B

令和3年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．**受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．**

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．**指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．**

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子，および解答用冊子の表紙・白紙は持ち帰ること．

（下 書 き 用 紙）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{1}$ a，b を $ab < 1$ をみたす正の実数とする．xy 平面上の点 $\mathrm{P}(a, b)$ から，曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$ に 2 本の接線を引き，その接点を $\mathrm{Q}\left(s, \dfrac{1}{s}\right)$，$\mathrm{R}\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ とする．ただし，$s < t$ とする．

(1) s および t を a，b を用いて表せ．

(2) 点 $\mathrm{P}(a, b)$ が曲線 $y = \dfrac{9}{4} - 3x^2$ 上の $x > 0$，$y > 0$ をみたす部分を動くとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値とそのときの a，b の値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{2}$ 空間内に，同一平面上にない 4 点 O，A，B，C がある．s，t を $0 < s < 1$，$0 < t < 1$ をみたす実数とする．線分 OA を $1:1$ に内分する点を A_0，線分 OB を $1:2$ に内分する点を B_0，線分 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P，線分 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする．さらに 4 点 A_0，B_0，P，Q が同一平面上にあるとする．

(1) t を s を用いて表せ．

(2) $|\overrightarrow{OA}| = 1$，$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$，$\angle AOB = 120^\circ$，$\angle BOC = 90^\circ$，$\angle COA = 60^\circ$，$\angle POQ = 90^\circ$ であるとき，s の値を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{3}$ n を自然数とし，t を $t \geqq 1$ をみたす実数とする．

(1) $x \geqq t$ のとき，不等式

$$-\frac{(x-t)^2}{2} \leqq \log x - \log t - \frac{1}{t}(x-t) \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 不等式

$$-\frac{1}{6n^3} \leqq \int_t^{t+\frac{1}{n}} \log x\,dx - \frac{1}{n}\log t - \frac{1}{2tn^2} \leqq 0$$

が成り立つことを示せ．

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \log\left(1+\frac{k}{n}\right)$ とおく．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n - pn) = q$ をみたすような実数 p, q の値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{4}$ 整数 a，b，c に関する次の条件 $(*)$ を考える．

$$\int_a^c (x^2+bx)\,dx = \int_b^c (x^2+ax)\,dx \quad \cdots\cdots \ (*)$$

(1) 整数 a，b，c が $(*)$ および $a \neq b$ をみたすとき，c は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $c = 3600$ のとき，$(*)$ および $a < b$ をみたす整数の組 (a, b) の個数を求めよ．

（配点率 20 %）

（下 書 き 用 紙）

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．x についての方程式 $x - \tan x = a$ の実数解のうち，$|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたすものがちょうど 1 個あることを示せ．

(2) 自然数 n に対し，$x - \tan x = n\pi$ かつ $|x| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数 x を x_n とおく．t を $|t| < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とする．このとき，曲線 $C : y = \sin x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \sin t)$ における接線が，不等式 $x \geqq \dfrac{\pi}{2}$ の表す領域に含まれる点においても曲線 C と接するための必要十分条件は，t が $x_1, x_2, x_3, \ldots$ のいずれかと等しいことであることを示せ．

（配点率 20 %）