確率論講義ノート

中島 誠 [*]

2022 年度版

[*] nakamako@math.nagoya-u.ac.jp 理学部 A 棟 453

目次

まずはじめに注意することとして, このノートは名古屋大学における測度論的確率論の講義用に用意されたものである. 確率論を専攻することを考える学生はこのノート以外に各自で教科書を用意して勉強する必要がある. ただできるだけ誤魔化さないように書いているため, 気に留めないことにも触れているかもしれない.

確率を数学的に扱う試みは 16 世紀のカルダーノや 17 世紀のパスカルとフェルマーによって最初に行われたとされている. カルダーノは数学を用いて効率的に賭け事で儲けるための研究を行い, またパスカルとフェルマーは賭博師メレによって与えられた賭け事の問題を解決するために手紙のやり取りを行ったことをきっかけとして確率論の研究を始めた. このように確率論の初期は賭博との密接な関係があったが, その後統計と合わせて生命保険の保険料設定や遺伝学等にも使われるようになった. 彼らの作った確率論は離散的な内容であったが, 後にラプラスによって微積分を用いた確率論 (解析的確率論) が編み出された. これらの理論は現在では古典的確率論と呼ばれている.

この講義ノートでは古典的確率論とは異なる測度論的確率論と呼ばれる内容について扱う. 測度論はルベーグによって構築された理論であるが, これにより “物事の大きさ”(長さ, 面積, 体積など) は σ-加法族上の非負値集合関数 (測度) を用いることで数学的に自然に定義されることがわかった. コルモゴロフはこの測度論に基づいて確率論の公理を構成した. この理論構築をきっかけに確率論の研究は広がり, 伊藤清によって導入された確率積分は現在では数学だけにとどまらず, 数理ファイナンス, 物理などの分野でも使われている.

春学期の講義では確率空間, 確率変数, 独立性, 大数の法則, 中心極限定理を扱ったのち, 時間が許せばランダムウォークとその再帰性を扱う. 秋学期の講義では条件付き期待値, マルチンゲール, ブラウン運動, 確率積分, 確率微分方程式を扱う. ランダムウォークやブラウン運動は確率論において非常に重要な役割を担っているので, これらを理解することが確率論を理解することの第一歩である.

付録として確率論を学ぶ上で欠かせない測度論に関連する内容をまとめている. 講義では必要に応じて参照していく. ($*$ が付いている節や問は講義では扱わない予定の内容またはそれに関連するものである.

† 印は確率論の理論とは離れるが話題の一つとして書いているものであり, 詳細は気にせず読んで構わない.

十分注意をして作成したが誤字脱字はあるものと思われます. 気づかれた方は教えてください.

最後に 2016 年度版からの講義ノートの更新に際して岡山大学の河備浩司先生と福岡大学の江崎翔太先生から助言をいただきましたことに感謝いたします.

注意 0.0.1. 2021 年度版において講義内容が変わるためだいぶ加筆し, かなり分量が増えている. しかしまだまだ書いていないことも多い. マルコフ連鎖などは講義で扱う予定がないので書く機会はないかもしれない. マルコフ過程などについては確率微分方程式との関連で現れるので時間をみていずれ書くかもしれない.

講義では内容を選んで解説をしていく. 予習復習は欠かせないものであることを理解しておくこと.

参考文献

[1] P. Billingsley: Convergence of probability measures. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999 年

[2] R. M. Dudley: Real Analysis and Probability (Cambridge Studies in Advanced Mathematics) 2002 年

[3] R. Durrett: Probability: Theory and examples (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics), 第 4 版, 2010 年

[4] R. Durrett (竹居正登, 井出勇介, 今野紀雄: 訳) : ランダムグラフダイナミクス 確率論から見た複雑ネットワーク 産業図書 2011 年

[5] 西尾眞喜子, 樋口保成: 確率過程入門 (確率論教程シリーズ 3) 培風館 2006 年

[6] 飛田武幸: ブラウン運動 岩波書店 1975 年

[7] 池田-渡邊: Stochastic differential equations and diffusion processes Elsevier 2014 年

[8] I. Karatzas, S. E. Shreve Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, (Graduate texts in mathematics ; 113) 1991 年.

[9] J. F. LeGall: Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus. Springer-Verlag, (Graduate texts in mathematics ; 274) 2016 年.

[10] 小谷眞一: 測度と確率 岩波書店 2005 年

[11] 熊谷隆: 確率論 (新しい解析学の流れ) 共立出版 2003 年
測度論的確率論について書かれた教科書. 測度論の最低限の知識があれば読めるように書かれている. 確率論の基礎的内容を第 1 章で扱い, 2 章以降でブラウン運動の基礎的内容, 電気回路と確率論に関連する話題などを扱っている. ファイナンスではどのように確率論が用いられているかも 2 章で扱っている.

[12] P. Mörters-Y. Peres: Brownian motion, 30, Cambridge University Press, 2010 年

[13] B. Oksendal Stochastic differential equations: an introduction with applications, Springer Science & Business Media, 2013 年

[14] Günter. Last, Mathew. Penrose: Lectures on the Poisson process. Institute of Mathematical Statistics Textbooks, 7. Cambridge University Press, Cambridge, 2018 年

[15] 志賀徳造: ルベーグ積分から確率論 (共立講座 21 世紀の数学) 共立出版株式会社 2000 年

[16] D. W. Stroock: Probability theory : an analytic view. Cambridge University Press, 2011 年.

[17] G. Tenenbaum: Introduction to analytic and probabilistic number theory. American Mathematical Society, 2015 年

[18] T. Tao: An Introduction to Measure Theory. American Mathematical Society, 2011 年
測度論について書かれた教科書. $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度の構成から始まり, 一般の測度の構成を行いフビニの定理に関する内容までを扱っている. その応用として確率測度の構成に関する証明を行っている. また第 2 章では実解析の問題に取り組む際の考え方に対する著者のアドバイスが載っているおり, 非常に参考になる. (2016 年に日本語訳版が出版された. (乙部厳己訳: ルベーグ積分入門. 朝倉書店) 第 2 章だけでも読む価値はある.)

[19] T. Tao, V. H. Vu: Additive combinatorics.(Cambridge studies in advanced mathematics) 2010 年

[20] D. Williams: Probability with martingales. (Cambridge University Press) 1991 年

[21] 吉田伸生: A short course in probability 吉田伸生先生の講義ノート. 英語で書かれているが具体例と例題が多数書かれており, 非常に参考になる. また確率空間の構成の細かい証明は後回しにして重要な内容を先に扱っている.

http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~noby/pdf/prob_all.pdf で入手可能.
[22] 吉田伸生: ルベーグ積分入門-使うための理論と演習. 遊星社 2006 年

1　確率論の基礎

確率論を学ぶ際にはじめに登場する用語として**標本空間**, **事象**, **確率**というものがある.
それらは次のように与えられた.

標本空間 : ある操作を行なった時に起こり得るすべての結果の集合.
標本 : 標本空間の各要素.
事象 : 標本空間の部分集合.
確率 : 事象 A が標本空間の中で起こり得る割合.[*1]

標本空間を Ω, 確率を P と表すことにする.
コイン投げで考えてみる.

例題 1.0.1. コイン投げ 1 回の操作で起こり得ることは「表が出る」,「裏が出る」のいずれかなので標本空間は

$$\Omega = \{ \text{表}, \text{裏} \}$$

と表せる. 事象を考えると

$$\varnothing, \{ \text{表} \}, \{ \text{裏} \}, \Omega$$

である. コイン投げで表裏が等しい割合で起こるならば, それぞれの事象の確率は

$$P(\varnothing) = 0, P(\text{表}) = P(\text{裏}) = \frac{1}{2}, P(\Omega) = 1$$

で与えられる.[*2]

例題 1.0.2. サイコロを 2 回振る試行を考えてみる. 1 回サイコロを振った時に出る目は $\{1,2,3,4,5,6\}$ のいずれかであるので標本空間は

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

と表せる. また事象はその部分集合である. サイコロの目が等しい割合で出ると考えた場合は事象 A が起こる確率は

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

と与えることが自然である. ただし $|A|$ は集合 A の要素の個数である.

問 1.0.3. コインを 3 枚投げる試行の標本空間を与えよ. また「3 枚のコインを投げたとき, 投げたコインの表裏が 2 枚のみが一致し 1 枚が異なる」事象を標本空間の部分集合として記述せよ.

1.0 節ではこういった初等的な例を用いて確率空間がみたす性質について考えていく.

キーワード: σ-加法族, 確率測度, 確率変数, 分布, 独立性.

---

*1 確率の直観的な定義

*2 $\varnothing$ という事象とその確率と言われると混乱するかもしれないが起こり得ることが起きない事象とその確率と捉えればよい.

1.0　確率空間

事象と確率の関係をもう少し数学らしく捉えてみる. 1.1 節で測度論を用いて確率空間を定義するが, この節ではその前段階にあたる有限加法的測度空間を直感的に捉えやすい有限個の標本空間における確率空間を用いて説明する. しかし長々と読むよりも天下り的に定義した方が受け入れやすいかもしれないのでここは読み飛ばして構わない.

事象全体を $\mathcal{F}$ と表すことにすると確率とは $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ という関数に見えてくる. (例えば例題 1.0.1 をみるとよい.)

また確率のみたす性質として有限標本空間の場合は次のことを仮定することは自然である.[*3]

(有限標本空間上の確率の性質)

(1) $\mathcal{F}$ について

(1-a) $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$.

(1-b) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$.

(1-c) $A, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{F}$.

(2) P について

(2-a) $P(\Omega) = 1$.

(2-b) $0 = P(\varnothing) \leqslant P(A), A \in \mathcal{F}$.

(2-c) $A, B \in \mathcal{F}$ が $\underbrace{A \cap B = \varnothing}_{A\text{ と }B\text{ が排反}}$ をみたすとき,

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{A\text{ という事象または }B\text{ という事象が起こる確率}} = \underbrace{P(A) + P(B)}_{A\text{ という事象が起こる確率 }+B\text{ という事象が起こる確率}}.$$

注意 1.0.1. 確率論の用語で事象 A の**余事象**とは A^c のことであり, また事象 A, B が**排反**とは $A \cap B = \varnothing$ のときをいう. この用語を用いると (1-a)-(1-c) および (2-a)-(2-c) は次のことを言っている.

(1-a) は起こりうる全ての結果 (Ω) も事象であり, “起こりうる結果がない”というものも事象.

(1-b) は事象があれば, 余事象も事象.

(1-c) は 2 つの事象があれば「少なくともどちらかの事象が起こる」というものも事象.

(2-a) は標本全体では確率は 1.

(2-b) は全ての事象に対してその起こる確率は 0 以上.

(2-c) は排反事象のどちらか一方が起こる確率はそれぞれの事象が起こる確率の和.

注意 1.0.2. A と B が排反であるとは A と B が同時に起こり得ない事象であることを言っている.

明らかに事象 A とその余事象 A^c は排反である.

例題 1.0.3. サイコロを 2 回振る試行を考える. $A = \{$ 出た目の和が偶数 $\}$ と $B = \{$ 出た目の和が奇数 $\}$ の 2 つの事象を考える. このとき $B = A^c$ であるので B は A の補集合であり, 排反である. しかし $C = \{$ 出た目の積が偶数 $\}$ という事象を考えると A と C, B と C は排反ではない.

問 1.0.4. サイコロを 2 回振る試行を考える. 以下の事象 A, B とそれぞれの余事象を例題 1.0.2 の標本空間 Ω

[*3] 有限標本空間の場合通常は $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ ととればよい.

の部分集合として記述せよ.

$$A = \{ \text{出た目がともに偶数} \}, \quad B = \{ \text{出た目の少なくとも 1 つは偶数} \}.$$

問 1.0.5. サイコロを 2 回振る試行を考える. 以下の事象 A, B, C, D を考える. 排反になる事象 2 つの組を全て挙げよ.

$$A = \{ \text{出た目の差の絶対値が奇数} \}. \quad B = \{ \text{出た目の積が偶数} \}.$$
$$C = \{ \text{出た目の少なくとも 1 つは奇数} \}. \quad D = \{ \text{出た目の少なくとも 1 つが偶数} \}.$$

例題 1.0.6. サイコロを 2 回振る試行を考える. このとき事象 $\{2 \text{ 回とも同じ目が出る} \}$ を考えると

$$\{2 \text{ 回とも同じ目が出る} \} = \bigcup_{i=1}^{6} \{1 \text{ 回目に出た目が } i, 2 \text{ 回目に出た目が } i\} = \bigcup_{i=1}^{6} \{(i,i)\}$$

と書ける. また

$$P(\{2 \text{ 回とも同じ目が出る} \}) = \sum_{i=1}^{6} P(\{1 \text{ 回目に出た目が } i, 2 \text{ 回目に出た目が } i\}) = 6 \cdot \frac{1}{6^2}$$

となる. [*4]

問 1.0.7. $\Omega = \{0, 1, 2\}$ とし $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ を

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{1,2\}, \Omega\}$$

とする. このとき $(\Omega, \mathcal{F})$ は上の (1-a)-(1-c) をみたすことを示せ. また $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ で (2-a)-(2-c) をみたすようなものを構成せよ.

上で挙げた性質 (1-a)-(1-c) および (2-a)-(2-c) は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が有限加法的測度空間と見做すことができると言っている.[*5]

有限加法的測度の最もよく知られた例では面積の定義などがある. 例えば, $\Omega = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ として $\mathcal{F}$ を Ω 内のジョルダン可測集合全体, P を $\mathcal{F}$ の面積としたときこれらの条件を満たしている. [*6]

問 1.0.8. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が上の (1), (2) を満たしているとする. 以下の問に答えよ.

(i) $A, B \in \mathcal{F}$ とする. このとき $A \cap B \in \mathcal{F}$.

(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ であり, $A \subset B$ とする. このとき $P(A) \leqslant P(B)$.

(iii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ とする. このとき $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

(iv) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ であり, $i \neq j$ のとき $A_i \cap A_j = \emptyset$ とする. このとき $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

次の節ではこの確率の有限加法的測度性を測度性に拡張して考えることになるのだが, なぜそのようなことを考える必要があるのかについて簡単に触れておく.

測度論的確率論を考える利点の 1 つは “無限回の試行” というものを数学的に正しく記述できるというものがある. “無限回の試行” を考える目的は雑に言うと非常に “多くの試行” を行ったときにそこに現れる普遍的な性質を “極限” として捉えることにある.

[*4] (2-c) の性質を帰納的に使用している.

[*5] 見做すために多少違和感のある性質でも抜き出していると言った方が正しいかもしれない.

[*6] ビュフォンの針の問題も本質的にはこれと同じ標本空間と確率 P で考えている.

例えば, サイコロを n 回振ったとき

$$\frac{n \text{ 回目までに 1 が出た回数}}{n} = n \text{ 回目までに 1 が出た割合}$$

を考えたとき, これは n を大きくしていくと $\frac{1}{6}$ に近づく (収束する) ことは予想できる. しかしこの "収束"の意味をきちんと与えようとすると測度論を用いる必要に迫られる.

1.1 測度論と確率論

以下, 標本空間 Ω と事象全体集合 $\mathcal{F}$ と事象の確率 P は次のような性質をみたす確率空間であるとして話を進めていく.

定義 1.1.1. 測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が $P(\Omega) = 1$ をみたすとき, **確率空間**という. すなわちある集合 Ω に対して, $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$, $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が次をみたす.

(Fa) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.
(Fb) $A \in \mathcal{F}$ ならば $A^c \in \mathcal{F}$. (補集合で閉じている)
(Fc) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ ならば $\bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{F}$. (可算和で閉じている)

(Pa) $P(\Omega) = 1$
(Pb) $0 = P(\emptyset) \leqslant P(A)$, $A \in \mathcal{F}$.
(Pc) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ が $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ ならば $P\left(\sum_{n \geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} P(A_n)$.
  (σ-加法性, 完全加法性)

特に Ω を**標本空間**, $\mathcal{F}$ の元を**事象** P を**確率測度**という. また $A \in \mathcal{F}$ に対して $A^c \in \mathcal{F}$ を**余事象**という. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ が $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ をみたすとき, $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ を**排反事象列**という.

このように測度空間を用いて確率空間を定義し, 議論していくことが測度論的確率論である.[*7][*8]

注意 1.1.3. (付録 A 章参照) $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ が (Fa)~(Fc) をみたすとき **σ-加法族**と呼び, $(\Omega, \mathcal{F})$ は**可測空間**という.

[*7] 測度空間を用いるため, 標本空間 Ω や事象族 $\mathcal{F}$ が抽象的になり混乱するかもしれない. しかし確率の自然な性質を数学的に問題のないように拡張するために測度論を用いただけでありその根本には有限標本空間の場合に見たものが変わらず存在する.
[*8] 測度論でも議論したことではあるが測度では可算的な演算しか許可しない. これは非可算な演算を許可した場合に起こる不都合に起因する.

例題 1.1.2. (非可算演算による問題点) コイン投げの無限回試行を考える. このとき

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \{\text{ 表, 裏 }\}^{\mathbb{N}}\}$$

と書ける. 厳密な議論は置いておいて公平な無限回のコイン投げを表す確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が定義されたとする. このとき各 $\omega \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{n \text{ 回目までのコインの出が} \omega_1, \cdots, \omega_n\}\right) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{\tilde{\omega} : \tilde{\omega}_1 = \omega_1, \cdots, \tilde{\omega}_n = \omega_n\}\right) \overset{\text{命題 1.1.5}(vi)}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \end{aligned}$$

がわかる. さて確率測度 P が非可算集合 Λ に対して

$$A_\lambda \in \mathcal{F}(\lambda \in \Lambda), A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset(\lambda \neq \mu) \text{ ならば } P\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} P(A_\lambda)$$

また $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ が (Pb), (Pc) をみたすとき**測度**と呼び, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を測度空間という.

抽象的な確率の代表例は次のもので与えられる.

例題 1.1.4. $\Omega = (0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}((0,1])$ とする. ただし $\mathcal{B}((0,1])$ は $(0,1]$ 上のボレル集合族である (付録 A 章). P を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のルベーグ測度とする. このとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率測度である.

同じ標本空間でも別の $\mathcal{F}$ を選ぶこともできる (問題 1.4).
確率測度の性質として以下のことを挙げておく.

命題 1.1.5. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率測度空間とする. このとき以下が成り立つ.

(i) $A_i \in \mathcal{F}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ が $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ ならば $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
(ii) $A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A^c) = 1 - P(A)$.
(iii) $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ ならば $P(A) \leqslant P(B)$ (**単調性**).
(iv) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} P(A_n). \quad \textbf{(劣加法性)}$$

(v) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ に対して

$$A_n \subset A_{n+1} (n \geqslant 1) \Rightarrow P\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n). \quad \textbf{(増大列連続性)}$$

(vi) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ に対して

$$A_n \supset A_{n+1} (n \geqslant 1) \Rightarrow P\left(\bigcap_{n \geqslant 1} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n). \quad \textbf{(減少列連続性)}$$

注意 1.1.6. 命題 1.1.5(vi) の減少列連続性は一般の無限測度においては成立しない.

問 1.1.7. 命題 1.1.5 を証明せよ.

当たり前と思っていることでも測度論の定義によってようやく数学的に正当化されることがある[*9]:

例題 1.1.8. A, B という人がじゃんけんをする. ただし A, B はグー, チョキ, パーをそれぞれ等確率で出すとする. "じゃんけんの決着がつき"A が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ である.

証明.

$$\{\text{ じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ }\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n \text{ 回目で決着がつき } A \text{ が勝つ }\}$$

となる.

$$A_n := \{n \text{ 回目で決着がつき } A \text{ が勝つ }\}$$

をみたしたとしよう. このとき $\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} = \Omega$ なので

$$1 = P\left(\sum_{\omega \in \Omega} \omega\right) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 0$$

となってしまい矛盾する.

[*9] 話の都合上, 確率空間の存在や独立試行の話は認めている

とすると排反事象列であるので

$$P(\text{じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

となる.

$$P(A_n) = P(n-1 \text{ 回目まで決着がつかず } n \text{ 回目で決着がつく}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^n}$$

であるので

$$\begin{aligned} P(\text{じゃんけんの決着がつき } A \text{ が勝つ}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \lim_{n\to\infty} P(n \text{ 回目までに決着がつき } A \text{ が勝つ}) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

注意 1.1.9. この例によりじゃんけんをしたらいつか必ず (確率 1 で) 決着がつくと言える. 測度論がないと, n 回目までに決着する確率が 1 に収束するということまでしか言えない[*10].

問 1.1.10. 適当な確率空間が存在すると仮定して次のことを示せ.

(i) さいころを振り続けるといつか必ず 1 が出る. (P(ある n が存在して, n 回目のサイコロの出目が 1 である) $= 1$)

(ii) コインを投げ続けるといつか必ず表が出る. (P(ある n が存在して, n 回目のコインが表である) $= 1$)

いくつか確率空間の例を挙げておこう.

例題 1.1.11. Ω を可算集合とする. $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ とおいたとき $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

とおく. ただし

$$p_\omega \in [0,1], \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

をみたすものとする. このとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間になることがわかる. 特にコイン投げやサイコロ投げの 1 回試行などの確率空間はこの形で書けている.

例題 1.1.12. $\Omega = \mathbb{R}$ とする. $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする. $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$P(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

とおくと $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間になる. ただし右辺は $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上のルベーグ測度で定義された積分.(定義 A.4.5)

注意 1.1.13. 有限標本空間では特に意識することはなかったが無限標本空間では

$$P(A) = 1, \quad A \in \mathcal{F} \tag{1.1}$$

[*10] 両者を同じと思ってはいけない. 集合演算と関数の極限の交換がなされている.

が成り立つとき, 事象 A は**ほとんど確実に**起こるといい,

$$A, \quad P\text{-a.s.}$$

と書く. "ほとんど"という理由は $A \neq \Omega$ で成り立つことがあるため.

例題 1.1.14. 例題 1.1.8 で $F = \{$ いつか決着がつく $\}$ という事象を考えると $F^c = \{$ いつまでも決着がつかない $\}$ であり $\omega = (A, B$ がグーを出し続ける$) \in F^c$ であるので $F \neq \Omega$ である. しかしすでに確認したように $P(F) = 1$ である.

よって

ほとんど確実にじゃんけんはいつか決着がつく

または

じゃんけんでいつか決着がつく, P-a.s.

という表現になる.

問 1.1.15. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の事象列 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ が任意の n に対して $P(A_n) = 1$ をみたすとする. このとき

$$P\left(\bigcap_{n \geqslant 1} A_n\right) = 1$$

をみたすことを示せ.

少し解析らしく不等式を使った手法を紹介しておく.

例題 1.1.16. 無限回のコイン投げを表現する適切な確率空間が存在すると仮定する. このとき

ある n が存在して n 回目, $n+1$ 回目のコイン投げで続けて表が出る, $\quad P$-a.s.

となる.

証明.

$$A_n = \{2n-1 \text{ 回目と } 2n \text{ 回目のコイン投げでともに表が出る }\}$$

とする. このとき

$$\{\text{ ある } n \text{ が存在して } n \text{ 回目}, n+1 \text{ 回目のコイン投げで続けて表が出る }\} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

である. $P(A_n) = \frac{1}{4}$ であり,

$$\begin{aligned} P(\{\text{ ある } n \text{ が存在して } n \text{ 回目}, n+1 \text{ 回目のコイン投げで続けて表が出る }\}^c) &\leqslant P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4^n} = 0. \end{aligned}$$

□

注意 1.1.17. 確率論においては事象の包含関係を調べるということが頻繁に行われる. [*11].

[*11] 複雑な確率模型を扱う場合, 考えたい事象をそのまま考えると複雑すぎて実際の確率を計算するのが現実的ではなくなる.

問 1.1.18. 無限回のコイン投げを表現する適切な確率空間が存在すると仮定する. n 回目までに表が連続で出た回数の最大値を X_n と表すことにする. このとき

$$\sup_{n\geqslant 1} X_n = \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

となることを示せ. [*12]

次の補題は一般の測度空間に対して成り立つことではあるがここでは確率空間で考える.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

補題 1.1.19. **(ボレル-カンテリの補題)** $A_n \in \mathcal{F}$ とする. このとき

$$\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) < \infty \Rightarrow P\left(\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{m\geqslant n} A_n\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \text{ほとんど確実に } A_n \text{は有限回しか起きない.}$$

問 1.1.20. 補題 1.1.19 を証明せよ. [*13]

注意 1.1.21. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathcal{F}$ に対して

$$\omega \in \bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{m\geqslant n} A_m \Leftrightarrow \omega \text{ では } A_n \text{ が無限回起こる}$$

である. 特に「A_n が無限回起こる」ことを「A_n, i.o.」と書く. また

$$\omega \in \bigcup_{n\geqslant 1}\bigcap_{m\geqslant n} A_m \Leftrightarrow \omega \text{ では } A_n \text{ は高々有限個の } n \text{ を除いて起こる.}$$

である.

問 1.1.22. コイン投げの無限回試行を考える. コイン投げで n 回目に表が出る事象を A_n と表すことにする. 以下の事象を A_n を用いて表せ.

(i) m 回目まで表が出る. (ii) 表が無限回出る.(iii)

1.2 確率変数

確率論では確率変数と呼ばれるものを考える. これは測度論の言葉を使うと確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から別の可測空間 $(S, \mathcal{S})$ への可測写像のことである.

つまり次のように定義される.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.
$(S, \mathcal{S})$: 可測空間.

[*12] ヒント: 任意の $k \geqslant 1$ に対して $P\left(\sup_{n\geqslant 1} X_n \geqslant k\right) = 1$ となることを示す.

[*13] ヒント: 後半部は定義でなので証明する必要はない. 前半部は $\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geqslant n} A_n\right) = 0$ を示せば十分である.

定義 1.2.1. X が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の S-値**確率変数**であるとは

$$X : \Omega \to S$$
$$\text{任意の } A \in \mathcal{S} \text{ に対して } X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$$

をみたすときをいう.

注意 1.2.2. 確率変数は, 試行の結果として現れる "量"を表している. 試行前は未知だが, 試行を行う (ω が定まる) と $X(\omega)$ という量を出力する.

注意 1.2.3. $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ の場合に確率変数, $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ の場合に確率ベクトルと書いている本もある.

また σ-加法族を明確にしたいときは X は $\mathcal{F}/\mathcal{S}$-可測という. $\mathcal{S}$ が自明な場合は省略することが多い.

特にこの段階では $\mathcal{F}$ がどのようなものかというものを強く意識する必要はない. (1.3 節で扱う独立性の概念には σ-加法族 $\mathcal{F}$ が密接に関わってくるのでここに戻って再確認するとよい.)

注意 1.2.4. 写像の可測性の定義は写像の連続性の類似になっている. 単に開集合か可測集合かの違いである.

いくつか確率変数の例を見る.

例題 1.2.5. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

としたとき 1_A は確率変数.

例題 1.2.6. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする.

$$X(\omega) = \omega, \ \ \omega \in \Omega$$

で $X : \Omega \to \Omega$ を定義するとこれは明らかに $(\Omega, \mathcal{F})$ から $(\Omega, \mathcal{F})$ への可測関数なので確率変数. このような X は恒等写像と呼ばれる.

例題 1.2.7. サイコロを 2 回振る試行を考える (例題 1.0.2 の確率空間). $\omega = (i, j) \in \Omega$ に対して $X_1((i, j)) = i$, $X_2((i, j)) = j$ と定義する. このときサイコロを 2 回振って 1 回目に出た目を X_1, 2 回目に出た目を X_2 と表していると捉えることができる. このとき

$$(X_1, X_2) : \Omega \to \Omega$$

は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$-値確率変数. また $\mathbb{R}^2$-値確率変数とみなすこともできる.

証明. X_1, X_2 の定義より, 任意の $A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ に対して $(X_1, X_2)^{-1}(A) = A \in 2^{\{1,2,3,4,5,6\}^2}$ となるので可測である.

また $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ に対して $(X_1, X_2)^{-1}(B) = \{(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 : (i, j) \in B\}$ となるので可測. □

例題 1.2.8. コイン投げ 1 回の試行を考える (例題 1.0.1). このとき

$$X(\{\text{表}\}) = 1, \quad X(\{\text{裏}\}) = -1$$

と定義すると X は $\{1, -1\}$-値確率変数.

問 1.2.9. Ω を有限集合, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ とし, $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に確率測度 P を考える. 任意の可測空間 $(S, \mathcal{S})$ と写像 $X : \Omega \to S$ に対して, X は確率変数であることを示せ.

次の命題は実数値の写像が可測関数 (確率変数) であることを確かめるのに非常に役に立つ. 証明は測度論の教科書を参考されたい.

命題 1.2.10. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
& f \text{ が } \mathcal{F}/\mathcal{B}(\mathbb{R})\text{-可測} \\
& \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{F}, \ \ a \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}, \ \ a \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{F}, \ \ a \in \mathbb{R} \\
& \Leftrightarrow f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{F}, \ \ a \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

これを用いると次のようなこともわかる.

補題 1.2.11. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする. 可測関数 f, g と可測関数列 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ に対して次が成り立つ.

(i) $f^+, f^-, f+g, f-g$ は可測関数. ただし $f^+(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$, $f^-(\omega) = \max\{-f(\omega), 0\}$.
(ii) 定数 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して λf は可測関数.
(iii) $\inf_{n \geqslant 1} f_n$, $\sup_{n \geqslant 1} f_n$, $\varliminf_{n \to \infty} f_n$, $\varlimsup_{n \to \infty} f_n$ は可測関数.

一般に次のこともよく用いられる.

問 1.2.12. $X_1, \cdots, X_n$ を Ω 上の $\mathbb{R}$-値確率変数, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ をボレル可測関数とする. このとき $f(X_1, \cdots, X_n)$ は $\mathbb{R}$-値確率変数であることを示せ. [*14]

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間
$(S, \mathcal{S})$: 可測空間

定義 1.2.13. X を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上定義された S-値の確率変数とする. このとき X の**分布** (または**法則**)μ_X とは

$$\mu_X(A) = P(X \in A), \ \ A \in \mathcal{S} \tag{1.2}$$

で定義される $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度のことをいう.

特に S-値確率変数 X, Y が同じ分布を持つとき

$$X \stackrel{d}{=} Y$$

と表す.

また X の分布が μ で与えられるとき

$$X \stackrel{d}{\sim} \mu$$

と表す.

注意 1.2.14. 同分布であるという概念は関数等の等号に慣れてしまっていると勘違いしやすいので注意が必要

[*14] ヒント: 命題 1.2.10 を $\mathbb{R}^n$ へ一般化してみる. 定理 A.3.4 を用いる.

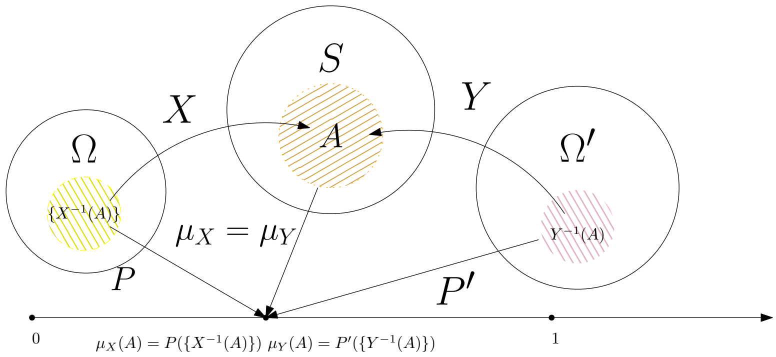


図 1　確率変数 X と確率測度 P, X の分布 μ_X のイメージ

である. あくまで X と Y を S の値として見たときに "現れ方の確率"が同じということしか言っていない.

問 1.2.15. (1.2) で定義された μ_X が $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度になっていることを確かめよ.

例題 1.2.16. サイコロを 2 回振る試行を考える (例題 1.2.7). $\mathbb{N}$-値確率変数 $X = X_1 + X_2$ を考えたとき X の分布は

$$\mu_X(i) = P(X_1 + X_2 = i), \qquad i \in \mathbb{N}$$

によって決まる. また

$$X_1 \neq X_2,\ \ X_1 \overset{d}{=} X_2$$

に注意する.

例題 1.2.17. サイコロを 1 回振る試行を確率空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, コインを 1 回投げる試行を確率空間 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ 上で考える. ただし

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{1,2,3,4,5,6\}, & \mathcal{F}_1 &= 2^{\Omega_1}, & P_1(A) &= \frac{|A|}{6}, \quad A \subset \Omega_1 \\
\Omega_2 &= \{\text{表}, \text{裏}\}, & \mathcal{F}_2 &= 2^{\Omega_2}, & P_2(B) &= \frac{|A|}{2}, \quad B \subset \Omega_1
\end{aligned}$$

とする. このとき確率変数 $X_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $X_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ を

$$X_1(\omega_1) = 1_{\{1,2,3\}}(\omega_1) \quad (\omega_1 \in \Omega_1), \qquad X_2(\omega_2) = 1_{\text{表}}(\omega_2) \quad (\omega_2 \in \Omega_2)$$

と定義すると $X_1 \overset{d}{=} X_2$ である. このように異なる確率空間上で定義された確率変数であっても同じ分布を持つことができる.

定義 1.2.18. X を $\mathbb{R}$-値確率変数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

と定義した関数 $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ を X の**分布関数**という.

定義 1.2.19. $\mathbb{R}^d$-値確率変数の分布 μ に対して

$$\mu(A) = \int_A f(x)dx, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つような非負可測関数 f が存在するとき f を μ のルベーグ測度に関する **(確率) 密度関数**という.

ルベーグ積分の知識がある前提の下では次のことがわかる.

問 1.2.20. 測度空間 $(S, \mathcal{S}, \mu)$ 上の非負可測関数 $f : S \to \mathbb{R}$ が $\displaystyle\int_S f(x)\mu(dx) = 1$ をみたすとする. このとき

$$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx) \quad (A \in \mathcal{S})$$

を考えると, ν は $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度になることを示せ. (ヒント: 定義 1.1.1 の (Pa), (Pb) は明らか. (Pc) を示すには単調収束定理もしくはルベーグの優収束定理を用いる.)

次の定理は分布関数の性質として重要なものである.

定理 1.2.21. 分布関数 F は次の性質を持つ.

(i) F は単調非減少である.
(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
(iii) F は右連続である. つまり $\lim_{y\searrow x} F(y) = F(x)$.
(iv) $F(x-) = \lim_{y\nearrow x} F(x)$ とすると, $F(x-) = P(X < x)$.
(v) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.

逆に, 関数 $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ が上記 (i), (ii), (iii) を満たしていれば F はある確率変数 X の分布関数になる.

問 1.2.22. 定理 1.2.21(i)~(v) の証明を与えよ.

定理 1.2.21 後半の証明.* 関数 $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ が (i), (ii), (iii) を満たしていたとする. $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0, 1)$, $P = (0, 1)$ 上のルベーグ測度とする.

$\omega \in \Omega$ に対して

$$X(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$$

とおく.

$$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\} = \{\omega : \omega \leqslant F(x)\}$$

が示せれば F が確率変数 X の分布関数となることがわかる.

$\omega \leqslant F(x)$ とする. このとき $x \notin \{y : F(y) < \omega\}$ であるので $X(\omega) \leqslant x$ である.

逆に $X(\omega) \leqslant x$ とする. $\omega > F(x)$ とすると F の右連続性からある $\varepsilon > 0$ に対して $\omega > F(x + \varepsilon)$ となる. 定義から $X(\omega) \geqslant x + \varepsilon > x$ となり矛盾する. □

1.2.1 分布の例

確率論でよく登場する確率分布の例を挙げておこう.

例題 1.2.23. 有限集合 $S = \{s_1, \cdots, s_n\}$-値確率変数 X が離散一様分布に従うとは

$$P(X = s_i) = \frac{1}{n}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

をみたすときに言う.

問 1.2.24. サイコロを 1 回投げる試行の結果を表す確率変数は離散一様分布に従うことを確かめよ.

例題 1.2.25. **(ベルヌーイ分布)** $\{0,1\}$-値確率変数 X がパラメータ $p \in [0,1]$ のベルヌーイ分布に従うとは

$$P(X=1) = 1 - P(X=0) = p$$

をみたすときにいい, パラメータ $p \in [0,1]$ のベルヌーイ分布を $\mathrm{Ber}(p)$ と表すことにする.

問 1.2.26. 例題 1.2.17 の確率変数 X_1, X_2 はパラメータ $\frac{1}{2}$ のベルヌーイ分布に従うことを示せ.

例題 1.2.27. **(二項分布)** $\{0,1,\cdots,n\}$-値確率変数 X がパラメータ $p \in [0,1]$ の二項分布に従うとは

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ \ k \in \{0,1,\cdots,n\}$$

をみたすときをいい, $\{0,\cdots,n\}$-値をとるパラメータ $p \in [0,1]$ の二項分布を $\mathrm{Bin}(n,p)$ と表すことにする.

問 1.2.28. コインを n 回投げる試行を考える. 表が出た回数を表す確率変数を X とすると X の分布は $\mathrm{Bin}(n,\frac{1}{2})$ に従うことを示せ.

例題 1.2.29. **(幾何分布)** $\mathbb{N}_0$-値確率変数 X がパラメータ $p \in [0,1]$ の幾何分布に従うとは

$$P(X=k) = p(1-p)^k, \ \ k \in \mathbb{N}_0$$

をみたすときをいい, パラメータ p の幾何分布を $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}_0}(p)$ と表すことにする.

注意 1.2.30. 幾何分布では $\mathbb{N}$ 上の確率分布を考えることがあり, そのとき

$$P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

をパラメータ p の幾何分布といい, $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}}(p)$ と表すことにする.

問 1.2.31. サイコロを投げて初めて 1 が出るまで投げた回数を N と表す. このとき確率変数 N は $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}}(\frac{1}{6})$ に従うことを示せ.

例題 1.2.32. **(ポアソン分布)** $\mathbb{N}_0$-値確率変数 X がパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ のポアソン分布に従うとは

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \ \ k \in \mathbb{N}$$

をみたすときをいい, パラメータ λ のポアソン分布を $\mathrm{Poi}(\lambda)$ と表すことにする.

例題 1.2.23〜例題 1.2.32 は全て X の取りうる値が高々可算であった. しかし以下の例では $\mathbb{R}$(または $\mathbb{R}^d$) などの非可算な値を取りうる分布になっている. 特にこれらの例は密度関数で定義づけされる.

例題 1.2.33. **(一様分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X が (a,b) 上の一様分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$$

をみたすときをいい, (a,b) 上の一様分布を $\mathrm{Unif}(a,b)$ と表すことにする.

例題 1.2.34. **(ベータ分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X がパラメータ $a,b>0$ のベータ分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1_{(0,1)}(x)$$

をみたすときを言う. ただし $B(a,b)$ は

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

で定義されるベータ関数である. パラメータ $a,b>0$ のベータ分布を $\mathrm{Beta}(a,b)$ と表すことにする.

例題 1.2.35. **(指数分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X がパラメータ $\lambda>0$ の指数分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$$

をみたすときをいい, パラメータ $\lambda>0$ の指数分布を $\mathrm{Exp}(\lambda)$ と表すことにする.

例題 1.2.36. **(ガンマ分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X がパラメータ (α,λ) $(\alpha>0,\lambda>0)$ のガンマ分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$$

をみたすときを言う. ただし $\Gamma(\alpha)$ は

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

で定義されるガンマ関数である. パラメータ $\alpha,\lambda>0$ のガンマ分布を $\mathrm{Gam}(\alpha,\lambda)$ と表すことにする.

注意 1.2.37. 指数分布はパラメータ $(1,\lambda)$ の指数分布であることがわかる.

例題 1.2.38. **(正規分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X が平均 μ, 分散 $v>0$ の正規分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right)$$

をみたすときを言い, $N(\mu,v)$ と書く. 特に $N(0,1)$ を**標準正規分布**という.

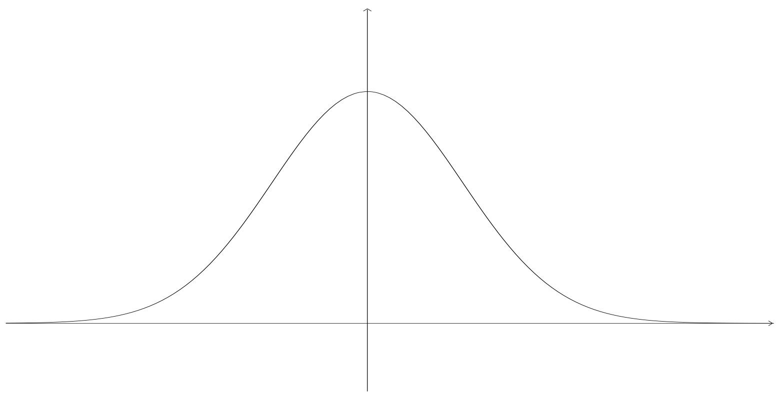


図 2　正規分布の密度関数.

例題 1.2.39. **(正規分布)** m を実 d 次ベクトル, Σ を d 次実正定値対称行列とする. $\mathbb{R}^d$-値確率変数 X が平均 m, 分散行列 Σ の正規分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-m)\cdot\Sigma^{-1}(x-m)\right)$$

をみたすときを言い $N(m,\Sigma)$ と書く. ただし d 次実対称行列 Σ が正定値であるとは任意の $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$ に対して

$$x \cdot \Sigma x > 0$$

をみたすときを言う. 特に $N(0,I)$ を標準正規分布という. ここで I は d 次単位行列である.

例題 1.2.40. **(コーシー分布)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X がコーシー分布に従うとは密度関数 f が

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

をみたすときを言う.

例題 1.2.41. **(一様分布)** $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ は $0 < m(A) < \infty$ をみたすとする. このとき

$$f(x) = \frac{1_A(x)}{m(A)}$$

を密度関数として持つ $\mathbb{R}^m$ 上の確率分布を A 上の一様分布といい, A 上の一様分布を $\mathrm{Unif}(A)$ と表すことにする.

問 1.2.42. パラメータ p のベルヌーイ分布の分布関数のグラフを描け.

分布	表記	S	p_m または密度関数 $f(x)$
離散一様分布		$\{s_1,\cdots,s_n\}$	$p_{s_i} = \frac{1}{n}$
ベルヌーイ分布	$\mathrm{Ber}(p)$	$\{0,1\}$	$p_1 = p$, $p_0 = 1-p$
二項分布	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\{0,1,\cdots,n\}$	$p_k = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
幾何分布	$\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}_0}(p)$	$\mathbb{N}_0$	$p_k = p(1-p)^k$
幾何分布	$\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}}(p)$	$\mathbb{N}$	$p_k = p(1-p)^{k-1}$
ポアソン分布	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}_0$	$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
一様分布	$\mathrm{Unif}(a,b)$	(a,b)	$f(x) = \frac{1}{b-a}1_{(a,b)}(x)$
ベータ分布	Beta(a,b)	$(0,1)$	$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}1_{(0,1)}(x)$
指数分布	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$(0,\infty)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$
ガンマ分布	$\mathrm{Gam}(\alpha,\lambda)$	$(0,\infty)$	$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x)$
コーシー分布		$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$
正規分布	$N(\mu,v)$	$\mathbb{R}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2v}}$

1.3 独立性

ここで測度論には現れない確率論独特の概念である独立性についてみていく.

1.3.1 独立な事象, 確率変数

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定義 1.3.1.

- 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が**独立**であるとは

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つときをいう.

より一般に

- 事象の族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が独立であるとは,

$$\text{任意の有限集合}\Lambda_0 \subset \Lambda\text{に対して } P\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} A_\lambda\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda_0} P(A_\lambda)$$

が成り立つときをいう.

- 事象の族 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ が**組ごとに独立**であるとは

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),\ \ i \neq j$$

が成り立つときをいう.

例題 1.3.2. コイン投げ 2 回を考えたとき, 事象 $A = \{1$ 回目に表が出る $\}$ と $B = \{2$ 回目に表が出る $\}$ は独立であることが容易にわかる. 一方で $C = \{1$ 回目と 2 回目で同じ結果 $\}$, $D = \{1$ 回目も 2 回目も表 $\}$ という事象を考えると C と D は独立ではない.

問 1.3.3. 事象 A, B が独立であるとき, A^c と B, A と B^c, A^c と B^c はそれぞれ独立であることを示せ.

注意 1.3.4. 組ごとの独立性は独立性よりも弱い概念である. 実際, 独立であれば組ごとに独立である. しかし次の例題で扱うように組ごとに独立であっても独立とは限らない.

例題 1.3.5. X_1, X_2, X_3 を独立な確率変数で

$$P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

とする.

$$A_1 = \{X_1 = X_2\},\ A_2 = \{X_2 = X_3\},\ A_3 = \{X_3 = X_1\}$$

という事象を考える. このとき

$$P(A_i \cap A_j) = P(X_1 = X_2 = X_3) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2),\ i \neq j$$

となり組ごとに独立である. 一方,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

となり独立ではない.

問 1.3.6. n 回サイコロを振る試行を考える. $1 \leqslant i < j \leqslant n$ に対して

$$A_{i,j} = \{i\text{ 番目と } j \text{ 番目に出た目が同じ }\}$$

としたとき, $\{A_{i,j} : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ は組ごとに独立だが独立な事象ではないことを示せ.

次の補題は確率論特有のものである.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

補題 1.3.7. **(第 2 種ボレル-カンテリの補題)** 独立な事象列 $\{A_n : n \geqslant 1\}$ が $\sum_{n\geqslant 1} P(A_n) = \infty$ をみたすならば, $P(A_n, \text{i.o.}) = 1$ となる.

問 1.3.8. 以下の要領で補題 1.3.7 の証明を与えよ.

(i) $N < M < \infty$ に対して

$$P\left(\bigcap_{n=N}^{M} A_n^c\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=N}^{M} P(A_n)\right)$$

を示せ.

(ii) 主張を示せ.

ここまでは事象に関する独立性について議論してきた. ではいったいどういった時に独立性が現れるのか.

サイコロを複数回投げる試行を考えてみる. 通常それぞれの試行で出る目は他の試行で出た目とは無関係であると考える. この「無関係さ」は独立で表現できる. つまり定義 1.3.1 で定義した事象の独立性を用いると

$$\text{任意の } m \geqslant 1, \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\} \text{ に対して } P\left(\bigcap_{i=1}^{m} \{i \text{ 回目に}\omega_i\text{が出る }\}\right) = \prod_{i=1}^{m} P(i \text{ 回目に}\omega_i\text{が出る})$$

と言える. (つまりどのタイミングで投げたサイコロに対してどの目が出る事象も独立である)

これを踏まえると確率変数の独立性は次のようなするのが自然である.

$\{(S_\lambda, \mathcal{S}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$: 可測空間族.

定義 1.3.9. X_λ を Ω 上で定義された S_λ-値確率変数とする. 確率変数系 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が**独立**であるとは, 任意の有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ に対して

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_{\lambda_i} \in B_{\lambda_i}\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_{\lambda_i} \in B_{\lambda_i}), \quad B_{\lambda_i} \in \mathcal{S}_{\lambda_i}$$

が成り立つときをいう.

注意 1.3.10. 定理 3.1.1 で確認するが測度論的確率論の立場で確率変数の独立性の定義を読みかえると確率空間がある確率空間の直積空間になっていることを意味している.

定義 1.3.11. 確率変数系 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ がすべて独立で同じ分布を持つとき, **独立同分布**といい, i.i.d. と省略して書くことがある.

定義 1.3.9 で確率変数に関する独立性の定義を与えておけば十分なように感じるが次の小節でもう少し一般化する.

その前に一つ問題を与えておく.

独立な $\mathbb{R}$-値確率変数 X_1, X_2, X_3 があったとする. この時 X_1 と $X_2 + X_3$ は独立か.

独立だと直感で答えることはできる. 次の節を読まずに一度証明を考えてみてほしい.

1.3.2 独立な σ-加法族系

まずは少々細かいことではあるが写像の可測性に関する内容をより詳しく見ておく. 付録 A 章の内容と重複するが次の補題を与えておく.

補題 1.3.12. Ω を集合とする. $\mathcal{G} \subset 2^\Omega$ に対して

$$\sigma[\mathcal{G}] = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \supset \mathcal{G} \\ \mathcal{A}\ \text{は}\sigma\text{-加法族}}} \mathcal{A}$$

は $\mathcal{G}$ を含む最小の σ-加法族である. 特に $\sigma[\mathcal{G}]$ を $\mathcal{G}$ **によって生成される σ-加法族**という.

問 1.3.13. 補題 1.3.12 の証明を与えよ. また一般に $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が Ω の σ-加法族であるとき, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{A \subset \Omega : A \in \mathcal{F}$ または $A \in \mathcal{G}\}$ は Ω の σ-加法族ではない. これを具体的な $\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ を挙げることで確かめよ.

次の補題は写像 $X : \Omega \to S$ が与えられたとき, X が確率変数となるように集合 Ω に新しく自明でない σ-加法族を構成できることを主張している.

> Ω: 集合.
> $(S, \mathcal{S})$: 可測空間.
>
> **補題 1.3.14.** 写像 $X : \Omega \to S$ を考える. このとき
>
> $$\sigma[X] = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\} \subset 2^\Omega$$
>
> は Ω の σ-加法族である. 特に $\sigma[X]$ は X が可測写像となる最小の σ-加法族であり, X **で生成される σ-加法族**と呼ばれる.

問 1.3.15. 補題 1.3.14 を証明せよ.

注意 1.3.16. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X に対して $\sigma[X]$ を考えると明らかに $\sigma[X] \subset \mathcal{F}$ である.

問 1.3.17. 例題 1.2.7 の確率変数 X_1, X_2 に対して

$$\sigma[X_1], \sigma[X_2], \sigma[X_1 + X_2]$$

を求めよ. また「$A \in \sigma[X_1] \Leftrightarrow \omega = (i, j)$ に対して $\omega \in A$ か $\omega \notin A$ は i によって決まる」ことを確かめよ.

この問により前小節の最後に挙げた問題は特別な場合には正しいことはわかった.

補題 1.3.14 では Ω 上の一つの写像 X によって σ-加法族を構成できたが複数の写像から Ω 上に σ-加法族を構成できる.

> Ω: 集合.
> $(S, \mathcal{S})$: 可測空間.
>
> **補題 1.3.18.** Ω 上の S-値写像の族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を考える. このとき $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が可測になるような最小の σ-加法族 $\mathcal{G}_\Lambda$ が存在する. 特にこの $\mathcal{G}_\Lambda$ を
>
> $$\sigma[X_\lambda : \lambda \in \Lambda]$$

と書く.

証明*. まず 2^Ω の元では $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ は可測であることに注意する. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{G}_\lambda = \{X_\lambda^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}\}$ とおく. このとき σ-加法族 $\mathcal{F}$ の元で $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が可測になるためには

$$\mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{F} \ \ (\lambda \in \Lambda) \quad \text{すなわち} \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda \subset \mathcal{F}$$

を満たさなければいけない. 定義より

$$\sigma\left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda\right] \subset \mathcal{F} \quad \text{なので} \quad \mathcal{G}_\Lambda = \sigma\left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda\right]$$

が条件をみたす. □

注意 1.3.19. $\mathcal{F}_0 = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}^{-1}(A_{\lambda_i}) : n \in \mathbb{N}, \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} \subset \Lambda, A_{\lambda_i} \in \mathcal{S}(i = 1, \cdots, n)\right\}$ を考えると, これは π-族である. よって定理 B.1.4 より

$$\sigma\left[\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{G}_\lambda\right] = \ell\left[\mathcal{F}_0\right]$$

となる.

簡単ではあるが確率論を学ぶ上では非常に重要な例を挙げておこう.

例題 1.3.20. コイン投げの無限回試行を考える. 簡単のために 表 $\to 1$, 裏 $\to 0$ と書くことにする. このとき

$$\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{\omega = \{\omega_n\}_{n \geqslant 1} : \omega_n \in \{0, 1\}\}$$

と表せる. 各 $n \geqslant 1$ に対して $X_n(\omega) = \omega_n$ と定義する. (これは n 回目の試行の結果と考えられる.) このとき $\{0, 1\}^n$-値確率変数 $(X_1, \cdots, X_n)$ で生成される σ-加法族を $\mathcal{F}_n = \sigma[(X_1, \cdots, X_n)]$ とすると

$$A \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow \omega \in A \text{ または} \omega \notin A \text{ は } (\omega_1, \cdots, \omega_n) \text{ で定まる} \tag{1.3}$$

ことがわかる. 明らかに $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ が成り立ち $\bigcup_{k=1}^{m} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_m$ は σ-加法族である. [*15]

問 1.3.22. (1.3) を証明せよ.

話の本筋がずれたので独立性の話に戻ろう. 次のようにして σ-加法族系の独立性の定義を与えておく.

[*15] $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n$ は σ-加法族ではない. 実際 1 を無限個含む (表が無限回出る) という事象 A を考えてみると $A \notin \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n$ である. 一方 $A_n = \{\omega_n = 1\}$ とすると $A = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{m \geqslant n} A_m$ となり $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n$ が σ-加法族とすると矛盾する.

注意 1.3.21. この例に関してもう少し注意を与えておこう. 補題 1.3.18 を用いることでサイコロの無限回試行に関する確率空間を構成できる. 一旦無限回試行の確率空間を構成してしまえば, その確率空間の下で有限回試行を考えることも可能である.

逆に古典的確率論の立場から見ると高々有限回の試行に対してしか事象 ($\mathcal{F}_n$ の元), および確率 (測度) を定義できない. しかし上で見たように「表が無限回出る」という事象は $\mathcal{F}_n$ の元の有限演算では導き出せない. このように測度論的確率論を考えることの利点の一つとして「無限回の試行」を数学的に問題なく記述できることが挙げられるだろう.

またこの例題のように同じ試行を考える場合でもあえて確率空間を大きく選ぶことが必要なときもある.

$\{(S_\lambda, \mathcal{S}_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$: 可測空間族.

定義 1.3.23. σ-加法族系 $\{\mathcal{F}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ が**独立**であるとは, 任意の有限個の添え字集合 $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ に対して

$$P\left(\bigcap_{i=1}^m A_{\gamma_i}\right) = \prod_{i=1}^m P(A_{\gamma_i}), \quad A_{\gamma_i} \in \mathcal{F}_{\gamma_i}$$

が成り立つときをいう.

注意 1.3.24. 定義 1.3.23 は測度論的確率論の立場からの事象の独立性の定義 1.3.1 を拡張したものである. これは次の問で確認できる.

問 1.3.25. $A_\gamma \in \mathcal{F}$ に対して部分 σ-加法族 $\mathcal{G}_\gamma = \{\emptyset, A_\gamma, A_\gamma^c, \Omega\}$ を考える. この時 $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ が独立であることと $\{\mathcal{G}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ が独立であることは同値であることを示せ.

問 1.3.26. 定義 1.3.23 の設定の下で次が成り立つことを示せ.

(i) S-値確率変数 X, Y が独立であるとき $\sigma[X]$ と $\sigma[Y]$ は独立であることを示せ.
(ii) $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ が独立であるとする. S-値確率変数 X, Y がそれぞれ $\mathcal{G}$-可測, $\mathcal{H}$-可測であるとする. このとき X, Y は独立であることを示せ.

注意 1.3.27. 問 1.3.26 より例えば次のことがわかる. X, Y が独立な S-値確率変数であるとする. このとき S 上の任意の可測関数 g, h に対して

$$g(X), h(Y) \text{ は独立である.}$$

命題 1.3.28. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする. Ω の部分集合族 $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset 2^S$ が $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}, \mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ をみたすとする.

$$\begin{aligned}&\text{任意の } C_1, C_2 \in \mathcal{C}, D_1, D_2 \in \mathcal{D} \text{ に対して } C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{D}\\ &\text{任意の } C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \text{ に対して } P(C \cap D) = P(C)P(D)\end{aligned}$$

が成り立つとき, $\sigma[\mathcal{C}]$ と $\sigma[\mathcal{D}]$ は独立であることを示せ.

証明には π-λ 定理 (定理 B.1.4) を用いる.

証明. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は π-族であることに注意する.
$C \in \mathcal{C}$ に対して

$$\mathcal{H}_C = \{D \in \mathcal{F} : P(C \cap D) = P(C)P(D)\}$$

とすると $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}_C$ は定義から明らかであり, $\mathcal{H}_C$ が λ-族であることも測度の単調性からわかる. よって定理 B.1.4 から $\sigma[\mathcal{D}] \subset \mathcal{H}_C$ である. つまり任意の $C \in \mathcal{C}$, $D \in \sigma[\mathcal{D}]$ に対して $P(C \cap D) = P(C)P(D)$ である. 同様に $D \in \sigma[\mathcal{D}]$ に対して

$$\tilde{\mathcal{H}}_D = \{C \in \mathcal{F} : P(C \cap D) = P(C)P(D)\}$$

とすると同じ議論により $\sigma[\mathcal{C}] \subset \tilde{\mathcal{H}}_D$ がわかる. □

次の問に答える事で前節の最後に挙げた問題が肯定的に解決される.

問 1.3.29. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に独立な σ-加法族の系 $\{\mathcal{G}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ があるとする. 空でない部分集合 $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Gamma$ が $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$ である時 $\sigma\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma_1} \mathcal{G}_\gamma\right]$ と $\sigma\left[\bigcup_{\gamma \in \Gamma_2} \mathcal{G}_\gamma\right]$ は独立であることを示せ.

特に $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が独立であるとき, 任意の可測関数 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ と $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して $f(X_1, \cdots, X_m)$ と $g(X_{m+1}, \cdots, X_{n+m})$ は独立であることを示せ.

実際に具体的に確率空間を用いて独立性について違いを見てみよう.

例題 1.3.30. コイン投げの $2N$ 回試行を考える. 確率変数 X_i を

$$X_i = \begin{cases} 1, & i \text{ 回目の試行で表が出た.} \\ 0, & i \text{ 回目の試行で裏が出た.} \end{cases}$$

とする. 特に

$$P(X_i = a_i, i = 1, \cdots, 2N) = \frac{1}{2^{2N}}, \quad a_i \in \{0, 1\}$$

で確率を定義する. 確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする. ただし

$$\Omega = \{\text{ 表}, \text{裏 }\}^{2N}, \mathcal{F} = 2^\Omega$$

(i) 事象を $A = \{X_1 + X_2\text{が偶数 }\}, B = \{X_1, X_2\text{がともに }1\}$ とする. このとき

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$$

となり

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

なので独立ではない.

(ii) X_1, X_2 は独立であることを確かめる. $S = \{0, 1\}, \mathcal{S} = 2^S$ とする. $\mathcal{S}$ は

$$\varnothing, \{0\}, \{1\}, S$$

からなる. $C, D \in \mathcal{S}$ に対して

$$P(X_1 \in C, X_2 \in D) = P(X_1 \in C)P(X_2 \in D)$$

を確かめる. C, D のいずれかが $\varnothing$ または S であるときは明らかである. また C, D が $\{0\}, \{1\}$ のいずれかの場合は確率測度の定義より等式が成り立つことが容易に分かる. よって X_1 と X_2 が独立であることがわかる.

(iii) $\mathcal{F}_o, \mathcal{F}_e \subset \mathcal{F}$ をそれぞれ

$$\mathcal{F}_o = \sigma[X_1, X_3, \cdots, X_{2N-1}], \mathcal{F}_e = \sigma[X_2, X_4, \cdots, X_{2N}]$$

と定義する. このとき問 1.3.29 より $\mathcal{F}_o, \mathcal{F}_e$ は独立である.

1.4 *確率測度の構成

さてここまで測度論を用いて改めて確率を定義し直し, その性質を調べてきた. しかし重要な問題が 1 つ残っている.

無限個の確率変数が定義できるような確率空間は定義できるのか.

この問題のより正確な表現は後で行う.

例えば例題 1.3.20 扱った無限回のコイン投げを見てみよう. $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ を標本空間として $\omega = \{\omega_n : n \geqslant 1\} \in \Omega$ に対して $X_n(\omega) = \omega_n$ とおくことで無限個の確率変数 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を定義しようとしていた. 問題は X_n の可測性と確率測度の存在である. 可測性に関しては補題 1.3.18 からどのように構成すれば良いかはわかる.

では確率測度はどうしようか. まず Ω 上に構成された確率測度はどのような性質を持っていなければいけないか調べることから始めよう.

n 回のコイン投げと $n+k$ 回のコイン投げについて考えてみる. $A_n \subset \{0,1\}^n$ としたときに任意の $k \geqslant 0$ に対して

$$P_n((\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A_n) = P_{n+k}((\omega_1, \cdots, \omega_{n+k}) \in A_n \times \{0,1\}^k) \tag{1.4}$$

を満たさなければいけない. ただし P_n は n 回のコイン投げを表す確率測度とする.

当然無限回のコイン投げを表す確率測度 P も

$$P_n((\omega_1, \cdots, \omega_n) \in A_n) = P(\omega \in A_n \times \{0,1\}^{\mathbb{N}})$$

となる必要があることが想像できる. このような P が構成できることを示す.

(1.4) は一致条件と呼ばれる.

主張を述べるために幾つか記号を導入しておく.

$\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$: $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体.

定義 1.4.1. $n \geqslant 1$ に対して

$$X_n : \Omega = \prod_{m \geqslant 1} \Omega_m \to \Omega_n$$

を

$$X_n(\omega) = \omega_n, \quad \omega = \{\omega_i : i \geqslant 1\}$$

と定義する.

$n \geqslant 1$ に対して

$$\mathbb{X}_n : \Omega = \prod_{n \geqslant 1} \Omega_n \to \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

を

$$\mathbb{X}_n(\omega) = (\omega_1, \cdots, \omega_n) = (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

と定義する.

Ω の部分集合族

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbb{X}_n^{-1}(B) : \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } B \in \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right\}$$

から生成される σ-加法族 $\mathcal{F}$ を

$$\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{C}] = \bigotimes_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n$$

と書く.

注意 1.4.2. 直積 σ-加法族については定義 C.1.1 を参照する.

問 1.4.3. $\bigotimes_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_n = \sigma[X_n : n \geqslant 1]$ であることを示せ.

次の定理で可算直積空間上に適当な確率測度 P が存在することを確認する.

定理 1.4.4. (**コルモゴロフの拡張定理**) 各 $n \geqslant 1$ に対して $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ 上に確率測度 μ_n が与えられており, 任意の $k \geqslant 0$ に対して

$$\mu_n(A) = \mu_{n+k}(A \times \mathbb{R}^k), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

を満たしているとする. このとき可測空間 $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \bigotimes_{n \geqslant 1} \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ 上の確率測度 P で任意の $n \geqslant 1$ と任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$P\left(\mathbb{X}_n \in A\right) = \mu_n(A)$$

となるものが一意に存在する[*16].

2 章以降では特に断りがないときは $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を具体的に与えることはせず, 存在するものとして扱っていく.

証明のために次の補題を準備する.

補題 1.4.5. 定義 1.4.1 のようにとる. このとき $\mathcal{C}$ は有限加法族である.

証明. 証明は省略する. □

問 1.4.6. 補題 1.4.5 を証明せよ.

*定理 *1.4.4* の証明. 簡単のため $\mathcal{F} = \bigotimes_{n \geqslant 1} \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と書くことにする.

$B \in \mathcal{C}$ とする. このとき, ある $n \geqslant 1$ と $A \in \bigotimes_{i \in 1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R})$ が存在して $B = \mathbb{X}_n^{-1}(A)$ となる. 有限加法族 $\mathcal{C}$ 上の有限加法的測度 P を

$$P(B) = \mu_n(A)$$

と定義することにする. この P が $\sigma[\mathcal{C}]$ 上に一意に拡張できれば良い.

[*16] 定理の主張では $\mathbb{R}$ の可算直積空間に対して確率測度を構成したが, より広い集合である可分距離空間の非可算直積空間に対してもコルモゴロフの拡張定理が成り立つことが知られている [2, Theorem 12.1.2].

一意性は拡張の存在が確認できればホップの拡張定理 (定理 B.1.11) より従う.

拡張の存在は定理 B.1.12 より

$$B_n \in \mathcal{C}, B_n \supset B_{n+1}, \bigcap_{n \geqslant 1} B_n = \varnothing \Rightarrow \lim_{n \to \infty} P(B_n) = 0$$

を示せばよい. この対偶を示す. すなわち

$$B_n \in \mathcal{C}, B_n \supset B_{n+1} \text{に対してある} \delta > 0 \text{が存在して} \lim_{n \to \infty} P(B_n) > \delta \Rightarrow \bigcap_{n \geqslant 1} B_n \neq \varnothing.$$

を示す.

$B_n \in \mathcal{C}$ を $B_n \supset B_{n+1}$ かつある $\delta > 0$ に対して $\lim_{n \to \infty} P(B_n) > \delta$ となるものとする.

B_n に対して $A_{i_n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{i_n})$ を $\mathbb{X}_{i_n}^{-1}(A_{i_n}) = B_n$ となるようなものとする.

もし $i_n \leqslant N$ がすべての n で成り立つような N が存在したとき, A_{i_n} は $A_{i_n} \times \mathbb{R}^{N-i_n}$ と同一視することで $\mathbb{R}^N$ の元になる. このとき仮定から $\lim_{n \to \infty} \mu_N(A_{i_n} \times \mathbb{R}^{N-i_n}) > \delta$ となる. よって $\bigcap_{n \geqslant 1} A_{i_n} \times \mathbb{R}^{N-i_n} \neq \varnothing$ である.

i_n が有界でない場合を考える. 必要ならば部分列を取り直すことで $B_n = \mathbb{X}_n^{-1}(A_n)$ $(A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ としてよい. ここで測度の正則性 (定理 B.2.6) より, 各 $n \geqslant 1$ に対してコンパクト集合 $C_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ で $C_n \subset A_n$ かつ $\mu_n(A_n \backslash C_n) < \dfrac{\delta}{2^{n+1}}$ をみたすものが存在する.

このとき $D_n = \mathbb{X}_n^{-1}(C_n)$ とおくと, $D_n \subset B_n$ かつ $P(B_n \backslash D_n) < \dfrac{\delta}{2^{n+1}}$ である.

また

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} D_i\right) &= P(B_n) - P\left(B_n \backslash \bigcap_{i=1}^{n} D_i\right) \\ &= P(B_n) - P\left(B_n \cap \bigcup_{i=1}^{n} (D_i^c)\right) \\ &\geqslant P(B_n) - \sum_{i=1}^{n} P\left(B_i \backslash D_i\right) > \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

である. よって $\bigcap_{i=1}^{n} D_i \neq \varnothing$ である.

$\bigcap_{n \geqslant 1} D_n \neq \varnothing$ であることを示せば証明が完了する.

各 n に対して $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \cdots) \in \bigcap_{i=1}^{n} D_i$ をひとつ選んでくる. このとき各 $p \geqslant 1$ に対して

$$\omega^{(n+p)} \in \bigcap_{i=1}^{n+p} D_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} D_i$$

である. よって

$$\mathbb{X}_n(\omega^{(n+p)}) = (\omega_1^{(n+p)}, \cdots, \omega_n^{(n+p)}) \in C_n$$

である. $n = 1$ のとき, C_1 はコンパクトなので $\{\omega_1^{(1+p)} : p \geqslant 1\}$ は収束する部分列 $\{\omega_1^{(k_{1,m})} : m \geqslant 1\}$ を持つ.

$n = 2$ のとき, $k_{1,m} \geqslant 2$ ならば $(\omega_1^{(k_{1,m})}, \omega_2^{(k_{1,m})}) \in C_2$ であり, C_2 はコンパクトなので $\{\omega_2^{(k_{1,m})} : m \geqslant 1\}$ は収束する部分列 $\{\omega_2^{(k_{2,m})} : m \geqslant 1\}$ を持つ.

$n = \ell$ のときに, $\{(\omega_1^{(k_{\ell,m})}, \cdots, \omega_\ell^{(k_{\ell,m})}) : m \geqslant 1\}$ が収束したとする. このとき $k_{\ell,m} \geqslant \ell + 1$ ならば

$$(\omega_1^{(k_{\ell,m})}, \cdots, \omega_{\ell+1}^{(k_{\ell,m})}) \in C_{\ell+1}$$

であり, $C_{\ell+1}$ のコンパクト性から収束する部分列 $\{\omega_{\ell+1}^{(k_{\ell+1,m})} : m \geqslant 1\}$ が取れる. 帰納的に各 n に対して収束する列 $\{\omega_n^{(k_{n,m})}\}$ が存在することが言えた.

$\omega_n = \lim_{m\to\infty} \omega_n^{(k_{n,m})}$ と定義すると C_n のコンパクト性から $(\omega_1, \cdots, \omega_n) \in C_n$ がわかる. 任意の n について成り立つので $(\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \bigcap_{n\geqslant 1} D_n$ が示された. □

注意 1.4.7. コイン投げは $\mathbb{R}$ の代わりに $\{0,1\}$ で考えたが上の証明は容易に適用できる.

1.5 † 確率論の応用 I

ここで少し趣向を変えて確率論を別の数学的問題に応用してみよう.

定義 1.5.1. **(リーマン-ゼータ関数)** $s > 1$ に対して

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$$

と定義した関数を**リーマン-ゼータ関数**と呼ぶ.

リーマン-ゼータ関数に関して次のような定理が知られている.

定理 1.5.2. **(オイラー積)** $s > 1$ に対して

$$\zeta(s) = \prod_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

と書ける. これを**オイラー積表示**と呼ぶ.

この定理はオイラーによって 1737 年に証明された. ここではあえて確率論による証明を与えてみよう.

証明. 確率変数 $X : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$P(X = n) = \frac{\zeta(s)^{-1}}{n^s} \tag{1.5}$$

をみたすものとする. $k \geqslant 1$ に対して事象

$$E_k = \{X \text{ が } k \text{ で割り切れる }\}$$

を考える. このとき

$$P(E_k) = P(X = ik, i \geqslant 1) = \zeta(s)^{-1} \sum_{i\geqslant 1} \frac{1}{(ik)^s} = k^{-s}.$$

である. m 個の異なる素数 $k_1, \cdots, k_m$ に対して

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{m} E_{k_i}\right) &= P(X \text{ が } k_1 \cdots k_m \text{で割り切れる}) \\
&= \zeta(s)^{-1} \sum_{\ell \geqslant 1} \frac{1}{(\ell k_1 \cdots k_m)^s} \\
&= (k_1 \cdots k_m)^{-s} = \prod_{i=1}^{m} P(E_{k_i})
\end{aligned}$$

となり事象 $E_{k_1}, \cdots, E_{k_m}$ は独立であることがわかる. 独立性より

$$\begin{aligned}
\zeta(s)^{-1} = P(X = 1) &= P\left(X \text{ は任意の素数で割り切れない}\right) \\
&= \prod_{p:\text{ 素数}} P(E_p^c) \\
&= \prod_{p:\text{ 素数}} (1 - P(E_p)) \\
&= \prod_{p:\text{ 素数}} (1 - p^{-s}).
\end{aligned}$$

□

1.6 問題

以下, 特に記述しない限り確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で考える.

問題 1.1. 事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が $P(A) = \dfrac{1}{2}, P(B) = \dfrac{2}{3}$ をみたすとする. $\dfrac{1}{6} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \dfrac{2}{3}$ となることを示せ. またそれぞれの不等号に対して等号が成り立つような例を作れ.

問題 1.2. $n \geqslant 2$ とし, $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ とする. このとき

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n)$$

が成り立つことを示せ.

問題 1.3. 事象 A, B のどちらか一方のみが起こる確率は

$$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

で与えられることを示せ.

問題 1.4. $\Omega = (0, 1]$ とする. また $n = 0, 1, \cdots$ に対して

$$I_j^{(n)} = \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right], \qquad j = 1, \cdots, 2^n$$

とする. Ω の部分集合の族 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ を

$$\mathcal{F} = \left\{\bigcup_{j \in J} I_j^{(n)} : J \subset \{1, 2, \cdots, 2^n\}\right\}$$

とし, $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ を

$$P\left(\bigcup_{j \in J} I_j^{(n)}\right) = \frac{1}{2^n} \sharp\{J\}$$

としたとき $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間になっていることを示せ.

問題 1.5. (i) 事象 A が自身と独立なとき $P(A) \in \{0,1\}$ であることを示せ.

(ii) $P(A) \in \{0,1\}$ のとき, A は任意の事象 B と独立であることを示せ.

問題 1.6. $p \in \mathbb{N}$ を素数とする. $\Omega = \{1, \cdots, p\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ とし, 確率測度 P は任意の $A \subset \Omega$ に対して $P(A) = \frac{|A|}{p}$ で与えられるとする. ただし $|A|$ は集合 A の要素の数とする. $A, B \in \mathcal{F}$ が独立であるとき, A, B の少なくとも一方は空集合か Ω であることを示せ.

問題 1.7. $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$ が独立であるとき

$$P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n\right) = \prod_{n\geqslant 1} P(A_n) \tag{1.6}$$

が成り立つことを証明せよ.

以下の問は (1.6) の右辺が自明でない極限を持つための必要十分条件を与える.

問題 1.8. 数列 $\{a_n : n \geqslant 1\}$ が $a_n \in [0,1)$ をみたすとする. このとき

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n < \infty \Leftrightarrow \prod_{n\geqslant 1}(1 - a_n) > 0$$

が成り立つことを示せ.

問題 1.9. $B \in \mathcal{F}$ であり, $0 < P(B) \leqslant 1$ であると仮定する. $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

とすると $(X, \mathcal{F}, P_B)$ は確率空間になることを示せ. P_B を B に関する**条件付き確率**と呼ぶ. $P_B(A)$ を $P(A|B)$ と書くこともある.

問題 1.10. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ Ω 上の σ-加法族とする. このとき次を示せ.

$$\text{恒等写像 } X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{G}) \text{ が可測である.} \Leftrightarrow \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$$

問題 1.11. 補題 1.2.11 の証明を与えよ.

問題 1.12. 次の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が密度関数になるような定数 c を求めよ.

(i) $f(x) = ce^{-x-e^{-x}}$ (ii) $f(x) = \dfrac{c}{(1+x^2)^m}$ $m \in \mathbb{N}$

問題 1.13. † $k, l \in \mathbb{N}$ に対して $\gcd(k,l)$ を最大公約数とする. $n \geqslant 1$ を固定したとき, 確率変数 $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)})$ は $\{1, 2, \cdots, n\}^2$ 上の一様分布に従うとする. Q_n を $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)})$ の確率測度とし, 次のような事象を考える.

$$A = \{\gcd(N_1^{(n)}, N_2^{(n)}) = 1\}$$
$$A_p = \{N_1^{(n)}, N_2^{(n)} \text{はともに } p \text{ で割り切れる}\} \quad p \geqslant 1$$

$p_1, \cdots, p_{\ell(n)}$ を n 以下の素数全体とする. 以下の問に答えよ.

(i) 任意の $m \in \mathbb{N}$ $(m \leqslant \ell(n))$ に対して次の等式が成り立つことを示せ.

$$Q_n\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{p_k}\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \mu_k.$$

ただし $\mu_k = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_i < \cdots < i_k \leqslant n} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} \right\rfloor^2$, $x \in \mathbb{R}$ に対して $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数を表している.

(ii) 固定した m に対して

$$\lim_{n\to\infty} Q_n\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_{p_k}\right) = 1 - \prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right)$$

が成り立つことを示せ.

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q_n(A) = \frac{6}{\pi^2}$ を示せ.

問題 1.14. 独立な $\{0,1\}$-値確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ は $X_n \overset{d}{\sim} \mathrm{Ber}(p)$ とする. このとき

$$X_1 + \cdots + X_n \overset{d}{\sim} \mathrm{Bin}(n, p) \text{ である}$$

ことを示せ.

問題 1.15. $p \in (0,1)$ とし, $\lambda > 0$ とする. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列で $P(X_n = 1) = p = 1 - P(X_n = 0)$ をみたすとする. また $\{X_n : n \geqslant 1\}$ と独立な確率変数 N の分布は $\mathrm{Poi}(\lambda)$ をみたすとする. このとき

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

の分布を求めよ. ただし $S_0 = 0$ とする.

問題 1.16. X, Y は独立な確率変数でそれぞれパラメータ $\mu > 0$, $\lambda > 0$ のポアソン分布に従うとする. このとき

$$X + Y \overset{d}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$$

であることを示せ.

問題 1.17. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立な $\mathbb{R}$-値確率変数列で $X_n \overset{d}{\sim} \mathrm{Exp}(1)$ の指数分布に従うとする. このとき

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1, \quad P\text{-a.s.}$$

となることを示せ.[*17]

[*17] ヒント: ボレル-カンテリの補題

2　期待値

ここまでは標本空間などを測度論を用いて定義した. この章では期待値を測度論の理論で再定義する.

簡単な場合で期待値の例を確かめておこう. コイン投げの 1 回試行で表が出たら 1, 裏が出たら -1 得られるとする. このとき 1 回の試行で得られる数の期待値は

$$P(\text{表が出る}) \times 1 + P(\text{裏が出る}) \times (-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

である. これは高々有限な標本空間の上での議論なので和で表すことができた. これを無限標本空間上の確率測度を用いて一般化する際には積分を用いることになる. そこで測度による積分の定義を今一度復習しておく.

2.1　測度による積分

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: 測度空間.

定義 2.1.1. $A_i \in \mathcal{F}, a_i \geqslant 0 \ (i = 1, \cdots, n)$ に対して

$$s(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_k 1_{A_k}(\omega) \tag{2.1}$$

で与えられる非負可測関数を非負**可測単関数**という.

測度空間上の積分は可測単関数, 非負可測関数, 可測関数の順に定義される. 定義に関する詳細は測度論の教科書などを読み返すこと.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: 測度空間.

定義 2.1.2. (2.1) で定義された非負可測単関数 s に対して

$$\int_{\Omega} s(\omega)\mu(d\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

で積分を定義する.

Ω 上の非負可測関数 f に対して

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} s_n(\omega)\mu(d\omega)$$

により積分を定義する. ただし $\{s_n : n \geqslant 1\}$ は

$$0 \leqslant s_n(\omega) \leqslant s_{n+1}(\omega), \ \ n \geqslant 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} s_n(\omega) = f(\omega)$$

をみたす可測単関数列. さらに可測関数 f に対して

$$\int_{\Omega} f(\omega)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} f^{+}(\omega)\mu(d\omega) - \int_{\Omega} f^{-}(\omega)\mu(d\omega)$$

の右辺が意味を持つ場合に限り, これを f の積分と定義する. 特に

$$\int_\Omega |f(\omega)|\mu(d\omega) < \infty$$

であるとき f は可積分であるといい, $f \in L^1(\mu)$ と書く[*18]. また $f \in L^1(\mu)$, $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\int_A f(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega f(\omega)1_A(\omega)\mu(d\omega)$$

と定義する.

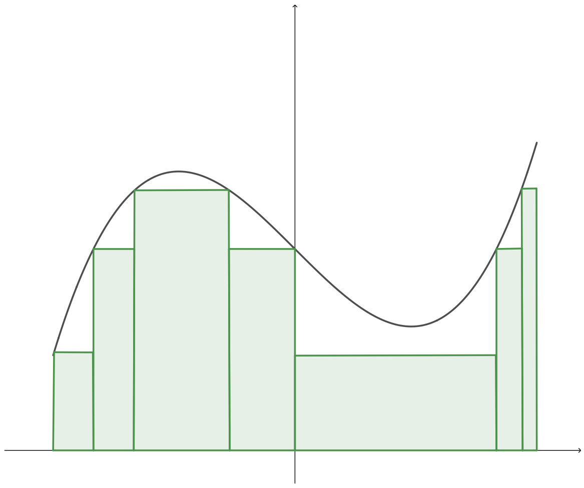


図 3　非負関数を下から単関数で近似し, その面積の極限として積分を定義する.

定義だけをみると仰々しく見えるが $\mathbb{R}$ 上の連続関数の積分を考える上ではあまり難しく考えなくてよく (定理 A.4.6, 定理 A.4.7), 基本的な性質はすべて引き継いでいる[*19]. しかしルベーグ積分を考える利点は非常に多い. それは例えば次のようにリーマン積分が定義できなかった関数に対しても積分を定義できるといったものである.[*20] また収束定理などは積分と極限の交換を考える上では非常に強力な定理である (付録 A 章).

なにより関数の定義域が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^d$ に限らないことが確率論においては重要である.

例題 2.1.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 A を $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする. このとき

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

---

*18 複素数値可測関数 g に対しては $\mathrm{Re}\, g, \mathrm{Im}\, g \in L^1(\mu)$ の場合に限り

$$\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega (\mathrm{Re}\, g(\omega))\, \mu(d\omega) + i\int_\Omega (\mathrm{Im}\, g(\omega))\, \mu(d\omega)$$

と定義する. このとき $g \in L^1(\mu)$ と書く.

また定義から可測関数 f が $f(\omega) = 0$, μ-a.e. をみたすとき $\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = 0$ である.

*19 例えば次のような線型性など.$f, g \in L^1(\mu)$ とする. このとき $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_\Omega (af(\omega) + bg(\omega))\mu(d\omega) = a\int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) + b\int_\Omega g(\omega)\mu(d\omega)$$

*20 例えばリーマン積分の場合, 開集合に対する定義関数ですら積分を定義できないものが存在したがルベーグ積分の場合開集合に対する定義関数は可測関数であるのでルベーグ積分は存在することは定義からわかる.

定義すると, 1_A は可測単関数であり, そのルベーグ積分は

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x)dx = m(A) = \sum_{x\in A} m(\{x\}) = 0$$

となる. (A は可算集合である.)

一方で 1_A はリーマン積分不可能な関数であることをよく知っている.

問 2.1.4. S を可算集合, $\mathcal{F} = 2^S$ とし, $(S,\mathcal{F})$ 上の測度を個数測度 $\sharp$(例題 A.2.3) とする. このとき関数 $f : S \to [0,\infty)$ に対して

$$\int_S f(s)\sharp(ds) = \sum_{s\in S} f(s)$$

となることを示せ. また $f : S \to \mathbb{R}$ のときは

$$\sum_{s\in S} |f(s)| < \infty \text{ のときに積分が定義でき}, \int_S f(s)\sharp(ds) = \sum_{s\in S} f(s)$$

となることを示せ. [*21]

注意 2.1.5. 問 2.1.4 により絶対収束する級数はルベーグ積分と見做すことができる. これにより測度論における様々な定理をリーマン積分だけでなく級数に対しても適用することができる. 特に収束定理 (A.5 節) は非常に重要なものであるので必ず確認しておくこと.

2.1.1 期待値およびモーメント

定義 2.1.2 により測度を用いて積分を定義することができた.

さて測度に基づいて積分を定義できたので本題の期待値の定義に戻ろう. 測度論的確率論の下では期待値は次のように定義される.

$(\Omega,\mathcal{F},P)$: 確率空間.

定義 2.1.6. Ω 上の $\mathbb{R}$-値確率変数 X の**期待値** (平均) は $X \in L^1(P)$ のとき

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

と定義され, 特に $E[X]$ と書く. また $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$E[X : A] = \int_A X(\omega)P(d\omega)$$

と定義する.

問 2.1.7. 任意の確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に対して $E[1] = 1$ であることを示せ. また $A \in \mathcal{F}$ に対して $E[1_A] = P(A)$ であることを示せ.

定義 2.1.6 では $\mathbb{R}$-値確率変数の期待値を考えたが, 今後のために少し一般化したものを考えておこう.

[*21] ヒント: $S = \mathbb{N}$ と考えてよい. $f : \mathbb{N} \to [0,\infty)$ のとき, $f_n(s) = f(s)1_{\{1,2,\cdots,n\}}(s)$ とおいてみる.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.
$(S, \mathcal{S})$: 可測空間.

定理 2.1.8. X を Ω 上の S-値確率変数とする. $f : S \to [0, \infty)$ を可測関数とする. このとき

$$E[f(X)] = \int_\Omega f(X(\omega))P(d\omega) = \int_S f(s)\mu_X(ds) \tag{2.2}$$

が成り立つ. ただし μ_X は (1.2) で定義された S 上の確率測度である.
さらに可測関数 f に対して $f(X) \in L^1(P)$ または $f \in L^1(\mu_X)$ であるとき (2.2) が成り立つ.

問 2.1.9. 定理 2.1.8 を以下の要領で証明せよ.

(i) f が非負可測単関数の場合に (2.2) を示せ.
(ii) 一般の非負可測関数の場合に (2.2) を示せ.
(iii) 可測関数 f が $f(X) \in L^1(P)$ または $f \in L^1(\mu_X)$ のとき (2.2) が成り立つことを示せ.

注意 2.1.10. 問 2.1.9 のように非負単関数, 非負可測関数, 一般の可測関数という順序で証明を与えていく手法はしばしば用いられる.

問 2.1.11. $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ を確率空間とする. μ が密度関数 f を持つとする. このとき可測関数 $g \in L^1(\mu)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx$$

が成り立つことを示せ.[*22]

冗長になるかもしれないが定義 2.1.6 が今まで扱ってきた古典的な意味での期待値の拡張と捉えて問題ないことを確かめておこう.

例題 2.1.12. 例題 1.1.11 の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考える. このとき Ω 上の可測関数 (確率変数)f に対して定義に従って期待値を考える. 関数 $f : \Omega \to [0, \infty)$ に対して

$$\int_\Omega f(\omega)P(d\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega)p_\omega$$

となる. また $f : \Omega \to \mathbb{R}$ のときは

$$\sum_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|p_\omega < \infty \text{ のときに積分が定義でき, } \int_\Omega f(\omega)P(d\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} f(\omega)p_\omega$$

となる.

例題 2.1.12 の確認のためにこの節冒頭の例に適用してみよう.
確率空間は標本空間 $\Omega = \{\text{表}, \text{裏}\}$, 事象全体は 2^Ω とする. $p_{\text{表}} = p_{\text{裏}} = \dfrac{1}{2}$ とする.
Ω 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$f(\text{表}) = 1,\ f(\text{裏}) = -1$$

[*22] ヒント: 収束定理.

とすると f の期待値は

$$E[f] = \sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) p_\omega = f(表) p_{表} + f(裏) p_{裏} = 0$$

となる.

問 2.1.13. $n \in \mathbb{N}$ に対して $P(X = 2^n) = \frac{1}{2^n}$ となる確率変数を考える. X の期待値を求めよ.

さらにモーメントと呼ばれるものを考える.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定義 2.1.14. X を Ω 上の実数値確率変数とする. $p \geqslant 1$ に対して $|X|^p \in L^1(P)$ であるとき $X \in L^p$ と書き, 特に自然数 $n \geqslant 1$ に対して $X \in L^n$ であるとき

$$m_n = E[X^n]$$

を X の n 次**モーメント**という. 特に $E[X^2] < \infty$ であるとき

$$V(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$

を X の**分散**という.

また $X, Y, XY \in L^1(P)$ のとき

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$$

を X, Y の**共分散**という.

注意 2.1.15. 第 7 章以降では, 確率変数 X がどのような可測性を持っているのかを強調することがしばしばある. そのようなときには $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ や $X \in L^p(\mathcal{F}, P)$ のように書くことがある.

注意 2.1.16. 確率変数 X が 2 次モーメントを持てば必ず期待値が存在する. [*23]

問 2.1.17.

(i) $X^2 \in L^1(P)$ のとき

$$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

を示せ.

(ii) $X, Y, XY \in L^1(P)$ のとき

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

を示せ.

また多次元の確率変数に対して, 各成分に対して共分散を計算したものをみることがある.

$X = (X_1, \cdots, X_d)$: $\mathbb{R}^d$-値確率変数.

[*23] ヘルダーの不等式を使わなくても容易にわかる.

定義 2.1.18. $X_i \in L^2 (1 \leqslant i \leqslant d)$ とする. X の**分散行列**とは

$$\Sigma = \left(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right)_{i,j=1}^{d}$$

で与えられる $d \times d$ 行列のことをいう.

注意 2.1.19. d 次元正規分布の定義にあった分散行列 Σ はまさに上で定義した分散行列のことである.

いくつか簡単な分布のモーメントを計算しておく.

例題 2.1.20. (ポアソン分布) $\lambda > 0$ に対して

$$X \overset{d}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda)$$

であるとき

$$m_1 = \sum_{k \geqslant 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} k = \sum_{k \geqslant 0} \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda, \; m_2 = \sum_{k \geqslant 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} (k(k-1) + k) = \lambda^2 + \lambda$$

例題 2.1.21. ((a, b) 上の一様分布) $-\infty < a < b < \infty$ に対して

$$X \overset{d}{\sim} \mathrm{Unif}(a, b)$$

であるとき

$$m_n = \int_a^b x^n \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{n+1} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}$$

となる.

例題 2.1.22. ($\mathbb{R}$ 上の正規分布) $\mu \in \mathbb{R}, v > 0$ に対して

$$X \overset{d}{\sim} N(\mu, v)$$

であるとき

$$m_1 = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2v}\right) dx = \mu$$

となる.

問 2.1.23. $\mu \in \mathbb{R}, v > 0$ に対して

$$X \overset{d}{\sim} N(\mu, v)$$

であるとき

$$V(X) = v$$

であることを示せ.

問 2.1.24.

$$X \overset{d}{\sim} N(0, 1)$$

であるとき, $n \in \mathbb{N}$ に対して $E[X^n]$ を求めよ.

問 2.1.25. 確率変数 X が以下の確率分布に従うとき期待値 $E[X]$, 分散 $V(X)$ が与えられたものになることを確かめよ. ただし $p \in (0,1), \alpha > 0, \lambda > 0$ とする.

(i) $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Bin}(n,p), E[X] = np, V(X) = np(1-p)$

(ii) $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Geo}_{\mathbb{N}}(p), E[X] = \dfrac{1}{p}, V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$

(iii) $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda), E[X] = \dfrac{1}{\lambda}, V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

(iv) $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}(\alpha,\lambda), E[X] = \dfrac{\alpha}{\lambda}, V(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$

2.1.2 不等式

確率論では非常に複雑な確率変数 (例えば $X_1 + \cdots + X_n$) を扱うことが目標の一つである. そのような確率変数の分布を計算することはほぼ不可能であるため, 色々な不等式を用いる. ここでは期待値や分散を用いた確率論でよく使われる不等式を紹介しておく.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率変数.

定理 2.1.26. (i) **(マルコフの不等式)** 確率変数 X が $X \in L^1(P)$ とする. このとき

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E[|X|]}{\lambda} \quad \lambda > 0$$

が成り立つ.

(ii) **(チェビシェフの不等式)** 確率変数 X が $X^2 \in L^1(P)$ とする. このとき

$$P(|X - E[X]| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{V(X)}{\lambda^2} \quad \lambda > 0$$

が成り立つ.

証明. (i) 明らかに

$$\lambda 1_{|X(\omega)| \geqslant \lambda}(\omega) \leqslant |X(\omega)|$$

が成り立つ. 両辺の積分をとれば成り立つ.

(ii) 同様. □

問 2.1.27. 確率変数 X が $p > 0$ に対して $X^p \in L^1$ であるとする. このとき

$$P(|X| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{E[|X|^p]}{\lambda^p}, \ \lambda > 0$$

が成り立つことを示せ.

問 2.1.28. 可測関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\varphi \geqslant 0$ を満たしているとする. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $i_A = \inf\{\varphi(x) : x \in A\}$ とおくと

$$i_A P(X \in A) \leqslant E[\varphi(X) : X \in A] \leqslant E[\varphi(X)]$$

が成り立つことを示せ.

問 2.1.29. $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Poi}(n)$ とする. このとき

$$P(X \geqslant 3n) \leqslant \frac{1}{9} + \frac{1}{9n}$$

となることを示せ.

測度論の定理の帰結として次の不等式がよく知られている. (定理 D.1.8, 定理 D.1.11)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定理 2.1.30. (i) **(ヘルダーの不等式)** $X \in L^p(P), Y \in L^q(P)$ とする. ただし $p, q \in [1, \infty]$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ をみたすとする. このとき $XY \in L^1(P)$ であり

$$|E[XY]| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_q$$

が成り立つ. ただし $1 \leqslant p < \infty$ のとき $\|X\|_p = E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}$, $p = \infty$ のとき $\|Y\|_\infty = \inf\{M : P(|X| > M) = 0\}$ とする.

(ii) **(ミンコウスキの不等式)** $p \in [1, \infty]$ に対して $X, Y \in L^p(P)$ とする. このとき

$$\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p$$

が成り立つ.

問 2.1.31. $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$ とする. このとき $X \in L^{p'}(P)$ ならば $X \in L^p(P)$ であることを示せ.

問 2.1.32. 確率変数 X が $P(X \geqslant 0) = 1$ を満たし, $E[X^2] < \infty$ とする. このとき

$$P(X > 0) \geqslant \frac{E[X]^2}{E[X^2]}$$

が成り立つことを示せ.

次の定理は確率測度特有の性質である.

関数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が**凸関数**であるとは

$$\text{任意の}\lambda \in (0,1) \text{ と } x, y \in \mathbb{R} \text{ に対して}\lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \geqslant \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

が成り立つときをいう.

定理 2.1.33. **(イェンセンの不等式)** $\mathbb{R}$-値確率変数 X が $X, \varphi(X) \in L^1(P)$ であるとき

$$E[\varphi(X)] \geqslant \varphi(E[X])$$

が成り立つ.

証明. $c = E[X]$ とする. $\ell_{a,b}(x) = ax + b$ を $\ell_{a,b}(c) = \varphi(c)$, かつ $\varphi(x) \geqslant \ell_{a,b}(x)$ となるように a, b に対して定義する. このような $\ell_{a,b}$ は

$$\varphi'(c-) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(c) - \varphi(c-h)}{h} \leqslant \lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} = \varphi'(c+)$$

より, $a \in [\varphi'(c-), \varphi'(c+)]$ に対して $\ell_{a,\varphi(c)-ac}(x) = a(x-c) + \varphi(c)$ とすると見つかる. よって

$$E[\varphi(X)] \geqslant E[\ell_{a,b}(X)] = aE[X] + b = \ell_{a,b}(E[X]) = \varphi(E[X]).$$

□

例題 2.1.34. 凸関数の例としてよく用いられるのは $|x|, |x|^p (p \geqslant 1), \exp(ax)\ (a \in \mathbb{R}), -\log x$ などである.

例題 2.1.35. $X, \exp(X) \in L^1(P)$ ならば

$$\exp\left(E\left[X\right]\right) \leqslant E\left[\exp(X)\right]$$

が成り立つ.

次の定理は連続関数の**連続率**と呼ばれるものを評価するときに有用である.

定理 2.1.36. (Garsia-Rodmich-Rumsey の補題) $d \geqslant 1$ とし, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ とする. $\Psi, p : [0,\infty) \to [0,\infty)$ は $\Psi(0) = 0, p(0) = 0, \lim_{x\to\infty} \Psi(x) = \infty$ をみたす狭義単調増加関数とする. Ψ が凸関数であり,

$$\Gamma := \int_{[0,1]^d} \int_{[0,1]^d} \Psi\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{p(|x-y|)}\right) dxdy < \infty \tag{2.3}$$

をみたすとする. このとき任意の $x, y \in [0,1]^d$ に対して

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 8 \int_0^{|x-y|} \Psi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{u^{2d}}\right) dp(u) \tag{2.4}$$

が成り立つ.

例題 2.1.37. $\Psi(x) = x^p, p(x) = x^q$ としたとき, もし $pq > 2d$ に対して Γ が有限であれば

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{8q\Gamma^{\frac{1}{p}}}{q - \frac{2d}{p}} |x-y|^{q - \frac{2d}{p}}$$

が成り立つ.

この定理の強力なところは f の情報が Γ にしか現れないことにある. 本来であれば連続率を扱うには任意の 2 点を比較することが必要であるが, それを積分という形でまとめて処理できている点が重要になる. (確率論において本領を発揮するのはブラウン運動などの連続関数に値をとるような "確率変数"について扱うときである.)

定理 2.1.36 の証明. 簡単のために $d = 1$ の場合を考える. $x, y \in [0,1]$ に対して, $Q_0 = [x, y]$ とする. 区間の列 $\{Q_n : n \geqslant 0\}$ を以下のように一つ選ぶ.

(1) $Q_n \subset Q_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$
(2) $p(|Q_n|) = \frac{1}{2} p(|Q_{n-1}|)$ $(n \geqslant 1)$

ただし $[0,1]$ の区間 Q に対して $|Q|$ で Q の区間の長さを表すとする.

また $[0,1]$ の区間 Q に対して $f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$ とおく. このときイェンセンの不等式より

$$\Psi\left(\frac{|f_{Q_n} - f_{Q_{n-1}}|}{p(|Q_{n-1}|)}\right) \leqslant \frac{1}{|Q_n|}\int_{Q_n} \Psi\left(\frac{|f(x) - f_{Q_{n-1}}|}{p(|Q_{n-1}|)}\right) dx$$
$$\leqslant \frac{1}{|Q_n||Q_{n-1}|}\int_{Q_n}\int_{Q_{n-1}} \Psi\left(\frac{|f(x) - f(y)|}{p(|Q_{n-1}|)}\right) dxdy$$

となる. ここで (2.3) より

$$\Psi\left(\frac{|f_{Q_n} - f_{Q_{n-1}}|}{p(|Q_{n-1}|)}\right) \leqslant \frac{\Gamma}{|Q_n||Q_{n-1}|}$$

が成り立つ.

Ψ の単調性を用いると

$$|f_{Q_n} - f_{Q_{n-1}}| \leqslant \Psi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{|Q_n||Q_{n-1}|}\right) p(|Q_{n-1}|)$$

が成り立つ. さらに $p(|Q_{n-1}|) = 2(p(Q_{n-1}) - p(|Q_n|)) = 4(p(|Q_n|) - p(|Q_{n+1}|))$ であることと Ψ^{-1} の単調性から

$$|f_{Q_n} - f_{Q_{n-1}}| \leqslant 4\int_{|Q_{n+1}|}^{|Q_n|} \Psi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{u^2}\right) dp(u)$$

が成り立つ. $\{Q_n\}$ を $x \in Q_n$ $(n \geqslant 0)$ となるように選ぶと f の連続性から $f_{Q_n} \to f(x)$ であり

$$|f(x) - f_{Q_0}| \leqslant 4\int_0^{|Q_1|} \Psi^{-1}\left(\frac{\Gamma}{u^2}\right) dp(u)$$

となる. x を y に置き換えても同じであることから示された. □

2.1.3 分布の特徴づけ

ここで 1 つ重要な定理を与えておく.

定理 2.1.38. μ, ν を可測空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とする. このとき以下は同値.

(i) 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $\mu(A) = \nu(A)$. ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上 $\mu = \nu$ と書く.)

(ii) 任意の有界な連続関数 f に対して $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\nu(dx)$.

注意 2.1.39. 定理 2.1.38 により $\mathbb{R}$-値確率変数 X, Y の確率分布が一致していることを知るためには

任意の有界連続関数 f に対して $E[f(X)] = E[f(Y)]$

を見ればよいことがわかった.

証明には測度論の知識 (B.1 節) を使うので必要な場合は確認しておくとよい.

証明. (i)⇒(ii): 積分の定義から明らか.[*24]

[*24] 可測単関数の積分が一致するので非負可測関数, 可積分関数の積分がすべて一致する.

(ii)⇒(i): 定理 B.1.8 と $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ の構成より, 任意の左半開区間 $(a,b] \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\mu((a,b]) = \nu((a,b])$$

を言えばよい (問 B.1.6 も参照).

有界連続関数列 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ で

$$\text{任意の } x \in \mathbb{R} \text{ に対して } 0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1,\ f_n(x) = 1_{(a,b]}(x) \tag{2.5}$$

となるものが存在する. このときルベーグの収束定理の仮定を満たしているので

$$\begin{aligned}\mu((a,b]) = \int_{\mathbb{R}} 1_{(a,b]}(x)\mu(dx) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu(dx) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} 1_{(a,b]}\nu(dx) = \nu((a,b])\end{aligned}$$

となり示された. □

問 2.1.40. (2.5) をみたす有界連続関数列 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ を構成せよ.

問 2.1.41. 定理 2.1.38 を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度 μ, ν に対して主張を書き換え, その証明を与えよ.

例題 2.1.42. $X \overset{d}{\sim} N(0,1)$ であるとする. このとき $X^2 \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である.

証明. 任意の有界連続関数 f に対して

$$E[f(X^2)]$$

を考える. これは有界連続関数 $g(x) = f(x^2)$ に $x = X$ を代入した確率変数の期待値とみなすことができるので

$$\begin{aligned}E[f(X^2)] &= \int_{\mathbb{R}} f(x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= 2\int_0^\infty f(x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\end{aligned}$$

となる. $x^2 = t$ と変数変換すると

$$\int_0^\infty f(x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

となる. よって

$$E[f(X^2)] = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2}}t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}dt$$

となるので X^2 の確率分布はパラメータ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ のガンマ分布である. □

問 2.1.43. $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Unif}(0,1)$ とする. このとき $c > 0$ に対して $-c\log X \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}(c,1)$ であることを示せ.

2.2 問題

問題 2.1. $\mathbb{R}$-値確率変数 X はある定数 $t_0 > 0$ が存在し任意の $-t_0 < t < t_0$ に対して $f(t) = E\left[e^{tX}\right] < \infty$ が成り立つとする. このとき $f(t)$ は $-t_0 < t < t_0$ において無限回連続微分可能であり

$$E[X^n] = \left.\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right|_{t=0}$$

となることを示せ.

問題 2.2. $\mathbb{R}$-値確率変数 X がある $a \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(aX) \in L^1(P)$ であるとする.

(i) $E[\exp(aX)] \geqslant \exp(aE[X])$ であることを示せ.
(ii) $a > 0$ のとき, 任意の $t > 0$ に対して $P(X > t) \leqslant E[\exp(a(X-t))]$ であることを示せ.
(iii) $a < 0$ のとき, 任意の $t < 0$ に対して $P(X < t) \leqslant E[\exp(a(X-t))]$ であることを示せ.

問題 2.3. $I \subset \mathbb{R}$ を開集合とする. 連続関数 $f : I \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$-値確率変数 X の密度関数とする. $a > 0$ を定数とする. このとき確率変数 $Y = aX$ の密度関数を a と f を用いて表せ.

問題 2.4. μ, ν を $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度とする. 以下は同値であることを示せ.

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上 $\mu = \nu$.
(ii) 任意の有界な連続微分可関数 f に対して $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\nu(dx)$.

問題 2.5. (X, Y) は $B(0;1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ 上の一様分布に従う確率変数とする. このとき確率変数 X と $X^2 + Y^2$ それぞれの密度関数を求めよ.

問題 2.6. $X_1, \cdots, X_n$ は独立同分布な $(0, \infty)$-値確率変数で $X_1^{-1} \in L^1$ となるようなものとする. このとき任意の $1 \leqslant m \leqslant n$ に対して

$$E\left[\frac{X_1 + \cdots + X_m}{X_1 + \cdots + X_n}\right] = \frac{m}{n}$$

となることを示せ. (**ヒント:** $E\left[\dfrac{X_i}{X_1 + \cdots + X_n}\right]$ に対する対称性.)

3 独立性 (再訪)

この章では独立性に関してもう少し踏み込んだ話を扱っていく. 以下, 確率空間が $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は特に断りがない限り適当な確率空間とする.

キーワード: フビニの定理, 直積測度, ポアソン過程

3.1 直積測度

定義 1.3.9 の直後で述べたように測度論的確率論では独立な確率変数は確率空間の直積空間で与えられる. これを見てみよう. 測度空間の直積およびフビニの定理は付録 C 章で扱っているので知識が曖昧な場合は見直すことを勧める.

$\{(S_i, \mathcal{S}_i, \mu_i) : i = 1, \cdots, n\}$: 確率空間族.

定理 3.1.1. X_k を S_k-値確率変数で μ_k という確率分布に従うとする. $X = (X_1, \cdots, X_n)$ の分布が μ_X で与えられたとする. このとき以下は同値

(i) $X_1, \cdots, X_n$ が独立.

(ii) 可測空間 $\left(\prod_{i=1}^{n} S_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{S}_i\right)$ 上の確率測度として

$$\mu_X = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$$

が成り立つ.

証明. (i)⇒(ii)　仮定より任意の $B_i \in \mathcal{S}_i$ に対して

$$\mu_X(B_1 \times \cdots \times B_n) = P(X_i \in B_i, i = 1, \cdots, n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(B_i)$$

が成り立つ. このとき直積測度の構成より (ii) が従う.

(ii)⇒(i)　定義より明らか. □

定理 3.1.1 を用いると次のように独立性を持つことで非常に良い性質を導くことができる.

定理 3.1.2. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとする. $X_1, \cdots, X_n \in L^1(P)$ であるとき $\prod_{i=1}^{n} X_i \in L^1(P)$ であり, かつ

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} E[X_i] \tag{3.1}$$

が成り立つ. また $X_1, \cdots, X_n$ が非負であるときも (3.1) が成り立つ.

証明. フビニの定理と定理 3.1.1 より

$$
\begin{aligned}
E\left[\left|\prod_{i=1}^{n} X_i\right|\right] &= \int_{\mathbb{R}^n} |x_1 \times \cdots \times x_n| \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i(d(x_1, \cdots, x_n)) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} |x_i| \mu_i(dx_i) \\
&= \prod_{i=1}^{n} E[|X_i|] < \infty
\end{aligned}
$$

となり, これより $\prod_{i=1}^{n} X_i \in L^1(P)$ である. さらに $E\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right]$ にフビニの定理を適用すると (3.1) が求まる. □

問 3.1.3. 定理 3.1.2 は $\mathbb{C}$-値確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ に対しても成り立つことを示せ.

問 3.1.4. X_i $(i = 1, \cdots, k+\ell)$ を S_i-値確率変数で独立なものとする.

(i) 可測関数 $f_i : S_i \to \mathbb{C}$ に対して $\{f_i(X_i) : i = 1, \cdots, n\}$ は独立であることを示せ.

(ii) $\left(\prod_{i=1}^{k} S_i, \bigotimes_{i=1}^{k} \mathcal{S}_i\right)$ 上の可測関数 f, $\left(\prod_{i=k+1}^{k+\ell} S_i, \bigotimes_{i=k+1}^{k+\ell} \mathcal{S}_i\right)$ 上の可測関数 g に対して

$$
Y = f(X_1, \cdots, X_n), Z = g(X_{k+1}, \cdots, X_{k+\ell})
$$

とすると Y, Z は独立であることを示せ. また $Y, Z \in L^1(P)$ ならば

$$
E[f(X_1, \cdots X_k) g(X_{k+1}, \cdots, X_{k+\ell})] = E[f(X_1, \cdots X_k)] E[g(X_{k+1}, \cdots, X_{k+\ell})]
$$

が成り立つことを示せ.

さて独立性に関連して次のような命題が与えられる.

命題 3.1.5. 実数値確率変数列 $X_1, \cdots, X_n$ が独立で, $X_1, \cdots, X_n \in L^2(P)$ であるとき

$$
V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)
$$

が成り立つ. また

$$
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0, \quad i \neq j.
$$

証明. 略. □

注意 3.1.6. 共分散についてもう少し見てみよう. X, Y を実数値確率変数とする. このときヘルダーの不等式 (補題 D.1.8) を用いると

$$
|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant E\left[|X - E[X]|^2\right]^{1/2} E\left[|Y - E[Y]|^2\right]^{1/2}
$$

が成り立つ. すなわち

$$
-1 \leqslant \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \leqslant 1
$$

である. 実数値確率変数 X, Y が与えられたとき

$$
\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \in [-1, 1]
$$

を**相関係数**と呼ぶ. 命題 3.1.5 は実数値確率変数 X, Y が独立ならば相関係数が 0 となることを主張している. 一般にこの逆は成り立たない.

例題 3.1.7. 確率変数 X, Y を次のような分布で定義する.

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=2) = P(X=-1, Y=-2) = \frac{1}{4}$$

このとき容易に

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

である. 一方で

$$P(X=-1, Y=1) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(X=-1)P(Y=1)$$

となり X, Y は独立ではない.

ここで独立な $\mathbb{R}^d$-値確率変数 X, Y の和 $X+Y$ の分布を X, Y の分布を用いて表現する.

問 3.1.8. 独立な $\mathbb{R}^d$-値確率変数 X, Y の分布は μ_X, μ_Y で与えられているとする. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} 1_A(x+y)\mu_X(dx)\mu_Y(dy) \tag{3.2}$$

で $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ を定義する.

(i) ν は $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上の確率測度であることを示せ.
(ii) 確率変数 $X+Y$ の分布は ν で与えられることを示せ.

注意 3.1.9. (3.2) で与えられる測度を μ_X と μ_Y の**たたみこみ**といい, $\mu_X * \mu_Y$ と表す.

問 3.1.10. X, Y は独立な確率変数で標準正規分布に従うとする. このとき

$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$$

も標準正規分布に従うことを示せ.

ここで独立性を用いることで得られる不等式を与えておこう.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 独立な $\mathbb{R}$-値確率変数

定理 3.1.11. **(コルモゴロフの不等式)** 各 $n \geqslant 1$ に対して $E[X_n] = 0, V(X_n) < \infty$ が成り立つとする. このとき

$$P\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_1 + \cdots + X_i| > x\right) \leqslant \frac{1}{x^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

が成り立つ.

証明. $n \geqslant 1$ に対して $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とおく. 事象

$$A_j = \{|S_j| > x \text{ かつ } i < j \text{ に対して} |S_i| \leqslant x\}$$

を考える. このとき

$$
\begin{aligned}
E\left[S_n^2\right] &\geqslant \sum_{i=1}^{n} E\left[S_n^2 : A_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left[(S_i^2 + 2S_i(S_n - S_i) + (S_n - S_i)^2) : A_i\right] \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n} E\left[(S_i^2 + 2S_i(S_n - S_i)) : A_i\right]
\end{aligned}
$$

である. $S_i \mathbf{1}_{A_i}$ と $(S_n - S_i)$ は独立であることが仮定からわかるので

$$E[S_i(S_n - S_i) : A_i] = 0$$

である. よって

$$E\left[S_n^2\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n} E\left[S_i^2 : A_i\right] \geqslant \sum_{i=1}^{n} x^2 P(A_i) = x^2 P\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |S_i| > x\right)$$

がわかる. □

問 3.1.12. 所持金 N ドルからはじめて次のようなゲームを行う:

それぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で表, 裏がでるコイン投げを行い, 表が出ると 1 ドルもらい, 裏が出ると 1 ドル支払う.

$2N^2$ 回ゲームを行ったき, 所持金が 0 ドルまたは $2N$ に一度でもなる確率は $\frac{1}{N}$ 以下であることを示せ.

3.2 *ポアソン過程

この節では独立性に関連してポアソン過程と呼ばれる確率過程の定義を与えておく. これまで考えていた確率模型はコインを (n 回) 投げる, くじを (n 回) 引く, など確率変数の離散的な族 $\{X_1, X_2, \cdots\}$ で表せた. この節で定義するポアソン過程は確率変数の連続的な族 $\{X_t : t \in [0, \infty)\}$ を与えることになる.

定義 3.2.1. 確率変数の族 $\{N_t : t \in [0, \infty)\}$ がレート $\lambda > 0$ の**ポアソン過程**であるとは以下の 2 条件をみたすときをいう.

(i) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ $(n \geqslant 1)$ に対して $\{N_{t_k} - N_{t_{k-1}} : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ は独立である.
(ii) $N_t - N_s \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda(t - s))$.

ポアソン過程が実際に構成できるのかは自明ではない. ここでは [3, 2 章 (6.2)] による構成方法を紹介しておく.

ポアソン過程の構成. $\{\xi_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列で $\xi_n \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ となるものとする. $T_0 = 0$, $n \geqslant 1$ に対して $T_n := \xi_1 + \cdots + \xi_n$ と定義する. $N_t := \sup\{n \geqslant 0 : T_n \leqslant t\}$ とおく. このようにして構成した $\{N_t : t \geqslant 0\}$ がレート λ のポアソン過程になっている. ここで問題 3.9 より

$$
\begin{aligned}
&P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, \\
&P(N_t = n) = P(T_n \leqslant t < T_{n+1}) = \int_0^t P(\xi_{n+1} > t - s) P(T_n \in ds) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

となる. これにより $N_t \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda t)$ であることがわかった.

次に $0 \leqslant t < u < \infty, n \geqslant 0$ に対して条件付き確率

$$P(T_{n+1} > u | N_t = n) = \frac{P(T_{n+1} > u, T_n \leqslant t)}{P(N_t = n)}$$

を計算すると上と同じ議論で

$$P(T_{n+1} > u | N_t = n) = e^{-\lambda(u-t)}$$

となる. これは $\{N_t = n\}$ の条件のもとでは $T_{n+1} - t$ の分布が $\mathrm{Poi}(\lambda)$ になることを言っている. $T_1' := T_{N_t+1} - t$, $T_k' := T_{N_t+k} - T_{N_t+k-1}$ $(k \geqslant 2)$ という確率変数列を考えると $0 \leqslant t < \infty$, $v_k \geqslant 0$ $(k \geqslant 1)$, $n \geqslant 0$, $K \geqslant 1$ に対して

$$\begin{aligned} &P\left(T_k' > v_k, k = 1, \cdots, K | N_t = n\right) \\ &= P\left(T_{n+1} - t > v_1, T_{n+k} - T_{n+k-1} > v_k, k = 2, \cdots, K | N_t = n\right) = \prod_{k=1}^{K} e^{-\lambda v_k} \end{aligned}$$

となる. これは $\{T_n' : n \geqslant 1\}$ は独立同分布で $T_n' \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ であり, N_t と独立であることを意味している.

また $\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}} : i = 2, \cdots, n\}$ は上の議論で $t = t_1$ としたとき $\sigma[T_k' : k \geqslant 1]$-可測であることに注意すると N_{t_1} と独立であることがわかる. 帰納的に

$$P(N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i, i = 1, \cdots, n) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\lambda(t_i - t_{i-1})\right) \frac{(\lambda(t_i - t_{i-1})^{k_i}}{k_i!}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0 (i = 1, \cdots, n)$$

となることがわかるのでポアソン過程の条件 (i), (ii) をみたすことが示された. □

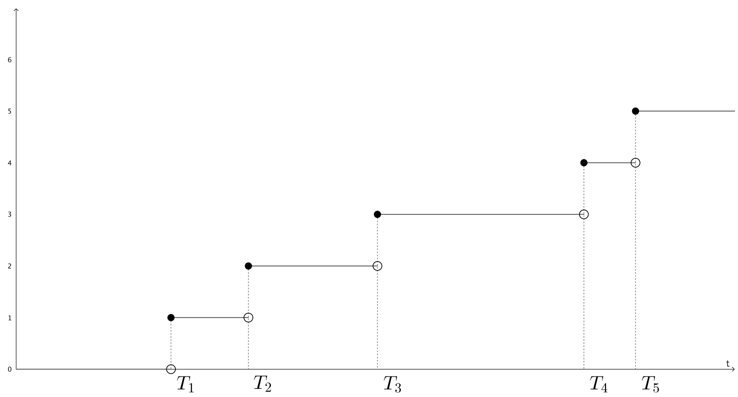


図 4　ポアソン過程の $\{T_n : n \geqslant 1\}$ を用いた構成の捉え方.

ここで与えたポアソン過程の構成法の考え方は連続時間離散状態のマルコフ過程を考える時などに非常に重要になる.

例題 3.2.2. ($M/M/1$ 待ち行列) あるお店ではレジが一つある. 客一人当たりの精算にかかる時間が独立に $\mathrm{Exp}(\mu)$ に従っているとする. また時刻 t までに精算にくる客の数はレート λ のポアソン過程に従っているとした時に時刻 t でレジに並んでいる精算待ちの客の数を考える確率モデルを $\mathbf{M}(\lambda)/\mathbf{M}(\mu)/\mathbf{1}$ **待ち行列**という.

ポアソン過程と関連して測度空間 $(S, \mathcal{S}, \mu)$ 上のポアソン点過程の構成について考えていく.

問 3.2.3. $N \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda)$ とする．N と独立な $\{s_1, \cdots, s_k\}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布で $P(X_n = s_i) = p_i$ $(i = 1, \cdots, k)$ をみたすとする. 確率変数の族 $\{N_i : i = 1, \cdots, k\}$ を

$$N_i = \sharp\{m \leqslant N : X_n = s_i\} \quad i = 1, \cdots, k$$

と定義したとき, $\{N_i : 1 \cdots, k\}$ は独立で $N_i \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda p_i)$ であることを示せ.

まずはポアソン点過程がどういったものかを述べておくと, 可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上に置かれたランダムな点の集合である性質をみたすものである.

注意 3.2.4. ランダムな点集合を定義する適当な可測空間を構成しておく必要がある. $(S, \mathcal{S})$ 上の非負整数値測度全体を

$$\mathfrak{N}_\infty(S) := \{\mu : \text{任意の } A \in \mathcal{S} \text{ に対して} \mu(A) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}$$

と表し, 任意の $B \in \mathcal{S}$ に対して $\pi_B : \mathfrak{N}(S) \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ を $\pi_B(\mu) = \mu(B)$ で定義する. このとき $\mathfrak{N}(S)$ 上の σ-加法族を $\sigma[\pi_B : B \in \mathcal{S}]$ で定義する.

ここでのアイデアは S 上のランダムな点集合 $\{x_i : i \in I\}$ を $\sum_{i \in I} \delta_{x_i}(dx) \in \mathfrak{N}(S)$ と同一視したいということである. [*25]

定義 3.2.5. (ポアソン点過程)

可測空間 $(S, \mathcal{S})$ は適切な性質をみたすとする. $(S, \mathcal{S})$ 上の σ-有限な測度 μ を強度として持つポアソン点過程 $\mathfrak{n}$ とは以下をみたすものをいう.

(i) 任意の互いに素な集合 $A_i \in \mathcal{S}$ に対して $\{\mathfrak{n}(A_1), \cdots, \mathfrak{n}(A_n)\}$ は独立である.
(ii) $A \in \mathcal{S}$ が $\mu(A) < \infty$ ならば $\mathfrak{n}(A) \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\mu(A))$.

当然ポアソン点過程が存在するかどうかは自明ではないので構成を与えておこう.

$\mu(S) < \infty$ の場合. $N \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Poi}(\mu(S))$ とする. N と独立な S-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布で

$$P(X_n \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)} \quad A \in \mathcal{S}$$

となるとする[*26]. $A \in \mathcal{S}$ に対して

$$\mathfrak{n}(A) = \sharp\{n \leqslant N : X_n \in A\}$$

と定義すると問 3.2.3 より $\mathfrak{n}$ が定義 3.2.5 の条件 (i), (ii) をみたすことがわかる. $\mu(S) = \infty$ の場合は互いに素な集合 $\{S_n : n \geqslant 1\}$ で $0 < \mu(S_n) < \infty$ かつ $S = \bigcup_{n \geqslant 1} S_n$ となるものを用意し, それぞれの S_n に対して独立にポアソン点過程を構成すればよい. □

注意 3.2.6. 適切な測度空間 (例えばユークリッド空間) の上の局所有限な点過程 $\mathfrak{n}$(つまり任意の有界なボレル可測集合 A に対して $P(\mathfrak{n}(A) < \infty) = 1$) に対してはランダムな点集合 $\{x_n : n \geqslant 1\}$ が存在し

$$\mathfrak{n}(ds) = \sum_{n \geqslant 1} \delta_{x_n}(ds)$$

と表すことができることが知られている.

[*25] $\mathcal{S}$ の選び方によっては $\mu \in \mathfrak{N}(S)$ に対して $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{x_i}$ となるような $\{x_n : n \geqslant 1\}$ を取ることができない. 問題 3.1 参照

[*26] $\{X_n\}$ によって S 上に無限個の点列が与えられている.

$S=[0,\infty)$ 上の強度 λdt のポアソン点過程 $\mathfrak{n}$ に対して $\mathfrak{n}([0,t])$ はポアソン過程である.

問 3.2.7. 適切な可測空間 $(S,\mathcal{S})$ 上の σ-有限測度 ν に対して $\mathfrak{n}$ を強度 ν をもつポアソン点過程とする. $f:\mathcal{S}\to[0,\infty]$ に対して

$$E\left[\int_S f(x)\mathfrak{n}(d)\right]=\int_S f(x)\nu(dx)$$

となることを示せ.

問 3.2.8. 確率空間 $(S,\mathcal{S},\mu)$ に対して S-値確率変数列 $\{X_1,\cdots,X_m\}$ は独立同分布で任意の $B\in\mathcal{S}$ に対して $P(X_m\in B)=\mu(B)$ であるとする. このとき $\mathfrak{N}_\infty(S)$-値確率変数 $\mathfrak{n}=\sum_{i=1}^m\delta_{X_i}$ は

$$P(\mathfrak{n}(B)=k)=\binom{m}{k}\mu(B)^k(1-\mu(B))^{m-k},\quad k=0,\cdots,m$$

となることを示せ.

問 3.2.9. 可測空間 $(S,\mathcal{S})$ 上の強度 ν のポアソン点過程 $\mathfrak{n}$ を考える. $(S,\mathcal{S})$ 上の非負可測関数 $u:S\to[0,\infty]$ に対して

$$E\left[\exp\left(-\int_S u(s)\mathfrak{n}(ds)\right)\right]=\exp\left(-\int_S\left(1-e^{-u(s)}\right)\mu(ds)\right)$$

と表されることを示せ. [*27]

問 3.2.10. 可測空間 $(S,\mathcal{S})$ 上の強度 $\nu_1,\cdots,\nu_n$ を持つ独立なポアソン点過程の列 $\mathfrak{n}_1,\cdots,\mathfrak{n}_n$ を考える. $\mathfrak{n}_1+\cdots+\mathfrak{n}_n$ は強度 $\nu_1+\cdots+\nu_n$ を持つポアソン点過程であることを示せ.

問 3.2.11. 可測空間 $(S,\mathcal{S})$ 上の強度 μ のポアソン点過程 $\setminus$ を与える. $0<\mu(B)<\infty$ となる $B\in\mathcal{S}$ と B の分割 $B_1,\cdots,B_n$ を考える. 任意の $k=1,\cdots,n$ に対して $0<\nu(B_k)<\infty$ であるとき

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n\{\mathfrak{n}(B_k)=m_k\}\middle|\mathfrak{n}(B)=m\right)=\frac{m!}{m_1!\cdots m_n!}\prod_{k=1}^n\left(\frac{\mu(B_k)}{\mu(B)}\right)^{m_k},\quad (m,m_1,\cdots,m_n\in\mathbb{N}_0)$$

となることを示せ.

3.3 † 確率論の応用 II

ここで少し独立性と条件付き確率との関連を述べておこう.

条件付き確率の定義は次で与えられる (問題 1.9 参照).

$(\Omega,\mathcal{F},P)$: 確率空間

定義 3.3.1. (**条件付き確率**) 事象 $A,B\in\mathcal{F}$ を $P(A)>0$ となるものとする. 次で与えられる確率 $P(B|A)$ を, 条件 A の下での B の**条件付き確率**と呼ぶ.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.\tag{3.3}$$

注意 3.3.2. 条件付き確率 $P(B|A)$ は「事象 A が起きたと条件付けたときに B が起こる確率」を表している.

[*27] ヒント: まず u を非負可測単関数の場合に考える.

例題 3.3.3. サイコロを 1 回ふったとする. 出た目が偶数であるという条件の下での出た目が 4 以上であるという条件付き確率を求めてみよう.

すべての目は等確率 $(=\frac{1}{6})$ で出るものとする. A=「出た目が偶数である」, $B=$「4 以上である」とおくと, $P(A)=\frac{1}{2}$ であり, $P(A\cap B)\frac{1}{3}$ である. よって条件付き確率は $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2}{3}$ である.

例題 3.3.4. 事象 A,B が互いに独立であるとする. このとき A の下での B の条件付き確率は

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$

となる. (事象 A は事象 B に何も影響を与えていない.)

ここで有名なモンティ・ホール問題について扱ってみたい.

モンティ・ホール問題は次で与えられる.

モンティ・ホール問題: ゲームの司会とプレーヤーがいる. プレイヤーの前には 3 つの扉があり 1 つの扉の裏には車があり, 他の扉の裏にはヤギ (はずれ) がいる. プレーヤーは 3 つの扉うち 1 つを選び, その扉の向こうにあるものを景品としてもらえるというゲームとする.

さて, プレーヤーが 1 つの扉を選んだあと, 司会が残る 2 つのドアのうち 1 つを選んで開きヤギがいることをプレーヤーに見せた. 司会者がプレーヤーに「選んだ部屋を変更しますか?」と聞いてきた. プレーヤーは変更した方が良いのだろうか?

条件付き確率を用いて調べてみよう.

解説 [11]: 扉を x,y,z と名付ける. 扉 x,y,z の裏に車がある事象を X,Y,Z と表すことにする. このとき

$$\Omega=\{X,Y,Z\}, P(X)=P(Y)=P(Z)=\frac{1}{3}$$

である. プレーヤーは x の扉を選んだとする. このときプレーヤーが車をもらえる確率は $P(X)=\frac{1}{3}$ である. ではここで司会者がどの扉を開けるか考える.

(1) x の裏に車がないとき, 司会者は車のない方の扉を開ける.
(2) x の裏に車があるとき, 司会者は y を確率 p, z を確率 $1-p$ で開けるものとする. $(0\leqslant p\leqslant 1)$

さて司会者が y を開ける事象を O_y, z を開ける事象を O_z と表すことにする. 計算したい条件付き確率は $P(X|O_y)$, $P(X|O_z)$ である.

このとき標本空間は

$$\{X\cap O_y, X\cap O_z, Y\cap O_y, Y\cap O_z, Z\cap O_y, Z\cap O_z\}$$

である. さてこの中で司会者は車のある扉は開かないので $P(Y\cap O_y)=P(Z\cap O_z)=0$ であることがわかる. よって

$$P(O_y)=P\big((X\cap O_y)\cup(Z\cap O_y)\big)=P(X\cap O_y)+P(Z\cap O_y)=\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}$$
$$P(O_z)=P\big((X\cap O_z)\cup(Y\cap O_z)\big)=P(X\cap O_z)+P(Y\cap O_z)=\frac{1}{3}(1-p)+\frac{1}{3}$$

である. $P(X\cap O_y)=\frac{p}{3}$, $P(X\cap O_z)=\frac{1-p}{3}$ であるので条件付き確率は

$$P(X|O_y)=\frac{P(X\cap O_y)}{P(O_y)}=\frac{p}{p+1}$$
$$P(X|O_z)=\frac{P(X\cap O_z)}{P(O_z)}=\frac{1-p}{2-p}$$

である．よって司会者が扉 y を開いたという条件の下では x に車がある条件付き確率は $\frac{p}{p+1}$, z に車がある条件付き確率は $\frac{1}{1+p}$ となる．つまり $p<1$ のときには変えた方がよいのである．

($p=1$ のとき, 例えば司会者が z を開いたとするとこれは y に車があることを意味しており, あまり司会者の振る舞いとしては良くないように思える．しかし上の議論より $p=1$ のときは変えても変えなくても確率は変わらないことになる点では公平である．)

この問題は「囚人のジレンマ」という問題と同値であるので一度調べてみると良い．

3.4 問題

問題 3.1. S を非可算集合とする．

$$\mathcal{S}=\{A\subset S: A \text{ または } A^c \text{が可算集合}\}$$

は S の σ-加法族であることを示し, $\mu:\mathcal{S}\to\{0,1\}$ を

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & A \text{ が可算集合}\\ 1, & A^c\text{が可算集合}\end{cases}$$

と定義したとき, μ は $(S,\mathcal{S})$ 上の測度であることを示せ．

問題 3.2. [*28] 独立同分布な $\mathbb{R}$-値確率変数 X,Y は密度関数 $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ を持つものとする．以下の問に答えよ．

(i) 確率変数 $X+Y$ の密度関数は

$$\int_0^\infty \frac{4}{\pi^2}\frac{x}{e^x-e^{-x}}dx$$

となることを示せ．

(ii) $-1<t<1$ に対して

$$E\left[e^{itX}\right]=\frac{1}{\cos(\frac{\pi t}{2})}$$

となることを示せ．

(iii) $\frac{1}{\cos^2 t}=\sum_{n=0}^\infty T_{2n+1}\frac{t^{2n}}{2n!}$ と展開する (T_n は $\tan t$ のテーラー展開の係数)．このとき

$$E\left[(X+Y)^{2n}\right]=T_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$$

となり

$$\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\zeta(2n)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}\frac{T_{2n-1}}{(2n-1)!}$$

であることを示せ．ただし $\zeta(s)$ $(s>1)$ はリーマン-ゼータ関数である (定義 1.5.1 参照)．

問題 3.3. $I=[0,\infty)$ とする．$(I,\mathcal{B}(I),\mu)$ を測度空間とする．実数値関数 $f\in C^1([0,\infty))$ は非減少関数とする．このとき $f(t)-f(0)=\displaystyle\int_0^t f'(s)ds$ とフビニの定理を用いて

$$\int_I (f(t)-f(0))\mu(dt)=\int_0^\infty f'(x)\mu((x,\infty))dx$$

[*28] Lars Holst: Probabilistic proofs of Euler identities, Journal of Applied Probability Vol. 50, No. 4 (DECEMBER 2013), pp. 1206-1212

が成り立つことを示せ. 特に非負確率変数 X に対して

$$E[f(X)] = f(0) + \int_0^\infty f'(t)P(X \geqslant t)dt$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.4. μ を $\mathbb{N}_0$ 上の測度とする. $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ は非減少関数とする. このとき $f(n) - f(0) = \sum_{i=1}^{n}(f(i) - f(i-1))$ とフビニの定理を用いて

$$\sum_{n\geqslant 1}(f(n) - f(0))\mu(n) = \sum_{n\geqslant 1}(f(n) - f(n-1))\mu(\{x : x \geqslant n\})$$

が成り立つことを示せ. 特に $\mathbb{N}_0$-値確率変数 X に対して

$$E[f(X)] = f(0) + \sum_{n\geqslant 1}(f(n) - f(n-1))\mu(X \geqslant n)$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.5. X, Y を独立な確率変数でそれぞれパラメータ μ, ν の指数分布に従うとする. このとき確率変数

$$Z = \min\{X, Y\} \text{ と } W = 1_{\{X<Y\}}$$

は独立であることを示せ.

問題 3.6. $a, b, c > 0$ とする. X, Y は独立な確率変数であり, それぞれ $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}(c, a)$, $Y \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}(c, b)$ とする. このとき確率変数

$$Z = X + Y, \quad W = \frac{X}{X+Y}$$

は独立であり, $Z \overset{d}{\sim} \mathrm{Gam}(c, a+b)$, $W \overset{d}{\sim} \mathrm{Beta}(a, b)$ であることを示せ.

問題 3.7. X, Y は独立な $\mathbb{R}$-値確率変数でその分布 μ_X, μ_Y はそれぞれ連続な密度関数 f, g を持つとする. このとき $X + Y$ の分布も連続な密度関数 h を持ち,

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}$$

と表されることを示せ.

問題 3.8. X, Y は独立な確率変数でコーシー分布に従うとする. このとき

$$\frac{X+Y}{2}$$

もコーシー分布に従うことを示せ.

問題 3.9. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が独立同分布で $X_n \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ となるとき

$$P(X_1 + \cdots + X_n > s) = \int_s^\infty -\frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda u}du \quad (s \geqslant 0)$$

となることを示せ.

問題 3.10. X, Y, Z を独立な確率変数で, それぞれ $(0,1)$ 上の一様分布に従うとする. 確率変数 XY, Z^2 の密度関数を求め, $P(XY < Z^2) = \dfrac{5}{9}$ であることを示せ.

問題 3.11. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列で $X_1 \overset{d}{\sim} \mathrm{Unif}(0,1)$ とする. $0 < x < 1$ に対して

$$N = \inf\{n \geqslant 1 : X_1 + \cdots + X_n > x\}$$

としたとき, 任意の $n \geqslant 1$ に対して $P(N > n) = \frac{x^n}{n!}$ であることを示せ.

問題 3.12. † $s > 1$ とする. $\mathcal{P}$ で素数全体の集合とする. $\mathbb{N}$-値確率変数 X の分布は (1.5) で与えられるものとする. 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して素因数分解を

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p(n)}$$

を考える. このとき確率変数の族 $\{\alpha_p(X) : p \in \mathcal{P}\}$ を定義できる. 以下のことを示せ.

(i) 各 $p \in \mathcal{P}$ に対して $\alpha_p(X)$ の分布は $\mathrm{Geo}_{\mathbb{N}_0}(p^{-s})$ であることを示せ.
(ii) $\{\alpha_p(X) : p \in \mathcal{P}\}$ は独立であることを示せ.

問題 3.13. * 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義されたレート $\lambda > 0$ のポアソン過程 $\{N_t : t \geqslant 0\}$ で $P(N_0 = 0) = 1$ となるものを考える. 有界な非負可測関数 $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ に対して $f(t) = E[f(N_t)]$ としたとき任意の $0 \leqslant t < \infty$ に対して

$$\frac{d^+}{dt} f(t) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lambda(E[f(N_t + 1)] - E[f(N_t)])$$

となることを示せ.

4　大数の法則

この章では独立同分布な $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を考えたとき. その n 番目までの和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ の挙動を調べる. 挙動を調べる一つの方法が

$$\frac{S_n}{n}$$

を n を大きくしたときの極限を求めることである.

より簡単な例で挙げるとサイコロを投げ続けて 1 が出た回数を考える. 確率変数 X_n を n 回目に 1 が出たら 1, 1 以外が出たら 0 とすれば

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = n \text{ 回目までに 1 が出た回数}$$

となる. このとき $\frac{S_n}{n} = n$ 回目までに 1 が出た回数の割合 となるので経験的に

$$\frac{S_n}{n} \text{``} \to \text{''} \frac{1}{6} = E[X_1]$$

となることが期待される. しかしこの収束は一体どういう意味で捉えるとよいのか.

このあと様々な確率変数の収束の概念を導入することになる. これらの違いを理解していくことは重要である.

キーワード: 概収束, 確率収束, L^p-収束, 大数の法則

4.1　確率変数の収束

この節では確率変数列の収束について議論する.

確率変数の収束を次のように定義する.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定義 4.1.1. X, $\{X_n : n \geqslant 1\}$ をそれぞれ Ω 上の実数値確率変数, 実数値確率変数列とする.

(i) X_n が X へ**概収束**するとは

$$P\left(\left\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

をみたすときをいい,

$$X_n \to X,\ P\text{-a.s.}$$

と書く.

(ii) X_n が X へ**確率収束**するとは

$$\text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}) = 0$$

をみたすときをいい,

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

と書く.

(iii) $1 \leqslant p < \infty$ に対して $|X_n|^p, |X|^p \in L^1(P)$ とする. X_n が X へ L^p **収束**するとは

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$$

をみたすときを言う. ただし $|X|^p \in L^1(P)$ に対して

$$\|X\|_p = E[|X|^p]^{1/p}$$

とする.

$$X_n \xrightarrow{L^p} X$$

と書く.

注意 4.1.2. これらの収束の定義は $\mathbb{C}$-値確率変数列に対しても同様に定義できる. また概収束, および確率収束は距離空間に値を持つような確率変数列に対しても同様に定義できる.

注意 4.1.3. 概収束は測度論ではほとんど至る所での収束と一致する.
また確率収束は測度論では測度収束と呼ばれる概念と一致する.

これらの収束の定義を章の冒頭で挙げたサイコロの問題で考えてみる. (それぞれの収束が成り立つと仮定した場合)

- (概収束) Ω 上の関数としてほとんど確実に $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{1}{6}$. (例えば 1 以外がずっと出るというような $\omega \in \Omega$ に対してはこれは成り立たないがそのような事象の確率は 0 である.)
- (確率収束) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \leqslant \varepsilon$ となる確率が 1 に収束する.
- (L^p-収束) $\lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right|^p\right] = 0$. (期待値からの誤差の p-次モーメントが 0 に収束する)

問 4.1.4. $X \overset{d}{\sim} \mathrm{Unif}(0,1)$ とする. このとき $\{X^n : n \geqslant 1\}$ は 0 に概収束, 確率収束, 任意の $p \geqslant 1$ に対して L^p-収束することを確かめよ.

これらの収束の違いは一見しただけではわかりづらい. 以下の命題や例で実際に互いに異なるということを確かめていこう.

$(X, \mathcal{F}, P)$: 確率空間

命題 4.1.5. $X, \{X_n : n \geqslant 1\}$ を Ω 上の実数値確率変数とする. このとき以下が成り立つ.

(i) $X_n \to X$, P-a.s. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
(ii) $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.
(iii) $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow$ 部分列 $\{X_{n_k} : k \geqslant 1\}$ で $X_{n_k} \to X$, P-a.s. となるものが存在する.

証明. (i)

$$E = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \in \mathcal{F}$$

とおく. このとき $\varepsilon > 0$ に対して

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \subset E$$

となることがわかる. よって測度の連続性 (命題 1.1.5(vi)) より

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) = 0$$

が従う.

(ii)　問 2.1.27 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{E\left[|X_n - X|^p\right]}{\varepsilon^p}$$

となり右辺は $n \to \infty$ で 0 へ収束する.

(iii)　仮定より任意の $k \geqslant 1$ に対して

$$P\left(|X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k^2}$$

となる n_k が存在する. ここで $n_k < n_{k+1}$ となるように選ぶ.

$$A_k = \left\{\omega : |X_{n_k}(\omega) - X(\omega)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$$

とおくとボレル-カンテリの補題より

$$P\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n} A_k,\right) = 0$$

わかる. これは $X_{n_k}(\omega) \to X(\omega)$, P-a.s. であることを意味している. □

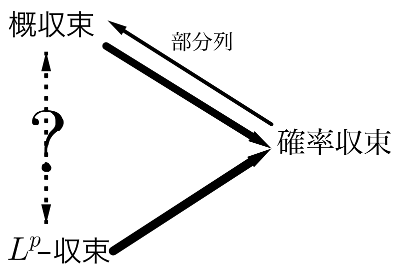


図 5　それぞれの収束の関係. L^p-収束から概収束は確率収束を経由すると部分列で概収束するものが存在することはわかる.

これらの命題より概収束, および L^p-収束は確率収束より強い収束を意味していることはわかった. それでは逆は成り立つのか考えてみるとそれは成り立たないことがわかる.

例題 4.1.6. 確率空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ を考える. $[0,1]$ 上の確率変数 X_n を次のように定義する.

$$X_n(x) = 1_{I_n}(x).$$

ただし,

$$I_n = \left[\frac{k}{2^\ell}, \frac{k+1}{2^\ell}\right], \quad n = 2^\ell + k, \;\; 0 \leqslant k \leqslant 2^\ell - 1$$

とおく. このとき任意の $x \in [0,1]$ に対して $X_n(x) = 1$ となるような n が無限個存在するので

$$X_n \not\to 0, \quad P\text{-a.s.}$$

一方, $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$P(|X_n| > \varepsilon) = 2^{-\ell}$$

であるので確率収束することがわかる.

例題 4.1.7. 確率空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ を考える. $[0,1]$ 上の確率変数 X_n を次のように定義する.

$$X_n(x) = n^{1/p} 1_{I_n}(x).$$

ただし,

$$I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

とする. このとき X_n が 0 に確率収束することは明らか. 一方,

$$E\left[|X_n|^p\right] = \int_0^1 \left(n^{1/p} 1_{I_n}\right)^p dx = 1$$

となり 0 に L^p-収束しないことがわかる.

注意 4.1.8. 例題 4.1.6, 4.1.7 の例はそれぞれ概収束, L^p-収束が互いに異なることも示している.

特に概収束は測度論の言葉ではほとんど至る所での収束と同じであったので測度論で用いた収束定理がそのまま適用できる. 以下の定理は測度論の収束定理であるので証明は省略する.

X: 確率変数
$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 確率変数列.

定理 4.1.9. (i) (単調収束定理) $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が非負で単調増加, かつ $X_n \to X$ P-a.s. であるとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

が成り立つ.

(ii) (ファトゥの補題) $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が非負であるとする. このとき

$$\varliminf_{n\to\infty} E[X_n] \geqslant E[\varliminf_{n\to\infty} X_n]$$

が成り立つ.

(iii) (ルベーグの収束定理)

$$X_n \to X, \quad P\text{-a.s.}$$

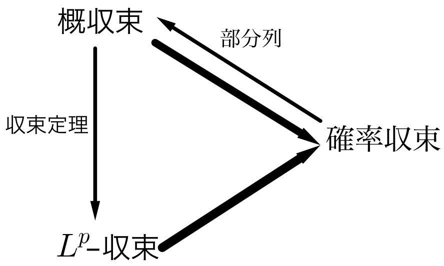
と仮定する. 非負確率変数 Y で $E[Y] < \infty$ で

$$|X_n| \leqslant Y, \quad P\text{-a.s.}$$

をみたすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

が成り立つ.



ファトゥの補題やルベーグの収束定理は確率収束の場合にも適用することができる.

問 4.1.10. $X, X_n(n \geqslant 1)$ を確率変数列とする. 以下の問に答えよ.

(i) (ファトゥの補題) $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が非負であるとする. $X_n \xrightarrow{P} X$ とする. このとき

$$\varliminf_{n\to\infty} E[X_n] \geqslant E[X]$$

が成り立つことを示せ.[*29]

(ii) (ルベーグの収束定理)

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

と仮定する. 非負確率変数 Y で $E[Y] < \infty$ で

$$|X_n| \leqslant Y, \ \ P\text{-a.s.}$$

をみたすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$$

が成り立つことを示せ.

問 4.1.11. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が $\mathbb{R}$-値確率変数 X に確率収束するとする. $f \in C(\mathbb{R})$ のとき

$$f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$$

を示せ.

問 4.1.12. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が $\mathbb{R}$-値確率変数 X に確率収束するとする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $K > 0$ が存在して任意の $n \geqslant 1$ に対して $P(|X_n| \geqslant K) \leqslant \varepsilon$ とできることを示せ. また任意の $f \in C_b(\mathbb{R})$ に対して $\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$ を示せ.

問 4.1.13. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が $\mathbb{R}$-値確率変数 X に確率収束するとする. ある $p > 1$ に対して $\sup_{n\geqslant 1} E[|X_n|^p] < \infty$ ならば, 任意の $1 \leqslant q < p$ に対して $X_n \xrightarrow{L^q} X$ が成り立つことを示せ.

4.2 大数の弱法則

さてこの章冒頭の問題に戻ろう. 予想では

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{6} \tag{4.1}$$

[*29] ヒント: まず下極限に対して収束する部分列 $\{X_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ を考えてみる. その部分列に対して概収束する部分列を取って考える.

である．しかし我々は確率変数の収束について前節で様々な定義をしたばかりである．ここで挙げた収束はどの意味が正しいのだろうか．これは大数の法則と呼ばれる定理で確認できる．

定理 4.2.1. (大数の弱法則) $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}$-値独立同分布な確率変数とする．$m = E[X_1]$, $\sigma^2 = V(X_1) < \infty$ であるとき，

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} E\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right|^2\right] = 0$. つまり $\displaystyle \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{L^2} m$.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

(iii) $\mathbb{R}$ 上の有界ボレル可測関数 f が $x = m$ で連続であるとき

$$\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right] = f(m).$$

注意 4.2.2. 定理 4.2.1 より (4.1) は L^2-収束および確率収束することがわかる．

証明. (i) 命題 3.1.5 より

$$E\left[\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right|^2\right] = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

となるので L^2-収束することがわかる．

(ii) L^2-収束するので確率収束することがわかる．

(iii) $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\left|E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\right] - f(m)\right| \\
&\leqslant \left|E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) - f(m) : \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right]\right| \\
&+ \left|E\left[f\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) - f(m) : \left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| \leqslant \varepsilon\right]\right| \\
&\leqslant \sup_{|x-m|\leqslant\varepsilon} |f(x) - f(m)| + 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \\
&\leqslant \sup_{|x-m|\leqslant\varepsilon} |f(x) - f(m)| + 2\|f\|_\infty \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}.
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ で上極限をとり，f の $x = m$ での連続性を用いると得られる． □

大数の弱法則を用いる応用例をここで述べておく．

例題 4.2.3. (ワイエルシュトラスの多項式近似)

$[0,1]$ 上の連続関数 f とする．

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^m (1-x)^{n-m} f\left(\frac{m}{n}\right)$$

を f に対する次元 n の**ベルンシュタイン多項式**とする. このとき

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\to 0$$

である.

例題 4.2.3 の証明. $\{X_n : n\geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数で $P(X_n=1)=p=1-P(X_n=0)$ をみたすものとする ($p\in[0,1]$). このとき $E[X_n]=p$, $V(X_n)=p(1-p)$ である.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

とおく. このとき

$$P(S_n=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

であり,

$$E\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]=f_n(p)$$

である. $[0,1]$ 上の連続関数は一様連続なので

$$\sup_{x,y\in[0,1],|x-y|<\delta}|f(x)-f(y)|\leqslant\varepsilon$$

となる δ が存在する. このような $\delta>0$ に対して定理 4.2.1(iii) の証明を適用すると

$$[f_n(p)-f(p)]\leqslant\sup_{|x-p|\leqslant\delta}|f(x)-f(p)|+2\|f\|_\infty\frac{\sigma^2}{\delta^2 n}\leqslant\varepsilon+2\|f\|_\infty\frac{\sigma^2}{\delta^2 n}$$

となる. 右辺は p に依らず $n\to\infty$ とすると

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sup_{p\in[0,1]}|f_n(p)-f(p)|\leqslant\varepsilon$$

を得る. □

問 4.2.4. $f\in C([0,1])$ とする. $\{X_n : n\geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}$-値独立同分布な確率変数で $m=E[X_1]$, $\sigma^2=V(X_1)<\infty$ をみたすものとする. このとき

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)X_i\xrightarrow{P}\mu\int_0^1 f(t)dt$$

が成り立つことを示せ.

4.2.1 コンプガチャ

一時期問題になったソーシャルゲームのコンプリートガチャ (コンプガチャ) の問題を大数の弱法則の観点から調べてみよう.

コンプガチャはランダムに入手できるアイテム (n 種類) の中で, 特定のアイテム (k-種類) を揃えることにより稀少アイテムを入手できるシステムである.

まず単純に n 種類のアイテムがすべて等確率で引かれる場合に, n 種類すべてを集めるまでにかかる回数を見てみよう.

例題 4.2.5. (クーポンコレクター問題) $\{X_\ell : \ell \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数で $P(X_\ell = i) = \dfrac{1}{n}$ $(i = 1, \cdots, n)$ をみたすとする.

$$T^{(n)} = \inf\{\ell \geqslant 1 : \{X_1, \cdots, X_\ell\} = \{1, \cdots, n\}\}$$

とする. このとき

$$\frac{T^{(n)}}{n \log n} \xrightarrow{P} 1.$$

注意 4.2.6. $T^{(n)}$ は n 種類のアイテムすべてを引くまでのガチャの回数を表している.

これの証明には大数の弱収束を改良する必要ががある.

$\{X_{n,k} : k = 1, \cdots, n, n \geqslant 1\}$: 確率変数列.

定理 4.2.7. 各 $n \geqslant 1$ に対して $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ とする. $\mu_n = E[S_n]$, $\sigma_n^2 = V(S_n)$ とおく. 数列 $\{b_n : n \geqslant 1\}$ が $\dfrac{\sigma_n^2}{b_n^2} \to 0$ をみたすとき,

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

注意 4.2.8. 定理 4.2.7 では確率変数に独立性の条件を仮定していない.

問 4.2.9. 定理 4.2.7 を証明せよ.

例題 4.2.5 の証明. $k \geqslant 1$ に対して τ_k^n を

$$\tau_k^n = \inf\{m \geqslant 1 : \sharp\{X_1, \cdots, X_m\} = k\}$$

と定義する. τ_k^n は k 種類目のアイテムを揃えるまでにガチャを引いた回数である.

明らかに $\tau_1^n = 1$ であり, $\tau_n^n = T^{(n)}$ である. $k \geqslant 1$ に対して

$$X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$$

と定義する. ただし $\tau_0^n = 0$ とする. このとき $\{X_{n,k} : k = 1, \cdots, n\}$ は独立であり,

$$P(X_{n,k} = \ell) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}\right)^\ell, \quad \ell \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

である. よって

$$E[T^{(n)}] = \sum_{k=1}^n E[X_{n,k}] = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1} = n\sum_{k=1}^n k^{-1}$$
$$V(T^{(n)}) = \sum_{k=1}^n V(X_{n,k}) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-2}\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant n^2 \sum_{k=1}^n k^{-2}$$

となる. $b_n = n \log n$ と取ると, 定理 4.2.7 より

$$\frac{T^{(n)} - n\sum_{k=1}^n k^{-1}}{n \log n} \xrightarrow{P} 0$$

がわかる. $\sum_{k=1}^n k^{-1} / \log n \to 1$ より従う. □

これより 100 種類のアイテムすべてを集めようとすると, おおよそ 460 回となる.

問 4.2.10. (4.2) を証明せよ.

問 4.2.11. 例題 4.2.5 の証明の $\{X_{n,k} : k = 1, \cdots, n\}$ が独立であることを示せ.

もう少しだけコンプガチャの問題に近づけよう.

例題 4.2.12. n 種類あるガチャを考える. 揃える k 個のアイテム $(1, 2, \cdots, k)$ がそれぞれ等確率 $\frac{1}{m}(m \in \mathbb{N})$ で引かれるとする.

$$T_k^{(n)} = \inf\{\ell \geqslant 1 : \{X_1, \cdots, X_\ell\} \supset \{1, \cdots, k\}\}$$

と定義する. $m \to \infty$ のとき $\frac{k}{m} \to p \in (0, 1)$ が成り立つとする. このとき

$$\frac{T_k^{(n)}}{m \log(pm)} \xrightarrow{P} 0 \tag{4.3}$$

である.

注意 4.2.13. (4.3) の p は実は意味をなさない ($p = 1$ としても変わらない.)

この結果からわかることとして 0.1% で引けるアイテムを 10 個集めようとすると, 約 2300 回引くことになる.

問 4.2.14. 例題 4.2.12 を証明せよ.

4.2.2 *一般化大数の弱法則

ここでは大数の弱法則を少しだけ一般化したものを考えてみる. 内容は少し高度だが面白い例を与えることができる.

定理 4.2.15. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{X_{n,k} : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ は独立であるとする. $b_n > 0$ は $b_n \to \infty$ をみたすものとし,

$$\bar{X}_{n,k} = X_{n,k} 1\{|X_{n,k}| \leqslant b_n\}$$

とする. $n \to \infty$ としたとき

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(|X_{n,k}| > b_n) \to 0$

(ii) $\displaystyle\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} E[\bar{X}_{n,k}^2] \to 0$

が成り立つ仮定すると

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

ただし $S_n = X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E[\bar{X}_{n,k}]$.

証明. $\bar{S}_n = \bar{X}_{n,1} + \cdots + \bar{X}_{n,n}$ とおくと

$$P\left(\left|\frac{S_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) \leqslant P(S_n \neq \bar{S}_n) + P\left(\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right)$$

となる. 右辺第 1 項は

$$P(S_n \neq \bar{S}_n) \leqslant P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\{X_{n,k} \neq \bar{X}_{n,k}\}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(|X_{n,k}| > b_n)$$

となり仮定 (i) から 0 に収束する. 第 2 項はチェビシェフの不等式から

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right| > \varepsilon\right) &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E\left[\left|\frac{\bar{S}_n - a_n}{b_n}\right|^2\right] = \frac{V(\bar{S}_n)}{b_n^2\varepsilon^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} V(\bar{X}_{n,k})}{b_n^2\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{b_n^2\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} E[|\bar{X}_{n,k}|^2] \end{aligned}$$

となり仮定 (ii) から 0 に収束する. □

例題 4.2.16. (不公平な "公平ゲーム") 大数の法則を見ると $E[X_1] = 0$ となるような賭け事 (ゲーム) であれば公平なように思える. しかし実はこの感覚は正しくない.

1 ドルの賭け金で 2^k ドル ($k \geqslant 1$) 獲得する確率が

$$p_k = \frac{1}{2^k k(k+1)}$$

であるというゲームを行う. このとき 1 回ゲームした後の収支の期待値は

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2^k - 1)p_k - p_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{\infty} p_k - (1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_k) = 0$$

となり大数の法則から

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{は 0 に確率収束する}$$

ので公平なゲームのように思える. しかし実は定理 4.2.15 を適用することができ

$$\frac{S_n}{n/\log n} \text{が} -\log 2 \text{ に確率収束することが言えるのである.}$$

これは所持金が回を重ねるごとに減っていくことを意味している.

4.3 大数の強法則

定理 4.2.1 では分散の有界性を仮定することで独立同分布な確率変数の和に関する確率収束を見た. しかしこれは概収束についても言うことができる.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 独立同分布な確率変数.

定理 4.3.1. **(大数の強法則)** $E[|X_n|^4] < \infty$ を仮定する. $m = E[X_1]$ とおくと,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to m, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

証明. $\overline{X}_n = X_n - m$ とすることで $m=0$ としても一般性を失わない.

$$E\left[\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^4\right] = \frac{1}{n^4}\sum_{i,j,k,l=1}^{n} E[X_iX_jX_kX_l]$$
$$= \frac{1}{n^4}\left(nE[X_1^4] + 3n(n-1)E[X_1^2]^2\right)$$

である. ここで $E[X_i]=0$ であることと独立性を用いて i,j,k,l が異なるとき, $E[X_i^2X_jX_k] = E[X_i^3X_j] = E[X_iX_jX_kX_l] = 0$ であることを使った.

よって

$$\sum_{n\geqslant 1} E\left[\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^4\right] < \infty$$

となり問 4.10 より

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)^4 < \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

である. よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} = 0, \quad P\text{-a.s.}$$

□

問 4.3.2. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数とする. $\mu = E[X_1]$ であり, $X_n \in L^2(P)$ であるとする. このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\frac{X_1+\cdots+X_n - n\mu}{n^{1/2+\varepsilon}} \xrightarrow{P} 0$$

であることを示せ.

定理 4.3.1 では $E[X_1^4] < \infty$ を仮定したが, 実は X_1 が有限な期待値を持てば大数の強法則が成り立つことが知られている.

次の節でこれを見ていくが, 場合によっては主張のみ確認して他は読み飛ばしても構わない.

4.3.1 *大数の強法則

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 独立同分布な確率変数.

定理 4.3.3. (大数の強法則) $E[|X_1|] < \infty$ とする. $E[X_1] = \mu$ としたとき

$$\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \to \mu, \quad P\text{-a.s. および } L^1\text{-収束}$$

が成り立つ.

注意 4.3.4. 定理 4.3.1 とは $X \in L^4(P)$ の仮定が $X \in L^1(P)$ へと弱くなっている.

以下

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad S_0 = 0$$

と書く．

定理 4.3.3 の証明は 3 段階からなる．

まずはじめに次のことを示す．

補題 4.3.5. $Y_k = X_k \mathbf{1}\{|X_k| \leqslant k\}$ とし，$T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ とする．このとき

$$\frac{T_n}{n} \to \mu, \;\; P\text{-a.s.} \Rightarrow \frac{S_n}{n} \to \mu, \;\; P\text{-a.s.}$$

補題 4.3.5 の証明．問 3.3 より

$$\sum_{k\geqslant 1} P(|X_k| > k) \leqslant \int_0^\infty P(|X_1| > t)dt = E[|X_1|] < \infty$$

である．よってボレル-カンテリの補題より

$$P(X_k \neq Y_k, \text{ i.o.}) = 0 \Leftrightarrow P(\text{高々有限個の } k \text{ を除いて } X_k = Y_k) = 1$$

である．よってほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して，ある $R(\omega) > 0$ が存在して

$$|S_n(\omega) - T_n(\omega)| \leqslant R(\omega) < \infty$$

とできる．これより主張が従う． □

第 2 段階以降では $\dfrac{T_n}{n} \to \mu$, P-a.s. を証明していく．

補題 4.3.6.

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{V(Y_k)}{k^2} < 4E[|X_1|] < \infty$$

が成り立つ．

補題 4.3.6 の証明．問 3.3 より

$$V(Y_k) \leqslant E[|Y_k|^2] = \int_0^\infty 2yP(|Y_k| > y)dy \leqslant \int_0^k 2yP(|X_1| > y)dy$$

である．よってフビニの定理より

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1} \frac{V(Y_k)}{k^2} &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \int_0^\infty \mathbf{1}\{y < k\} 2yP(|X_1| > y)dy \\ &= \int_0^\infty \left(\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \mathbf{1}\{y < k\} \right) 2yP(|X_1| > y)dy\end{aligned}$$

である．問 3.3 より $0 \leqslant u < \infty$ に対して

$$2y \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \mathbf{1}\{y < k\} \leqslant 4 \tag{4.4}$$

を示せばよいがこれは実際に成り立つ．(問 4.3.7) □

問 4.3.7. (4.4) が成り立つことを示せ．

定理 4.3.3 の証明. X_n は非負確率変数であると仮定する. $\alpha > 1$ を固定する. $k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$ とおく. ただし $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数とする. このときチェビシェフの不等式より $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 1} P\left(|T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]| > \varepsilon k(n)\right) &\leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{n \geqslant 1} \frac{V(T_{k(n)})}{k(n)^2} \\ &= \varepsilon^{-2} \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{k(n)^2} \sum_{m=1}^{k(n)} V(Y_m) \\ &= \varepsilon^{-2} \sum_{m \geqslant 1} V(Y_m) \sum_{n : k(n) \geqslant m} \frac{1}{k(n)^2}\end{aligned}$$

$\lfloor \alpha^n \rfloor \geqslant \dfrac{\alpha^n}{2}$ であることに注意すると,

$$\sum_{n : k(n) \geqslant m} \frac{1}{k(n)^2} \leqslant 4 \sum_{n : k(n) \geqslant m} \alpha^{2n} \leqslant \frac{4}{(1 - \alpha^{-2}) m^2}$$

である. よって

$$\sum_{n \geqslant 1} P\left(|T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]| > \varepsilon k(n)\right) \leqslant \frac{4E[|X_1|]}{(1 - \alpha^{-2}) \varepsilon^2} < \infty$$

となる. $\varepsilon > 0$ は任意であるので

$$\frac{T_{k(n)} - E[T_{k(n)}]}{k(n)} \to \mu, \quad P\text{-a.s.}$$

がわかる. また $k \to \infty$ のとき $E[Y_k] \to E[X_1]$ であるから

$$\frac{E[T_{k(n)}]}{k(n)} \to \mu$$

である. 最後に $n \to \infty$ のとき $\dfrac{T_n}{n} \to \mu$, P-a.s. を証明する. $k(n) \leqslant m < k(n+1)$ に対して Y_m の非負性から

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leqslant \frac{T_m}{m} \leqslant \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

である. よって

$$\frac{\mu}{\alpha} \leqslant \varliminf_{m \to \infty} \frac{T_m}{m} \leqslant \varlimsup_{m \to \infty} \frac{T_m}{m} \leqslant \alpha \mu, \quad P\text{-a.s.}$$

となる. $\alpha > 1$ は任意だったので示せた. □

問 4.3.8. X_n が $\mathbb{R}^d$-値確率変数である場合の大数の強法則の証明を与えよ.

次の定理は期待値が存在するときには大数の強法則が成り立つことを意味する.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 独立同分布な確率変数.

定理 4.3.9. $E[X_1^+] = \infty$, $E[X_1^-] < \infty$ をみたすとする. このとき

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

証明. $M > 0$ とする. $X_i^M = X_i \wedge M$ と定義する. このとき $\{X_i^M\}$ は独立同分布な確率変数で $E[|X_i^M|] < \infty$ である. よって定理 4.3.3 より

$$\frac{X_1^M + \cdots + X_n^M}{n} \to E[X_1^M],\ \ P\text{-a.s.}$$

が成り立つ. $X_i \geqslant X_i^M$ であるので

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{X_1^M + \cdots + X_n^M}{n} = E[X_1^M],\ \ P\text{-a.s.}$$

である. $M \nearrow \infty$ とすると $E[X_1^M] \to E[X_1]$ であることより定理が従う. □

問 4.3.10. 定理 4.3.9 の証明で $M \nearrow \infty$ とすると $E[X_1^M] \to E[X_1]$ であることを示せ.

4.3.2 大数の強法則の応用例

ここでは大数の強法則の応用例を挙げる.

例題 4.3.11. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を $0 < X_n < \infty$ となる独立同分布な確率変数とする.

$$T_n = X_1 + \cdots + X_n,\ \ T_0 = 0$$

とする. $t \geqslant 0$ に対して

$$N_t = \sup\{n : T_n \leqslant t\}$$

と定義する. $E[X_1] = \mu \leqslant \infty$ のとき, $t \to \infty$ で

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu},\ \ P\text{-a.s.}$$

である. ただし $1/\infty = 0$ とする.

例題 *4.3.11* の証明. 定理 4.3.3 と定理 4.3.9 より

$$\frac{T_n}{n} \to \mu,\ \ P\text{-a.s.}$$

である. N_t の定義から $T_{N_t} \leqslant t \leqslant T_{N_t+1}$ であるので

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leqslant \frac{t}{N_t} \leqslant \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

である. 任意の $n \geqslant 1$ で $T_n < \infty$ であるので $t \to \infty$ のとき $N_t \to \infty$ である. よって大数の強法則よりある $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ で $P(\Omega_0) = 1$ となるものが存在して $\omega \in \Omega_0$ に対して

$$\frac{T_n(\omega)}{n} \to \mu,\ \ N_t(\omega) \nearrow \infty$$

とできる. よって

$$\frac{T_{N_t(\omega)}(\omega)}{N_t(\omega)} \to \mu,\ \ \frac{N_t(\omega)+1}{N_t(\omega)} \to 1$$

が成り立つ. これより $t \to \infty$ のとき $\omega \in \Omega_0$ に対して

$$\frac{t}{N_t(\omega)} \to \mu$$

である. [*30]

□

[*30]

注意 4.3.14. 例題 4.3.11 は次のようなモデルで例えられる. X_n を n 個目の電球が切れる時刻と考える. 電球が切れるたびに新しい電球に交換するとする. T_n は n 個目の電球が切れるまでにかかる時間を表し, N_t は時刻 t で何個の電球を交換したかを表している.

例題 4.3.15. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な $\{1, \cdots, r\}$-値確率変数列とする. $p_s = P(X_i = s)$ $(1 \leqslant s \leqslant r)$ とおく. このとき

$$-\frac{1}{n} \log \prod_{k=1}^{n} p_{X_k} \to H = -\sum_{i=1}^{r} p_i \log p_i, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ. この H を**エントロピー**という. エントロピーはどれくらいランダムであるかを測るのに用いられる.

例題 4.3.16. $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ 内の開集合 A を考える. $\{(U_n, V_n) : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な $[0,1]^2$-値確率変数列で U_n と V_n は独立で U_n, V_n は $[0,1]$ 上の一様分布に従うとする.

$$X_n = \{(U_n, V_n) \in A\}$$

とおくとき,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to |A|, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ. ただし $|A|$ は A の面積である. これは複雑な図形の面積を求める手法として知られているモンテカルロ法の原理である.

問 4.3.17. 例題 4.3.16 の収束を証明せよ.

4.4 問題

問題 4.1. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を考える.

$$A = \{\omega \in \Omega : \text{極限} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ が存在する.}\}$$

としたとき $A \in \mathcal{F}$ となることを示せ.

問題 4.2. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は X に確率収束するとする. また数列 $\{c_n : n \geqslant 1\}$ は $c \in \mathbb{R}$ に収束するとする. このとき確率変数列 $\{X_n + c_n : n \geqslant 1\}$, $\{c_n X_n : n \geqslant 1\}$ はそれぞれ $X + c$, cX に確率収束することを示せ.

問題 4.3. 独立な確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ がある確率変数 X に確率収束するとき, X は確率 1 で定数であることを示せ.

問題 4.4. 独立な確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を考える. $\lambda_n > 0$ とに対して $X_n \overset{d}{\sim} \mathrm{Poi}(\lambda_n)$ であるとき

$$\sum_{n\geqslant 1} X_n \text{が概収束する} \Leftrightarrow \sum_{n\geqslant 1} \lambda_n < \infty$$

が成り立つことを示せ.

注意 4.3.12. 例題 4.3.11 の証明では $Y_n \to Y_\infty$ a.s. かつ $N(n) \to \infty$ a.s. ならば $Y_{N(n)} \to Y_\infty$ a.s. であるということを使っている. これは注意しなければいけない. なぜなら概収束を確率収束に置き換えた場合に成り立つとは限らないからである.

問 4.3.13. $\{0,1\}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ で $X_n \xrightarrow{P} 0$, $N(n) \to \infty$, a.s., $X_{N(n)} \to 1$ a.s. となるような例を挙げよ.

問題 4.5. $p > 1$ とし, $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が確率変数 X に L^p-収束するとする. このとき任意の $1 \leqslant r \leqslant p$ に対して $X_n \xrightarrow{L^r} X$ であることを示せ.

問題 4.6. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ と $\mathbb{R}$-値確率変数 X を考える. 以下のことが成り立つことを示せ.

(i) $p \geqslant 1$ とする. $X_n \overset{L^p}{\Rightarrow} X$ ならば $E[|X_n|^p] \to E[|X|^p]$.
(ii) $X_n \overset{L^1}{\Rightarrow} X$ ならば $E[X_n] \to E[X]$.
(iii) $X_n \overset{L^2}{\Rightarrow} X$ ならば $V(X_n) \to V(X)$.

問題 4.7. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ と X に対して $X_n \xrightarrow{P} X$ と

$$E\left[\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right] \to 0$$

は同値であることを示せ.

問題 4.8. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立な $\mathbb{R}$-値確率変数列で $\mu = E[X_1]$, $V(X_1) < \infty$ とする. このとき

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} X_i X_j \xrightarrow{P} \mu^2$$

となることを示せ.

問題 4.9. 極限

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + \cdots + x_n} dx_1 \cdots dx_n$$

を求めよ.

問題 4.10. 確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が

$$\sum_{n \geqslant 1} E[|X_n|] < \infty$$

をみたすとする. このとき

$$\sum_{n \geqslant 1} |X_n| < \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

であり,

$$E\left[\sum_{n \geqslant 1} X_n\right] = \sum_{n \geqslant 1} E[X_n]$$

であることを示せ.

問題 4.11. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列で $X_1 \overset{d}{\sim} N(0,1)$ とする. このとき

$$P\left(\varlimsup_{n \geqslant 1} \frac{|X_n|}{\sqrt{\log n}} \geqslant \sqrt{2}\right) = 1$$

であることを示せ.

問題 4.12. $\{\mu_n : n \geqslant 1\}$, $\{\sigma_n^2 : n \geqslant 1\}$ を $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_n^2 > 0$ とする.

$\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立で, 各 $n \geqslant 1$ に対して正規分布 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ に従うとする. このとき

$$\sum_{n \geqslant 1} X_n^2 \text{が } L^1\text{-収束} \Leftrightarrow \sum_{n \geqslant 1} (\mu_n^2 + \sigma_n^2) < \infty$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.13. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立な確率変数であり平均は 0 であるとする. さらに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} E[X_n^2] < \infty$ であるとき, 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ は概収束することを示せ.

問題 4.14. n 次元ユークリッド空間内の単位立方体 $[0,1]^n$ を C_n とする. X_n, Y_n を独立同分布な確率変数で $X_n \overset{d}{\sim} \mathrm{Unif}(C_n)$ とする. $Z_n = |X_n - Y_n|$ を X_n と Y_n のユークリッド距離としたとき, $\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \frac{1}{\sqrt{6}}$ であることを示せ.

問題 4.15. $\mathbb{R}$-値確率変数 X が,

$$\text{ある } a > 0 \text{ が存在して } E\left[e^{aX}\right] < \infty, E\left[e^{-aX}\right] < \infty$$

を満たしたとする. このとき任意の $t \in (-a, a)$ に対して

$$\varphi(t) = E\left[e^{tX}\right] < \infty$$

は任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して m 階連続微分可能であり, 特に

$$\varphi'(0) = E[X], \quad \varphi''(0) = E[X^2]$$

であることを示せ.

大数の強法則 (定理 4.3.3) の証明は次の定理の応用である.

問題 4.16. *(Three series theorem) $\mathbb{R}$-値確率変数 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立であるとする. 以下の条件をみたすとき級数 $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} X_n$ は概収束することを示せ: ある定数 $a > 0$ が存在し

- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} P(|X_n| > a)$ が収束する.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{Var}(X_n 1_{|X_n|\leqslant a})$ が収束する.
- $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} E[X_n 1_{|X_n|\leqslant a}]$ が収束する.

問題 4.17. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が独立同分布な確率変数で $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ をみたすとする. このとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n}$ が概収束することを示せ.

問題 4.18. * $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布な確率変数で $E[X_1] = 0$, $E[|X_1|^p] < \infty$ をみたすとする. ただし $1 < p < 2$ とする. このとき

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/p}} \to 0, \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示せ.

問題 4.19. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数で標準正規分布に従うとする. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $\alpha > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}\right)^{\alpha}\right] = 1$ であることを示せ.
(2) $E\left[\left(\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}\right)^{\alpha}\right]$ をガンマ関数を用いて表せ.
(3) 任意の $\alpha > 0$ に対して次のオイラー積表示が可能であることを示せ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha} n!}{\prod_{k=0}^{n-1}(k+\alpha)} = \Gamma(\alpha)$$

問題 4.20. $\mathbb{R}^d$ 上の強度 λdx のポアソン点過程 $\mathfrak{n}_\lambda$ が与えられている. ただし $\lambda > 0$, dx は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度である. このとき任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ で $0 < |A| < \infty$ となるものに対して, $\lambda \to \infty$ ならば

$$\frac{\mathfrak{n}_\lambda(A) - \lambda|A|}{\lambda} \xrightarrow{P} 0$$

となることを示せ. ただし $|A|$ は A のルベーグ測度の値を意味している.

5　中心極限定理

この章では確率論における重要な定理である中心極限定理を扱う．第 4 章では独立同分布な確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が $E[|X_1|] < \infty$ ならば

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - nE[X_1]}{n} \to 0, \quad P\text{-a.s.}$$

であることを示した. 中心極限定理では

$$X_1 + \cdots + X_n - nE[X_1]$$

が 0 からどの程度離れているのかを調べる.

分散を考えると

$$E\left[(X_1 + \cdots + X_n - nE[X_1])^2\right] = V(X_1 + \cdots + X_n) = nV(X_1)$$

となる．これより “おおよそ”$\sqrt{n}$ であることは予想出来る．このことを詳細に調べることがこの章の目的である.

キーワード: 弱収束, 法則収束, 中心極限定理, 特性関数

5.1　弱収束

これまで確率変数の収束に関しては概収束. 確率収束, L^p 収束の定義を与えた. ここで新たに法則収束, 弱収束と呼ばれる収束の概念を定義する.

可測空間 $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度全体の集合を $\mathcal{P}(S)$ と書くことにする.

(S, d): 距離空間

定義 5.1.1. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を S-値確率変数列, X を S-値確率変数とする．このとき X_n が X に**法則収束** (分布収束) するとは

$$\text{任意の有界連続関数 } f \in C_b(S) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

をみたすときをいい, $X_n \Rightarrow X$ と書く.

また $\{\mu_n : n \geqslant 1\}$, μ を S 上の確率測度とする. このとき μ_n が μ に**弱収束**するとは

$$\text{任意の有界連続関数 } f \in C_b(S) \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} \int_S f(s)\mu_n(ds) = \int_S f(s)\mu(ds) \tag{5.1}$$

をみたすときをいい, $\mu_n \Rightarrow \mu$ と書く.[*31]

注意 5.1.2. 距離空間には距離から定まる位相によりボレル集合族を定義する.

注意 5.1.3. 法則収束や弱収束の表記は教科書によって様々である．例えば $X_n \xrightarrow{d} X$ や $\mathcal{L}(X_n) \to \mathcal{L}(X)$, $\mu_n \to \mu$ (弱収束) などがある.

[*31] 関数解析では位相線形空間 (例えばバナッハ空間)X の点列 x_n が x に弱収束するとは,

$$\text{任意の } f \in X' \text{に対して } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

例題 5.1.4. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数とする. このとき

$$X_n \Rightarrow X_1$$

である.

注意 5.1.5. 例題 5.1.4 は当たり前のことを言っているだけのように思えるが, この例によって法則収束が概収束, L^p-収束, 確率収束のいずれとも異なるということがわかる.

例題 5.1.6. X_n を独立な確率変数で $\{1, \cdots, n\}$ 上の離散一様分布であるとする. このとき

$$\frac{X_n}{n} \Rightarrow X$$

である. ただし X は $[0,1]$ 上の一様分布である.

問 5.1.7. 例題 5.1.6 を証明せよ.

問 5.1.8. $\{\mu_n : n \geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}$ 上の平均 0, 分散 $\dfrac{1}{n}$ の正規分布であるとする. このとき

$$\mu_n \Rightarrow \delta_0$$

であることを示せ. ただし δ_0 は点 0 におけるディラク測度である.

注意 5.1.9. 問 5.1.8 では μ_n の密度関数は $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$ であるが, $n \to \infty$ のとき $f_n(x) \to 0$, a.e.-x であることが容易にわかる. このように収束の定義の入れ方によって極限は全く異なるものになることがある.

問 5.1.10. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ が定数 c へ法則収束するとき, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ は c へ確率収束することを示せ.[*32]

弱収束について同値な表現を見ておこう.

(S, d): 距離空間

定理 5.1.11. $\{\mu_n : n \geqslant 1\} \subset \mathcal{P}(S)$, $\mu \in \mathcal{P}(S)$ とする. このとき以下は同値:

(i) $\mu_n \Rightarrow \mu$.

(ii) 任意の閉集合 C に対して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(C) \leqslant \mu(C)$$

となる.

(iii) 任意の開集合 O に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqslant \mu(O)$$

となる.

をみたすときを言った. ただし X' は X の双対空間である.

上で定義した弱収束の定義は位相線形空間 X を S 上の符号付測度全体の集合としたときの弱収束と一致している. (詳しくは関数解析の教科書を読むと良い. S 上の符号付測度全体の集合の双対空間が $C_b(S)$ であることはリース-マルコフ-角谷の定理から知られている.)

[*32] ヒント: $\varepsilon > 0$ に対して非負有界連続関数 f で $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(c) = 0$, $|x - c| \geqslant \varepsilon$ ならば $f(x) = 1$ となるものを考えよ.

(iv) S のボレル集合 A が $\mu(\partial A) = 0$ をみたすならば

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$$

となる.

証明. (i)⇒(ii) $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant 0 \\ 1-t, & 0 < t \leqslant 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

と定義する. 閉集合 F と $k \geqslant 1$ に対して

$$f_{k,F}(x) = \varphi(kd(x,F))$$

と定義すると $f_{k,F} \in C_b(S)$ であり, $f_{k,F} \geqslant \mathbf{1}_F$ であるので

$$\int_S f_{k,F}(x)\mu_n(dx) \geqslant \mu_n(F)$$

である. $n \to \infty$ とすると仮定より

$$\int_S f_{k,F}(x)\mu(dx) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(F)$$

である. さらに $k \to \infty$ とすることで (ii) が従う.

(ii)⇔(iii) は明らか.

(ii)⇒(i) $f \in C_b(S)$ とする. このとき $0 \leqslant f \leqslant 1$ としても一般性を失わない.

$k \geqslant 1$ を固定する. $1 \leqslant i \leqslant k$ に対して S の閉集合の減少列

$$C_i = \left\{ x \in S : f(x) \geqslant \frac{i}{k} \right\}$$

と定義する. このとき $\nu \in \{\mu\} \cup \{\mu_n; n \geqslant 1\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} \nu(C_{i-1} \setminus C_i) \leqslant \int_S f(x)\nu(sx) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} \nu(C_{i-1} \setminus C_i) \tag{5.2}$$

である. これより

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu(C_i) \leqslant \int_S f(x)\nu(dx) \leqslant \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \nu(C_i)$$

である. $\nu = \mu_n$ として $n \to \infty$ とすると (ii) より

$$\begin{aligned} \varlimsup_{n\to\infty} \int_S f(x)\mu_n(dx) &\leqslant \frac{1}{k} + \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \mu_n(C_i) \\ &\leqslant \frac{1}{k} + \int_S f(x)\mu(dx) \end{aligned}$$

となる. k は任意なので

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_S f(x)\mu_n(dx) \leqslant \int_S f(x)\mu(dx)$$

がわかる. f を $1-f$ で置き換えることで (i) が導かれた.

(ii)⇒(iv) A をボレル集合で $\mu(\partial A)=0$ をみたすとする. このとき $A^o \subset A \subset \overline{A}$ であるので (ii) および (iii) から

$$\mu(A^o) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mu_n(A^o) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(\overline{A}) \leqslant \mu(\overline{A})$$

である. よって (iv) が示せた.

(iv)⇒(ii) 閉集合 C と $\delta > 0$ に対して

$$C_\delta = \{x \in S : d(x, C) \leqslant \delta\}, \ A_\delta = \{x \in S : d(x, C) = \delta\}$$

とおく. このとき C_δ, A_δ は閉集合で $\partial C_\delta \subset A_\delta$ である. $\{A_\delta : \delta > 0\}$ は共通部分を持たないので $\mu(A_\delta) > 0$ となる $\delta > 0$ は高々可算個である. よって $\delta_\ell \searrow 0$ で $\mu(A_{\delta_n}) = 0$ となるものが存在する. よって (iv) より

$$\mu(C_{\delta_\ell}) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_{\delta_\ell}) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mu_n(C)$$

となる. $\ell \to \infty$ とすると F の閉性と測度の連続性から (ii) が従う. □

注意 5.1.12. 定理 5.1.11 の証明から弱収束の定義は任意の $f \in C_b(\mathbb{R}^d) \cap C_u(\mathbb{R}^d)$ で (5.1) が成り立てばよいことがわかる.

ただし $C_u(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の一様連続関数全体の集合である.

次の命題で法則収束と他の収束との関連を見ておく.

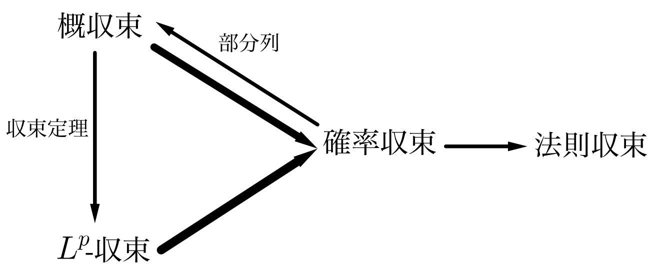
命題 5.1.13. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を S-値確率変数列, X を S-値確率変数とする. このとき

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ ならば } X_n \Rightarrow X$$

である.

証明. 略. □

問 5.1.14. 命題 5.1.13 を証明せよ.



次の定理は $\mathbb{R}$-値確率変数の法則収束を分布関数を用いて表現している.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: $\mathbb{R}$-値確率変数列
X: $\mathbb{R}$-値確率変数

定理 5.1.15. F_n を X_n の分布関数, F を X の分布関数とする. このとき以下は同値である.

(i) $X_n \Rightarrow X$.
(ii) $x \in \mathbb{R}$ が F の連続点であるとき, $F_n(x) \to F(x)$ である.

注意 5.1.16. 定理 5.1.15 の (ii) を弱収束の定理としている教科書もある.

証明には次の定理を用いる.

定理 5.1.17. F_n, F を分布関数とする. F の連続点 $x \in \mathbb{R}$ に対して $F_n(x) \to F(x)$ が成り立つとする. このとき確率変数 Y_n, Y で以下をみたすものが存在する.

(i) Y_n, Y はそれぞれ分布関数 F_n, F を持つ.

(ii) $Y_n \to Y$, P-a.s.

定理 5.1.15 の証明. (i)⇒(ii) 定理 5.1.11(iv) より従う.

(ii)⇒(i) Y_n, Y を定理 5.1.17 で与えられたものとする. このときルベーグの収束定理より任意の有界連続関数 g に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[g(X_n)] = \lim_{n\to\infty} E[g(Y_n)] = E[g(Y)] = E[g(X)]$$

である. □

定理 5.1.17 の証明. 定理 1.2.21 より $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0,1)$, $P = (0,1)$ 上のルベーグ測度で確率空間を定義したとき,

$$Y_n(\omega) = \sup\{y : F_n(y) < \omega\}, \ \ Y(\omega) = \sup\{y : F(y) < \omega\}$$

はそれぞれ分布関数として F_n, F を持つ. $Y_n(\omega) \to Y(\omega)$ が高々可算個の $\omega \in \Omega$ を除いて成り立つことを示す.

$$a_y = \sup\{x : F(y) > x\}, \ \ b_y = \inf\{x : F(y) < x\}$$

と定義する. $I_F = \{y : (a_y, b_y) = \varnothing\}$ とする. このとき $\mathbb{R}\backslash I_F$ の元は単調増加関数 F の不連続点であることから高々可算集合である.

$$\Omega_0 = \{F(y) : y \in \mathbb{R}\backslash I_F\} \cup \{F(y-) : y \in \mathbb{R}\backslash I_F\}$$

とする.

$\omega \in \Omega_0^c$ に対して $y < Y(\omega)$ ならば $F(y) < \omega$ であり, $Y(\omega) < z$ ならば $F(z) > \omega$ である. $\omega \in \Omega_0^c$ に対して

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} Y_n(\omega) \geqslant Y(\omega) \tag{a}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} Y_n(\omega) \leqslant Y(\omega) \tag{b}$$

を示す.

(a) $y < Y(\omega)$ とすると $F(y) < \omega$ であるので, 仮定より十分大きい n に対して $F_n(y) < \omega$ である. よって $Y_n(\omega) \geqslant y$. $y < Y(\omega)$ は任意なので (a) が示せた.

(b) $y > Y(\omega)$ とすると $F(y) > \omega$ であるので, 仮定より十分大きい n に対して $F_n(y) < \omega$ である. よって $Y_n(\omega) \leqslant y$. $y > Y(\omega)$ は任意なので (b) が示せた. □

問 5.1.18. **(ファトゥの補題)** $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を連続関数とする．このとき $\mathbb{R}$-値確率変数列 X_n が X へ法則収束するとき

$$\varliminf_{n\to\infty} E[g(X_n)] \geqslant E[g(X)]$$

をみたすことを示せ．

例題 5.1.19. X を分布関数 F を持つ $\mathbb{R}$-値確率変数とする．$n \geqslant 1$ に対して $X_n = X + \dfrac{1}{n}$ とおくと

$$F_n(x) = P(X_n \leqslant x) = P\left(X + \frac{1}{n} \leqslant x\right) = F\left(x - \frac{1}{n}\right)$$

である．$n \to \infty$ としたとき $F_n(x) \to F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y)$ となる．よって分布関数は連続点以外では収束するとは限らないことがわかる．

問 5.1.20. X_p をパラメータ $p \in (0, 1)$ の幾何分布を持つ確率変数とする．このとき

$$pX_p \Rightarrow X, \quad p \to 0$$

となることを示せ．ただし X はパラメータ 1 の指数分布を持つ確率変数とする．

問 5.1.21. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を $\mathbb{N}_0$-値確率変数列, X を $\mathbb{N}_0$-値確率変数とする．このとき以下は同値であることを示せ．

(i) $X_n \Rightarrow X$.

(ii) 任意の $m \in \mathbb{N}_0$ に対して $P(X_n = m) \to P(X = m)$.

問 5.1.22. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ と $\{Y_n : n \geqslant 1\}$ でそれぞれ $\mathbb{R}$-値確率変数 X, Y へ法則収束するが

$$X_n + Y_n \Rightarrow X + Y \tag{5.3}$$

とはならないようなものを構成せよ．一方で X, Y の少なくとも一方が定数 c へ収束するとき (5.3) が正しいことを証明せよ．

5.2 特性関数

この節では $\mathbb{R}^d$-値確率変数列が法則収束することを調べるのに役立つ特性関数と呼ばれるものを導入する．

X: $\mathbb{R}^d$-値確率変数.

定義 5.2.1. $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\varphi(\xi) = E\left[\exp(i\xi \cdot X)\right]$$

を X の**特性関数**という．ただし $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して $x \cdot y$ は標準内積である．また X が法則 μ を持っていたするとき

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi \cdot x} \mu(dx)$$

となる．特にこれを $\hat{\mu}(\xi)$ と書く．

注意 5.2.2. $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 μ が密度関数 f を持っていたとすると

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x} f(x) dx$$

と書ける．これは $\mathbb{R}^d$ 上の可測関数 f の**フーリエ変換**である．$\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 μ に対して $\hat{\mu}(\xi)$ を μ のフーリエ変換とも呼ぶ．[*33]

5.2.1　特性関数の例

まずは特性関数を幾つかの分布に対して求めてみよう．

例題 5.2.3. (ベルヌーイ分布) $\{0,1\}$ 上のパラメータ $p \in [0,1]$ のベルヌーイ分布の特性関数は

$$pe^{i\xi} + (1-p)$$

である．

例題 5.2.4. (二項分布) $\{0,1,\cdots,n\}$ 上のパラメータ $p \in [0,1]$ の二項分布の特性関数は

$$\left(e^{i\xi}p + 1 - p\right)^n$$

例題 5.2.5. (幾何分布) $\mathbb{N}_0$ 上のパラメータ $p \in [0,1]$ の幾何分布の特性関数は

$$\frac{p}{1 - e^{i\xi}(1-p)}$$

である．

例題 5.2.6. (ポアソン分布) $\mathbb{N}_0$ 上のパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ のポアソン分布の特性関数は

$$\exp\left(\left(e^{i\xi} - 1\right)\lambda\right)$$

である．

例題 5.2.7. (一様分布) $(a,b) \subset \mathbb{R}$ 上の一様分布の特性関数は

$$\frac{e^{i\xi b} - e^{i\xi a}}{i\xi(b-a)}$$

である．

例題 5.2.8. $[-a,a]$ 上の分布で密度関数が $\dfrac{a-|x|}{a^2}$ で与えられるものの特性関数は

$$\frac{2(1-\cos(a\xi))}{(a\xi)^2}$$

である．

例題 5.2.9. (指数分布) $(0,\infty)$ 上のパラメータ $\lambda \in (0,\infty)$ 上の指数分布の特性関数は

$$\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$$

である．

[*33] フーリエ変換は可測関数や確率測度だけではなく超関数のフーリエ変換などもある．詳しくは関数解析の参考書などに書いてある．

問 5.2.10. 例題 5.2.3, 5.2.4, 5.2.5, 5.2.6, 5.2.7, 5.2.9 を示せ.

問 5.2.11. (コーシー分布) $\mathbb{R}$ 上のコーシー分布の特性関数が

$$\exp(-|\xi|)$$

であることを示せ.

問 5.2.12. (ガンマ分布) $(0,\infty)$ 上のパラメータ (α,λ) $(\alpha>0,\lambda>0)$ のガンマ分布の特性関数を以下の問に答えることで求めよ.

X をパラメータ (α,λ) $(\alpha>0,\lambda>0)$ のガンマ分布を持つ確率変数とする.

(i) $t>0$ に対して

$$E[\exp(-tX)] = \left(1+\frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha} \tag{5.4}$$

であることを示せ.

(ii) $D=\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}z\in(-\pi,\pi)\}$ とする. このとき $z\mapsto\exp(z)$ は D から $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ への全単射である. $\exp(z)$ の逆関数を $w\mapsto \mathrm{Log}(w)$ とする. $w\in\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$, $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$w^\alpha = \exp(\alpha\mathrm{Log}(w))$$

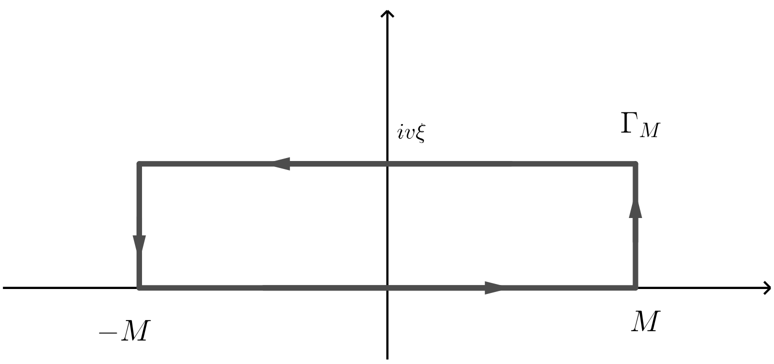
と定義する. このとき (5.4) の両辺が $\mathrm{Re}(t)\geqslant 0$ では正則関数であることを示せ.

(iii) 特性関数を求めよ.

問 5.2.13. (正規分布) 下図のような積分路 Γ_M に対して複素積分 $\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\Gamma_M}\exp\left(-\frac{z^2}{2v}\right)dz$ を考えることにより $\mathbb{R}$ 上の平均 0, 分散 $v>0$ の正規分布の特性関数は

$$\exp\left(-\frac{v\xi^2}{2}\right)$$

であることを示せ.



注意 5.2.14. 非常に雑に証明すると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}e^{-\frac{x^2}{2v}}dx = \exp\left(-\frac{v\xi^2}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2\pi v}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left(-\frac{(x-iv\xi)^2}{2v}\right)\exp\left(-\frac{v\xi^2}{2}\right)dx$$

より $x-i\xi=y$ と変数変換すると "最後の積分が 1"になる. 注意したいのは変数変換したとき積分範囲は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}+iv$ となってしまうので議論としては正確ではない.

問 5.2.15. $\mathbb{R}^d$ 上の平均 m, 分散行列 Σ の正規分布の特性関数は

$$\exp\left(i\xi\cdot m - \frac{1}{2}\xi\cdot\Sigma\xi\right)$$

となることを示せ.

5.2.2 特性関数と弱収束

ここでは特性関数の性質を見るのと同時に確率測度の弱収束との関連を述べていく.

以下確率変数 X の特性関数を φ_X と書くことにする.

$$\varphi_X(\xi) = E[\exp(i\xi\cdot X)], \quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

μ: $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度

定理 5.2.16. μ の特性関数を $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ とすると次が成り立つ.

(i) $\varphi(0)=1$.

(ii) φ は有界連続関数である.

(iii) φ は正定値関数である. すなわち

$$N\in\mathbb{N}, \lambda_1,\cdots,\lambda_N\in\mathbb{C}, \xi_1,\cdots,\xi_N\in\mathbb{R}^d \text{に対して} \sum_{i,j=1}^{N}\lambda_i\overline{\lambda_j}\varphi(\xi_i-\xi_j)\geqslant 0$$

が成り立つ.

注意 5.2.17. これはボホナーの定理と呼ばれるものの一部である. ボホナーの定理では関数 $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ が (i)∼(iii) を満たせば φ がある確率測度の特性関数になることも主張している.

問 5.2.18. 定理 5.2.16 を証明せよ.

次の定理は特性関数の非常に重要な性質を与えている.

X, Y: $\mathbb{R}^d$-値確率変数.

定理 5.2.19. X, Y が独立であるとき

$$\varphi_{X+Y}(\xi) = \varphi_X(\xi)\varphi_Y(\xi), \ \ \xi\in\mathbb{R}^d$$

である.

証明. 定義に戻って証明する. 問 3.1.8 より

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(\xi) &= E\left[\exp\left(i\xi\cdot(X+Y)\right)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot(x+y)}P(X\in dx)P(Y\in dy)\end{aligned}$$

である. フビニの定理を用いると

$$\varphi_{X+Y}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}P(X\in dx)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y}P(Y\in dy) = \varphi_X(\xi)\varphi_Y(\xi)$$

となる. $\square$

注意 5.2.20. $X_1,\cdots,X_n$ を独立同分布な $\mathbb{R}^d$-値確率変数列としたとき

$$\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\xi)=E\left[\exp\left(i\xi\cdot(X_1+\cdots+X_n)\right)\right]=\varphi_{X_1}(\xi)^n,\ \ \xi\in\mathbb{R}^d$$

となる.

X,Y: $\mathbb{R}^d$-値確率変数

定理 5.2.21. 以下のことが成り立つ.

(i) $\varphi_X=\varphi_Y$ が成り立つとき $X\overset{d}{=}Y$ である.

(ii) $Z=(X,Y)$ を $\mathbb{R}^{2d}$-値確率変数とする. このとき以下は同値

(a) X,Y が独立.

(b) 任意の $(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^{2d}$ に対して $\varphi_Z((\xi_1,\xi_2))=E[\exp(i(\xi_1\cdot X+\xi_2\cdot Y))]=\varphi_X(\xi_1)\varphi_Y(\xi_2)$ である.

証明. (i) $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ が急減少関数 (定義 E.2.1) であるとき, 定理 E.2.5 よりある急減少関数 $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ が存在して

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi$$

とできる. フビニの定理より

$$E[f(X)]=\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)\varphi_X(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^d}g(\xi)\varphi_Y(\xi)d\xi=E[f(Y)]$$

である. 任意の左半開区間 $\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i]$ $(-\infty\leqslant a_i<b_i\leqslant\infty, i=1,\cdots,d)$ に対して急減少関数列 $\{f_n:n\geqslant 1\}$ で

$$f_n(x)\to\prod_{i=1}^{d}\mathbf{1}_{(a_i,b_i]}(x),\ \ x\in\mathbb{R}^d,\ \ \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_n(x)|\leqslant 1$$

となるものが存在することに注意すると, ルベーグの収束定理より

$$P\left(X\in\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i]\right)=P\left(Y\in\prod_{i=1}^{d}(a_i,b_i]\right)$$

が従う. 左半開区間全体の成す集合は π-族であるので定理 B.1.8 より $X\overset{d}{=}Y$ となる.

(ii) (a)$\Rightarrow$(b) は定義から明らか.

(b)$\Rightarrow$(a) (i) の証明と同様の方法で示せる. $\square$

問 5.2.22. 定理 5.2.21(ii)(b)$\Rightarrow$(a) の証明を与えよ.

例題 5.2.23. X,Y を平均 0, 分散 σ_X^2,σ_Y^2 の正規分布に従う確率変数とする.

$$X \text{ と } Y \text{ が独立} \Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

であることが問 5.2.15 よりわかる.

次の定理で特性関数と弱収束の関連が見て取れる.

> $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.
>
> **定理 5.2.24.** 以下は同値である.
>
> (i) $\mu_n \Rightarrow \mu$.
> (ii) 各 $\xi \in \mathbb{R}^d$ に対して $\hat{\mu}_n(\xi) \to \hat{\mu}(\xi)$.

証明. (i)⇒(ii) は定義より明らかである.

(ii)⇒(i) $\mathbb{R}^d$ 上の任意の有界連続関数 f に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_n(dx) \to \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx) \tag{5.5}$$

を示す. $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ をより扱いやすい関数で近似することで (5.5) を示す.

<u>$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ のとき</u>

定理 E.2.5 よりある $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)e^{i\xi\cdot x}d\xi$$

となるものが存在する. フビニの定理より $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\nu(dx) &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot x}\nu(dx)\right)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\hat{\nu}(\xi)d\xi\end{aligned}$$

が成り立つ[*34]. よってルベーグの収束定理より

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_n(dx) &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\hat{\mu}_n(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\hat{\mu}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx)\end{aligned}$$

となる.

<u>$f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ のとき</u>

$\varepsilon > 0$ に対して

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}} f(y)\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon}\right)dy$$

と定義する. このとき次をみたす.

- $f_\varepsilon \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_\varepsilon(x) - f(x)| = 0$.

これより任意の $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ に対して $g_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|g_\varepsilon(x) - f(x)| = 0$$

[*34] $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ である

となるものが存在する．これを用いると $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ に対して (5.5) が示せる．

$f \equiv c$ (定数関数) のとき

$\hat{\nu}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(dx)$ であることに注意すれば定義より明らか．

$f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ のとき

ある定数 $M \in \mathbb{R}$ で $f(x) + M \geqslant 0$ となるようなものが存在する．また $g_\ell \in C_c(\mathbb{R}^d)$ で

$$0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \cdots \leqslant g_\ell(x) \leqslant \cdots, \quad \text{かつ} \lim_{\ell\to\infty} g_\ell(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

となるものが存在する．このとき単調収束定理より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} (f(x)+M)\mu(dx) &= \lim_{\ell\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)+M) g_\ell(x)\mu(dx) \\ &= \sup_{\ell\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)+M) g_\ell(x)\mu(dx)\end{aligned}$$

が成り立つ．$(f+M)g_\ell \in C_c(\mathbb{R}^d)$ であるので

$$\begin{aligned}&= \sup_{\ell\geqslant 1} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)+M) g_\ell(x)\mu_n(dx) \\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (f(x)+M)\mu_n(dx).\end{aligned}$$

よって

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu(dx) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mu_n(dx).$$

f を $-f$ で置き換えることにより，$f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して (5.5) が示された． □

問 5.2.25. 定理 5.2.24 の証明で $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ のとき $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり f_ε が f に一様収束することを示せ．

問 5.2.26. X_n を平均 0, 分散 Σ_n の d 次元正規分布の列とする $(n \geqslant 1)$. $X_n \Rightarrow X$ とするとき X は平均 0, 分散 $\lim_{n\to\infty} \Sigma_n = \Sigma$ の正規分布であることを示せ．

注意 5.2.27. 定理 5.2.24 の証明は定理 5.4.1 を用いた簡単な証明が存在するが講義では扱わないので少しめんどくさい証明を与えている．

5.3 中心極限定理

この節では確率論において大数の法則と並んで重要な定理である中心極限定理を証明する．定理の主張は以下で与えられる．

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: 独立同分布な $\mathbb{R}^d$-値確率変数列

定理 5.3.1. (中心極限定理) X_1 が平均ベクトル $E[X_1] = \mu$, 分散行列 Σ を持つとする．このとき

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, \Sigma)$$

が成り立つ．

証明には次の定理を用いる．

X: $\mathbb{R}^d$-値確率変数

定理 5.3.2. $X = (X^{(1)}, \cdots, X^{(d)})$ は $X^{(i)} \in L^2 (1 \leqslant i \leqslant d)$ とする．このとき

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\varphi_X(\xi) - 1 - i\xi \cdot E[X] + \frac{1}{2}E[(\xi \cdot X)^2]}{|\xi|^2} = 0$$

定理 5.3.2 の証明．問 5.3.3 より $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left| e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} \right| \leqslant \min \left\{ \frac{|x|^3}{6}, |x|^2 \right\} \tag{5.6}$$

であることからイェンセンの不等式より

$$\left| \varphi_X(\xi) - 1 - i\xi \cdot E[X] + \frac{E[(\xi \cdot X)^2]}{2} \right| \leqslant |\xi|^2 E\left[\min \left\{ \frac{|\xi||X|^3}{6}, |X|^2 \right\} \right]$$

となる．ルベーグの収束定理より定理が従う． □

問 5.3.3.

$$\int_0^x (x-s)^n e^{is} ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{i}{n+1} \int_0^x (x-s)^{n+1} e^{is} ds$$

を用いて $x \in \mathbb{R}, n \geqslant 1$ に対して

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leqslant \min \left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}$$

を示せ．

定理 5.3.1 の証明．$\overline{X}_i = X_i - E[X_i]$, $S_n = \overline{X}_1 + \cdots + \overline{X}_n$ とする．このとき

$$\begin{aligned} \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(\xi) &= \left(\varphi_{\overline{X}_1} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \\ &= \left(1 - \frac{E[(\xi \cdot \overline{X}_1)^2]}{2n} + o_n(\xi) \right)^n \end{aligned}$$

となる．ただし

$$o_n(\xi) = \varphi_{\overline{X}_1} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) - 1 + \frac{E[(\xi \cdot \overline{X}_1)^2]}{2n}, \quad \lim_{n \to \infty} n o_n(\xi) = 0$$

である．

$$E\left[(\xi \cdot \overline{X}_1)^2 \right] = \sum_{i,j=1}^{d} E\left[\xi_i \xi_j \left(X_1^{(i)} - E\left[X_1^{(i)} \right] \right) \left(X_1^{(i)} - E\left[X_1^{(i)} \right] \right) \right] = \sum_{i,j=1}^{d} \xi_i \xi_j \mathrm{Cov}(X_1^{(i)}, X_1^{(j)}) = \xi \cdot \Sigma \xi$$

である．よって $n \to \infty$ としたとき

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(\xi) \to e^{-\frac{\xi \cdot \Sigma \xi}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

となる．よって定理 5.2.24 より中心極限定理が示せた． □

注意 5.3.4. (5.7) は

$$c_n \to c \in \mathbb{C} \text{ ならば } \left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n \to e^c \tag{5.8}$$

ということを使っているが, これは $c_n, c \in \mathbb{R}$ のときは e の定義から良いが, そうでないときは確かめておく必要がある.

問 5.3.5. 以下の問に答えよ.

(i) $z_1, \cdots, z_n, w_1, \cdots, w_n \in \mathbb{C}$ がすべて $|z_i| \leqslant \theta, |w_i| \leqslant \theta$ をみたしているとする ($1 \leqslant i \leqslant n, \theta > 0$). このとき

$$\left|\prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n w_i\right| \leqslant \theta^{n-1} \sum_{i=1}^n |z_i - w_i|$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $b \in \mathbb{C}$ が $|b| \leqslant 1$ をみたすとする. このとき

$$\left|e^b - 1 - b\right| \leqslant |b|^2$$

が成り立つことを示せ.

(iii) (5.8) を示せ.

問 5.3.6. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布の確率変数で $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$ をみたすとする. このとき

$$\sqrt{\frac{3}{n^3}} \sum_{k=1}^n k X_k$$

は標準正規分布を持つ確率変数に法則収束することを示せ.

5.4 *緊密性

この節は読み飛ばしてもらっても構わないがブラウン運動の構成方法の 1 つである不変原理の証明に必要になる定理をここで挙げているので 8.1.2 節を読む際には一度目を通すと良い.

最後に $\mathbb{R}^d$-値確率変数の集合が法則収束する部分列を持つための必要十分条件を与えておく.

$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$: $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度の族.

定理 5.4.1. 以下は同値である.

(i) $\mathcal{M}$ の任意の無限列が収束する部分列を持つ.

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対してあるコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ で

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu(K^c) < \varepsilon$$

となる.

注意 5.4.2. (ii) は一般の位相空間上では次のように記述される. 位相空間 $(S, \mathcal{O})$ 上の確率測度の族 $\mathcal{M}$ が **(一様) 緊密**であるとは

$$\text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して } S \text{ のコンパクト集合 } K_\varepsilon \text{で } \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon \text{となるものが存在する}$$

ときをいう．完備可分距離空間上では定理 5.4.1 と同様の主張が成り立つことが知られている．(Prohorov 1956)

(ii)⇒(i) の証明はこの講義ノートでは扱わない.

証明. (i)⇒(ii) 背理法で示す.

$$\text{ある}\varepsilon > 0 \text{ で任意のコンパクト集合 } K \text{ に対してある}\mu \in \mathcal{M} \text{ で}\mu(K^c) \geqslant \varepsilon$$

となるものが存在したとする.

$n \geqslant 1, k \geqslant 1$ に対して

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant n\}, \ \ G_k = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < k\}$$

とする. また $\mu_n \in \mathcal{M}$ を

$$\mu_n(K_n^c) \geqslant \varepsilon$$

をみたすものとする. $n > k$ のとき $G_k \subset K_n$ である. $\{\mu_{n_\ell} : \ell \geqslant 1\}$ を $\{\mu_n : n \geqslant 1\}$ の収束部分列とする. 極限を μ とすると, 定理 5.1.11(iii) より

$$\mu(G_k) \leqslant \varliminf_{n_\ell \to \infty} \mu_{n_\ell}(G_k) \leqslant \varliminf_{n_\ell \to \infty} \mu_{n_\ell}(K_{n_\ell}) \leqslant 1 - \varepsilon$$

となる. $k \to \infty$ とすると

$$1 = \mu(\mathbb{R}^d) \leqslant 1 - \varepsilon$$

となり矛盾.

(ii)⇒(i) [2, Theorem 9.3.3]. □

注意 5.4.3. ブラウン運動をランダムウォークから構成する際には $\mathbb{R}^d$ では位相空間 $S = C([0, T], \mathbb{R})$ 上で緊密性を確かめることになる.

5.5 問題

問題 5.1. $\mu_n \in \mathbb{R}, \sigma_n^2 > 0$ は

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = \mu \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 = \sigma^2 > 0$$

をみたすとする. $\mathbb{R}$-値確率変数 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は正規分布 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$ に従うとき,

$$X_n \Rightarrow X$$

となることを示せ. ただし X は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率分布とする.

問題 5.2. $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}^d$ 上のある確率測度の特性関数であるとき, $\mathrm{Re}\varphi$, $|\varphi|^2$ も $\mathbb{R}^d$ 上のある確率測度の特性関数であることを示せ.

問題 5.3. $\mathbb{R}$-値確率変数 X, Y で X, Y は独立ではないが $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$ となるようなものを構成せよ.

問題 5.4. $M > 0$ を定数とする. $\mathbb{R}$-値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が任意の $n \geqslant 1$ に対して $P(|X_n| \leqslant M) = 1$ が成り立つとする. また μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度で $\mu([-M, M]) = 1$ をみたすとする.

このとき次のことが同値であることを示せ.

(1) $X_n \Rightarrow X$. ただし X は分布 μ に従う確率変数.

(2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E\left[X_n^k\right] \to \int_{\mathbb{R}} x^k \mu(dx)$.

問題 5.5. $a > 0$ とする. $\mathbb{R}$-値確率変数 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布でパラメータ a のコーシー分布に従うものとする. このとき確率変数 $\left\{ \dfrac{\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i}{n} : n \geqslant 1 \right\}$ がある確率変数に弱収束することを示し, その分布を求めよ.

問題 5.6. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列でパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うとする. また $\mathbb{N}$-値確率変数 N は $\{X_n : n \geqslant 1\}$ と独立でパラメータ $p \in (0,1)$ の幾何分布に従うとする. このとき確率変数

$$\sum_{n=1}^{N} X_n$$

の特性関数を求めよ. 可能ならば密度関数を求めよ.

問題 5.7. 次の極限を求めよ.[*35]

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \left(1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!} \right).$$

問題 5.8. $\mu \in \mathbb{R}, 0 < \sigma < \infty$ とする. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数列で正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うものとする. $X_1, \cdots, X_n$ の算術平均

$$\overline{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

と確率変数列 $\{\overline{X}_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ を

$$\overline{X}_i = X_i - \overline{X}$$

としたとき確率ベクトル $(\overline{X}, \overline{X}_1, \cdots, \overline{X}_n)$ の特性関数を求めよ. さらに

$$\overline{X} \text{と } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \overline{X}_i^2$$

は独立であることを示せ.

問題 5.9. [*36] 例題 4.2.5 において

$$U_n := \frac{T^{(n)} - n \log n}{n} \Rightarrow \mathcal{X}$$

となることを示したい. ただし $\mathcal{X}$ は $\mathbb{R}$-値確率変数で $P(\mathcal{X} \leqslant x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$ で与えれるものとする. 以下の問に答えることで示せ.

(i) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $E[\exp(it\mathcal{X})] = \Gamma(1 - it)$ を示せ.

(ii) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\phi_n(t) := E\left[\exp(itT^{(n)})\right] = \frac{n!}{\prod_{r=0}^{n-1}(ne^{-it} - r)}$$

となることを示せ.

(iii) $\mathrm{Re} z > 0$ におけるガンマ関数 $\Gamma(z)$ のオイラー積表示 $\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^z n!}{\prod_{r=0}^{n}(z+r)}$(局所一様収束) を用いて $E[\exp(itU_n)] \to \Gamma(1 - it)$ となることを示せ. (問題 4.19 参照)

[*35] ヒント: うまく確率分布の話に帰着させる.

[*36] P. Erdös, A. Rényi: On a classical problem of probability theory. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 6 1961 215-220

6　ランダムウォーク

この章では確率論における 1 つの重要な模型であるランダムウォークについて扱う.

$\mathbb{R}$ 上の $x \in \mathbb{R}$ を出発点とするランダムウォークとは $\mathbb{R}$-値独立同分布確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ に対して

$$S_0 = x,\ \ S_n - S_{n-1} = X_n,\ \ n \geqslant 1$$

を満たすものをいう.

キーワード: ランダムウォーク, 再帰性, 過渡性, 停止時刻.

6.1　ランダムウォークの性質

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: $\mathbb{R}^d$-値独立同分布な確率変数列
ν: X_1 の法則

定義 6.1.1. $x \in \mathbb{R}^d$ を出発点とする $\mathbb{R}^d$ 上の**ランダムウォーク** $\{S_n : n \geqslant 0\}$ とは

$$S_0 = x,\quad S_n - S_{n-1} = X_n,\ \ n \geqslant 1$$

で与えられる確率変数列のことをいう. 特に確率測度 P を P^x と書く.

注意 6.1.2. $x \in \mathbb{Z}^d$ で X_1 が $\mathbb{Z}^d$-値確率変数であるとき, $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークと呼ぶ.

例題 6.1.3. $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークで

$$P(X_1 = e_i) = P(X_1 = -e_i) = \frac{1}{2d},\ \ i = 1, \cdots, d$$

を満たすものを**単純 (対称) ランダムウォーク**という. ここで $e_1, \cdots, e_d$ は $\mathbb{R}^d$ の標準基底である.

例題 6.1.4. $\mathbb{Z}$ 上のランダムウォークで

$$P(X_1 = 1) = p,\ \ P(X_1 = -1) = 1 - p,\ \ p \neq \frac{1}{2}$$

を満たすものを非対称ランダムウォークという.

さて第 5 章まででやってきたことから次のことがわかる.

$X_n = (X_n^{(1)}, \cdots, X_n^{(d)})$.

定理 6.1.5. $X_1^{(i)} \in L^1(P)$ とする $(1 \leqslant i \leqslant d)$. このとき

$$\frac{S_n}{n} \to E[X_1],\quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

定理 6.1.6. $X_1^{(i)} \in L^2(P)$ とする $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Σ を X_1 の分散行列とする. このとき

$$\frac{S_n - nE[X_1]}{\sqrt{n}} \Rightarrow N(0, \Sigma)$$

が成り立つ.

問 6.1.7. 定理 6.1.5 を証明せよ.

ランダムウォークは日本語では酔歩とも呼ばれている. これは点が右に行ったり左に行ったりする様子が酔っ払いの動きのように見えるからである. 定理 6.1.5 では酔っ払いが巨視的に見たときに向かっていく方向と速さが $E[X_1]$ であることを示し, 定理 6.1.6 では時刻 n で $nE[X_1]$ からどの程度ふらふらしているかを与えている.

ではこのランダムウォークについてさらに見ていくことにする.

定義 6.1.8. $\{S_n : n \geqslant 0\}$ を $x \in \mathbb{Z}^d$ を出発する $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークとする.

$$P^x(S_n = x, \ \text{i.o.}) = 1$$

となるときランダムウォークは x で**再帰的**であるといい,

$$P^x(S_n = x, \ \text{i.o.}) < 1$$

となるときランダムウォークは x で**非再帰的**または**過渡的**であるという.

注意 6.1.9. $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォークの場合,

$$\text{任意の}\varepsilon > 0 \text{ に対して } P^x(|S_n - x| < \varepsilon, \ \text{i.o.}) = 1$$

となるとき再帰的, そうでないとき過渡的であるという.

ランダムウォークの再帰性, 過渡性について調べていくことにする.

定理 6.1.10. $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークに対して以下は同値である.

(i) $x \in \mathbb{Z}^d$ で再帰的である.
(ii) すべての点で再帰的である.
(iii) $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $P^x(\text{ある } n \geqslant 1 \text{ で } S_n = x \text{ となる}) = 1$.
(iv) すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $P^x(\text{ある } n \geqslant 1 \text{ で } S_n = x \text{ となる}) = 1$.
(v) $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P^x(S_n = x) = \infty$.
(vi) すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} P^x(S_n = x) = \infty$.

証明. $S_n - x = \tilde{S}_n$ と置き直すことで「すべて」と「$x \in \mathbb{Z}^d$」の命題が同値であることがわかる.

(i)⇒(v) $x \in \mathbb{Z}^d$ と $n \geqslant 0$ に対して

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}\{S_k = x\},$$
$$N(x) = \sum_{n \geqslant 0} \mathbf{1}\{S_n = x\}$$

とおく. このとき (i) から $P(N(x) = \infty) = 1$ である. $N(x)$ の期待値を計算することで (v) が導かれる.

(v)⇒(iii)

$$\tau_x^{(0)} = 0, \tau_x^{(n)} = \inf\left\{m > \tau_x^{(n-1)} : S_m = x\right\}$$

と定義する. $\tau_x^{(n)}$ は n 回目に x に戻ってくる時刻である. このとき

$$P^x\left(\tau_x^{(n)} < \infty\right) = P^x\left(\tau_x^{(1)} < \infty\right)^n \tag{6.1}$$

が成り立つ. また

$$N(x) = \sum_{n\geqslant 1} \mathbf{1}\left\{\tau_x^{(n)} < \infty\right\} \tag{6.2}$$

であることに注意し, 期待値を計算すると

$$\sum_{n\geqslant 0} P^x(S_n = x) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} P^x\left(\tau_x^{(n)} < \infty\right)$$

となる. よって $P^x\left(\tau_x^{(1)} < \infty\right) < 1$ であるとき $\sum_{n\geqslant 0} P^x(S_n = x) < \infty$ となるので示せた.

(iii)⇒(i) (6.1) より任意の $n \geqslant 1$ に対して

$$P^x\left(\tau_x^{(n)} < \infty\right) = 1$$

である. よって (6.2) より $P^x(N(x) = \infty) = 1$ である. □

問 6.1.11. (6.1) を証明せよ.

問 6.1.12. $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークが再帰的であるする. $x, y \in \mathbb{Z}^d$ が $P^x(\tau_y^{(1)} < \infty) > 0$ を満たすとき, $P^x(\tau_y^{(1)} < \infty) = 1$ であることを示せ.

定理 6.1.10 から過渡性に関する次の同値性もわかる.

定理 6.1.13. $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークに対して以下は同値である.

(i) $x \in \mathbb{Z}^d$ で過渡的である.

(ii) すべての点で過渡的である.

(iii) $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して P^x(ある $n \geqslant 1$ で $S_n = x$ となる) < 1.

(iv) すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して P^x(ある $n \geqslant 1$ で $S_n = x$ となる) < 1.

(v) $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\sum_{n\geqslant 0} P^x(S_n = x) < \infty$.

(vi) すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $\sum_{n\geqslant 0} P^x(S_n = x) < \infty$.

(vii) すべての $x \in \mathbb{Z}^d$ に対して $P^x(S_n = x, \text{ i.o.}) = 0$.

問 6.1.14. 定理 6.1.13 を証明せよ.

単純ランダムウォークの再帰性に関して次の結果が知られている.

定理 6.1.15. $\mathbb{Z}^d$ 上の単純ランダムウォークは

(i) $d=1,2$ のとき再帰的である.

(ii) $d\geqslant 3$ のとき過渡的である.

注意 6.1.16. 酔っ払いの話で考えてみよう. 酔っ払い A は前後不覚に陥り交差点に到達するたびに東西南北を確率 $\frac{1}{4}$ で選び進んで行く. このとき問 6.1.12 より飲み屋 $x\in\mathbb{Z}^2$ から出発した A は確率 1 で家 $y\in\mathbb{Z}^2$ にたどり着くことができることがわかる.

一方で鳥にお酒を飲ませて酔っ払わせたとする. 鳥は 3 次元空間を一定距離進むごとに上下東西南北を $\frac{1}{6}$ で選んで飛んでいくとする. このとき鳥は自分の巣へ帰ることができないことが起こりうるのである.

$d=1,2$ のときの証明. $d=1$ の場合. 定理 6.1.10(v) を $x=0$ で示す. 以下 $P^x=P$ と書くことにする. 容易に分かるが

$$P(S_n=0)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2m}}\dbinom{2m}{m}, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$$

である. よって

$$\sum_{n\geqslant 0}P(S_n=0)=\sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}$$

である. 問 A.5.9 より

$$\lim_{m\to\infty}\sqrt{\pi n}\frac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m}=1 \tag{6.3}$$

であるので示せた.

$d=2$ の場合. 同様に 6.1.10(v) を $x=0$ で示す. このとき

$$\{S_{2m}=0\}=\bigcup_{k=0}^{m}\{2m \text{ までに } k \text{ 回ずつ } e_1,-e_1 \text{方向に動き}, m-k \text{ 回ずつ } e_2,-e_2 \text{方向に動く }\}$$

と書ける. よって

$$\begin{aligned}P(S_{2m}=0)&=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{4^{2k}}\frac{(2m)!}{k!k!(m-k)!(m-k)!}\\&=\frac{1}{4^{2m}}\binom{2m}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{m}{m-k}=\frac{1}{4^{2m}}\binom{2m}{m}^2\end{aligned}$$

となり, $d=1$ のときと同様に示せた. □

問 6.1.17. $E[X_1]\neq 0$ であるとき d-次元ランダムウォークは過渡的であることを示せ.

問 6.1.18. (6.3) を示せ.

$d\geqslant 3$ のときの証明. $d=3$ のときを考える. $d=1,2$ の場合と同様に考えると

$$P(S_n=0)=\begin{cases}\dfrac{1}{6^{2m}}\displaystyle\sum_{\substack{i,j,k\geqslant 0,\\ i+j+k=m}}\frac{(2m)!}{(i!j!k!)^2}, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$$

である. ここで

$$P(S_{2m}=0) \leqslant 3^m 6^{-2m} \frac{(2m)!}{m!} \max_{\substack{i,j,k\geqslant 0,\\ i+j+k=m}} \frac{1}{i!j!k!} \tag{6.4}$$

となることに注意する.

$$\max_{\substack{i,j,k\geqslant 0,\\ i+j+k=m}} \frac{1}{i!j!k!} \leqslant \begin{cases} (\ell!)^{-3}, & m=3\ell \\ (\ell 1)^{-2}((\ell+1)!)^{-1}, & m=3\ell+1 \\ (\ell 1)^{-1}((\ell+1)!)^{-2}, & m=3\ell+2 \end{cases} \tag{6.5}$$

よりスターリンの公式から, ある定数 $C>0$ が存在して

$$P(S_2 m=0) \leqslant Cm^{-3/2}$$

となる. よって定理 6.1.13(v) が示された. □

問 6.1.19. (6.4) を示せ.

問 6.1.20. (6.5) を示せ.

最後に $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォークについて再帰性, 過渡性を議論していこう.
まずは $\mathbb{Z}^d$ 上のランダムウォークのように再帰性, 過渡性の同値な条件を与えておく.

$S=\{S_n : n\geqslant 0\}$: $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォーク.

定理 6.1.21. 以下は同値である.

(i) S は再帰的である.
(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\sum_{n\geqslant 1} P(|S_n|<\varepsilon)=\infty$.

(証明). (i)⇒(ii) 対偶を示す.

$$\text{ある}\varepsilon>0\text{ に対して }\sum_{n\geqslant 1} P(|S_n|<\varepsilon)<\infty$$

となったとすると, このときボレル-カンテリの補題から

$$P(|S_n|<\varepsilon,\ \text{i.o.})=0$$

となり過渡的である.

(ii)⇒(i) $\varepsilon>0$ に対して (ii) が成立したとする. このとき

$$P(|S_n|<2\varepsilon, \text{i.o.})=1$$

であることを示す.

$$\begin{aligned} P\left(\{|S_n|<\varepsilon,\ \text{i.o.}\}^c\right) &= \sum_{m\geqslant 1} P\left(|S_m|<\varepsilon\text{かつ}|S_n|\geqslant\varepsilon, n\geqslant m+1\right) \\ &\geqslant \sum_{m\geqslant 1} P(|S_m|<\varepsilon, |S_n-S_m|\geqslant 2\varepsilon, n\geqslant m+1) \\ &= \sum_{m\geqslant 1} P(|S_m|<\varepsilon)\rho_{2\varepsilon,1} \end{aligned}$$

となる. ただし $\rho_{\varepsilon,k} = P(|S_n| \geqslant \varepsilon, n \geqslant k)$ とする. このとき仮定から

$$\rho_{2\varepsilon,1} = P(|S_n| \geqslant 2\varepsilon, n \geqslant 1) = 0$$

となることがわかる. 同様に $A_{m,k,\varepsilon} = \{|S_m| < \varepsilon, |S_n| \geqslant \varepsilon, n \geqslant m+k\}$ とおくと

$$k \geqslant \sum_{m\geqslant 1} P(A_{m,k,\varepsilon}) \geqslant \sum_{m\geqslant 1} P(|S_m| < \varepsilon)\rho_{2\varepsilon,k} \tag{6.6}$$

となり

$$\rho_{2\varepsilon,k} = P(|S_n| \geqslant 2\varepsilon, n \geqslant k) = 0$$

となる. k は任意なので (i) が示せた. □

問 6.1.22. (6.6) を示せ.

注意 6.1.23. 過渡的であることは

$$\text{ある}\varepsilon > 0 \text{ に対して } \sum_{n\geqslant 1} P(|S_n| < \varepsilon) < \infty$$

であることと同値であることがわかるが実は任意の $\varepsilon > 0$ に対して同値性がなりたつことがわかる.

$\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォークに対して次の定理が知られている.

$S = \{S_n : n \geqslant 0\}$: $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォーク

定理 6.1.24. 次のことは同値である.

(i) S が再帰的である.

(ii) ある $\delta > 0$ が存在して

$$\int_{(-\delta,\delta)^d} \mathrm{Re}\, \frac{1}{(1-\varphi(x))} dx = \infty$$

(iii) ある $\delta > 0$ が存在して

$$\sup_{0<r<1} \int_{(-\delta,\delta)^d} \mathrm{Re}\, \frac{1}{(1-r\varphi(x))} dx = \infty$$

ただし, $\varphi(x) = E[\exp(i(x \cdot X_1))]$ は

注意 6.1.25. この講義ノートでは (i)⇔(iii) のみを示す.

証明. (i)⇒(iii) $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $\|x\| = \sum_{i=1}^d |x_i|$ を x の ℓ^1-ノルムとする. $x \in \mathbb{R}$ が $|x| < \frac{\pi}{3}$ を満たすとき

$$1 - \cos x \geqslant \frac{x^2}{4} \tag{6.7}$$

であることから

$$P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) \leqslant 4^d \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d \frac{1-\varphi(\delta x_i)}{(\delta x_i)^2} P(S_n \in dx) \tag{6.8}$$

となる．フビニの定理と例題 5.2.8 より

$$P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) \leqslant 2^d \int_{[-\delta,\delta]^d} \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\delta - |x_i|}{\delta^2}\right) \varphi(x)^n dx$$

となる．両辺に $r^n(0 < r < 1)$ をかけて和を取ると

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} r^n P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) &\leqslant 2^d \int_{[-\delta,\delta]^d} \frac{\delta - |x_i|}{\delta^2} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx \\ &\leqslant \left(\frac{2}{\delta}\right)^d \int_{[-\delta,\delta]^d} \mathrm{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx\end{aligned}$$

となり $r \nearrow 1$ とすることで

$$\sum_{n\geqslant 0} P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) \leqslant \sup_{0<r<1} \left(\frac{2}{\delta}\right)^d \int_{[-\delta,\delta]^d} \mathrm{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx$$

となる．よって (i)⇒(iii) が示された．

(iii)⇒(i) 例題 5.2.8 と注意 E.2.8 より関数

$$\frac{\delta(1 - \cos\left(\frac{x}{\delta}\right))}{\pi x^2}$$

を密度関数に持つ $\mathbb{R}$-値確率変数の特性関数は

$$\psi(\xi) = \begin{cases} 1 - |\delta\xi|, & |\xi| < \frac{1}{\delta} \\ 0, & |\xi| \geqslant \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

であることがわかる．$1 \geqslant \prod_{i=1}^{d}(1 - |\delta x_i|)$ よりフビニの定理から

$$\begin{aligned}P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) &\geqslant \int_{(-\frac{1}{\delta},\frac{1}{\delta})^d} \prod_{i=1}^{d} (1 - |\delta x_i|)\, P(S_n \in dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \frac{\delta(1 - \cos\left(\frac{x_i}{\delta}\right))}{\pi x_i^2} \varphi^n(x) dx\end{aligned}$$

両辺に $r^n(0 < r < 1)$ をかけ和を取ると

$$\sum_{n\geqslant 1} r^n P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^{d} \frac{\delta(1 - \cos\left(\frac{x_i}{\delta}\right))}{\pi x_i^2} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx$$

となる．右辺が実数であることから実部のみを考えればよく，(6.7) より

$$\sum_{n\geqslant 1} r^n P\left(\|S_n\| < \frac{1}{\delta}\right) \geqslant (4\pi\delta)^{-d} \int_{(-\delta,\delta)^d} \mathrm{Re} \frac{1}{1 - r\varphi(x)} dx$$

である．$r \nearrow 1$ とすることで定理 6.1.21 の条件が示される． □

問 6.1.26. (6.8) を示せ．

定理 6.1.27. $\mathbb{R}^d$ 上の平均 0, 分散が有限なランダムウォークについて次が成り立つ．

(i) $d = 1, 2$ のとき再帰的である．

(ii) $d \geqslant 3$ のとき, ランダムウォークが真に 3 次元以上ならば過渡的である.

ただしランダムウォークが真に 3 次元以上であるとは

$$\dim\{\theta \in \mathbb{R}^d : P(X_1 \cdot \theta = 0) = 1\} \leqslant d - 3$$

であるときをいう.

6.2 ランダムウォークと停止時刻

ランダムウォークは独立同分布な確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を用いて定義されていた. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義されていたとする. 可測集合族の列 $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ を

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n],\ n \geqslant 1$$

と定義すると

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

となる.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定義 6.2.1. Ω 上の可測集合族の列 $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ が

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

を満たしたとする.

$\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$-値確率変数 N が $\{F_n : n \geqslant 0\}$ に対して**停止時刻**であるとは

$$\text{各 } 0 \leqslant n < \infty \text{ に対して } \{N \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$$

を満たすときを言う.

注意 6.2.2. $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ が文脈から判断できる場合には単に停止時刻であると呼ぶこともある.

例題 6.2.3. $A \subset \mathbb{R}^d$ をボレル可測集合とする. $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォーク $\{S_n : n \geqslant 0\}$ に対して

$$\tau_A = \inf\{n \geqslant 1 : S_n \in A\}$$

と定義すると τ_A は停止時刻である. 特に τ_A を A への**到達時刻**と呼ぶ.

問 6.2.4. 例題 6.2.3 の τ_A が停止時刻であることを確かめよ.

問 6.2.5. $A \subset \mathbb{R}^d$ をボレル可測集合とする. $\mathbb{R}^d$ 上のランダムウォーク $\{S_n : n \geqslant 0\}$ と $n \geqslant 1$ に対して

$$\sigma_A^n = \sup\{m \leqslant n : S_n \in A\}$$

と定義する. このとき σ_A^n は停止時刻ではないことを示せ.

問 6.2.6. S, T が停止時刻であるとき $S \vee T, S \wedge T$ も停止時刻であることを示せ.

問 6.2.7. S, T が停止時刻であるとき $S+T$ が停止時刻かどうか判定し, 証明か, 反例を与えよ.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$: $\mathbb{R}$-値独立同分布確率変数.

定理 6.2.8. **(ワルドの等式)** $X_n \in L^1$ とする. N が停止時刻で $E[N] < \infty$ ならば

$$E[S_N] = E[N]E[X_1]$$

が成り立つ.

証明. まず $P(X_i \geqslant 0) = 1$ であると仮定する. このときフビニの定理から

$$\begin{aligned} E[S_N] &= \int S_N dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{N=n} S_n dP = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_{N=n} X_m dP \\ &= \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant m} \int_{N=n} X_m dP = \sum_{m \geqslant 1} \int X_m \mathbf{1}\{N \geqslant m\} dP. \end{aligned}$$

X_m と $\mathbf{1}\{N \geqslant m\}$ は独立であるので,

$$E[S_N] = \sum_{m \geqslant 1} E[X_1] P(N \geqslant m) = E[X_1]E[N]$$

となる.

また一般の場合には $E[N] < \infty$ なので上の結果より

$$E\left[\sum_{n=1}^{N} |X_n|\right] = E[|X_1|]E[N] < \infty$$

である. よってフビニの定理より

$$\begin{aligned} E[S_N] &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \int_{N=n} X_m dP = \sum_{m \geqslant 1} \sum_{n \geqslant m} \int X_m \mathbf{1}\{N = n\} dP \\ &= \sum_{m \geqslant 1} E[X_1] P(N \geqslant m) = E[X_1]E[N] \end{aligned}$$

である. □

例題 6.2.9. **(破産問題)** 確率 $\frac{1}{2}$ で表, $\frac{1}{2}$ で裏が出るコインがある. とする. 次のようなゲームを考える.

(i) 時刻 0 では所持金 $a \in \mathbb{N}$ である.

(ii) 時刻 n でコインを投げ, 表が出ると所持金が 1 増え, 裏が出ると所持金は -1 となる.

所持金が $b > a$ になる前に所持金が 0 になる確率を計算しよう.

時刻 n での損益 S_n は

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

と書ける. ただし, $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布な確率変数で $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \dfrac{1}{2}$ を満たすものである. このとき時刻 n での所持金 T_n は負の所持金まで許すと

$$T_n = a + S_n$$

である．

$$\tau_{a,b} = \inf\{n \geqslant 1 : S_n \notin [-a, b-a]\}$$

とおくとこれは停止時刻である．まず $E[\tau_{a,b}] < \infty$ を示す．任意の $x \in (-a, b-a)$ に対して

$$P(\tau_{a,b} \leqslant b) \geqslant 2^{-b}$$

であるので

$$P(\tau_{a,b} > nb) \leqslant (1-2^{-b})^n$$

となり $E[\tau_{a,b}] < \infty$ である．よってワルドの等式から

$$\begin{aligned} a = E[T_{\tau_{a,b}}] = a + E\left[\sum_{i=1}^{\tau_{a,b}} X_i\right] &= a + E\left[S_{\tau_{a,b}} : S_{\tau_{a,b}} = -a\right] + E\left[S_{\tau_{a,b}} : S_{\tau_{a,b}} = b-a\right] \\ &= bP(S_{\tau_{a,b}} = b-a). \end{aligned}$$

すなわち確率 $\frac{a}{b}$ で破滅する前に所持金が b になる．

系 6.2.10. 原点出発の $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダムウォークを考える．$a < 0 < b$ に対して

$$\begin{aligned} T_a &= \inf\{n \geqslant 1 : S_n = a\} \\ T_b &= \inf\{n \geqslant 1 : S_n = b\} \end{aligned}$$

と置く．このとき

$$P(T_a < T_b) = \frac{b}{b-a},\ P(T_b < T_a) = \frac{-a}{b-a}$$

である．特に

$$P(T_a < \infty) = P(T_b < \infty) = 1$$

である．

証明. 前半は例題 6.2.9 より従う．後半は $b \to \infty$ とすると

$$P(T_a < \infty) \geqslant P(T_a < T_b) \to 1$$

から従う． □

例題 6.2.11. 系 6.2.10 の設定の下で考える．$E[S_{T_a}]$ を考えると $P(T_a < \infty)$ であるので

$$E[S_{T_a}] = a$$

である．一方 $E[X_1] = 0$ であるので $E[N] < \infty$ であると仮定するとワルドの等式より $E[S_{T_a}] = 0$ となり矛盾する．よって $E[T_a] = \infty$ であることがわかる．

7 離散時間マルチンゲール

この章では離散時間マルチンゲールと呼ばれる概念とそれに関する性質を確かめていく. 離散時間マルチンゲールの代表的な例が第 6 章で扱った単純ランダムウォークである.

離散時間マルチンゲールの定義をするためには条件付き期待値を定義する必要がある.

この章では σ-加法族の概念をきちんと理解していることが鍵となるので復習してから読み進めることを勧める.

キーワード: 条件付き期待値, 離散時間マルチンゲール、一様可積分

7.1 条件付き期待値

問題 1.9 を思い出すと事象 $B \in \mathcal{F}$ が $0 < P(B) \leqslant 1$ であるとき, B に関する条件付き測度

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{F}$$

を考えることで $(X, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$ は確率空間になった. ではこの条件付き測度 $P(\cdot|B)$ の元で確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ の期待値を計算し, 元の確率測度 P の下での期待値と比較してみる.

こういった時はまずは可測単関数, 非負可測関数, 可測関数の順に見ていくのが定石である.

$X : \Omega \to [0, \infty)$ が可測単関数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k 1_{A_k}$ と表せるとき,

$$E[X|B] = \sum_{k=1}^{n} a_k P(A_k|B) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{E[X : B]}{P(B)}$$

となり, 特に $E[X|B]P(B) = E[X : B]$ が成り立つ. あとは非負可測関数, 可測関数の場合であるが収束定理を使えば同じ関係式が従うことは容易にわかる[*37].

さてここから一般化していく流れになる. 上では 1 つの事象 B に対して考えていたものを事象の数を増やしてみる.

可算個の互いに素な事象 $\{B_i : i \in I\}$ が Ω を分割 $(\Omega = \displaystyle\bigcup_{i \in I} B_i)$ し, 任意の $i \in I$ に対して $P(B_i) > 0$ をみたすとする. このとき容易にわかることとして $X \in L^1(P)$ ならば

$$\sum_{i \in I} E[X|B_i]P(B_i) = E[X] \tag{7.1}$$

が成り立つ. (7.1) の左辺をある確率変数の期待値とみなすことができる.

実際, $Y = \sum_{i \in I} E[X|B_i] 1_{B_i}$ という確率変数を考えると, (7.1) の左辺は $E[Y]$ であることがわかる.

この Y についてもう少し見てみる. $\mathcal{G} = \sigma[B_i : i \in I]$ という $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族を考える. すると以下のことがわかる.

- Y は $\mathcal{G}$-可測である. [*38]
- 任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して $E[Y : B] = E[X : B]$ が成り立つ.

ここまでで, どのように (何を) 一般化するのか方向性が見えてきた. より一般の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ に対して条件付き期待値を考えてみる.

[*37] ただし可測関数の場合は $X 1_B \in L^1(P)$ を仮定する必要がある.

[*38] X は $\mathcal{G}$-可測とは限らない.

定義 7.1.1. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ を考える. $\mathcal{F}$-可測確率変数 X が $X\in L^1(P)$ であるとき, 次のような確率変数 Y のことを $\mathcal{G}$ **に関する** X **の条件付き期待値**と呼び, $E[X|\mathcal{G}]$ と表す.

(i) Y は $\mathcal{G}$-可測である.

(ii) $E[|Y|]<\infty$.

(iii) 任意の $A\in\mathcal{G}$ に対して $E[Y:A]=E[X:A]$.

注意 7.1.2. $\mathcal{G}$-可測関数 $\tilde{Y}$ も定義 7.1.1 の条件 (i)-(iii) をみたすとき $\tilde{Y}=Y$ a.s. が成り立つので, 一般には Y が X の条件付き期待値というときは $Y=E[X|\mathcal{G}]$ a.s. と表す.

問 7.1.3. 確率空間 $([0,1),\mathcal{F},dx)$ と部分 σ-加法族 $\mathcal{I}_n(n\geqslant 1)$ を

$$\mathcal{I}_n=\sigma\left[\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right),k=0,\dots,2^n-1\right]$$

と定義する. このとき任意の $n\geqslant 1$ に対して $\mathcal{I}_n\subset\mathcal{I}_{n+1}$ が成り立つことを示せ. また $\mathcal{I}_{n+1}$-可測関数 $X:[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して

$$E\left[X|\mathcal{I}_n\right](x)=2^n\int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}}X(t)dt,\quad x\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)$$

が成り立つことを示せ.[*39]

注意 7.1.4. 部分 σ-加法族は色々存在するが, 例えばある確率変数の族 $\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ によって生成される σ-加法族 $\sigma[Z_\lambda:\lambda\in\Lambda]$ を用いるときは $E[X|Z_\lambda,\lambda\in\Lambda]$ と書く.

確率変数 $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ が $\sigma[Z_\lambda:\lambda\in\Lambda]$-可測であるということを定義から即座に理解することは難しい. しかし次のような読み替えができることが知られている.

定理 7.1.5. [20, Chapter A 3.2] $\mathbb{R}$-値確率変数の族 $\{Z_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ の族とし, $Y:\Omega\to\mathbb{R}$ が $\sigma[Z_\lambda:\lambda\in\Lambda]$-可測であるとき, ある可算個の列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Lambda$ と関数 $f:\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{R}$ が存在し

$$Y=f(X_{\lambda_1},X_{\lambda_2},\cdots,).$$

例題 7.1.6. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の可積分な確率変数 X を考える. 事象 B によって生成される σ-加法族 $\{\emptyset,B,B^c,\Omega\}$ に関する X の条件付き期待値は $E[X|B]1_B+E[X|B^c]1_{B^c}$ である.

さて当然であるが, 定義 7.1.1 のような Y が存在するかは決して自明ではない. 次の定理で確認する.

定理 7.1.7. 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ と部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ を考える. $\mathcal{F}$-可測確率変数 X が $X\in L^1(P)$ であるとき, 定義 7.1.1 の条件をみたす確率変数 Y が存在し, (確率 0 の事象を除いで) 一意である.

一意性の証明は演習問題として残しておく.

存在に関しては 2 通りの証明を紹介する. 1 つは Radon-Nikodym 定理を用いる (定理 A.5.16) 証明で読み飛ばしても構わない.

[*39] ここでは条件付き期待値が x に依存した関数であることを明示するために $E[X|mathcal I_n](x)$ という表記を用いた.

証明*. まず $X \geqslant 0$ (P-a.s.) の場合を考える. $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A X dP$$

を考えると ν は $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の有限測度になる. 特に定義から $\nu \ll P$ である. よって Radon-Nikodym 定理から $\mathcal{G}$-可測な Radon-Nikodym 微分 $\frac{d\nu}{dP}$ が存在して, 任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$E[X : A] = \int_A X dP = \int_A \frac{d\nu}{dP} dP = \nu(A) \tag{7.2}$$

となる. $Y = \dfrac{d\nu}{dP}$ とし (7.2) で $A = \Omega$ とすると $Y \in L^1$ であることがわかる. また $Y \geqslant 0$ P-a.s. も容易に確かめられる.

一般の X に対しては $X = X^+ - X^-$ と表し, $Y_1 = E[X^+|\mathcal{G}]$, $Y_2 = E[X^-|\mathcal{G}]$ を用いて $Y = Y_1 - Y_2$ とすればよい.

□

2 つ目は $L^2(P)$ がヒルベルト空間であることを用いた巧みな構成である.

証明. [20, Theorem 9.2] $X \in L^2(\mathcal{F}, P)$ とする. ヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{F}, P)$ の部分空間 $L^2(\mathcal{G}, P)$ は L^2-ノルム $\|\cdot\|_2$ に関して完備である. よってある $Y \in L^2(\mathcal{G}, P)$ が存在して以下をみたす.

(a) $E[(X-Y)^2] = \inf\{E[(X-Z)^2] : Z \in L^2(\mathcal{G}, P)\}$.
(b) 任意の $Z \in L^2(\mathcal{G}, P)$ に対して $\langle X-Y, Z\rangle := E[(X-Y)Z] = 0$.

特に, (b) で $Z = 1_G$ ($G \in \mathcal{G}$) ととると $E[X : G] = E[Y : G]$ となる. よって Y は定義 7.1.1 の条件をみたす.

$X \in L^1(P)$ とする. $X \geqslant 0$ としてよい. (1 つ目の証明後半と同じ議論を用いる.)

このとき有界な確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ で $0 \leqslant X_n \leqslant X_{n+1} \nearrow X$, P-a.s. となるものが存在する. $X_n \in L^2(\mathcal{F}, P)$ なので $Y_n \in L^2(\mathcal{G}, P)$ で定義 7.1.1 をみたすものが存在する.

各 $\omega \in \Omega$ に対して $Y(\omega) = \overline{\lim}_{n\to\infty} Y_n(\omega)$ とおくと, $Y = E[X|\mathcal{G}]$, P-a.s. となる. (問題 7.3) □

問 7.1.8. $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ とする. このとき $X \in L^1(\mathcal{F}, P)$ に対して任意の $\omega \in \Omega$ で $E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X]$ であることを示せ.

問 7.1.9. L^1-確率変数 X は σ-加法族 $\mathcal{G}$ と独立とする. このとき $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ P-a.s. を示せ.

この問の簡単な応用は次のようになる.

例題 7.1.10. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な $\mathbb{R}$-値確率変数で $X_1 \in L^1$ とする. $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + X_n$ ($n \geqslant 1$) でランダムウォークを定義すると

$$E[S_n|X_1, \cdots, X_{n-1}] = S_{n-1} + E[X_1] \quad P\text{-a.s.}$$

となる.

注意 7.1.11. 条件付き期待値を考えるときは基本的に確率 0 の事象を除いた部分での議論しか行わない. よって主張はすべて P-a.s. となる.

例題 7.1.12. 確率変数 (X, Y) の同時分布が密度 $f(x, y)$ を持つとする. つまり

$$P((X, Y) \in A) = \int_A f(x, y) dx dy \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

が成り立つとする. では Y に関する条件付き確率 "$P(X \in dx|Y)$" の密度関数はどのように表せるのか. 簡単のために $y \in \mathbb{R}$ に対して $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx > 0$ を仮定する.

結論から言うと $P(X \in dx|Y)$ は密度

$$\frac{f(x,Y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y)dx} \tag{7.3}$$

を持つ. 実際, 任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned} E[1_{\{X\in A\}} : Y \in B] = P((X,Y) \in A \times B) &= \int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_B \left(\frac{\int_A f(x,y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx\right)dy \\ &= \int_B \left(\frac{\int_A f(x,y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx}\right) P(Y \in dy) \\ &= E\left[\frac{\int_A f(x,Y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y)dx} : Y \in B\right] \end{aligned}$$

となる. これは $P(X \in A|Y) = \dfrac{\int_A f(x,Y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,Y)dx}$ が成り立つことを言っており, 特に密度関数 (7.3) を持つことを意味する.

問 7.1.13. $\lambda > 0$ とする. $X_1, \cdots, X_n$ を独立同分布な確率変数で $X_n \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$ となるものとする. このとき

$$P((X_1, \cdots, X_{n-1}) \in dx | X_1 + \cdots + X_n = t) = \mathrm{Unif}[\mathrm{Tri}_n(t)]$$

となることを示せ. ただし, $\mathrm{Tri}_n(t) = \{(t_1, \cdots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : t_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n, t_1 + \cdots + t_{n-1} \leqslant t\}$.

問 7.1.14. $t_1, t_2 > 0$ とする. X_1, X_2 を独立な実数値確率変数で $X_i \overset{\mathrm{d}}{\sim} N(0, t_i)$ とする. 以下の問に答えよ.
$P(X \in dx|X+Y)$ の密度関数は $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2t}\left(x - \frac{t_1 Y}{t_1+t_2}\right)^2\right)$ で与えられることを示せ. ただし $t = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_2}$.

条件付き期待値の基本的な性質を以下で挙げておく.

命題 7.1.15. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$ を考える. $\mathcal{F}$-可測な L^1-確率変数 X, Y について以下が成り立つ.

(i) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$ P-a.s.
(ii) $X \leqslant Y$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \leqslant E[Y|\mathcal{G}]$ P-a.s.
(iii) (単調収束定理) $\mathcal{F}$-可測な非負確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が n に関して単調増加で X に概収束するとする. $E[X] < \infty$ ならば

$$E[X_n|\mathcal{G}] \to E[X|\mathcal{G}] \quad P\text{-a.s.}$$

(iv) (イェンセンの不等式) φ を凸関数とする. さらに $\varphi(X) \in L^1$ ならば

$$\varphi(E[X|\mathcal{G}]) \leqslant E[\varphi(X)|\mathcal{G}] \quad P\text{-a.s.}.$$

(v) 部分 σ-加法族 $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ が $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ をみたすとき $E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1]$ P-a.s. であり, $E[E[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = E[X|\mathcal{G}_1]$ P-a.s.
(vi) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$.
(vii) X が $\mathcal{G}$-可測で $XY \in L^1$ ならば $E[XY|\mathcal{G}] = XE[Y|\mathcal{G}]$ P-a.s.
(viii) 部分 σ-加法族 $\mathcal{H}$ が $\sigma[X, \mathcal{G}]$ と独立ならば $E[X|\sigma[\mathcal{G}, \mathcal{H}]] = E[X|\mathcal{G}]$ P-a.s.

ここではイェンセンの不等式の証明のみを与える.
他の証明は演習として残しておく.

証明. φ の定義域を I とする. $\mathbb{Q}^2_\varphi := \{(a,b) \in \mathbb{Q}^2 : ax + b \leqslant \varphi(x), x \in I\}$ としたとき $\mathbb{Q}^2_\varphi \neq \emptyset$ である.

このとき任意の $x \in I$ に対して $\varphi(x) = \sup_{(a,b)\in\mathbb{Q}^2_\varphi}(ax+b)$ となるので (i), (ii) より任意の $(a,b) \in \mathbb{Q}^2_\varphi$ に対して

$$aE[X|\mathcal{G}] + b \leqslant E[\varphi(X)|\mathcal{G}], P\text{-a.s.}$$

となる. 上限を考えることで示された.

□

問 7.1.16. 命題 7.1.15 を証明せよ.

7.2 離散時間マルチンゲール

この節では離散時間マルチンゲールと呼ばれる概念とその基本的な性質を見ていく. そのために次のような σ-加法族の列を考える.

定義 7.2.1. σ-加法族 $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の列 $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ が**フィルトレーション**であるとは

$$\text{任意の } n \geqslant 0 \text{ に対して } \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

をみたすときをいう. また確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が $\mathcal{F}_n$**-適合**であるとは, 任意の $n \geqslant 0$ に対して X_n が $\mathcal{F}_n$-可測であるときをいう.

例題 7.2.2. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $\mathbb{R}$-値 i.i.d. 確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を考える. このとき

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n], n \geqslant 1$$

とする. このとき $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ はフィルトレーションとなる. また確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ に対して確率変数列

$$S_0 = 0, S_n = S_{n-1} + X_n, n \geqslant 1$$

を考えると, S_n は $\mathcal{F}_n$-適合である. [*40]

定義 7.2.3. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ に対して, $\mathbb{R}$-確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が ($\mathcal{F}_n$ に関して) **マルチンゲール**であるとは次をみたすときをいう.

(i) $E[|X_n|] < \infty$.
(ii) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}_n$-適合.
(iii) $n \geqslant 1$ に対して $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}, \quad P\text{-a.s.}$

注意 7.2.4. 定義 7.2.3 の条件 (iii) を $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \leqslant X_{n-1}$ に置き換えて成立するとき**優**マルチンゲール, $E[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] \geqslant X_{n-1}$ に置き換えて成立するとき**劣**マルチンゲールと呼ぶ. [*41]

[*40] 例題 7.2.2 の $\mathcal{F}_n$ は $X_1, \cdots, X_n$ によって生成される σ-加法族である. これは $A \in \mathcal{F}_n$ に対して $\omega \in \Omega$ が $\omega \in A$ かどうかは $(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ によって決まるということを言っている. また $\mathcal{G}_n = \sigma[S_n]$ はフィルトレーションではないこともわかる.
[*41] 章題にあるように本来であれば離散時間マルチンゲールと呼んだ方が良いが文脈から明らかな場合は省略することが多い. 当然連続時間マルチンゲールも存在する.

例題 7.2.5. 例題 7.2.2 の $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は $X_n \in L^1$ であるとする. このとき

$$\left.\begin{array}{l} E[X_1] = 0 \\ E[X_1] \leqslant 0 \\ E[X_1] \geqslant 0 \end{array}\right\} \text{ならば } S_n \text{が } \mathcal{F}_n \text{に関して} \left\{\begin{array}{l} \text{マルチンゲール} \\ \text{優マルチンゲール} \\ \text{劣マルチンゲール} \end{array}\right.$$

となる. (例題 7.1.10 参照)

問 7.2.6. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールとする. このとき任意の $n > m \geqslant 0$ に対して

$$E[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m, \quad P\text{-a.s.}$$

となることを示せ.

問 7.2.7. $1 \leqslant p < \infty$ とする. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が $\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲールで, 任意の $n \geqslant 0$ に対して $E[|X_n|^p] < \infty$ と仮定する. このとき $|X_n|^p$ は $\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲールであることを示せ.

問 7.2.8. 独立同分布な $\mathbb{R}$-値確率変数列 X_n は任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $E[X_n] = \mu$, $V(X_n) = E[(X_n - E[X])^2] = \sigma^2 < \infty$ とする. $S_0 = 0$, $n \geqslant 1$ に対して $S_n = S_{n-1} + X_n$ と定義する. このとき $\{S_n^2 - n\sigma^2 : n \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールであることを示せ. ただし $\mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n] (n \geqslant 1)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ とする.

問 7.2.9. 独立同分布な $\mathbb{R}$-値確率変数列 X_n は任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $E[e^{\theta X_n}] < \infty$ をみたすとする. $M_0 = 1$, $n \geqslant 1$ に対して $M_n = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{e^{\theta X_i}}{E[e^{\theta X_1}]}$ とすると $\{M_n : n \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}_n$ マルチンゲールであることを示せ. ただし $\mathcal{F}_n = \sigma[X_1, \cdots, X_n] (n \geqslant 1)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ とする.

問 7.2.10. ξ を $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$-確率変数とする. $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\} \subset \mathcal{F}$ をフィルトレーションとする. このとき

$$X_n = E[\xi|\mathcal{F}_n], \quad P\text{-a.s.}$$

とすると $\{X_n : n \geqslant 0\}$ はマルチンゲールであることを示せ.

例題 7.2.11. (Galton-Watson 過程) マルチンゲールの例として Galton-Watson 過程と呼ばれる生物の個体数の時間発展を記述する単純な模型を紹介する. Z_n で第 n 世代の個体数を表すとする. $Z_0 = 1$ とし, 第 n 世代の個体はそれぞれ独立に次の世代の個体を生み出すような生物模型である. これを正確に記述するために**出生分布** $\{p_k : k \geqslant 0\}$ というものを導入しておく.

出生分布 $\{p_k : k \geqslant 0\}$ は

$$\text{任意の } k \geqslant 0 \text{ に対して } p_k \geqslant 0, \text{ かつ } \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

をみたすものである.

第 n 世代に Z_n 個の個体がいるとき, 第 $n+1$ 世代の個体は

$$Z_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_{Z_n}^{(n)}, & Z_n \geqslant 1 \\ 0, & Z_n = 0 \end{cases}$$

で与えられる. ただし $\{\xi_i^{(n)} : i \geqslant 1, n \geqslant 0\}$ は独立同分布な確率変数で $P(\xi_i^{(n)} = k) = p_k$ をみたすものとする. つまり $\xi_i^{(n)}$ は第 n 世代の i 番目の個体が生み出す個体数を表している. **平均出生数**を $m = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = E[\xi_1^{(0)}]$ で与える.

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma[\xi_i^{(k)} : i \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n-1] (n \geqslant 1)$ とおき, $0 < m < \infty$ を仮定すると $\left\{N_n = \frac{Z_n}{m^n} : n \geqslant 1\right\}$ は $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールである.

問 7.2.12. 例題 7.2.11 の $\{N_n : n \geqslant 0\}$ が $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールであることを示せ.

7.2.1 マルチンゲールの基本的な性質

ここでマルチンゲールに関するいくつかの性質を挙げておく.

まずは停止時刻の概念を一般化しておく.

定義 7.2.13. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上のフィルトレーション $\{F_n : n \geqslant 0\}$ が与えられているとする. $\mathcal{F}$-可測関数 $N : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-**停止時刻**であるとは,

$$\text{任意の } n \in \mathbb{N}_0 \text{ に対して } \{N \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$$

が成り立つときをいう.

注意 7.2.14. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_n\}$ が文脈から自明なときは単に「N は停止時刻」ということがある.

例題 7.2.15. $\{S_n\}_{n \geqslant 0}$ を $\mathbb{R}$ 上のランダムウォークとし, $A \subset \mathbb{R}$ を空でないボレル集合とする.

$$N = \inf\{n \geqslant 0 : S_n \in A\}$$

とおいたとき, N は $\mathcal{F}_n = \sigma[S_0, \ldots, S_n]$-停止時刻である.

問 7.2.16. N が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるとき, 各 $m \geqslant 0$ に対して $N \wedge m$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であることを示せ.

停止時刻はマルチンゲールとの相性が非常によい.

定理 7.2.17. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールとする. N が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻であるとき, $\{X_{N \wedge n} : n \geqslant 0\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールである.

注意 7.2.18. $X_{N \wedge n}$ は $X_{N(\omega) \wedge n}(\omega)$ で与えられる確率変数である.

証明. $n \geqslant 1$ とする. 任意の $A \in \mathcal{F}_{n-1}$ に対して $A \cap \{N \geqslant n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ なので

$$\begin{aligned}
E[X_{N \wedge n} : A] &= \sum_{i=1}^{n-1} E[X_{N \wedge n} : A \cap \{N = i\}] + E[X_{N \wedge n} : A \cap \{N \geqslant n\}] \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} E[X_i : A \cap \{N = i\}] + E[X_n : A \cap \{N \geqslant n\}] \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} E[X_{N \wedge (n-1)} : A \cap \{N = i\}] + E[X_{n-1} : A \cap \{N \geqslant n\}] \\
&= E[X_{N \wedge (n-1)} : A].
\end{aligned}$$

□

問 7.2.19. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールとする. N が $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とする. このとき $\{X_{N \wedge n} : n \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールであることを示せ.

問 7.2.20. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとし, N を $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻で, ある $n \in \mathbb{N}_0$ が存在し $P(N \leqslant n) = 1$ とする. このとき $E[X_0] \leqslant E[X_{N \wedge n}] \leqslant E[X_n]$ が成り立つことを示せ.

次の定理は Kolmogorov の不等式 (定理 3.1.11) の類似である．

定理 7.2.21. (Doob の不等式)
$\{X_n : n \geqslant 0\}$ を劣マルチンゲールとする．このとき任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda P(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda) \leqslant E[X_n : \sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_n \geqslant \lambda]$$

が成り立つ．

問 7.2.22. 定理 7.2.21 を証明せよ．[*42]

系 7.2.23. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を非負劣マルチンゲールとする．このとき任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda P(\sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_k \geqslant \lambda) \leqslant E[X_n : \sup_{0\leqslant k\leqslant n} X_n \geqslant \lambda] \leqslant E[X_n]$$

が成り立つ．

次の定理は当然離散マルチンゲールにおいても重要だが第 8 章以降で連続時間のマルチンゲールに関して同等の評価を与える際に用いられる．連続マルチンゲールに関する不等式を用いることで確率積分の連続性などが証明される．

定理 7.2.24. (Doob の L^p-不等式)
$\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールとする．このとき $1 < p < \infty$ に対して

$$E\left[\sup_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k|^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E\left[|X_n|^p\right]$$

注意 7.2.25. $|X_n|$ も劣マルチンゲールであることに注意する．(問 7.2.7)

証明. $\bar{X}_n = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |X_k|$ とする．$\lambda > 0$ に対して $\bar{X}_{n,\lambda} = \bar{X}_n \wedge \lambda$ とすると

$$\begin{aligned} E\left[\bar{X}_{n,\lambda}^p\right] &\overset{\text{問題 } 3.3}{=} \int_0^\infty p x^{p-1} P(\bar{X}_{n,\lambda} > x) dx \\ &= \int_0^\infty p x^{p-1} P(\bar{X}_n > x) 1\{\lambda > x\} dx. \end{aligned}$$

ここで Doob の不等式より $P(\bar{X}_n > x)1\{\lambda > x\} \leqslant \frac{1}{x} E[|X_n| : \bar{X}_n > x]1\{\lambda > x\}$ であることに注意して

$$\begin{aligned} &\leqslant p \int_0^\infty x^{p-1} \left(\frac{1}{x} \int |X_n| 1\{\bar{X}_{n,\lambda} > x\} dP\right) dx \\ &= \int |X_n| \left(\int_0^{\bar{X}_{n,\lambda}} p x^{p-2} dx\right) dP \\ &= \frac{p}{p-1} \int \bar{X}_{n,\lambda}^{p-1} |X_n| dP \end{aligned}$$

[*42] 停止時刻を導入せよ．定理 3.1.11 の証明における停止時刻を確認するとよい．

となる. ただし 3 行目では定理 7.2.21 を用い, 4 行目ではフビニの定理を用いた. ヘルダーの不等式より右辺は上から

$$E[|X_n|^p]^{\frac{1}{p}} E\left[(\bar{X}_{n,\lambda})^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$$

で抑えられる. よって

$$E\left[\bar{X}_{n,\lambda}^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_n|^p]$$

となり, $\lambda \to \infty$ とすればよい. □

定理 7.2.26. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールで任意の $n \geqslant 0$ で $E[X_n^2] < \infty$ を仮定する. このとき任意の $n \geqslant 0$ に対して

$$E[(X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] = E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - X_n^2, \quad P\text{-a.s.}$$

証明. $n \geqslant 0$ に対して

$$\begin{aligned} E[(X_{n+1} - X_n)^2 | \mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - 2E[X_{n+1} X_n | \mathcal{F}_n] + X_n^2 \\ &= E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - 2X_n E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] + X_n^2 \\ &= E[X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - X_n^2 \end{aligned}$$

である. □

7.3 マルチンゲール収束定理

ここではマルチンゲールに関する非常に重要な定理を与えておく.

定理 7.3.1. **(マルチンゲール収束定理)** $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとする.

$\sup_{n \geqslant 0} E[X_n^+] < \infty$ ならば, ある確率変数 X が存在し $X_n \to X$, P-a.s. かつ $E[|X|] < \infty$.

この定理の系として次が得られる.

系 7.3.2. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を非負 $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールとする. このときある確率変数 X が存在し

$$X_n \to X, P\text{-a.s. かつ } 0 \leqslant E[X] \leqslant E[X_0].$$

問 7.3.3. 定理 7.3.1 を用いて系 7.3.2 を示せ.

注意 7.3.4. 系 7.3.2 の主張で, たとえ $\{X_n\}$ が非負値マルチンゲールであっても $E[X] = E[X_0]$ となるわけではない. これは例えば問 7.2.9 を考えれば極限はほとんど確実に 0 になる.

証明は 4 ステップに分けられる.

補題 7.3.5. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を非負値 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとし, さらに $\sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2] < \infty$ とする. このとき

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E\left[|X_n - X_m|^2\right] = 0.$$

注意 7.3.6. 補題 7.3.5 の仮定の下では $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が L^2-コーシー列になっていることを意味している.

証明. $\{X_n^2 : n \geqslant 0\}$ は Jensen の不等式 (命題 7.1.15(iv)) より劣マルチンゲールである. よって任意の $0 \leqslant m \leqslant n$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \leqslant E[X_n^2] - E[X_m^2] &= E[(X_m + (X_n - X_m))^2] - E[X_m^2] \\ &= 2E[X_m(X_n - X_m)] + E[(X_n - X_m)^2] \end{aligned}$$

となる. 特に仮定より $E[X_n^2] \nearrow \sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2]$ である. ここで

$$E[X_m(X_n - X_m)] = E\left[X_m E[X_n - X_m | \mathcal{F}_m]\right] \geqslant 0$$

がわかるので

$$E[(X_n - X_m)^2] \leqslant E[X_n^2] - E[X_m^2]$$

となり示された. □

証明から次のことが従う.

系 7.3.7. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を<u>実数値</u>$\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとし, さらに $\sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2] < \infty$ とする. このとき

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ E\left[|X_n - X_m|^2\right] = 0.$$

補題 7.3.8. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を非負値 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールで $\sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2] < \infty$ をみたすとする. このときある確率変数 X が存在し, $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$, P-a.s. かつ

$$E[X^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2], \quad 特に\ E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

となる.

証明. $\{X_n(\omega) : n \geqslant 0\}$ はほとんど確実にコーシー列であることを示す.

$\varepsilon > 0$ に対して

$$P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sup_{m\geqslant n}|X_m - X_n| > \varepsilon\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\sup_{m\geqslant n\geqslant k}|X_m - X_n| > \varepsilon\right)$$
$$\leqslant 2\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\, P\left(\sup_{m\geqslant k}|X_m - X_k| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\leqslant 2\,\overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\, P\left(\sup_{m\geqslant n\geqslant k}|X_n - X_k| > \varepsilon\right).$$

$\{|X_n - X_k|\}_{n\geqslant k}$ は劣マルチンゲールであることに注意する.

ここで定理 7.2.21 とコーシー-シュワルツの不等式より右辺は

$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{1}{\varepsilon}E[|X_n - X_k|]$$
$$\leqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\,\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{1}{\varepsilon}E[|X_n - X_k|^2]^{\frac{1}{2}}$$

で上から評価され補題 7.3.5 より 0 に収束する. $\varepsilon > 0$ は任意なのでほとんど確実に $\{X_n(\omega) : n \geqslant 0\}$ はコーシー列である. 主張の後半は $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が L^2-コーシー列であったことから従う. □

次の系はよく用いられるマルチンゲールが収束するための十分条件である.

系 7.3.9. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を実数値$\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとし, さらに $\sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2] < \infty$ とする. このとき, ある確率変数 $X \in L^2$ が存在し

$$X_n \to X, \quad P\text{-a.s. かつ } L^2,$$

さらに

$$E[X] = E[X_0], \quad E[X^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = \sup_{n\geqslant 1} E[X_n^2]$$

である.

注意 7.3.10. 通常のマルチンゲールに対して定理 7.3.1 の条件を確かめるのは難しい. 一方で系 7.3.9 の条件は 2 次モーメントの計算をすればよいので比較的扱いやすいことからよく用いられる.

補題 7.3.11. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を非負値 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールで $\sup_{n\geqslant 0} E[X_n] < \infty$ をみたすとする. このとき, ある確率変数 X が存在し $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$, P-a.s.

証明. $Y_n = \exp(-X_n)$ とおくと, 任意の $n \geqslant 0$ に対して $0 \leqslant Y_n \leqslant 1$ であり, $\{Y_n : n \geqslant 0\}$ は劣マルチンゲールである. よって補題 7.3.8 より $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$, P-a.s. が存在する.

$P(Y = 0) > 0$ と仮定すると $\{Y = 0\}$ 上で $X_n \to \infty$ となり, $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \infty$ を意味し仮定に反する. よって $P(Y > 0) = 1$ であり, $X = -\log Y = \lim_{n\to\infty}(-\log Y_n) = \lim_{n\to\infty} X_n$, P-a.s. となる. □

あとは一般の劣マルチゲールに対して示すだけであるが, ここで次の劣マルチンゲールの分解を与えておく.

定理 7.3.12. (Krickeberg 分解) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールで $\sup_{n\geqslant 0} E[X_n^+] < \infty$ をみたすものとする．このとき非負値 $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール M_n と非負値 $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲール V_n が存在して

$$X_n = M_n - V_n$$

と表せる．

証明は後回しにして定理 7.3.1 の証明を与える．

定理 7.3.1 の証明. 劣マルチンゲール $\{X_n : n \geqslant 0\}$ に対して定理 7.3.12 より, 非負マルチンゲール M_n と非負優マルチンゲール V_n を用いて $X_n = M_n - V_n$ と表せる．ここで

$$E[M_n] = E[X_n + V_n] \leqslant E[X_n^+] + E[V_n] \leqslant E[X_n^+] + E[V_0]$$

が成り立つので, 仮定より M_n は補題 7.3.11 が適用でき, 極限 $M := \lim_{n\to\infty} M_n$, P-a.s. が存在する．

また仮定より劣マルチンゲール $\{X_n+ : n \geqslant 0\}$ に対して, 極限 $X^+ = \lim_{n\to\infty} X_n^+$, P-a.s. が存在する．

$\{X_n^- : n \geqslant 0\}$ も劣マルチンゲールであることに注意し, $X_n^- = X_n^+ - M_n + V_n \leqslant X_n^+ + V_n$ となるので $\sup\limits_{n\geqslant 0} E[X_n^-] \leqslant \sup\limits_{n\geqslant 0} E[X_n^+] + E[V_0]$ をみたす．補題 7.3.11 より, 極限 $X^- = \lim_{n\to\infty} X_n^-$, P-a.s. が存在する． □

Krickeberg 分解は非負劣マルチンゲールを非負マルチンゲールと非負優マルチンゲールに分解していた．それとは別の分解を与えておく．

定義 7.3.13. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ がフィルトレーション $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ に関して**可予測**であるとは, 任意の $n \geqslant 1$ に対して $X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$ であるときをいう．

定理 7.3.14. (Doob 分解)

$\{X_n : n \geqslant 0\}$ が任意の $n \geqslant 0$ に対して $\mathcal{F}_n$-可測で $X_n \in L^1$ であるとする．

(i) あるマルチンゲール $\{M_n : n \geqslant 0\}$ と可予測な列 $\{A_n : n \geqslant 0\}$ の組 (ほとんど確実の意味で) 一意に存在し,

$$\begin{aligned} X_n &= M_n + A_n \\ A_0 &= 0, \quad P\text{-a.s.} \end{aligned}$$

をみたす．

(ii) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が劣マルチンゲールのとき (i) の $\{A_n : n \geqslant 0\}$ は単調増加, すなわち $P(A_n \leqslant A_{n+1}) = 1$ $(n \geqslant 0)$ である．

証明. 存在の証明を与える．一意性は問 7.3.15 に譲る．

$$M_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n}(X_k - E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}])$$
$$A_n = \sum_{k=1}^{n}(E[X_k|\mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1})$$

とおけばよい.

$\{X : n \geqslant 0\}$ が劣マルチンゲールのとき $A_n - A_{n-1} \geqslant 0$, P-a.s. より成り立つ. □

問 7.3.15. 定理 7.3.14 の一意性の証明せよ.

問 7.3.16. 任意の $n \geqslant 0$ に対して $E[X_n^2] < \infty$ をみたすマルチンゲールを L^2**-マルチンゲール**という.

$\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ を独立同分布な確率変数で $E[\xi_n] = 0$, $E[\xi_n^2] = \sigma^2 < \infty$ をみたすとする. $S_0 = 0$, $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ $(n \geqslant 1)$ とし, 劣マルチンゲール $\{X_n^2 : n \geqslant 0\}$ に対して Doob 分解 $X_n^2 = M_n + A_n$ を $\{S_n : n \geqslant 0\}$ を用いて与えよ.

7.3.1 Galton-Watson 過程

例題 7.2.11 で導入した Galton-Watson 過程では第 n 世代の個体数 Z_n を, その期待値 $E[Z_n]$ で割った $N_n = \frac{Z_n}{m^n}$ がマルチンゲールであり, 定義から非負値である. よって系 7.3.2 より, N_n はある確率変数 N_∞ に概収束する.

まず種が絶滅する確率 P(ある $k \geqslant 1$ が存在して任意の $n \geqslant k$ に対して $Z_n = 0) = P$(ある $n \geqslant 1$ に対して $Z_n = 0)$ について調べていく.

$m = 0$ の場合は $p_0 = 1$ となり, これは $Z_n = 0$ $(n \geqslant 1)$ を意味するので考えなくてよい.

(i) $m < 1$ のとき, $E[Z_n] = m^n$ となり, $P(Z_n > 0) = P(Z_n \geqslant 1) \leqslant E[Z_n] \to 0$ となる. $E_n := \{Z_n = 0\}$ は単調増加な事象なので P(ある $k \geqslant 1$ が存在して任意の $n \geqslant k$ に対して $Z_n = 0) = 1$ がわかる.

(ii) $m = 1$ のとき $N_\infty = \lim_{n\to\infty} Z_n$, P-a.s. であることに注意すると N_∞ は整数値である. つまりあるランダムな N が存在し $n \geqslant N$ ならば $Z_n = N_\infty$ をみたすということになる. $k \geqslant 1$ に対して P(任意の $n \geqslant N$ に対して $Z_n = k | Z_N = k) = 0$ であることが容易にわかる. よって $P(N_\infty = 0) = P$(ある $k \geqslant 1$ が存在して任意の $n \geqslant k$ に対して $Z_n = 0) = 1$ となる.

これらより $m \leqslant 1$ のとき $P(N_\infty = 0) = P$(ある $k \geqslant 1$ が存在して任意の $n \geqslant k$ に対して $Z_n = 0) = 1$ であることがわかる.

(iii) $m > 1$ のとき, P(ある $k \geqslant 1$ が存在して任意の $n \geqslant k$ に対して $Z_n = 0) < 1$ であることがわかる.

$\{p_k : k \geqslant 0\}$ の**母関数**を $\phi(s) = E[s^{Z_1}] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ と定義する.

定理 7.3.17. *$m > 1$ とする. このとき P(ある $n \geqslant 1$ に対して $Z_n = 0) = \rho$ である. ただし ρ は $\phi(\rho) = \rho$ の $[0, 1)$ 内の一意解である.*

証明. (ρ の存在) $\phi(1) = 1$ である. また $0 \leqslant s < 1$ において ϕ は微分可能で

$$\phi'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k s^{k-1} p_k \geqslant 0$$

となる. 特に

$$\lim_{s \nearrow 1} \phi'(s) = m$$

となる. 平均値の定理より $h \in (0,1]$ に対して, ある $r_h \in (0,1)$ が存在し

$$1 - h - \phi(1-h) = (1 - \phi(1-h)) - h = (\phi'(1 - r_h h) - 1)h$$

が成り立つので十分小さい $h \in (0,1)$ に対して $1 - h > \phi(1-h)$ となる. また $\phi(0) \geqslant 0$ より中間値の定理により $\phi(\rho) = \rho$ をみたす $\rho \in (0,1)$ が存在することがわかる.

(ρ の一意性) $0 \leqslant s \leqslant 1$ に対して

$$\phi''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)s^{k-2}p_k$$

であるが, $m > 1$ より, ある $k \geqslant 2$ で $p_k > 0$ である. よって任意の $s \in [0,1)$ で $\phi''(s) > 0$ である.

$\rho \in [0,1)$ を $\phi(\rho) = \rho$ をみたす最小のものとする. このとき $\phi(1) = 1$ と ϕ の凸性から $(\rho, 1))$ では $\phi(x) < x$ が成り立つことがわかる.

$\theta_n = P(Z_n = 0)$ とおく. このとき任意の $n \geqslant 0$ に対して

$$\theta_{n+1} = \phi(\theta_n) \tag{7.4}$$

が成り立つ.

また $\theta_0 = 0 \leqslant \rho$ であり,

$$\theta_n = \phi(\theta_{n-1}) \leqslant \phi(\rho) = \rho$$

を用いて帰納的に任意の $n \geqslant 0$ に対して $\theta_n \leqslant \rho$ が示される. $\{\theta_n : n \geqslant 0\}$ は有界な単調増加列なので極限 θ_∞ が存在する. ϕ の連続性から $\phi(\theta_\infty) = \theta_\infty$ となり $\theta_\infty = \rho$ がわかる. 特に

$$\theta_\infty = P(\text{ある } n \geqslant 1 \text{ に対して } Z_n = 0) \tag{7.5}$$

である.

□

問 7.3.18. (7.4) および (7.5) を示せ.

では $m > 1$ のとき N_∞ はどうなっているのか. 例えば次のようなことが成り立つ.

定理 7.3.19. $m > 1$ とし, さらに $\sigma^2 = V(\xi_1^{(0)}) < \infty$ と仮定する. このとき

$$N_n \xrightarrow{L^2} N_\infty, \quad \text{特に } E[N_\infty] = 1.$$

証明. 系 7.3.7 を用いる.

$$E[(N_n - N_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}] = E\left[\left. \frac{\left(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} \xi_i^{(n-1)} - mZ_{n-1}\right)^2}{m^{2n}} \right| \mathcal{F}_{n-1} \right]$$

なので $\{Z_{n-1}=k\}$ 上で

$$E[(N_n-N_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}] = \frac{1}{m^{2n}}E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{(n-1)}-mk\right)^2\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right]$$
$$= \frac{1}{m^{2n}}\sigma^2 k = \frac{\sigma^2 Z_{n-1}}{m^{2n}}$$

となる．よって

$$E[(N_n-N_{n-1})^2] = \frac{\sigma^2}{m^{n+1}}$$

となる．定理 7.2.26 より

$$E[N_n^2] = N_0^2 + \sum_{i=1}^{n}E[(N_i-N_{i-1})^2] = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma^2}{m^{i+1}}$$

となり，$m>1$ のとき $\sup_{n\geqslant 0}E[N_n^2]<\infty$ がいえる． □

注意 7.3.20. Kesten-Stigum により以下のことが示されている．

$$E[N_\infty]=1 \Leftrightarrow m>1,\text{かつ} \sum_{k=1}^{\infty}(k\log k)p_k<\infty$$

7.3.2 *定理 7.3.12 の証明

$\mathcal{F}_\infty$-可測な非負有界関数 f に対して

$$\mu[f] = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, E\left[X_n^+ f\right]$$

を定義する．特に $\mu[1]=\sup_{n\geqslant 0}E[X_n^+]<\infty$ であり，$P[f]=0$ ならば $\mu[f]=0$ となることに注意する．

$\mathcal{F}_k$-可測な非負関数 f に対して $\{E[X_n^+ f]: n\geqslant k\}$ は単調増加なので

$$\mu_k[f] = \sup_{n\geqslant k}E[X_n^+ f]$$

が存在する．$\mathcal{F}_k$-可測な非負関数 f,g と $a,b\geqslant 0$ に対して

$$\mu_k[af+bg] = a\mu_k[f]+b\mu_k[g]$$

が成り立つ．これにより μ_k が $(\Omega,\mathcal{F}_k)$ 上の有限加法的測度になることがわかる．また $\mathcal{F}_k$-可測な非負関数列 $\{f_i: i\geqslant 0\}$ が $f_i\nearrow f$ をみたすとき，

$$\mu_k[f] = \sup_{n\geqslant k}E[X_n^+ f] = \sup_{n\geqslant k}\sup_{i\geqslant 0}E[X_n^+ f_i] = \sup_{i\geqslant 0}\sup_{n\geqslant k}E[X_n^+ f_i] = \sup_{i\geqslant 0}\mu_k[f_i]$$

となる．これによりホップの拡張定理の条件が確認できるので μ_k は $(\Omega,\mathcal{F}_k)$ 上の有限測度で，特に構成から P に関して絶対連続である．

$$M_k = \frac{d\mu_k}{dP}$$

と定義する．

- $\{N_n: n\geqslant 0\}$ は非負マルチンゲールである．実際，$\mathcal{F}_n$-可測な非負関数 f に対して単調性から $\lambda_{n+1}[f]=\lambda_n[f]$ がわかる．非負性は定義から容易にわかる．
- $M_n\geqslant X_n^+$, P-a.s. である．$0\leqslant E[(M_n-X_n^+)1\{M_n<S_n^+\}] = E[M_n 1\{M_n<S_n^+\}]-E[X_n^+ 1\{M_n<S_n^+\}] = \mu_n[1\{M_n<S_n^+\}]-E[X_n^+ 1\{M_n<S_n^+\}]\geqslant 0$.
- $V_n=M_n-X_n\geqslant 0$ であり，また任意の $\mathcal{F}_n$-可測集合 A に対して $E[V_n:A]=E[M_n:A]-E[X_n:A]\geqslant E[M_{n+1}:A]-E[X_{n+1}:A]=E[V_{n+1}:F]$ となることから V_n は非負優マルチンゲールである．

□

7.4 一様可積分

マルチンゲール収束定理 (定理 7.3.1) よりマルチンゲール $\{X_n : n \geqslant 0\}$ は $\sup_{n\geqslant 0} E[|X_n|] < \infty$ であれば, ある確率変数 X に概収束することがわかった. しかし, 一般に X に L^1-収束しないことも様々な例で確認した. ここではどのような条件があれば $X_n \xrightarrow{L^1} X$ となるのかを一様可積分性という概念を用いて確かめる.

定義 7.4.1. 実数値確率変数の族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が**一様可積分**であるとは,

$$\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して, ある } M > 0 \text{ が存在し } \sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda| : |X_\lambda| > M] < \varepsilon$$

をみたすときをいう.

問 7.4.2. 実数値確率変数の族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が一様可積分であるとき, $\sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda|] < \infty$ であることを示せ.

問 7.4.3. 確率空間 $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ 上の確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ を

$$X_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

としたとき, $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は一様可積分ではないことを示せ.

問 7.4.4. 実数値確率変数 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して確率変数の族 $\{E[X|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \subset \mathcal{F}, \text{部分 } \sigma\text{-加法族}\}$ は一様可積分であることを示せ. [*43]

問 7.4.5. 実数値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が, ある $p > 1$ に対して $\sup_{n\geqslant 1} E[|X_n|^p] < \infty$ であるとき, $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は一様可積分であることを示せ.

問 7.4.6. 実数値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ に対して, ある確率変数 $Z \in L^1(P)$ が存在し, 任意の $n \geqslant 1$ に対して $|X_n| \leqslant Z$, P-a.s. であるとき, $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は一様可積分であることを示せ.

問 7.4.7. 実数値確率変数列 $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が一様可積分であり, ある確率変数 X へ確率収束するならば, $X_n \xrightarrow{L^1} X$ を以下の要領で示せ.

(1) $X \in L^1(P)$ であることを示せ.

(2) $M > 0$ に対して $\varphi_M(x) = \begin{cases} M, & x > M \\ x, & -M \leqslant x \leqslant M \\ -M, & x \leqslant -M \end{cases}$ としたとき, 任意の $M > 0$ に対して $\overline{\lim_{M\to\infty}} E[|\varphi_M(X_n) - \varphi_M(X)|] = 0$ を示せ.

(3) $X_n \xrightarrow{L^1} X$ を示せ.

定理 7.4.8. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール, X を実数値確率変数とする. このとき以下は同値.

[*43] Hint1: 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A) < \delta$ ならば $E[|X| : A] < \delta$ となる.
Hint2: $Y = E[X|\mathcal{G}]$ に対して $|Y| \leqslant E[|X||\mathcal{G}]$ a.s. が成り立つ.

(1) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が一様可積分.
(2) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ はある $\sigma\left[\bigcup_{n\geqslant 0} \mathcal{F}_n\right]$-可測確率変数 X に概収束, および L^1-収束する.
(3) ある $X \in L^1(P)$ が存在し $X_n = E[X|\mathcal{F}_n]$, P-a.s.

証明. (1)⇒(2). 劣マルチンゲール $\{|X_n| : n \geqslant 0\}$ が定理 7.3.1 の仮定をみたすので, ある確率変数 X に概収束する. 問 7.4.7 より L^1-収束する.

(2)⇒(3). $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, P-a.s. とする. このとき任意の $m \geqslant n \geqslant 1$ と任意の $A \in \mathcal{F}_n$ に対して

$$
\begin{aligned}
&|E[X_m 1_A] - E[X 1_A]| \leqslant E[|X_m - X| 1_A] \leqslant E[|X_m - X|] \to 0 \\
&E[X_m 1_A] = E[X_n 1_A]
\end{aligned}
$$

より $E[X 1_A] = E[X_n 1_A]$ となり, これは $E[X|\mathcal{F}_n] = X_n$, P-a.s. を意味している.

(3)⇒(1). 問 7.4.4 より従う. □

問 7.4.9. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲール, X を実数値確率変数とする. このとき以下は同値であることを示せ.

(1) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が一様可積分.
(2) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ は X に概収束, および L^1-収束する.

次の問は定理 7.3.12 の具体的な表現を与える.

問 7.4.10. $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$-劣マルチンゲール $\{X_n : n \geqslant 0\}$ が一様可積分とする. このとき $X^+ = \lim_{n\to\infty} X_n^+$ とする. このとき

$$
M_n = E[X^+|\mathcal{F}_n], \quad V_n = E[X^+|\mathcal{F}_n] - X_n
$$

とすると, M_n は一様可積分非負マルチンゲール, V_n は一様可積分非負優マルチンゲールであることを示せ.

この章の最後にマルチンゲールと停止時刻の関連について触れておく.

定義 7.4.11. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して部分 σ-加法族 $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 0\}$ をフィルトレーションとし, $T : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ を停止時刻とする. 部分 σ-加法族 $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ を

$$
\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \text{任意の } n \geqslant 0 \text{ に対して } A \cap \{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n\}
$$

と定義する.

問 7.4.12. 定義 7.4.11 で定義した $\mathcal{F}_T$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族であることを示せ.

問 7.4.13. T を $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻とする. 任意の $n \geqslant 0$ に対して $\{T \leqslant n\} \in \mathcal{F}_T$ を示せ.

問 7.4.14. $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻 T に対して $\{\mathcal{F}_{T\wedge n} : n \geqslant 0\}$ はフィルトレーションであることを示せ.

定理 7.4.15. (任意抽出定理) $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとし, S, T を $\mathcal{F}_n$-停止時刻で $S \leqslant T$

をみたすとする[*44]. $\{X_{T\wedge n}:n\geqslant 0\}$ が一様可積分であるとき

$$X_S\leqslant E[X_T|\mathcal{F}_S],\quad P\text{-a.s.}\tag{7.6}$$

が成り立つ.

特に $\{X_n:n\geqslant 0\}$ がマルチンゲールのときは (7.6) で等号が成立する.

証明には以下の 2 つの補題を用いる.

補題 7.4.16. $\{X_n:n\geqslant 0\}$ が一様可積分 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのとき, 任意の停止時刻 T に対して $\{X_{T\wedge n}:n\geqslant 0\}$ は一様可積分 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールである.

補題 7.4.17. $\{X_n:n\geqslant 0\}$ が一様可積分 $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールのとき, 任意の停止時刻 T に対して $E[X_0]\leqslant E[X_T]\leqslant E[X_\infty]$ が成り立つ. ただし $X_\infty=\lim_{n\to\infty}X_n$, P-a.s. とする. 特に $E[X_T|\mathcal{F}_n]\geqslant X_{T\wedge n}$, P-a.s.

定理 *7.4.15* の証明. 定理 7.3.12 より, $X_n=M_n-V_n$ とする. ただし M_n は非負マルチンゲール, V_n は非負優マルチンゲールである (問 7.4.10 参照). 特に $\{M_n:n\geqslant 0\}$, $\{V_n:n\geqslant 0\}$ は一様可積分である. よって補題 7.4.17 より任意の $A\in\mathcal{F}_S$, $n\geqslant 0$ に対して

$$E[M_T:A\cap\{S\leqslant n\}]=\sum_{k=0}^n E[M_T:A\cap\{S=k\}]=\sum_{k=0}^n E[M_k:A\cap\{S=k\}]=E[M_S:A\cap\{S\leqslant n\}]$$
$$E[V_T:A\cap\{S\leqslant n\}]=\sum_{k=0}^n E[V_T:A\cap\{S=k\}]\leqslant\sum_{k=0}^n E[V_k:A\cap\{S=k\}]=E[V_S:A\cap\{S\leqslant n\}]$$

となる. ここで $\{S=k=T\wedge k\}$ に注意する. 単調収束定理より

$$E[M_T-A_T:A\cap\{S<\infty\}]\geqslant E[M_S-A_S:A\cap\{S<\infty\}]$$

となり, $\{S=\infty\}=\{T=\infty\}$ なので示された. □

補題 *7.4.16* の証明. $A\in\mathcal{F}_{n-1}$ に対して

$$\begin{aligned}E[X_{T\wedge n}:A]&=\sum_{k=0}^{n-1}E[X_k:A\cap\{T=k\}]+E[X_n:A\cap\{T\geqslant n\}]\\&=\sum_{k=0}^{n-1}E[X_k:A\cap\{T=k\}]+E[X_{n-1}:A\cap\{T\geqslant n\}]=E[X_{T\wedge(n-1)}:A]\end{aligned}$$

となり劣マルチンゲールである.

(一様可積分性) 劣マルチンゲール $\{|X_{T\wedge n}|:n\geqslant 0\}$ に対して

$$\sup_{n\geqslant 0}E[|X_{T\wedge n}|]\leqslant\sup_{n\geqslant 0}E[|X_n|]<\infty$$

であるので, Fatou の補題より $E[|X_T|]<\infty$ である. よって

$$\begin{aligned}E[|X_{T\wedge n}|:|X_{T\wedge n}|>M]&=E[|X_{T\wedge n}|:|X_{T\wedge n}|,T\leqslant n]+E[|X_{T\wedge n}|:|X_{T\wedge n}|>M,T>n]\\&=E[|X_T|:|X_T|>M,T\leqslant n]+E[|X_n|:|X_n|>M,T>n]\end{aligned}$$

[*44] $S\leqslant T$, P-a.s. ではない.

となり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して M を大きく選べば右辺は ε より小さくなる.

□

補題 7.4.17 の証明. 補題 7.4.16 より $\{X_{T\wedge n} : n \geqslant 0\}$ は劣マルチンゲールなので

$$E[X_0] \leqslant E[X_{T\wedge n}] \leqslant E[X_n]$$

2 つ目の不等式は問 7.2.20 より従う. 一様可積分性より $n \to \infty$ とすると $E[X_0] \leqslant E[X_T] \leqslant E[X_\infty]$ が得られる.

後半は任意の $0 \leqslant n \leqslant m$, $A \in \mathcal{F}_n$ に対して

$$E[X_{T\wedge m} : A] \geqslant E[X_{T\wedge n} : A]$$

であり, $m \to \infty$ とすると一様可積分性から従う. □

問 7.4.18. $\{X_n : n \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとし, T を $\mathcal{F}_n$-停止時刻とする. $\{X_{T\wedge n} : n \geqslant 0\}$ が一様可積分であるとき

$$E[X_0] = E[X_T]$$

が成り立つことを示せ.

例題 7.4.19. (非対称ランダムウォークの到達時刻)

マルチンゲールの例として一次元ランダムウォーク $\{S_n : n \geqslant 0\}$ の到達時刻について考える. 特に系 6.2.10 の結果を非対称なランダムウォークの場合に考察する. ただし非対称なランダムウォークとして次のようなものを考える. $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$ に対して独立同分布な確率変数 $\{x_n : n \geqslant 1\}$ を $P(\xi_n = 1) = p = 1 - P(\xi_n = -1)$ で与え, $S_0 = 0$, P-a.s., $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ で定義する.

問 7.2.9 を用いると, $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$M_n^{(\theta)} = e^{\theta S_n}(e^{\theta}p + e^{-\theta}(1-p))^{-n}$$

は非負マルチンゲールである. ここで $\theta = \log \frac{1-p}{p}$ と選ぶと $M_n^{(\theta)} = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{S_n} = \phi(S_n)$ がマルチンゲールとなる. $\phi(x) = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^x$.

整数 $a < 0 < b$ に対して停止時刻 $T_a = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = a\}$, $T_b = \inf\{n \geqslant 0 : S_n = b\}$ を考えると例題 6.2.9 のようにして $T_a \wedge T_b < \infty$, P-a.s. を示すことができる.

特に $\{M_{T_a \wedge T_b \wedge n} : n \geqslant 0\}$ は一様可積分マルチンゲールとなる. よって

$$E[M_0] = E[M_{T_a\wedge T_b}] = E[M_{T_a} : T_a < T_b] + E[M_{T_b} : T_b < T_a] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^a P(T_a < T_b) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^b P(T_b < T_a)$$

となる. $P(T_a < T_b) + P(T_b < T_a) = 1$ と合わせることで $P(T_a < T_b) = \dfrac{\phi(b) - \phi(0)}{\phi(b) - \phi(a)}$ が得られる.

ここで $p > \frac{1}{2}$ とする. このとき $P(T_a < \infty) = P(\bigcup_{b \geqslant 1}\{T_a < T_b\}) = \lim_{b\to\infty} P(T_a < T_b) = \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^{-a}$ となる.

問 7.4.20. 例題 7.4.19 で考えた非対称ランダムウォーク $(p > \frac{1}{2})$ と到達時刻 $T_b (b > 0)$ に対して以下の問に答えよ.

(1) $P(T_b < \infty) = 1$ を示せ.
(2) 任意の $n \geqslant 0$ に対して $\{S_{T_b \wedge n} : n \geqslant 0\}$ は一様可積分であることを示せ.
(3) 任意の $n \geqslant 0$ に対して $\{S_{T_b \wedge n} - (2p-1)T_{b\wedge n} : n \geqslant 0\}$ はマルチンゲールであることを示せ.
(4) $E[T_b]$ を b, p を用いて表せ.

7.5 問題

問題 7.1. $B \in \mathcal{F}$ は $P(B) > 0$ をみたすものとする. $X1_B \in L^1(P)$ であるとき

$$E[X|B] = \frac{E[X:B]}{P(B)}$$

が成り立つことを示せ.

問題 7.2 (定理 7.1.7)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を部分 σ-加法族とする. $Y, \tilde{Y} \in L^1(\mathcal{G})$ が定義 7.1.1 の条件をみたすならば $Y = \tilde{Y}$, P-a.s. であることを示せ.

問題 7.3. [定理 7.1.7 の証明の補足] 証明で定義した $Y(\omega)$ が定義 7.1.1 の条件をみたすことを示せ.

問題 7.4. $X \in L^2$ とする. σ-加法族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ に対して

$$E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2] + E[(E[X|\mathcal{G}] - E[X|\mathcal{F}])^2] = E[(X - E[X|\mathcal{F}])^2]$$

となることを示せ.

問題 7.5. $0 < p < 1$ とし, $N \in \mathbb{N}$ とする. $x \in \{0, 1, \cdots, N\}$ を出発するランダムウォーク $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える. ただし $P(S_n = y+1 | S_{n-1} = y) = p = 1 - P(S_n = y-1 | S_{n-1} = y)$ とする. 停止時刻 $\tau_{0,N} = \inf\{n \geqslant 0 : S_n \in \{0, N\}\}$ を考える. $x \in \{0, \cdots, N\}$ に対して $F(x) = E[S_{\tau_{0,N}} | S_0 = x]$ としたとき $F(x) = pF(x+1) + qF(x-1)$ をみたすことを示せ.

問題 7.6. 出生分布 $\{p_k : k \geqslant 0\}$, 平均出生数 $0 < m < \infty$ の Galton-Watson 過程 $\{Z_n : n \geqslant 0\}$ に対してマルチンゲール $N_n = \frac{Z_n}{m^n}$ を考える. $q = P(N_\infty = 0)$ とおくと $q = \phi(q)$ をみたすことを示せ. ただし ϕ は出生分布の母関数である.

また $m > 1$ かつ $\sum_{k=0}^{\infty} = k^2 p_k < \infty$ のとき, $q = \rho$ となることを示せ. ただし $\rho \in [0,1)$ は $\phi(\rho) = \rho$ の一意解である.

問題 7.7. 実数値確率変数の族 $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ に対して以下は同値であることを示せ.

(1) $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ が一様可積分.

(2) 以下をみたす.

　(a) $\sup_{\lambda \in \Lambda} E[|X_\lambda|] < \infty$.

　(b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在し任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $P(A) < \delta$ ならば $\sup_{\lambda \in \Lambda} E[|X_\lambda| : A] < \varepsilon$.

8　ブラウン運動

この章では現在の確率論において中心的な役割を果たしているブラウン運動について見ていく.

キーワード: ブラウン運動, マルコフ性

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間, $(E, \mathcal{E})$: 可測空間.

定義 8.0.1. 添字 T の**確率過程**とは E-値確率変数の族 $\{X_t : t \in T\}$ のことをいう.
特に $(t, \omega) \in T \times \Omega$ に関する関数とみなして $X(t, \omega)$ と記述することもある.

ブラウン運動は 1827 年に R. ブラウンによって発見された物理現象で, これは溶媒中に漂う微粒子に溶媒分子が衝突することで微粒子が不規則に運動する現象である. [*45]

このブラウン運動は興味深い性質を持っているだけではなく, 物理現象の記述, ブラック-ショールズの公式など金融工学の分野でも使われるなど応用上でも非常に重要な役割を持っている.

ブラウン運動はその物理現象から次のように捉えられる. $\mathbb{R}^d$ の溶媒 (水) 中にある微粒子 P にランダムな方向から溶媒分子が衝突し, その影響で変位する. 溶媒分子の衝突は絶え間なく起きている.

これの単純なモデル化はランダムウォークである.

$\mathbb{Z}^d$ 内の溶媒 (水) の中にある微粒子 P にはランダムな方向から分子が衝突し変位する. n 回目の衝突による変位を X_n で与えると n 回目の衝突後の微粒子の位置は

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$$

と表される.

ここでランダムウォークとブラウン運動の違いはブラウン運動では溶媒分子の衝突が絶え間なく起きているということである. つまり衝突と衝突の時間間隔は限りなく小さいということになる. それは数学的には時間の (それに合わせて空間も) スケールを変えて極限を取るということである. ランダムウォークのスケール極限として中心極限定理をすでに確かめているが, まさにブラウン運動は正規分布を用いて記述され, 8.1.2 節ではランダムウォークのスケール極限としてブラウン運動が現れることを確かめる.

注意 8.0.2. ここからは連続時間パラメータの確率変数 (確率過程)$\{X_t : t \geqslant 0\}$ を考える. これは非常にデリケートな問題を含んでいる. 例えばボレル集合 A に対して $H(A) = \{$ ある $t \geqslant 0$ に対して $X_t \in A\}$ という事象を考える. このとき $H(A) = \bigcup_{t \geqslant 0} \{X_t \in A\}$ と書けるが右辺は非可算個の可測集合の和になるので $H(A)$ が可測集合になるかが自明ではない.

このような問題はランダムウォークなどの可算個の確率変数で定まっていた確率過程では生じないので気にする必要がなかった.

8.1　ブラウン運動

まずブラウン運動の定義を述べるところから始める.

[*45] 歴史的な話をすると現象自体はビュフォンによって発見されていた. しかしこのときは生命活動によるものと考えられていた. ブラウンは物理現象であることを解き明かした. その後アインシュタインはブラウン運動を用いた原子の存在を確認する理論, アボガドロ定数の決定する理論が与えた.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間.

定義 8.1.1. $\{B_t : t \geqslant 0\}$ が $x \in \mathbb{R}^d$ を出発する**ブラウン運動**であるとは以下の条件をみたすときをいう.

(i) $P(B_0 = x) = 1$

(ii) $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ に対して $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}} : i = 1, \cdots, n\}$ は独立である.

(iii) $A \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right), 0 \leqslant s < t$ に対して

$$P\left(B_t - B_s \in A\right) = \int_A p_{t-s}(x)dx.$$

ただし $p_t(x) = \dfrac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{2t}\right)$ である.

(iv) ある $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ で $P(\Omega_0) = 1$ かつ $\omega \in \Omega_0$ に対して $t \mapsto B_t(\omega)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数である. つまり確率 1 で B_t は連続である.

またブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ で $P(B_0 = 0) = 1$ をみたすものを**標準ブラウン運動**という.

注意 8.1.2. 確率測度として P_x と書くことで $P_x(B_0 = x) = 1$ をみたすブラウン運動を表すことがある. 今後ブラウン運動の確率測度で P と書いていれば $P = P_0$ の標準ブラウン運動を表しているものとする.

注意 8.1.3. 条件 (iv) の連続性の仮定は非常に重要である. 実際, 条件 (i)~(iv) をみたすブラウン運動 $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$ が構成されたとする. B と独立な $[0, 1]$ 上の一様分布 U を考え, 新たに

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_t, & t \neq U \\ 0, & t = U \end{cases}$$

と $\tilde{B} = \{\tilde{B}_t : t \geqslant 0\}$ を定義する. このとき $\tilde{B}$ が定義 8.1.1 の条件 (i)~(iii) をみたすことは容易に確認できる.

問 8.1.4. $B = \{B_t : t \geqslant 0\}, \tilde{B} = \{\tilde{B}_t : t \geqslant 0\}$ が

$$\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } P(B_t = \tilde{B}_t) = 1$$

を満たしているとする. さらに

$$P(B \in C([0, \infty))) = P(\tilde{B} \in C([0, \infty))) = 1$$

をみたすならば

$$P(\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } B_t = \tilde{B}_t) = 1$$

が成り立つことを示せ. (注意 8.0.2 の内容をよく理解しておくこと.)

注意 8.1.5. 問 8.1.4 よりブラウン運動が構成されたとき, その分布は一意であることがわかる.

さてブラウン運動を構成していく. ブラウン運動の構成方法はいくつか知られている. ここではその代表的なもの 2 つを載せておく.

まず $x = 0$ としてよいことに注意しておく. また 1 次元ブラウン運動が構成されたとする. このとき d 次元ブラウン運動が自然に構成できる. よって原点出発の 1 次元ブラウン運動が構成できればよい.

問 8.1.6. $B^{(i)} = \{B_t^{(i)} : t \geqslant 0\}$ $(i = 1, \cdots, d)$ を独立な原点出発の 1 次元ブラウン運動とする.

このとき

$$B = \left\{(B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)}) : t \geqslant 0\right\}$$

は原点出発の d 次元ブラウン運動であることを示せ.

8.1.1 レヴィの方法

1 つ目の方法はレヴィによる構成方法である. この構成方法によって明示的な確率空間上に直接ブラウン運動を構成することができる.

これは $[0,1]$ 上の 2 進有理数でブラウン運動の点を与え, その線形補間の関数がブラウン運動の近似であるという考え方による構成方法である.

$n \geqslant 0$ に対して $I_n = \{0 \leqslant k \leqslant 2^n : k \text{ は奇数 }\}, T_n = \left\{\dfrac{k}{2^n} : k \in I_n\right\}, T = \bigcup_{n \geqslant 0} T_n$ とおく. T は $[0,1]$ 上の 2 進有理数である.

ブラウン運動に関する考察

ブラウン運動 $\{B_t : t \in [0,1]\}$ があったとする. 時刻 $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ でのブラウン運動の値が定まった時, 時刻 $\dfrac{s+t}{2}$ でのブラウン運動の分布はどのようなものだろうか.

$\theta = \frac{s+t}{2}$ とする. このとき

$$\begin{aligned} P(B_s \in dx, B_\theta \in dy, B_t \in dz) &= p(s;0,x) p\left(\frac{t-s}{2}; x, y\right) p\left(\frac{t-s}{2}; y, z\right) dxdydz \\ &= p(s;0,x) p(t-s, x, z) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dxdydz \end{aligned}$$

である. ただし, $p(t;x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\dfrac{(y-x)^2}{2t}\right), \mu = \dfrac{x+z}{2}, \sigma^2 = \dfrac{t-s}{4}$ である. これより

$$P(B_\theta \in dy | B_s = x, B_t = z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

となる. つまり $B_s = x, B_t = z$ という条件のもとでは B_θ は平均 $\dfrac{x+z}{2}$, 分散 $\dfrac{t-s}{4}$ の正規分布に従うということがわかる.[*46]

これを踏まえて $[0,1]$ 上のブラウン運動を構成しよう.

ブラウン運動の構成 *(I)*. $[0,1]$ 上の 2 進有理数上でのブラウン運動の値を次のように定めていく.

(1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 $\{\xi_k^n : n \geqslant 0, k \in I_n\}$ は独立同分布な確率変数で標準正規分布を持つとする.
(2) $B_0 = 0, B_1 = \xi_1^{(0)}$ とする.
(3) $t \in \bigcup_{i=0}^n T_i$ に対して B_t が与えられたとする. そのとき $t = \frac{k}{2^{n+1}} \in T_{n+1}$ に対して

$$B_t = \frac{B_{\frac{k-1}{2^{n+1}}} + B_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}}{2} + \frac{1}{2^{\frac{n+2}{2}}} \xi_k^{(n)} \tag{8.1}$$

とおく.

帰納的に $t \in T$ に対して B_t の値が ξ を用いて定義できた.

---

*46 正確な議論は問 7.1.14 を参照.

各 n に対して

$$B_t^{(n)} = \begin{cases} B_t, & t \in \bigcup_{i=1}^n T_i \\ \text{線形補間}, & \text{それ以外} \end{cases}$$

として $[0,1]$ 上の連続関数を構成する. $n \to \infty$ が連続関数にほとんど確実に一様収束し, その極限がブラウン運動であることを示す.

まず $B_t^{(n)}$ を扱いやすい形で書き直す.

$[0,1]$ 上の**ハール関数**を次のように定義する.

各 $n \geqslant 0, k \in I_n$ に対して

$$H_1^{(0)}(t) = 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$
$$H_k^{(n)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k-1}{2^n} \leqslant t < \frac{k}{2^n} \\ -2^{\frac{n-1}{2}}, & \frac{k}{2^n} \leqslant t < \frac{k+1}{2^n} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする. このとき**シャウダー関数**を

$$S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u)du, \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1, n \geqslant 0, k \in I_n$$

と定義する. このとき

$$B_t^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I_m} \xi_k^{(m)} S_k^{(m)}(t) \tag{8.2}$$

と書ける.

まず $n \to \infty$ としたときに $B_t^{(n)}$ が確率 1 で一様収束することを示す. 各 $n \geqslant 0, k \in I_n$ に対して

$$P(|\xi_k^{(n)}| > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{y}{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x}$$

であることから, $n > 1$ で任意の $c > \sqrt{2\log 2}$ に対して

$$P\left(\max_{k \in I_n} |\xi_k^{(n)}| > c\sqrt{n}\right) \leqslant 2^n P\left(|\xi_1^{(0)}| > c\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^n \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right)}{n}$$

である. よってボレル-カンテリの補題から

$$P\left(\text{ある } N \geqslant 1 \text{ が存在して}, n \geqslant N \text{ ならば} \max_{k \in I_n} |\xi_k^{(n)}| \leqslant c\sqrt{n}\right) = 1 \tag{8.3}$$

となり

$$\sup_{t \in [0,1]} \sum_{m \geqslant 0} \sum_{k \in I_m} |\xi_k^{(m)} S_k^{(m)}(t)| < \infty \tag{8.4}$$

となるので一様収束する.

極限過程を改めて B_t と書くと一様収束性から連続関数であることがわかる.

あとは定義 8.1.1 の (ii), (iii) を確認すればよい. $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 1$ に対して $\{t_{j,k} \in T : k \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n, t_{j,k} < t_{j+1,k}\}$ で

$$t_{j,k} \nearrow t_j, \ j = 1, \cdots, n$$

となるものが存在する．このとき B の連続性から

$$B_{t_j} - B_{t_{j-1}} = \lim_{k\to\infty}\left(B_{t_{j,k}} - B_{t_{j-1,k}}\right)$$

である．$\{B_{t_{j,k}} - B_{t_{j-1,k}} : j = 1, \cdots, n\}$ は平均 0, 分散行列 $a_{i,j} = \begin{cases} t_{j,k} - t_{j-1,k}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ の n 次元正規分布であるので問 5.2.26 および例題 5.2.23 より $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}} : j = 1, \cdots, n\}$ は独立で (iii) をみたすことがわかる．よってブラウン運動が構成できた． □

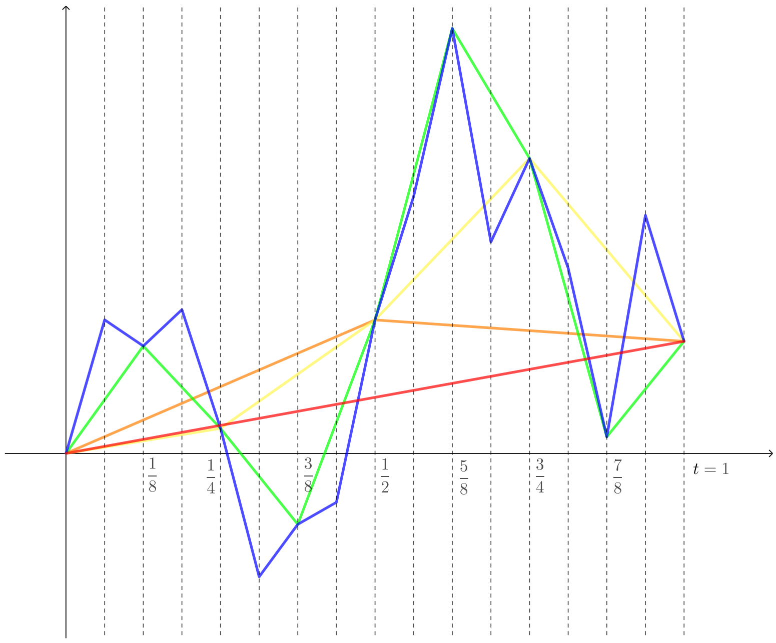


図 6　Lévy の構成法の例．赤線 $= B^{(0)}$, 橙線 $= B^{(1)}$, 黄線 $= B^{(2)}$, 緑線 $= B^{(3)}$, 青線 $= B^{(4)}$.

問 8.1.7. (8.1) において $B_{\frac{k-1}{2^{n+1}}}, B_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}$ が与えられた時, B_t は平均 $\dfrac{B_{\frac{k-1}{2^{n+1}}} + B_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}}{2}$, 分散 $\dfrac{1}{2^{n+2}}$ の正規分布であることを確かめよ．

問 8.1.8. シャウダー関数 $S_k^{(n)}$ のグラフを書け．

問 8.1.9. (8.2) を示せ．

問 8.1.10. (8.4) を示せ．

問 8.1.11. 上の証明では $\{B_t : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ というブラウン運動を構成した．これを $\{B_t : t \geqslant 0\}$ というブラウン運動へ拡張せよ．

ここで証明に登場したハール関数について補足をしておく．

定義 8.1.12. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を $\mathbb{R}$ 上の可分ヒルベルト空間とする．$\{e_n : n \geqslant 1\} \subset H$ が H の**完全正規直交系**であるとは

(i) 各 $n \geqslant 1$ に対して $\|e_n\| = \langle e_n, e_n\rangle = 1$.

(ii) $n \neq m$ ならば $\langle e_n, e_m \rangle = 0$.

(iii) $\overline{\mathrm{span}\{e_n : n \geqslant 1\}} = H$

をみたすときをいう.

系 D.2.5, 系 D.2.11 より $L^2[0,1]$ は可分ヒルベルト空間である.

注意 8.1.13. ハール関数は $L^2[0,1]$ 上の完全正規直交系であることが知られている. ペーリー-ウィーナーや伊藤-西尾らはこのことに着目しレヴィの構成方法を次のように拡張した.

定理 8.1.14. $\{\varphi_n : n \geqslant 0\} \subset L^2[0,1]$ を $L^2[0,1]$ 上の完全正規直交系とする. また $\{\xi_n : n \geqslant 0\}$ を独立同分布な確率変数列で標準正規分布に従うとする. このとき

$$B_t = \sum_{n \geqslant 1} \xi_n \int_0^t \varphi_n(s)ds$$

は確率 1 で絶対一様収束する. 特に $B = \{B_t : t \in [0,1]\}$ はブラウン運動である.

特にペーリー-ウィーナーは $L^2[0,1]$ 上の完全正規直交系として $\{1, \sqrt{2}\cos \pi x, \sqrt{2}\sin \pi x, \sqrt{2}\cos(2x), \sqrt{2}\sin(2x), \cdots\}$ を用いることで

$$B_t = \xi_0 t + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{\xi_n \sqrt{2}\sin(nt)}{n}, \quad t \in [0,1]$$

という表現を与えた. この表現は近年非線形偏微分方程式の解の正則性の研究にも用いられている.[*47]

8.1.2 ドンスカーの不変原理

次の構成方法では適切な仮定の下ではランダムウォークの時空間スケール変換の極限がブラウン運動になることを確かめる.

$\{X_n : n \geqslant 1\}$ を独立同分布な確率変数で平均 0, 分散 σ^2 であるようなものとする. $t \geqslant 0$ に対して

$$S_t^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^{tn} X_i}{\sqrt{\sigma^2 n}}, & t = \dfrac{k}{n}, k \in \mathbb{N}_0 \\ \text{線形補間}, & \text{それ以外}. \end{cases}$$

と定義する. これはランダムウォークの線形補完してできるグラフである.

定理 8.1.15. (**ドンスカーの不変原理**) $0 < \sigma^2 < \infty$ であるとする. このとき

$$\{S_t^{(n)} : t \geqslant 0\} \Rightarrow \{B_t : t \geqslant 0\}$$

である. ただし, $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$ は 1 次元ブラウン運動である.

[*47] T. Oh, J. Quastel: On invariant Gibbs measures conditioned on mass and momentum J. Math. Soc. Japan 65 (2013), no. 1, 13-35.

注意 8.1.16. 定理 8.1.15 の主張における法則収束は $S^{(n)}$ から可測空間 $(C([0,\infty)), \mathcal{B}(C([0,\infty))))$ へ自然に誘導される確率測度 P_n がブラウン運動を表す確率測度 P に弱収束することを言っている．この可測空間 $(C([0,\infty)), \mathcal{B}(C([0,\infty)))$ 上に定義されたブラウン運動を表す確率測度 P を**ウィーナー測度**といい，$(C([0,\infty)), \mathcal{B}(C([0,\infty)), P)$ を**ウィーナー空間**という．

さて不変原理を証明する前に注意しておくことがある．それは $C([0,\infty))$ にどのような位相を入れているかである．ここでは次のような距離から誘導される位相が入っていると考えてよい．

$$f, g \in C([0,\infty)) \text{ に対して } d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{0 \leqslant t \leqslant n} \left(|f(t) - g(t)| \wedge 1\right). \tag{8.5}$$

問 8.1.17. (8.5) で定義される d は $C([0,\infty))$ 上の距離を定めることを示せ．またこの距離の下で $C([0,\infty)$ は完備可分距離空間になることを示せ．

以下では簡単のため $\{S_t^{(n)} : 0 \leqslant t \leqslant T\}(0 < T < \infty)$ が弱収束することを見ていくことにする．このとき次のように証明する．

(1) $(C([0,T]), \mathcal{B}(C([0,T])))$ 上の確率測度の族 $\{P_n : n \geqslant 1\}$ が緊密であることを示す．
(2) 部分列の弱収束極限の分布 P の下で $B = \{B_t : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ が定義 8.1.1 の (i), (ii), (iii) をみたすことを確かめる．

注意 8.1.18. 定義 8.1.1 の (iv) は構成方法より確かめる必要はない．

緊密性を調べるために次の定理を用意しておく．この定理の証明はこの講義ノートでは扱わない．

定理 8.1.19. $(C([0,T]), \mathcal{B}(C([0,T])))$ 上の確率測度の列 $\{P_n : n \geqslant 1\}$ が緊密であるための必要十分条件は以下が成り立つことである

(i) $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} P_n\left(\{\omega \in C([0,T]) : |\omega(0)| > \lambda\}\right) = 0.$
(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geqslant 1} P_n\left(\{\omega \in C([0,T]) : m(\omega,\delta) > \varepsilon\}\right) = 0.$

ただし $f \in C([0,T]), \delta > 0$ に対して

$$m(f,\delta) = \sup_{t,s\in[0,T], |t-s|\leqslant\delta} |f(t) - f(s)|$$

とする．

証明．[1, Theorem 7.3] 参照． □

よって次の 2 つが示されると定理 8.1.15 の証明が完成する．

定理 8.1.15 の条件を仮定する．

補題 8.1.20. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{n\geqslant 1} P\left(m\left(S^{(n)}, \delta\right) > \varepsilon\right) = 0$$

が成り立つ．

補題 8.1.21. 任意の $[0,T]$ の分割点 $0 < t_1 < \cdots < t_m \leqslant T$ に対して $n \to \infty$ のとき

$$\left(S^{(n)}_{t_1}, \cdots, S^{(n)}_{t_m}\right) \Rightarrow (B_{t_1}, \cdots, B_{t_m})$$

が成り立つ.

補題 *8.1.21* の証明. $m = 2$ の場合を証明する. $m \geqslant 3$ の場合も同様に示せる. $s = t_1, t = t_2$ とおく.

$$(S^{(n)}_s, S^{(n)}_t) \Rightarrow (B_s, B_t)$$

を示す. まず $\varepsilon > 0$ に対してチェビシェフの不等式より

$$P\left(\left|S^{(n)}_t - \frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right|\right) \leqslant P\left(\left|\frac{X_{\lfloor tn \rfloor + 1}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{n\sigma^2}$$

となる. よって

$$P\left(\left|\left(S^{(n)}_s, S^{(n)}_t\right) - \left(\frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor sn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}, \frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right| > \varepsilon\right) \to 0$$

がわかる. これより

$$\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor sn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}, \frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \Rightarrow (B_s, B_t)$$

を示せば十分であるが, これは

$$\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor sn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}, \frac{X_{\lfloor sn \rfloor + 1} + \cdots + X_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) \Rightarrow (B_s, B_t - B_s)$$

と同値である. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ の独立性と中心極限定理を用いることで任意の $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\exp\left(i\theta_1 \frac{X_1 + \cdots + X_{\lfloor sn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}} + i\theta_2 \frac{X_{\lfloor sn \rfloor + 1} + \cdots + X_{\lfloor tn \rfloor}}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)\right] = \exp\left(-\frac{s\theta_1^2 + (t-s)\theta_2^2}{2}\right) \tag{8.6}$$

が示される. よって補題 8.1.21 が示せされた. □

問 8.1.22. $\{(X_n, Y_n) : n \geqslant 1\}$ を $\mathbb{R}^2$-値確率変数列, (X, Y) を $\mathbb{R}^2$-値確率変数とする. このとき以下を示せ.

(X_n, Y_n) が (X, Y) へ法則収束する $\Leftrightarrow$ $(X_n, Y_n - X_n)$ が $(X, Y - X)$ に法則収束する.

問 8.1.23. (8.6) を証明せよ.

補題 *8.1.20* の証明. [8, Lemma 4.18]) 線形補間であることから

$$\lim_{\delta\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} P\left(\max_{\substack{0 \leqslant j < k \leqslant \lfloor Tn \rfloor + 1, \\ k - j \leqslant \lfloor \delta n \rfloor}} \left|\sum_{i=j+1}^{k} X_i\right| > \varepsilon\sqrt{n\sigma^2}\right) = 0$$

を示せばよいことがわかる. また三角不等式より

$$\max_{\substack{0 \leqslant j < k \leqslant \lfloor Tn \rfloor + 1, \\ k - j \leqslant \lfloor \delta n \rfloor}} \left|\sum_{i=j+1}^{k} X_i\right| \leqslant 3 \max_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{T}{\delta}} \left(\max_{\ell\lfloor \delta n \rfloor \leqslant k \leqslant (\ell+1)\lfloor \delta n \rfloor} \left|\sum_{i=\ell\lfloor \delta n \rfloor + 1}^{k} X_i\right|\right) \tag{8.7}$$

が成り立つので

$$P\left(\max_{\substack{0\leqslant j<k\leqslant\lfloor Tn\rfloor+1,\\ k-j\leqslant\lfloor\delta n\rfloor}}\left|\sum_{i=j+1}^{k}X_i\right|>\varepsilon\sqrt{n\sigma^2}\right)\leqslant\frac{T}{\delta}P\left(\max_{0\leqslant k\leqslant\lfloor\delta n\rfloor}\left|\sum_{i=1}^{k}X_i\right|>\frac{\varepsilon}{3}\sqrt{\sigma^2 n}\right)$$

である. よって

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T}{\delta}P\left(\max_{0\leqslant k\leqslant\lfloor\delta n\rfloor}\left|\sum_{i=1}^{k}X_i\right|>\frac{\varepsilon}{3}\sqrt{\sigma^2 n}\right)=0$$

を示せば良い.

定理 5.1.11 より

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{\lfloor\delta n\rfloor+1}X_i}{\sqrt{\sigma^2 n\delta}}\right|\geqslant\lambda\right)\leqslant P(|Z|\geqslant\lambda)\leqslant\frac{1}{\lambda^3}E[|Z|^3].$$

ただし, $Z\overset{d}{\sim}N(0,1)$.

ここで $\varepsilon>0$ を固定し, $0<\delta<\frac{\varepsilon^2}{2}$ としておく.

$$\tau=\inf\left\{j\geqslant 1:\left|\sum_{i=1}^{j}X_i\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right\}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant\lfloor\delta n\rfloor+1}\left|\sum_{i=1}^{j}X_i\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right)\\
&=P\left(\left|\sum_{i=1}^{\lfloor\delta n\rfloor+1}X_i\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}-\sqrt{2\delta}\sigma\sqrt{n}\right)\\
&+\sum_{j=1}^{\lfloor\delta n\rfloor}P\left(\left|\sum_{i=1}^{\lfloor\delta n\rfloor+1}X_i\right|<\varepsilon\sigma\sqrt{n}-\sqrt{2\delta}\sigma\sqrt{n},\tau=j\right)
\end{aligned}$$

となる. 最後の式の第 2 項は上から

$$\begin{aligned}
&P\left(\tau=j,\left|\sum_{i=j+1}^{\lfloor\delta n\rfloor+1}X_i\right|>\sigma\sqrt{2\delta n}\right)\\
&\leqslant P(\tau=j)\frac{\delta\sigma^2}{\sigma^2 2\delta n}=\frac{1}{2}P(\tau=j)
\end{aligned}$$

で抑えられるので,

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{1\leqslant j\leqslant\lfloor\delta n\rfloor+1}\left|\sum_{i=1}^{j}X_i\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}\right)\\
&\leqslant 2P\left(\left|\sum_{i=1}^{\lfloor\delta n\rfloor+1}X_i\right|>\varepsilon\sigma\sqrt{n}-\sqrt{2\delta}\sigma\sqrt{n}\right)\\
&\leqslant\frac{\delta^{\frac{3}{2}}}{(\varepsilon-\sqrt{2\delta})^3}E[|Z|^3]
\end{aligned}$$

となる.

よって補題 8.1.20 が示された. □

問 8.1.24. (8.7) を示せ. [*48]

8.1.3 ブラウン運動の基本的な性質

ブラウン運動の基本的な性質を挙げておく.

定理 8.1.25. (スケール変換不変性) $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を 1 次元標準ブラウン運動とする. $a > 0$ に対して確率過程 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ を

$$X_t = \frac{1}{a} B_{a^2 t}, \quad t \geqslant 0$$

と定義すると X は 1 次元標準ブラウン運動である.

問 8.1.26. 定理 8.1.25 を証明せよ.

定理 8.1.27. (時間反転) $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を 1 次元標準ブラウン運動とする. 確率過程 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ を

$$X_t = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t B_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$

と定義すると X は 1 次元標準ブラウン運動である.

問 8.1.28. 定理 8.1.27 を証明せよ.

8.2 微分不可能性

ブラウン運動の性質として特筆すべき点として微分不可能性がある.

定理 8.2.1. ブラウン運動 $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$ は確率 1 で任意の $t \geqslant 0$ で微分不可能である.

証明. ブラウン運動はウィーナー空間上に定義されているとする. $\beta > 0$ を固定する.

$$A_n(\beta) = \left\{ w \in C[0,1] : (*)\ ある\ s \in [0,1]\ で\ t \in [0,1]\ が |t-s| \leqslant \frac{2}{n} をみたすならば |w(t) - w(s)| \leqslant 2\beta |t-s| \right\}$$

とおく.

$$A(\beta) = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n(\beta)$$

とすると

$$\bigcup_{k \geqslant 1} A(k\beta) \supset \{ w \in C[0,1] : 少なくとも\ 1\ 点で微分可能\ \}$$

[*48] Hint: $0, \cdots, \lfloor Tn \rfloor + 1$ を順に $\lfloor \delta n \rfloor$ 個のブロックにわけ j, k がどのブロックに入っているかで場合分けする.

である. よって $P(A(\beta))=0$ を示せば十分.

$$Y_{j,n}=\max\left\{\left|w\left(\frac{j+2}{n}\right)-w\left(\frac{j+1}{n}\right)\right|,\left|w\left(\frac{j+1}{n}\right)-w\left(\frac{j}{n}\right)\right|,\left|w\left(\frac{j}{n}\right)-w\left(\frac{j-1}{n}\right)\right|\right\}$$

とする. $w\in A_n(\beta)$ に対して $(*)$ をみたすような $s\in[0,1]$ が少なくとも 1 つ存在する. このような s に対して $k\in\mathbb{N}_0$ を

$$\frac{k}{n}\leqslant s<\frac{k+1}{n}$$

とおくと $Y_{k,n}\leqslant\dfrac{6\beta}{n}$ が成り立つ. よって

$$A_n(\beta)\subset\bigcup_{k=1}^{n-2}\left\{Y_{k,n}\leqslant\frac{6\beta}{n}\right\}$$

がわかる. 独立性から

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n-2}Y_{k,n}\leqslant\frac{6\beta}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n-2}P\left(\left|w\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{6\beta}{n}\right)^3\to 0$$

である. $A_1(\beta)\subset A_2(\beta)\subset\cdots\subset A_n(\beta)\subset$ であるので任意の $n\geqslant 1$ に対して $P(A_n(\beta))=0$ となる. よって示された. □

系 8.2.2. ブラウン運動は任意の区間で確率 1 で有界変動ではない.

8.3 ブラウン運動のヘルダー連続性

定理 8.3.1. $\alpha<\frac{1}{2}$ とする. このとき確率 1 で d-次元ブラウン運動は α-次ヘルダー連続である. より正確には, ある $C>0$ が存在して, ほとんど確実に, すべての十分小さい $h>0$ と $0\leqslant t\leqslant 1-h$ に対して

$$|B(t+h)-B(t)|\leqslant C\sqrt{h\log\frac{1}{h}}$$

証明. ブラウン運動の構成 (I) より

$$B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k\in I_n}\zeta_k^{(n)}S_k^{(n)}(t)$$

と表せる. ここで

$$F_n(t)=\sum_{k\in I_n}\zeta_k^{(n)}S_k^{(n)}(t)$$

とおくと $F_n(t)$ は折れ線グラフなので $[0,1]$ 上のほとんどすべての点で微分可能で

$$|F_n'(t)|\leqslant 2^{n+1}|F_n(t)|$$

となる. これと (8.3) を合わせると, あるランダムな自然数 $N\geqslant 1$ が存在して, $n\geqslant N$ に対して

$$|F_n'(t)|\leqslant c\sqrt{n}2^{\frac{n-1}{2}}$$

が成り立つ. $t, t+h \in [0,1]$ に対して平均値の定理を用いると

$$|B_{t+h} - B_t| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \leqslant \sum_{n=0}^{\ell} h\|F_n'\|_\infty + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} 2\|F_n\|_\infty$$

となる. $\ell > N$ となるように選ぶと

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\ell} h\|F_n'\|_\infty + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} 2\|F_n\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{N} h\|F_n'\|_\infty + 2ch \sum_{n=N+1}^{\ell} \sqrt{n}2^{\frac{n}{2}} + 2c \sum_{n=\ell+1}^{\infty} \sqrt{n}2^{-\frac{n}{2}}
\end{aligned}$$

となる. N を固定したまま $h > 0$ を小さく選んでおく. 2 番目の級数は $\sqrt{\ell 2^\ell}$ の大きさで, 3 番目の級数は $\sqrt{\ell 2^{-\ell}}$ の大きさなのでこれらが釣り合うように $h > 0$ と ℓ を $2^{-\ell-1} < h \leqslant 2^{-\ell}$ となるようにとると $\ell = \lfloor -\log_2 h \rfloor$ となる. このようにとると後半 2 つの級数は $\frac{C}{2}\sqrt{h \log \frac{1}{h}}$ で上から抑えることができる. また

$$\sum_{n=0}^{N} h\|F_n'\|_\infty$$

は N を固定した状態では十分小さい $h > 0$ に関して $\frac{C}{2}\sqrt{h \log \frac{1}{h}}$ とできる. □

より詳細な結果が知られている.

定理 8.3.2. (連続率)[8, Theorem 2.9.25] ほとんど確実に

$$\varlimsup_{h \searrow 0} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1-h} \frac{|B(t+h) - B(t)|}{\sqrt{2h \log \frac{1}{h}}} = 1$$

8.4 ブラウン運動のマルコフ性と強マルコフ性

ここではブラウン運動のマルコフ性, および強マルコフ性について述べる. マルコフ性の直感的な説明は「ブラウン運動の “過去の情報”(過去の軌道) をすべてわかったとしても, 現時点から先のブラウン運動の動きは “現在の情報”にのみで決まる」というものである.

以下ではブラウン運動は $(C([0,\infty)), \mathcal{B}(C[0,\infty)))$ 上の可測関数として与えられているとする.

まずは記号として次のようなブラウン運動の時刻 t までの “情報”を導入する (補題 1.3.18 参照)[*49].

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_t^B &= \sigma[B_s : s \leqslant t] \\
\mathcal{F}_\infty^B &= \sigma[B_s : s \geqslant 0]
\end{aligned} \tag{8.8}$$

構成から

$$\mathcal{F}_s^B \subset \mathcal{F}_t^B \quad (s \leqslant t)$$

がわかる. [*50]

[*49] 確率過程 B から σ-加法族が定まっていることを強調するために B を添字として書くことが多々ある.
[*50] 定義からは自明ではないが $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{B}(C[0,\infty))$ であることがわかる. [8, Chapter 2, Problem 4.2]

このように確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の部分 σ-加法族の系 $\{\mathcal{F}_t : 0 \leqslant t \leqslant \infty\}$ が

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

をみたすとき**フィルトレーション**という.

注意 8.4.1. 定理 7.1.5 をみて $\mathcal{F}_t^B$ や $\mathcal{F}_\infty^B$ の意味を理解し直しておくとよいが, 基本的には $\mathcal{F}_t^B$ が時刻 t までのブラウン運動が持つ "情報", つまり

$$A \in \mathcal{F}_t^B \Leftrightarrow \begin{array}{c}\text{ブラウン運動 } \{B_s(\omega) : s \leqslant t\} \text{ が与えられていれば,} \\ \omega \in A \text{ かどうか } (A \text{ という事象が起きているか) が判断できる}\end{array}$$

という感覚を覚えておくことが重要である.

離散時間の場合はこのフィルトレーションで十分であった. しかし連続時間の過程を考える場合にはフィルトレーションを次のように拡大したほうが都合がよいことが多い:

$$\mathcal{F}_{t+}^B = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B. \tag{8.9}$$

(8.9) は次の意味で**右連続**であるという.

$$\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

問 8.4.2. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ に対して $\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{t+}$ と定義する. このとき $\{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geqslant 0}$ は右連続なフィルトレーションであることを示せ.

定理 8.4.3. **(マルコフ性)** $s \geqslant 0$ に対して

$$B^{(s)} = \{B_{t+s} - B_s : t \geqslant 0\}$$

は $\mathcal{F}_s^B$ と独立な標準ブラウン運動になる.

証明. ブラウン運動であることは定義 8.1.1 の条件 (i)∼(iv) が容易に確かめられるので示せる. 独立性も定義 8.1.1 の条件 (ii) より従う. □

系 8.4.4. $f : C([0,t]) \to \mathbb{R}, g : C([t,\infty)) \to \mathbb{R}$ を有界可測関数とする. このとき

$$E\left[f(B_{[0,t]})g(B_{[t,\infty)})\right] = E\left[f(B_{[0,t]})G(B_t)\right]$$

となる. ただし $B_A = \{B_s : s \in A\}, G(x) = E_x\left[g(B_{[0,\infty)})\right]$ とする.

定義 8.4.5. 停止時刻 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ をフィルトレーションとする.

$[0,\infty]$-値確率変数 T が $\{\mathcal{F}_t\}$-**停止時刻**であるとは,

$$\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$$

が成り立つときをいう. $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ が文脈からわかるときは、単に停止時刻と呼ぶこともある.

注意 8.4.6. $T = \infty$ も許容されている.

問 8.4.7. T が $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻のとき, $t > 0$ に対して $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ であることを証明せよ.

例題 8.4.8. (停止時刻の例)
定数 $t > 0$ は停止時刻になる. また d 次元ブラウン運動と閉集合 C に対して $T_C = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in C\}$ は $\{\mathcal{F}_t^B\}$-停止時刻になる. (詳しくは問題 8.3 参照)

例題 8.4.9. 確率変数 $T = \sup\{0 \leqslant s \leqslant 1 : |B_s| = 0\}$ は停止時刻でない.

例題 8.4.10. $T'_a = \inf\{t :\geqslant 0 : |B_t| > a\}$ は $\{\mathcal{F}_t^B : t \geqslant 0\}$ に関して停止時刻ではないが $\{\mathcal{F}_{t+}^B : t \geqslant 0\}$ に関しては停止時刻になる.

命題 8.4.11. 停止時刻の列 $\{T_n : n \geqslant 1\}$ が単調増加のとき $T = \lim_{n\to\infty} T_n = \sup_{n\geqslant 1} T_n$ は停止時刻となる.

証明. $\{T \leqslant t\} = \bigcap_{n\geqslant 1}\{T_n \leqslant t\}$ であることよりわかる. □

問 8.4.12. T を $[0,\infty]$-確率変数とし, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ をフィルトレーションとする. このとき任意の $\geqslant 0$ に対して

$$\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t+} \Leftrightarrow \{T < t\} \in \mathcal{F}_{t+}$$

であることを示せ.

問 8.4.13. $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$ を d 次元ブラウン運動とする. $O \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし, $T_O = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in O\}$ としたとき T_O は $\{\mathcal{F}_t^B\}$-停止時刻ではないが, $\{\mathcal{F}_{t+}^B\}$ であることを示せ.

問 8.4.14. S, T を停止時刻とする. このとき $S \wedge T, S \vee T, S + T$ は停止時刻であることを示せ.

命題 8.4.15. $a > 0$ に対して $R_a = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant a\}$ とする. このとき

$$P(R_a < \infty) = 1$$

となる.

証明. $n \geqslant 1$ に対して

$$\{R_a > n\} \subset \{R_a > n-1\} \cap \left\{\sup_{t\in[n-1,n]} |B_t - B_{n-1}| \leqslant \max\{|B_{n-1} - a|, |B_{n-1} + a|\}\right\}$$

が成り立つ. $\{R_a > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ なのでマルコフ性を用いると

$$\begin{aligned}
P(R_a > n) &\leqslant P\left(\{R_a > n-1\} \cap \left\{\sup_{t\in[n-1,n]} |B_t - B_{n-1}| \leqslant \max\{|B_{n-1} - a|, |B_{n-1} + a|\}\right\}\right) \\
&= E\left[1_{\{R_a > n-1\}} E_{B_{n-1}}\left[1_{\left\{\sup_{t\in[0,1]} |\tilde{B}_t - B_{n-1}| \leqslant \max\{|B_{n-1}-a|, |B_{n-1}+a|\}\right\}}\right]\right] \\
&= \int_{-a}^{a} P(R_a > n-1, B_{n-1} \in dx) P_x\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_t - x| \leqslant \max\{|x-a|, |x+a|\}\right) \qquad (8.10)
\end{aligned}$$

となる. ただし $\{\tilde{B}_t : t \geqslant 0\}$ は B とは独立なブラウン運動である. ここで $-a < x < a$ に対して

$$\begin{aligned}
P_x\left(\sup_{t\in[0,1]} |B_t - x| \leqslant \max\{|x-a|, |x+a|\}\right) &\leqslant 1 - P_x\left(|B_1 - x| \geqslant \max\{|x-a|, |x+a|\}\right) \\
&\leqslant 1 - P_0(|B_1| \geqslant 2a)
\end{aligned}$$

が成り立つ. (8.10) より $n \geqslant 1$ に対して

$$P(R_a > n) \leqslant (1 - P_0(|B_1| \geqslant 2a))^n$$

となるので示された. □

注意 8.4.16. ブラウン運動の対称性と連続性から

$$P(R_a < \infty, B_{R_a} = a) = P(R_a < \infty, B_{R_a} = -a) = \frac{1}{2}$$

となる.

問 8.4.17. 任意の $s \geqslant 0$ に対して $\{B_{t+s} - B_s : t \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}^B_{s+}$ と独立であることを示せ. *51

問 8.4.18. **(Blumenthal の 0-1 法則)**
任意の $A \in \mathcal{F}^B_{0+}$ に対して $P(A) \in \{0, 1\}$ であることを示せ.
(Hint: $P(A \cap A) = P(A)^2$ を示す.)

問 8.4.19. ほとんど確実に, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\sup_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon} B_s > 0$ であること, すなわち

$$P\left(\text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \sup_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon} B_s > 0\right) = 1$$

を示せ. また

$$P\left(\sup_{t \geqslant 0} B_t = \infty\right) = 1$$

を示せ.

定義 8.4.20. 停止時刻 T に対して

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t\} \tag{8.11}$$

で停止時刻 T までの情報を定義する.

問 8.4.21. (8.11) の $\mathcal{F}_T$ は σ-加法族であることを示せ.

定理 8.4.22. **(強マルコフ性)** 停止時刻 T は $P(T < \infty) = 1$ とする. このとき

$$B^{(T)} = \{B^{(T)}_t : t \geqslant 0\} = \{B_{T+t} - B_T : t \geqslant 0\}$$

は $\mathcal{F}^B_T$ と独立なブラウン運動になる.

証明. $A \in \mathcal{F}^B_T$ と $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_p < \infty$ を固定し, 任意の有界連続関数 $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ に対して

$$E\left[1_A F(B^{(T)}_{t_1}, \cdots, B^{(T)}_{t_p})\right] = P(A) E\left[F(B_{t_1}, \cdots, B_{t_p})\right] \tag{8.12}$$

*51 Hint: $s_n \searrow s$ に対して, $B(t+s) - B(s) = \lim_{n\to\infty}(B_{t+s_n} - B(s_n))$ に注意する.

が示せれば $A=\Omega$ とすれば $B^{(T)}$ の連続性と合わせると $B^{(T)}$ がブラウン運動であることがわかる. また $\mathcal{F}_T$ と $(B^{(T)}_{t_1},\cdots,B^{(T)}_{t_p})$ が独立となることから $\mathcal{F}_T$ と $B^{(T)}$ が独立であることも従う.

(8.12) を証明していく.

まずは停止時刻の列 $\{T_n : n\geqslant 1\}$ を

$$\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\text{のとき } T_n=\frac{k}{2^n}$$

となるものとしてとる. このとき $T_n \searrow T$ であるので F の連続性と合わせると優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} E\left[1_A F(B^{(T_n)}_{t_1},\cdots,B^{(T_n)}_{t_p})\right]=E\left[1_A F(B^{(T)}_{t_1},\cdots,B^{(T)}_{t_p})\right]$$

が言える.

$$\begin{aligned}&E\left[1_A F(B^{(T_n)}_{t_1},\cdots,B^{(T_n)}_{t_p})\right]\\&=\sum_{k=1}^{\infty} E\left[1_A 1_{\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\}} F(B_{t_1+\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k}{2^n}},\cdots,B_{t_p+\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k}{2^n}})\right].\end{aligned}$$

ここで

$$A\cap\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\right\}=\left(A\cap\left\{0\leqslant T<\frac{k}{2^n}\right\}\right)\cap\left\{0\leqslant T<\frac{k-1}{2^n}\right\}^c\in\mathcal{F}_{\frac{k}{2^n}}$$

に注意すると, 命題 8.4.3 より

$$\begin{aligned}&E\left[1_A 1_{\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\}} F(B_{t_1+\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k}{2^n}},\cdots,B_{t_p+\frac{k}{2^n}}-B_{\frac{k}{2^n}})\right]\\&=P\left(A\cap\left\{\frac{k-1}{2^n}\leqslant T<\frac{k}{2^n}\right\}\right)E\left[F(B_{t_1},\cdots,B_{t_p})\right]\end{aligned}$$

となる. □

強マルコフ性の応用として反射原理を述べておく.

定理 8.4.23. **(反射原理** [9, Theorem 2.21]**)** $t>0$ に対して $S_t=\sup_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$ とおく. このとき $a\geqslant 0$ と $b\in(-\infty,a]$ に対して

$$P(S_t\geqslant a, B_t\leqslant b)=P(B_t\geqslant 2a-b)$$

が成り立つ. 特に S_t の分布は $|B_t|$ と一致する.

証明. 停止時刻

$$T_a=\inf\{t\geqslant 0 : B_t=a\}$$

(例題 8.4.8 参照) は問 8.4.19 よりほとんど確実に $T_a<\infty$ となる. ブラウン運動の連続性から $\{T_a<\infty\}$ のとき $B_{T_a}=a$ となるので

$$P\left(S_t\geqslant a, B_t\leqslant b\right)=P(T_a\leqslant t, B_t\leqslant b)=P\left(T_a\leqslant t, B^{(T_a)}_{t-T_a}\leqslant b-a\right)$$

となり, $\tilde{B}$ を B と独立なブラウン運動とすると

$$P\left(T_a\leqslant t, B^{(T_a)}_{t-T_a}\leqslant b-a\right)=P\left(T_a\leqslant t, \tilde{B}_{t-T_a}\leqslant b-a\right)$$

となる. ここで

$$H = \{(s, w) \in [0, \infty) \times C([0, \infty), \mathbb{R}) : s \leqslant t, w(t-s) \leqslant b-a\}$$

とすると $(T_a, \tilde{B}) \overset{d}{=} (T_a, -\tilde{B})$ であることから

$$\begin{aligned}
P((T_a, \tilde{B}) \in H) &= P((T_a, -\tilde{B}) \in H) \\
&= P\left(T_a \leqslant t, -B^{(T_a)}_{t-T_a} \leqslant b-a\right) \\
&= P(T_a \leqslant t, B_t \leqslant 2a-b) \\
&= P(B_t \geqslant 2a-b).
\end{aligned}$$

また

$$P(S_t \geqslant a) = P(S_t \geqslant a, B_t \geqslant a) + P(S_t \geqslant a, B_t \leqslant a) = 2P(S_t \geqslant a, B_t \geqslant a) = 2P(B_t \geqslant a) = P(|B_t| \geqslant a)$$

となる. □

注意 8.4.24. 各時刻 $t > 0$ に対して S_t と $|B_t|$ の分布が等しいだけで, 確率過程としては一致しないことは過程の発展の仕方を考えれば容易にわかる.

8.5 ブラウン運動による "積分"

ここではランダムではない関数 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ をブラウン運動によって "積分"する. 目標は

$$\int_0^t f(s) dB_s$$

を定義することである. しかしすでに確認したようにブラウン運動 B は微分可能ではないので, dB_t というものに意味がない. そこで測度のように捉えて積分を定義してみる.

定義 8.5.1. (可測単関数) $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i 1_{[s_i, t_i]}$ に対して

$$\int_0^\infty f(s) dB_s = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_i} - B_{s_i})$$

と定義する. また $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ に対して

$$I_A(f) := \int_A f(s) dB_s = \int_0^\infty f(s) 1_A(s) dB_s$$

と定義する. 特に $I_t(f) = I_{[0,t]}(f)$ としておく.

命題 8.5.2. f, g: 可測単関数. $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して次が成り立つ.

(i) $I_0(f) = 0$. P-a.s.
(ii) $E\left[I_t(f) | \mathcal{F}^B_s \right] = I_s(f)$ P-a.s.
(iii) $\displaystyle\int_0^t f(s) dB_s \overset{d}{\sim} N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$. 特に $E\left[I_t(f)^2\right] = \displaystyle\int_0^t f(s)^2 ds$.
(iv) $I_t(f) = I_s(f) + I_{[s,t]}(f)$, P-a.s.

(v) $I_t(\alpha f+\beta g)=\alpha I_t(f)+\beta I_t(g)$, P-a.s. $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

問 8.5.3. 命題 8.5.2 を示せ.

$f\in L^2([0,\infty),dx)$ に対して可測単関数列 $\{f_n : n\geqslant 1\}$ が存在して $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)-f_n(t)|^2dt\to 0$ となるものが存在する. このような f_n に対して $\displaystyle\left\{\int_0^\infty f_n(t)dB_t : n\geqslant 1\right\}$ は命題 8.5.2((iii)) より $L^2(\Omega,P)$-コーシー列になることがわかる.

定義 8.5.4. $f\in L^2([0,\infty),dx)$ に対して

$$\int_0^\infty f(s)dB_s=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(s)dB_s \quad \text{in } L^2(\Omega,P)$$

と定義する. $\{f_n : n\geqslant 1\}$ は可測単関数列で $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)-f_n(t)|^2dt\to 0$ となるものである.

注意 8.5.5. 命題 8.5.2 は $f\in L^2([0,\infty),dx)$ の場合にも成り立つ. また $\{f_n\}$ を適切に選び直すことで a.s. で収束することが言える.

注意 8.5.6. 定義 8.5.4 より $t\geqslant 0$ に対して

$$\int_0^t f(s)^2ds<\infty$$

となる関数 f に対して, 可算個の $t\geqslant 0$ では $I_t(f)$ が概収束極限として定義できている. しかしこれを確率過程 $\{I_t(f) : t\geqslant 0\}$ として構成できているかというとそれは自明ではない. 確率過程としての構成や連続性などを議論することは次の章に譲る.

8.6 ブラウン運動と偏微分方程式

ブラウン運動を用いて熱方程式の解が構成できることがよく知られている. ここでは消散項のついた熱方程式の解のブラウン運動を用いた表現を与える.[*52].

定義 8.6.1. 2 階微分可能関数 $u:(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ が**消散項** $V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, **初期条件** $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ の熱方程式の解であるとは

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)=\frac{1}{2}\Delta_x u(t,x)-V(x)u(t,x),\quad (t,x)\in\mathbb{R}^d \tag{8.13}$$

$$\lim_{t\to 0+}u(t,x)=f(x), x\in\mathbb{R}^d \tag{8.14}$$

をみたすときをいう. ただし $\displaystyle\Delta_x=\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ を表すとする.

消散項 V, 初期条件 V の熱方程式の解は次のようにブラウン運動を用いて記述できる.

[*52] 確率積分を用いず半群を用いた構成法は [10, 命題 12.11] で扱っている

定理 8.6.2. $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ とし, $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を有界なボレル可測関数とする.

$$u(t,x) = E_x \left[f(B_t) \exp\left(-\int_0^t V(B_s) ds \right) \right]$$

とおくと, u は熱方程式 (8.13), (8.14) の解になる. ただし E_x は $x \in \mathbb{R}^d$ を出発するブラウン運動を表す確率測度とする.

問 8.6.3. $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき定義より $t \geqslant 0$ に対して

$$u(t,x) := E_x[\phi(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t} \right) \phi(y) dy \tag{8.15}$$

と書ける. (8.15) で定義された $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 上の関数 $\{u(t,x)\}$ は以下の性質をみたすことを確かめよ.

(1) 任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $\lim_{t \to 0+} u(t,x) = \phi(x)$.

(2) u は $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ 上で t に関して C^1-級, x に関して C^2-級で

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u$$

をみたす.

注意 8.6.4. $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ に対して定義される関数

$$p_t(x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t} \right)$$

を**熱核**という.

問 8.6.5. 任意の $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = \frac{1}{2} \Delta p_t(x) \tag{8.16}$$

が成り立つことを示せ.

[12] に従って, 証明を与える.

定理 *8.6.2* の証明. (8.14): 略.

(8.13): 簡単のため, $-V$ を V で置き換えて議論しておく. 定義から

$$u(t,x) = E_x \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f(B_t) \left(\int_0^t V(B_s) ds \right)^n \right]$$

と表せる. $n \geqslant 0$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} a_0(t,x) &:= E_x\left[f(B_t)\right], \\ a_n(t,x) &:= \frac{1}{n!} E_x \left[f(B_t) \left(\int_0^t V(B_s) ds \right)^n \right] \end{aligned}$$

と定義すると, Fubini の定理より

$$a_n(t,x) = E_x\left[\int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n f(B_t)V(B_{t_1})\cdots V(B_{t_n})\right] \tag{8.17}$$

$$= \int dx_1 \cdots \int dx_n \int dy f(y) \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \left(\prod_{i=1}^n V(x_i) \prod_{i=1}^n p_{t_i - t_{i-1}}(x_i - x_{i-1})\right) p_{t-t_n}(y - x_n) \tag{8.18}$$

となる. ただし $t_0 = 0, x_0 = x$ とした. 熱核の性質 (8.16) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta a_n(t,x) &= \int dx_1 V(x_1) \int_0^t dt_1 \frac{1}{2}\Delta p_{t_1}(x,x_1) a_{n-1}(t-t_1,x_1) \\
&= -\int dx_1 V(x_1) \int_0^t dt_1 \frac{\partial p_{t_1}(x,x_1)}{\partial t_1} a_{n-1}(t-t_1,x_1) \\
&= \int dx_1 V(x_1) \int_0^t dt_1 p_{t_1}(x,x_1) \frac{\partial a_{n-1}(t-t_1,x_1)}{\partial t_1} - V(x)a_{n-1}(t,x) \\
&= -\int dx_1 V(x_1) \int_0^t dt_1 p_{t_1}(x,x_1) \frac{\partial a_{n-1}(t-t_1,x_1)}{\partial t_1} - V(x)a_{n-1}(t,x) \\
&= \int dx_1 V(x_1) \int_0^t dt_1 p_{t_1}(x,x_1) \frac{\partial a_{n-1}(t-t_1,x_1)}{\partial t} - V(x)a_{n-1}(t,x) \\
&= \frac{\partial a_n(t,x)}{\partial t} - V(x)a_{n-1}(t,x)
\end{aligned}$$

となる. よって $n \geqslant 0$ について和をとることで (8.13) をみたすことがわかる. □

問 8.6.6. 定理 8.6.2 の証明を補え. [*53]

注意 8.6.7. 他にも Dirichlet 問題の解をブラウン運動を用いて表現する方法などもよく知られているが, 現時点ではこの講義ノートでは扱わない. (いずれ加筆するかもしれない.) 興味のある人は [8] の 4 章などを読むとよい.

8.7 問題

問題 8.1. 1 次元標準ブラウン運動 B に対して $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$, P-a.s. を示せ.

定理 8.3.2 の下からの評価は次の問題で与えられる.

問題 8.2. $0 < c < \sqrt{2}$ とする. ほとんど確実に

$$\varlimsup_{h\searrow 0} \sup_{0\leqslant t\leqslant 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{h\log\frac{1}{h}}} \geqslant c \tag{8.19}$$

が成り立つことを以下の要領で示せ.

(1) $X > 0$ に対して $\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geqslant \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ が成り立つことを示せ.
(2) $k, n \geqslant 0$ に対して $A_{k,n} = \{|B_{(k+1)e^{-n}} - B_{ke^{-n}}| \geqslant c\sqrt{n}e^{-\frac{n}{2}}\}$ とおく. このとき $P(A_{k,n}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{cn-1}{(cn)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{cn}{2}\right)$ が成り立つことを示せ.
(3) (8.19) を示せ.

[*53] 無限級数と期待値が交換できるか, 最後の等式のそれぞれの変形において確認すべきことは何か, 等証明において省略している部分を各自で補う.

問題 8.3. (例題 8.4.8 の補足)

$C \subset \mathbb{R}^d$ を閉集合とし, ブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ に対して $T_C = \inf\{s \geqslant 0 : B_t \in C\}$ としたとき T_C が $\{\mathcal{F}_t^0\}$-に関して停止時刻であることを以下の要領で示せ.

(1) $M \geqslant 1$ に対して, $C_M = C \cap \overline{B(0,M)}$ とする. ただし $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| < r\}$ を $x \in \mathbb{R}^d$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球, $\overline{B(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| \leqslant r\}$ とする. $x \in \mathbb{R}^d$ に対して $d(x, C_M) = \inf\{|x-y| : y \in C_M\}$ としたとき, $C_M^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, C_M) < \varepsilon$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合であり, $C_M = \displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} C_M^{\frac{1}{n}}$ であることを示せ.

(2) 任意の $t \geqslant 0$ に対して

$$\{T \leqslant t\} = \bigcup_{M \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \left\{B_s \in C_M^{\frac{1}{n}}\right\}$$

が成り立つが成り立つことを示せ.

問題 8.4. $\{T_n : n \geqslant 1\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻の列とし, $T = \inf_{n \geqslant 1} T_n$ とする. 任意の $n \geqslant 1$ に対して $\{T < \infty\}$ 上で $T < T_n$ ならば $\mathcal{F}_{T+} \subset \bigcap_{n \geqslant 1} \mathcal{F}_{T_n}$ となることを示せ. ただし, $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻 T に対して

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_{t+}\}$$

と定義する.

問題 8.5. S, T を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻とする. このとき任意の $A \in \mathcal{F}_S$ に対して $A \cap \{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T$ であることを示せ. また任意の $\omega \in \Omega$ に対して $S(\omega) \leqslant T(\omega)$ が成り立つならば $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ が成り立つことを示せ.

問題 8.6. T を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻とする. 任意の $t \geqslant 0$ に対して $\mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T \wedge t}$ であることを示せ.

問題 8.7. $a \leqslant b$, $b \geqslant 0$ とする. $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を 1 次元標準ブラウン運動とする. $t \geqslant 0$ に対して $S_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$ とおく. このとき, 各 $t > 0$ に対して

$$P(W_t \in da, S_t \in db) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) dsdb$$

であることを示せ.

問題 8.8. 1 次元標準ブラウン運動 B に対して零点集合を

$$\mathfrak{Z}(B) = \{t \in [0,\infty) : B_t = 0\}$$

と定義する. 以下を示せ.

(1) 確率 1 で任意の $t \geqslant 0$ に対して $\mathfrak{Z}(B) \cap [0,t]$ はルベーグ測度 0 である. (Hint: $\mathfrak{Z} := \{(t,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega : B_t(\omega) = 0\}$ とおくと任意の $t > 0$ に対して $\mathfrak{Z} \cap [0,t]$ は $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測である. このことと Fubini の定理を用いる.)

(2) 確率 1 で任意の $t \geqslant 0$ に対して $\mathfrak{Z}(B) \cap [0,t]$ はコンパクト集合である.

(3) 確率 1 で任意の $t \geqslant 0$ に対して $\mathfrak{Z}(B) \cap [0,t]$ 内の各点は孤立点を持たない.

問題 8.9. $\{B_t = (B_t^{(1)}, B_t^{(2)}) : t \geqslant 0\}$ を原点出発の 2 次元標準ブラウン運動とする. ℓ を 2 次元平面内の直線とし,

$$\tau_\ell = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \ell\}$$

と定義する.

(1) $P(\tau_\ell < \infty) = 1$ を示せ.

(2) 原点から ℓ への垂線と ℓ の交点を P とおく. 点 P と B_{τ_ℓ} の距離の分布の密度関数を与えよ.

問題 8.10. $\lambda > 0$ とする. 熱方程式

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u - \lambda 1_{[0,\infty)}(x) u(t,x), \quad u(0,x) \equiv 1$$

の解を u^λ とあわらすことにする. 以下の問に答えよ.

(1) u^λ をブラウン運動 B を用いて表せ.

(2) $\rho > 0$ に対して $g_{\rho,\lambda}(x) := \int_0^\infty u^\lambda(t,x) e^{-\rho t} dt$ と定義する.

$$\rho g_{\rho,\lambda}(x) + \lambda 1_{[0,\infty)}(x) - \frac{1}{2} g''_{\rho,\lambda}(x) = 1 \tag{8.20}$$

をみたすことを示せ.

(3) 定数 A, B, C, D に対して

$$\tilde{g}_{\rho,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda+\rho} + A e^{\sqrt{2(\rho+\lambda)}x} + B e^{-\sqrt{2(\rho+\lambda)}x}, & x > 0 \\ \dfrac{1}{\rho} + C e^{\sqrt{2}\rho x} + D e^{-\sqrt{2}\rho x}, & x > 0 \end{cases}$$

と定義したとき, $\tilde{g}_{\rho,\lambda}$ は (8.20) を $x \neq 0$ でみたすことを示せ.

(4) $A, D = 0$ を示せ. また u が原点で連続微分可能であることを用いて $g(0) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\rho+\lambda)}}$ であることを示せ.

(5) $t \geqslant 0$ に対して $X_t = \frac{1}{t}\int_0^t 1_{[0,\infty)}(B_s) ds$ とすると

$$g(0) = E_0\left[\int_0^\infty \exp\left(-\rho t - \lambda t X(1)\right) dt\right]$$

が成り立つことを示せ.

(6) $\lambda \in (-1,1)$ に対して

$$E_0\left[\frac{1}{1+\lambda X(1)}\right] = \sum_{n=0}^\infty (-\lambda)^n E_0\left[X(1)^n\right] = \sum_{n=0}^\infty (-\lambda)^n \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^n \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

が成り立つことを示せ.

9 確率過程とマルチンゲール性

この章では確率過程について基本的な性質を述べていく.

9.1 マルチンゲール性

まずは第 7 章で離散時間の確率過程に対して定義していたマルチンゲール性を連続時間の場合にも拡張する.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間, $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$: フィルトレーション

定義 9.1.1. 確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ が**マルチンゲール**であるとは

(i) 任意の $t \geqslant 0$ に対して $E[|X_t|] < \infty$.

(ii) 任意の $0 \leqslant s < t < \infty$ に対して

$$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \quad P\text{-a.s.} \tag{9.1}$$

が成り立つときをいう.

また優マルチンゲール, 劣マルチンゲールであるとは (9.1) をそれぞれ

$$\begin{aligned} E[X_t|\mathcal{F}_s] \leqslant X_s, &\qquad P\text{-a.s.} \\ E[X_t|\mathcal{F}_s] \geqslant X_s, &\qquad P\text{-a.s.} \end{aligned}$$

に置き換えて成り立つときをいう.

注意 9.1.2. 定義の仮定から

$$\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して } X_t \in \mathcal{F}_t \tag{9.2}$$

となる. (9.2) が成り立つ確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ に**適合**しているという.

例題 9.1.3. ブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ に対して $\mathcal{F}_t^B = \sigma[B_s : 0 \leqslant s \leqslant t]$ としたときブラウン運動はマルチンゲールになる. また $B_t^2 - t$ はマルチンゲールになる.

問 9.1.4. $\exp(\theta B_t - \frac{t\theta^2}{2})$ $(\theta \in \mathbb{R})$ はマルチンゲールであることを示せ.

命題 7.1.15 より次のことがわかる.

命題 9.1.5. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ はマルチンゲールであるとする. 関数 f が凸関数で任意の $t \geqslant 0$ に対して $f(X_t) \in L^1(P)$ であるとき $\{f(X_t) : t \geqslant 0\}$ は劣マルチンゲールになる.

連続時間マルチンゲールに関する不等式を紹介しておく. これは離散時間マルチンゲールにおける Doob の不等式 (定理 7.2.21) と Doob の L^p-不等式 (定理 7.2.24) の連続時間版に相当するものである.

定理 9.1.6. **(Doob の不等式)** 確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は劣マルチンゲールでほとんど確実に右連続とする. このとき任意の $t > 0$ および任意の $\lambda > 0$ に対して

$$\lambda P\left(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|X_s| > \lambda\right) \leqslant E[|X_t|].$$

が成り立つ.

定理 9.1.7. **(Doob の L^p-不等式)** 確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ はマルチンゲールでほとんど確実に連続とする. このとき任意の $t > 0$ および $p > 1$ に対して

$$E\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|X_s|^p\right] \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_t|^p]$$

この不等式を用いて $f \in L^2([0,\infty), dt)$ に対する確率積分 $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ の連続性を証明しておく.

構成方法より f が可測単関数のとき $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ が連続であることはわかる. また命題 8.5.2((iii)) より $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ はマルチンゲールであることがわかる. 定理 9.1.7 より $m, n \geqslant 1$ に対して

$$E\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|I_s(f_n) - I_s(f_m)|^2\right] \leqslant 4E\left[I_t(f_m - f_n)^2\right] = \int_0^t (f_m(s) - f_n(s))^2 ds$$

となる. これにより一様収束が成り立つことが言える. よって $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ は連続な確率過程になる.

また

$$\sum_{n\geqslant 1}\int_0^t (f_n(s) - f(s))^2 ds < \infty$$

となるような可測単関数 $\{f_n : n \geqslant 1\}$ を考えることによって

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t<\infty}|I_t(f_n) - I_t(f)| = 0 \quad P\text{-a.s.}$$

が言える.

□

問 9.1.8. $f \in L^2([0,\infty))$ とする. このとき任意の $t \geqslant s \geqslant 0$ に対して

$$E\left[\int_0^t f(u)dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^s f(u)dB_u, P\text{-a.s.}$$

が成り立つことを示せ.

これにより, “現時点では”確率積分はブラウン運動 B が $f \in L^2([0,\infty))$ に作用して連続マルチンゲールを出力していることがわかる. 後ほど f を確率過程にしたり, ブラウン運動をもう少し一般の確率過程にしたりする. しかし基本的に出力するのはマルチンゲールである.

後ほど確率積分を一般化するにあたり連続時間マルチンゲールに関することを一通り確認しておく.

$\mathcal{N} = \{N \subset \Omega :$ ある $A \in \mathcal{F}_\infty$ で $N \subset A$ かつ $P(A) = 0\}$ とおき, $\mathcal{F}_0$ が $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ を満たすとき**完備**という. またフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ が右連続かつ完備であるとき**通常の条件**をみたすという.

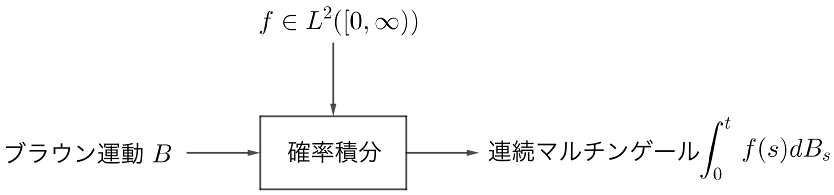


図 7　確率積分 $\int_0^{\cdot} * dB_s$ の構造.

定理 9.1.9. [9, Theorem 3.18] フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ が通常の条件をみたすとする. 優マルチンゲール $\{X_t : t \geqslant 0\}$ が $t \mapsto E[X_t]$ が右連続のとき, ある確率過程 $\{\tilde{X}_t : t \geqslant 0\}$ で以下をみたすものが存在する:

- 任意の $t \geqslant 0$ で $P(X_t = \tilde{X}_t) = 1$,
- $P(\{\tilde{X}_t : t \geqslant 0\}$ は右連続$) = 1$,
- $\{\tilde{X}_t : t \geqslant 0\}$ は優マルチンゲール.

この定理は右連続とは限らない優マルチンゲールであっても必要ならば右連続に取り直したものを考えてよいということを保証している.

以下ではフィルトレーションは通常の条件をみたすものとして話を進めていく.[*54] 通常の条件をみたすフィルトレーションに対してもこれまでと同じ主張が成立する.

問 9.1.10. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ は通常の条件をみたすとする. このとき可測関数 $T : \Omega \to [0,\infty]$ が $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻であることと

$$\text{任意の } t > 0 \text{ に対して } \{T < t\} \in \mathcal{F}_t$$

が同値であることを示せ.

問 9.1.11. フィルトレーション $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ は通常の条件をみたすとする. $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$-適合な確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ が連続である時, 任意の閉集合 C に対して

$$\tau_C = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in C\}$$

は $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻であることを示せ.

9.1.1　連続時間マルチンゲールに関する種々の定理

ここでは離散時間マルチンゲールで求められた種々の定理を連続時間マルチンゲールに対しても確認していく.

[*54] $\mathcal{F}_t$ から通常の条件をみたすフィルトレーションを作ることができる. 実際 $\tilde{\mathcal{F}}_t := \{A \cup N : A \in \mathcal{F}_t, N \in \mathcal{N}\}$ とおけばよい.

定理 9.1.6 の証明. $t > 0$ とする. D_t を可算で $[0, t]$ の稠密な部分集合とする. $D_n(t) \subset D_t$ を

$D_n(t)$ は $n+1$ 個の要素の有限集合. ある $0 = t_0 \leqslant t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t$ が存在し $D_n(t) = \{t_i^{(n)}, i = 0, \cdots, n\}$,
任意の $n \geqslant 1$ に対して $D_n(t) \subset D_{n+1}(t)$,
$D_t = \bigcup_{n \geqslant 1} D_n(t)$

をみたすものとする. $n \geqslant 1, m = 0, \cdots, n$ に対して $Y_m^{(n)} = X_{t_m^{(n)}}$ と定義すると, $\{Y_m^{(n)} : m = 0, \cdots, n\}$ は $\mathcal{G}_m^{(n)} = \mathcal{F}_{t_m^{(n)}}$ に関して劣マルチンゲールとなる. これにより

$$\lambda P\left(\sup_{0 \leqslant m \leqslant n} |Y_m^{(n)}| \geqslant \lambda\right) = \lambda P\left(\sup_{s \in D_n(t)} |X_s| \geqslant \lambda\right) \leqslant E[|X_t|]$$

となる. $n \to \infty$ とすると

$$\lambda P\left(\sup_{s \in D_t} |X_s| \geqslant \lambda\right) \leqslant E[|X_t|]$$

となるが X は右連続なので $\sup_{s \in D_t} |X_s| = \sup_{s \in [0,t]} |X_s|$ となるため示された. □

定理 9.1.7 の証明. 定理 7.2.24 と同様. □

次の定理はマルチンゲールに関する重要な定理である.

定理 9.1.12. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は右連続な劣マルチンゲールとする.

$$\sup_{t \geqslant 0} E[X_t^+] < \infty$$

であるとき,

$$X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t, \quad P\text{-a.s.}$$

が存在する. さらに $X_\infty \in L^1(P)$ となる.

この定理で $\{X_t : t \geqslant 0\}$ がマルチンゲールであっても

$$E[X_\infty | \mathcal{F}_t] = X_t \quad P\text{-a.s.}$$

とは限らないことに注意する.

証明. $m \geqslant 1$ に対して $\{Y_n^{(m)} : n \geqslant 0\}$ を

$$Y_n^{(m)} := X_{\frac{n}{2^m}}$$

と定義する. このとき $\{Y_n^{(m)\}}$ はフィルトレーション $\mathcal{G}_n^{(m)} = \mathcal{F}_{\frac{n}{2^m}}$ に関してマルチンゲールである. よって仮定より, 任意の $m \geqslant 1$ に対して

$$Y_\infty^{(m)} = \lim_{n \to \infty} Y_n^{(m)}, P\text{-a.s.}$$

が存在する. また構成より $m \geqslant 1$ に対して $Y_\infty^{(m)} = Y_\infty^{(m+1)} =: Y$ である. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は右連続であるので

$$Y_\infty^{(m)} = \lim_{t \to \infty} X_t, \quad P\text{-a.s.}$$

となる. 可積分性は定理 7.3.1 と同様. □

定理 9.1.13. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は右連続なマルチンゲールとする. このとき以下は同値になる.

(1) $X_t \to X_\infty$ a.s. かつ L^1.

(2) $\{X_t : t \geqslant 0\}$ は一様可積分. つまり任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $M > 0$ が存在して

$$\sup_{t \geqslant 0} E[|X_t| : |X_t| \geqslant M] < \varepsilon.$$

(3) ある $X \in L^1$ が存在し, $X_t = E[X|\mathcal{F}_t]$ P-a.s.

定理 *9.1.13* の証明. 定理 7.4.8 と同様. □

9.1.2 連続時間マルチンゲールと停止時刻

離散時間マルチンゲールで確認したときに比べて以下の定理の証明は難しい. (実際に使う際に証明を覚えておく必要はあまりない.)

定理 9.1.14. (任意抽出定理) $\{X_t : t \geqslant 0\}$ を右連続な $\{\mathcal{F}_t\}$-劣マルチンゲールとし, S, T を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻で $S \leqslant T$ をみたすとする. $\{X_{T \wedge t} : t \geqslant 0\}$ が一様可積分であるとき,

$$X_S \leqslant E[X_T|\mathcal{F}_S], \quad P\text{-a.s.}$$

が成り立つ.

証明には次のような離散時間後ろ向き劣マルチンゲールの収束定理が用いられる.

命題 9.1.15. $\{\mathcal{G}_n : n \geqslant 0\}$ を部分 σ-加法族で任意の $n \geqslant 0$ に対して $\mathcal{G}_n \supset \mathcal{G}_{n+1}$ をみたすとする. $\{X_n :\neq 0\}$ が $\{\mathcal{G}_n : n \geqslant 1\}$ に関して後ろ向き劣マルチンゲールであるとは, 任意の $n \geqslant 0$ に対して $E[|X_n|] < \infty$, かつ $E[X_n|\mathcal{G}_{n+1}] \geqslant X_{n+1}$, P-a.s. をみたすときをいう. $l = \lim_{n\to\infty} E[X_n] > -\infty$ であるとき, $\{X_n : n \geqslant 0\}$ は一様可積分であり, $\mathcal{G} := \bigcap_{n \geqslant 0} \mathcal{G}_n$-可測な確率変数 X に概収束, および L^1-収束する.

定理 *9.1.14* の証明. $U = S, T$ に対して, 停止時刻 $U^{(n)}$ を

$$U^{(n)}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n}, & \frac{k-1}{2^n} \leqslant U(\omega) < \frac{k}{2^n} \\ \infty, & U(\omega) = \infty \end{cases}$$

で定義する. このとき定理 7.4.15 より, 任意の $A \in \mathcal{F}_{S^{(n)}}$ に対して

$$E[X_{T^{(n)}} : A] \geqslant E[X_{S^{(n)}} : A]$$

となる. 問題 8.5 より $A \in \mathcal{F}_S$ に対しても成り立つことがわかる.

ここで $\{X_{S^{(n)}} : n \geqslant 1\}$ は $\{\mathcal{F}_{S^{(n)}} : n \geqslant 1\}$ に関して後ろ向き劣マルチンゲールであり $E[X_{S^{(n)}}] \geqslant E[X_0]$ である. よって命題 9.1.15 より, $\{X_{S^{(n)}} : n \geqslant 1\}$ は一様可積分であり, X の右連続性より任意の $A \in \mathcal{F}_S$ に対して

$$E[X_{S^{(n)}} : A] \to E[X_S : A]$$

となる. $\{X_{T^{(n)}} : n \geqslant 1\}$ に関しても同様のことが言える. □

問 9.1.16. $-a < 0 < b$ とする. $\tau_{a,b} = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{-a, b\}\}$ とおく. ただし $\inf \varnothing = \infty$ と定義する. このとき $-a < x < b$ に対して $P^x(B_{\tau_{a,b}} = a) = \frac{b}{a+b}$ であることを示せ.

注意 9.1.17. 証明では未確認の性質を使用している. それは "X_T が $\mathcal{F}_T$-可測"という事実である. 離散時間確率過程のときは容易に確認できたが, 連続時間確率過程のときには, 標本関数がすべて右連続であれば成り立つことが知られている (問 9.1.21 および問 9.1.22)

証明には確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ の発展的可測性が用いられる.

系 9.1.18. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ を右連続な $\{\mathcal{F}_t\}$-劣マルチンゲールとし, T を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻とする. $\{X_{T\wedge t} : t \geqslant 0\}$ が一様可積分のとき

$$E[X_T|\mathcal{F}_t] \geqslant X_{T\wedge t}, P\text{-a.s.}$$

である. 特に $\{X_{T\wedge t} : t \geqslant 0\}$ は一様可積分 $\{\mathcal{F}_t\}$-劣マルチンデールである.

証明. $A \in \mathcal{F}_t$ とする. このとき

$$E[X_T : A \cap \{T \leqslant t\}] = E[X_{T\wedge t} : A \cap \{T \leqslant t\}]$$

は明らかであり, また $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T\wedge t}$ である (問題 8.6) ので定理 9.1.14 より,

$$E[X_T : A \cap \{T > t\}] \geqslant E[X_{T\wedge t} : A \cap \{T > t\}]$$

となる.

また後半は T を停止時刻 $T \wedge t$ で置き換えて考えればよい. □

問 9.1.19. $\{X_t : t \geqslant 0\}$ を一様可積分右連続 $\{\mathcal{F}_t\}$-劣マルチンゲールとする. このとき任意の $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻 T に対して $E[X_0] \leqslant E[X_{T\wedge t}] \leqslant E[X_t]$ となることを示せ.

離散時間劣マルチンゲールの分解として Doob 分解 (定理 7.3.14) があった. 右連続劣マルチンゲールに対しても Doob-Meyer 分解と呼ばれる分解が成り立つことが知られているがこの講義ノートでは扱わないことにする. 興味のある人は [8, Chapter 1, Theorem 4.10] などを参照するとよい.

発展的可測性について触れてこの節は終えるが, この講義ノートで出てくる確率過程は基本的に連続な標本関数を持つので, 自然と発展的可測である. したがって, 読み飛ばしても問題はない.

定義 9.1.20. 確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ が**発展的可測**であるとは, 任意の $t \geqslant 0$ に対して $X : [0, t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測になるときをいう.

以下は発展的可測性の定義の書き換えである:

- 任意の $t \geqslant 0$ に対して $[0, t] \times \Omega \ni (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ が可測である.
- 任意の $t \geqslant 0$, 任意の $A \in \mathcal{B}(R)$ に対して, $\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

問 9.1.21. [8, Chapter 1, Proposition 1.13] 確率過程 X が $\{F_t\}$-適合で, 任意の標本関数が右連続であるであるとき X は $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して発展的可測であることを以下の要領で示せ.

(1) $t>0$ を固定する. 任意の $n \geqslant 1$ に対して

$$X_s^{(n)}(\omega)=\begin{cases} X_0(\omega), & s=0 \\ X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega), & \frac{kt}{2^n}<s\leqslant\frac{(k+1)t}{2^n}, k=0,\cdots,2^n-1 \end{cases}$$

とおく. このとき $X^{(n)}:[0,t]\times\Omega\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-可測であることを示せ.

(2) 任意の $(s,\omega)\in[0,t]\times\Omega$ に対して $\lim_{n\to\infty}X_s^{(n)}(\omega)=X_s(\omega)$ を示せ.

問 9.1.22. ([8, Chapter 1, Proposition 2.18] 一部変更) X を発展的可測とし, T を $\{\mathcal{F}_t\}$-停止時刻で任意の ω に対して $T(\omega)<\infty$ であるとする. このとき

$$X_T \text{は } \mathcal{F}_T\text{-可測である} \tag{9.3}$$

ことを以下の要領で示せ.

(1) (9.3) は $\{X_{T\wedge t}:t\geqslant 0\}$ が発展的可測であることと同値であることを示せ.

(2) 任意の $t\geqslant 0$ に対して写像 $[0,t]\times\Omega\ni(s,\omega)\mapsto(T(\omega)\wedge s,\omega)\in[0,t]\times\Omega$ は $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-可測であることを示せ.

(3) (9.3) を示せ.

9.2 L^2-マルチンゲールと 2 次変分過程

確率過程 $\{X_t:t\geqslant 0\}$ が **L^2-マルチンゲール**であるとは,

$$\text{任意の } t\geqslant 0 \text{ に対して } E[X_t^2]<\infty$$

となるときをいう.

連続 L^2-マルチンゲール全体を $\mathcal{M}_2$ と表すことにする.

定理 9.2.1. $\{X_t:t\geqslant 0\}$ が L^2-マルチンゲールのとき, 任意の $0\leqslant s\leqslant t$ に対して

$$E\left[X_t^2-X_s^2|\mathcal{F}_s\right]=E[(X_t-X_s)^2|\mathcal{F}_s]$$

が成り立つ.

これを応用して次のような過程が存在することが示される.

定理 9.2.2. $\{M_t:t\geqslant 0\}$ を L^2-連続マルチンゲールとする. このとき次のような連続な確率過程 $\{\langle M\rangle_t:t\geqslant 0\}$ が一意に存在する.

- $M_t^2-\langle M\rangle_t$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール.
- $\{\langle M\rangle_t:t\geqslant 0\}$ は t に関して単調増加, P-a.s.
- $\langle M\rangle_0=0$, P-a.s.

特に

$$\sum(M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2\xrightarrow{P}\langle M\rangle_t\quad(|\Delta(t)|\to 0)$$

で与えられる. ただし $\Delta(t) = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t\}$ は $[0,t]$ の分割, $|\Delta(t)| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$.
この $\{\langle M\rangle_t : t \geqslant 0\}$ を M の **2 次変分**過程という.

注意 9.2.3. ブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ に対して $\{B_t^2 - t : t \geqslant 0\}$ がマルチンゲールなので $\langle B\rangle_t = t$ となることが一意性からわかる.

注意 9.2.4. $\{\langle M\rangle_t : t \geqslant 0\}$ のように, $[0,\infty)$ 上の単調増加な連続関数 a に対して, $[0,\infty)$ 上の測度 μ_a が存在して

$$\mu_a([0,t]) = a_t$$

と表すことができる. よって可測関数 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^t f(s)d\langle M\rangle_s = \int_0^t f(s)\mu_{\langle M\rangle}(ds)$$

と定義することにする.

定義 9.2.5. $M, N \in \mathcal{M}_2$ とする. このとき

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t}{4}$$

と定義すると

- $M_tN_t - \langle M, N\rangle_t$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール.
- $\langle M, N\rangle_0 = 0$ P-a.s.

となる.

問 9.2.6. $B, \tilde{B}$ を独立な標準ブラウン運動とする. このときほとんど確実に任意の $t \geqslant 0$ に対して $\langle B, \tilde{B}\rangle_t = 0$ であることを示せ.

この節の残りで定理 9.2.2 の証明を行う. ただし最初は読み飛ばしても構わない.

9.2.1 *有界変動過程

まずは有界変動関数の値をとる確率過程に関することを述べておく.

定義 9.2.7. $T > 0$ とする. $a(0) = 0$ をみたす連続関数 $a : [0,T] \to \mathbb{R}$ が**有界変動**であるとは

$$\sup_{\Delta(t)} \sum_{i=1}^{p} |a(t_i) - a(t_{i-1})| < \infty$$

をみたすものをいう. ただし $\Delta(T) = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = T\}$ は $[0,T]$ の分割である.

定義 9.2.8. 確率過程 A が**有界変動過程**であるとは,

$$P(\text{任意の } t > 0 \text{ に対して } [0,t] \text{ 上 } A \text{ が有界変動}) = 1$$

をみたすときをいう.

有界変動関数 f に関して次の定理が成り立つことが知られている.

定理 9.2.9. $a:[0,T]\to\mathbb{R}$ が有界変動であるとき, ある $[0,T]$ 上の測度 μ^+,μ^- が一意に存在して以下をみたす.

- 任意の $t\in[0,T]$ に対して $a(t)=\mu^+([0,t])-\mu^-([0,t])$.
- あるボレル集合 $B_+,B_-\in\mathcal{B}([0,T])$ が存在し $B_+\cap B_-=\varnothing$ かつ $\mu^i([0,T])=\mu^i(B_i)$ $(i\in\{+,-\})$ をみたす.

注意 9.2.10. 定理 9.2.9 の μ^+,μ^- に対して, $[0,T]$ 上の測度 $|\mu|$ を $|\mu|(A)=\mu^+(A)+\mu^-(A)$ で定義する.

また, 有界変動関数 $a:[0,T]\to\mathbb{R}$ と $[0,T]$ 上の可測関数 f で $\int_0^T|f(t)||\mu|(dt)<\infty$ をみたすものに対して,

$$\int_0^t f(s)da(s):=\int_0^t f(s)\mu^+(ds)-\int_0^t f(s)\mu^-(ds)$$
$$\int_0^t f(s)|da(s)|:=\int_0^t f(s)|\mu|(ds)$$

と定義する. このとき連続関数 $f:[0,T]\to\infty$ に対して

$$\int_0^t f(s)da(s)=\lim_{|\Delta(t)|\to 0}\sum_{i=1}^p f(t_{i-1})(a(t_i)-a(t_{i-1}))$$

が成り立つ.

次の定理で有界変動な連続マルチンゲールは定数関数しかないことを確認しておく.

定理 9.2.11. $\{M_t:t\geqslant 0\}$ は $M_0=0$ で連続マルチンゲールで有界変動であるとする. このときほとんど確実に任意の $t\geqslant 0$ に対して $M_t=0$ である.

証明. 有界変動過程 M に対して

$$\tau_n=\inf\left\{t\geqslant 0:\int_0^t|dM_s|\geqslant n\right\}$$

と定義する. このとき問 9.1.11 より τ_n は停止時刻である.

このとき $\{M_{\tau_n\wedge t}:t\geqslant 0\}$ は連続マルチンゲールで

$$|M_{\tau_n\wedge t}|\leqslant\int_0^{\tau_n\wedge t}|dM_s|\leqslant n$$

をみたす.

定理 7.2.26 より任意の $0=t_0<t_1<\cdots<t_p=t$ に対して

$$\begin{aligned}
E\left[|M_{\tau_n\wedge t}|^2\right]&=\sum_{i=1}^p E[(M_{\tau_n\wedge t_i}-M_{\tau_n\wedge t_{i-1}})^2]\\
&\leqslant E\left[\sup_{i=1,\cdots,p}\left|M_{\tau_n\wedge t_i}-M_{\tau_n\wedge t_{i-1}}\right|\sum_{i=1}^p\left|M_{\tau_n\wedge t_i}-M_{\tau_n\wedge t_{i-1}}\right|\right]\\
&\leqslant nE\left[\sup_{i=1,\cdots,p}\left|M_{\tau_n\wedge t_i}-M_{\tau_n\wedge t_{i-1}}\right|\right]
\end{aligned}$$

となる. $\{M_{\tau_n\wedge t} : t \geqslant 0\}$ は連続で有界変動なので, 任意の分割の列 $\{\Delta_n(t) : n \geqslant 1\}$ で

$$\Delta_n(t) \subset \Delta_{n+1}(t) \text{ かつ} |\Delta_n(t)| \to 0 \tag{9.4}$$

となるものに対して

$$\lim_{|\Delta_m(t)|\to 0} E\left[\sup_{i=1,\cdots,p}\left|M_{\tau_n\wedge t_i^m} - M_{\tau_n\wedge t_{i-1}^m}\right|\right] = 0$$

となる. よって $E[M^2_{\tau_n\wedge t}] = 0$ となる. これは $M_{\tau_n\wedge t} = 0$, P-a.s. を意味する. n は任意なので $M_t = 0$, P-a.s. である.

□

このように確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ に対して, X_t に関する何かしらの量が大きくなるような最初の時刻で停止時刻 T を定義し, その停止時刻で止まるような確率過程 $X_{T\wedge t}$ に対して議論を行う手法はしばしば用いられる.

注意 9.2.12. 分割の列 $\{\Delta_n(t) : n \geqslant 1\}$ が (9.4) をみたすとき**増大**であるという.

9.2.2 *2 次変分過程

定理 9.2.2 の証明. $X \in \mathcal{M}_2$ とする. さらに $P(X_0 = 0) = 1$ とする.

(一意性) $M_t^2 = X_t + A_t = X'_t + A'_t$ と 2 通りの表現ができたとする. ただし, X, X' は連続マルチンゲール, A, A' は単調増加過程. このとき $X_t - X'_t = A'_t - A_t$ となるが, これは連続マルチンゲールかつ単調増加なことを意味しているので定理 9.2.11 よりほとんど確実に 0 である.

(存在)

M が有界な場合 ある定数 L が存在し $P(\text{任意の } t \geqslant 0 \text{ に対して} |M_t| \leqslant L) = 1$ とする. $K > 0$ を固定し $[0, K]$ 上で構成する.

$[0, K]$ の分割 $\Delta(K) = 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{p_m} = K$ に関する p 次変動過程を

$$V(\Delta(K))_t^{(p)} = \sum_{i=1}^{p_m}(M_{t_i\wedge t} - M_{t_{i-1}\wedge t})^p$$

と定義する.

最初の目標は, 任意の $t \in [0, K]$ と任意の $[0, t]$ の増大な分割の列 $\Delta_n(t)$ に対して $\left\{V(\Delta_n(K))_t^{(2)} : n \geqslant 1\right\}$ が L^2-コーシー列であることを示すことである. 証明ではもう少し強いことを示す.

$n \geqslant 1$ に対して

$$Z^{(n)}(t) = \sum\left(M_{t_i^{(n-1)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n-1)}\wedge t}\right)^2 - \sum\left(M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t}\right)^2$$

と定義する. このとき

$$Z^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{p_{n-1}} 2\left(M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t}\right)\left(M_{t_{i-1}^n\wedge t} - M_{s_{i-1}^{(n)}\wedge t}\right) =: \sum_{i=1}^{p_{n-1}} \xi_i^{(n)}$$

と書ける. ただし, p_n を ($\Delta_n(K)$ の要素の数 -1), $s_i^{(n)} = \max\{t_k^{(n-1)} : t_k^{(n-1)} \leqslant t_i^{(n)}\}$ とする.

ここで $|\xi_i^{(n)}| \leqslant 4L\left|M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t}\right|$ かつ $E\left[\xi_i^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{i-1}^{(n)}}\right] = 0$ であることに注意すると, $S_m = \sum_{i=1}^m \xi_i^{(n)}$ は離散時間マルチンゲールになる. さらに t に関しても $\{Z^{(n)}(t)\}$ がマルチンゲールになっていることがわかる.

よって Doob の L^p 不等式 (定理 9.1.7) から,

$$E\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant K}\left(Z^{(n)}(t)\right)^2\right]\leqslant 4E\left[\left(Z^{(n)}(K)\right)^2\right]=16E\left[\sum_{i=1}^{p_{n-1}}\left(\left(M_{t_i^{(n)}}\right)^2-\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right)\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}-M_{s_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right]$$

が成り立ち,

$$\sum_{i=1}^{p_{n-1}}\left(\left(M_{t_i^{(n)}}\right)^2-\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right)\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}-M_{s_{i-1}^{(n)}}\right)^2\leqslant 4L^2M_K^2$$
$$\sum_{i=1}^{p_{n-1}}\left(\left(M_{t_i^{(n)}}\right)^2-\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2\right)\left(M_{t_{i-1}^{(n)}}-M_{s_{i-1}^{(n)}}\right)^2\to 0,\quad P\text{-a.s.}n\to\infty$$

なので, 優収束定理より $\lim_{n\to\infty}E\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant K}\left(Z^{(n)}(t)\right)^2\right]=0$ である. これにより連続な確率過程 $\langle M\rangle_t$ に一様収束する (確率収束の意味で). K は任意であったので示せた.

M が有界ではない場合 任意の $L>0$ に対して停止時刻を $T_L=\inf\{t\geqslant 0:|M_t|\geqslant L\}$ と定義する. このとき $\{M_{T_L\wedge t}:t\geqslant 0\}\in\mathcal{M}_2$ であるので, ある確率過程 $\left\{\langle M^{(T_L)}\rangle_t:t\geqslant 0\right\}$ が存在し, 定理 9.2.2 の性質をみたす.

$\{T_L:L\in\mathbb{N}\}$ は単調増加な確率変数列で仮定より $T_L\to\infty$, P-a.s. である. また $M_{T_L\wedge t}^2-\langle M^{T_L}\rangle_t$ に任意抽出定理を適用することで

$$\left\langle M^{T_L}\right\rangle_{T_{L'}\wedge t}=\left\langle M^{T_{L'}}\right\rangle_t,\quad L\geqslant L'$$

が成り立つことがわかる. よって $\{\langle M^{T_L}\rangle_t:L\in\mathbb{N}\}$ は単調増加な確率変数列であるので, $L\to\infty$ とすると極限 $\langle M\rangle_t$ が存在する. 単調増加な連続関数が各点収束するならば一様収束するので, この収束は一様収束である. $E[\langle M\rangle_t]<\infty$ は定義と単調収束定理から容易に示されるので, 定理 9.2.2 が確認できる. □

9.3 問題

以下, $\{B_t:t\geqslant 0\}$ を 1 次元標準ブラウン運動とする.

問題 9.1. 確率過程 $X=\{X_t:t\geqslant 0\}$ を

$$X_t=\int_0^{\sqrt{t}}\sqrt{s}dB_s$$

で定義する. X は標準ブラン運動であることを示せ.

問題 9.2. V_0 を B と独立な確率変数で $V\overset{d}{\sim}N(0,\frac{1}{2})$ とする.

確率過程 $V=\{V_t:t\geqslant 0\}$ を

$$V_t=e^{-t}V_0+\int_0^t e^{-t+s}dB_s$$

で定義する. 以下の問に答えよ.

(1) 任意の $t\geqslant 0$ に対して V_t は正規分布であることを示せ.
(2) $a>0$ とする. 確率過程 $V^{(a)}=\{V_{t+a}:t\geqslant 0\}$ と V は同分布であることを示せ.

問題 9.3. $a>0$ に対して $T_a=\inf\{t:\geqslant 0:B_t\geqslant a\}$ と定義する. このとき任意の $\lambda>0$ に対して

$$E\left[\exp\left(-\lambda T_a\right)\right]=e^{-a\sqrt{\lambda}}$$

となることを示せ. (ヒント: 問 9.1.4)

問題 9.4. 以下の問に答えよ.

(1) 確率過程 $X_t = B_t^2 - t$ が連続マルチンゲールであることを示せ.

(2) $R > 0$ とする. $\tau_R = \inf\{t \geqslant 0 : B_t \in \{-R, R\}\}$ とおく. ただし $\inf \varnothing = \infty$ と定義する. このとき $x \in [0, R]$ に対して $E[\tau_R]$ を R, x を用いて表せ.

問題 9.5. $n \geqslant 1$ に対して

$$X_n = \int_0^{2\pi} \sin(2nt) dB_t$$

と定義する. $\{X_n : n \geqslant 1\}$ は独立同分布同分布であることを示せ.

問題 9.6. $f \in L^2([0, \infty))$ とする. 確率過程

$$X_t = \exp\left(\int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\right)$$

は連続マルチンゲールであることを示せ.

10　確率積分

10.1　確率積分

定義 8.5.4 で定義した

$$I_t(f) = \int_0^t f(s)dB_s$$

は命題 8.5.2 のような性質が成り立つようなものであった.

改めて $I_t(f)$ の満たす性質を書いておく.

命題 10.1.1. f, g: $L^2([0,\infty), dt)$-関数. $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して次が成り立つ.

(i) $I_0(f) = 0$ P-a.s.

(ii) $\{I_t(f)\}$ は L^2-連続マルチンゲール. つまり $E[I_t(f) | \mathcal{F}_s] = I_s(f)$ P-a.s. かつ $\{I_t(f) : t \geqslant 0\}$ は連続, P-a.s.

(iii) $\int_0^t f(s)dB_s \overset{d}{\sim} N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$. 特に $E\left[I_t(f)^2\right] = \int_0^t f(s)^2 ds$.

(iv) $I_t(f) = I_s(f) + I_{[s,t]}(f)$, P-a.s.

(v) $I_t(\alpha f + \beta g) = \alpha I_t(f) + \beta I_t(g)$ P-a.s. ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

注意 10.1.2. $I_t(f) \overset{d}{\sim} N\left(0, \int_0^t f(s)^2 ds\right)$ の性質はここでは注意しないことにする. それは "被積分関数"に相当する部分を確率過程に置き換えたとき, 正規分布になるという性質が失われるのは自然だからである.

ここで命題 10.1.1 を満たすように確率過程 $\{X_t(\omega) : t \geqslant 0\}$ に対して確率積分

$$\int_0^t X_s dB_s$$

を定義していく.

定義 10.1.3. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上にフィルトレーション $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ と, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$ に適合したブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を与えておく.

- **単過程** $X : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ とは, ある $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n < \infty$, $\mathcal{F}_{s_{i-1}}$-可測な確率変数 $\xi_i(\omega) \in L^2(P)$ および $\mathcal{F}_0$-可測な確率変数 $\xi_0 \in L^2(P)$ が存在して

$$X(t,\omega) = \xi_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} 1_{(s_{i-1}, s_i]}(t)\xi_i(\omega) \tag{10.1}$$

と表せるものをいう. 単過程全体を $\mathcal{S}$ と書くことにする.

- $X \in \mathcal{S}$ が (10.1) のように表せているとする．このとき X の B に関する**確率積分**を

$$\int_{[0,\infty)} X(t,\omega)dB_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \int_{[0,\infty)} 1_{(s_{i-1},s_i]}(t)dB_t$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)(B_{s_i - B_{s_{i-1}}})$$

と定義する．
- $t \geqslant 0$ と $X \in \mathcal{S}$ に対して $X1_{[0,t]} \in \mathcal{S}$ である．この $X1_{[0,t]}$ の確率積分を

$$I_t(X) := \int_0^t X(s,\omega)dB_s = \int_{[0,\infty)} X(s,\omega)1_{[0,t]}(s)dB_s$$

と定義する．$I_{[s,t]}(X)$ も同様に $\int_{[0,\infty)} X(u,\omega)1_{[s,t]}(u)dB_u$ で定義する．

補題 10.1.4. 単過程は発展的可測である．

証明．単過程 f が (10.1) の形で書けているとする．このとき $X : [0,t] \times \Omega \to \mathbb{R}$ に対して，$a \in \mathbb{R}$ で

$$\{(t,\omega) : X(t,\omega) \leqslant a\} = (\{0\} \times \{\omega \in \Omega : \xi_0(\omega) \leqslant a\}) \cup \bigcup_{i=1}^{n} ((t_{i-1} \wedge t, t_i \wedge t] \times \{\omega \in \Omega : \xi_i \leqslant a\})$$

となる．命題 1.2.10 より X が発展的可測であることがわかる． □

注意 10.1.5. 命題 10.1.1 は (iii) を除いて単過程の確率積分に対して成立する．また

(iii)′ $0 \leqslant s \leqslant t$ に対して

$$E\left[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X_u^2 du \middle| \mathcal{F}_s\right]$$

となる．実際 $t_i < s \leqslant t_{i+1} \leqslant t_j < t \leqslant t_{j+1}$ に対して

$$I_t(X) - I_s(X) = X_i(B_{t_{i+1}} - B_s) + \sum_{k=i+1}^{j} X_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + X_{t_j}(B_t - B_{t_j})$$

となるので $X_k \in \mathcal{F}_{t_{k-1}}$ なので

$$E\left[X_k X_l (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathcal{F}_s\right] = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ E\left[X_k^2 | \mathcal{F}_s\right](t_{k+1} - t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left[X_k^2 | \mathcal{F}_s\right] ds & k = l \end{cases}$$

となることから従う．

問 10.1.6. 単過程 f に対して命題 10.1.1 の (i), (ii), (iv), (v) が成り立つことを示せ．

問 10.1.7. 単過程 X に対して $\left\{ I_t(X)^2 - \int_0^t X_u^2 du : t \geqslant 0 \right\}$ は連続 $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールであることを示せ．特に $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds$ となることがわかる (定理 9.2.2 参照).

定義 10.1.8. 発展的可測な確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ で, 任意の $T > 0$ に対して

$$E\left[\int_0^T |X_s(\omega)|^2 ds\right] < \infty \tag{10.2}$$

となるものの全体を $\mathcal{L}_2$ と書くことにする.

$X \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\|X\|_T = E\left[\int_0^T |X_s(\omega)|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}, \quad T > 0$$

とし, $X, Y \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\|X - Y\| = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N}(\|X - Y\|_N \wedge 1)$$

とおくと $\|X - Y\| = 0$ は確率過程として X, Y が $\mathcal{L}_2$ の中で同一視できることを意味している.

注意 10.1.9. $\|\cdot\|$ によって $\mathcal{L}_2$ が完備な距離空間になる.

補題 10.1.10. ([8, Chapter 3, Proposition 2.6]) $\mathcal{S}$ は $(\mathcal{L}_2, \|\cdot\|)$ で稠密になる.[*55]

この事実を用いると $X \in \mathcal{L}_2$ に対して確率積分を定義することができる. $X \in \mathcal{L}_2$ に対して, 補題 10.1.10 より $\|X_n - X\| \to 0$ となるような単過程の列 $\{X_n : n \geqslant 1\}$ が存在する. このとき定理 9.1.7 より任意の $T \geqslant 0$, $m, n \geqslant 1$ に対して

$$\begin{aligned} E\left[\max_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_t(X_m) - I_t(X_n)|^2\right] &\leqslant 4E\left[|I_T(X_m - X_n)|^2\right] \\ &= 4\|X_m - X_n\|_T^2 \end{aligned}$$

となるので, ある $I_t(X) \in \mathcal{L}_2$ が存在して

$$E\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_t(X) - I_t(X_n)|^2\right] \to 0 \tag{10.3}$$

となる.

定義 10.1.11. (10.3) で導出された $I_t(X)$ を X のブラウン運動による**確率積分**といい

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dB_s$$

と記述する.

これで $X \in \mathcal{L}_2$ に対して確率積分 $I_t(X)$ が定義できた. 特に次の性質が導ける.

[*55] 単過程が発展的可測なので, その $\|\cdot\|$-近似で与えられる確率過程も発展的可測である.

命題 10.1.12. $X, Y \in \mathcal{L}_2$. $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して次が成り立つ.

(i) $I_0(X) = 0$ P-a.s.

(ii) $\{I_t(X) : t \geqslant 0\}$ は L^2-連続マルチンゲール.

(iii)′ $E\left[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s\right] = \int_s^t X_u^2 du$, P-a.s.

(iv) $I_t(X) = I_s(X) + I_{[s,t]}(X)$, P-a.s.

(v) $I_t(\alpha X + \beta Y) = \alpha I_t(X) + \beta I_t(Y)$, P-a.s. ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

例題 10.1.13. $X_t = B_t$ として確率積分

$$\int_0^t B_s dB_s$$

を考えてみる. 単過程の列 $\{B_t^{(n)}\}$ を

$$B_s^{(n,t)} = \sum_{i=1}^n B_{\frac{(i-1)t}{n}} 1_{(\frac{(i-1)t}{n}, \frac{it}{n}]}(s)$$

と選ぶと

$$E\left[\int_0^t |B_s - B_s^{(n,t)}|^2 ds\right] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\frac{t^2}{n^2} \to 0$$

となるので B_t の $\mathcal{L}_2$ の意味で近似となっている. このとき

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s^{(n,t)} dB_s &= \sum_{i=1}^n B_{\frac{(i-1)t}{n}} (B_{\frac{it}{n}} - B_{\frac{(i-1)t}{n}}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}\left((B_{\frac{it}{n}} + B_{\frac{(i-1)t}{n}}) - (B_{\frac{it}{n}} - B_{\frac{(i-1)t}{n}})\right)(B_{\frac{it}{n}} - B_{\frac{(i-1)t}{n}}) \\
&= \frac{1}{2}B_t^2 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(B_{\frac{it}{n}} - B_{\frac{(i-1)t}{n}})^2
\end{aligned}$$

となる. $n \to \infty$ とすると定理 9.2.2 と注意 9.2.3 から

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(B_{\frac{it}{n}} - B_{\frac{(i-1)t}{n}})^2 \xrightarrow{P} \frac{t}{2} \quad (n \to 0)$$

となるので

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$

となる.

注意 10.1.14. 例題 10.1.13 は

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + t$$

となるが, もし普通の積分のように考えるならば第 2 項 $+t$ は現れることはない. これにより確率積分に対して微分積分学の基本定理は成り立たないことがわかる. つまり

$$f(B_t) = \int_0^t f'(B_s) dB_s$$

は成り立たない.

問 10.1.15. $X, Y \in \mathcal{L}_2$ に対して

$$\left\langle \int_0^{\cdot} X_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t X_s^2 ds, \quad \left\langle \int_0^{\cdot} X_s dB_s, \int_0^{\cdot} Y_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t X_s Y_s ds$$

となることを示せ.

10.2 問題

問題 10.1. $\mathcal{L}_2$ の列 $X^{(1)}, X^{(2)} \cdots$ が以下をみたすとする.

(i) ある $Y \in \mathcal{L}^2$ が存在し, 任意の $n \geqslant 1$ に対して $P($任意の $t \geqslant$ に対して$|X^{(n)}(t)| \leqslant Y(t)) = 1$.
(ii) 任意の $t \geqslant 0$ に対して $X_n(t) \to X(t)$, P-a.s.

このとき任意の $T > 0$ に対して

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \sup \left| \int_0^t X_s^{(n)} dB_s - \int_0^t X_s dB_s \right| \xrightarrow{P} 0$$

となることを示せ.

問題 10.2. $s > 0$, $\{X_t : t \geqslant 0\} \in \mathcal{L}_2$ とする. Z は有界な $\mathcal{F}_s$-可測確率変数とする. このとき任意の $t > s$ に対して

$$\int_s^t Z X_u dB_u = Z \int_s^t X_u dB_u$$

であることを示せ.

11　伊藤の公式

11.1　伊藤の公式

例題 10.1.13 からもわかるように確率積分を計算するのは非常に難解である．そこで関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に対して $f(B_t)$ と確率積分の関係 $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ の関係をみていく．

次の伊藤の公式がそれを与える．確率論において非常に重要な定理である．

定理 11.1.1. **(伊藤の公式)** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は 2 回連続微分可能な関数で，ある $t>0$ に対して

$$E\left[\int_0^t f'(B_s)^2 ds\right] < \infty$$

となるものとする．このときほとんど確実に任意の $0 \leqslant s \leqslant t$ で

$$f(B_s) = f(B_0) + \int_0^s f'(B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^s f''(B_u)du$$

が成り立つ．

例題 11.1.2. $B_t^3 = B_0^3 + 3\int_0^t B_s^2 dB_s + 3\int_0^t B_s ds$ となる．

証明．f は 2 回連続微分可能なので閉区間 $[-M,M]$ において

$$\sup_{\substack{x,y\in[-M,M]\\|x-y|<\delta}} |f''(x)-f''(y)| \leqslant \omega(\delta,M)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(\delta,M) = 0$$

となる定数 $\omega(\delta,M)>0$ が存在する．テイラーの定理を用いると $x,y\in[-M,M]$, $|x-y|<\delta$ に対して

$$\left|f(y)-f(x)-f'(x)(y-x)-\frac{1}{2}f''(x)(y-x)^2\right| \leqslant \omega(\delta,M)(y-x)^2$$

となる．

ブラウン運動は確率 1 で連続なので $M_B = \sup_{0\leqslant s\leqslant t}|B_s|$ とおくと，

$$\left|f(B_t)-f(B_s)-f'(B_s)(B_t-B_s)-\frac{1}{2}f''(B_s)(B_t-B_s)^2\right| \leqslant \omega(\delta,M_B)(B_t-B_s)^2$$

となる．ここで $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=t$ で区間 $[0,t]$ を分割する．$\delta_B = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|B_{t_{i+1}}-B_{t_i}|$ とおくと

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(B_{t_{i+1}})-f(B_{t_i})-f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})-\frac{1}{2}f''(B_{t_i})(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega(\delta_B,M_B)(B_{t_{i+1}}-B_{t_i})^2$$

が得られる．明らかに

$$f(B_t)-f(B_0) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(f(B_{t_{i+1}})-f(B_{t_i})\right)$$

で，確率積分の構成法を思い出すと

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}) = \int_0^t f_n(s,B)dB_s$$

となる. ただし $f_n(s,B) = f'(B_{t_i})1_{(t_i,t_{i+1}]}(s)$ は単過程になっている. よって適切な部分列を選ぶとほとんど確実に

$$\sum_{i=0}^{n-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \int_0^t f_n(s,B)dB_s \to \int_0^t f'(B_s)dB_s$$

が成り立つ. あとは次の補題を用いると証明ができる. □

補題 11.1.3. f を連続関数とし, $t > 0$ に対して $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$ という分割を考える. このとき

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow{P} \int_0^t f(B_s)ds$$

となる.

証明. 証明は少し技術的である.

$M > 0$ に対して停止時刻 $R_M = \inf\{t \geqslant 0 : |B_t| \geqslant M\}$ を考える. このとき $R_M \xrightarrow{P} \infty$ となることに注意する. リーマン積分の定義を思い出すと

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{t_j \wedge R_M})(t_{j+1} \wedge R_M - t_j \wedge R_M) \xrightarrow{P} \int_0^{t \wedge R_M} f(B_s)ds$$

となることがわかる. よって

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{t_j} \wedge R_M)\left((B_{t_{j+1}\wedge R_M} - B_{t_j \wedge R_M})^2 - (t_{j+1} \wedge R_M - t_j \wedge R_M)\right)\right)^2\right] = 0$$

が示せれば十分. $\{B_t^2 - t : t \geqslant 0\}$ のマルチンゲール性を考えると

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{t_j} \wedge R_M)\left((B_{t_{j+1}\wedge R_M} - B_{t_j \wedge R_M})^2 - (t_{j+1} \wedge R_M - t_j \wedge R_M)\right)\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{n-1} f(B_{t_j \wedge R_M})^2\left((B_{t_{j+1}\wedge R_M} - B_{t_j \wedge R_M})^2 - (t_{j+1} \wedge R_M - t_j \wedge R_M)\right)^2\right] \end{aligned}$$

となる. f の $[-M, M]$ 上での有界性を用いると上から

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(E\left[(B_{t_{j+1}\wedge R_M} - B_{t_j \wedge R_M})^4\right] + (t_{j+1} \wedge R_M - t_j \wedge R_M)^2\right)$$

の定数倍で抑えられる.

$$E\left[(B_{t_{j+1}\wedge R_M} - B_{t_j \wedge R_M})^4\right] \leqslant 3(t_{j+1} - t_j)^2$$

となることから証明できた. □

この証明をもう少し拡張すると次のようなものが得られる.

定理 11.1.4. $\{Y_t : t \geqslant 0\}$ は $\mathcal{F}_t$-可測な $\mathbb{R}^n$-値な確率過程で各成分が t に関して微分可能と仮定する.

関数 $f(x,y)(f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ は $\partial_{x_i x_j} f(x,y)$, $\partial_{y_k} f(x,y)$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n)$ が連続となるもので, ある $t \geqslant 0$ に対して

$$E\left[\int_0^t |\nabla_x f(B_s, Y_s)|^2 ds\right] < \infty \tag{11.1}$$

となるようなものとする. このときほとんど確実に, 任意の $0 \leqslant s \leqslant t$ に対して

$$f(B_s, Y(s)) = f(B_0, Y_0) + \int_0^s \nabla_x f(B_u, Y_u) \cdot dB_u + \int_0^s \nabla_y f(B_u, Y_u) \cdot dY_u + \frac{1}{2}\int_0^s \Delta_x f(B_u, Y_u) du$$

ただし $\{B_t : t \geqslant 0\}$ は m 次元ブラウン運動である.

例題 11.1.5. $f(t,x) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ とすると $\partial_t f(t,x) = -\frac{\lambda^2}{2} e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$, $\partial_x f(t,x) = \lambda e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$, $\partial_{xx} e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}} = \lambda e^{\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}}$ なので

$$\begin{aligned} e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} &= 1 + \int_0^t \lambda e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} dB_s - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2 e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} ds \\ &= 1 + \int_0^t \lambda e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} dB_s \end{aligned}$$

となる.

問 11.1.6. $f(x,y) = x^2 y$ とおく. $Y_t = \int_0^t B_s ds$ に対して

$$X_t = f(B_t, Y_t)$$

としたとき, X に対して定理 11.1.4 を適用せよ.

伊藤の公式を適用すると $f(B_t, Y_t)$ は「確率積分 (マルチンゲール)」+「微分可能な確率過程」となることがわかる.

このように "L^2-連続マルチンゲール M_t" と "微分可能な確率過程 A_t" を用いて

$$X_t = x_0 + M_t + A_t$$

で表される確率過程を**連続セミマルチンゲール**という.[*56] このような $\mathbb{R}$-値連続セミマルチンゲールに対して

$$dX_s = dM_s + dA_s \qquad d\langle X\rangle_s = d\langle M\rangle_s \tag{11.2}$$

と書くことにする.

このようなセミマルチンゲールに対しても確率積分や伊藤の公式が成り立つ. (詳しくは第 13 節で扱う.)

定理 11.1.7. $X_t = (X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(d)})$ を d 次元連続セミマルチンゲールとする. このとき関数 $f(x,y)(f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R})$ は $\partial_t f(t,x)$, $\partial_{x_i x_j} f(t,x)$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d)$ が連続となるもので, ある $t \geqslant 0$ に対して

$$E\left[\int_0^t \sum_{i=1}^d |\partial_{x_i} f(s, M_t)|^2 d\langle M^{(i)}\rangle_t\right] < \infty$$

[*56] 正確な定義とは異なる.

となるようなものとする. このときほとんど確実に $0 \leqslant s \leqslant t$

$$
\begin{aligned}
f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \nabla_x f(s, X_s) \cdot dM^s + \int_0^t \nabla_x f(s, X_s) \cdot dA^s + \int_0^t \partial_t f(s, X_s) ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i x_j} f(s, X_s) d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_s
\end{aligned}
$$

となる.

注意 11.1.8. d 次元ブラウン運動 $\{(B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(d)}) : t \geqslant 0\}$ に対して

$$
dB_t^{(i)} dB_t^{(j)} = \begin{cases} dt, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad dt dB_t^{(i)} = dB_t^{(i)} dt = dt dt = 0, \quad i = 1, \cdots, d
$$

という関係式を導入し, r 次元セミマルチンゲール $X_t^{(j)} = x_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^d a_s^{(i,j)} dB_s^{(i)} + \int_0^t b_s^{(i)} ds (j = 1, \cdots, r)$ に関する伊藤の公式を $f(X_t)$ に適用すると

$$
df(X_t) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f(X_t)}{\partial x_j} dX_t^{(j)} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^r \frac{\partial^2 f(X_t)}{\partial x_j \partial x_k} dX_t^{(j)} dX_t^{(k)}
$$

と表せ, 2 次のテイラー展開の形が現れている.

例題 11.1.9. $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を 1 次元標準ブラウン運動とし, 確率過程 $X_t = (x + B_t)^2$ に伊藤の公式を適用すると

$$
B_t^2 = x^2 + 2 \int_0^t (x + B_s) dB_s + t
$$

となる. このとき $e^{i\theta X_t} (\theta \in \mathbb{R})$ に対して定理 11.1.7 を適用すると

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta X_t} &= e^{i\theta x^2} + i\theta \int_0^t e^{i\theta X_s} dX_s - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t e^{i\theta X_s} d\langle X \rangle_s \\
&= e^{i\theta x^2} + 2i\theta \int_0^t e^{i\theta X_s} (x + B_s) dB_s + 2i\theta \int_0^t e^{i\theta X_s} (x + B_s) ds - \frac{\theta^2}{2} \int_0^t 4 e^{i\theta X_s} (x + B_s)^2 ds
\end{aligned}
$$

となる.

例題 11.1.10. X, Y を連続セミマルチンゲールとする. このとき

$$
X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t
$$

となる.

例題 11.1.11. [8, Proposition 3.5.12]**Novikov 条件**連続 L^2-マルチンゲール M_t が $E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right)\right] < \infty$ となるとき $e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t}$ がマルチンゲールになる.

11.2 ブラウン運動の特徴づけ

定理 11.2.1. [8, Theroem 2.3.16] 確率過程 $X=(X^{(1)},\cdots,X^{(d)})$ は $\mathbb{R}^d$-値な $\mathcal{F}_t$-適合かつ連続であるとする.

$$M_t = X_t - X_0, \quad t \geqslant 0$$

が連続なマルチンゲールで

$$\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = \delta_{ij} t, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant d$$

となるとき, X は $\mathcal{F}_t$-可測なブラウン運動になる.

証明. 連続過程であることは仮定されているので, 証明は独立増分性, 増分の正規分布性, 各成分ごとの分散を調べればよい.

このためには特性関数の性質から

$$E\left[e^{i(u,X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)} \quad u \in \mathbb{R}^d, \quad P\text{-a.s.}$$

となることを示せば十分.

$f(x)=e^{i(u,x)}$ に対して伊藤の公式を適用すると

$$f(X_t-X_s) = f(0) + \int_s^t \sum_{j=1}^d iu_j e^{i(u,X_u-X_s)} dM_u^{(j)} - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^d \int_0^t u_j u_k e^{i(u,X_u-X_s)} d\langle M^{(j)}, M^{(k)}\rangle_u.$$

$A \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$E[f(X_t-X_s)1_A] = P(A) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_s^t u_j^2 E[f(X_u-X_s)1_A]du$$

となるのでこれを解くと

$$E[f(X_t-X_s)1_A] = P(A)e^{-\frac{1}{2}\|u\|^2(t-s)}$$

が得られる.

□

11.2.1 Bessel 過程

ここでは定理 11.2.1 の応用として Bessel 過程と呼ばれる確率過程に関して述べる.

定義 11.2.2. $r \geqslant 0$ を出発する d 次元 Bessel 過程 $R=\{R_t : t \geqslant 0\}$ とは, $x \in \mathbb{R}^d$ $(|x|=r)$ を出発する d 次元ブラウン運動 $B_t=(B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(d)})$ を用いて

$$R_t = |B_t| = \sqrt{\sum_{i=1}^d \left(B_t^{(i)}\right)^2}$$

で与えられるもののことをいう.

問 11.2.3. $x,y \in \mathbb{R}^d$ とする. このときある d 次元直交行列が存在し, $y=Qx$ と書ける. 以下のことを示せ.

- $\tilde{B}_t = QB_t$ と定義すると, $\tilde{B}$ は y を出発するブラウン運動であることを示せ.
- 定義 11.2.2 の定義は $x \in \mathbb{R}^d$ ($|x| = r$) の選び方に依存しないことを示せ.

定理 11.2.4. $d \geqslant 2, r \geqslant 0$ とする. r を出発する d 次元 Bessel 過程 R は

$$R_t = r + \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + W_t, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{11.3}$$

をみたす. ただし $W = \{W_t : t \geqslant 0\}$ は

$$W_t = \sum_{i=1}^d W_t^{(i)} = \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s} dB_s^{(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant d \tag{11.4}$$

で与えられる標準 1 次元ブラウン運動である.

証明. $\{t \geqslant 0 : R_t = 0\} \subset \{t :\geqslant 0 : B_t^{(1)}\}$ であることに注意する. Fubini の定理から

$$E\left[\int_0^\infty 1\{t :\geqslant 0 : B_t^{(1)} = 0\} dt\right] = \int_0^\infty P(B_t^{(1)} = 0) dt = 0$$

となるので, ほとんど確実に $\{t \geqslant 0 : R_t = 0\}$ はルベーグ測度 0 の集合である. よって (11.3) の右辺の積分が意味をもつことがわかる.

また各 $\{W_t^{(i)} : t \geqslant 0\}$ は連続 2 乗可積分マルチンゲールである. 実際

$$E\left[\left(\int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s} dB_s^{(i)}\right)^2\right] = E\left[\int_0^t \frac{\left(B_s^{(i)}\right)^2}{R_s^2} ds\right] \leqslant t$$

であり, さらに

$$\begin{aligned} \left\langle W^{(i)}, W^{(j)} \right\rangle_t &= \int_0^t \frac{B_s^{(i)} B_s^{(j)}}{R_s^2} d\left\langle B^{(i)}, B^j \right\rangle_s \\ &= \begin{cases} \int_0^t \int_0^t \frac{\left(B_s^{(i)}\right)^2}{R_s^2} ds, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

となるので

$$\langle W \rangle_t = t$$

となり, 定理 11.2.1 より B が標準 1 次元ブラウン運動であることがわかる.

等式 (11.3) の証明は省略し, ここでは直感的な説明にとどめる. 詳しくは [8, Chapter 3, Proposition 3.21] を参照.

伊藤の公式を $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}$ に "形式的に" 適用すると

$$\begin{aligned} R_t = f(B_t) &= r + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s^{(i)}) dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(B_s) d\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle_s \\ &= r + \int_0^t \sum_{i=1}^d \frac{B_s^{(i)}}{R_s} dB_s^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \left(\frac{1}{R_s} - \frac{\left(B_s^{(i)}\right)^2}{R_s^3}\right) ds \end{aligned}$$

となることから従う. □

注意 11.2.5. f が原点で 2 回連続微分可能でない点に注意する. つまり実は伊藤の公式をそのまま適用することはできない.

注意 11.2.6. (11.3) の自然数 d を $\delta \in (0,\infty)$ に置き換えたものを考えることができる. これを δ 次元 Bessel 過程と呼ぶ. [*57]

11.3 問題

問題 11.1. 以下の確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ に対して伊藤の公式を適用せよ. ただし $\{B_t : t \geqslant 0\}$ は標準ブラウン運動とする.

(1) $X_t = B_t^2$ (2) $X_t = \cos B_t$ (3) $X_t = \sqrt{B_t^2+1}$

問題 11.2. 以下の確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ に対して伊藤の公式を適用せよ. ただし $B = \{B_t = (B_t^{(1)},\ldots,B_t^{(d)}) : t \geqslant 0\}$ は d 次元標準ブラウン運動とする.

(1) $X_t = \cos\left(B_t^{(1)} + B_t^{(2)}\right)$ (2) $X_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{d}\left(B_t^{(i)}\right)^2 + 1}$ (3) $X_t = \left(\sum_{i=1}^{d}\left(B_t^{(i)} + \int_0^t B_s^{(i)} ds\right)\right)^2$

問題 11.3. ϕ を $\mathbb{R}$ 上の 2 回連続微分可能な関数とする. $a \in R$ に対して確率過程 $X_t = B_t + at$ を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 確率過程 $Y_t = e^{pX_t+qt}$ がマルチンゲールになるような定数 p,q がみたす条件を与えよ.
(2) $a > 0$ とする. $b \in \mathbb{R}$ に対して $\tau_b = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant b\}$ とおく. $b > 0, \lambda > 0$ に対して $E[e^{-\lambda\tau_b}]$ を b, λ を用いて与えよ. (Hint:(1) の p,q に対して $p > 0$ ならば $E[\exp(pb - q\tau_b) : \tau_b < \infty] = 1$ を示す.)
(3) $a > 0$ とする. $b < 0$ に対して $P(\tau_b < \infty)$ を a,b を用いて表せ.

問題 11.4. フィルター付き確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)},P)$ 上で定義された標準ブラウン運動 B を考える. $T > 0$ に対して

$$D([0,T]) = \{F \in C([0,T]) : \text{ある } f \in L^2([0,T]) \text{ が存在して } F(t) = \int_0^t f(s)ds\}$$

とおく. $F = \int_0^{\cdot} f(s)ds \in D([0,T])$ に対して,

$$Q_T(A) := E\left[\exp\left(\int_0^T f(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T f(s)^2 ds\right) : A\right], A \in \mathcal{F}$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(1) Q_T は $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]})$ 上の確率測度であることを示せ.
(2) 確率過程 X を $X_t = B_t - F(t)$ と定義する. このとき Q_T の下で X は標準ブラウン運動であることを示せ. (Hint: $E_Q[e^{i\theta X_t}]$ がみたす微分方程式を考える.)

[*57] Makoto Katori: Bessel Processes, Schramm-Loewner Evolution, and the Dyson Model, Springer briefs in mathematical physics ; v. 11 2015

12 確率微分方程式

12.1 確率微分方程式

パラメータ t の関数 y に対して

$$\frac{dy(t)}{dt} = b(y(t))$$

となるような常微分方程式を考える. このような常微分方程式は物理現象などの記述に現れる.

しかし実際の観測データには "ノイズ"が含まれる. このようなノイズを含む "微分方程式"を考えてみよう. それは

$$dy_t = b(y_t)dt + \sigma(y_t)dB_t$$

という形で与えられる. この微分方程式の解のもう少し正確な意味は

$$y_t = y_0 + \int_0^t b(y_s)ds + \int_0^t \sigma(y_s)dB_s$$

をみたす確率過程 $\{y_t : t \geqslant 0\}$ を見つけることである.

しかし確率論においては確率過程が存在する確率空間なども含めて解を考えることになる.

定義 12.1.1. $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 σ, b に対して**確率微分方程式 (SDE)**

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt \tag{$E(\sigma, b)$}$$

の解 $E(\sigma, b)$ は次の 3 つ組からなる:

- フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, P)$ (フィルトレーションは完備とする.)
- $\{\mathcal{F}_t\}$-可測な 0 出発のブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$.
- $\mathcal{F}_t$-適合な連続な確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ で

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \tag{SDE}$$

  をみたすもの.

$X_0 = x$ のとき $E_x(\sigma, b)$ と書くことにする.

注意 12.1.2. 定義にも書いているように, 最初にブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ が与えられていて, そこから ($E(\sigma, b)$) をみたす $\{X_t : t \geqslant 0\}$ を見つけるということでは**ない**. ブラウン運動もあわせて見つけることが解くための条件である.

次に解の存在, 一意性について述べておく.

定義 12.1.3. 確率微分方程式 ($E(\sigma, b)$) に対して

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $E_x(\sigma, b)$ の解が存在するとき **(弱い解が存在)** するという.

- 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $E_x(\sigma, b)$ の任意の解が同じ分布をもつとき弱い解が存在し, **弱い意味で一意**であるという.
- フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, P)$ と $\{\mathcal{F}_t\}$-可測な 0 出発のブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を固定したとき, (SDE) をみたす X, X' に対して $P(X_t = X'_t, t \geqslant 0) = 1$ が成り立つとき**道ごとの一意性**が成り立つという. さらに $\{X_t : t \geqslant 0\}$ がブラウン運動 $\{B_t : t \geqslant 0\}$ によって生成される完備化されたフィルトレーション $\{\mathcal{F}^B_t : t \geqslant 0\}$-可測なとき X は**強い解**という.

注意 12.1.4. 強い解 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ の大まかな意味はある可測関数 $F : \mathbb{R} \times C([0,\infty)) \to C([0,\infty))$ で各 $t \geqslant 0$ に対して $\sigma[C([0,t])]$-可測となるものが存在して $X_t = F(x, B)_t$ と表せる (ブラウン運動の関数となる) ことを意味している. すると強い解の一意性はこの F が一意に定まるということになる.

ここで SDE の解の存在と一意性に関する基本的な定理を述べておく.

定理 12.1.5. **(山田-渡辺の定理** [7, Chapter IV Theorem 1.1]**)** 確率微分方程式 ($E(\sigma, b)$) に対して, 弱い解が存在し, 道ごとの一意性が成り立つとき弱い一意性も成り立ち, さらに強い解が一意に存在する.

注意 12.1.6. 定理 12.1.5 の本来の主張は次のようになる.

(一意の強い解)⇔(弱い解)+(道ごとの一意性)⇒(一意の弱い解)

定理 12.1.5 の証明は省略する.

定理 12.1.7. ある定数 $K > 0$ が存在して, 任意の $t \geqslant 0, x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant K|x-y|$$
$$|b(t,x) - b(t,y)| \leqslant K|x-y|$$
$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leqslant K(1+|x|^2)$$

が成り立つとき, ($E(\sigma, b)$) の強い解の存在と一意性が成り立つ.

定理 12.1.7 の証明はこの節の終わりに与える.

例題 12.1.8. $b, \sigma \in \mathbb{R}$ を定数とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して確率微分方程式

$$X_t = x + \int_0^t bX_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

を考える. このとき強い解が一意に存在し,

$$X_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t + bt\right) \tag{12.1}$$

である.

注意 12.1.9. 強い解の存在が保証されていれば, 確率空間やブラウン運動, フィルとレーションは最初から与えられているものとして一般的に記述が省略される.

証明. SDE をみると $b(t,X_t)=bX_t, \sigma(t,X_t)=\sigma X_t$ であるので定理 12.1.7 の条件をみたすことから強い解が存在し一意であることがわかる. また (12.1) に伊藤の公式を適用すると

$$\begin{aligned}X_t &= x+\int x\sigma\exp\left(\sigma B_t-\frac{\sigma^2}{2}t+bt\right)dB_t\\&\quad+\int_0^t x\left(-\frac{\sigma^2}{2}+b\right)\exp\left(\sigma B_t-\frac{\sigma^2}{2}t+bt\right)dt+\frac{1}{2}\int_0^t x\sigma^2\exp\left(\sigma B_t-\frac{\sigma^2}{2}t+bt\right)dt\end{aligned}$$

となり, 整理すると SDE をみたすことがわかる. □

問 12.1.10. $b\in\mathbb{R}$ を定数とする. $x\in\mathbb{R}$ に対して確率微分方程式

$$X_t=x+\int_0^t bX_s ds+B_t$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) 強い解が一意に存在することを示せ.
(2) $X_t=\exp(bt)\,x+\int_0^t\exp(b(t-s))\,dB_s$ が解であることを示せ.

注意 12.1.11. $a>0$ に対して確率微分方程式

$$dX_t=|X_t|^a dB_t$$

を考えると $a\geqslant\frac{1}{2}$ のとき強い解の存在, 一意性があること, $0<a<\frac{1}{2}$ のとき解の一意性がないことが知られている.

注意 12.1.12. 微分方程式 $\frac{dy_t}{dt}=|y_t|^a$ では $0<a<1$ のとき解は一意ではない.

またこの講義ノートの内容では扱っていないが, 次のような結果が知られている.

例題 12.1.13. 確率微分方程式

$$X_t=\int_0^t \mathrm{sgn}(X_s)dB_s$$

ただし, $\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ に対して弱い解の存在と一意性が成り立つが, 道ごとの一意性が成り立たない. さらに強い解が存在しないことも証明されている.

注意 12.1.14. 弱い解の分布はブラウン運動になる.

問 12.1.15. 確率過程 $\{X_t : t\geqslant 0\}$ を $X_t=\int_0^t e^{-s}dB_s$ と定義する. X がみたす確率微分方程式を与えよ.

例題 12.1.16. **(ブラック-ショールズの公式)** $\sigma>0, \mu\in\mathbb{R}$ に対して確率微分方程式

$$dS_t=\sigma S_t dB_t+\mu S_t dt \tag{12.2}$$

を考える. このとき

$$S_t=S_0\exp\left(\sigma B_t-\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\mu\right)t\right)$$

は確率微分方程式の解となる.

(12.2) はブラック-ショールズの公式において株価を記述する確率微分方程式として用いられる.

このように株価が変動するとして, オプション (特定の時刻 T で商品を特定の価格 $K > 0$ で売る (買う) 権利) の適切な価格を求めるのが 1 つの目的でである.

特別な場合には強い解を具体的に求めることができる.

定理 12.1.17. [8, Proposition 5.5.21] $\sigma \in C^2(\mathbb{R})$ は σ', σ'' が有界で, b は Lipschitz 連続と仮定したとき, 確率微分方程式

$$X_t = \xi + \int_0^t \left((b(X_s) + \frac{1}{2}\sigma(X_s)\sigma(X_s)') \right) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s$$

は

$$X_t(\omega) = u(B_t(\omega), Y_t(\omega)), \quad 0 \leqslant t < \infty, \omega \in \Omega \tag{12.3}$$

と表せる. ただし $u(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は常微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(u), u(0,y) = y$$

の解, Y は常微分方程式

$$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = \frac{1}{\partial_y u(B_t(\omega), Y_t(\omega))} b(u(B_t(\omega), Y_t(\omega))), \quad Y_0(\omega) = \xi(\omega)$$

の解である.

注意 12.1.18. (12.3) となるような u, Y が存在すると仮定すると, u, Y のみたすべき微分方程式は自然に決まる.

問 12.1.19. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して確率微分方程式

$$X_t = x - \int_0^t \cos^3 X_s \sin X_s ds + \int_0^t \cos^2 X_s dBs$$

の解を求めよ.

ここまで確率微分方程式は 1 つのブラウン運動で駆動されるものを考えてきたが, 次のように複数のブラウン運動で駆動されるものを考えることもできる.

定義 12.1.20. $r, d \in \mathbb{N}$ とする. 可測関数 $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to M_{d,r}(\mathbb{R})$ に対して**確率微分方程式**

$$dX_t = \sigma(t, X_t) dB_t + b(t, X_t) dt \tag{$E(\sigma,b)_{d,r}$}$$

$$\overset{def}{\Leftrightarrow} dX_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{r} \sigma(t, X_t)_{i,j} dB_t^{(j)} + b_i(t, X_t) dt, \quad i = 1, \cdots, d$$

の解とは, 次の 3 つ組からなる:

- フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,\infty)}, P)$ (フィルトレーションは完備とする.)

- $\{\mathcal{F}_t\}$-可測な 0 出発の r 次元ブラウン運動 $\{B_t = (B_t^{(1)}, \cdots, B_t^{(r)}) : t \geqslant 0\}$.
- $\mathcal{F}_t$-適合な連続な確率過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ で任意の $i = 1, \cdots, d$ に対して

$$X_t^{(i)} = X_0^{(i)} + \int_0^t \sum_{j=1}^r \sigma(s, X_s)_{i,j} dB_s^{(j)} + \int_0^t b(s, X_s)_i ds \qquad (\mathrm{SDE}_{d,r})$$

をみたすもの.

定理 12.1.5 や定理 12.1.7 は仮定を適切に修正すれば同様の証明ができる.

定理 *12.1.7* の証明. (一意性) ブラウン運動 B を固定し, X, X' を ($E(\sigma, b)$) の強い解で $X_0 = X'_0$ となるものとする.

$M > 0$ に対して停止時刻

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : |X_t| \geqslant M \text{ または} |X'_t| \geqslant M\}$$

を導入する.

このとき任意の $t > 0$ に対して

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s) ds$$

と書ける. $X'_{t\wedge\tau}$ に対しても同様である. $T > 0$ を固定し差を考えると, 任意の $t \leqslant T$ に対して

$$\begin{aligned}
&E\left[(X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau})^2\right] \\
&\leqslant 2E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)) dB_s\right)^2\right] + 2E\left[\left(\int_0^{t\wedge\tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s)) ds\right)^2\right] \\
&\leqslant 2E\left[\int_0^{t\wedge\tau} (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s))^2 ds\right] + 2TE\left[\int_0^{t\wedge\tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds\right] \\
&\leqslant 2K^2(1+T)E\left[\int_0^{t\wedge\tau} (X_s - X'_s)^2 ds\right] \\
&\leqslant 2K^2(1+T)E\left[\int_0^t (X_{s\wedge\tau} - X'_{s\wedge\tau})^2 ds\right]
\end{aligned}$$

となるが, Gronwall の不等式より $E[(X_{t\wedge\tau} - X'_{t\wedge\tau})^2] = 0$ となる. $M \to \infty$ とすると $\tau \to \infty$ なので証明できた.

(存在) Picard 近似を用いる.

次のように確率過程の列 $\{X^n\}$ を構成する.

- $X_t^0 = x$.
- $X_t^1 = x + \int_0^t \sigma(s, x) dB_s + \int_0^t b(s, x) ds$.
- $X_t^{n+1} = x + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^n) ds$.

$T > 0$ を固定し, $t \in [0, T]$ に対して

$$g_n(t) = E\left[\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2\right]$$

とおく. このとき $g_1(t) \leqslant g_1(T) \leqslant C_T$ $(t \in [0, T])$ となる定数 C_T が存在する.

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds$$

であるので Doob の不等式を用いると

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(t) &\leqslant 2E\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u\right|^2\right] + 2E\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|\int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))ds\right|^2\right] \\
&\leqslant 8E\left[\int_0^t (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))^2 du\right] + 2TE\left[\int_0^t (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))^2 ds\right] \\
&\leqslant (8+2T)K^2 E\left[\int_0^t (X_u^n - X_u^{n-1})^2 du\right] \\
&\leqslant (8+2T)K^2 E\left[\int_0^t \sup_{0\leqslant r\leqslant u} |X_r^n - X_r^{n-1}|^2 du\right] \\
&= (8+2T)K^2 \int_0^t g_n(u)du
\end{aligned}$$

となる. これより

$$g_n(t) \leqslant C_T((8+2T)K^2)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

が得られる. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(T)^{1/2} < \infty$ より

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_s^{n+1} - X_s^n|\right] < \infty$$

となるので

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |X_s^{n+1} - X_s^n| < \infty, \quad P\text{-a.s.}$$

が従う. よって

$$X_t^n = X_t^0 + \sum_{i=1}^{n}\left(X_t^i - X_t^{i-1}\right)$$

が一様収束することがわかる. $\{X^n\}$ の $[0, T]$ 上の一様収束極限を X と表す. 構成法より $\mathcal{F}_t$-適合であることもわかる.

あとはこの X が $(E(\sigma, b))$ の解となっていることを示すだけであるが, これには

$$\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X_s^n))dB_s\right) \xrightarrow{P} 0$$
$$\left(\int_0^t (b(s, X_s) - b(s, X_s^n))ds\right) \xrightarrow{P} 0$$

となることを用いれば容易にわかる.

□

問 12.1.21. 定義 12.1.20 で考えている多次元の確率微分方程式に対して定理 12.1.7 の仮定を適切に修正し主張を証明せよ.

注意 12.1.22. (Gronwall の不等式) $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ がある連続関数 a, b に対して

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t b(s)u(s)ds$$

をみたすとする. b が非負関数であるとき

$$u(t) \leqslant a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(r)dr\right) ds$$

が成り立つ.

12.2 Feynman-Kac の公式

確率微分方程式と偏微分方程式の解の関係を考えてみる.

次のような確率微分方程式

$$dX_t^{(i)} = a^{(i)}(X_t)dt + \sum_{k=1}^n b^{(i,k)}(X_t)dB_t^{(k)} \quad i = 1, \cdots, d \tag{12.4}$$

が弱い解を持ち一意とする. このとき

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E[f(X_t)] - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{E[f(X_t)] - E[f(X_0)]}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

が成り立つような f の集合を D_A と表すことにする.

ここで簡単のために a, b の各成分は有界と仮定しておく.

定理 12.2.1. $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ のとき $f \in D_A$ であり

$$Af(x) = \sum_{i=1}^d a^{(i)}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \left(bb^T\right)^{(i,j)}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \tag{12.5}$$

となる.

注意 12.2.2. X_t がブラウン運動の時 $A = \frac{1}{2}\Delta$ となる.

証明. $f(X_t)$ に対して伊藤の公式を適用し, 期待値を求めると証明できる. □

定理 12.2.3. $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ とする. (12.4) の解 X_t に対して

$$u(t,x) = E_x\left[f(X_t)\right]$$

とおくと任意の $t > 0$ に対して $u(t, \cdot) \in D_A$ であり

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = Au(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

が成り立つ.

これによりブラウン運動を用いて熱方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

の解が $E_x[f(B_t)]$ で表されることがわかった. さらにブラウン運動の場合分布関数がよくわかっているので $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に拡張することができる.

最後に時空間ポテンシャルおよび外部からの熱の流入を考慮した "逆向き"熱方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial t} + k(t,x)u(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x) + g(t,x), & [0,T) \times \mathbb{R}^d \\ u(T,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{12.6}$$

の解について述べておく. $f \in C(\mathbb{R}^d)$, $g \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d)$, $k \in C([0,T] \times \mathbb{R}^d \to [0,\infty))$ とする.

定理 12.2.4. [8, Theorem 4.4.2] u を (12.6) の解とし, ある定数 $K > 0$ と $0 < a < \frac{1}{2Td}$ が存在して

$$\max |v(t,x)| + \max |g(t,x)| \leqslant Ke^{a\|x\|^2}$$

が成り立つとき,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= E_x\left[f(B_{T-t}) \exp\left(-\int_0^{T-t} k(s,B_s)ds \right) \right] \\ &\quad + \int_0^{T-t} E_x\left[g(t+\theta, B_\theta) \exp\left(-\int_0^\theta k(s,B_s)ds \right) d\theta \right], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

が成り立つ.

実際に (12.6) をみたす $u(t,x)$ に対して

$$u(t+\theta, B_\theta) \exp\left(-\int_0^\theta k(W_s)ds \right)$$

を考え, 伊藤の公式を適用すると大まかには見えてくる.

ただし細かい議論が必要である.

12.3 マルチンゲール問題

最後に確率微分方程式 (12.4) の弱い解の存在 (および一意性に関して) 有用なマルチンゲール問題について触れておく.

定義 12.3.1. [8, Definition 5.4.5] $(C[0,\infty), \mathcal{B}(C[0,\infty)))$ 上の確率測度 P が A (A は (12.4) に付随する作用素 (12.5)) に関するマルチンゲール問題の解であるとは

$$M_t(f) = f(y(t)) - f(y(0)) - \int_0^t Af(y(s))ds$$

が任意の $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ に対して, 連続マルチンゲールになるときをいう.

このマルチンゲール問題の解の存在がわかれば, 確率微分方程式の弱い解の存在が示される. またマルチンゲール問題の解が一意であれば弱い解も一意であることが知られている.

このマルチンゲール問題の解を構成することで次のことが得られる.

定理 12.3.2. [8, Theroem 5.4.22] 確率微分方程式 (12.4) の係数 b, σ が有界で連続な時,

$$\text{ある } m > 1 \text{ で } E[|X_0|^{2m}] < \infty$$

が成り立てば弱い解を持つ.

12.4 問題

問題 12.1. 確率微分方程式

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R} \tag{12.7}$$

を考える. ただし, 有界可測関数 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は次をみたすとする: ある狭義単調増加関数 $\rho : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ が存在して以下をみたす

- $\rho(0) = 0$, 任意の $t > 0$ に対して $\lim_{a \to 0+} \int_a^t \rho(s)^{-2} ds = \infty$.
- 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対して $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant \rho(|x - y|)$.

このとき弱い解が存在し, 道ごとの一意性が成り立つことを以下要領で示せ.

(1) ((12.7) は弱い解を持つことを示せ.

(2) 単調減少列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$ を $\int_{a_1}^1 \rho(s)^{-2} ds = 1$, $n \geqslant 1$ に対して $\int_{a_{n+1}}^{a_n} \rho(s)^{-2} ds = 1$ となるようにと選ぶ. このとき非負連続関数 $\{\psi_n\}_{n \geqslant 1}$ で以下をみたすものが存在することを示せ.

$$\mathrm{supp}\phi_n \subset (a_n, a_{n-1}), 0 \leqslant \psi_n(x) \leqslant \frac{2\rho(x)^{-2}}{n}, \int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(u) du = 1$$

(3) (2) の $\{\psi_n : n \geqslant 1\}$ に対して $\{\phi_n : n \geqslant 1\}$ を

$$\phi_n(x) = \int_0^{|x|} dy \int_0^y \psi_n(u) du, x \in \mathbb{R}$$

と定義する. このとき $\phi_n \in C_2(\mathbb{R})$, $|\phi_n'(x)| \leqslant 1$, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\phi_n(x) \nearrow |x|$ $(n \to \infty)$ が成り立つことを示せ.

(4) $(X^{(1)}, B)$, $(X^{(2)}, B)$ を同じフィルター付き確率空間上で定義された (12.7) の解とする. このとき

$$E[\phi_n(X^{(1)}(t) - X^{(2)}(t))] = \frac{1}{2} E\left[\int_0^t \phi_n'' \left(X^{(1)}(s) - X^{(2)}(s)\right) \left(\sigma\left(X^{(1)}(s)\right) - \sigma\left(X^{(2)}(s)\right)\right)^2 ds\right]$$

となることを示せ.

(5) $E[|X^{(1)}(t) - X^{(2)}(t)|] = 0$ を示せ.

問題 12.2. $\lambda \in \mathbb{R}, \mu > 0$ に対して確率微分方程式

$$dX_t = \lambda X_t dt + \mu \sqrt{X_t} dBt, \quad X_0 = x \geqslant 0$$

を考える. 以下の問に答えよ.

(1) $u_0 \geqslant 0$ とする．任意の $t \geqslant 0$ に対して $E[\exp(-u_0X_t)] = E[\exp(-u_tx)]$ をみたす $u : [0,\infty) \to [0,\infty)$ がみたす微分方程式を与えよ．

(2) (1) で求めた微分方程式の解を求めよ．

(3) $\tau_0 = \inf\{t \geqslant 0 : X_t = 0\}$ とする．$x > 0$ のとき $P(\tau_0 < \infty)$ を計算せよ．

問題 12.3. 確率微分方程式

$$dX_t = -Y_t dB_t - \frac{1}{2}X_t dt \tag{12.8}$$

$$dY_t = X_t dB_t - \frac{1}{2}Y_t dt \tag{12.9}$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 確率微分方程式 (12.9) は強い解を一意にもつことを示せ．

(2) $r \geqslant 0, x \in \theta$ に対して $X_t = r\cos(B_t + \theta), Y_t = r\sin(B_t + \theta)$ は (12.9) の解であることを示せ．

問題 12.4. **(ブラウン橋** [13, Exercise 5.11]**)** $a, b \in \mathbb{R}$ とする 確率微分方程式

$$dX_t = \frac{b - X_t}{1-t}dt + dB_t, (0 \leqslant t < 1), Y_0 = a$$

を考える．

$$X_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad 0 \leqslant t < 1$$

は解になることを示し，$\lim_{t\to 1-} X_t = b$ a.s. となることを示せ．この確率過程 X を a から b へのブラウン橋という．

13　局所マルチンゲールと確率積分 (準備中)

ここでは局所マルチンゲールに関する話を載せておく.

13.1　局所マルチンゲール

確率積分を考える際に

$$E\left[\int_0^t X_s^2 ds\right] < \infty \tag{13.1}$$

という条件を課していたことを思い出す. しかしこの条件をみたさない (みたすかわからない) ような確率積分を考えることがよくある.

例えば $e^{B_t^2}$ に対して, 何も考えずに伊藤の公式を適用してみると

$$e^{B_t^2} = 1 + \int_0^t 2B_s e^{B_s^2} dB_s + \int_0^t (2B_s^2 + 1) e^{B_s^2} ds$$

となり, $t > \frac{1}{4}$ のとき

$$E\left[\int_0^t 4B_s^2 e^{2B_s^2} ds\right] = \infty$$

となってしまい, 確率積分が定義できない.

しかし容易にわかるように

$$P\left(\int_0^t 4B_s^2 e^{2B_s^2} ds < \infty\right) = 1$$

である. そこでこの条件を満たすような発展的可測過程 $\{X_t : t \geqslant 0\}$ に対して確率積分を構成する.

基本的なアイデアは (13.1) が発散してしまうような ω は修正することで, 確率積分のようなものを定義する.

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ に対して

$$\mathcal{L}_2^{loc} = \{X = \{X_t : t \geqslant 0\} : \mathcal{F}_t\text{-発展的可測, 任意の } T > 0 \text{ に対して} \int_0^T X_t^2 dt < \infty, \text{a.s.}\}$$

と定義する. また $\{B_t : t \geqslant 0\}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動とする.

$X \in \mathcal{L}_2^{loc}$ と $n \geqslant 1$ に対して

$$T_n = n \wedge \inf\left\{t \geqslant 0 : \int_0^t X_s^2(\omega) ds \geqslant n\right\}$$

という停止時刻を考える. 定義から $P(T_n \to \infty) = 1$ がわかる.

また $X_t^{(n)} = X_t(\omega) 1\{T_n(\omega) \geqslant t\}$ とすると構成法より

$$\int_0^\infty \left(X_t^{(n)}\right)^2 ds = \int_0^{T_n} (X_t)^2 ds \leqslant n$$

である. よって $X^{(n)} \in \mathcal{L}_2$ であるので B に関する確率積分が定義できる. 特に $n \leqslant m$ に対して

$$I_t(X^{(n)}) = I_t(X^{(m)}) \quad 0 \leqslant t \leqslant T_n(\omega)$$

がわかる. そこでこの $\{X_t : t \geqslant 0\}$ の確率積分を

$$I_t(X) := \int_0^t X_s^{(n)} dB_s \quad 0 \leqslant t \leqslant T_n(\omega) \tag{13.2}$$

と定義する. これは矛盾なく定義できており, 連続な確率過程であり,

$$I_{t\wedge T_n}(X) = \int_0^t X_s^{(n)} dB_s$$

となる.

このように定義した確率積分は一般にマルチンゲールにはならない. しかし次の意味で**局所マルチンゲール**というものになることが知られている.

定義 13.1.1. 確率過程 $\{M_t : t \geqslant 0\}$ が**局所マルチンゲール**とは次の条件をみたすときをいう.

- ある単調増加な停止時刻の列 $\{T_n : n \geqslant 0\}$ で $P(T_n \to \infty) = 1$ が存在する.
- 各 $n \geqslant 1$ に対して $\{M_{t\wedge T_n} : t \geqslant 0\}$ がマルチンゲール.

さらに各 $n \geqslant 1$ に対して $\{M_{t\wedge T_n} : t \geqslant 0\}$ が 2 乗可積分マルチンゲールであるとき**局所 2 乗可積分マルチンゲール**という.

以下,

$$\mathcal{M}_2^{loc} = \{M = \{M_t\}_{t\geqslant 0} : M \text{ は } t \text{ に関して連続}, M \text{ は局所 2 乗可積分マルチンゲール}, M_0 = 0 \text{a.s.}\}$$

とおく.[*58]

問 13.1.2. (13.2) で定義した $X \in \mathcal{L}_2^{loc}$ に対する確率積分は $\mathcal{M}_2^{loc}$ の元であることを示せ.

問 13.1.3. $M = \{M_t : t \geqslant 0\}$ が連続局所マルチンゲールであるとする. 任意の $t \geqslant 0$ に対して

$$E\left[\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |M_s|\right] < \infty$$

とする. このとき M はマルチンゲールであることを示せ.

問 13.1.4. $X \in \mathcal{L}_2^{loc}$ に対する確率積分, $I_t(X)$ に対して命題 10.1.12 の性質が, それぞれの時刻 s, t を $s \wedge T_n$, $t \wedge T_n$ で置き換えることで成立することを示せ.

定理 9.2.2 の証明を見ると連続局所 2 乗可積分マルチンゲールに対して次の意味で 2 次変分過程が存在することが確認できる.

定理 13.1.5. $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$ とする. このとき次のような連続な確率過程 $\{\langle M\rangle_t : t \geqslant 0\}$ が一意に存在する.

- $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ は連続局所 $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール.
- $\{\langle M\rangle_t : t \geqslant 0\}$ は t に関して単調増加, P-a.s.
- $\langle M\rangle_0 = 0$, P-a.s.

特に

$$\sum (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})^2 \xrightarrow{P} \langle M\rangle_t \quad (|\Delta(t)| \to 0)$$

で与えられる. ただし $\Delta(t) = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = t\}$ は $[0, t]$ の分割, $|\Delta(t)| = \max\{t_i - t_{i-1}\}$.

この $\{\langle M\rangle_t : t \geqslant 0\}$ を M の **2 次変分**過程という.

この節の冒頭では $\mathcal{L}_2^{loc}$ に対してブラウン運動に関する確率積分を構成した. ここでは一般の連続 (局所)2 乗可積分マルチンゲールに関する確率積分の定義を行う. [*59]

定義 13.1.6. フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ に対して $M \in \mathcal{M}_2$ を考える.

$$\mathcal{L}_2(M) := \left\{ X = \{X_t\}_{t\geqslant 0} : \mathcal{F}_t\text{-発展的可測, 任意の } T > 0 \text{ に対して } E\left[\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s\right] < \infty \right\}$$

とする.

$X \in \mathcal{L}_2(M)$ に対して

$$\|X\|_T^M := E\left[\int_0^T X_s^2 d\langle M\rangle_s\right]^{\frac{1}{2}}$$

と定義し, $X, Y \in \mathcal{L}_2(M)$ に対して

$$\|X - Y\|^M = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{2^N}\left(\|X - Y\|_N^M \wedge 1\right)$$

とおく. $\|X - Y\|^M = 0$ のとき, X, Y は $\mathcal{L}_2(M)$ の元として同一視する.

あとはブラウン運動に関する確率積分の定義と同様に単過程 X に対して確率積分 $I_t^M(X)$ を定義したのち, $\mathcal{L}_2(M)$ での単過程全体の稠密性を使って, 一般の $X \in \mathcal{L}_2(M)$ に対して確率積分 $\{I_t^M(X) : t \geqslant 0\}$ が定義できる.

一般の確率積分に関する性質を挙げておく.

定理 13.1.7. $M \in \mathcal{M}_2$ とする. $X, Y \in \mathcal{L}_2(M)$. $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ に対して次が成り立つ.

(i) $I_0^M(X) = 0$ P-a.s.

(ii) $\{I_t^M(X) : t \geqslant 0\}$ は L^2-連続マルチンゲール.

(iii)′ $E\left[(I_t^M(X) - I_s^M(X))^2 | \mathcal{F}_s\right] = \int_s^t X_u^2 d\langle M\rangle_u$, P-a.s.

(iv) $I_t^M(X) = I_s^M(X) + I_{[s,t]}^M(X)$, P-a.s.

(v) $I_t^M(\alpha X + \beta Y) = \alpha I_t^M(X) + \beta I_t^M(Y)$, P-a.s. $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

さらに $M, N \in \mathcal{M}_2$ に対して次のことが成り立つ.

(vi) $X \in \mathcal{L}_2(M)$, $Y \in \mathcal{L}_2(N)$ に対して

$$\langle I^M(X)\rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M\rangle_s, \quad \langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u, \quad t \geqslant 0, P\text{-a.s.}$$

問 13.1.8. 定理 13.1.7(i)∼(v) を証明せよ.

定理 13.1.7(vi) の証明は省略する. X, Y が単過程の場合には各自証明を試みると良い. 一般の場合に関する

[*59] $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$ に関する確率積分の定義は節冒頭の議論と同様なので省略する. 各自条件を修正しながら考えよ.

証明は [8, Chapter 3, Proposition 2.17] 参照.

注意 13.1.9. $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$ や $X \in \mathcal{L}_2^{loc}(M)$ の場合, 定理 13.1.7(i), (iv), (v) は成立するが, (ii), (iii)′ は成立しない. (iii), (iv) は期待値に関することのため固定した t に関して一般に成り立つことはない. 適切な停止時刻を用いることで局所マルチンゲールに関連した性質をもつことがわかる. (vi) は定理 13.1.5 の 2 次変分過程の意味で成立することがわかる.

伊藤の公式を一般の場合に行うために次の連続セミマルチンゲールの概念を与えておく.

定義 13.1.10. **(連続セミマルチンゲール)** 連続な確率過程 $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ が連続セミマルチンゲールであるとは,

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad t \geqslant 0 \tag{13.3}$$

と表現されるものである. ただし $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$, $A = \{A_t : t \geqslant 0\}$ は連続な $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程で $A_0 = 0$, P-a.s. かつ任意の区間で有界変動であるものである.

問 13.1.11. 連続セミマルチンゲール X が (13.3) の分解をもつとする. 別の分解

$$X_t = X_0 + M'_t + A'_t, \quad t \geqslant 0$$

を考えるともつとすると, ほとんど確実に任意の $t \geqslant 0$ に対して $M_t = M'_t$, $A_t = A'_t$ であることを示せ.

定理 13.1.12. $f \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R})$ とする. 連続セミマルチンゲール X が (13.3) の分解をもつとする. このときほとんど確実に

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, X_s) dM_s + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) d\langle M \rangle_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds, \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明は定理 11.1.1 の議論の修正で可能である. ただし補題 11.1.3 における 2 次変分では M と A が現れることに注意して, それぞれ別々に評価しなければいけない. また定理 9.2.2 の証明の議論も用いられる.

定理 13.1.13. [8, 3 章, 系 2.20] $M \in \mathcal{M}_2^{loc}$, $X \in \mathcal{L}_2^{loc}(M)$ とする. $N_t = \int_0^t X_s dM_s$ とする. $Y \in \mathcal{L}_2^{loc}(N)$ のとき $XY \in \mathcal{L}_2^{loc}(M)$ であり

$$\int_0^t Y_s dN_s = \int_0^t X_s Y_s dM_s$$

が成り立つ.

注意 13.1.14. この定理を用いると形式的に $dN_t = X_t dM_t$ としてよいことがわかる.

13.2 Bessel 過程 (再訪)

ここでは Bessel 過程 (11.2.1 節) についてもう少し解析することにする.

問 13.2.1. d 次元ブラウン運動 $B = (B^{(1)}, \cdots, B^{(d)})$ に対して

$$R_t = \left(\sum_{i=1}^{d} \left(B_t^{(i)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geqslant 0$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(1) $W_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \int_0^t \frac{B_s^{(i)}}{R_s} dB_s^{(i)}$ と定義すると, 確率過程 $\{W_t : t \geqslant 0\}$ は 1 次元標準ブラウン運動であることを示せ.

(2) $Y_t = R_t^2$ と定義すると確率微分方程式

$$dY_t = 2\int_0^t R_t dW_t + d dt$$

をみたすことを示せ. ただし $\{W_t : t \geqslant 0\}$ は 1 次元標準ブラウン運動である.

Bessel 過程は d 次元ブラウン運動のノルムであったので, これを調べることでブラウン運動が原点に到達できるかどうかを調べることができる.

定理 13.2.2. $R = \{R_t : t \geqslant 0\}$ を $r \geqslant 0$ を出発する d 次元 Bessel 過程とする. $d \geqslant 2$ のとき

$$P^r(R_t > 0,\ 0 < t < \infty) = 1$$

となる.

問 13.2.3. $r > 0$ とする. $0 \leqslant a < r < b$ に対して

$$\tau_a = \inf\{t :\geqslant 0 : R_t = a\}, \tau_b = \inf\{t \geqslant 0 : R_t = b\}, \tau_{a,b} = \tau_a \wedge \tau_b$$

とおく. 2 回連続微分可能な関数 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ で $\{f(R_{t \wedge \tau_{a,b}}) : t \geqslant 0\}$ がマルチンゲールになるような f を 1 つ見つけよ.

証明. $d = 2$ の場合を考える. $d \geqslant 3$ の場合は, $d = 2$ の結論から得られる.

$r > 0$ の場合.

$f(x) = \log x$ とすると, 問 13.2.3 の解となる. 特に $k \geqslant 1$ に対して $a = k^{-k}, b = k$ とすると任意の $n \geqslant 1$ に対して

$$\log R_{\tau_{a,b} \wedge n} = \log r + \int_0^{\tau_{a,b} \wedge n} \frac{1}{R_s} dW_s$$

となる. 両辺の期待値をとると

$$\begin{aligned}\log r &= E[\log R_{\tau_{a,b} \wedge n}] \\ &= (\log a) P(R_{\tau_{a,b} \wedge n} = a) + (\log b) P(R_{\tau_{a,b} \wedge n} = b) + E[\log R_n : n < \tau_{a,b}]\end{aligned}$$

となる. いまブラウン運動の性質から k を止めて $n \to \infty$ とすると

$$\log r = (\log a) P(R_{\tau_{a,b}} = a) + (\log b) P(R_{\tau_{a,b}} = b)$$

となる. $k \to \infty$ とすると

$$\varlimsup_{k\to\infty} P(\tau_a \leqslant \tau_b) = 0$$

となる. $P(\tau_b < \infty) = 1$ と $P(\lim_{k\to\infty} \tau_b = \infty) = 1$ に注意すると, $P(\tau_0 < \infty) = \lim_{k\to\infty} P(\tau_0 < \tau_b) \leqslant \lim_{k\to\infty} P(\tau_a < \tau_b) = 0$ である.

$r = 0$ の場合, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $P(R_\varepsilon > 0) = 1$ であることから

$$P(R_t > 0 : t \in (\varepsilon, \infty)) = E\left[P^{R_\varepsilon}(R_t > 0 : 0 < t < \infty)\right] = 1$$

となる. □

問 13.2.4. $R = \{R_t : t \geqslant 0\}$ を $r > 0$ を出発する d 次元 Bessel 過程とする.

$$m = \inf_{t\geqslant 0} R_t$$

としたとき以下を示せ.

(1) $d = 2$ のとき $P(m = 0) = 1$.

(2) $d \geqslant 3$ のとき, 任意の $0 \leqslant c \leqslant r$ に対して $P(m \leqslant c) = \left(\frac{c}{m}\right)^{d-2}$.

13.3 数理ファイナンスとの関連

この節では, ブラック-ショールズの公式 (例題 12.1.16) と関連して数理ファイナンスの概要について少し触れることにする. *60

まずは離散的な設定でそれぞれの意味を説明してから連続時間の話に置き換える.

時刻 $t = 0$ で, X_0 円所持しているとする. (あとで連続時間の話をするので, 統一して時間は t と表すことにする.)

また**債権** (安全な証券)ρ と, ある**株** (リスクを伴う証券)S がそれぞれ 1 個当たり時刻 $t = 0$ で ρ_0, S_0 円で売られているとし, X_0 を使ってこれらを購入するとする.

簡単のために以下のような設定とする.

- 債権は時刻 1 毎に $(1 + r)$ 倍 $(r > 0)$ の価格になる. $(\rho_t = (1 + r)^t \rho_0, \rho_0 = 1)$
- $R_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ は確率変数である.

時刻 $t = 0, \cdots, T$ まででの債権, 株の所有数をそれぞれ $(\theta_0(t), \theta_1(t))$ と表すことにする. これを**ポートフォリオ**という.

$(\theta_0(t), \theta_1(t))$ は以下をみたすものとする.

(1) $X_0 = \theta_0(0)\rho_0 + \theta_1(0)S_0$.

(2) $X_t = \theta_0(t-1)\rho_t + \theta_1(t-1)S_t$ のとき, $(\theta_0(t), \theta_1(t))$ を

$$X_t = \theta_0(t)\rho_t + \theta_1(t)S_t.$$

注意 13.3.1. X_t はポートフォリオ θ に従ったときの時刻 t での債権, 株の価格の合計を表している.

(1) $\theta_0(t) < 0$ の場合は, 銀行などからの借金を表し, r は利率を与えている. また $\theta_1(t) < 0$ は株の空売りを表している.

(2) (1) は X_0 円分購入したことを意味する.

(3) (2) は時刻 t で債券と株を売り, $\theta_0(t)$ 個の債券と $\theta_1(t)$ 個の株を購入しなおすことを表している. (この取引の間の手数料等は考慮しない)

---

*60 詳しくは 楠岡成雄, 長山いづみ 数理ファイナンス 東京大学出版会 2015 などを参照すると良い.

ヨーロピアンオプションとは,「時刻 T で株を 1 個 $K > 0$ 円で買う権利」を時刻 $t = 0$ で結ぶ契約のことをいう.

契約した場合, 次のことが考えられる.

(1) $S_T > K$ のとき, 権利を行使して株を購入し即座に売ることで $S_T - K$ 円の利益を得る.
(2) $S_T \leqslant K$ のとき, 権利を行使しない. このとき利益は 0 円である.

ではこのような契約の適切な価格は 1 株あたりいくらなのか, といった問題を考えるのが数理ファイナンスの基本的な考え方になる.

簡単な場合として, $T = 1$ とし, $P(R_1 = a) = p$, $P(R_1 = b) = 1 - p$ という場合を考えてみる. ただし $0 < a < 1 + r < b$, $aS_1 < K < bS_1$, $p \in (0, 1)$ とする.

注意 13.3.2. $K < aS_1$ の場合は権利を行使すれば $(aS_1 - K)$ 円以上儲かるので有利である. また $bS_1 < K$ の場合は権利を行使しても確実に負になるので誰も購入しない.

では時刻 0 で $(\theta_0(0), \theta_1(0))$ 個ずつ購入したとする.

このとき

$$
\begin{aligned}
X_0 &= \theta_0(0) + \theta_1(0)S_0 \\
X_1 &= (1 + r)\theta_0(0) + \theta_1(0)S_1
\end{aligned}
$$

である. ここで $X_1 = (S_1 - K)_+$ となる $(\theta_0(0), \theta_1(0))$ について注目してみる.

これを実際に解いてみる (単なる連立方程式) と

$$
\theta_0(0) = \frac{a}{1+r}\frac{K - bS_0}{(b-a)S_0}, \quad \theta_1(0) = \frac{bS_0 - K}{(b-a)S_0}
$$

となる.

実はこの $\theta_0(0), \theta_1(0)$ を用いて $X_0 = \theta_0(0) + \theta_1(0)S_1$ と定義した値がこのオプションの適切な価格になる.

実際, オプションを売る側は

(i) X_0 でオプションが売れたら, $\theta_0(0)$ だけ借金し, $\theta_1(0)$ だけ株を購入する. (収支は 0)
(ii) ($t = 1$ で $S_1 = bS_0$ のとき) 客が権利を行使するために K 支払い, 一方で株を $1 - \theta_1(0)$ 購入し, 1 株を客に渡す. 余ったお金で銀行に返済.
(iii) ($t = 1$ で $S_1 = aS_0$ のとき) $\theta_1(0)$ の株を売り, その金額を銀行に返済.

このような戦略をすれば売り手は損はしない. つまり X_0 よりも高い金額でオプションを販売した場合は売り手が儲かるようになる.

一方でオプションの買い手は上と同様の手順を預金 $(-\theta_0(t))$ や空売り $(-\theta_1(t))$ として行えば X_0 でオプションを購入すれば損はしない. よって X_0 より安い価格でオプションが販売されていれば買い手が儲かるようになる.

このように一方に有利な状況になっていない状況を**無裁定**というようにいう. (元手なしで儲けることができないようになっている市場原理の仮定)

定理 13.3.3. [20, 15.2] $\{R_t : t \geqslant 0\}$ は独立同分布で, ある $0 < a < 1 + r < b < \infty$ が存在し $P(R_t = b) = \frac{1+r-a}{b-a} = 1 - P(R_t = a)$ と仮定する. このとき

$$
x = E\left[(1+r)^{-T}(S_T - K)_+\right]
$$

としたとき, またその場合に限り以下が成り立つ: あるポートフォリオ $\theta(t)$ が存在し,

(1) $X_0 = x$

(2) $X_t \geqslant 0$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$

(3) $X_T = (S_T - K)_+$

これによりオプションの価格設定ができる.

ではここから連続時間に話をよみなおしていく.

以下, $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}, P)$ をフィルター付き確率空間とし, $B = \{B_t : t \geqslant 0\}$ をブラウン運動とする. 債権は 1 個 ρ_0 円, 株は 1 株 $t = 0$ で S_0 円で売られておりブラック-ショールズの公式

$$
\begin{aligned}
d\rho_t &= r\rho_t dt \\
dS_t &= \mu S_t + \sigma S_t dB_t
\end{aligned}
$$

をみたすものとする. ただし $r > 0, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$,

このような (ρ_t, S_t) に対して, $t = \frac{i}{N}$ ごとに取引を行うポートフォリオ $\theta^N = \{(\theta_0^N(t), \theta_1^N(t)) : t \geqslant 0\}$ を考えてみる. ただしポートフォリオは $\mathcal{F}_t$ に関して発展的可測であると仮定する.

このポートフォリオに従ったとき, 時刻 t での価格は

$$
X_t = X_0 + \int_0^t \theta_0^N(s)\rho_s ds + \int_0^t \theta_1^N(s) dS_s
$$

となっていることが計算からわかる. (各時間区間では θ^N は定数であるので, 単過程になっている.)

一方で定義から

$$
X_t = \theta_0^N(t)\rho_t + \theta_1^N(t) S_t
$$

である.

これを単純に $N \to \infty$ として考えてみると次のようになる. (ここら辺は細かいことは無視しているので数理ファイナンスの教科書をみることを薦める.)

定義 13.3.4. 発展的可測確率過程 $\theta = \{(\theta_t^0, \theta_t^1) : t \geqslant 0\}$ を**ポートフォリオ**という. このとき X_0 から始めるポートフォリオ θ の時刻 t での価格は

$$
\begin{aligned}
X_t &= X_0 + \int_0^t \theta_0(s)\rho_s ds + \int_0^t \theta_1(s) dS_s \\
&= \theta_0(t)\rho_t + \theta_1(t) S_t
\end{aligned}
$$

で与えられる.

このようにポートフォリオの価格が定義されるとき, 無裁定の概念からするとオプションの価格は

$$
X_T = (S_T - K)_+, \quad P\text{-a.s.}
$$

をみたすようなポートフォリオが存在したときの X_0 ということになる.

しかしこのままでは X_0 は求まらないので, ブラウン運動の性質を使って計算していく.

このために

$$
\bar{S}_t = \frac{S_t}{\rho_t}
$$

を導入する. これは時刻 t での債権の価格 1 に正規化し, 比較することで時刻 t での株価の現在での価格への換算とみなすことができる.

するとブラック-ショールズの公式より

$$\bar{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma B_t - \left(\frac{\sigma^2}{2} - \mu + r\right) t\right)$$

となる.

問題 11.4 より $L > 0$ に対して

$$Z_{L,T} = \exp\left(LB_T - \frac{L^2 T}{2}\right)$$

とおくと確率測度

$$Q_{L,T}(d\omega) = P\left[Z_{L,T} : d\omega\right]$$

の下で, $\bar{B}_t = B_t - Lt$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ はブラウン運動である. そこで $Q_{L,T}$ の下で $\{\bar{S}_t : 0 \leqslant t \leqslant T\}$ がマルチンゲールとなるように L を選び固定する. ($L = \frac{r-\mu}{\sigma}$ であり, 以下 $Q_{L,T} = Q$ と表す.)

このとき伊藤の公式より Q の下で

$$d\bar{S}_t = \sigma \bar{S}_t d\bar{B}_t$$

である.

$S_t = \rho_t \bar{S}_t$ であるので Q のもとで

$$\begin{aligned} dS_t &= r\rho_t dt + \sigma\rho_t \bar{S}_t d\bar{B}_t \\ &= r\rho_t dt + \sigma\rho_t \bar{S}_t (d\bar{B}_t + Ldt) \\ &= r\rho_t dt + \sigma L \rho_t \bar{S}_t dt + \sigma\rho_t \bar{S}_t d\bar{B}_t \end{aligned}$$

となる. $\rho_t^{-1} X_t$ に対して伊藤の公式を適用すると Q のもとで

$$\begin{aligned} \rho_t^{-1} X_t &= \rho_0^{-1} X_0 - \int_0^t r X_s \rho_s^{-1} ds + \int_0^t \rho_s^{-1} dX_s \\ &= x - \int_0^t r(\theta_0(s)\rho_s + \theta_1(s) S_s)\rho_s^{-1} ds + \int_0^t r\rho_s^{-1}\theta_0(s)\rho_s ds \\ &\quad + \int_0^t \rho_s^{-1}\theta_1(s)\mu\rho_s ds + \sigma L \int_0^t \rho_s^{-1}\rho_s\theta_1(s) ds + \int_0^t \sigma\rho_s^{-1}\rho_s\theta_1(s)\bar{S}_s d\bar{B}_s \\ &= x + \int_0^t \sigma \bar{S}_s \theta_1(s) d\bar{B}_s \end{aligned}$$

となり, $\rho_t^{-1} X_t$ はマルチンゲールになる. これにより

$$\begin{aligned} x = E^Q\left[\rho_T^{-1} X_T\right] &= E^Q\left[e^{-rT}(S_T - K)_+\right] \\ &= E^Q\left[e^{-rT}\left(S_0 \exp\left(\sigma\bar{B}_t - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) t\right) - K\right)_+\right] \end{aligned}$$

となることがわかる.

13.4　問題

問題 13.1. $\{M_t : t \geqslant 0\}, \{N_t : t \geqslant 0\}$ を連続 2 乗可積分マルチンゲールとする. 任意の $t \geqslant 0$ に対して

$$E\left[M_t^2\right] \leqslant E\left[N_t^2\right]$$

が成り立つとき

$$E\left[\left(\int_0^t M_u du\right)^2\right] \leqslant E\left[\left(\int_0^t N_u du\right)^2\right]$$

が成り立つことを示せ.

問題 13.2. **(レヴィの確率面積** [9, Exercise 5.30]) $\{B_t = (X_t, Y_t) : t \geqslant 0\}$ を原点出発の 2 次元ブラウン運動とする. このとき $t \geqslant 0$ に対して

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t X_s dY_s - \int_0^t Y_s dX_s$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(1) $\langle \mathcal{A} \rangle_t$ を求めよ. また $\{\mathcal{A}_t \geqslant 0\}$ は L^2-連続マルチンゲールであることを示せ.

(2) $\lambda > 0$ に対して, $E[e^{i\lambda \mathcal{A}_t}] = E[\cos(\lambda \mathcal{A}_t)]$ を示せ.

(3) f を $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上の 2 回連続微分可能な関数とする.

$$\begin{aligned} Z_t &= \cos(\lambda \mathcal{A}_t) \\ W_t &= -\frac{f'(t)}{2}(X_t^2 + Y_t^2) + f(t) \end{aligned}$$

に対して伊藤の公式を適用せよ. また $\langle Z, W \rangle_t = 0$ を示せ.

(4) f が

$$f''(t) = f'(t)^2 - \lambda^2$$

をみたすならば $\{Z_t e^{W_t} : t \geqslant 0\}$ が連続局所マルチンゲールになることを示せ.

(5) $r > 0$ とする.

$$f(t) = -\log(\cosh(\lambda(r - t)))$$

は (4) の微分方程式をみたすことを示せ. また

$$E\left[e^{i\lambda \mathcal{A}_r}\right] = \frac{1}{\cosh(\lambda r)}$$

が成り立つことを示せ.

付録 A　測度論

この章では測度論の基本的な知識を記述しておく. 具体的な証明等はルベーグ積分の教科書や講義に譲る.

A.1　σ-加法族

S: 集合, $\mathcal{A} \subset 2^S$: 部分集合族.

定義 A.1.1. $\mathcal{A}$ が次を満たすとき S の **σ-加法族** (**完全加法族**[*61]) という.

$$\emptyset \in \mathcal{A} \qquad \text{(空集合を含む)} \qquad \text{(付録 A.1)}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = S \backslash A \in \mathcal{A} \qquad \text{(補集合で閉じている)} \qquad \text{(付録 A.2)}$$

$$A_n \in \mathcal{A},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{A} \qquad \text{(}\textbf{可算和}\text{で閉じている)} \qquad \text{(付録 A.3)}$$

- S と σ-加法族 $\mathcal{A}$ の組 $(S, \mathcal{A})$ を**可測空間**と呼ぶ.
- $(S, \mathcal{A})$ が可測空間, $A \in \mathcal{A}$ であるとき A は**可測**であるという.

注意 A.1.2. (付録 A.3) の代わりに有限和で閉じている条件

$$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A} \qquad \text{(付録 A.4)}$$

を考える. (付録 A.1), (付録 A.2), (付録 A.3) を満たす $\mathcal{A}$ を**有限加法族**という.

注意 A.1.3. 可測空間と位相空間の定義における条件の違いについてよく理解しておくことが重要である.

例題 A.1.4. (i) 集合 S に対して $\{\emptyset, S\} \subset 2^S$ は σ-加法族である.
(ii) 集合 S に対して 2^S は σ-加法族である.

応用上 (*A.1.4*) のような σ-加法族は使い勝手が悪い. より使い勝手の良いものとして適当な大きさの σ-加法族が欲しい. そこで位相空間 $(S, \mathcal{O})$ の開集合を含むようなものを構成する.

次の補題が役立つ.

補題 A.1.5. $\mathcal{G} \subset 2^S$ に対して

$$\sigma[\mathcal{G}] = \bigcap_{\substack{\mathcal{A}: S \text{ の } \sigma\text{-加法族} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{G}}} \mathcal{A}$$

と定義すると $\sigma[\mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$ を含む最小の σ-加法族である.

$\sigma[\mathcal{G}]$ を **$\mathcal{G}$ が生成する σ-加法族**と呼ぶ. 集合 S を明示するときは $\sigma[\mathcal{G}]_S$ と書く.
特に位相空間 $(S, \mathcal{O})$ に対して

$$\mathcal{B}(S) = \sigma[\mathcal{O}]$$

[*61] 偏微分方程式の分野では完全加法族, 確率論の分野では σ-加法族と呼ぶ人が多い (という個人的な印象)

を位相空間 S の**ボレル集合族**と呼ぶ.

A.2 測度

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする.

定義 A.2.1. $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ が次を満たすとき $(\mathcal{F}, \mu)$ は**測度**であるという.

$$A \in \mathcal{F} \text{ に対して } 0 = \mu(\varnothing) \leqslant \mu(A) \leqslant \infty, \qquad \textbf{非負性} \qquad \text{(付録 A.5)}$$

$$A_n \in \mathcal{F},\ A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\sum_{n \geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} \mu(A_n), \qquad \textbf{可算加法性, 完全加法性} \qquad \text{(付録 A.6)}$$

またそのとき $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ.

注意 A.2.2. 有限加法族 $\mathcal{F}_0$ に対して $\mu : \mathcal{F}_0 \to [0, \infty]$ が (付録 A.5) および

$$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}_0, A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j) \Rightarrow \mu\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

を満たすとき**有限加法的測度**という. また $(X, \mathcal{F}_0, \mu)$ を**有限加法的測度空間**という.

例題 A.2.3. (a) $(S, 2^S)$ に対して $\sharp : 2^S \to [0, \infty]$ を

$$\sharp(A) = \sum_{x \in A} 1 = \sharp\{x : x \in A\}$$

と定義すると $\sharp$ は $(S, 2^S)$ 上の測度である. 特に $\sharp$ を**個数測度**と呼ぶ.

(b) $x \in S$ とする. $\delta_x : 2^S \to [0, \infty]$ を

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & A \ni x \\ 0, & A \not\ni x \end{cases}$$

と定義すると δ_x は測度である. (δ_x を点 x における**ディラク測度**という.)

ここまで一般的な可測空間について扱ってきたが $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の測度について考察する.

定理 A.2.4. 測度 $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ で $J = \prod_{j=1}^{d} \{(a_j, b_j] \cap \mathbb{R}\}$ に対して $m(J) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$ となるものがただ一つ存在する.

この m を $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) という.

注意 A.2.5. 定理 A.2.4 により $m((0,1] \cap \mathbb{Q}) = \sum_{q \in (0,1] \cap \mathbb{Q}} m(\{q\}) = 0$ となる.

$(X, \mathcal{F}, \mu)$: 測度空間.

定義 A.2.6. $\mu(X) < \infty$ であるとき, μ は**有限測度**であるという. また $\mu(X) = \infty$ であるとき, μ は**無限測度**であるという.

特に $\mu(X) = 1$ であるとき μ を**確率測度**とよび, $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を**確率空間**と呼ぶ. また無限測度 μ に対して

$$A_n \in \mathcal{F},\ A_1 \subset A_2 \subset \cdots,\ \mu(A_n) < \infty,\ X = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \tag{付録 A.7}$$

となるものが存在するとき μ は **σ-有限測度**と呼ぶ.

A.3 可測関数

$(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ を可測空間とする.

定義 A.3.1. $f : X \to Y$ が次を満たすとき f は **$\mathcal{F}/\mathcal{G}$-可測**であるという.

$$B \in \mathcal{G} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

注意 A.3.2. 位相空間の間の連続写像の定義と比較すると良い.

$\mathcal{G}$ が自明であるとき $\mathcal{F}$-可測と略すこともある. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が自明なとき単に可測ということもある.

例題 A.3.3. $A \in \mathcal{F}$ であるとする. このとき関数 $f(x) = 1_A(x)$ は $\mathcal{F}$-可測関数である. また $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ $(A_i \cap A_j = \emptyset)$ に対して関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$ は $\mathcal{F}$-可測である.

また次のことが成り立つ.

$(\Omega, \mathcal{F})$: 可測空間. S: 集合

定理 A.3.4. $\mathcal{G} \subset 2^S$ とする. $X : \Omega \to S$ が

$$X^{-1}(A) = \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F},\ \ A \in \mathcal{G}$$

を満たすとき X は $\mathcal{F}/\sigma[\mathcal{G}]$-可測写像である.

証明. $\mathcal{H} = \{A \subset S : X^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ とすると $\mathcal{H}$ は σ-加法族であり, $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ である. よって $\sigma[\mathcal{G}] \subset \mathcal{H}$. □

A.4 ルベーグ積分

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

この節では可測関数に積分を定義する. 可測関数の積分は可測単関数, 非負可測関数, 可測関数の順に定義される. リーマン積分のように直接定義できるものではないことに注意.

定義 A.4.1. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測であるとする. $\sharp f(X) < \infty$ であるとき, すなわち

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j 1_{A_j}(x), \ \ a_j \in \overline{\mathbb{R}}, \ A_j \in \mathcal{F}$$

であるとき, f を**可測単関数**という.

定義 A.4.2. (可測単関数の積分)

$\varphi : X \to [0, \infty]$ が可測単関数であり, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$, $a_i \geqslant 0$, $A_i \in \mathcal{F}$ で与えられているとする. φ の X 上での積分を

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx) = \int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{付録 A.8}$$

と定義する. また φ と $E \in \mathcal{F}$ に対して $\int_E \varphi d\mu = \int_X 1_E \cdot \varphi d\mu$ と定義する.

注意 A.4.3. $\infty \times 0 = 0$ と定義する.

次に非負可測関数に対する積分を定義する.

定義 A.4.4. (非負可測関数の積分)

$f : [0, \infty]$ が可測とする. f の X 上の積分を次のように定義する.

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\mu(dx).$$

ただし, $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ は非負単関数列で $0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots$ かつ, 任意の $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ を満たすようなもの.

最後に一般の可測関数に対して積分を定義する.

定義 A.4.5. (可測関数の積分)

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ は可測関数, $E \in \mathcal{F}$ とする. このとき f^+, f^- に対して積分 $\displaystyle\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ が定義できる. これらのうち少なくとも一方が有限であるとき, またそのときに限り f は E 上の積分 $\displaystyle\int_E f d\mu$ も持つといい,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

と定める. このように定義された可測関数の積分を**ルベーグ積分**とよび, 特に $\displaystyle\int_E f d\mu$ が有限であるとき, f は E 上**ルベーグ可積分**であるという.

定義 A.4.5 でルベーグ積分を定義できたが $\mathbb{R}^d$ 上のリーマン積分との関連について述べておく.

定理 A.4.6. $A \subset \mathbb{R}^d$ は有界なジョルダン集合とする. $f : A \to \mathbb{R}$ が有界なリーマン可積分な関数であるとき f は A 上ルベーグ可積分であり, それぞれの積分の値は一致する.

定理 A.4.7. $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^d$ かつ $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$ では $f(x) = 0$ とする. さらに $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ は有界で $A_n \nearrow A$ とする.

(a) $f_n(x) = f(x) 1_{A_n}(x)$ としたときに f_n は有界でリーマン可積分,
(b) $\sup_{n \geqslant 1} \underline{D}(|f_n|) < \infty$,

を満たすとき $\displaystyle\int_A |f(x)| m(dx) < \infty$, かつ $\displaystyle\int_A f(x) m(dx) = \lim_{n\to\infty} \underline{D}(f_n)$, つまり広義積分の値とルベーグ積分の値が一致する.

注意 A.4.8. 簡潔に言うと f の広義積分が絶対収束すると f はルベーグ可積分であり, 両者の値は一致する.

A.5 収束定理

この節ではルベーグ積分論における非常に重要な定理である 3 つの収束定理について述べる.

定理 A.5.1. (単調収束定理)
$f, \{f_n\}_{n \geqslant 1}$ は非負可測関数で任意点 $x \in X$ で

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots, \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

を満たすとする. このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \mu(dx) = \int_X f(x) \mu(dx).$$

ただし両辺が ∞ になる場合も含める.

問 A.5.2. 単調収束定理を用いて

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!}$$

を示せ.

補題 A.5.3. (ファトゥの補題)
$\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ は非負可測関数とする. このとき

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) \mu(dx) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \mu(dx).$$

次の定理がルベーグ積分において最も重要な定理である.

定理 A.5.4. (ルベーグの優収束定理)

$\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ は可測関数で, ほとんど全ての点 $x\in X$ で $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とする.

ある非負可積分関数 g に対して
ほとんど全ての点 $x\in X$ で $|f_n(x)|\leqslant g(x)$ $(n\geqslant 1)$ が成り立つとする. (付録 A.9)

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n(x)-f(x)|\mu(dx)=0.\ \text{特に}\ \lim_{n\to\infty}\int_X f_n(x)\mu(dx)=\int_X f(x)\mu(dx).$$

例題 A.5.5. (i) $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx\cos x}{n^2x^2+1}dx$ を考えると, 簡単な計算で各 n で $\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{nx\cos x}{n^2x^2+1}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ であり, $\frac{1}{2}$ は $[0,1]$ 上可積分であるのでルベーグの優収束定理が使えて積分の極限は 0 である. (ルベーグ積分論を使わずにリーマン積分の知識だけでも 0 に証明することは示せる.)

(ii) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^n}dx$ を考えると, $\lim_{n\to\infty} e^{-x^n}=\begin{cases}1 & x\in[0,1)\\ e^{-1} & x=1\\ 0 & x\in(1,\infty)\end{cases}$ となることがわかる. また $|e^{-x^n}|\leqslant 1_{[0,1]}(x)+e^{-x}1_{(1,\infty)}(x)$ が全ての点で成り立ち, 右辺は可積分であるのでルベーグの収束定理が適用でき積分の極限は 1 であることがわかる.

問 A.5.6. 以下の積分の極限の値を求めよ.

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\frac{e^{-nx}\sin x}{1+e^{-nx}}dx$ (ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\frac{n\sin x}{1+n^2\sqrt{x}}dx$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx$ (iv) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\sqrt{n}(1-x^2)^n dx$

問 A.5.7. $x\in\mathbb{R}$ とする. f を $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分関数とする. このとき

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}} f(y-x)dy$$

は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ.

問 A.5.8. $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ を X 上の可積分な関数で $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ がほとんどいたるところ収束するとする. このとき次のことを示せ.

$$\int_X\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|d\mu(x)<\infty\Rightarrow\int_X\sum_{n\geqslant 1}f_n(x)d\mu(x)=\sum_{n\geqslant 1}\int_X f_n(x)d\mu(x)$$

問 A.5.9. $t>0$ に対して $f_t(x)=\left(1+\frac{x}{t}\right)^{t^2}e^{-tx}$ $(x>-t)$, $f_t(x)=0$ $(x\leqslant -t)$ と定義する.

(i) $s>-1$ に対して $\Gamma(s+1)=s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\int_{-\sqrt{s}}^{\infty} f_{\sqrt{s}}(x)dx$ であることを示せ.

(ii) すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $\lim_{t\to\infty} f_t(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を示せ.

(iii) $t\mapsto f_t(x)$ は $x>0$ では単調減少, $x<0$ では単調増加であることを示せ.
(**Hint**: $g_t(x)=\log f_t(x)$ に対して $x\mapsto\frac{\partial}{\partial t}g_t(x)$ が単調減少であることを示す.)

(iv) $\displaystyle\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+1)}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}=\sqrt{2\pi}$ (**Stirling の公式**) を示せ.

補足: $s \in \mathbb{N}$ のとき $\Gamma(s+1) = s!$ であることに注意すると Stirling の公式は $s!$ の近似を与えている.

ルベーグの収束定理の応用として微分と積分の順序交換に関する次の定理を挙げる.

定理 A.5.10. $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ とする.

(a) $f(t, x) : I \times X \to \mathbb{C}$ は各 $t \in I$ 毎に $\mathcal{F}$-可測で X 上可積分,

(b) ほとんど全ての $x \in X$ に対して x 毎に t の関数として $f(t, x)$ が I 上微分可能であり, X 上の可積分関数 g が存在して

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leqslant g(x), \quad \text{a.e.}\ x \in X$$

であるならば $\int_X f(t, x)\mu(dx)$ は t の関数として (a, b) 上微分可能であり

$$\frac{d}{dt} \int_X f(t, x)\mu(dx) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\mu(dx).$$

問 A.5.11. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を有界可測関数とする.

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) dy, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(i) $u(t, x)$ は $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上 t, x に関してそれぞれ偏微分可能であり,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) \right) dy,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t} \right) \right) dy$$

を満たすことを示せ.

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ を満たすことを示せ.

問 A.5.12. $a > 0, \theta \in \mathbb{R}$ に対して $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上の関数 $F(a, \theta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a} \right) \cos(\theta x) dx$ を考える. 以下の問に答えよ.

(i) $F(a, 0) = 1$ を示せ.

(ii) $F(a, \theta)$ は a に関して $(0, \infty)$ で, θ に関して $\mathbb{R}$ で無限階偏微分可能であることを示せ

(iii) $F(a, \theta)$ に関して適切な偏微分方程式を見つけ, それを解くことで $F(a, \theta)$ の値を a, θ を使って表せ.

問 A.5.13. $a < 0 < b$ とする. $I \subset \mathbb{R}$ とする. 実ルベーグ可測関数 $f : I \to \mathbb{R}$ は $\int_I |f(x)| dx < \infty$ であるとする. 全ての $\theta \in (a, b)$ に対して $\displaystyle\int_I e^{-\theta x} |f(x)| dx < \infty$ を仮定する. 以下の問に答えよ.

(i) $\mathrm{Re}\, z \in (a, b)$ であるとき $F(z) = \displaystyle\int_I f(x) \exp(-zx) dx$ は可積分であることを示せ.

(ii) (i) で定義した $F(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} : a < \mathrm{Re}\, z < b\}$ 上正則であることを示せ. ただし $z \in \mathbb{C}$ ならば $|e^z - 1| \leqslant |e^{|z|} - 1|$ であることは使ってよい.

(iii) 次の関数 $f: I \to \mathbb{R}$ に対して $F(it)$ を求めよ.

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} x^{s-1} e^{-x}, \quad I = (0, \infty), \quad (\text{ただし}, s > 0, \Gamma(s) = \int_I x^{s-1} e^{-x} dx).$$

$$(2) \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, I = [0, \infty).$$

最後に σ-有限な測度に関する重要な定義と定理を与えておく.

定義 A.5.14. 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ 上の測度 μ, ν を考える. 測度 μ が測度 ν に対して**絶対連続**であるとは

$$\nu(A) = 0 \text{ ならば} \mu(A) = 0 (A \in \mathcal{F})$$

が成り立つときをいい, $\mu \ll \nu$ とかく.

問 A.5.15. 測度空間 $(X, \mathcal{F}, \nu)$ 上の非負可測関数 f を考える. 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して $\mu(A) = \int_A f(x)\nu(dx)$ とすると, μ は $(X, \mathcal{F})$ 上の測度であり $\mu \ll \nu$ である.

この問の逆が言えることが次の定理の主張である.

定理 A.5.16. (Radon-Nikodym 定理)
μ, ν が σ-有限な測度とする. μ が ν に対して絶対連続ならば,

$$\text{ある非負可測関数 } g \text{ が存在して, 任意の } A \in \mathcal{F} \text{ に対して} \mu(A) = \int_A g(x)\nu(dx) \qquad (\text{付録 A.10})$$

が成り立つ. 可測関数 h が (付録 A.10) を満たすならば, $g(x) = h(x)$ ν-a.e. となる.

注意 A.5.17. 定理 A.5.16 で与えられた g を μ の ν に関する **Radon-Nikodym 微分**と呼ぶ.

付録 B　測度の存在と一意性

付録 A 章では測度の存在や一意性を仮定して, 測度の性質を色々と調べてきた. この章では存在と一意性を確かめていく.

B.1　ディンキンの π-λ 定理

測度の一意性を確かめるためにはどうすればよいのか. 定義に戻ると測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu_1)$ と $(X, \mathcal{F}, \mu_2)$ に対して

$$\mu_1 = \mu_2 \Leftrightarrow \text{全ての } A \in \mathcal{F} \text{ に対して } \mu_1(A) = \mu_2(A)$$

である. しかしここで「任意の $A \in \mathcal{F}$」は非常に強い条件で扱いづらい. そこでもう少し弱い条件で考えたい.

S: 集合. $\mathcal{P}, \mathcal{L} \subset 2^S$ とする.

定義 B.1.1. (a) $\mathcal{P}$ が **π-族**であるとは

$$A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$$

を満たすときをいう.

(b) $\mathcal{L}$ が **λ-族** (ディンキン族) であるとは

(i) $\Omega \in \mathcal{L}$
(ii) $A, B \in \mathcal{L}, A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathcal{L}$
(iii) $\{A_n\}_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{L}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \bigcup_{n \geqslant 1} A_n \in \mathcal{L}$

を満たすときをいう.

問 B.1.2. $\mathcal{A} \subset 2^S$ に対して $\mathcal{A}$ を含む最小の λ-族が存在することを示せ. ($\ell[\mathcal{A}]$ と表す.)

問 B.1.3. S を集合, $\mathcal{L} \subset 2^S$ とする. $\mathcal{L}$ が λ-族かつ π-族であるとき $\mathcal{L}$ は σ-加法族であることを示せ.

定理 B.1.4. $\mathcal{A} \subset 2^S$ が π-族であるとき $\sigma[\mathcal{A}] = \ell[\mathcal{A}]$ が成り立つ.

証明. ($\sigma[\mathcal{A}] \subset \ell[\mathcal{A}]$)　問 B.1.3 より $\ell[\mathcal{A}]$ が π-族であることを示せばよい.
$A \subset S$ に対して $\mathcal{L}_A = \{B \subset S : A \cap B \in \ell[\mathcal{A}]\}$ と定義する. このとき以下のことがわかる.

(i) $A \in \mathcal{A}$ ならば $\mathcal{L}_A \supset \mathcal{A}$ である.
(ii) $A \in \ell[\mathcal{A}]$ に対して $\mathcal{L}_A$ は λ-族である.

(ii) より $A \in \ell[\mathcal{A}]$ に対して $\mathcal{L}_A \supset \mathcal{A}$ が示されると定理が従うことに注意する.
(i), (ii) より $A \in \mathcal{A}$ ならば $\mathcal{L}_A \supset \ell[\mathcal{A}]$ である. つまり

$$A \in \mathcal{A}, B \in \ell[\mathcal{A}] \Rightarrow A \cap B \in \ell[\mathcal{A}] \tag{付録 B.1}$$

である. (付録 B.1) より $A \in \ell[\mathcal{L}]$ に対して $\mathcal{L}_A \supset \mathcal{A}$ がわかるので示せた.

($\ell[\mathcal{A}] \subset \sigma[\mathcal{A}]$)　明らかに $\sigma[\mathcal{A}]$ は $\mathcal{A}$ を含む λ-族である. よって $\ell[\mathcal{A}]$ の最小性から示された. □

問 B.1.5. 定理 B.1.4 の証明の (i), (ii) を示せ.

次の問は確率論ではよく使う重要な事実であるので一度確認しておくこと.

問 B.1.6. $\mathcal{I}_1 = \{(a,b] \subset \mathbb{R} : -\infty \leqslant a < b < \infty\}$ とする. このとき $\mathcal{I}_1$ は π-族であることを示せ. また

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \ell[\mathcal{I}_1]$$

となることを示せ.

問 B.1.7. $\mathcal{I}_d = \left\{ \prod_{i=1}^{d} (a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^d : -\infty \leqslant a_i < b_i < \infty, 1 \leqslant i \leqslant d \right\}$ とする. このとき $\mathcal{I}_d$ は π-族であることを示せ. また

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \ell[\mathcal{I}_d]$$

となることを示せ.

次の定理は測度の一致に関する判定条件を与える.

定理 B.1.8. $\mathcal{G} \subset 2^S$ は π-族とする.

$\sigma[\mathcal{G}]$ 上の測度 μ_1, μ_2 が $(\mathcal{G}, \mu_1|_{\mathcal{G}}) = (\mathcal{G}, \mu_2|_{\mathcal{G}})$, かつ

$$\text{ある } \{A_n\}_{n \geqslant 1} \subset \mathcal{G} \text{ が存在して } A_1 \subset A_2 \subset \cdots, \bigcup_{n \geqslant 1} A_n = S, \mu_0(A_n) < \infty \tag{付録 B.2}$$

を満たすとする. ただし $\mu_0 = \mu_1|_{\mathcal{G}} = \mu_2|_{\mathcal{G}}$ とする.

このとき $(S, \sigma[\mathcal{G}], \mu_1) = (S, \sigma[\mathcal{G}], \mu_2)$ である.

注意 B.1.9. 確率測度を考えるときは (付録 B.2) は自然に満たされる. 特に例題 B.1.6 より $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度 μ_1, μ_2 が任意の $I \in \mathcal{I}_1$ に対して $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ ならば $\mu_1 = \mu_2$ である.

証明. 各 n に対して

$$\mathcal{L}_n = \{B \in \sigma[\mathcal{G}] : \mu_1(B \cap A_n) = \mu_2(B \cap A_n)\}$$

と定義する. $\mathcal{L}_n$ は λ-族であり, $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}_n$ を満たす. よって任意の $B \in \ell[\mathcal{G}] = \sigma[\mathcal{G}]$ に対して $\mu_1(B \cap A_n) = \mu_2(B \cap A_n)$ が成り立つので $n \to \infty$ とすることで $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ である. □

問 B.1.10. 定理 B.1.8 の証明の $\mathcal{L}_n$ が λ-族であることを示せ.

次に測度の存在と一意性に関する定理を与える. 証明は長くなるため省略するが, 一度は測度論の教科書で確認しておくと良い.

$(X, \mathcal{G}, \mu_0)$: 有限加法的測度空間.

定理 B.1.11. **(E. ホップの拡張定理)**

μ_0 が $\sigma[\mathcal{G}]$ 上の測度 μ へ拡張可能

$$\Leftrightarrow \quad E_n \in \mathcal{G},\ E_n \cap E_m = \varnothing\ (n \neq m),\ E = \bigcup_{n \geqslant 1} E_n \in \mathcal{G}\ \Rightarrow \mu_0(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n).(\text{完全加法性}) \tag{付録 B.3}$$

特に (付録 B.2) を満たすとき拡張は一意である.

最後に (付録 B.3) の同値な条件を確認しておく. 応用上ではこちらを使う方が議論が簡単な場合がある.

定理 B.1.12. $(X, \mathcal{G}, \mu_0)$: 有限加法的測度空間.

$$E_n \in \mathcal{G},\ E_n \supset E_{n+1},\ \mu_0(E_1) < \infty, \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_0(E_n) = 0. \tag{付録 B.4}$$

$$E_n \in \mathcal{G},\ E_n \subset E_{n+1},\ \mu_0(E_1) < \infty, E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{G},\ \mu_0(E) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_0(E_n) = \infty. \tag{付録 B.5}$$

とする. このとき

$$(\text{付録 } B.3) \Leftrightarrow (\text{付録 } B.4) \text{ かつ } (\text{付録 } B.5).$$

また, (付録 B.2) を満たしているとき, (付録 B.5) は次の条件に置き換えられる.

$$E \in \mathcal{G},\ \mu_0(E) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu_0(E \cap A_n) = \infty \tag{付録 B.5'}$$

B.2 測度の正則性

この節では測度の正則性について述べておく. これは可測集合の測度値が開集合, 閉集合の測度で近似できることを意味する概念である.

正確な定義は以下のようになる.

$(S,\mathcal{O})$: 位相空間.
$(S,\mathcal{F},\mu)$: 測度空間

定義 B.2.1. $A \in \mathcal{F}$ が**正則**であるとは

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ はコンパクト}.K \subset A, K \in \mathcal{F}\}$$

を満たすときをいう.

μ が有限測度であるとき, S が正則ならば μ は**緊密**であるという.

また $A \in \mathcal{F}$ が

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ は閉集合}.K \subset A, K \in \mathcal{F}\}$$

を満たすとき, A は**閉正則**であるという.

任意の $A \in \mathcal{F}$ が (閉) 正則であるとき μ は (閉) 正則であるという.

例題 B.2.2. $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ 上の有限測度は緊密である.

問 B.2.3. $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ とする. $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して $\mu(B) = \lambda(B \cap [0,1])$ と定義する. ただし λ は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ測度とする. このとき A は μ に対して正則であることを示せ.

$(S,\mathcal{O})$: 位相空間.

定義 B.2.4. ボレル集合族 $\mathcal{B}(S)$ 上の測度の**ボレル測度**という.

特に距離空間上のボレル測度は良い正則性を持っていることが知られている.

定理 B.2.5. 距離空間 (S,d) 上の任意の有限ボレル測度は閉正則である. また μ が緊密であるとき正則である.

定理 B.2.6. 完備可分距離空間 (S,d) 上の任意の有限ボレル測度は正則である.

付録 C　フビニの定理

直積空間上の測度と積分について, および測度に関して他に細々した内容を載せておく.

C.1　直積測度とフビニの定理

$(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ を測度空間とする.

$Z = X \times Y$ とする.

定義 C.1.1. Z の部分集合 E が $A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y$ を使って $E = A \times B$ と書けるとき E は**矩形集合**であるという.

Z の部分集合族を

$$\mathcal{G}_Z = Z \text{ の矩形集合全体を含む最小の有限加法族}$$

と定義し, $\sigma[\mathcal{G}_Z]$ を**直積 σ-加法族**といい, $\sigma[\mathcal{G}_Z] = \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$ と表す.

定理 C.1.2. (直積測度の存在と一意性) $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ を<u>σ-有限な測度空間</u>とする. このとき $(Z, \sigma[\mathcal{G}_Z])$ 上の測度 μ_Z で $Z = A \times B$ $(A \in \mathcal{F}_X, B \in \mathcal{F}_Y)$ に対して

$$\mu_Z(E) = \mu_X(A)\mu_Y(B) \tag{付録 C.1}$$

を満たすようなものが存在し一意である.

(付録 C.1) を満たすような $(Z, \sigma[\mathcal{G}_Z])$ 上の測度を**直積測度**と呼び, $(Z, \sigma[\mathcal{G}_Z], \mu_Z)$ を**直積測度空間**という. また $(Z, \sigma[\mathcal{G}_Z], \mu_Z)$ を $(X \times Y, \mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$ と表す.

記号 C.1.3. $(W, \mathcal{F}_W)$ は可測空間, $f : X \times Y \to W$ が $\sigma[\mathcal{G}_Z]/\mathcal{F}_W$-可測関数とする. 各 $x \in X$ に対して $f(x, y)$ を Y 上の関数と見なしたものを $f_x(y)$ と表すことにする. 同様に各 $y \in Y$ に対して $f(x, y)$ を X 上の関数と見なしたものを $f_y(x)$ と表すことにする.

定理 C.1.4. (フビニの定理) $(X, \mathcal{F}_X, \mu_X)$, $(Y, \mathcal{F}_Y, \mu_Y)$ は σ-有限な測度空間とする. このとき次が成り立つ.

(i) $f : Z = X \times Y \to [0, \infty]$ が $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$-可測であるとする. $\varphi(x) = \int_Y f_x(y)\mu(dy)$, $\psi(y) = \int_X f_y(x)\mu_X(dx)$ とすると
　(a) φ は $\mathcal{F}_X$-可測関数, ψ は $\mathcal{F}_Y$-可測関数であり,
　(b) $\displaystyle\int_X \varphi(x)\mu_X(dx) = \int_{X \times Y} f(z)\mu_Z(dz) = \int_Y \psi(y)\mu_Y(dy)$.

(ii) $f : Z = X \times Y \to \mathbb{C}$ が $\mathcal{F}_X \otimes \mathcal{F}_Y$-可測であるとする. このとき ((i)a) を満たし, f を $|f|$ と置き換えたときに ((i)b) のいずれかの積分が有限ならば f に対しても ((i)b) が成り立つ.

問 C.1.5. $0 < a < b < \infty$ に対して $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y \leqslant b\}$ とおく.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \iint_D x^d x dy = \log \frac{1+b}{1+a}$$

となることを示せ.

例題 C.1.6. $E = [0,1]^n$, $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする. $\displaystyle\int_E \max\{x_1, \cdots, x_n\} dx_1 \cdots dx_n$ を計算する. つぎのような点の集合 E_I を考える.

$$E_I = \{1 \geqslant x_1 > x_2 > \cdots > x_n \geqslant 0\}.$$

さらに I の置換 σ, σ' に対して $\sigma \neq \sigma'$ のとき $E_{\sigma I}$ と $E_{\sigma' I}$ は非交差である. また $i \neq j$ に対して $x_i = x_j$ となるような点の集合はルベーグ測度 0 なので積分に影響しない. よって積分の対称性とフビニの定理より

$$\begin{aligned}
\int_E \max\{x_1, \cdots, x_n\} dx_1 \cdots dx_n &= n! \int_{E_I} x_1 dx \cdots dx_n \\
&= n! \int_0^1 x_1 \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_1 \cdots dx_n \\
&= n! \int_0^1 \frac{x_1^n}{(n-1)!} dx_1 = \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

問 C.1.7. $s > 0, \operatorname{Re} z > 0$ に対して

$$\Gamma_s(z) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-zx} dx$$

と定義する. 以下の問に答えよ.

(i) $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ で $\Gamma_s(z)$ は連続であることを示せ.

(ii) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 内の区分的に C^1 級の閉曲線 γ に対して $\displaystyle\int_\gamma \Gamma_s(z) dz = 0$ であることを示し, $\Gamma_s(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ で正則関数であることを示せ.

(iii) $\theta \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{\Gamma_s(1 - i\theta)}{\Gamma_s(1)}$ を求めよ.

付録 D　L^p-空間

ここからは関数の持つ性質について考察する. L^p-空間と呼ばれる関数空間を新たに導入するが偏微分方程式論では L^p-空間以外にもソボレフ空間やベゾフ空間など様々な関数空間を考える. 興味のある人は関連する文献を読むとよい.

D.1　L^p-空間の定義と基本的性質

$(X,\mathcal{F},\mu)$: 測度空間.

定義 D.1.1. $1 \leqslant p \leqslant \infty$ に対して L^p**-空間**を次のように定義する.

(i) $(1 \leqslant p < \infty)$ $L^p = L^p(X) = L^p(X,\mu) = \left\{ f \,\middle|\, f: X \to \mathbb{C},\ \mathcal{F}-\text{可測},\ \int_X |f(x)|^p \mu(dx) < \infty \right\}$

(ii) $(p = \infty)$ $L^\infty = L^\infty(X) = L^\infty(X,\mu) = \{f \,|\, f: X \to \mathbb{C}, \mathcal{F}\text{-可測, かつ本質的に有界.}\}$. ここで $\mathcal{F}$-可測関数 f が**本質的に有界**であるとはある定数 M が存在して $|f(x)| \leqslant M$ μ-a.e.$x \in X$ を満たすときをいう.

また $f \in L^p$ に対して

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\left(\int_X |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \inf\{M > 0 \,|\, |f(x)| \leqslant M, \mu\text{-a.e.}x \in X\}, & p = \infty \end{cases}$$

と定義する.

例題 D.1.2. $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度空間を考える. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f_\alpha(x) = (1+|x|)^\alpha$ とする. このとき $1 \leqslant p < \infty$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{\alpha p} dx = \int_{|\omega|=1} \int_0^\infty (1+r)^{\alpha p} r^{d-1} dr d\omega,\ \ \omega\text{: 角度成分}$$
$$\leqslant \omega_d \int_0^\infty (1+r)^{\alpha p + d - 1}.$$

ここで ω_d は $\mathbb{R}^d$ の単位球面の面積. 特に $\alpha p + d - 1 < -1$ のときこの値は有限になる. 一方, $\alpha p + d - 1 \geqslant -1$ のとき左辺は発散する.

問 D.1.3. f_α を例題 D.1.2 のものとする. $\alpha p + d - 1 \geqslant -1$ のとき $\int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|)^{\alpha p} dx = \infty$ であることを示せ.

問 D.1.4. f_α を例題 D.1.2 のものとする. $f_\alpha \in L^\infty$ となるような $\alpha \in \mathbb{R}$ の範囲を与えよ.

問 D.1.5. $X = B(0,1)$ 上のルベーグ測度空間を考える. ただし $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant 1\}$ とする. また $g_\alpha(x) = |x|^\alpha$ とおく. 以下のことを示せ.

(1) $\alpha \geqslant 0 \Rightarrow g_\alpha \in L^p$.
(2) $\alpha p + d > 0, p \neq \infty \Rightarrow g_\alpha \in L^p$.
(3) $\alpha p + d \leqslant 0, p \neq \infty \Rightarrow g_\alpha \notin L^p$.

問 D.1.6. $(X,\mathcal{F},\mu)$ は測度空間とする. $f, g: X \to \mathbb{C}$ が $\mathcal{F}$-可測関数とする. 以下の問に答えよ.

(i) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,\ \mu$-a.e.$x$

(ii) $\|fg\|_p \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_p$. ただし, 右辺で 0 と ∞ の積は 0 とする.

(iii) $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

例題 D.1.7. S が可算集合とする. $(S, 2^S, \sharp)$ に対しては特に $L^p(S)$ を $\ell^p(S)$ と表す.

次の補題で示す不等式は非常に有用である.

補題 D.1.8. (ヘルダーの不等式) $p, q \in [1, \infty]$ とする. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ であるとき

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

注: 特に $p = q = 2$ のとき補題 D.1.8 の不等式を**シュワルツの不等式**という.

問 D.1.9. $\mu(X) < \infty$ とする. $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ とする. このとき $L^q \subset L^p$ であることを示せ.

注: $\mu(X) = \infty$ であるとき一般には L^p と L^q の包含関係はない.

問題 付録 D.1. $L^{p-}([0,1], dx) = \displaystyle\bigcap_{q<p} L^q([0,1], dx)$ と定義する. $L^{p-}([0,1], dx) \neq L^p([0,1], dx)$ を示せ.

問 D.1.10. 測度空間 $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \sharp)$ に対して $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ のとき $\ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ であることを示せ.

次の不等式は L^p-空間における三角不等式でミンコウスキの不等式と呼ばれる.

補題 D.1.11. (ミンコウスキの不等式) $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f, g \in L^p$ であるとき

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

例題 D.1.12. $1 \leqslant p < \infty$ とする. $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^d x_i^p\right)^{1/p}$ と定義すると $(\mathbb{R}^d, q_p)$ はノルム空間である.

例題 D.1.13. $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \cdots, d\}$ と定義すると $(\mathbb{R}^d, q_\infty)$ はノルム空間である.

問 D.1.14. 例題 D.1.12, D.1.13 を確かめよ.

D.2 L^p-空間の完備性

この節では L^p-空間の完備性について議論する.
$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

今 L^p-空間がノルム空間かどうかを調べたい. まずベクトル空間であることは補題 D.1.11 を使うと容易にわかる. しかし $\|\cdot\|_p$ はそのままではノルムにならない.
実際, 可測関数 f が $f(x) = 0$ a.e.-x であるとき $\|f\|_p = 0$ であるので条件を満たさない. そこで次のように

同値関係を用いてノルム空間にする.

$(X, \mathcal{F}, \mu)$: 測度空間.

定義 D.2.1. L^p-空間の元について次のような同値関係を与える.

$f, g \in L^p(X, \mu)$ に対して

$$f \sim g \Leftrightarrow f(x) = g(x), \ \ \mu\text{-a.e.}x.$$

この同値関係 $\sim$ に関して $L^p(X,\mu)$ の商空間 $\tilde{L}^p(X,\mu) = L^p(X,\mu)/\sim$ を考え, 代表元 $\{f\} \in \tilde{L}^p(X,\mu)$ に対して $\|\{f\}\|_p$ を $\|f\|_p$ で定義する.

このとき $(\tilde{L}^p(X,\mu), \|\{\cdot\}\|_p)$ はノルム空間になる. つまり L^p の元 f, g は $f = g$ a.e.-x であるとき $f“=”g$ と同一視するとノルム空間と捉えることができる.

以下ノルム空間 $(\tilde{L}^p(X,\mu), \|\{\cdot\}\|_p)$ を改めて $(L^p(X,\mu), \|\cdot\|_p)$ と書くことにする.

問 D.2.2. 上で定義した $(\tilde{L}^p(X,\mu), \|\{\cdot\}\|_p)$ がノルム空間であることを確かめよ.

特に $p = 2$ のときは内積空間になる.

問 D.2.3. $f, g \in L^2$ に対して

$$(f, g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}\mu(dx)$$

と定義すると $(L^2, (\cdot,\cdot))$ は内積空間であることを示せ.

次の定理で L^p-空間の完備性を確認できる.

定理 D.2.4. L^p-空間は完備である. (つまり $(L^p, \|\cdot\|_p)$ はバナッハ空間である)

系 D.2.5. L^2 はヒルベルト空間である.

注意 D.2.6. 測度空間の完備性と L^p-空間の完備性は無関係.

問 D.2.7. $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ はノルム空間であるがバナッハ空間ではないことを示せ.

この講義ノートでは証明を与えないが, $1 \leqslant p < \infty$ のとき $L^p(\mathbb{R}^d)$ は可分であることも知られている.

$\{f_n\}_n$: $\mathcal{F}$-可測関数列, f: $\mathcal{F}$-可測関数.

補題 D.2.8. f_n が f に測度収束するときある部分列 $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ が存在して

$$\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x), \ \ \mu\text{-a.e.}x$$

とできる.

証明. $n_k > n_{k-1}$ を $\mu\left(|f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$ となるようなものとする. $A_{n_k} = \left\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{2^k}\right\}$ とおくと $\sum_k \mu(A_{n_k}) < \infty$ となりボレル-カンテリの補題より $\mu\left(\varlimsup_{n_k\to\infty} A_{n_k}\right) = 0$. つまり $A = \varlimsup_{n_k\to\infty} A_{n_k}$ としたとき $x \in X\backslash A^\varepsilon$ ではある k が存在して $j \geqslant k$ ならば

$$|f_{n_j}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2^j}$$

よって $f_{n_j}(x) \to f(x)$, a.e.x. □

以下, L^p-空間の元に関する主張を確かめる際などに役立つ定理を与える.

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする.

定理 D.2.9. S を X 上の複素数値可測単関数 s で

$$\mu(x \in X : s(x) \neq 0) < \infty$$

となるもの全体の成す集合とする. $1 \leqslant p < \infty$ のとき S は $L^p(\mu)$ で稠密である.

証明. $S \subset L^p(\mu)$ は明らかである. よって任意の $f \in L^p(\mu)$ に対して, ある $\{\varphi_n : n \geqslant 1\} \subset S$ で

$$\|f - \varphi_n\|_p \to 0, \quad n \to \infty$$

となるようなものが存在することを言えばよい. さらに $f \geqslant 0$ と仮定してよい. f に対して $\varphi_n(x)$ を問 A.4.4 のように選ぶ. このとき $\varphi_n \in L^p(\mu)$ であり, $|f(x) - \varphi_n(x)|^p \leqslant f(x)^p$ である. よってルベーグの収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f(x) - \varphi_n(x)|^p \mu(dx) = 0$$

となり示せた. □

位相空間 X 上の複素数値関数 f に対して, その**台**を

$$\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

で定義する.

次の定理は $L^p(\mathbb{R}^d)$ に対する非常によい性質を与える.

定理 D.2.10. $1 \leqslant p < \infty$ に対して $C_c(\mathbb{R}^d)$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である.
ただし $C_c(\mathbb{R}^d)$ は台がコンパクトとなるような複素数値関数全体である.

この定理の系として次の重要な結果が得られる.

系 D.2.11. $1 \leqslant p < \infty$ で $L^p(\mathbb{R}^d)$ は可分である.

系 *D.2.11* の証明. ストーン・ワイエルシュトラスの定理を使えばよい. □

付録 E　フーリエ変換

この節ではフーリエ変換の初歩的内容を確認しておく.

フーリエ変換では非常に大雑把に言うと $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対して

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\xi x}dx$$

を考えることで関数 f の性質を調べる.

ここでは f は "関数" としているがフーリエ変換の定義は関数にとどまらず超関数などにも拡張されている. 超関数に対するフーリエ変換などは関数解析の教科書等を参考にしてほしい.

E.1　フーリエ変換

この章以降は実直線空間 $\mathbb{R}$ 上の関数のみならず $\mathbb{R}^d$ 上の関数に対するフーリエ変換について考える.

定義 E.1.1. $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{ix\cdot\xi}dx \tag{付録 E.1}$$

を関数 f の**フーリエ変換**,

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \tag{付録 E.2}$$

を関数 f の**フーリエ逆変換**という.

注意 E.1.2. 積分の前の係数や指数の符号は文献により異なるので読む際に注意する必要がある.

またこのノートでは $\hat{f}, \check{f}$ と $\mathcal{F}[f], \mathcal{F}^{-1}[f]$ は状況に応じて使い分けることにする.

以下, $L^1(\mathbb{R}^d)$ などの関数空間は特別な場合を除き, 定義域 $\mathbb{R}^d$ を省略し L^1 などと書くことにする.

まず初めに簡単なことを確かめよう.

定理 E.1.3.

$$f \in L^1 \text{ならば} \hat{f}, \check{f} \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty$$

である.

特に

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\|f\|_1,\ \ \|\check{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$$

である.

証明. $f \in L^1, h \in \mathbb{R}$ とする. このとき

$$\left|\hat{f}(\xi+h)-\hat{f}(\xi)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(e^{i(\xi+h)\cdot x}-e^{i\xi\cdot x}\right)\right|dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d}|e^{ih\cdot x}-1||f(x)|dx \qquad \text{(付録 E.3)}$$

となる. (付録 E.3) の右辺はルベーグの収束定理より $h \to 0$ のとき 0 に収束する. よって $\hat{f}$ は連続である. 他は容易に分かる. □

問 E.1.4. (付録 E.3) の右辺が $h \to 0$ のときに 0 へ収束することを示せ.

注意 E.1.5. 定理 E.1.3 よりフーリエ変換 $\mathcal{F}$ およびフーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ は L^1 から $C(\mathbb{R}^d) \cap L^1$ への有界線形作用素であることがわかる.

さらに詳しく $\hat{f}, \check{f}$ を見ることができる.

定理 E.1.6. **(リーマン-ルベーグの定理)** $f \in L^1$ とする. このとき

$$\lim_{|\xi|\to\infty}|\hat{f}(\xi)| = 0, \quad \lim_{|x|\to\infty}|\check{f}(x)| = 0$$

問 E.1.7. $f \in L^1$ であるとき, $\hat{f}(\xi), \check{f}(x)$ は一様連続であることを示せ.

例題 E.1.8. $f(x) = \mathbf{1}_{|x|<1}(x)$ とする. このとき

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-1}^{1} e^{i\xi x}dx = \left[\frac{e^{i\xi x}}{\xi i}\right]_{-1}^{1} = \frac{2\sin\xi}{\xi}$$

となる.

例題 E.1.8 より L^1 関数のフーリエ変換が L^1 関数になるとは限らないことがわかる.

これにより $\hat{\hat{f}}$ や $\check{\check{f}}$ などを考えることは一般的ではないことがわかる. それではどのような f に対してフーリエ変換を考えるのが適切だろうか.

そこで考え出された関数空間がシュワルツ空間である.

E.2 シュワルツ空間

定義 E.2.1. $v \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ が

$$\text{任意の } \ell, m \in \mathbb{N}_0 \text{に対して} \sup_{x\in\mathbb{R}^d}(1+|x|)^m \sum_{|\alpha|\leqslant\ell}|\partial_x^\alpha v(x)| < \infty$$

を満たすとき**急減少関数**であるという. ただし,

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^{d}\alpha_j$$
$$\partial_x^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}v(x)$$

とする.

また急減少関数全体の集合を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{S}$ と表し**シュワルツ空間**という.

急減少関数の例として $e^{-|x|^2}$ や $e^{-|x|}$ などがある.

注意 E.2.2. 明らかに $\mathcal{S}$ は線形空間である. さらに

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\subset L^1(\mathbb{R}^d)$$

である. 実際 $v\in\mathcal{S}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|v(x)|dx&=\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{-d-1}\times(1+|x|)^{d+1}|v(x)|dx\\&\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left((1+|x|)^{d+1}|v(x)|\right)\int_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{-d-1}dx<\infty.\end{aligned}$$

また $v\in\mathcal{S}$ ならば任意の $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_d)\in\mathbb{N}_0^d$ に対して

$$x^\beta\partial_x^\alpha v\in\mathcal{S}$$

である. ただし $x=(x_1,\cdots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ に対して

$$x^\beta=\prod_{j=1}^d x_j^{\beta_j}$$

とする.

シュワルツ空間がフーリエ変換との相性がよいことは次の定理を見れば一目瞭然である.

定理 E.2.3. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}_0^d$ とする. このとき

$$v\in\mathcal{S}\text{ ならば}\hat{v},\check{v}\in\mathcal{S}$$

である.

証明. 略. □

問 E.2.4. 定理 E.2.3 を証明せよ.

定理 E.2.3 により $\mathcal{F},\mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{S}$ 上の線形変換であることがわかった.

このことから $\mathcal{F}^2$ や $\mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}$ などの線形変換を考えられるようになった. これを用いると次のようにフーリエ変換が対する非常によい性質を持つことがわかる.

定理 E.2.5. **(フーリエの反転公式)** $v\in\mathcal{S}$ とする. このとき

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[f](\cdot)\right](x)=\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[f](\cdot)\right](x)=v(x)$$

が成り立つ.

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{S}$ 上の同型写像であり, 互いに逆写像になっている.

注意 E.2.6. 単純に書くと

$$\begin{aligned}\check{\hat{v}}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y}v(y)dy\right)d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot(y-x)}v(y)dyd\xi\end{aligned}$$

となる. 被積分関数は $L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ の元ではないのでフビニの定理が使えない. そこで証明では一度フビニの定理が適用できるような近似を行う.

証明. $\check{\hat{v}} = v$ を示す. $\varepsilon > 0$ に対して

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\xi\cdot y}v(y)dyd\xi$$

とおくと,

$$\begin{gathered}e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}}\hat{v}(\xi) \to e^{-i\xi\cdot x}\hat{v}(\xi) \quad (\varepsilon \to 0) \\ \left|e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}}\hat{v}(\xi)\right| \leqslant |\hat{v}(\xi)| \in L^1\end{gathered}$$

が成り立つのでルベーグの収束定理より,

$$I_\varepsilon(x) \to \check{\hat{v}}(x) \qquad (\varepsilon \to 0)$$

である. 一方,

$$\left|e^{-i\xi\cdot x}e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}}e^{i\xi\cdot y}v(y)\right| = e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}}|v(y)| \leqslant L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

であるのでフビニの定理が適用でき

$$\begin{aligned}I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} v(x)\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{\varepsilon|\xi|^2}{2}+i\xi\cdot(y-x)}d\xi\right)dx \\ &\overset{\text{問 5.2.13}}{=} \frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}v(y)dy.\end{aligned}$$

v は有界連続関数であるのでルベーグの収束定理より

$$I_\varepsilon(x) \to v(x) \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる. □

問 E.2.7. v が $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数であるとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(2\pi\varepsilon)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2\varepsilon}}v(y)dy = v(x)$$

が成り立つことを示せ.

注意 E.2.8. 定理 E.2.5 の証明を見ると

$$v \in C\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \text{かつ} \hat{v} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$$

ならば

$$\check{\hat{v}}(x) = v(x)$$

が成り立つことがわかる.

フーリエの反転公式を用いて熱方程式の解を求めてみよう. これはフーリエ変換の偏微分方程式への応用として非常に重要なものになっている.

例題 E.2.9. f を $\mathbb{R}$ 上の有界連続可積分関数とする. 熱方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \dfrac{1}{2}\Delta u(t,x), & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

を考える.

解 u が各 t に対して $\mathcal{S}$, かつ t に関する偏微分 $\partial_t u \in \mathcal{S}$ と仮定する. このとき u の変数 x に対するフーリエ変換を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u(t,\cdot)](\xi) &= -\frac{1}{2}|\xi|^2\mathcal{F}[u(t,\cdot)](\xi) \\ \mathcal{F}[u(0,\cdot)](\xi) &= \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

この微分方程式は解けて

$$\mathcal{F}[u(t,\cdot)](\xi) = \exp\left(-\frac{1}{2}t|\xi|^2\right)\hat{f}(\xi)$$

となり, 右辺は $t > 0$ で $\mathcal{S}$ に入るのでフーリエの反転公式より

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\frac{1}{2}t|\cdot|^2}\hat{f}(\cdot)\right](x) \tag{付録 E.4}$$

が解となる. フーリエの反転公式の証明から右辺は実際に計算でき

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}v(y)dy$$

となる. これが解になる.

さらにこの解について詳しく見ていくと右辺は任意の有界連続関数に対して定義でき, さらに熱方程式を実際に満たすことが容易に確認できる.

最初に f について様々な仮定をおいたが, 最終的にはフーリエ変換を用いることでより広い初期値に対して解が構成できたことになる.

また熱方程式の解を考えると各 $t > 0$ に対して線形作用素

$$P_t : C_b(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \ \ P_t f(x) = u(t,x)$$

が構成できたことになる. 特にこの線形作用素は

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$$

を核とする核型線形作用素である. この $p_t(x)$ を**熱核**という.

また $P_tP_s = P_{t+s}$ である, つまり $\{P_t : t > 0\}$ は半群になっている.

次の定理は容易に示せるので証明はつけないがたたみこみとフーリエ変換に関する重要な性質を与えている.

定理 E.2.10. $v, w \in \mathcal{S}$ とする. このとき

$$\widehat{u * v}(\xi) = \hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi), \qquad \widetilde{u * v}(\xi) = (2\pi)^d\check{u}(\xi)\check{v}(\xi).$$

問 E.2.11. 定理 E.2.10 を証明せよ.

索引