれた部分の面積は，yで積分することを考えることにより1であることがわかる．

$$S(k) = 2\left(1 - \int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx\right) = 2 - \frac{k^4}{12}.$$

(ii) $k \geqq \sqrt{2}$ のとき，図示すると下図網掛部，境界を含む．



$$S(k) = 1 + \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx = 1 + \frac{4}{3k^2}.$$

以上より

$$S(k) = \begin{cases} 2 - \dfrac{k^4}{12} & (0 < k < \sqrt{2}), \\ 1 + \dfrac{4}{3k^2} & (k \geqq \sqrt{2}). \end{cases} \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\lim_{k \to +0} S(k) = \lim_{k \to +0}\left(2 - \frac{k^4}{12}\right) = 2. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\lim_{k \to \infty} S(k) = \lim_{k \to \infty}\left(1 + \frac{4}{3k^2}\right) = 1. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

$a>0$ とし，

$$f(x)=x^3-3a^2x$$

とおく。次の 2 条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面に図示せよ。

条件 1：方程式 $f(x)=b$ は相異なる 3 実数解をもつ。

条件 2：さらに，方程式 $f(x)=b$ の解を $\alpha<\beta<\gamma$ とすると $\beta>1$ である。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，方程式への応用

考え方

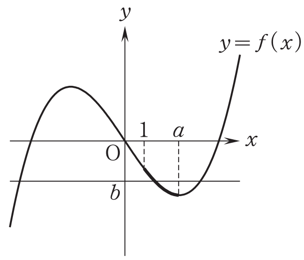
方程式 $f(x)=b$ の解は曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の交点の x 座標である．

相異なる 3 実解をもつ条件は異なる 3 点で交わることであり，$\alpha<\beta<\gamma$ のとき，β は極大点と極小点の間の交点の x 座標である．

【解答】

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$．

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗



$f(\pm a)=\mp 2a^3$ であるから，$f(x)=b$ が相異なる 3 実解をもつ条件は

$$-2a^3<b<2a^3.$$

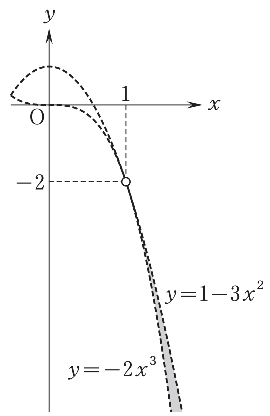
$y=f(x)$ のグラフを考えると，$-a<\beta<a$．

$1<\beta<a$ より $a>1$．

$f(1)=1-3a^2$．より，$y=b$ と $y=f(x)$ のグラフが $1<x<a$ で交る条件は

$$a>1,\ -2a^3<b<1-3a^2. \qquad \cdots(答)$$

図示すると下図網掛部，境界を含まない．



…(答)

(注)　$y=-2x^3$ と $y=1-3x^2$ は点 $(1,\ -2)$ で接する．

第 5 問

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする。点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする。点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ。

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする。点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くとき点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：複素数平面

考え方

(1) については A と Q が P における接線に関して線対称であることを定義に従って導くか，回転してから考えるかである.

(2) については (1) から必要な条件を読み出すことがポイント.

(1) の【解答】

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(0<\theta<2\pi)$ とおく．複素数平面全体を $-\theta$ 回転すると，P は 1 に，A は $\cos\theta-i\sin\theta$ に Q は A と $x=1$ に対称な点 $2-\cos\theta-i\sin\theta=2-z$ に移るから，$\mathrm{Q}(u)$ はこれを原点を中心に θ 回転した点．つまり，

$$u=(\cos\theta+i\sin\theta)(2-\cos\theta-i\sin\theta)=z(2-z). \quad \cdots(答)$$

$$w=\frac{1}{1-z(2-z)}=\frac{1}{(1-z)^2}.$$

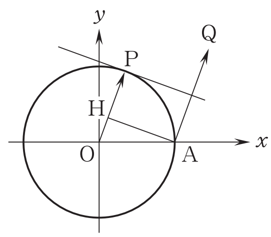
$|z|^2=z\overline{z}=1$ から $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

$$\frac{\overline{w}}{w}=\frac{(1-z)^2}{(1-\overline{z})^2}=\frac{(1-z)^2}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2}=z^2. \quad \cdots(答)$$

$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=\left|1+\frac{\overline{w}}{w}-\frac{1}{w}\right|=|1+z^2-(1-z)^2|=2|z|=2. \quad \cdots(答)$$

***u* を求める部分の【別解 1】**

【解答】と同様に $\mathrm{P}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．A から直線 OP に下した垂線を AH とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{OP}}$.



$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{HP}}=2(1-\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OP}}.$$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を複素数で表すと，

$$u=1+2(1-\cos\theta)z.$$

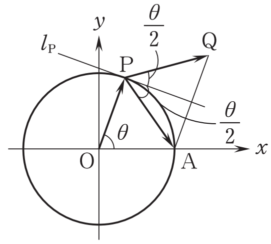
$z+\overline{z}=2\cos\theta$, $z\overline{z}=1$ より，

$$u=1+2z-(z+\overline{z})z=2z-z^2. \quad \cdots(答)$$

以下**【解答】**と同じ.

u を求める部分の【別解２】

$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とおくと，PA と P における接線 l_{P} のなす角は $\dfrac{\theta}{2}$ だから $\angle\mathrm{APQ}=\theta$.



Q は A を l_{P} について対称移動した点であるから，$\mathrm{PA}=\mathrm{PQ}$ である．

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を θ 回転したものである．

θ 回転を表す複素数は z だから，Q を表す複素数は

$$u=z+z(1-z)=z(2-z). \qquad \cdots(答)$$

以下【解答】と同じ．

(2) の【解答】

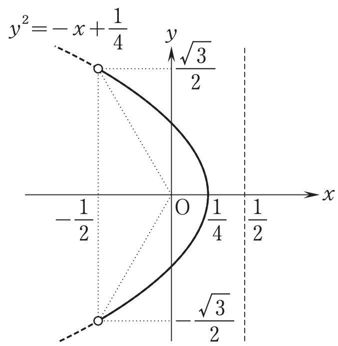
(1) より，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=|w|$.

$|w|$ は原点と $\mathrm{R}(w)$ の距離であり，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2}-\dfrac{1}{2}\right|$ は $\mathrm{R}(w)$ と複素数平面上の直線 $l：x=\dfrac{1}{2}$ の距離である．

したがって，$\mathrm{R}(w)$ の軌跡は原点を焦点，l を準線とする放物線の部分．

$z=p+qi$（p，q は実数）とすると $p\leqq\dfrac{1}{2}$，$p^2+q^2=1$.

$$w=\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-p)^2-q^2-2(1-p)qi}=\frac{1}{(1-p)^2-(1-p^2)-2(1-p)qi}$$
$$=\frac{-1}{2(1-p)(p+qi)}=-\frac{p-qi}{2(1-p)}.$$



よって，$w=x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$$x=-\frac{p}{2(1-p)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(1-p)}.$$

x は p の減少関数で，z の実部 p について，$-1\leqq p\leqq\dfrac{1}{2}$ だから，

$$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{4}.$$

したがって，$\mathrm{R}(w)$ の軌跡は原点を焦点，$l：x=\dfrac{1}{2}$ を準線とする放物線の $-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の部分．

（注１） 軌跡の方程式を $(x,\ y)$ でかくと，$4\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)=y^2$ すなわち，

$$-x+\frac{1}{4}=y^2.$$

（注２） $z-1$ の偏角を θ とおくと，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$ であり，$w=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ の偏角は -2θ となる．

$$-\frac{8}{3}\pi\leqq\arg w=-2\theta\leqq-\frac{4}{3}\pi$$

となる．1 周期なおせば

$$-\frac{2}{3}\pi\leqq\arg w\leqq\frac{2}{3}\pi$$

となる．これをみたす w の範囲を軌跡の範囲としても同じ結果をうる．

(2) の【別解１】 誘導無視

P が C' 上にある条件を θ で表すと，$z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$，$w=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ から，

$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi.$

$$w = \frac{1}{(1-\cos\theta - i\sin\theta)^2} = \frac{(1-\cos\theta + i\sin\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2}$$
$$= \frac{(1-\cos\theta)^2 - \sin^2\theta + 2i(1-\cos\theta)\sin\theta}{4(1-\cos\theta)^2} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}.$$

$w = x + yi$（x，y は実数）とおくと，

$$x = -\frac{\cos\theta}{2(1-\cos\theta)},\quad y = \frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}.$$

$\cos\theta = \dfrac{2x}{2x-1}$ で $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ から，$-\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq \dfrac{1}{4}$.

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4(1-\cos\theta)^2} = \frac{(2x-1)^2}{4}.\quad y^2 = -x + \frac{1}{4}.$$

よって，$\mathrm{R}(w)$ の軌跡を $(x,\ y)$ で表すと，

$$y^2 = -x + \frac{1}{4},\quad \left(x \geqq -\frac{1}{2}\right).$$

(2)の【別解 2】　多段変換

$w = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ を $v_1 = 1 - z$，$v_2 = \dfrac{1}{v_1}$，$w = {v_2}^2$ と段階的な変換をして，その都度の軌跡を考えることにより解き明かしてゆく．

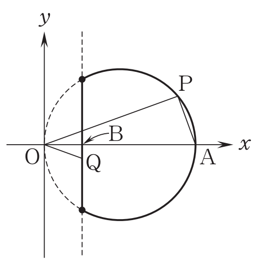
z の軌跡は $|z| = 1$，$\dfrac{z + \overline{z}}{2} \leqq \dfrac{1}{2}$，つまり原点を中心とする半径 1 の円のうち，$xy$ 平面で $x \leqq \dfrac{1}{2}$ の部分．

$v_1 = 1 - z$ は z の軌跡を点 $\dfrac{1}{2}$ について点対称移動した図形．

v_1 の軌跡は z の軌跡を点 $\dfrac{1}{2}$ について点対称移動したもの，$|v_1 - 1| = 1$，$\dfrac{v_1 + \overline{v_1}}{2} \geqq \dfrac{1}{2}$，点 1 を中心とする半径 1 の円のうち，$xy$ 平面で $x \geqq \dfrac{1}{2}$ の部分．

$v_2 = \dfrac{1}{v_1}$ つまり，$|v_2| = \dfrac{1}{|v_1|}$，$\arg v_2 = -\arg v_1$.

$\mathrm{P}(v_1)$，$\mathrm{Q}(v_2)$ とし，$\mathrm{A}(2)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とすると，$|v_1| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$，$|v_2| = |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$，$\arg v_1 = \angle\mathrm{AOP} = \theta$ とおくと，$\arg v_2 = \angle\mathrm{BOQ} = -\theta$（ここでは角は向きを持って考える）



$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ} = 1$ で，$\mathrm{OP} = \mathrm{OA}\cos\theta = 2\cos\theta$ だから，$\mathrm{OQ} = \dfrac{1}{2\cos\theta} = \dfrac{\mathrm{OB}}{\cos\theta}$.

よって，Q から x 軸におろした垂線は B を通る．

また，$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ から，$\mathrm{Q}(v_2)$ の軌跡は $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ と $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を結ぶ線分である．

$w = {v_2}^2$ である．$v_2 = \dfrac{1}{2} + ki\ \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，

$$w = \frac{1}{4} - k^2 + ki$$

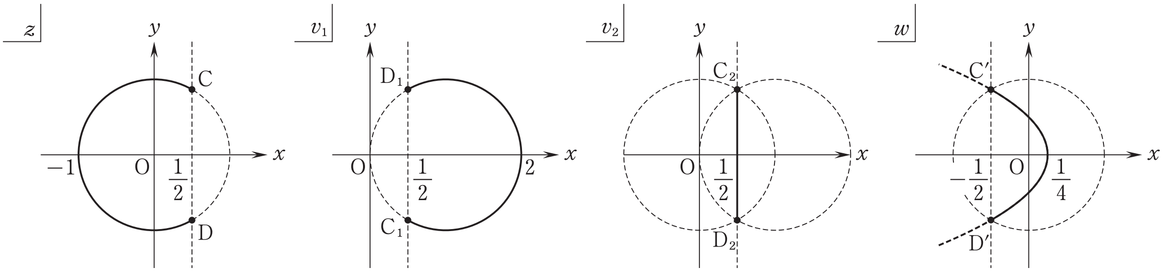
と書けるから，$w = x + yi$（x，y は実数）とすると，

$$x = \frac{1}{4} - y^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

となり，w の軌跡は上記放物線である．

（注１）　ここまでの変換を順次図示すると下図のようである．

ここで，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とし，これらを z の端点とする．C，D がそれぞれ $\mathrm{C}\to\mathrm{C}_1\to\mathrm{C}_2\to\mathrm{C}'$，$\mathrm{D}\to\mathrm{D}_1\to\mathrm{D}_2\to\mathrm{D}'$ のように移動したとして以下の図を見てほしい．



複素数平面上で原点を通る円の原点以外の複素数の逆数の軌跡は原点と円の中心を通る直線に垂直な直線になる．

また，複素数平面上の直線上の点を表す複素数の２乗が表す点の軌跡は原点を焦点とし，直線の原点に最も近い点を表す複素数の２乗が表す点を頂点とする放物線になる．

これらのことはこれまでもたびたび出題されてきた事柄である．

また，端点の偏角の変化も注意深く見てほしい．

（注２）　u の軌跡は点 A が尖点になるカージオイドで，$1-u$ の軌跡は原点が尖点になるカージオイドである．$w=\dfrac{1}{1-u}$ の軌跡はその反転を実軸対称したものである．これが放物線になるということがこの問題のネタかもしれない．

第６問

座標空間内の４点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(1,\ 1,\ 1)$ を考える。

$\dfrac{1}{2}<r<1$ とする。点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球（内部を含む）が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする。

(1)　平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ。さらに，この範囲の t に対し，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ。

(2)　V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ。

(3)　r は(2)の条件をみたすとする。V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする。V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ。

(4)　ひきつづき r は(2)の条件をみたすとする。S と T を求め，V の体積を決定せよ。

分　野

数学Ｂ：空間座標，**数学Ⅲ**：整式の積分，体積

考え方

V_1，V_2，V_3 を半球と円柱にわけ，座標で表して考える．

【解答】

(3)における「V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V」は $V=V_1\cup V_2\cup V_3$ の意味と解釈する．

(1)　V_1 は

$$x^2+y^2+z^2\leqq r^2\ (x\leqq 0),\quad y^2+z^2\leqq r^2\ (0\leqq x\leqq 1),\quad (x-1)^2+y^2+z^2\leqq r^2\ (x\geqq 1)$$

の 3 つの部分からなり，V_3 は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2\leqq r^2\ (z\leqq 0),\quad (x-1)^2+(y-1)^2\leqq r^2\ (0\leqq z\leqq 1),$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqq r^2\ (z\geqq 1)$$

の 3 つの部分からなる．

平面 $y=t$ が V_1 と共通点をもつ t の値の範囲は $-r\leqq t\leqq r$，V_3 と共通点をもつ t の値の範囲は $1-r\leqq t\leqq 1+r$ である．

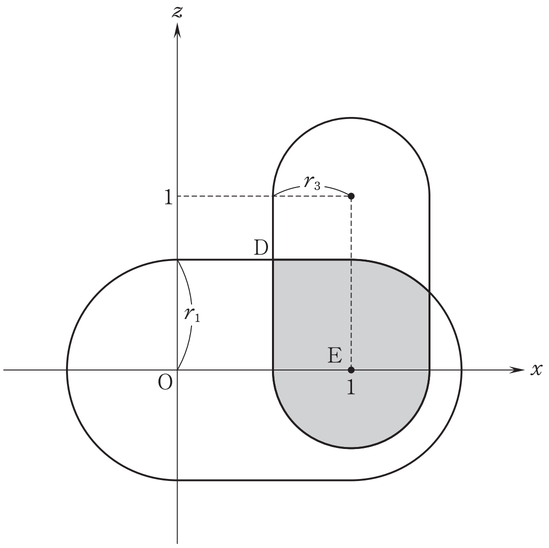
$\dfrac{1}{2}<r<1$ のとき $1-r\leqq t\leqq r$ の範囲で V_1，V_3 は $(1,\ t,\ 0)$ を含むからそれらの共通部分は存在する．

よって，共通部分が存在する条件は

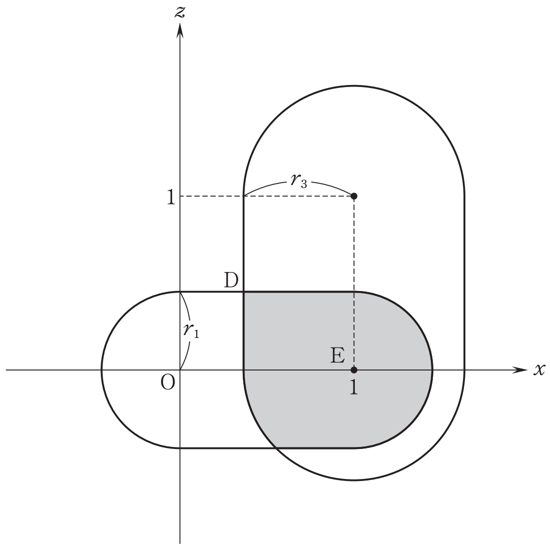
$$1-r\leqq t\leqq r. \qquad \cdots(答)$$

$(1,\ t,\ 0)$ を中心とする V_1，V_3 の切り口の半円の半径をそれぞれ，$r_1=\sqrt{r^2-t^2}$，$r_3=\sqrt{r^2-(t-1)^2}$ とすると，$1-r\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$r_3\leqq r_1$，$\dfrac{1}{2}<t\leqq r$ のとき $r_1<r_3$ である．

したがって，切り口の図は以下のようである．



$1-r\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき



$\dfrac{1}{2}<t\leqq r$ のとき

(2) V_2 は

$$(x-1)^2+y^2+z^2\leqq r^2\ (y\leqq 0),\quad (x-1)^2+z^2\leqq r^2\ (0\leqq y\leqq 1),\quad (x-1)^2+(y-1)^2+z^2\leqq r^2\ (y\geqq 1)$$

の 3 つの部分からなる．

$0<1-r\leqq t\leqq r<1$ だから V_1，V_3 の共有点を含む平面 $z=t$ による V_2 の切り口は常に

$$(x-1)^2+z^2\leqq r^2 \qquad \cdots①$$

(1) の図が ① に含まれる条件は (1) の領域で $\mathrm{E}(1,\ 0)$ から最も遠い点 D が ① をみたすことである．

$\mathrm{D}(1-\sqrt{r^2-(1-t)^2},\ \sqrt{r^2-t^2})$ から

$$\mathrm{DE}^2=2r^2-1+2t-2t^2\leqq r^2.\quad r^2\leqq 2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

これが，$1-r\leqq t\leqq r$ で常に成り立つ条件は $r^2\leqq\dfrac{1}{2}$．つまり，

$$\frac{1}{2}<r\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \cdots(答)$$

(3) 点集合 U の体積を $V(U)$ で表すと，

$$V(V)=V(V_1\cup V_2\cup V_3)$$
$$=V(V_1)+V(V_2)+V(V_3)-V(V_1\cap V_2)-V(V_2\cap V_3)-V(V_1\cap V_3)+V(V_1\cap V_2\cap V_3).$$

$V_1\cap V_3\subset V_2$ のとき，$V_1\cap V_3=V_1\cap V_2\cap V_3$ である．

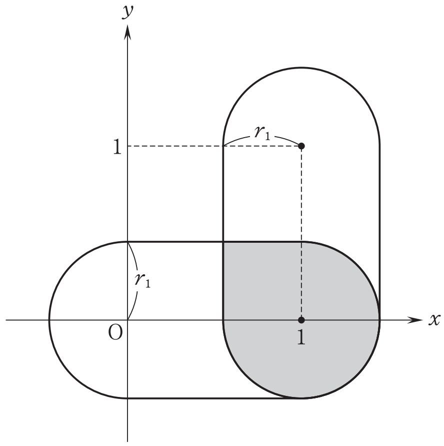
また，合同であることから，$V(V_1)=V(V_2)=V(V_3)=S$，$V(V_1\cap V_2)=V(V_2\cap V_3)=T$.

よって，

$$V(V)=V(V_1)+V(V_2)+V(V_3)-V(V_1\cap V_2)-V(V_2\cap V_3)=3S-2T. \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)　V_1 は 2 つの半球と円柱の部分からなるから，その体積は

$$S=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2.$$



V_1 と V_2 の共通部分の $z=t$ による切り口は，右図の網掛け部，ただし，$r_1=\sqrt{r^2-t^2}$．その面積は

$$\frac{3}{4}\cdot\pi {r_1}^2+{r_1}^2=\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)(r^2-t^2).$$

よって，共通部分の体積は

$$T=\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\int_{-r}^{r}(r^2-t^2)\,dt=\left(\frac{3}{4}\pi+1\right)\frac{4}{3}r^3$$
$$=\left(\pi+\frac{4}{3}\right)r^3.$$

(3) から V の体積は

$$3\left(\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2\right)-2\left(\pi+\frac{4}{3}\right)r^3=2\pi r^3+3\pi r^2-\frac{8}{3}r^3. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注 1）　V_1，V_2 の共通部分は半径 r の球の $\dfrac{3}{4}$ の部分と，底面の半径が r の円柱を底面の直径を通り底面と 45° の角をなす平面で切り取った立体 2 個からなると考えてもよい．

（注 2）　$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき $V_1\cap V_3=\emptyset$ となるから，V の体積は結局 (4) で求めた体積と同じ式になる．

2019 年　文科

第 1 問

座標平面の原点を O とし，O，A(1, 0)，B(1, 1)，C(0, 1) を辺の長さが 1 の正方形の頂点とする。3 点 P(p, 0)，Q(0, q)，R(r, 1) はそれぞれ辺 OA，OC，BC 上にあり，3 点 O，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\frac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

(1)　q と r を p で表し，p，q，r それぞれのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，図形

考え方

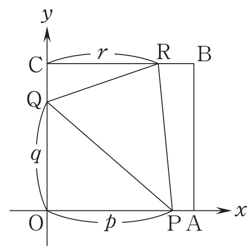
三角形の面積の和，差で考えれば p，q，r の関係式が求まる．

$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\frac{r}{q}$ に代入すれば，p の 3 次関数になり増減は容易にとらえられる．

【解答】

(1)　三角形 OPQ の面積は $\frac{pq}{2}=\frac{1}{3}$ だから，

$$pq=\frac{2}{3}. \quad \cdots①$$



三角形 PQR の面積が $\frac{1}{3}$ とすると，

$$台形\ \mathrm{OPRC}-\triangle\mathrm{CQR}=\triangle\mathrm{OPQ}+\triangle\mathrm{QPR}=\frac{2}{3}.$$

だから

$$\frac{1}{2}(p+r)-\frac{1}{2}(1-q)r=\frac{2}{3}.$$

$$\therefore\quad p+qr=\frac{4}{3}. \quad \cdots②$$

①，② から

$$q=\frac{2}{3p},\quad r=2p-\frac{3}{2}p^2. \quad \cdots(答)$$

$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$ から，$\frac{2}{3}\leqq p\leqq 1$.

$$r=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

から，$\frac{1}{2}\leqq r\leqq \frac{2}{3}$.

まとめて，

$$\frac{2}{3}\leqq p\leqq 1,\quad \frac{2}{3}\leqq q\leqq 1,\quad \frac{1}{2}\leqq r\leqq \frac{2}{3}. \quad \cdots(答)$$

(2)

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\frac{r}{q}=\frac{2p-\frac{3}{2}p^2}{\frac{2}{3p}}=3p^2-\frac{9}{4}p^3.$$

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ とおくと，

$$f'(p)=6p-\frac{27}{4}p^2.$$

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},\quad f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81},\quad f(1)=\frac{3}{4}$$

より，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}} \text{ の最大値は } \frac{64}{81},\quad \text{最小値は } \frac{2}{3}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第２問

O を原点とする座標平面において，点 A(2, 2) を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P$(p,\ q)$ が次の２つの条件をみたしながら動く。

条件１：$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件２：点 O と直線 l の距離を c とし，点 P$(p,\ q)$ と直線 l の距離を d とするとき，$cd \geqq (p-1)^2$

このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1) D を図示し，その面積を求めよ。

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：軌跡，領域，整式の積分，面積，**数学B**：ベクトル，**数学Ⅰ**：三角比

考え方

与えられた条件を p，q の条件式に直せば，点 $(p,\ q)$ の存在領域を表す不等式になる．

図示されれば，面積を求めること，角度の範囲を求めることは容易である．

【解答】

(1) 条件１より

$$8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2p+2q \leqq 17.$$

よって，

$$4 \leqq p+q \leqq \frac{17}{2}. \qquad \cdots①$$

直線 l：$p+q=4$．原点 O と l との距離は $c=\dfrac{4}{\sqrt{2}}$.

P と l の距離は

$$d=\frac{|p+q-4|}{\sqrt{2}}.$$

条件 2 より,

$$cd=2|p+q-4|\geqq(p-1)^2.$$

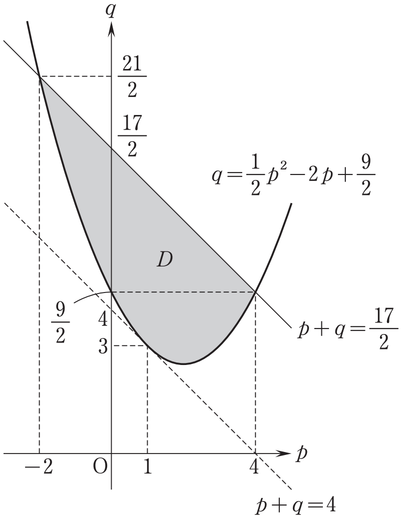
① より, $p+q-4\geqq0$ よって,

$$p+q-4\geqq\frac{1}{2}(p-1)^2. \quad \cdots ②$$

①, ② より,

$$\frac{1}{2}(p-1)^2-p+4=\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}\leqq q\leqq-p+\frac{17}{2}.$$

図示すると次図.



$\cdots$(答)

D の面積は

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(-p+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}\right)\right\}dp=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}(p+2)(p-4)\,dp=18. \quad \cdots(答)$$

(2) 原点 O を通り, D に接する接線を考える. 接線の方程式を $q=kp$ とする.

$q=\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}$ に接するとすると,

$$\frac{1}{2}p^2-2p+\frac{9}{2}=kp. \quad p^2-2(k+2)p+9=0.$$

接する条件は $(k+2)^2-9=0$. $k=1$, $k=-5$. そのときの接点の座標 p はそれぞれ, 3, -3.
D の範囲は $-2\leqq p\leqq4$ だから, $k=1$ のときは D と接するが, $k=-5$ のときは D とは接しない.

$k=1$ のとき, $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

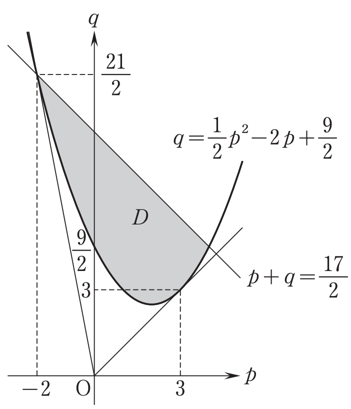
$q=kp$ が点 $\left(-2,\ \frac{21}{2}\right)$ を通るとき, $k=-\frac{21}{4}$.

このとき,

$$\cos\theta=\frac{-4}{\sqrt{21^2+4^2}}=-\frac{4}{\sqrt{457}}.$$

また, $\theta=\frac{\pi}{2}$ もとりうるから, $\cos\theta$ のとりうる値の範囲は

$$-\frac{4}{\sqrt{457}}\leqq\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \cdots(答)$$



第3問

正八角形の頂点を反時計回りにA，B，C，D，E，F，G，Hとする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインがある。

点Pが最初に点Aにある。次の操作を10回繰り返す。

操作：コインを投げ，表が出れば点Pを反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点Pを時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点Pが点Hにある状態で，投げたコインの表が出れば点Aに移動させ，裏が出れば点Gに移動させる。

事象 S：操作を10回行った後に点PがAにある。

事象 T：1回目から10回の操作によって，点Pは少なくとも1回，点Fに移動する。

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ。

(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

分　野

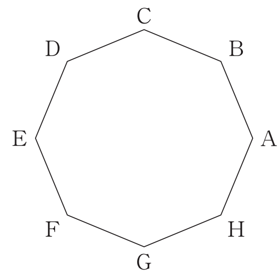
数学A：確率

考え方

八角形になっているが，たかだか10回の操作だから，反復試行として，場合の数を丹念に数えてゆけばよい．

【解答】

(1) 10回投げてAにあるのは，5回ずつ表，裏が出る場合の他，表が9回，裏が1回の場合と，表が1回，裏が9回の場合である．



表，裏が5回ずつ出る確率は $\frac{{}_{10}C_5}{2^{10}}$.

表が9回，裏が1回の場合と，表が1回，裏が9回の場合の確率はともに $\frac{10}{2^{10}}$.

求める確率は

$$\frac{{}_{10}C_5+2\times10}{2^{10}}=\frac{17}{64}. \qquad \cdots(答)$$

(2) 事象 S のうち，表が9回，裏が1回の場合と，表が1回，裏が9回の場合はともにFに1回は移動する．それぞれの場合の数は10通り．

表，裏が5回ずつ出る場合，少なくとも1回Fに移動するには，反時計回りでFに到達する場合と，時計回りでFに到達する場合がある．

Fに反時計回りで到達し，10回の操作でAにあるのは5回目の操作の後Fにある場合だけであり，その場合の数は1通り．

Fに時計回りで到達し，10回の操作でAにあるのは3，5，7回目の操作の後Fにある場合である．それらの事象を L，M，N とし，事象 X が起こる場合の数を $n(X)$ で表す．

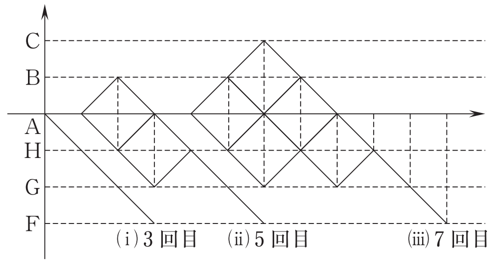
$$n(L)=n(N)={}_7C_2=21,\quad n(M)=5^2=25,$$
$$n(L\cap M)=n(M\cap N)=2\times5=10,\quad n(L\cap N)={}_4C_2=6,$$
$$n(L\cap M\cap N)=2^2=4.$$

$$\begin{aligned}n(L\cup M\cup N)&=n(L)+n(M)+n(N)-n(L\cap M)-n(L\cap N)-n(M\cap N)+n(L\cap M\cap N)\\&=21+25+21-10-6-10+4=45.\end{aligned}$$

求める確率は

$$\frac{10+10+1+45}{2^{10}}=\frac{33}{512}.$$ …(答)

(注)　$n(L\cup M\cup N)$ を求めるとき，初めて，F に移動した回数で分類してもよい．その場合 F に移動するまでの表，裏の出方を右図のようにグラフにして，街路のように考えるとよい．



(i)　3 回目に初めて F に移動する場合，3 回目までは 1 通り，4 回目以後は表が 5 回，裏が 2 回出るから，${}_7C_5=21$ 通り．よって 21 通り．

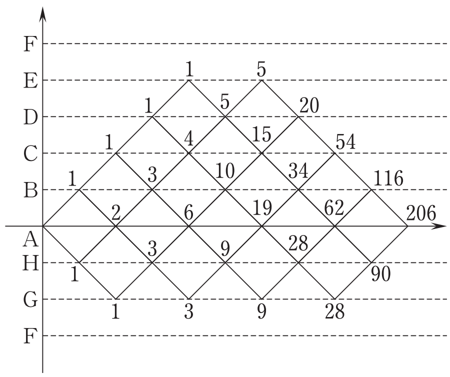
(ii)　5 回目に初めて F に移動する場合，5 回目までは 3 通り，6 回目以後は表が 4 回，裏が 1 回出るから，${}_5C_4=5$ 通り．よって $3\times5=15$ 通り．

(iii)　7 回目に初めて F に移動する場合，4 回目までで点 P が A にある場合が ${}_4C_2=6$ 通り．4 回目までで点 P が G にある場合が 3 通り，合計 9 通りある．8 回目以後は 1 通り．よって 9 通り．

合計 $21+15+9=45$ 通り．

(2)の【別解】

(1)のうち F を通らないのは，表，裏が 5 回ずつ出る場合だけである．その確率を求める．グラフを考え，場合の数を数える．



上の図から，$n(S\cap\overline{T})=206$．$S\cap\overline{T}$ の確率は $\dfrac{206}{2^{10}}=\dfrac{103}{512}$．

よって，求める確率は

$$\frac{17}{64}-\frac{103}{512}=\frac{33}{512}.$$ …(答)

第 4 問

O を原点とする座標平面を考える。不等式

$$|x|+|y|\leqq1$$

が表す領域を D とする。また，点 P，Q が領域 D を動くとき，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R が動く範囲を E とする。

(1)　D，E をそれぞれ図示せよ。

(2)　a，b を実数とし，不等式

$$|x-a|+|x-b|\leqq1$$

が表す領域を F とする。また，点 S，T が領域 F を動くとき，$\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OT}$ をみたす点 U が

動く範囲を G とする。G は E と一致することを示せ。

分 野

数学Ⅱ：軌跡・領域，**数学B**：ベクトル

考え方

(1) では一方を固定して他方を動かして考える．

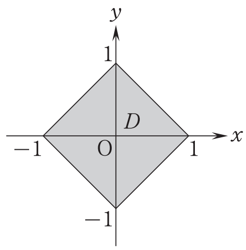
(2) は (1) との 1 対 1 対応関係を使って説明する．

【解答】

(1) 与えられた不等式の x を $-x$ で置き換えても，y を $-y$ で置き換えても領域は同じである．したがって，D は x 軸，y 軸について対称である．

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，与式は $x+y \leqq 1$ である．この領域は $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ を頂点とする三角形の周および内部である．

D はこの領域を x 軸，y 軸について対称移動してできる領域である．図示すると下図．



…(答)

領域 D は原点対称だから，Q を原点について対称移動した点を Q′ とすると，Q′ も D の点で，Q と Q′ は 1 対 1 に対応する．

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}.$$

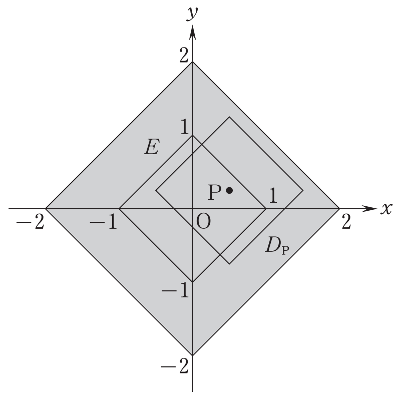
Q′ は領域 D 内をくまなく動き，R は Q′ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ だけ平行移動した点だから，P を固定すると，R の動く範囲は D を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ だけ平行移動した領域である．

このとき D が平行移動した領域を D_{P} とすると，D_{P} は P を中心とした図形である．

D_{P} を，P が D 内にあるように動かしたとき，D_{P} が通過する領域は

$$|x|+|y| \leqq 2.$$

これをみたす点の集合が E である．図示すると下図網掛け部である．



…(答)

(2)
$$|x|+|y| \leqq 1, \qquad \cdots①$$
$$|x-a|+|y-b| \leqq 1 \qquad \cdots②$$

とおく．

② をみたす領域 F は ① をみたす領域 D を $\overrightarrow{a}=(a,\ b)$ だけ平行移動した領域である．

したがって，D 上の点の組 (P, Q) と F 上の点の組 (S, T) は

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\vec{a}$$

とすることにより，1 対 1 に対応する．

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\vec{a})-(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\vec{a})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}.$$

よって，U と R は一致する．

R が E に属するなら，対応する D の要素 P，Q が存在し，それに対応する F の要素 S，T が存在し，それから導かれる U は R に一致し G に属する．

逆に U が G に属するなら，同様に対応する R が U に一致し E に属する．

よって，

$$G=E.$$

（証明終り）

(1) の後半の【別解】

一般に，

$$|X-Y|\leqq|X|+|Y| \qquad \cdots③$$

が成り立つ．（X，Y の符号によって場合分けすれば容易に証明される．）

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y),\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x'+y'),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(X,\ Y)$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より $X=x-x'$，$Y=y-y'$．③ より，

$$|X|+|Y|=|x-x'|+|y-y'|\leqq(|x|+|x'|)+(|y|+|y'|)=(|x|+|y|)+(|x'|+|y'|)\leqq1+1=2.$$

よって，$|X|+|Y|\leqq2$.

一方，$|X|+|Y|\leqq2$ のとき，$x=-x'=\dfrac{X}{2}$，$y=-y'=\dfrac{Y}{2}$ とおけば，$|x|+|y|\leqq1$，$|x'|+|y'|\leqq1$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となり，R に対応する P，Q$(\in D)$ が存在する．

以上から $E:|x|+|y|\leqq2$．（図省略）

(2) の【別解】

S$(x_1,\ y_1)$，T$(x_2,\ y_2)$ とおくと，S，T は領域 F の点だから，

$$|x_1-a|+|y_1-b|\leqq1,\quad |x_2-a|+|y_2-b|\leqq1. \qquad \cdots④$$

$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ から，U$(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ は G に属する．

$(x_1-a,\ y_1-b)=(x'_1,\ y'_1)$，$(x_2-a,\ y_2-b)=(x'_2,\ y'_2)$ とおくと，④ より

$$|x'_1|+|y'_1|\leqq1,\quad |x'_2|+|y'_2|\leqq1 \qquad \cdots⑤$$

だから，P$(x'_1,\ y'_1)$，Q$(x'_2,\ y'_2)$ は D の点である．

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x_1-a,\ y_1-b)-(x_2-a,\ y_2-b)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ から，R$(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$ は E に属する．

R$=$U だから，U は E に属する．

逆に，P$(x'_1,\ y'_1)$，Q$(x'_2,\ y'_2)$ が D に属するとき，⑤ をみたす．

このとき，$(x'_1,\ y'_1)=(x_1-a,\ y_1-b)$，T$(x'_2,\ y'_2)=(x_2-a,\ y_2-b)$ とおき，S$(x_1,\ y_1)$，T$(x_2,\ y_2)$ とおくと，S，T は領域 F の点で，U$=$R となるから，R は G に属する．

したがって，$G=E$.

（証明終り）

2019 年　理科

第 1 問

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

分　野

数学Ⅲ：積分法

考え方

まず展開して，積分を幾つかの和の形にする．

$\sqrt{1+x^2}$ と $\dfrac{1}{1+x^2}$ の形から置換の仕方を判断する．

その際，残りの部分の，x の次数が奇数か偶数かについても注意する．

【解答】

展開して，

$$(\text{与式})=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}.$$

$\sqrt{1+x^2}=y$ とおくと，

$$\int_0^1\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y}+\frac{y^2-1}{y^3}\right)ydy=\int_1^{\sqrt{2}}\left(2-\frac{1}{y^2}\right)dy$$

$$=\left[2y+\frac{1}{y}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}-3.$$

$x=\tan\theta$ とおくと，

$$\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).$$

以上から

$$(\text{与式})=\frac{1}{3}+\frac{5}{\sqrt{2}}-3+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{8}-\frac{35}{12}. \qquad \cdots(\text{答})$$

第 2 問

一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AD，CD 上にあり，3 点 A，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする。

$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ。

分 野

数学Ⅱ：整式の微分，図形

考え方

三角形の面積の和，差で考えれば AP$=p$，AQ$=q$，DR$=r$ の関係式が求まる．

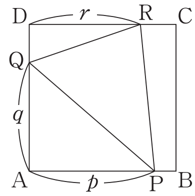
$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\dfrac{r}{q}$ に代入すれば，p の 3 次関数になり増減は容易にとらえられる．

【解答】

AP$=p$，AQ$=q$，DR$=r$ とおく．

三角形 APQ の面積は $\dfrac{pq}{2}=\dfrac{1}{3}$ だから，

$$pq=\frac{2}{3}. \qquad \cdots①$$



三角形 PQR の面積が $\dfrac{1}{3}$ とすると，

$$\text{台形 APRD}-\triangle\mathrm{DQR}=\triangle\mathrm{APQ}+\triangle\mathrm{QPR}=\frac{2}{3}.$$

だから

$$\frac{1}{2}(p+r)-\frac{1}{2}(1-q)r=\frac{2}{3}.$$

$$p+qr=\frac{4}{3}. \qquad \cdots②$$

①，② から

$$q=\frac{2}{3p},\quad r=2p-\frac{3}{2}p^2.$$

$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$ から，$\dfrac{2}{3}\leqq p\leqq 1$.

$$r=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

から，$\dfrac{1}{2}\leqq r\leqq \dfrac{2}{3}$.

$$\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}=\frac{r}{q}=\frac{2p-\frac{3}{2}p^2}{\frac{2}{3p}}=3p^2-\frac{9}{4}p^3.$$

$f(p)=3p^2-\dfrac{9}{4}p^3$ とおくと，

$$f'(p)=6p-\frac{27}{4}p^2.$$

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},\quad f\left(\frac{8}{9}\right)=\frac{64}{81},\quad f(1)=\frac{3}{4}$$

より，

$$\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}\text{ の最大値は }\frac{64}{81},\quad \text{最小値は }\frac{2}{3}. \qquad \cdots(答)$$

（注） この問題は文科の第１問とほぼ同じ問題であるが，変数の取り方が指定されていない．したがって，求める辺の長さの比は q または r で表しそうだが，実際に計算してゆくと，p で表すのが妥当なことがわかる．

第３問

座標空間内に５点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(-2,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -2,\ 0)$，E$(0,\ 0,\ -2)$ を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする。さらに，p は $2<p<4$ をみたす実数とし，点 P$(p,\ 0,\ 2)$ を考える。

⑴ 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

⑵ 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

⑶ 実数 p が⑵で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ。

分　野

数学B：空間座標

考え方

⑴ P 以外は座標が定まっているので概形はつかみやすい．α と同一平面上に図示することを要求しているから，P と α の位置関係について場合分けして図示するとよい．

⑵ 八面体の各頂点が平面 α のどちら側にあるかをまず判断すること．
断面が八角形になるのは，八面体の８個の面が α と交わると考えた．

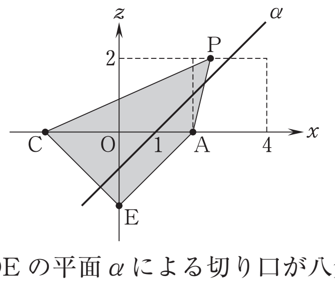
⑶ 断面の $y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分は，⑴で図示した断面より向こう側で，平面 ABCD の上側である．この範囲で α と交わる辺は PB と PC だけである．このことがわかれば，あとは丁寧に交点の座標を求めれば，切り口の形がわかる．

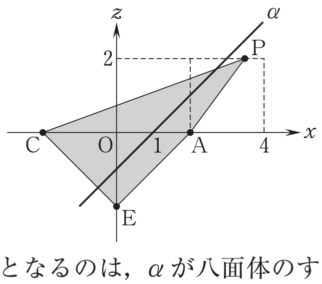
【解答】

⑴ 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口は下図の四角形 APCE である．ただし，P が α について，C と同じ側にあるときの断面図が左図，P が α について，A と同じ側にあるときの断面図が右図．

M は AB の中点 $(1,\ 1,\ 0)$，N は AD の中点 $(1,\ -1,\ 0)$．したがって，MN の中点は $(1,\ 0,\ 0)$．この点は平面 $y=0$ および α 上にある．α は，AE に平行だから，$y=0$ における α の切り口は $z=x-1$.

平面 α の平面 $y=0$ による切り口は下図の太線である．





⑵ 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となるのは，α が八面体のすべての面と交わる場合である．

⑴の図において，y 軸は画面に垂直に手前から向こうに向かっていて，点 B は画面について O の向こう側，点 D は画面について O の手前側にある．また，α は画面に垂直である．ただし，xyz 座標は右手系をとって考えている．

したがって，A，E と B，D は α の反対側にあるから，八面体の面，ABE，ABP，ADE，ADP，EBC，EDC の 6 面は α と必ず交わる．

残りの 2 面は BCP，CDP であり，B，C，D は α について同じ側にある．

したがって，8 個の面と α が交わるためには，P は α について B，C，D と反対側になければならない．

直線，$y=0$，$z=2$ と平面 α の交点は $(3,\ 0,\ 2)$ である．

P が α について B，C，D と反対側にあるには $p>3$ でなければならない．$2<p<4$ も含めると，

$$3<p<4. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) 切り口のうち，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ の部分は，八面体の面 BAP，BCP と α の交点と，$y=0$，$z=0$ で囲まれた部分である．

α について，A，P と B，C は反対側にある．

AC と α の交点は $\mathrm{S}(1,\ 0,\ 0)$．

AB と α の交点は $\mathrm{T}(1,\ 1,\ 0)$．

BP と α の交点を Q とすると，Q は BP 上にあるからその座標は $(ps,\ 2(1-s),\ 2s)$ とかけ，α 上にあるから $z=x-1$ をみたし，$2s=ps-1$．

よって，$s=\dfrac{1}{p-2}$．Q の座標は

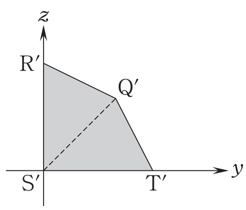
$$\left(\frac{p}{p-2},\ \frac{2(p-3)}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right).$$

CP と α の交点を R とすると，R は CP 上にあるからその座標は $(pt-2(1-t),\ 0,\ 2t)$ とかけ，α 上にあるから $z=x-1$ をみたし，$2t=pt-2(1-t)-1$．

よって，$t=\dfrac{3}{p}$．R の座標は

$$\left(1+\frac{6}{p},\ 0,\ \frac{6}{p}\right).$$

空間の点 S，T，Q，R が yz 平面上で対応する点をそれぞれ $\mathrm{S}'(0,\ 0)$，$\mathrm{T}'(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}'\left(\dfrac{2(p-3)}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$，$\mathrm{R}'\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$ とする．yz 平面上に図示すると，右図のようである．



求める面積は

$$\triangle \mathrm{S'T'Q'}+\triangle \mathrm{S'Q'R'}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\,\frac{6}{p}\times\frac{2(p-3)}{p-2}=\frac{7p-18}{p(p-2)}. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注） 断面 STQP の面積はこの $\sqrt{2}$ 倍である．また八角形の断面積は $\left\{2\left(\dfrac{7p-18}{p(p-2)}\right)+\dfrac{5}{2}\right\}\sqrt{2}$ である．

また断面積は $p=\dfrac{18+6\sqrt{2}}{7}$ のとき最大になる．

第 4 問

n を 1 以上の整数とする。

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ。

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ。

分 野

数学 A：整数

考え方

⑴ は n を消去することで，最大公約数を絞り込むことができる．

⑵ では ⑴ で求めた d_n を用いると，$n^2+1=d_nk^2$，$5n^2+9=d_nl^2$（k，l は互に素な整数）の形に表される．このことを使う．

整数を 2 乗した整数を適当な整数で割った余りはとりうる値が限定される．主に，そのことを使う．

整数問題の解法はいろいろ考えられる．ここに示さなかった方法もあろう．

【解答】

⑴ $(5n^2+9)-5(n^2+1)=4$ は d_n を約数としてもつ．

したがって，d_n は 4，2，1 のいずれかである．

(i) n が奇数のとき，n^2+1，$5n^2+9$ はともに偶数．よって，公約数 2 をもつ．

一方，$n=2m+1$（m は負でない整数）とおくと，

$$n^2+1=4m^2+4m+2.$$

よって，n^2+1 を 4 で割った余りは 2．したがって，$d_n \neq 4$．よって，$d_n=2$．

(ii) n が偶数のとき，n^2+1，$5n^2+9$ はともに奇数．よって，公約数 2 をもつことはない．よって，$d_n=1$．

以上から，

$$d_n=\begin{cases} 2 \text{（n が奇数のとき）}, \\ 1 \text{（n が偶数のとき）}. \end{cases} \quad \cdots\text{(答)}$$

⑵ $n^2+1=d_nA$，$5n^2+9=d_nB$，（A，B は整数）とおくと，

$$(n^2+1)(5n^2+9)=d_n{}^2AB.$$

これが整数の 2 乗であるとすると，A，B は互に素だから，A も B も整数の 2 乗でなければならない．

したがって，

$$n^2+1=d_nk^2, \quad 5n^2+9=d_nl^2 \quad \text{（k，l は正の整数）} \quad \cdots①$$

とおける．

(i) n が奇数のとき，$d_n=2$．よって，

$$n^2+1=2k^2, \quad 5n^2+9=2l^2. \quad \cdots②$$

両辺の差をとると，

$$4n^2+8=2(l^2-k^2). \quad 2n^2+4=l^2-k^2. \quad \cdots③$$

n は奇数だから ③ の左辺を 4 で割った余りは 2．

一方，整数を 2 乗したとき，これを 4 で割った余りは 0 または 1．したがって，③ の右辺を 4 で割った余りは 0，1，$3(\equiv -1)$ のいずれか．

両辺を 4 で割った余りが異なるからこれは矛盾である．

したがって，n が奇数のとき，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になることはない．

(ii) n が偶数のとき，$d_n=1$，① より，

$$n^2+1=k^2. \quad (k+n)(k-n)=1, \quad k>n. \quad \cdots④$$

よって，$k-n=1$，$k+n=1$ これをみたす 1 以上の偶数 n は存在しない．

したがって，n が偶数のとき，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になることはない．

以上から，n が 1 以上の整数のとき，$(n^2+1)(5n^2+9)$ が整数の 2 乗になることはない．（証明終り）

⑵(i) の証明の【別解 1】

② まで**【解答】**と同じ．n が奇数のとき，$5n^2+9=2l^2$ をみたす整数 n，l が存在しないことを示す．

整数の 2 乗を 8 で割った余りは，0，1，4 のいずれか．

$5n^2+9$ を 8 で割った余りは，

$$5\cdot 0+9\equiv 1, \quad 5\cdot 1+9\equiv 6, \quad 5\cdot 4+9\equiv 5 \pmod{8}$$

から1，5，6のいずれか．

一方，$2l^2$ を8で割った余りは0，2のいずれか．

両辺を8で割った余りが異なるからこれは矛盾である．(以下略)

(2)(i)の証明の【別解2】

【別解1】と同様に，$5n^2+9=2l^2$ をみたす整数 n，l が存在しないことを示す．

$5n^2+9$ を5で割った余りは4．

一方，整数の2乗を5で割った余りは，0，1，4のいずれか．

よって，$2l^2$ を5で割った余りは0，2，3のいずれか．

両辺を5で割った余りが異なるからこれは矛盾である．(以下略)

(注)　$n^2+1=2k^2$ をみたす整数 n，k は無数にある．

m が奇数のとき，

$$(\sqrt{2}+1)^m=a_m\sqrt{2}+b_m \quad (a_m,\ b_m \text{ は正の整数}) \qquad \cdots⑤$$

のような整数 a_m，b_m が存在することが帰納的に示される．

このとき，

$$(\sqrt{2}-1)^m=a_m\sqrt{2}-b_m \qquad \cdots⑤'$$

とおけて，a_m，b_m は⑤と同じ整数であることも帰納的に示される．

⑤，⑤′の両辺をかけると，

$$1=2{a_m}^2-{b_m}^2$$

となる．ここで，$n=b_m$，$k=a_m$ とおくと，$n^2+1=2k^2$ となる．

m は無数にあることから，この式をみたす整数 k，n も無数にある．

(2)(ii)の証明の【別解】

④まで**【解答】**と同じ．n が1以上の整数のとき，

$$n^2<n^2+1<n^2+2n+1=(n+1)^2.$$

n と $n+1$ は隣り合った整数だから，n^2 と $(n+1)^2$ の間の整数，n^2+1 が整数の2乗になることはない．(以下略)

第5問

以下の問いに答えよ。

(1)　n を1以上の整数とする。x についての方程式

$$x^{2n-1}=\cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2)　(1)で定まる a_n に対し，$\cos a_n>\cos 1$ を示せ。

(3)　(1)で定まる数列 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… に対し，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n,\quad b=\lim_{n\to\infty}{a_n}^n,\quad c=\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$$

を求めよ。

分野

数学Ⅲ：数列の極限，微分法

考え方

(1)は $y=x^{2n-1}$ と $y=\cos x$ のグラフの概形を考えれば，おおよその見当はつけられる．それぞれの増減からきちんと証明する．

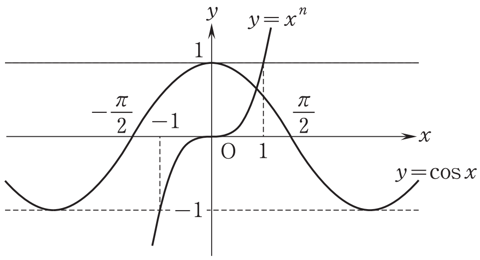
⑵ は ⑴ とほぼ同時に示せるはず．

⑶ の a ははさみうちの原理を用いる．a_n を直接はさんで求めてもよいが，式の形から対数をとった．

b は極限 a の利用で求められる．

c は式変形によって，求めることもできるが，$\dfrac{a_n{}^n-b}{a_n-a}$ の形は平均変化率の形をしているから，これを微分の定義式とみて極限を求める．

【解答】



⑴ (i) $x<-1$ のとき，$2n-1$ は奇数だから，$x^{2n-1}<-1$．一方，$\cos x \geqq -1$ だから解なし．

(ii) $-1 \leqq x<0$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2}<-1$ だから，$\cos x>0$．一方，$x^{2n-1}<0$ だから，解なし．

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，x^{2n-1} は増加関数で，$\cos x$ は減少関数である．

$x=0$ のとき $x^{2n-1}=0<\cos x=1$ で，$x=1$ のとき $x^{2n-1}=1>\cos x=\cos 1$．

よって，与方程式はこの区間にただ1つの実数解をもつ．

(iv) $x>1$ のとき，$x^{2n-1}>1$．一方，$\cos x \leqq 1$ だから解なし．

以上より，与方程式はただ1つの実数解をもつ．（証明終り）

⑵ ⑴ より，その解は $0<x<1$ の区間にある．したがって，$0<a_n<1$．この区間で $\cos x$ は減少する．よって

$$\cos a_n>\cos 1.$$

（証明終り）

⑶ $0<a_n<1$．より，

$$1>\cos a_n=a_n{}^{2n-1}>\cos 1.$$

$a_n>0$ だから対数をとることができる．

$$0>(2n-1)\log a_n>\log(\cos 1).\quad 0>\log a_n>\frac{\log(\cos 1)}{2n-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(\cos 1)}{2n-1}=0.$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=0$．

$\log x$ は連続関数だから，

$$a=\lim_{n\to\infty}a_n=1.$$

…(答)

$\log(\cos a_n)=(2n-1)\log a_n$ から，

$$n\log a_n=\frac{n}{2n-1}\log(\cos a_n).$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}n\log a_n=\frac{1}{2}\log(\cos 1).$$

よって，

$$b=\lim_{n\to\infty}a_n{}^n=\sqrt{\cos 1}.$$

…(答)

与式から，

$$a_n^{2n-1}=\cos a_n.\quad a_n{}^n=\sqrt{a_n\cos a_n}.$$

$$\frac{a_n{}^n-b}{a_n-a}=\frac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}.$$

$f(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{{a_n}^n-b}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-f(1)}{a_n-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1).$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}.$$

$$f'(1)=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}.$$

よって，

$$c=\frac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}. \qquad \cdots(答)$$

第 6 問

複素数 α，β，γ，δ および実数 a，b が，次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1 ：α，β，γ，δ は相異なる。

条件 2 ：α，β，γ，δ は 4 次方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0$ の解である。

条件 3 ：複素数 $\alpha\beta+\gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない。

(1) α，β，γ，δ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) b を a で表せ。

(3) 複素数 $\alpha+\beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

分　野

数学Ⅲ：複素数平面

考え方

$\alpha\beta+\gamma\delta$ が純虚数であることは，虚数解をもち，全部が虚数ではないことを意味している．

4 解のどれとどれが実数で，どれとどれが共役な複素数であるかを決めて，解と係数の関係から条件を絞る．

【解答】

(1) 実数係数の n 次方程式が虚数解 α をもつとき，その方程式は α の共役複素数も解にもつこと…(*) は既知として解答する．

条件 2 で与えられている方程式は，a，b が実数であるから実数係数の 4 次方程式である．したがって，この方程式が虚数解をもつとき，その共役複素数も解である．

また，条件 1 からこのような共役複素数解は 1 つの虚数解に対してただ 1 つである．

(i) α，β，γ，δ がすべて実数だとすると，$\alpha\beta+\gamma\delta$ は実数となり，条件 3 に反する．

(ii) α，β，γ，δ がすべて虚数だとすると，β，γ，δ の中に，$\overline{\alpha}$ があるはずである．

(ii-a) $\overline{\alpha}=\beta$ のとき，$\overline{\gamma}=\delta$.

このとき，

$$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\overline{\alpha}+\gamma\overline{\gamma}=|\alpha|^2+|\gamma|^2$$

は実数となり，条件 3 に反する．

(ii-b) $\overline{\alpha}\neq\beta$ のとき，一般性を失うことなく，$\overline{\alpha}=\gamma$ としてよい．

このとき，$\overline{\beta}=\delta$ で，

$$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}=\alpha\beta+\overline{\alpha\beta}=2\times(\alpha\beta\text{ の実部})$$

は実数となり，条件 3 に反する．

以上より，α，β，γ，δ がすべて実数であることも，すべて虚数であることもない．

また，虚数解をもつとき，その共役複素数解をただ 1 つもつから，虚数解の個数が奇数であることもない．

よって，α，β，γ，δ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数（虚数）である．（証明終り）

(2) 2 つの虚数解が α と β の場合，および，γ と δ の場合は，$\alpha\beta$，$\gamma\delta$ がともに実数となり，条件 3 に反する．

したがって，一般性を失うことなく，α，γ が実数で，β，δ が虚数で互いに共役であるとしてよい．

$$\beta=p+qi,\quad \delta=p-qi\quad (p,\ q \text{ は実数},\ q\neq 0)$$

とする．

$$\alpha\beta+\gamma\delta=\alpha(p+qi)+\gamma(p-qi)=(\alpha+\gamma)p+(\alpha-\gamma)qi. \qquad \cdots①$$

条件 2 の方程式について，

$$(z-\alpha)(z-p-qi)(z-\gamma)(z-p+qi)=\{z^2-(\alpha+\gamma)z+\alpha\gamma\}(z^2-2pz+p^2+q^2)$$
$$=z^4-2z^3-2az+b$$

が成り立つ．係数を比較すると，

$$\begin{cases}\alpha+\gamma+2p=2, & \cdots②\\ \alpha\gamma+2p(\alpha+\gamma)+p^2+q^2=0, & \cdots③\\ 2p\alpha\gamma+(p^2+q^2)(\alpha+\gamma)=2a, & \cdots④\\ \alpha\gamma(p^2+q^2)=b. & \cdots⑤\end{cases}$$

条件 3 と ① より，

$$(\alpha+\gamma)p=0,\quad (\alpha-\gamma)q\neq 0.$$

第 2 式は条件 1 より成り立つ．

(ア) $\alpha+\gamma=0$ のとき，② より，$p=1$.

③ より，

$$-\alpha^2+1+q^2=0. \qquad \cdots⑥$$

このとき，④，⑤ から，

$$a=-\alpha^2,\quad b=-\alpha^2(1+q^2)=-\alpha^4.$$

よって，$b=-a^2$.

(イ) $p=0$ のとき，② より，$\alpha+\gamma=2$.

③ より，

$$\alpha(2-\alpha)+q^2=0.\quad (\alpha-1)^2-q^2=1. \qquad \cdots⑦$$

このとき，④，⑤ から，

$$a=q^2,\quad b=\alpha(2-\alpha)q^2=-q^4.$$

よって，$b=-a^2$.

いずれの場合も

$$b=-a^2. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3) (2) の (ア) の場合

$\alpha+\beta=\alpha+1+qi$ これを，$x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$$x=\alpha+1,\quad y=q\quad (q\neq 0).$$

⑥ に代入すると

$$(x-1)^2-y^2=1\quad (y\neq 0) \qquad \cdots⑧$$

(2) の (イ) の場合

$\alpha+\beta=\alpha+qi$ これを，$x+yi$（x，y は実数）とおくと，

$$x=\alpha,\quad y=q\quad (q\neq 0).$$

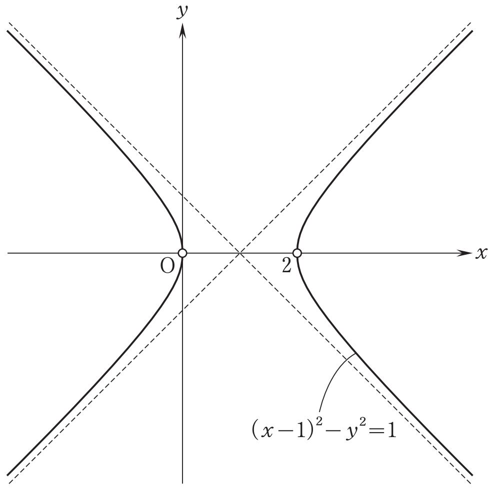
⑦ に代入すると

$$(x-1)^2-y^2=1\quad (y\neq 0). \qquad \cdots⑨$$

いずれも同じ曲線になり，

$$(x-1)^2-y^2=1\quad (y\neq 0).$$

図示すると下図．



(注)　**【解答】** 冒頭の(*)の証明は以下のよう．

実数係数の n 次式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \cdots,\ a_0 \text{ は実数})$$

について，複素数 c の共役複素数を $\overline{c}$ で表すと，

$$\begin{aligned}\overline{f(x)}&=\overline{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0}\\&=\overline{a_nx^n}+\overline{a_{n-1}x^{n-1}}+\overline{a_{n-2}x^{n-2}}+\cdots+\overline{a_1x}+\overline{a_0}\\&=a_n\overline{x^n}+a_{n-1}\overline{x^{n-1}}+a_{n-2}\overline{x^{n-2}}+\cdots+a_1\overline{x}+a_0\\&=a_n\overline{x}^n+a_{n-1}\overline{x}^{n-1}+a_{n-2}\overline{x}^{n-2}+\cdots+a_1\overline{x}+a_0\\&=f(\overline{x})\end{aligned}$$

だから，実数係数の n 次方程式 $f(x)=0$ が虚数解 α をもつとき，

$$f(\overline{\alpha})=\overline{f(\alpha)}=0.$$

したがって，$\overline{\alpha}$ も解である．　((*)の証明終り)

(*)に関連して，実数係数の n 次方程式が虚数解 α をもつときそれが重解なら共役複素数 $\overline{\alpha}$ も重解であり，それが m 重解ならその共役複素数解も m 重解であることがいえる．

そのことは次のように考えればよい．

$f(x)=0$ が虚数解 $x=\alpha$ をもつとき，$x=\overline{\alpha}$ も解だから，$f(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割り切れる．

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$$

は実数係数の 2 次式だから，$f(x)$ を $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割った商を $g(x)$ とすると，$g(x)$ も実数係数の式である．$f(x)=0$ の α，$\overline{\alpha}$ 以外の解は $g(x)=0$ の解である．このようなことを繰り返すと，もし，$f(x)=0$ が複数の虚数解をもつとき，それらに対して，1 個ずつの対応する共役複素数解をもつことになる．したがって，α が $f(x)=0$ の重解だとしても，$f(x)$ を一旦 $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で割って，$g(x)=0$ の解を求めることになるから，α の重複度の個数だけ，対応する共役複素数解 $\overline{\alpha}$ も存在する．

つまり，

実数係数の n 次方程式が虚数解 α を k 重にもつとき，その共役複素数解 $\overline{\alpha}$ も同じ k 重度である．

…(**)

この【解答】では，4 つの虚数解をもつことがないことを示すために(*)を使った．

「条件 1 」がなくても，(**)を前提とすれば，(1)を示すことができる．しかし，それは難しいであろうという配慮から「条件 1 」を付けたのではないかと思われる．

【研究】

(2)でも，(3)でも場合分けしながら，結果は一致した．その理由を考えてみよう．

実は，条件 3 の式は

$$2(\alpha\beta+\gamma\delta)=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)+(\alpha-\gamma)(\beta-\delta) \qquad \cdots(★)$$

のように変形できる．

$(\alpha,\ \gamma)$，$(\beta,\ \delta)$ のどちらの組が実数の組であっても，(★)の第 1 項は実数であり，第 2 項は純虚数である．

したがって，条件 3 は

$$(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)=0 \qquad \cdots(☆)$$

という式で表される．

(★)，(☆)が，2 つの解の組のどちらが実数の組で，どちらが虚数の組であるかということと関係しない対称性をもっていることが(2)，(3)の場合分けに対して結果が一致した理由である．

もう少し議論を進めよう．

α，γ を解とする 2 次方程式も，β，δ を解とする 2 次方程式も実数係数になる．

(☆)から，これらのうち一方は x の係数が 0 の 2 次方程式である．これらを

$$z^2+P=0,\quad z^2-2Qz+R=0 \qquad \cdots⑩$$

とすると，

$$z^4-2z^3-2az+b=(z^2+P)(z^2-2Qz+R)$$

とおける．係数を比較すると，

$$Q=1,\quad P=a,\quad R=-P,\quad b=-a^2$$

となる．

2 つの方程式は

$$z^2+a=0,\quad z^2-2z-a=0$$

となる．一方が実数解をもち他方が虚数解をもつ条件は，判別式を考えると，

$$a(1+a)>0$$

となる．

$(a,\ b)$ の軌跡を考えると，

$$b=-a^2,\quad (a<-1,\ a>0).$$

$a>0$ のとき，$z^2+a=0$ が虚数解をもち，$z^2-2z-a=0$ が実数解をもつ．

また，$a<-1$ のとき，$z^2+a=0$ が実数解をもち，$z^2-2z-a=0$ が虚数解をもつ．

$\alpha=\pm\sqrt{-a}$，$\beta=1\pm\sqrt{1+a}$ とおくと，複号任意で

$$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{1+a}=x+yi\ (x,\ y \text{は実数}).$$

$$\begin{cases} x=1\pm\sqrt{1+a},\ y=\pm\sqrt{a} & (a>0), \\ x=1\pm\sqrt{-a},\ y=\pm\sqrt{-1-a} & (a<-1) \end{cases}$$

より，いずれの場合も

$$(x-1)^2-y^2=1$$

となる．いずれの場合も同じ双曲線になる．

$a>0$ の範囲全体を動くときも，$a<-1$ の範囲全体を動くときも，x，y のとりうる値の範囲は同じだから，軌跡としても同じ曲線になる．勿論，虚数解をもつ条件から $y\neq0$ である．

2020 年　文科

第 1 問

$a>0$，$b>0$ とする。座標平面上の曲線

$$C：y=x^3-3ax^2+b$$

が，以下の 2 条件を満たすとする。

条件 1：C は x 軸に接する。

条件 2：x 軸と C で囲まれた領域（境界を含まない）に，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個ある。

b を a で表し，a のとりうる値の範囲を求めよ。

分　野

数学Ⅱ：整式の微分，平面座標

考え方

$f(x)=x^3-3ax^2+b=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ とおけることに注意.

ちょうど 1 個の点は $y=f(x)$ の極大点の近くにあるはず.

【解答】

$f(x)=x^3-3ax^2+b$ とおく.

条件 1 から，$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ とおける．よって，

$$(x-\alpha)^2(x-\beta)=x^3-3ax^2+b.$$

係数を比較すると，

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=3a, & \cdots ① \\ \alpha^2+2\alpha\beta=\alpha(\alpha+2\beta)=0, & \cdots ② \\ \alpha^2\beta=-b & \cdots ③ \end{cases}$$

② から，$\alpha=0$，または $\alpha=-2\beta$.

$\alpha=0$ とすると，③ より，$b>0$ に反する．したがって，$\alpha=-2\beta$.

①，③ から，$3a=-3\beta>0$，$b=-4\beta^3>0$.

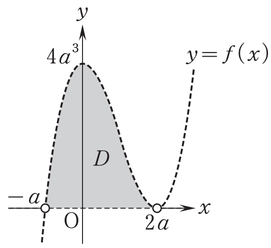
よって，

$$\beta=-a,\quad \alpha=2a,\quad b=4a^3. \qquad \cdots(答)$$

よって，

$$f(x)=(x-2a)^2(x+a)=x^3-3ax^2+4a^3,$$
$$f'(x)=3x^2-6ax=2x(x-2a).$$

x 軸と C で囲まれた領域を D とすると，D は右図網掛け部，境界を含まない.



D に含まれ，x 座標と y 座標がともに整数である点がちょうど 1 個あるならば，その点は y 軸上にある．その点は $(0, 1)$ であり，$(0, 2)$，$(1, 1)$，$(-1, 1)$ は D に含まれない.

よって，

$$\begin{cases} 1<f(0)=4a^3\leqq 2, & \cdots ④ \\ f(1)=4a^3-3a+1\leqq 1, & \cdots ⑤ \\ f(-1)=4a^3-3a-1\leqq 1. & \cdots ⑥ \end{cases}$$

$f(-1)<f(1)$ だから，⑤ が成り立てば，⑥ は成り立つ.

よって，④，⑤ および $a>0$ より，

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\quad a\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^6=\frac{1}{4}<\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=\frac{27}{64}$$

から，求める a の範囲は

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<a\leqq\frac{1}{\sqrt[3]{2}}. \qquad \cdots(答)$$

第2問

座標平面上に8本の直線

$$x=a\ (a=1,\ 2,\ 3,\ 4),\quad y=b\ (b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

がある。以下，16個の点

$$(a,\ b)\ (a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ b=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

から異なる5個の点を選ぶことを考える。

(1) 次の条件を満たす5個の点の選び方は何通りあるか。
　上の8本の直線のうち，選んだ点を1個も含まないものがちょうど2本ある。

(2) 次の条件を満たす5個の点の選び方は何通りあるか。
　上の8本の直線は，いずれも選んだ点を少なくとも1個含む。

分　野

数学A：場合の数

考え方

(1)はちょうど2本の直線が平行なときと垂直なときとに分け，それぞれについて，1個も含まないものが3本になる場合を除く．

(2)は $x=a$ のうち，1本は2個の点があり，他は1個の点がある．残り3本の上にある選ばれた点の y 座標の取り方を考える．

【解答】

(1) ちょうど2本の直線の選び方は，その2本が平行な場合と，その2本が垂直な場合で分けて考える．

(i) ちょうど2本の直線が平行な場合．

その2本の選び方は $2\times{}_4C_2=12$ 通り．

その2本に含まれない点は8個．それらから，5個の点を選ぶ方法は ${}_8C_5=56$ 通り．

3本の直線が平行で，選んだ点を1個も含まないと，残りの点が4個になるから，そのようなことはない．

2本の直線に垂直で，選んだ点を1個も含まないものがあるとすると，そのような直線は4通り考えられる．残りの点は6個あるから，どれか1個が選ばれない．したがって，2本の直線に垂直で，選んだ点を1個も含まないものがあるのは $4\times6=24$ 通り．

よって，求める場合の数は

$$12(56-24)=12\times32=384\ 通り$$

(注) 2本の直線を選んだ後，5個の点は，選ばれた直線に垂直な1本の直線上に2個と他の3本の直線上に1個ずつあるから，その選び方は $4\times2^3=32$ となる．このように数えてもよい．

(ii) ちょうど2本の直線が垂直な場合．

その2本の選び方は $4^2=16$ 通り．

その2本に含まれない点は9個．それらから，5個の点を選ぶ方法は ${}_9C_5=126$ 通り．

選んだ点を1個も含まないものが，もう1本あるとすると，そのような直線は6通り考えられる．残りの点は6個あるから，どれか1個が選ばれない．したがって，もう1本の直線上に選んだ点を1個も含まないものがあるのは $6\times6=36$ 通り．

よって，求める場合の数は

$$16(126-36)=1440 \text{ 通り．}$$

(i)，(ii)より求める選び方は

$$384+1440=1824 \text{ 通り．}$$ …(答)

(2) 条件をみたす選び方では，y 軸に平行な4直線上のうち，1直線上に2個，他の3直線上にそれぞれ1個ずつ選ばれた点がある．

2個の点がある直線 $x=a_1$ の選び方は4通り，その $x=a_1$ 上にある2点の選び方は ${}_4C_2=6$ 通り．

残りの3直線上に各1点ある．その3点の選び方は $x=a_1$ 上の2点と y 座標が等しいものがある場合とない場合がある．

(i) $x=a_1$ 上の点と y 座標が等しい点を含む直線がある場合，その直線 $x=a_2$ の選び方は3通り，その y 座標の選び方は2通り．残り2直線上にある2点の y 座標の選び方は2通り．

(ii) $x=a_1$ 上の点と y 座標が等しい点を含む直線が存在しない場合，他の3直線上の3点の内2個は同じ y 座標である．その2直線の選び方は3通り，その y 座標の選び方は2通り．

(i)，(ii)より，求める場合の数は

$$4\times6\times(3\times2\times2+3\times2)=432 \text{ 通り．}$$ …(答)

(2)の【別解】

x 軸に平行な直線にも，y 軸に平行な直線にも2個の点が選ばれたものがそれぞれ1本ある．それらの選び方はそれぞれ4通り．したがって，$4^2=16$ 通りある．それらを $x=a_1$，$y=b_1$ とする．他の直線上には1個ずつ選ばれた点がある．

(i) 点 $(a_1,\ b_1)$ が選ばれた点である場合，$x=a_1$，$y=b_1$ 上にそれぞれもう1点選ばれた点がある．その選び方はそれぞれ3通り．よって，$3^2=9$ 通り．

このとき，まだ選ばれた点が存在しない x 軸，y 軸に平行な直線がそれぞれ2本ずつ存在する．これらの交点は4点あり，それらのうちそれぞれの直線上の1点だけが選ばれる方法は2通りである．

(ii) 点 $(a_1,\ b_1)$ が選ばれない点である場合，$x=a_1$，$y=b_1$ 上にそれぞれもう2点選ばれた点がある．その選び方はそれぞれ3通り．よって，$3^2=9$ 通り．

このとき，まだ選ばれた点が存在しない x 軸，y 軸に平行な直線がそれぞれ1本ずつ存在する．その交点は選ばれなければならない．

(i)，(ii)より，求める場合の数は

$$16\times(9\times2+9)=432 \text{ 通り．}$$

第3問

Oを原点とする座標平面において，放物線

$$y=x^2-2x+4$$

のうち $x \geqq 0$ を満たす部分を C とする。

(1) 点Pが C 上を動くとき，Oを端点とする半直線OPが通過する領域を図示せよ。

(2) 実数 a に対して，直線

$$l: y=ax$$

を考える。次の条件を満たす a の範囲を求めよ。

C 上の点Aと l 上の点Bで，3点O，A，Bが正三角形の3頂点となるものがある。

分　野

数学Ⅰ：図形と方程式，**数学Ⅱ**：三角関数，整式の微分

考え方

(1) 原点Oから C に接線を引く．接線と y 軸で挟まれた部分が求めるもの．

(2) Aに対してBは2通りにとれ，$\angle AOB=60^\circ$ である．Aが y 軸上にあるときと，Aが接点にあるときのOBの傾きの範囲が求められればよい．

【解答】

(1) $f(x)=x^2-2x+4$ とおく．原点Oから C に接線を引く．接点の x 座標を $t\,(>0)$ とおくと，$f'(t)=2x-2$ から，接線の方程式は

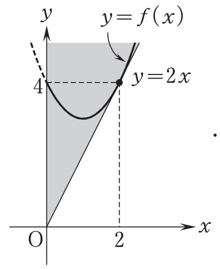
$$y=(2t-2)(x-t)+t^2-2t+4=2(t-1)x-t^2+4.$$

これが原点を通るから，$-t^2+4=0$．$t>0$ より，$t=2$．接線の方程式は

$$y=2x.$$

$x=0$ のときPは y 軸上にある．半直線OPは y 軸正方向から，x が増加するとともに，y 軸から離れ，傾きは減少する．接点 $(2, 4)$ で傾きが2になったところで半直線OPの傾きは最小になり，以後増加する．

したがって，半直線OPが通過する範囲は，$x=0\,(y\geqq 0)$ と $y=2x$，$(x\geqq 0)$ で囲まれた領域，図示すると，右図網掛け部，境界を含む．



…(答)

（注1） 接線を求めるとき，$y=mx$ と C が接する条件を判別式を使って求めてもよい．

（注2） 点Pの座標を $(t,\ t^2-2t+4)$ とおくと，半直線OPの傾きは，$t-2+\dfrac{4}{t}$ となる．これが $\infty \to 2$ ($t=2$ のとき) $\to \infty$ と変化することを計算で示そうとすると，$\dfrac{1}{t}$ の微分が必要になるので文系向きの解答にはならない．

(2) 三角形OABが正三角形のとき，$\angle AOB=60^\circ$．Aは(1)のPと同様に動く．

$\tan\alpha=2$，$(0<\alpha<90^\circ)$ となるように，α をとると，x 軸の正方向とOAのなす角 θ は $\alpha \leqq \theta \leqq 90^\circ$ をみたす．

$\angle AOB=60^\circ$ だから，x 軸の正方向とOBのなす角 $\beta=\theta\pm 60^\circ$ で $a=\tan\beta$.

$\theta=90^\circ$ のとき，$\beta=30^\circ$ または $\beta=150^\circ$.

よって，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ または $a=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

一方，$\theta=\alpha$ のとき，$\beta=\alpha\pm 60^\circ$.

よって，

$$a=\tan(\alpha\pm 60^\circ)=\frac{\tan\alpha\pm\tan 60^\circ}{1\mp\tan\alpha\tan 60^\circ}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{1\mp 2\sqrt{3}}=\frac{-8\mp 5\sqrt{3}}{11}.$$

以上から，a の取り得る値の範囲は $\tan(\alpha+60°) \leqq a \leqq \tan 150°$，$\tan(\alpha-60°) \leqq a \leqq \tan 30°$ つまり，

$$-\frac{8+5\sqrt{3}}{11} \leqq a \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{5\sqrt{3}-8}{11} \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad \cdots(\text{答})$$

第 4 問

n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする。n 個の整数

$$2^m \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる。k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく。例えば，

$$a_{4,3}=2^0\cdot2^1\cdot2^2+2^0\cdot2^1\cdot2^3+2^0\cdot2^2\cdot2^3+2^1\cdot2^2\cdot2^3=120$$

である。

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ。

(2) 1 以上の整数 n に対し，x の整式

$$f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$$

を考える。$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ。

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ。

分　野

数学Ⅰ：整式，**数学B**：数列

考え方

(1) は順次加えてゆけばよい．

(2) は n 次の整式 $(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\cdots(x+\alpha_n)$ の x の $n-k$ 次の係数は $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_n\}$ の要素の中から異なる k 個を取り出して作る積の和であることを参考にする．

(3) は (2) の結果を使う．$a_{n,k}$ は $f_n(x)$ の x^k の係数である．

【解答】

(1) 順次加え合わせて，

$$\begin{aligned}a_{n,\,2}&=1\cdot(2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})+2\cdot(2^2+2^3+2^4\cdots+2^{n-1})+\cdots+2^{n-2}\cdot2^{n-1}\\&=\sum_{k=0}^{n-2}2^k\sum_{l=k+1}^{n-1}2^l=\sum_{k=0}^{n-2}2^{2k+1}\sum_{l=0}^{n-k-2}2^l=\sum_{k=0}^{n-2}2^{2k+1}(2^{n-k-1}-1)=\sum_{k=0}^{n-2}(2^{n+k}-2^{2k+1})\\&=2^n(2^{n-1}-1)-2\frac{2^{2(n-1)}-1}{3}=\frac{2^{2n}-3\cdot2^n+2}{3}=\frac{2}{3}(2^n-1)(2^{n-1}-1).\end{aligned} \quad \cdots(\text{答})$$

（注） 求めるものは

$$a_{n,\,2}=\frac{1}{2}\{(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})^2-(1^2+2^2+(2^2)^2+\cdots+(2^{n-1})^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{2^{2n}-1}{2^2-1}\right\}$$

でもある．これを整理すれば答の式になる．

(2) n 次の整式 $f_n(x)=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)$ である．　$\cdots(*)$

このことを数学的帰納法で証明する．

$f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k$ とかける．ただし，$a_{n,0}=1$ とする．

また，$D_n=\{1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{n-1}\}$ とする．$a_{n,k}$ は D_n の要素から k 個の異なる要素を取り出した積の和である．

(I)　$n=1$ のとき，$a_{1,0}=1$，$a_{1,1}=1$，

$$f_1(x)=a_{1,0}+a_{1,1}x=(1+x)$$

(II)　$n=m$ のとき，(*)が成り立つとする．

$$f_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}x^k=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{m-1}x)$$

$$(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{m-1}x)(1+2^mx)=f_m(x)(1+2^mx)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}x^k(1+2^mx)=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}x^k+\sum_{k=0}^{m}2^ma_{m,k}x^{k+1}=\sum_{k=0}^{m}a_{m,k}x^k+\sum_{k=1}^{m+1}2^ma_{m,k-1}x^k$$
$$=a_{m,0}+\sum_{k=1}^{m}(a_{m,k}+2^ma_{m,k-1})x^k+2^ma_{m,m}x^{m+1}$$

$a_{m,0}=a_{m+1,0}=1$，$2^ma_{m,m}=1\cdot2\cdot\cdots\cdot2^{m-1}\cdot2^m=a_{m+1,m+1}$

また，$a_{m,k}+2^ma_{m,k-1}$ のうち，$a_{m,k}$ は $D_m=\{1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{m-1}\}$ から異なる k 個の要素を取り出してかけた和であり，$2^ma_{m,k-1}$ は D_m から $k-1$ 個を取り出し，2^m とをかけた和であるから，この和は $D_{m+1}=\{1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^m\}$ から k 個の要素を取り出してかけた和 $a_{m+1,k}$ に他ならない．

したがって，

$$(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^mx)=a_{m+1,0}+\sum_{k=1}^{m}a_{m+1,k}x^k+a_{m+1,m+1}x^{m+1}$$
$$=\sum_{k=0}^{m+1}a_{m+1,k}x^k=f_{m+1}(x)$$

よって，$n=m+1$ のときも(*)は成り立つ．

以上から

$$f_n(x)=(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x).$$

よって，

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\frac{(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)}=1+2^nx. \qquad \cdots(\text{答})$$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=\frac{(1+x)(1+2x)(1+2^2x)\cdots(1+2^{n-1}x)(1+2^nx)}{(1+2x)(1+2^2x)(1+2^3x)\cdots(1+2^nx)}=1+x. \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)　(2)より，$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)=(1+x)f_n(2x)$

ここで，$f_{n+1}(x)$ の x^{k+1} の係数は $a_{n+1,k+1}$ である．

$f_n(x)$ の x^k，x^{k+1} の係数はそれぞれ $a_{n,k}$，$a_{n,k+1}$ である．

$(1+2^nx)f_n(x)$ の x^{k+1} の係数は $2^na_{n,k}+a_{n,k+1}$ であり，これが $a_{n+1,k+1}$ に等しい．

また，$f_n(2x)$ の x^k，x^{k+1} の係数はそれぞれ $2^ka_{n,k}$，$2^{k+1}a_{n,k+1}$ である．

$(1+x)f_n(2x)$ の x^{k+1} の係数は $2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1}$ であり，これも $a_{n+1,k+1}$ に等しい．

つまり，

$$a_{n+1,k+1}=2^na_{n,k}+a_{n,k+1}=2^ka_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1} \qquad \cdots(☆)$$

よって，

$$a_{n,k+1}=\frac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1}a_{n,k}$$

だから，

$$a_{n+1,k+1}=2^na_{n,k}+\frac{2^n-2^k}{2^{k+1}-1}a_{n,k}=(2^{n+1}-1)\frac{2^k}{2^{k+1}-1}a_{n,k}$$

よって，

$$\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^{n+1}-1}{2^{k+1}-1}2^k. \qquad \cdots(\text{答})$$

（注１） ⑷について，これは思いつきにくいかもしれない．

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$,

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$ については知っていると思う．$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ は $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ から異なる2個を取り出し，そのすべての組み合わせについての積の和である．

$x-\alpha$ などの $-$ を $+$ で置き換え，さらに，x を $\dfrac{1}{x}$ でおきかえ，分母をはらうと

$$(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

は

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)=1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2,$$

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma$$

は

$$(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)=1+(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x^2+\alpha\beta\gamma x^3$$

となる．

ここで，$\alpha=1$，$\beta=2$，$\gamma=2^2$ などとおけば⑷の $n=2$，3 の場合になる．

（注２） ☆について，この式は $f_n(x)$ の係数を利用して導いたが，$a_{n,k}$ の定義に従っても導くことができる．

$a_{n,k}$ は $D_n=\{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ の異なる k 個の要素の積の和である．

ここで，$D_n'=\{2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n\}$ とすると，D_n' の各要素は D_n の各要素を2倍したものだから，D_n' の異なる k 個の要素の積の和は $2^k a_{n,k}$ である．

$a_{n+1,k+1}$ は $D_{n+1}=\{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n\}$ の異なる $k+1$ 個の要素の積の和である．

和 $a_{n+1,k+1}$ を，2^n を含む積の和と，2^n を含まない積の和に分けると，

$$a_{n+1,k+1}=2^n a_{n,k}+a_{n,k+1} \quad \cdots①$$

となる．

また，和 $a_{n+1,k+1}$ を，1を含む積の和と，1を含まない積の和に分けて考える．

1を含む積の和は D_n' の異なる k 個の要素の積の和に1をかけたものだから，$2^k a_{n,k}$ である．

一方，1を含まない積の和は D_n' の異なる $k+1$ 個の積の和 $2^{k+1}a_{n,k+1}$ である．

したがって，

$$a_{n+1,k+1}=2^k a_{n,k}+2^{k+1}a_{n,k+1} \quad \cdots②$$

となる．

①，②は☆に他ならない．

したがって，☆は $f_n(x)$ を用いなくても導くことができる．

2020 年　理科

第 1 問

a，b，c，p を実数とする。不等式

$$ax^2+bx+c>0$$
$$bx^2+cx+a>0$$
$$cx^2+ax+b>0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x>p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする。

(1)　a，b，c はすべて 0 以上であることを示せ。

(2)　a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ。

(3)　$p=0$ であることを示せ。

分　野

数学Ⅰ：2 次不等式

考え方

(1)，(2) は背理法を考える．

【解答】

$$ax^2+bx+c>0 \quad \cdots①$$
$$bx^2+cx+a>0 \quad \cdots②$$
$$cx^2+ax+b>0 \quad \cdots③$$

とおく．

①，②，③ のすべてをみたす実数 x の集合が $x>p$ であることを (*) とおく．

(1)　a，b，c のいずれかが負であることを考える．

例えば，$a<0$ とすると，① をみたす，x の集合は，十分大きな x に対して成り立たない．したがって，(*) に反する．

よって，a，b，c のいずれかが負であることはない．

つまり，a，b，c はすべて 0 以上である．　（証明終り）

(2)　a，b，c のすべてが正であることを考える．

そのとき，①，②，③ のいずれも $|x|$ が十分大きく負である x に対して成り立つ．したがって，(*) に反する．

よって，a，b，c のすべてが正であることはない．

a，b，c はすべて 0 以上で，すべてが正ではないから，a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 である．

（証明終り）

(3)　(i)　$a=b=c=0$ とすると，①（②，③ と同値）は解をもたない．したがって，(*) に反する．

(ii)　a，b，c のうち 2 個が 0 だとする．

例えば $b=c=0$ とすると，$a>0$．

① をみたす実数 x の範囲は $x\neq 0$，② をみたす実数 x の範囲はすべての実数，③ をみたす実数 x の範囲は $x>0$．

よって，(*) は成り立ち，$p=0$．

(ii)　a，b，c のうち 1 個が 0 だとする．

例えば $c=0$ とすると，$a>0$，$b>0$．

① は $ax^2+bx>0$ となり，これをみたす x の範囲は，

$$x<-\frac{b}{a},\quad x>0 \quad \cdots④$$

② は $bx^2+a>0$ となり，これをみたす実数 x の範囲はすべての実数. …⑤

③ は $ax+b>0$ となり，これをみたす実数 x の範囲は

$$x>-\frac{b}{a}. \quad \cdots ⑥$$

④，⑤，⑥ から，(*) は成り立ち，$p=0$.

以上から (*) が成り立つとき，$p=0$ である. （証明終り）

第2問

平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を △PQR で表す。また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，△PQR=0 とする。

A，B，C を平面上の 3 点とし，△ABC=1 とする。この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ。

分　野

数学A：初等幾何

考え方

三角形 ABC の 3 辺とその延長によって，平面全体は 7 個の領域に分けられる．それらの部分に X があるとき，$S(\mathrm{X})=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX$ がどのように表されるかを考える．

【解答】

三角形 ABC の 3 辺とその延長によって，平面全体を図 1 のように，7 個の領域に分ける．境界はその両側に含まれるとする．

また，$S(\mathrm{X})=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX$ とする．

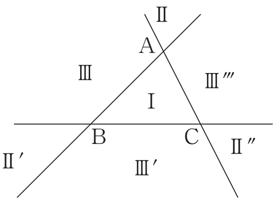


図 1

X が図 1 の領域Ⅰ，領域Ⅱ，領域Ⅲにあるときの図を，それぞれ，図 2 a，図 2 b，図 2 c で表す．

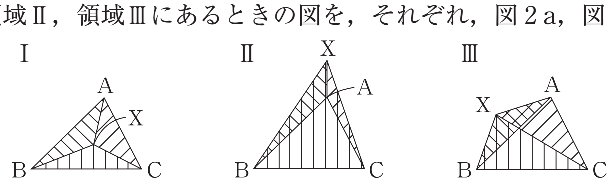


図 2 a　　図 2 b　　図 2 c

(i) X が領域Ⅰにあるとき，図 2 a から，

$$S(\mathrm{X})=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=\triangle ABC=1.$$

したがって，$2 \leqq S(\mathrm{X}) \leqq 3$ となることはない．

(ii) X が領域Ⅱにあるとき，図 2 b から，

$$S(\mathrm{X})=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX=2\triangle XBC-\triangle ABC=2\triangle XBC-1.$$

$2 \leqq S(\mathrm{X})=2\triangle XBC-1 \leqq 3$ とすると，

$$\frac{3}{2} \leqq \triangle XBC \leqq 2.$$

三角形XBCのBCを底辺とする高さは三角形ABCのBCを底辺とする高さの $\dfrac{3}{2}$ 倍と2倍の間.

Xが領域Ⅱ′, Ⅱ″にあるときも底辺を変えて同様に考えればよい.

(iii) Xが領域Ⅲにあるとき，図2cから，

$$S(X) = \triangle ABX + \triangle BCX + \triangle CAX = 2\triangle XAB + \triangle ABC = 2\triangle XAB + 1.$$

$2 \leqq S(X) = 2\triangle XAB + 1 \leqq 3$ とすると，

$$\frac{1}{2} \leqq \triangle XAB \leqq 1.$$

三角形XABのABを底辺とする高さは三角形ABCのABを底辺とする高さの $\dfrac{1}{2}$ 倍と1倍の間.

Xが領域Ⅲ′, Ⅲ″にあるときも底辺を変えて同様に考えればよい.

(i), (ii), (iii)から，条件をみたすXの存在範囲は図3の網掛け部.

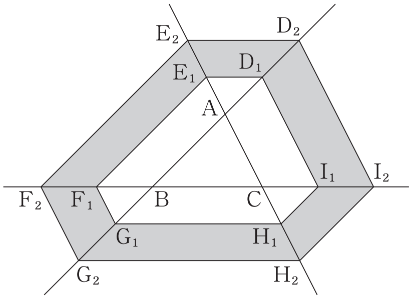


図3

ただし，線分BAを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ D_1，D_2，線分CAを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ E_1，E_2，線分CBを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ F_1，F_2，線分ABを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ G_1，G_2，線分ACを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ H_1，H_2，線分BCを3：1，2：1に外分する点をそれぞれ I_1，I_2 とする.

三角形ABCとの相似および，相似比を考慮すると，

$$\triangle AD_1E_1 = \triangle BF_1G_1 = \triangle CH_1I_1 = \frac{1}{4},\quad \triangle AD_2E_2 = \triangle BF_2G_2 = \triangle CH_2I_2 = 1,$$

$$\triangle AG_1H_1 = \triangle BI_1D_1 = \triangle CE_1F_1 = \frac{9}{4},\quad \triangle AG_2H_2 = \triangle BI_2D_2 = \triangle CE_2F_2 = 4.$$

よって，求める面積は

$$3\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(4-\frac{9}{4}\right)\right\} = \frac{15}{2}. \qquad \cdots(答)$$

第 3 問

$-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して,

$$x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$$
$$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える。

(1) $-1<t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ。

(2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする。$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ, 最大値を求めよ。

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし, C と x 軸で囲まれた領域を D とする。原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき, D が通過する領域の面積を求めよ。

分　野

数学Ⅲ：微分法, 積分法

考え方

(1) は必ずしも微分法は必要ない.

(2) は 2 乗して計算すればよい.

(3) は D の通過領域が, D と合同な部分と, 扇形の部分に分かれることが分かればよい.

【解答】

(1) $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{3(1+t)\sqrt{1-t}}{(1+t)\sqrt{1+t}}=3\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}=3\sqrt{\dfrac{2}{1+t}-1}.$

$-1<t \leqq 1$ において $\dfrac{1}{1+t}$ は t について単調に減少するから, $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は t について単調に減少する.

（証明終り）

(2) 原点を O とする, $f(t)=\mathrm{OP}$ の増減と, $\{f(t)\}^2=\mathrm{OP}^2=F(t)$ の増減は一致する.

$$\mathrm{OP}^2=F(t)=\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2=(1+t)^3+9(1+t)^2(1-t)=2(1+t)^2(5-4t)$$
$$F'(t)=4(1+t)(5-4t)-8(1+t)^2=12(1+t)(1-2t)$$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$F'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$F(t)$	0	↗		↘	

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき $F(t)$ は最大値, $\dfrac{27}{2}$ をとる. よって, そのとき, $f(t)$ は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ をとる. …(答)

(3) $-1 \leqq t \leqq 1$ のとき, $x(t) \geqq 0$ で $x(t)$ は t について単調増加して $2\sqrt{2}$ に至る. $y(t)$ 常に正または 0 で, $t=\pm 1$ で 0 である.

また, OP は $t=\dfrac{1}{2}$ まで単調に増加し, 以後単調に減少する. $t=\dfrac{1}{2}$ のとき, の P を P_0 とおく.

P の軌跡 C と x 軸で囲まれた領域 D を OP_0 で 2 つの部分に分け, OP_0 より上の部分を D_1 下の部分を D_2 とする.

D を時計回りに 90° 回転させると, D の通過領域は, D_1 と OP_0 を半径とする四分円と, D_2 を時計回りに 90° 回転した図形になる.

したがって, 求める領域の面積は D の面積と OP_0 を半径とする四分円の面積の和である.

D の面積は,

$$\int_0^{2\sqrt{2}} y(t)\,dx(t)=\int_{-1}^{1}3(1+t)\sqrt{1-t}\,\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$=9\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{9}{4}\pi.$$

ただし，$\dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{3}{2}\sqrt{1+t}$ を使い，奇関数，偶関数の積分公式を用い，また，$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ が半径1の四分円の面積であることを使った．

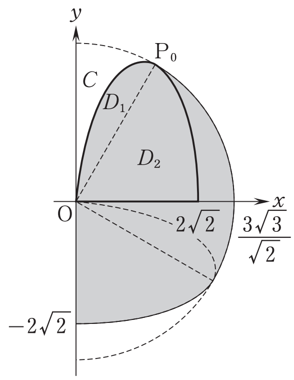
OP_0 を半径とする四分円の面積は

$$\frac{\pi}{4}{OP_0}^2=\frac{\pi}{4}\,\frac{27}{2}=\frac{27}{8}\pi$$

よって，求める面積は

$$\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{8}\pi=\frac{45}{8}\pi. \qquad \cdots(答)$$

（参考） 曲線 C と x 軸で囲まれた領域（太線で囲まれた領域）を 90° 回転したときに通過する領域は下図の網掛け部．



第4問

（文科　第4問と同じ）

第5問

座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径1の円を考える。この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐（内部を含む）を S とする。また，点 $A(1,\ 0,\ 2)$ を考える。

(1) 点Pが S の底面を動くとき，線分APが通過する部分を T とする。平面 $z=1$ による S の切り口および，平面 $z=1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 点Pが S を動くとき，線分APが通過する部分の体積を求めよ。

分　野

数学B：空間座標，**数学Ⅲ**：積分法

考え方

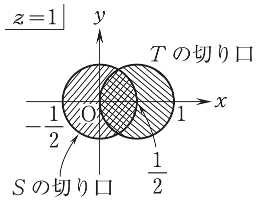
(1)は(2)のためのヒント．APの通過部分の概形がつかめれば積分はいらない．

【解答】

(1)　点 A の高さは 2 で，$z=1$ は底面に平行だから，切り口は AP の中点の軌跡．原点を O とすると，T は OA の中点 $\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 1\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円板．

$z=1$ による S の切り口は点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円．

図示すると下図．



(2)　線分 AP が平面 $z=t$ を通過する範囲を考える．P は当然 $0\leqq z\leqq t$ の範囲にある．

平面 $z=u$ $(0\leqq u\leqq t)$ における S の断面に P があるとき，線分 AP が平面 $z=t$ と交わる範囲を考える．

S の頂点 $(0,\ 0,\ 2)$ を B とする．$z=u$ は OB を $u:2-u$ の比に内分する．S の $z=u$ における断面は中心が $O_u(0,\ 0,\ u)$，半径が $1-\frac{u}{2}$ の円板．この上に P があると考える．

$z=t$ は AP を $2-t:t-u$ の比に内分する．したがって，線分 AP と平面 $z=t$ との交点が作る図形は中心が AO_u を $2-t:t-u$ に内分する点

$$\left(\frac{t-u}{2-u},\ 0,\ 2\frac{t-u}{2-u}+u\frac{2-t}{2-u}\right)=\left(\frac{t-u}{2-u},\ 0,\ t\right)$$

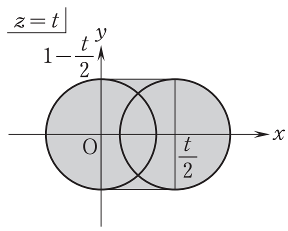
で，半径が

$$\left(1-\frac{u}{2}\right)\frac{2-t}{2-u}=1-\frac{t}{2}$$

の円である．

u を $0\leqq u\leqq t$ の範囲で動かすと円の半径は変わらず $1-\frac{t}{2}$ で中心の x 座標 $\frac{t-u}{2-u}=1-\frac{2-t}{2-u}$ が，$\frac{t}{2}$ から，0 まで変化する．

したがって，AP が平面 $z=t$ 上に作る断面は半径は $1-\frac{t}{2}$ の円が中心を $\frac{t}{2}$ だけ移動したときに通過する領域である．その面積は



$\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\pi+\frac{t}{2}\times 2\left(1-\frac{t}{2}\right)$

求める体積は

$$\int_0^2\left\{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\pi+\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right\}dt$$

$$\int_0^2\left(1-\frac{t}{2}\right)^2\pi\,dt=\left[-\frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{t}{2}\right)^3\right]_0^2=\frac{2}{3}\pi.$$

$$\int_0^2\left(t-\frac{t^2}{2}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right]_0^2=\frac{2}{3}.$$

よって，求める体積は

$$\frac{2}{3}\pi+\frac{2}{3}.$$

…(答)

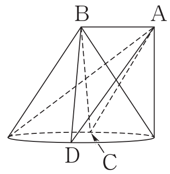
⑵ の【別解】

AP が通過する範囲は，点 A から S を眺めたときに，見える S の表面までの部分と，S そのものからなる．

T は S の底面の円を底面とし，点 A を頂点とする斜円錐．この部分は求める領域に含まれる．

B(0, 0, 2)，C(0, 1, 0)，D(0, −1, 0) とすると，平面 ABC と平面 ABD は S にも T にも接する．S と平面 ABC，平面 ABD とはそれぞれ，BC，BD で接し，T と平面 ABC，平面 ABD とはそれぞれ，AC，AD で接する．

したがって，点 A から S を眺めたとき，点 A から見える S の部分は S の表面のうち，BC，BD より A 側すなわち $x \geqq 0$ の部分．



線分 AP が通過する部分は S，T の他，2 平面 ABC と ABD および S，T にはさまれた部分．

したがって，求める体積は S のうち三角形 BCD より，A と反対側，T のうち三角形 ACD より B の反対側，および四面体 ABCD．

S のうち三角形 BCD より，A と反対側，T のうち三角形 ACD より B の反対側の体積はそれぞれの体積の半分．$\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3}\pi\times 2=\dfrac{\pi}{3}$

△BCD の面積は $\dfrac{1}{2}\times 2\times 2=2$，AB の長さは 1 で，AB は BCD に垂直だから，四面体 ABCD の体積は $\dfrac{1}{3}\times 2\times 1=\dfrac{2}{3}$.

求める体積は

$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(\pi+1). \qquad \cdots(\text{答})$$

第 6 問

以下の問いに答えよ。

⑴ A，α を実数とする。θ の方程式

$$A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$$

を考える。$A>1$ のとき，この方程式は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解を持つことを示せ。

⑵ 座標平面上の楕円

$$C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

を考える。また，$0<r<1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2+y^2<r^2$$

が表す領域を D とする。D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 $r(0<r<1)$ が存在することを示せ。また，そのような r の最大値を求めよ。

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある。

分　野

数学Ⅲ：2 次曲線

考え方

(1) は $|A\sin 2\theta|$ の最大値が 1 より大きいことを考えれば明らか.

(2) は (1) をどう使うかがポイント.

C 上の点 Q の座標を θ で表し，その法線が点 P を通る条件を求める.

【解答】

(1) $f(\theta)=A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)$ とおく.

$A>1$, $|\sin(\theta+\alpha)|\leqq 1$ だから,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{3}{4}\pi+\alpha\right)<0,$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=A-\sin\left(\frac{5}{4}\pi+\alpha\right)>0,\quad f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=-A-\sin\left(\frac{7}{4}\pi+\alpha\right)<0$$

$$f(2\pi)=f(0)=A-\sin\alpha,$$

$f(\theta)$ は連続な周期関数だから $f(\theta)=0$ は中間値の定理から

$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{3}{4}\pi$, $\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi<\theta<\frac{7}{4}\pi$ および「$0\leqq\theta<\frac{\pi}{4}$ または $\frac{7}{4}\pi<\theta<2\pi$」にそれぞれすくなくとも 1 個の解をもつ.

したがって，方程式 $f(\theta)=0$ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつ.　（証明終り）

(2) 楕円 C 上の点 Q の座標は $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とかけ，Q における C の接線は

$\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{2}x+\sin\theta y=1$ と表される.

この直線に垂直で，Q を通る直線の方程式は

$$\sin\theta\cdot x-\frac{\cos\theta}{\sqrt{2}}\cdot y=\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{2}}=\frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{2}} \quad \cdots①$$

とかける.

点 $(x,\ y)$ を定点として，合成公式を使うと,

$$\sqrt{2}\,x\sin\theta-y\cos\theta=\sqrt{2x^2+y^2}\sin(\theta+\alpha)$$

とかける．これを使って，① を整理すると,

$$\frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0 \quad \cdots②$$

となる.

この方程式は (1) の方程式で，$A=\frac{1}{2\sqrt{2x^2+y^2}}$ としたものに他ならない.

$A>1$ とすると,

$$2x^2+y^2<\frac{1}{4}$$

よって，$r^2\leqq\frac{1}{4}$ つまり，$r\leqq\frac{1}{2}$ であれば，D 内の点，つまり，$2x^2+y^2<r^2$ をみたすすべての点に対して ① は $0\leqq\theta<2\pi$ 内に 4 個の解をもつ．$0\leqq\theta<2\pi$ に対して楕円 C の点 Q が対応するから，このような点 Q が 4 個存在する.

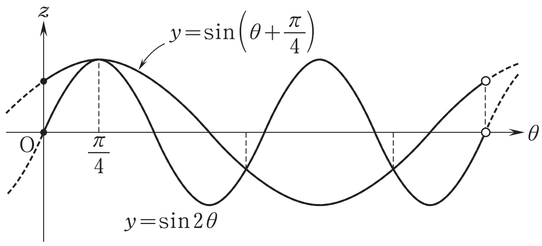
つまり，$0<r<1$ の範囲に条件をみたす r は存在する.　（証明終り）

$2x^2+y^2=\frac{1}{4}$ つまり，$8x^2+4y^2=1$ のとき，② は

$$\sin(\theta+\alpha)=\sin 2\theta$$

となる.

$z=\sin(\theta+\alpha)$ と $z=\sin 2\theta$ はともに $-1\leqq z\leqq 1$ の範囲で変化する．



最大，または最小になる θ が等しいとき，例えば $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，上のグラフのように，$z=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と $z=\sin 2\theta$ の $0\leqq\theta<2\pi$ における共有点の個数は 3 個となり，D 内で条件をみたさない点 P が存在することになる．

したがって，$r>\dfrac{1}{2}$ のときには D の範囲で Q が 4 個存在しないものがある．

以上から，r の最大値は $\dfrac{1}{2}$.

（注 1） $z=\sin(\theta+\alpha)$ と $z=\sin 2\theta$ の最大値または最小値が一致するのは $\alpha=\dfrac{n}{4}\pi(n=1,\ 3,\ 5,\ 7)$ のとき．

このとき，$(x,\ y)=\left(\pm\dfrac{1}{4},\ \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$（複号任意）．

（注 2） (1) で $A\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$ の解が少なくとも 4 個存在することを示したが，実際に 4 個あることを示すことは求められなかった．

$z=A\sin 2\theta_1$，$z=\sin(\theta_2+\alpha)$ の，逆関数について考えると，同じ z に対して，

$$\left|\frac{d\theta_1}{dz}\right|<\left|\frac{d\theta_2}{dz}\right|$$

だから，θ_1 が単調な区間で，θ が等しくなる z が 2 個以上あることはない．

このことから各単調区間における θ は 1 個である．したがって，$A>1$ のとき，$0\leqq\theta<2\pi$ の区間で，$f(\theta)=0$ をみたす θ はちょうど 4 個存在する．

なお，逆関数の微分の大小は，同じ z における $\dfrac{dz}{d\theta}$ の大小を逆転させて考えればよいが，具体的に計算すると，

$$\frac{d\theta_1}{dz}=\frac{\pm 1}{2\sqrt{A^2-z^2}},\quad \frac{d\theta_2}{dz}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1-z^2}}.$$

（注 3） 点 P が楕円 $2x^2+y^2=l^2$ 上にあるとき，P の座標は $\left(\dfrac{l}{\sqrt{2}}\cos\alpha,\ -l\sin\alpha\right)$ とかける．

このとき，PQ が Q における接線に垂直である条件は，

$$\frac{1}{2l}\sin 2\theta-\sin(\theta+\alpha)=0$$

となる．このような Q を，Q(P) とする．

(i) $0<l<\dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{2l}>1$ だから，(1) より，Q(P) は 4 個存在する．

(ii) $l=\dfrac{1}{2}$ の場合，$\alpha=\dfrac{n}{4}\pi$ ($n=1,\ 3,\ 5,\ 7$) のとき Q(P) が 3 個存在し，それ以外のときは 4 個存在する．

数学ができる人は頭がよい？

ときどき予備校で数学の講師をやっているというだけで妙に「尊敬」されることがあります．ききもしないのに「私は数学が苦手だから」とかなんとか言われたりもします．そして，気が付くと「敬遠」されていることがあります．

どうも数学については学校で良い思いをしていない人の方が多いように思います．

そのためか，数学ができる人は頭がよいという俗説がまかり通っているようです．特別な能力を持たないと数学ができるようにならないと決めてかかっているようです．

数学の理解は他の教科の理解と少し違うように思います．少なくとも授業で話を聴いてわかったようにはなれない学科のように思います．もちろん，授業ノートはとると思います．しかし，そこで終ってしまうとアッという間に忘れてしまうように思います．自分で手を動かして計算しないと頭に残らないように思います．真似でもよいから手を動かすことが大切です．それをしないでわかったような気になろうとする人が多いのではないでしょうか．

また，計算間違いはだれでもします．それは自分の至らなさの証拠ではありますが，それは自分が単に電卓やコンピュータでないことの証明でもあります．間違えることを嫌ったら上達しません．間違ったらやり直せばよいのです．何度でもわかるまでやり直せばよいのです．その点において私は他の人より根気があったのかもしれません．いや，性（さが）のようなものかもしれません．

数学嫌いの人は面白くなるまで手を動かしたことのない人だと思います．私は納豆の嫌いな人は「美味しい納豆」を食べたことのない人だと思っています．

それから，最初から難しい問題に取り掛かるべきではないと思います．自分の手の届く範囲から始めるべきです．中には，自分ができたのだからこの問題は意味がないつまらない問題だと決めつける人がいます．そうではなく，基本的な問題の中には奥が深くいろいろな方向に発展してゆくものが多くあります．どうかどんな問題であっても，解けたら素直に喜んでください．

小学校，中学校，高校のどこかで躓いて，そして何らかの理由で傷ついて，それきり数学を遠ざけている人もいるかもしれませんが，できないからといって誰も文句をつけないと思いますからゲーム感覚で数学を楽しんでくれる人が一人でも多く出てくれることを期待しています．好きになれば自然と上達するのは他の分野でも同じだと思います．

巻末資料

受験形式

募集形式

1949 年　新制大学として入試，教養学部（前期）設立
1953 年～1965 年　衛生看護学科（別枠募集）
1962 年　科類を文科Ⅰ類，文科Ⅱ類，理科Ⅰ類，理科Ⅱ類から，文科Ⅰ類，文科Ⅱ類，文科Ⅲ類，理科Ⅰ類，理科Ⅱ類，理科Ⅲ類に変更

本試験

1949 年～1960 年	選択制
1949 年	共通（2 問），解析 1，解析 2，幾何（各 3 問/1 科目選択あわせて 120 分）
1950 年	共通（2 問），一般数学，解析Ⅰ，解析Ⅱ，幾何（各 3 問/1 科目選択あわせて 120 分）
1951 年～1958 年	一般数学，解析Ⅰ，解析Ⅱ，幾何（各 3 問/2 科目選択 150 分）
1959 年，1960 年	数学Ⅰ代数，数学Ⅰ幾何，数学Ⅱ，数学Ⅲ（各 2 問/3 科目選択 150 分）
1961 年～	文科，理科別問題
1961 年～1968 年	文科（5 問/120 分），理科（6 問/150 分）
1969 年	入試実施なし
1970 年	文科（3 問/80 分），理科（4 問/100 分）
1971 年～	文科（4 問/100 分），理科（6 問/150 分）

1959，1976，1977 年　新課程，旧課程別問題

一次試験

1955 年～1978 年	一次試験
1955 年	文科解析Ⅰ（5 問），文科幾何（5 問），理科解析Ⅰ（4 問），理科幾何（4 問）（選択制各 20 枠/英国と 180 分）
1956 年	文科解析Ⅰ（4 問），理科解析Ⅰ（5 問）（各 20 枠/英国と 150 分）
1957 年～1961 年	文科（5 問），理科（5 問）（各 20 枠/英国と 150 分）
1962 年	文科（6 問），理科（6 問）（各 20 枠/英国と 150 分）
1963 年～1968 年	文科（5 問），理科（5 問）（各問 4 枠，除 1964 文/英国と 150 分）
1970 年	文科（5 問），理科（5 問）（各問 4 枠/数学だけで 50 分）

1971 年～1975 年，1978 年　文科（4 問），理科（4 問）（各問 4 枠/英国と 120 分）

1976 年	文科（4 問），理科（4 問）（新旧別問，各問 4 枠/英国と 120 分）
1977 年	文科（4 問），理科（4 問）（各問 4 枠/英国理社と 200 分）
1979 年～1989 年	共通一次試験

1990 年～　大学入試センター試験

後期試験など

1949 年～1978 年　一期校
1979 年～1986 年　国立単一出願
1987 年～1989 年　A 日程試験
1990 年～2007 年　後期試験数学（理科Ⅰ類のみ 3 問/150 分）
1990 年～2015 年　総合科目Ⅱ

入試範囲

教科（入試年度）

1949 年	解析１，解析２，幾何（３科目から１科目選択）
1950 年	一般数学，解析Ⅰ，解析Ⅱ，幾何（４科目から１科目選択）
1951 年～1958 年	一般数学，解析Ⅰ，解析Ⅱ，幾何（４科目から２科目選択）
1959 年，1960 年	数学Ⅰ代数，数学Ⅰ幾何，数学Ⅱ，数学Ⅲ（４科目から３科目選択）
1961 年～1965 年	数学Ⅰ代数，数学Ⅰ幾何，数学Ⅱ／数学Ⅲ（文科は／の前まで，理科は全体．以下同じ）
1966 年～1975 年	数学Ⅰ，数学Ⅱ／数学Ⅲ
1976 年～1984 年	数学Ⅰ，数学ⅡＢ／数学Ⅲ
1985 年～1996 年	数学Ⅰ，代数・幾何，基礎解析／微分・積分，確率・統計（統計的推測を除く）
1997 年～2005 年	数学Ⅰ，数学Ａ（数と式，数列），数学Ⅱ，数学Ｂ（ベクトル，複素数と複素数平面）／数学Ⅲ，数学Ｃ（行列と線形計算，いろいろな曲線）
2006 年～2014 年	数学Ⅰ，数学Ａ，数学Ⅱ，数学Ｂ（数列，ベクトル）／数学Ⅲ，数学Ｃ（行列とその応用，式と曲線）
2015 年～	数学Ⅰ，数学Ａ，数学Ⅱ，数学Ｂ（数列，ベクトル）／数学Ⅲ

出題範囲に含まれていた時期（旧課程用問題を除く）

以下の時期は基本的に指導要領に準拠している．

ただし，1958 年までは指導要領の縛りはあまりない．

また，1960 年までは選択制なので厳密には文理分けはできないのだが，指導要領の連続性から 1959 年以後を文理分けしている．

用語

共軛（～1958 年），共役（1959 年～）
抛物線（～1958 年），放物線（1959 年～）
截片（～1958 年），切片（1959 年～）
多面体の稜（～1958 年），多面体の辺（1959 年～）
函数（～1965 年），関数（1966 年～）
正弦法則，余弦法則（～1965 年），正弦定理，余弦定理（1966 年～）
四辺形（～1965 年），四角形（1966 年～）
方程式の根（～1975 年），方程式の解（1976 年～）

代数

分数方程式，無理方程式（～1975 年）
分数関数，無理関数（文科（～1996 年），理科（一貫して範囲内））
写像（1976 年～1984 年）

図形

幾何（～1965 年）
ヘロンの公式（～1984 年）
楕円の方程式（文科（～1996 年），理科（一貫して範囲内））
二次曲線（文科（～1975 年，1985 年～1996 年），理科（～1975 年，1985 年～））
極座標（文科（1966 年～1975 年），理科（1966 年～1975 年，1997 年～））
複素数平面（1966 年～1975 年，1997 年～2005 年，2015 年～））
ベクトル（1966 年～）

空間ベクトル（1976 年～）
空間座標（1966 年～）
直線，平面の方程式（1976 年～1996 年）
投影図（～1975 年）
座標変換（1966 年～1975 年）
行列（文科（1976 年～1996 年），理科（1976 年～2014 年））

解析

数列（文科（～1958 年，1966 年～），理科（一貫して範囲内））
数学的帰納法（文科（1966 年～），理科（1959 年～））
漸化式（1976 年～）
数列の極限（文科（～1958 年，1966 年～1975 年），理科（一貫して範囲内））
関数の極限（→∞）（文科（～1975 年），理科（一貫して範囲内））
積の微分（文科（～1984 年），理科（一貫して範囲内））
分数関数，無理関数の微分（文科（～1965 年），理科（一貫して範囲内））
指数関数，対数関数の微分（理科（1966 年～））
整式の積分（文科（～1958 年，1966 年～），理科（一貫して範囲内））
指数関数，$\dfrac{1}{x}$ の積分（理科（1966 年～））
置換積分，部分積分（理科（1966 年～））
区分求積（文科（1966 年～1975 年），理科（1959 年～2005 年））
曲線長（理科（～2005 年，2015 年～））
微分方程式（理科（1966 年～1996 年））
体積（文科（～1996 年），理科（一貫して範囲内））
加速度（文科（～1975 年），理科（一貫して範囲内））

確率・統計

集合と個数（文科（1966 年～1984 年，1997 年～），理科（1966 年～））
順列組合せ（文科（1966 年～1984 年，1997 年～），理科（1959 年～））
確率（文科（～1958 年，1976 年～1984 年，1997 年～），理科（一貫して範囲内））
確率分布（文科（1997 年～2005 年），理科（1959 年～））

指導要領の変遷と東大入試

標語		(試案)			現代化	ゆとり	個性を	生きる力	脱ゆとり
	新制度	第一次改訂	第二次改訂	第三次改訂	第四次改訂	第五次改訂	第六次改訂	第七次改訂	第八次改訂
最初の入試	1949(昭和24)年	1951(昭和26)年	1959(昭和34)年	1966(昭和41)年	1976(昭和51)年	1985(昭和60)年	1997(平成9)年	2006(平成18)年	2015(平成27)年
数と式	解析Ⅰ	解析Ⅰ	数学Ⅰ代数	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学A	数学Ⅰ	数学Ⅰ
二次方程式・二次関数	解析Ⅰ	解析Ⅰ	数学Ⅰ代数	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ
高次方程式・方程式理論	解析Ⅰ	解析Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学B	数学Ⅱ	数学Ⅱ
指数・対数関数	解析Ⅰ	解析Ⅰ	数学Ⅰ代数/数学Ⅱ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	基礎解析	数学Ⅱ	数学Ⅱ	数学Ⅱ
三角比	解析Ⅰ/幾何	解Ⅰ/解Ⅱ/幾何	数学Ⅰ幾何	数学ⅡB	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ
三角関数	解析Ⅰ	解析Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	基礎解析	数学Ⅱ	数学Ⅱ	数学Ⅱ
加法定理	解析Ⅰ	解析Ⅱ	数学Ⅱ	数学ⅡB	(数学ⅡB)	基礎解析	数学Ⅱ	数学Ⅱ	数学Ⅱ
初等幾何	幾何	幾何	数学Ⅰ幾何	—	—	—	数学A	数学A	数学A
図形と方程式	幾何	解析Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅰ	数学Ⅱ	数学Ⅱ	数学Ⅱ
二次曲線	幾何	幾何	数学Ⅱ	数学ⅡB	(数学Ⅰ)	代数・幾何	数学C	数学C	数学Ⅲ
複素数平面	—	—	—	数学ⅡB	—	—	数学B	—	数学Ⅲ
ベクトル	幾何	—	—	数学ⅡB	数学Ⅰ/数学ⅡB	代数・幾何	数学B	数学B	数学B
空間座標	幾何	—	—	(数学Ⅰ)	数学ⅡB	代数・幾何	数学B	数学B	数学B
行列・一次変換	—	—	—	—	数学ⅡB	代数・幾何	数学C	数学C	—
数列	解析Ⅱ	解析Ⅱ	数学Ⅲ	数学ⅡB	数学ⅡB	基礎解析	数学A	数学B	数学B
微分・積分(多項式)	解析Ⅱ	解析Ⅱ	数学Ⅱ/数学Ⅲ	数学ⅡB	数学ⅡB	基礎解析	数学Ⅱ	数学Ⅱ	数学Ⅱ
微分・積分(一般)	解析Ⅱ	解析Ⅱ	数学Ⅱ/数学Ⅲ	数学Ⅲ	数学Ⅲ	微分・積分	数学Ⅲ	数学Ⅲ	数学Ⅲ
個数・確率	解析Ⅱ	解析Ⅱ	数学Ⅲ	数学ⅡB/数学Ⅲ	数学Ⅰ	確率・統計	数学Ⅰ	数学A	数学A

備考
1．2つ以上の科目を / で挟んである部分は，第一次改訂までの三角比は共通部分であり，それ以外は同一分野を科目(したがって学年)に分けて学習したことを表す．
2．(　)をつけてある科目は扱いが軽いか，一部分のみ学習していることを表す．
3．高校での指導要領の実施は，新制度が1947(昭和22)年，第一次改訂が1951(昭和26)年でそれ以外は入試実施の3年前です．
4．一般数学の入試での実施は1950(昭和25)年からは1958(昭和33)年までです．分野分類が難しいので表には表していません．
5．学習指導要領は第一次改訂までは(試案)という形で扱われました．
6．第八次改訂の入試実施は文系などの他教科より1年先行しています．

出典

河合塾 Homepage（2002 年～）（前年度以前は一部掲載終了のため一般に見ることは不可能．近年の入試問題については東大のホームページに掲載されています．）

東大速報会会議用原稿（1997 年～2017 年）（部外秘）

入試研究会分冊子関東地区（1996 年～）（塾内資料）

河合塾大学入試問題集（いわゆるピンク本；1990 年～）（塾内資料）

直前問題集原稿（1989 年～1994 年；1990 年～1992 年，1993 年（理科 3 問まで）の入試は解説付き，1994 年版は発行されず準備原稿）

直前問題集・予想問題集（1982 年～1992 年）（1976 年～1992 年東大入試収録）

いわゆる速報冊子（昭和 52（1977）年～2005 年）（限定出版物）

昭和 54 年度国公立大学二次試験問題研究会（限定出版物）

51 年度大学入試問題研究会（限定出版物）

49 年度東大・京大・筑波大・名大徹底分析（限定出版物）

＊以上は河合塾または河合出版の出版物

旺文社・全国大学入試問題正解・数学（昭和 50 年～）

聖文社・数学入試問題詳解（昭和 50 年～）

旺文社・聖文社入試問題コピー（昭和 46 年～昭和 49 年）（私的に資料としてコピーしたもの）

聖文社・入試数学便覧第 1 巻～第 6 巻（収録 1956 年～1994 年）

河合塾 中森信弥先生コレクション（昭和 24 年～昭和 30 年）（中森先生が古本屋や図書館から集めてコピーしたもの）

旺文社・大学入試問題正解（昭和 25 年～；国立国会図書館蔵）

解答作成に至るまで多くの人の協力に感謝いたします

各問題の解答は私の責任で編集しました．しかし，この本の作成の経過からわかるように，河合塾の多くの人のアイデアを取り込んでいます．

1949 年から 1975 年までは私が河合塾で東大入試解析の仕事を始める前なので中森信弥先生が集められた資料を含めて，旺文社，聖文社の資料を参考にさせていただきました．少なくとも問題文についてはこれらの資料によっています．解答はなるべく私独自に作成しました．1975 年以前の問題でも，塾テキスト作成等の過程で，故浅野英夫先生や山中巌先生に指導していただいたものがあります．1976 年以後私は東大解答作成に関っています．初期の解答には故早川康弌先生，故木村邦五郎先生，中村徹先生，松谷吉員先生など当時の河合塾スタッフのアイデアが含まれていると思います．その後，私がチーフとして文科の解答を担当し，理科は矢神毅先生，渋谷司先生を中心として解答作成がなされた時代が続きました．チーフは取りまとめ役で多くの当時の河合塾の精鋭の先生方が解答の作成に関っています．したがって，1976 年以後の解答は私独自のものではなくこれらの諸先生方のお力を拝借しています．2017 年以後は私が河合塾の講師を降りたので，河合塾の解答作成には関っていません．したがって，河合塾の解答を参考にはしていますが，私独自の解答です．

また，これら解答作成スタッフ以外の方からアイデアをいただいたものもあります．1958 年 2 次試験幾何第 2 問の**【別解】**は本書校正時に中村拓人先生からアイデアをいただきました．2004 年前期理科第 6 問**【別解 1】**は桜町和男先生のアイデアです．2008 年前期文科第 3 問**【別解 3】**は三原正裕先生のアイデアです．これらの方々は当時の東大解答作成スタッフではありませんでしたが，貴重な意見をいただいたと思っています．

また，私の至らなさからもっと優れた解法が載っていないことも多いと思われます．

これだけの問題解答をするにあたって，今更ながら多くの人の力を借りてできあがったことを改めて感謝します．

おわりに

最初は道楽みたいな気持ちで始めました．これを世に出すなどとは考えずに，東大の過去の問題を整理しようとして始めたことでした．河合塾のデータベースとして使っていただければと考えていました．

色々な人から支援を得て今日のような形になりました．全体がかなりの分量になっており自分でも驚いています．校正をしてみてそのことを実感しました．気が付いてみるとプロジェクトを立ち上げてからもう 4 年になります．原稿を整理して校正をするのにそれだけ時間がかかりました．原稿整理には中村敬一先生と堂前孝信先生他多くの先生の協力を得たことをこの上なく有難く思っています．特に堂前先生には $\mathrm{M_EP_OT_EX}$ という図版作成用の強力な武器を提供していただきました．そのことにはとても感謝しています．また河合出版の高橋信行さんには色々と無理難題あるいは我が侭な注文をしてご迷惑をおかけしました．その都度快く引き受けていただいたことに感謝しています．

この本は私のライフワークの様に思えます．それが達成できたことを無上の幸せと感じています．

この本がどのように読まれるのかは正直に言って私にはわかりません．他にないタイプの本であることは間違いないと思います．基本的には入試資料だと思います．学習参考書のような実用書としてではなく，入試問題というものがそれぞれの作成者によって，その時代を背景として鋭意努力の上に出来上がっているのだと思います．決して空から降りてきたものではなく，生身の人間によって作成された結晶なのだと思います．色々と辛口な批判もしましたが，一つ一つの問題は作成者の心の籠ったものだと思います．そのことは東大だけでなくどこの大学の問題についてもいえます．それらの問題を通して今日の社会が構成されているのだと思います．その意味で入試問題というものがひとつの文化となっているように思います．この機会に入試問題をもう一度見直していただけることができるならば私にとって幸いなことだと思います．

東大入試作成に関わったすべての先生方に敬意を表して筆をおきます．

著者紹介

大原 仁（おおはら ひとし）

1945 年生まれ．埼玉大学文理学部物理学科卒業．名古屋大学大学院理学研究科博士課程満了退学．河合塾数学科専任講師を経て，現在，日本物理オリンピック委員を務める．著書に『東大直前問題集』『東大予想問題集』『文系数学の演習』『文系数学 70 選』（以上，河合出版），大学生向けの数学『カラーテキスト線形代数』（講談社）がある．趣味は，音楽鑑賞，読書，フォークダンス，旅行．

東京大学　数学入試問題 72 年　下巻
[1949〜2020 年入試全問題]

上巻・下巻・CD-ROM 三冊セット価格
　　　　外箱に表示してあります（分売不可）
発　行　　2020 年 9 月 10 日
著　者　　大原　仁
発行者　　両角恭洋

発行所　　株式会社　河合出版
　［東　京］　〒 151-0053
　　　　　　東京都渋谷区代々木 1-21-10
　　　　　　TEL　03-5354-8241
　　　　　　FAX　03-5354-8781
　［名古屋］　〒 461-0004
　　　　　　名古屋市東区葵 3-24-2
　　　　　　TEL　052-930-6310
　　　　　　FAX　052-936-6335

印刷所　　名鉄局印刷株式会社
製本所　　三省堂印刷株式会社

〈下巻 704pp.〉
ISBN978-4-7772-2344-2

装丁　三部八十彦

東京大学数学入試問題一覧表（1985〜2020 年）

下巻収録の 36 年分を降順に並べてあります．年度欄の年度をクリックするとその年度の問題解答が表示されます．

科目は当時の科目を表しています

指導要領変更の年の科目は**太字**にしてあります．

移行年度の問題の科目で旧課程別出題の場合は科目に旧をつけてあります．

移行年度の問題の科目は共通出題問題の場合は旧課程分野に[ ]をつけてあります．科目名が変らない場合は[ ]なしにしています．

年度	文理	番号	範 囲	科 目	内 容	難易
2020	文	1	整式の微分，平面座標	数Ⅱ	3 次関数のグラフと x 軸で囲まれた領域に格子点がただ 1 個ある条件	標準
		2	場合の数	数A	縦横 16 個の格子点から 5 個を選ぶとき条件をみたす場合の数	やや難
		3	図形と方程式，三角関数，整式の微分	数Ⅰ・数Ⅱ	原点から放物線を見込む半直線，またそれと正三角形を作る直線	標準
		4	整式，数列	数Ⅰ・数B	$2^m(0 \leqq m < n)$ から異なる k 個選んだ積の和を係数とする整式	難
	理	1	2 次不等式	数Ⅰ	a，b，c をサイクリックに置換した 3 つの 2 次不等式すべてをみたす x の範囲	標準
		2	初等幾何	数A	三角形 ABC と X で作る 3 つの三角形の面積の和	標準
		3	微分法，積分法	数Ⅲ	点 $((1+t)\sqrt{1+t},\ 3(1+t)\sqrt{1-t})$ の作る軌跡で囲まれた図形の平面内での回転	標準
		4	**文科第 4 問**と同じ			やや難
		5	空間座標，積分法	数B・数Ⅲ	直円錐内の点 P と定点 A を結ぶ線分の通過範囲の体積	やや難
		6	二次曲線	数Ⅲ	楕円の法線が 4 本通過する点の存在条件	やや難
2019	文	1	整式の微分，図形	数Ⅱ	単位正方形の 3 辺上に頂点がある面積 $\dfrac{1}{3}$ の三角形の線分比	やや難
		2	軌跡，領域，整式の積分，面積，ベクトル，三角比	数Ⅱ・数B・数Ⅰ	ベクトルと，座標で与えられ領域図示と $\cos\theta$ の範囲	標準
		3	確率	数A	正八角形の上のランダムウォーク，10 回の試行．F を通過する確率	やや易
		4	軌跡，領域，ベクトル	数Ⅱ・数B	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \leqq 1$ の領域とベクトルで与えられた領域．平行移動して同様に作られた図形の同値性	標準
	理	1	積分法	数Ⅲ	$\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$ を求める	標準
		2	整式の微分，図形	数Ⅱ	**文科第 1 問**とほぼ同じ，座標なし，誘導なし	標準
		3	空間座標	数B	正四角錐と斜め四角錐でできた八面体，切り口が八角形となる条件．切り口の正射影の面積	やや難
		4	整数	数A	$(n^2+1)(5n^2+9)$ は 2 乗数でないことの証明	標準
		5	数列の極限，微分法	数Ⅲ	$x^{2n-1}=\cos x$ の解 a_n の列に関する極限 $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$b=\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^n$，$c=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$ を求める	やや難
		6	複素数平面	数Ⅲ	実係数 4 次方程式の解に関する条件から解の和の存在範囲の図示	やや難
2018	文	1	整式の微分，距離の公式，絶対値	数Ⅱ・数Ⅰ	放物線上の点と原点を通る接線との距離 L，M に対し，$\sqrt{L}+\sqrt{M}$ の最小値．放物線の上側で $px+qy \leqq 0$ となる $(p,\ q)$ の存在範囲	やや難
		2	整数	数A	$\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n!}$ が整数である自然数 n をすべて求める	標準
		3	整式の微分，方程式への応用	数Ⅱ	3 次方程式が 3 実解をもち，その真中の解が 1 より大となる条件	標準
		4	軌跡・点の存在領域，ベクトル	数Ⅱ・数B	$y=x^2(\lvert x\rvert \leqq 1)$ 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ となる S の存在範囲の面積	やや易
	理	1	微分法，極限	数Ⅲ	$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}+\cos x$ の 0，π での極限と増減	やや易
		2	整数	数A	$\dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ が整数である自然数 n をすべて求める	標準
		3	軌跡・点の存在領域，ベクトル，極限	数Ⅱ・数B・数Ⅲ	$y=x^2(\lvert x\rvert \leqq 1)$ 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となる R の存在範囲の面積，$+0$，$+\infty$ の極限	標準
		4	整式の微分，方程式への応用	数Ⅱ	**文科第 3 問**とほぼ同じ（誘導なし）	やや易
		5	複素数平面	数Ⅲ	$\lvert z\rvert=1$，接線について対称点 u，$w=\dfrac{1}{1-u}$，$\dfrac{\lvert w+\overline{w}-1\rvert}{\lvert w\rvert}$，$w$ の軌跡	難
		6	空間座標，整式の積分，体積	数B・数Ⅲ	折れ線上を中心が動く球体の通過領域の共通部分	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
2017	文	1	整式の微分，整式の積分，2 次関数	数Ⅱ・数Ⅰ	2 つの放物線と両軸で囲まれる部分の面積比の最大値	標準
		2	ベクトル	数B	正六角形の 2 辺上に PQ，2：1 内分点の存在範囲の面積	標準
		3	確率	数Ⅰ	4 方向に等確率で動く点が 6 秒後に $y=x$ 上にある確率	やや易
		4	整数，数列，数学的帰納法	数A・数B	$a_n=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^n$ に関する整数問題．a_n が自然数であること，a_n，a_{n+1} の最大公約数	標準
	理	1	2 次関数，三角関数	数Ⅰ・数Ⅱ	$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$，$g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$，$g(\theta)$ の最小値が 0 である条件	標準
		2	確率	数A	4 方向に等確率で動く点が 6 秒後に原点にある確率	標準
		3	複素数平面	数Ⅲ	ω，ω^2 を結ぶ線分上の点の逆数の軌跡	標準
		4	**文科第 4 問**と同じ			標準
		5	平面座標	数Ⅱ	$y=x$ について対称な放物線の傾きが -1 でない共通接線	標準
		6	空間座標，整式の積分，体積	数B・数Ⅱ・数Ⅲ	正三角形の回転でできる円錐の回転体の体積	やや難
2016	文	1	平面図形，ベクトル，内積	数B	$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ のとき△PQR が鋭角三角形となる P の存在範囲の図示	やや易
		2	確率，数列	数A・数B	相撲の巴戦を野球の 3 チームで行う確率	標準
		3	2 次関数，整式の微分，整式の積分	数Ⅰ・数Ⅱ	$y=x^2$ と $(-1,\ 1)$ で接する放物線の移動，2 放物線が囲む図形の面積の最大値	標準
		4	整数，数列	数A・数B	整数の漸化式 $x_{n+1}=3^{x_n}$ の 1 位数，x_{10} の 1 位数を求める	やや難
	理	1	関数の極限，微分法	数Ⅲ	$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ の証明	標準
		2	確率，数列	数A・数B	相撲の巴戦，野球で，A が優勝のとき，相手が B である確率	標準
		3	空間座標，微分法	数B・数Ⅲ	直線 $\mathrm{P}_i\mathrm{Q}(i=1,\ 2,\ 3)$ と xy 平面の交点 R_1，R_2，R_3 が作る $\triangle\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積最小値	やや易
		4	複素数平面	数Ⅲ	$\triangle\mathrm{A}(1)\mathrm{B}(z)\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形になる z の範囲	標準
		5	整数	数A	$\sqrt{m}$ の小数部分の近似値から m の存在証明，$\sqrt{s}$ の小数部分が 0 でない有限小数にならない証明	やや難
		6	積分法，体積，空間座標	数Ⅲ・数B	定点を通る定長線分の通過領域の体積	やや難
2015	文	1	整数，論証問題，整式の微分	**数A・数Ⅰ・数Ⅱ［数Ⅰ・数A・数Ⅱ］**	n が正整数なら $\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ が成り立つか，$5n+5m+3\ell=1$ をみたすなら $10nm+3m\ell+3n\ell<0$ が成り立つか．真偽判定	やや難
		2	2 次関数，整式の積分	**数Ⅰ・数Ⅱ**	$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$ を通り，$-1<x<1$ に頂点がない放物線の通過領域の面積を求める	やや難
		3	図形と方程式	**数Ⅱ**	x 軸と ℓ に接する円と，y 軸と ℓ に接する円が，ℓ と同じ点で接する	やや難
		4	確率，数列，漸化式	**数A・数B**	AA または B を並べるとき n 番目の文字が A である確率	難
	理	1	不等式と領域	**数Ⅱ**	$a>0$ のときの放物線 $y=ax^2+\dfrac{1-4a^2}{4a}$ の通過領域	標準
		2	確率，数列，漸化式	**数A・数B**	AA または B，C，D を並べるとき n 番目の文字が A である確率	標準
		3	微分法，積分法	**数Ⅲ**	$y=ax^p$，$y=\log x$ が接する，これらと x 軸が囲む回転体の体積	標準
		4	数列，漸化式	**数B**	$p_{n+2}=\dfrac{p^2{}_{n+1}+1}{p_n}$ を誘導にしたがって解く	
		5	整数，二項係数	**数A・数Ⅱ［数Ⅰ・数A］**	${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数である最小の m を求めよ	やや難
		6	微分法，数列の極限	**数Ⅲ**	δ 関数．それを微分した関数（δ' 関数）	やや難
2014	文	1	2 次関数，整式の微分	数Ⅰ・数Ⅱ	t の 3 次式を係数とする x の 2 次関数の最大・最小	やや易
		2	確率，数列，漸化式	数A・数B	赤白の球が入っている袋から出てきた球の色によって袋の中の球の個数を変える確率	やや難
		3	不等式と領域，2 次方程式の理論，2 次関数	数Ⅱ・数Ⅰ	直線 $y=\sqrt{3}x(0\leqq x\leqq 2)$，$y=-\sqrt{3}x(-3\leqq x\leqq 0)$ 上にある P，Q について $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ のとき線分 PQ の通過領域．図示	やや難
		4	整数，数列，漸化式	数Ⅰ・数B	整数の数列 $a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$ の 17 による剰余．可逆性の証明	やや難
	理	1	ベクトル，内積，立体図形，三角関数，加法定理	数B・数Ⅱ	正四角柱を斜めに切ってできる平行四辺形の面積	標準
		2	確率，数列，漸化式，数列の極限	数A・数B・数Ⅲ	**文科第 2 問**に極限 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を追加	標準
		3	積分法	数Ⅲ	$y=-x^2+1$，$y=-(x-u)^2+u$ の共有点の $2\displaystyle\int_a^b\|x_1y_2-x_2y_1\|du$	標準
		4	微分法，数列の極限	数Ⅲ	$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$．$x_{n+1}=f(x_n)$ の極限，$c=f(c)$ の存在	やや難
		5	整数，数列，漸化式	数Ⅰ・数B	**文科第 4 問**に⑷ $n\geqq 2$ において a_n が p で割り切れるものがないならば a_1 は p で割り切れないことの証明を追加	やや難
		6	不等式と領域，2 次方程式の理論，2 次関数	数Ⅰ・数Ⅱ	**文科第 3 問**の範囲違い（$y=-\sqrt{3}x(-2\leqq x\leqq 0)$）	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
2013	文	1	整式の微分，高次方程式	数Ⅱ	$y=x(x-1)(x-3)$ と $y=tx$ の交点P，Qの作る関数 $g(t)=\lvert\overrightarrow{\mathrm{OP}}\rvert\lvert\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\rvert$ の極値	標準
		2	平面座標，二次曲線	数Ⅱ・数C	放物線と双曲線の基本性質に関する問題	標準
		3	不等式と領域	数Ⅱ	中心を含む弓形領域と $(x-a)^2+(y-b)^2+$ 定数 の形の量の最小値	やや難
		4	確率	数A	コイン投げ，得点を競う問題．昔のバレーボールのサイドアウト制	やや難
	理	1	行列，一次変換	数C	回転と相似拡大の合成．6回の変換で初めて元に戻る条件	標準
		2	微分法	数Ⅲ	パラメータ a を含む方程式が $x>0$ において3つの解をもつ条件	標準
		3	確率，無限級数	数A・数Ⅲ	**文科第4問**の極限を求める	やや難
		4	ベクトル，三角比	数B・数Ⅰ	正三角形の半分の三角形におけるフェルマー点から3頂点までの距離	標準
		5	2次不等式，整数，論証問題	数Ⅰ・数A	3連続整数の積で，1が99個連続してならぶ整数の存在証明	やや難
		6	積分法，体積，空間座標	数Ⅲ・数B	正方形を2つの対角線によって回転してできる2つの立体の共通部分の体積	やや難
2012	文	1	2次方程式	数Ⅰ	x，y の2次方程式について x の最大値を求める	やや易
		2	直線の方程式，相加平均・相乗平均の関係	数Ⅱ・数A	A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0)．AB上に ∠ACO=∠BCD をみたすD．三角形ACDの面積の最大値を求める	標準
		3	確率，数列，漸化式	数A・数B	9個の三角形の部屋間を球が移動する確率	標準
		4	整式の微分，整式の積分，2次関数	数Ⅱ・数Ⅰ	放物線と2接線の囲む面積が一定のとき2接線の交点の軌跡	標準
	理	1	図形と方程式，微分法	数Ⅱ・数Ⅲ	原点を通る直線が弓形を切る線分の長さの最大値	標準
		2	**文科第3問**と同じ			標準
		3	整式の積分，体積	数Ⅱ・数Ⅲ	楕円と放物線で囲まれた領域を x 軸，y 軸回転した体積の比	やや易
		4	整数	数Ⅰ	連続整数の積が n 乗数でないことの証明	やや難
		5	行列	数C	$\det A=1$ となる整数行列 A と $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ について積 B^nA に関する問題	標準
		6	行列，三角関数，和積公式	数C・数Ⅱ	対角和の最大値．実は回転行列の対角和，不等式の証明	やや難
2011	文	1	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ	$f(x)$ は3次式 $f(1)=1$，$f(-1)=-1$，$\int_{-1}^{1}(f(x)-ax^3)\,dx=1$ のとき，$\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするもの	やや易
		2	数列，整数	数B・数Ⅰ	実質的に連分数の問題	標準
		3	個数，不等式，整数，数列	数A・数Ⅰ・数B	文章題；不等式をみたす整数の個数	やや難
		4	軌跡	数Ⅱ	$y=x^2$ 上に頂点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ と底辺の頂点がある二等辺三角形の重心の軌跡	やや難
	理	1	点と直線の距離，微分法，分数関数	数Ⅱ・数Ⅲ	円の中心と直線の交点が作る三角形の面積の最大値	易
		2	数列，整数	数B・数Ⅰ	連分数，（**文科第2問**に追加）．有理数の連分数が無限に続かないことの証明追加	やや難
		3	積分法，関数の極限，微分法，曲線長	数Ⅲ	P(t, 0) に対しOを中心とする弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ の長さが一定であるQの軌跡の曲線長の極限を求める	標準
		4	**文科第4問**と同じ			標準
		5	個数，不等式，整数，数列	数A・数Ⅰ・数B	文章題；不等式をみたす整数の個数（**文科第3問**に追加．総数も）	標準
		6	整式の積分，体積，2次関数，2次不等式	数Ⅱ・数Ⅲ・数Ⅰ	$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ に対し $0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ をみたす空間領域の体積	難
2010	文	1	三角関数，合成公式，三角比	数Ⅱ，数Ⅰ	△OBCが定三角形のとき2つの三角形△OAB，△OACの面積（等しいとき，和が最大のとき）	やや易
		2	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ	2次関数の積分方程式 $f(x)=x^2+ax+b$，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ の a，b，c を求める	やや易
		3	確率，数列，漸化式	数A・数B	コイン投げで複数個のボールを移動する．$\frac{1}{2}$ の確率で一方が空になる	難
		4	三角関数，整数	数Ⅱ・数Ⅰ	円周上を動く3点が直角二等辺三角形になる時刻を求める	やや難
	理	1	立体図形，整式の微分，多変数の処理	数Ⅰ・数Ⅱ	直方体を辺の回りに90°回転したとき通過領域の体積	標準
		2	積分法，不等式の証明	数Ⅲ・数Ⅱ	積分と不等式，$\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n-1}^{m}\frac{1}{k}$ の評価	やや難
		3	確率，数列，漸化式	数A・数B	コイン投げで複数個のボールを移動する（**文科第3問**に場合を追加）	標準
		4	積分法	数Ⅲ	曲線（実は双曲線）と線分が囲む部分の面積	やや難
		5	**文科第4問**と同じ			標準
		6	ベクトル，空間図形，2次関数	数B・数Ⅰ	四面体を垂直に切った切り口の面積の最大値	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
2009	文	1	図形と方程式	数Ⅱ	2円に接する円の中心の軌跡の y 座標の最大値	やや易
		2	二項係数，整数，数学的帰納法	数A・数Ⅰ，数B	二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m について．d_m は k^m-k の約数であることを証明	やや難
		3	確率	数A	赤，青，黄，白の玉が $\frac{1}{4}$ の確率で出る機械から出てきた玉を2つの袋に入れる方法が異なる3つの確率	標準
		4	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ	$f(0)=0$，$f(2)=2$ の2次関数 $f(x)$ について $\int_0^2\lvert f'(x)\rvert dx$ の最小値	標準
	理	1	二項係数，整数	数A・数Ⅰ	二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m．(**文科第2問**に追加．m が偶数なら d_m は1か2)	やや難
		2	行列，数列の極限	数C・数Ⅲ	$A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の極限が $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ のとき $B=\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix}1&r\\0&1\end{pmatrix}$ の $B^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$の極限が $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ である証明	標準
		3	**文科第3問**と同じ			標準
		4	積分法，体積，関数の極限	数Ⅲ	円板をそれに平行な軸で半回転するときの通過領域の体積	やや難
		5	微分法，対数不等式	数Ⅲ・数Ⅱ	$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ の証明	標準
		6	ベクトル，内積，平面図形，三角関数，和積公式	数B・数A・数Ⅱ	正三角形の3頂点から中心方向へ向かった点が最も近づく条件	難
2008	文	1	整式の微分，整式の積分，解と係数	数Ⅱ	2次関数の定積分値が与えられるとき，他の積分の最大値	標準
		2	確率	数A	最初に白黒各2枚のカードを持ち，取り出したカードを異なる色に代える n 回の操作の後4枚とも同じ色である確率	標準
		3	軌跡，平面図形，三角比	数Ⅱ・数A・数Ⅰ	A，B，C が定点のとき ∠APC＝∠BPC である点Pの軌跡	難
		4	数列，漸化式，整数	数B・数Ⅰ	p を含む連立漸化式についての証明	やや難
	理	1	一次変換，数列，不等式と領域，数列の極限	数C・数B・数Ⅱ・数Ⅲ	直線の移動．移動領域 D_0，D_1，D_2，…すべてに含まれる領域	標準
		2	確率	数A	白黒2種類のカードを4枚または6枚もっている．取り出したカードを異なる色に代える（**文科第2問**を小改）	標準
		3	ベクトル，空間図形，整式の積分，体積	数B・数Ⅱ・数Ⅲ	正八面体の対面の重心を軸に回転するときの体積を求める	難
		4	軌跡，微分法	数Ⅱ・数Ⅲ	放物線上の定長線分の中点の y 座標の最小値	標準
		5	数列，整数	数B・数Ⅰ	n 桁の数 111 … 111 に関する問題	やや難
		6	積分法	数Ⅲ	媒介変数で表わされた曲線 $(\cos 2t,\ t\sin t)$ が囲む図形の面積	標準
2007	文	1	不等式と領域，整式の積分	数Ⅱ	放物線と絶対値付放物線の囲む面積を求める	やや易
		2	数列，平面図形	数B・数A［数A］	円を直径の和がもとの直径と等しい2円で置換えることをくり返す	標準
		3	整数	数Ⅰ	$5m^4$ の下2桁として現れるすべての数	標準
		4	確率	数A	ブロック積み，笑点の座布団のよう	標準
	理	1	整式，整数	数Ⅱ・数Ⅰ	$(1+x)^kP(x)$ の下 n 次の係数が整数なら $P(x)$ も下 n 次の係数が整数であることの証明	標準
		2	数列の極限	数Ⅲ	相似な三角形をつなげた螺旋の長さの極限を求める．対数螺旋の長さ	標準
		3	不等式と領域	数Ⅱ	放物線上にある線分を 1：2 に内分点の存在範囲	標準
		4	行列，数列	数C・数B［数C・数A］	スペクトル分解．$A_k=\begin{pmatrix}k&0\\1&k+1\end{pmatrix}$ の積を求める	標準
		5	**文科第4問**と同じ			標準
		6	積分法	数Ⅲ	積分不等式の証明．log 2 の近似値の証明	やや難
	後理	1	微分法，積分法，ベクトル，内積	数Ⅲ・数B	$xy^2=4$ の接線と交点で作る三角形の面積，外接円の面積を求める．	やや易
		2	行列，数列の極限	数C・数Ⅲ	対称行列の変換，極限	やや難
		3	数列，数学的帰納法	数B［数A］	奇数，偶数で与えられた条件をみたす数列についての証明	難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
2006	文	1	三角比	数Ⅰ	円に内接する四角形．半径と 2 辺が与えられて残り 2 辺の長さを求める	標準
		2	確率	数A	直前と同じ記号が出る確率が与えられる試行をくり返す	標準
		3	整数，式と証明	数Ⅰ・数Ⅱ	$x^n+y^n+z^n=xyz$，$(n=1,\ 3)$ となる正整数の組	標準
		4	整式の微分，絶対値を含む関数，三角関数，倍角公式	数Ⅱ・数Ⅰ	$\lvert x+1\rvert^3+\lvert x-\cos 2\theta\rvert^3+\lvert x-1\rvert^3$ の最小値	標準
	理	1	平面座標，ベクトル	数Ⅱ・数B	ベクトル漸化式，3 項が円周上なら次も円周上にあることの証明	標準
		2	確率	数A	直前と同じ記号が出る確率が与えられる試行（**文科第 2 問**を小改）	標準
		3	図形の移動	数Ⅱ	対称移動と法線の関係に関する問題	やや難
		4	整数，式と証明	数Ⅰ	$x^2+y^2+z^2=xyz$ となる正整数の組（マルコフ数；**文科第 3 問**と似而非）	やや難
		5	数列の極限	数Ⅲ	漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ で与えられる数列について $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k$，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ を求める	やや難
		6	微分法，積分法	数Ⅲ	$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^x)}{e^{2x}-1}$ の逆関数の定積分	やや難
	後理	1	微分法，一次変換	数Ⅲ・数C	パラメータで表された放物線の回転．グラフの概形の図示	易
		2	積分法，空間図形	数Ⅲ・数B	線分を x 軸回転．できた図形を y 軸回転してできる体積の最大値を求める	標準
		3	数列	数B［数A］	累乗和の公式の一般化に関する問題	難
2005	文	1	整式の微分，整式の積分，2 次関数，	数Ⅱ・数Ⅰ	場合分けのある関数の積分を最小にするときの条件の証明	やや易
		2	整数	数A	a^2-a が 10000 で割り切れる 4 桁以内の自然数を求める	標準
		3	2 次方程式	数Ⅰ	係数に条件がついた複 2 次方程式の解の存在範囲	やや難
		4	確率	数Ⅰ	途中でやめる事が許されたゲームに勝つ確率	標準
	理	1	微分法，数列，漸化式	数Ⅲ・数A	$\dfrac{\log x}{x}$ の n 次導関数の一般式を求める	標準
		2	複素数平面	数B	$w=z^2-2z$ なら $\lvert z\rvert\leqq\dfrac{5}{4}$ となる $\lvert w\rvert$ が最大となる w の値を求める	難
		3	微分法，数列，漸化式，数列の極限	数Ⅲ・数A	$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}x_n\{1+e^{-2(x_n-1)}\}$ で定められる x_n の極限が 1 であることの証明	標準
		4	**文科第 2 問**と同じ			標準
		5	**文科第 4 問**と同じ			標準
		6	積分法，体積	数Ⅲ	2 円柱の共通部分を円柱でくりぬく体積を求める	やや難
	後理	1	微分法	数Ⅲ	三角形の面積 2 等分線分の最小値の最大値	やや難
		2	確率，期待値	数Ⅰ	くり返されるゲームで得点の期待値を最大にする戦略	標準
		3	微分法，積分法	数Ⅲ	2 重円のうち 2 平行線で挟まれた部分の面積を最大にする場合	やや難
2004	文	1	図形と方程式	数Ⅱ	1 辺の傾きが与えられ放物線に内接する正三角形	標準
		2	不等式と領域	数Ⅱ	2 つの放物線で囲まれた領域における $x+y$ の最大・最小	標準
		3	整式の微分	数Ⅱ	$f(x)$ が 3 次式のとき，$f(f(x))=0$，$f(f(f(x)))=0$ の実解の個数	やや難
		4	確率，数列，漸化式	数Ⅰ・数A	表裏白黒の 3 枚の板を $\dfrac{1}{3}$ の確率で 1 枚裏返す	標準
	理	1	**文科第 1 問**と同じ			標準
		2	整数	数A	平方数の下 2 桁，下 4 桁についての問題	やや難
		3	積分法	数Ⅲ	内擺線（サイクロイド）（10：3）の 1 つの弧と円が囲む部分の面積	やや難
		4	整式の微分，数列	数Ⅱ・数A	$f(x)$ が 3 次式のとき，$f\circ f\circ\cdots\circ f(x)=a$ の実解の個数（**文科第 3 問**の一般化）	標準
		5	整式の微分，整式の積分，体積	数Ⅱ・数Ⅲ	2 球の和集合の体積を V，中心距離を r とする．$V=8$ のとき r の近似値を計算	やや易
		6	確率，数列，漸化式	数Ⅰ	表裏白黒の 3 枚の板を $\dfrac{1}{3}$ の確率で 1 枚裏返す（**文科第 4 問**を改）	標準
	後理	1	複素数平面，数列，数列の極限	数B・数A・数Ⅲ	複素数の等比数列の和になる図形．その極限	標準
		2	数列，整数	数A	2 進法 3 桁で定義する関数によって定義される数列	やや難
		3	図形と方程式，積分法	数Ⅱ・数Ⅲ	外接する 2 円外にある正方形が通過し得ない部分の面積	やや難

年度	文理	番号	範囲	科目	内容	難易
2003	文	1	2次関数，整式の積分	数Ⅰ・数Ⅱ	条件付，2次関数についての積分の最小値	標準
		2	不等式と領域	数Ⅱ	4つの1次不等式で与えられた領域における $x+y$ の最小値	標準
		3	数列，漸化式，数学的帰納法，解と係数の関係	数A・数B	$x^2-4x+1=0$ の2解 α，$\beta(\alpha>\beta)$ についての $\alpha^n+\beta^n$ が正整数であることの証明．α^{2003} の整数部分の1位数．	やや難
		4	確率，数列，漸化式	数Ⅰ・数A	サイコロ，出た目の数で割った余りを順次 X_n とする．最初17，$x_n=1$ となる確率	やや難
	理	1	2次関数，整式の積分	数Ⅰ・数Ⅱ	条件付，2次関数の最小値（**文科第1問**の条件緩和）	標準
		2	複素数平面	数B	2点A，Bを $\dfrac{\pi}{4}$ に見込む複素平面上の点P．OPが最大になる点Pの位置	標準
		3	積分法，体積，立体図形	数Ⅲ	円錐と円柱の共通部分の体積	やや難
		4	数列，解と係数の関係	数A・数B	$x^2-4x-1=0$ の2解 α，$\beta(\alpha>\beta)$ について $\alpha^n+\beta^n$ の漸化式，β^3 以下の最大数，α^{2003} の整数部分の1位数	標準
		5	確率，数列の極限	数Ⅰ・数Ⅲ	サイコロ出た目の積 X_n が5，4，20で割り切れる確率	標準
		6	三角比，式と証明	数Ⅰ・数A	$\pi>3.05$ の証明	やや難
	後理	1	微分法，積分法，数列の極限	数Ⅲ	$\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の回転体の体積を n 等分．両端の切断面の x 座標の極限	標準
		2	双曲線，数列の極限，整数	数C・数A	直線 $y=\sqrt{p}x$，双曲線 $y^2-px^2=q$ に限りなく近い格子点が存在することの証明	やや難
		3	数列，不等式の証明	数A	$x_{n+2}-a_{n+1}x_{n+1}+x_n=0$ となる数列のとき x_n の条件，不等式証明	難
2002	文	1	2次関数，三角関数	数Ⅰ・数Ⅱ	2放物線が異なる2交点をもつ条件（三角関数の不等式）	やや易
		2	整数，剰余，数学的帰納法	数A	x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余り a_nx+b_n．a_n，b_n は互いに素であることの証明	標準
		3	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ	2放物線に関する5条件の下で $\int_1^0 f''(x)^2dx+\int_1^0 g''(x)^2dx$ の最小値	標準
		4	論理，論証問題	数A	赤青2色の玉が輪を作るとき異なる色が隣り合うのは偶数箇所の証明	標準
	理	1	2次関数，三角関数	数Ⅰ・数Ⅱ	2放物線が異なる2交点をもつ条件（**文科第1問**を一般角に）	やや易
		2	**文科第2問**と同じ			標準
		3	空間図形，整式の積分，体積	数Ⅱ	OPを直径の両端とする球と単位球の交平面とAの距離がPとの距離以上となる点Pの存在範囲の体積	やや難
		4	微分法	数Ⅲ	$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ の法線の y 切片の通過範囲	標準
		5	積分法，区分求積，体積，空間図形	数Ⅲ・数B	$x+y=1$，$z=0$ 上の点Pと z 軸上の点Qが $\mathrm{PQ}=1$ となるように動くときのPQが作る立体の体積	標準
		6	写像，整数	数A	同じ置換（シャッフル）をくり返す．もとに戻るまでの回数	やや難
	後理	1	微分法，積分法，関数の極限	数Ⅲ	$y=xe^{-x^3}$ と x 軸で囲む部分の x 軸回転の体積，曲線と $y=$ 極大値 と y 軸が囲む部分の y 軸回転の体積	標準
		2	空間図形，微分法	数B・数Ⅲ	3つの長方形の頂点が作る20面体の体積の最大値	やや難
		3	数列，数学的帰納法，数列の極限，関数の合成	数Ⅲ	テント型関数による漸化式の収束条件	難
2001	文	1	空間図形	数Ⅰ	$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\mathrm{CD}=1$ の四面体の外接球の半径	標準
		2	整式の微分	数Ⅱ	$\mathrm{A}(t^2,\ 0)$，Bは y 軸上をCまで以後 x 軸に平行に動く．A，Bと定点 $\mathrm{C}(0,\ 3)$ で作る三角形ABCの面積 $S(t)$，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値	やや易
		3	場合の数，数列，漸化式	数Ⅰ・数A	コインを投げて2点を動かす．両方または一方のみ動かす．2点の距離，常に1以内	やや難
		4	論理	数A	黒石が1個多い列から黒石の右の石を取り除くと白黒同数になる証明	難
	理	1	**文科第1問**と同じ			標準
		2	積分法	数Ⅲ	三角関数に関する積分方程式，三角関数の定積分で係数決定	標準
		3	微分法	数Ⅲ	O，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$．△OPQとOP，OQ，$y=\dfrac{1}{x}$ で囲まれる部分の面積比	標準
		4	複素数平面	数B	漸化式 $a_1=1$，$a_2=i$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ で定まる点 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ が同一円周上にある証明	標準
		5	論理	数A	ビーカーの水を最も少ないものをその次に少ないものに入れることをくり返す	やや難
		6	数列，漸化式，確率，期待値	数A・数Ⅰ	**文科第3問**の上に回数に期待値を問う	難
	後理	1	数列の極限，不等式	数Ⅲ・数Ⅰ	任意 n に対して $n-\sum_{k=2}^{m}\dfrac{k}{\sqrt{k^2-1}}\geqq\dfrac{i}{10}$ となる最大整数 i	難
		2	確率，平面図形	数Ⅰ・数A	直線または円が無数にある平面上に，単位円を落としたとき交わる確率	やや難
		3	数列，数列の極限	数A・数Ⅲ	角 θ が x の2次関数のとき，十分大きな x に対して x の変化に対して単位円の定弧を通過する x の範囲の比の極限	難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　容	難易
2000	文	1	整式の微分，立体図形	数Ⅱ・数B	$0\leqq x\leqq 1$ となる x で定められた2つの円錐台の体積の和の最大値	標準
		2	不等式と領域，関数	数Ⅱ・数Ⅰ	2変数関数 $1-ax-by-axy(-1\leqq x\leqq 1,\ -1\leqq y\leqq 1)$ の最小値が正である $(a,\ b)$ の範囲図示	標準
		3	確率，数列，漸化式	数Ⅰ・数A	正四面体の頂点から隣の頂点へ等確率で移動．n 秒後に存在する確率	やや易
		4	複素数平面	数B	複素数平面上での原点から直線 $\mathrm{P}(\alpha)\mathrm{Q}(\beta)$ へ下した垂線の足を $\mathrm{R}(w)$ とする．$w=\alpha\beta$ である条件	やや難
	理	1	二次曲線，楕円，整式の微分	数C・数Ⅱ	直角二等辺三角形に内接する楕円の面積の最大値	やや易
		2	**文科第4問**と同じ			標準
		3	数列，数列の極限	数A・数Ⅲ	$0,\ \dfrac{a}{n},\ \dfrac{2a}{n},\ \cdots,\ a$ で定義された $f_n(x)$ の $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=g(x)$ とする $y=g(x)$ のグラフ図示．	やや難
		4	微分法，方程式への応用	数Ⅲ	動点Pが動線分QRにぶつからない条件，一度だけぶつかる条件	やや難
		5	個数	数Ⅰ	各桁の数字が異なり，どの2桁の数字の和も9にならない整数の個数	標準
		6	行列，積分法，体積	数C・数Ⅲ	3×3 行列の積でつくられる空間を動く点が作る立体の体積	標準
	後理	1	整式，数列	数A	$P_k(0)=0,\ P_k(x)-P_k(x-1)=x^{k-1}$ をみたす k 次多項式	難
		2	積分法，体積，数列の極限	数Ⅲ	多重バウムクーヘン積分．体積の極限	やや難
		3	確率，期待値，整式の微分	数Ⅰ・数Ⅱ	5人がテーブルにコインを1枚または2枚おく．5番目の人が7枚目のコインをおく確率	標準
1999	文	1	三角関数，加法定理	数Ⅱ	三角関数の定義と，加法定理の証明	標準
		2	複素数平面	数B	$2z,\ \dfrac{2}{z}$ の実部が整数 $\lvert z\rvert\geqq 1$ をみたす z の図示	標準
		3	図形と方程式	数Ⅱ	直線 $y=x-c$ について対称な2放物線上の点の距離の最小値	標準
		4	確率	数Ⅰ	四面体の回路を電流が流れる確率$\left(\text{各辺の通電確率 }\dfrac{1}{2}\right)$	やや難
	理	1	**文科第1問**と同じ			やや易
		2	複素数，数列，関数の極限	数B・数A・数Ⅲ	複素漸化式 $z_1=1,\ z_{n+1}=(3+4i)z_n+1,\ \lvert z_n\rvert\leqq r$ となる項の個数を $f(r),\ \dfrac{f(r)}{\log r}$ の極限を求める	標準
		3	確率	数Ⅰ	四面体の回路を電流が流れる確率（**文科第4問**の通電確率を p に）	標準
		4	空間図形	数B	単位球内にあり，それぞれ xy 平面，xz 平面内にある円板 A，B が，1点のみ共有するとき半径の和の最大値を求める	やや難
		5	二項係数	数A	${}_m\mathrm{C}_n(1\leqq n\leqq m-1)$ がすべて偶数となる m，すべて奇数となる m を求める	難
		6	積分法，不等式の証明	数Ⅲ	$\int_0^{\pi}e^x\sin^2x\,dx>8$ の証明	難
	後理	1	積分法，関数の連続	数Ⅲ	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx$ の値を求める	標準
		2	図形と方程式，整数	数Ⅱ・数A	どの3点も一直線上にない相互の距離が整数である格子点群の存在証明	やや難
		3	複素数平面，数列，平面図形	数B，数A・数Ⅰ	回転実数倍のくり返しで台形が平面を埋め尽くす条件	難
1998	文	1	整式の微分	数Ⅱ［基解］	$(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大・極小の差の最小値	標準
		2	不等式と領域，不等式の証明	数Ⅱ・数A［数Ⅰ］	O，$\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ を頂点とする三角形が鋭角三角形となる条件，そのとき整数がらみの不等式が成り立つことを証明	やや難
		3	三角関数，数列	数Ⅱ・数A［基解］	三角関数で表わされた，パイ粉ね変換（2重テント関数）	難
		4	空間図形	数B［代幾］	正四面体に正四面体をつけ，xz 平面で切った体積	やや難
	理	1	文科第1問と同じ			標準
		2	数列，格子点，数列の極限	数A・数Ⅲ［基解・微積］	正四面体に含まれる空間の格子点の個数	標準
		3	数列，漸化式，数学的帰納法，数列の極限	数A・数Ⅲ［基解・微積］	2円 C_n，C_{n+1} と x 軸に接する円 C_{n+2} を作る	難
		4	整式の微分，整数	数Ⅱ・数A［基解・旧数Ⅰ］	3次関数 $f(x)$ について，$f(k)$ の整数部分 $[f(k)]$ $(0\leqq k\leqq 36n$，k は整数$)$ の個数	難
		5	ベクトル，内積，数列，数列の極限	数B・数A・数Ⅲ［代幾・基解・微積］	ベクトルの漸化式，実は2ベクトルの垂直方向への正射影	標準
		6	積分法	数Ⅲ［微積］	正四角すいを円柱でくり抜いた残りの体積	やや難
	後理	1	ベクトル，軌跡，一次変換	数B・数Ⅱ・数C［数Ⅰ・代幾］	2円上に頂点がある直角二等辺三角形の残り頂点の存在範囲	やや難
		2	微分法，積分法	数Ⅲ［微積］	$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のとき $y=\sin x+\sin(x+\theta)$ の通過領域	やや難
		3	個数，整数，数列	数Ⅰ・数A［確統・数Ⅰ・基解］	頂点と辺を加えてできるグラフに関する問題．史上最強の問題	難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1997	文	1	数学的帰納法，整数，高次方程式	数A・数B［基解・数Ⅰ］	$a^2+b^2=16$，$a^3+b^3=44$ から a^n+b^n が4の倍数であることを示す	標準
		2	平面座標，複素数，複素数平面	数Ⅱ，数B［数Ⅰ・代幾］	座標軸上に2頂点がある正三角形が単位正方形内にある条件	標準
		3	空間ベクトル	数B［代幾］	$\lvert\overrightarrow{\mathrm{PA}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PB}}\rvert=r\lvert\overrightarrow{\mathrm{PO}}\rvert$，$\lvert\overrightarrow{\mathrm{PO}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PC}}\rvert$ となるPが2個存在する r の条件	やや難
		4	整式の微分	数Ⅱ［基解］	t で与えられた2点A，Bを通る直線の通過範囲を求める	標準
	理	1	文科第2問と同じ			標準
		2	2次関数，整数	数Ⅰ・数A［数Ⅰ］	実数 a と自然数 n で与えられる2次不等式がすべての整数 m に対して成り立つ条件	やや難
		3	ベクトル，内積，関数の極限	数B・数Ⅲ［代幾・微積］	$\lvert\overrightarrow{\mathrm{PA}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{PB}}\rvert=r\lvert\overrightarrow{\mathrm{PO}}\rvert$ となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値，最小値に関する極限（文科第3問とはかなり異なる）	標準
		4	整数，平面図形	数A［数Ⅰ］	正三角形の鏡による反射	やや難
		5	積分法，体積	数Ⅲ［微積］	$y^2\leqq x^2(1-x^2)-a$ を y 軸回転してできる立体の体積	やや難
		6	整式の微分，整式の積分	数Ⅱ［基解］	$y=\frac{8}{27}x^3$，$y=(x+a)^2$ の x 軸以外の共通接線と $y=(x+a)^2$ で囲まれる図形の面積	標準
	後理	1	数列，数列の極限	数A・数Ⅲ［基解・微積］	正三角形が敷き詰められた図形を，次々に塗りつぶす	やや難
		2	微分法	数Ⅲ［微積］	$y=\frac{1}{\lvert x\rvert}$ の2接線が作る三角形の面積のとりうる範囲	やや難
		3	確率，微分法	数Ⅰ・数Ⅲ［確統・微積］	1以上 N 以下の2数を選んだとき下4桁が一致する確率	やや難
1996	文	1	行列	代幾	$X^2-2X+aE=O$ をみたす $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ 型行列を求める	やや易
		2	連立不等式，2次方程式の理論	数Ⅰ	与連立不等式をみたす正の s，t が存在するとき，2次方程式が $-1<x<1$ の解をもつこと	標準
		3	図形と方程式，最大・最小	数Ⅰ	正方形が中心を円に沿って平行移動するとき原点との距離の最大値	標準
		4	整式の積分，体積	基解	線分を z 軸回転してできる曲面と2面で囲まれる図形の体積	標準
	理	1	一次変換，二次曲線	代幾	$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ による円の像が定直線 $x=\frac{2}{3}$ に接するとき (a, b) の軌跡	やや易
		2	文科第2問と同じ			標準
		3	空間図形	代幾	球面から立方体の頂点が見える条件．球面上から少なくとも何個見えるか	標準
		4	確率，期待値，数列の極限	確統・微積	サイコロをくり返し投げるとき最後に出た目が最大値である目の期待値	やや難
		5	積分法	微積	回転体を水に沈め水面上昇の関数が与えられているとき回転体の側面の関数を求める	やや難
		6	楕円，平面座標，整式の微分	代幾・基解	原点を通る楕円が単位円に含まれるとき楕円の面積の最大値	標準
	後理	1	場合の数	確統	n 個のボールを3つの箱に入れる方法（区別があるかないかで分類）．4問	標準
		2	ベクトル，内積，立体図形	代幾	合同四面体の体積を三角形の3辺の長さで表す	標準
		3	微分方程式	微積	横倒しになった石油タンクから石油が流出するのに要する時間	やや難
1995	文	1	2次不等式	数Ⅰ	$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ が常に成り立つ k の最小値	標準
		2	ベクトル，平面図形	代幾	交互に長さの異なる等角八角形の面積	やや易
		3	整式の微分	基解	$y=-x^3+ax$ の接線と原点と接点を結ぶ線分と，y 軸の囲む三角形の面積の最小値	標準
		4	整式の積分，体積	基解	半球の器を傾けて水を注ぐ．角度を求める	標準
	理	1	文科第1問と同じ			標準
		2	積分法，不等式の証明	微積・数Ⅰ	定積分で与えられた不等式の証明	標準
		3	数列	基解	$2\times n$ の部屋を 2×2，1×2 のタイルで敷きつめる並べ方の個数を求める	やや難
		4	整数，微分法	数Ⅰ・微積	n を N の約数として $n+\frac{N}{n}$ の最小値．$N=2^k$，$N=7!$ のとき	やや難
		5	確率，論証問題	確統	サイコロを投げ k 回目に東西南北方向へ $\frac{1}{2^k}$ だけ移動するか動かない	標準
		6	二次曲線，双曲線，微分法	代幾・微積	双曲線の接線と漸近線が囲む三角形の面積	標準
	後理	1	二項係数，数列，漸化式	確統・基解	パスカルの三角形について2つおきの和	やや難
		2	平面図形，微分法	数Ⅰ・微積	交る2円板の和集合内に3頂点をもつ三角形の面積の最大値	標準
		3	確率，期待値	確統	A，Bがカードを2枚ずつもち，1枚ずつAから順に出して得点を決める	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1994	文	1	対数，不等式と領域，最大・最小	基解・数Ⅰ	対数で与えられた領域における $y=sx$ の最大・最小	標準
		2	平面座標	数Ⅰ	$\mathrm{P}(p,\ r)$，$\mathrm{Q}(q,\ s)$ のとき $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=\|p-q\|+\|r-s\|$ とする，$d(\mathrm{P},\ \mathrm{A})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{B})$ となる点の存在範囲	やや難
		3	一次変換，三角関数，合成公式	代幾・基解	$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1+2a\end{pmatrix}$，$\|A\vec{u}\|$ の最大値・最小値に関する不等式（$\vec{u}$ は単位ベクトル）	標準
		4	数列，整式の微分，整式の積分	基解	$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt$ から $f_n(x)$ を求める．$0<x<1$ に $f_n(x)=0$ の解がただ1つ存在する証明	標準
	理	1	整式の微分，方程式へ応用	基解	$x^n+x^{n-1}+\dfrac{x^{n-2}}{2}+\dfrac{x^{n-3}}{3!}+\cdots=0$ の解（$n=4,\ 5$）	標準
		2	三角関数，加法定理，数列，数学的帰納法	基解	$a=\sin^2\dfrac{\pi}{5}$，$b=\sin^2\dfrac{2\pi}{5}$，$(a^{-n}+b^{-n})(a+b)^n$ は整数であることの証明	標準
		3	積分法，非回転体の体積	微積	円錐 $x^2+y^2\leqq z^2$ を放物面 $z^2=x$ で切ってできる図形の体積	やや難
		4	関数方程式，微分方程式	微積	$f_n(x)=f(x)+\int_0^c f_{n-1}(t)\,dt$, $xf(x)=\int_0^x f(t)\,dt+x\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt$	やや難
		5	確率，整数	確統・数Ⅰ	$E=2P(a+b\leqq 4)+P(a<b)$，1～6が不均等に出る．確率が整数の逆数であるときの期待値	やや難
		6	軌跡，不等式と領域	数Ⅰ	$\mathrm{Q}(a,\ a^{2+1})$，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ となることがある領域（**文科第2問**の類題）	やや難
	後理	1	整数	数Ⅰ	$\sum_{k=1}^{m}a_k k!(0\leqq a_k\leqq k)$ はすべての整数を表すことの証明．$\dfrac{n!}{5}$ の表示	標準
		2	積分法，サイクロイド，曲線長	微積	円を正方形内を転がしながら移動する．1点の軌跡の長さのとりうる範囲	標準
		3	確率	確統	2段階の検査過程に所要する日数の確率	標準
1993	文	1	整式の微分，極値，2次方程式の理論	基解・数Ⅰ	3次関数 $f(x)$ が $-1\leqq x\leqq 1$ に極値をもつ条件	やや易
		2	数列，漸化式，整数	基解・数Ⅰ	$a_1=1$，$a_2=3$ のとき $a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n$ の項が偶数になる条件	やや易
		3	空間図形	代幾	球面の $x\geqq\dfrac{1}{k}$，$y\geqq\dfrac{1}{k}$，$z\geqq\dfrac{1}{k}$ の部分から xy 平面への極投影	標準
		4	整式の積分	基解	4次方程式 $x^4-2x^2-1+t=0$ の（最大解と最小解の差）の積分	標準
	理	1	空間図形，関数の極限	代幾・微積	等面四面体の等面が直角三角形に近づく極限	やや難
		2	数列，漸化式，整数	基解・数Ⅰ	**文科第2問**の漸化式で項が偶数になる条件，10の倍数になる条件	やや易
		3	軌跡，二次曲線	代幾	2つの障壁がある平面上で2点P，Qから折れ線で結ぶ最短コースの長さが等しくなる点Rの軌跡	やや難
		4	整式の積分	基解	$\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^n+px+q)^2\,dx$ の最小値，n が奇数か偶数かで場合分け	標準
		5	確率，数列，漸化式，数列の極限	確統・基解・微積	0, 1からなる列をくり返して書き写す．n 回写してもとと一致する確率	標準
		6	微分法，関数の極限，速度・加速度	微積	$(2\cos t+\cos 2t,\ \sin 2t)$ の軌跡，速度ベクトル $\|\vec{v}\|$ の最大値，2回以上通過する点での $\vec{v}$	標準
	後理	1	一次変換	代幾	原点を中心とする正 n 角形 P を正 n 角形 P に移す1次変換	標準
		2	点と直線の距離，三角関数	代幾・基解	異なる3直線で3頂点までの距離の2乗の和が最小になるならそれは正三角形	やや難
		3	整式の積分，体積	基解	回転放物面の容器に球を沈めるとき，あふれ出る水の体積を最大にする	標準
1992	文	1	複素数，2次方程式の理論	数Ⅰ	2次方程式の解の実部がすべて負となる条件．判別式を考えるとかえって難しい	やや難
		2	整式の微分，最大最小	基解	甲乙が出資したとき乙の利潤分配額を最大にする出資額を求める	やや難
		3	数列，漸化式，フィボナッチ数列	基解	0, 1からなる列を1, 10で置き換えて新しい列を作る桁数，01の個数を求める	やや難
		4	数列，整数，格子点	基解	格子点からなる三角形の辺上の格子点の個数に関する問題	やや難
	理	1	微分法，積分法，関数の極限	微積	$y=\log x$ と x 軸，$x=a(a>1)$ で囲まれた図形に内接する四角形，面積比．その極限を求める	標準
		2	**文科第4問**と同じ			やや難
		3	空間図形，不等式の証明	代幾・数Ⅰ	半径1の球に内接する四面体に内接する球の半径に関する不等式	やや難
		4	空間図形，三角関数，合成公式，不等式と領域，展開図	代幾・基解	円柱と楕円柱の交わりの展開図	やや難
		5	微分方程式，速度・加速度	微積	曲線上を動く動点の速さが与えられているとき，点の動き	標準
		6	確率，ゲームの理論	確統	じゃんけんで進む歩数が決まるとき出す手の最適比率を求める	標準
	後理	1	微分法，積分法	微積	$y=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2x}$ と $y=x$，$x=1$ の囲む図形の x 軸回転体の体積	やや難
		2	空間図形	代幾	空間の捩れ四角形の内角の和が 2π 以下であることの証明	標準
		3	整式の割り算，整数	数Ⅰ	$(1+x+\cdots+x^l)(1+x^2+\cdots+x^{2m})(1+x^4+\cdots+x^{4n})=1+x+\cdots+x^{99}$ となる正の整数 l，m，n	標準

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1991	文	1	整式の微分	基解	x^3-2x^2-3x+4 の $-\frac{7}{4}\leqq x\leqq 3$ における最大・最小．計算が面倒	やや難
		2	空間座標，二次曲線，軌跡	代幾	空間で点と放物線を結ぶ直線と xy 平面の交点の軌跡	標準
		3	平面図形，関数	数Ｉ	長方形内の5つの等円の共通部分がないように面積最大化	標準
		4	空間図形，整式の積分，体積	代幾・基解	正四角錐と球面が辺で接するとき共通部分の体積	標準
	理	1	確率，数列，漸化式	確統・基解	正四面体を転がして元の面と同じ面が平面に接する確率	やや易
		2	空間図形	代幾	光源が楕円周上を動くとき長方形の影の通過範囲の図示とその面積を求める	標準
		3	微分法	微積	3次方程式 $x^3-3x-p=0$ の最大解と最小解の積 $f(p)$ の最小値を求め $f(p)$ のグラフをえがく	標準
		4	数学的帰納法	基解	自然数 n について $\sin n\theta=p_n(\tan\theta)\cos^n\theta$, $\cos n\theta=q_n(\tan\theta)\cos^n\theta$ と書けることの証明	標準
		5	平面図形，整数	数Ｉ	格子点を中心とする半径 r の円のどれかと傾き $\frac{2}{5}$ の直線が交わる r の最小値	標準
		6	関数方程式	微積	積分と原点を通る2直線と曲線が囲む面積の比が一定となる $f(x)$ の決定	やや難
	後理	1	整数，微分法	数Ｉ・微積	$a^b=b^a$ となる整数 a，b を求める，$3^x=x^3$ となる有理数は3のみであることの証明	やや難
		2	平面図形	数Ｉ	2点A，Bで交わる2円に直交する円の中心は直線AB上にあることの証明	標準
		3	微分法，最大・最小，三角比，三角関数，和積・積和公式	微積・数Ｉ・基解	半円に内接する2つの直角三角形の和集合の面積の最大値を求める	標準
1990	文	1	3次方程式	数Ｉ	ガロアの理論，3次方程式の1解 α の2次式で他解を表す	標準
		2	整式の微分，高次方程式，整数	基解・数Ｉ	極値を与える x の範囲から4次方程式が異なる4実解をもつ整数係数を求める	標準
		3	立体図形	代幾	1辺が1の正八面体が1辺が1の正方形の穴を通過するかどうか．証明を要求	やや易
		4	整式の積分，体積，三角関数	基解	直角二等辺三角形．それに頂点または1辺で接する軸で回転して体積の最大・最小	やや難
	理	1	無限級数	微積	無限級数 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(2k+1)}}$ の比の極限	やや易
		2	整式の微分	基解	3次関数 $k(x), f(x)$ について $h(\pm1)=\pm1, \lvert h(x)\rvert\leqq1(\lvert x\rvert<1)$．$\lvert f(x)\rvert<1(\lvert x\rvert<1)$ なら $\lvert f(x)\rvert<\lvert h(x)(\lvert x\rvert\geqq1)$ の証明	やや易
		3	**文科第3問**と同じ			やや易
		4	一次変換，数列の極限	代幾・微積	回転等比縮小する図形の和集合の面積の極限	標準
		5	二次曲線，楕円	代幾	楕円に内接し円に外接する平行四辺形が常に存在する楕円の条件	やや難
		6	確率，数列の極限	確統・微積	サイコロの目が作る無限小数が α より小さくなる確率	やや難
	後理	1	直線の方程式，面積，積分法	数Ｉ・微積	正方形を 1：3 に分割する線分の存在範囲の面積	標準
		2	一次変換，最大・最小	代幾	周長が6の等角六角形の最大面積	標準
		3	数列，漸化式，場合の数	基解・確統	シルピンスキーのガスケットの経路	やや難
1989	文	1	2元3次連立方程式，図形と方程式	数Ｉ	2曲線 $y=k(x-x^3)$，$x=k(y-y^3)$ の $x\neq y$ の交点が存在する k の条件	標準
		2	図形と方程式，整式の微分	数Ｉ・基解	a で表された2放物線の共通接線の接点が作る四角形の面積の最小値	標準
		3	複素数，数学的帰納法	数Ｉ・基解	複素数の1次分数関数 $f(z)$ の n 個の合成関数 $f_n(z)$ に関する漸化式	やや難
		4	平面図形，面積，関数の極限（有限）	数Ｉ・基解	正三角形が向きを変えずに円に接しながら一周する．通過領域の面積	標準
	理	1	**文科第1問**と同じ			標準
		2	図形と方程式，関数の極限	数Ｉ・微積	放物線上に中心があり準線に接する円について面積比の極限	標準
		3	複素数，1次分数関数	数Ｉ	1次分数関数 $f(z)$ に対し $f_n(z)=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n\text{個}}(z)$ のとき $f_{10}(z)=f_5(z)$ となる条件（**文科第3問**と(1)共通）	やや難
		4	整数，桁，式の処理	数Ｉ	$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の桁数と1位数を求める．3^{21}（11桁，最高位1）が具体的に与えられている	やや難
		5	積分法，体積	微積	$0\leqq y\leqq\pi x^2\sin\pi x^2(0\leqq x\leqq1)$ の領域を y 軸回転．バウムクーヘン積分の評価	やや難
		6	確率，円順列，重複組合せ	確統	3個の赤玉と n 個の白玉を環状に並べる．$k+1$ 個以上白玉が連続しない確率	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1988	文	1	図形と方程式，二次曲線，楕円	代幾	動点と2定点との距離の和が等しくなる2点の位置から2直線間の距離を求める	やや易
		2	一次変換，不等式	代幾・数Ⅰ	像が何象限にあるかで，原像の象限を求める	標準
		3	空間図形，整式の積分，体積	代幾・基解	連立不等式で与えられた空間図形の体積を求める	標準
		4	整式の微分，整式の積分，面積，最小値	基解	2定点を共有する3次関数と放物線が囲む図形の面積の最小値	標準
	理	1	文科第2問と同じ			やや易
		2	空間図形，最大・最小	代幾	正四面体の正射影の面積の最大・最小	難
		3	整式の微分，3次方程式	基解	$y=x^3-x$ に接する平行移動した曲線が3本引ける領域	やや難
		4	数列，数列の極限	基解・微積	傾きが等比数列になる折れ線と y 軸に平行な直線が交わる条件	標準
		5	空間図形，整式の微分，三角関数	代幾・基解	回転放物面上に光源がある．xy 平面上の円の明るい部分とかげの部分の長さ	標準
		6	空間図形，整式の微分	代幾・基解	OA＝1，OB＝OC＝OD＝4 をみたす四面体ABCDの体積の最大値．	標準
1987	文	1	行列，3元2次連立方程式	代幾，数Ⅰ	行列の式 $X^2-4X+3E=O$ をみたす $X=\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$ について点 $(x,\ y)$ の存在範囲．	やや易
		2	整式の微分，整式の積分	基解	3次関数極大点における接線と曲線が囲む部分の面積	やや易
		3	2次関数	数Ⅰ	2次関数が区間［-1，1］で常に非負である点 $(a,\ b)$ の存在領域（京大とそっくり）	標準
		4	空間図形，整式の積分，体積	代幾・基解	5つの不等式で表された空間領域の体積．対称性がある．	やや難
	理	1	一次変換	代幾	$A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で $y=2x+1 \to y=-3x-1$ となるP→Qの∠POQ	やや易
		2	微分法	微積	放物線と双曲線 $y=\dfrac{1}{x}\,(x>0)$ が接するとき放物線の頂点の存在範囲（尖点がある曲線）	やや難
		3	空間座標，微分法	代幾・微積	(0, 0, 1) を中心とする半径1の球の接平面と座標軸の交点が作る三角形の面積の最小値	やや難
		4	空間座標，整式の積分，体積	代幾・基解	(1, 0, 1) と放物線 $x=0$，$z=1-y^2$ を結ぶ線分を x 軸回転してできる立体の体積の最小値	標準
		5	数列，不等式	基解・数Ⅰ	$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は単調減少列 $\{y_n\}=\{z_n\}$，$\sum_{j=1}^{h}(x_i-y_j)^2 \leqq \sum_{j=1}^{h}(x_j-z_j)^2$	やや難
		6	確率	確統	サイコロで正六角形に印をつける．印をつけた点で直角三角形を作れる確率 p_n，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log(1-p_n)$	やや難
1986	文	1	2次関数	数Ⅰ［数Ⅰ］	$2x^2-4ax+a+a^2$ の [0, 3] における最小値が0となる a の値	標準
		2	立体図形	代幾［数ⅡB］	AB＝x，AC＝AD＝BC＝BD＝5，CD＝4．x の範囲，四面体の体積の最大値	標準
		3	整式の積分	基解［数ⅡB］	任意の3次関数 $f(x)$ について常に $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=uf(s)+vf(t)$ となる s，t，u，v	標準
		4	一次変換	代幾［数ⅡB］	異なる2点を中心とする60°回転の合成．中心と回転角を求める	やや難
	理	1	平面座標，微分法	数Ⅰ［数Ⅰ］ 微積［数Ⅲ］	$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$xy \leqq 1$ に含まれる $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ を頂点とする三角形の面積の最大値	標準
		2	積分法，二次曲線，楕円	微積・代幾 ［数Ⅲ・数Ⅰ］	2つの楕円の共通部分の面積	標準
		3	ベクトル，内積	代幾［数ⅡB］	空間の平面を回転したとき法線ベクトルの y 成分の最大・最小	やや難
		4	2次方程式，不等式と領域	数Ⅰ［数Ⅰ］	係数の範囲が指定された2次方程式の大きい解の最大・最小	やや難
		5	確率	確統［数Ⅰ］	じゃんけんをしながらベンチを移動する確率．ベンチの端の特殊性が面倒	標準
		6	立体図形，二次曲線，楕円	代幾［数ⅡB］	円錐の容器を傾けて体積が $\dfrac{1}{2}$ になる角 α について $\tan\alpha$ を求める	やや難

年度	文理	番号	範　囲	科　目	内　　容	難易
1985	文	1	一次変換	代幾［数ⅡＢ］	正射影行列 A について点Ｐの A^3，$(I-A)^2$ による像をＱ，Ｒとするとき三角形 PQR の面積	やや易
		2	平面図形，２次関数	数Ⅰ［数Ⅰ］	正方形内の２つの折れ線上を等速で動く２点間の距離の最小値	標準
		3	整式の積分，整式の微分	基解［数ⅡＢ］	$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=0$，$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$，$G(x)=\int_{-1}^{x}F(x)\,dx$ のとき $G(x)$ の極値	やや難
		4	空間図形	代幾［数ⅡＢ］	Ｐと２平面について対称な点Ｑ，Ｒ．四面体 OPQR の体積	やや難
	理	1	微分法，積分法	微積［数Ⅲ］	$y=a\sin x$ を $y=1$ で分けた２つの部分の面積を S_1，S_2．S_2-S_1 の最大値を求める	標準
		2	三角関数，倍角公式，２次関数，最大・最小	基解［数ⅡＢ］ 数Ⅰ［数ⅠＢ］	円周上の線分 PQ の正射影 $\lvert\cos\theta-\cos 2\theta\rvert=l$ となる θ の個数	標準
		3	文科第４問と同じ			やや難
		4	一次変換，数列	代幾・基解［数ⅡＢ］	三角行列の n 乗．$f_n=3\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n{}^2+2\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_n{}^2+2\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n{}^2$ の最小値	やや難
		5	確率，数列，数学的帰納法	確統・基解［数Ⅰ・数ⅡＢ］	$P(X=n)=P(Y=n)=p_n$，$P(X+Y=n)=(n+1)p_{n+1}$ のとき $\sum_{n=0}^{\infty}np_n$ を求める	やや難
		6	空間図形，積分法，体積	代幾・微積［数ⅡＢ・数Ⅲ］	球の中心が三角形を描くとき，球の通過領域の体積	やや難