

連載

最新宇宙誌【1】

エポック I : 宇宙の誕生～宇宙開闢の物語（前編）

福江 純（大阪教育大学）

1. 純白の時代—宇宙の誕生

すべてののはじまりは“白”それもきわめて高度な“純白”だったことだろう。時空のキャンパスにはまだ何も描かれておらず、生命や星はおろか物質さえ存在しなかった時代。すべてが光り輝く純粋のエネルギーだった時代。宇宙のはじまりとは、そういう時代だったはずだ。宇宙開闢から計った時間は 0（赤方偏移は ∞ ）、宇宙のサイズも 0（現在との比率も 0）である。

さて、宇宙の過去から未来にいたる歴史で、起こった（起こるだろう）出来事を年表方式でまとめてみると、おおむね表 1 のようになるだろうか（図 1 も参照）。

表 1 の最初の欄は宇宙が誕生してから経過した時間で、2 番目のサイズ比は現在の宇宙に対する比率（この逆数から 1 を引いたものが赤方偏移 z になる）、3 番目は宇宙の大きさスケールで、4 番目は宇宙に満ちた放射の温度、そして最後の欄が主な出来事である。

表 1 宇宙の歴史

時間	サイズ比	大きさ	温度	主な出来事
0	0	0	∞	無からの宇宙(時空)の誕生 インフレーションの開始

【第 0 の相転移】

プランク時間 = $(Gh/c^5)^{1/2}$

時空の量子的ゆらぎの終わり

【第 1 の相転移：重力と強い力の分離】

10^{-44} 秒 10^{-33} 10^{-3} cm 10^{32} K 重力が誕生する

【第 2 の相転移：強い力と弱い力の分離】

10^{-36} 秒 10^{-30} 1cm 10^{28} K 強い力が誕生しバリオン数が発生する

【第 3 の相転移：弱い力と電磁力の分離】

10^{-11} 秒 10^{-15} 100AU 10^{15} K 電子が誕生する

【第 4 の相転移：クォークがハドロンに】

10^{-6} 秒 * * 10兆K 陽子・反陽子の対消滅
 10^{-4} 秒 * * 1兆K 中間子が対消滅し、クォークがハドロンになる

10秒 10^{-10} * 30億K 電子・陽電子が対消滅し、光(エネルギー)になる

100秒 10^{-8} 10^3 光年 10億K 元素合成の開始
 (He, D, Li など合成)

1万年 10^{-4} 10^3 万光年 3万K 輻射の時代の終わり
 物質の時代の始まり

【宇宙の晴れ上がり：再結合時代】

38万年 10^{-3} 1億光年 3000K 陽子と電子が結合、水素原子ができる

【宇宙の再電離】

2億年 0.1 約10億光年 * 初代天体の形成と宇宙の再電離

10億年 0.17 約20億光年 * クェーサー形成

30億年 0.33 約45億光年 * 銀河ができる

90億年 0.75 約46億年前 太陽と地球の誕生

100億年頃 約36億年前 生命が発生する

約100万年前 人類の誕生

137億年 1 137億光年 2.7K 現在

約20年後 核融合が実用化する

約30年後 月面基地の建設

約50年後 スペースコロニー

約100年後 軌道エレベータ

数百年後 ダイソン球の建設

数千年後 ブラックホール発電

190億年頃 約50億年後 太陽の赤色巨星化

1兆年頃 銀河の老齢化

100兆年頃 星が燃え尽きる

10^{32} 年頃 陽子の崩壊

10^{100} 年頃 ブラックホールの蒸発

ワインバーグの名著にならえば、今回は“最初の3分間”に何が起こったのかという話になるだろうか。とくに時空（宇宙）の誕生と時空相の変化について眺めていこう。

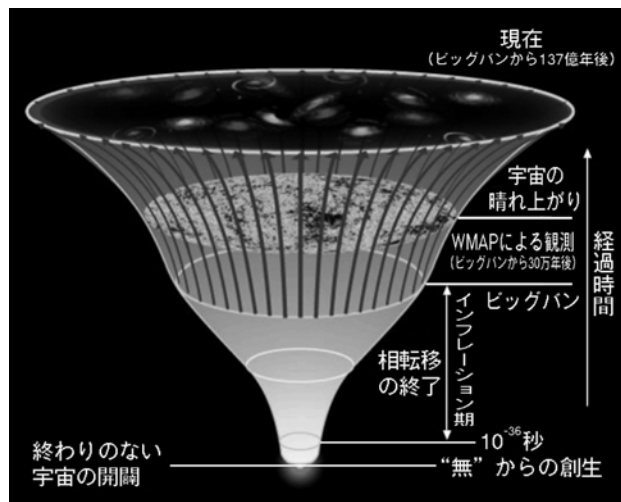


図1 ビッグバン膨張宇宙のイメージ図

垂直方向が時間軸（下が過去で上が未来）で、水平方向が空間軸になっている。時間が経つにつれ、空間が膨張している。先にも書いたが、宇宙の時空構造は単純なビッグバンモデルでは記述できない。超空間の中で無から宇宙は創生し、インフレーション的な膨張を経て、緩やかなビッグバン減速膨張に移行し、さらにふたたび加速膨張に転じているらしい。

（出典：<http://www.nikon.co.jp/main/eng/feelnikon/discovery/light/chap01/sec01.htm>）

【表1の数値についての補遺】

表1の具体的な数値は、いろいろな資料から引っ張ってきたり、適当な宇宙モデルで計算したり、最新の観測データで補正したものの、ごったまぜなので、全体としての整合性は取れていない。これまで書いたモノやこれから書いていくモノなども、表1の数値とは微妙に異なるだろう。さらに、宇宙の再電離や銀河の形成など、時間的に幅をもつ出来事もある。したがって、表1の数値はあくまでも、だいたいの目安だと考えて欲しい。ただし、気になる人のために、一応、基準とした数値を書いておく。

まず現在の宇宙に関して。現在の宇宙の膨張率

であるハッブル定数 H_0 の値としては、いわゆる最新の値として、

$$H_0 = 72 \text{ km/s/Mpc}$$

を用いた（誤差は省略）。この値は、1Mpc（＝326万光年）の彼方における宇宙の膨張速度が72km/sだということを表している。

ハッブル定数の逆数は時間の次元をもっていて、ハッブル時間と呼ばれているが、宇宙の年齢の目安となる。上記の値を使うと、ハッブル時間 t_0 は、

$$t_0 = 1/H_0 = 137 \text{ 億年}$$

となる。これは同時に、最新の観測から得られている現在の宇宙の年齢である（実際に計算した人は、136億年ぐらいになったと思うが、まあ、公称値に合わせた）。

ハッブル時間に光速をかけたものは長さの次元をもっていて、宇宙の大きさの目安となる。名前が付いているかどうかはよく知らないが、ここではハッブルサイズと呼んでおこう。ハッブルサイズ a_0 は、

$$a_0 = c/H_0 = 137 \text{ 億光年}$$

になる。

つぎに、過去の宇宙に関してであるが、観測に加えて、採用する宇宙モデルや素粒子理論などによっても数値が異なってくる。表1では、わかりやすさを優先させて、宇宙開闢以来の年齢を軸にしたが、この年齢は宇宙モデルでかなり左右される数値なので、通常は、基準スケールとしては、赤方偏移を採用することが多い。

さて、赤方偏移を基準スケールにすると、第2欄のサイズ比については、過去の宇宙のサイズを a 、現在の宇宙のサイズを a_0 とすると、赤方偏移 z は、

$$a/a_0 = 1/(1+z)$$

という関係式で表される。あるいは、上にも書いたように、サイズ比を用いれば、

$$1+z = 1/\text{サイズ比}$$

という関係があるので、表1のサイズ比から赤方偏移を出すのは簡単だろう。実際には、赤方偏移からサイズ比を出したりしているものもある（たとえば、宇宙の再電離は赤方偏移が12から6ぐらいで起こっているので、赤方偏移を10として、サイズ比を0.1と計算した）。

また、第3欄の宇宙の大きさについては、基本

的には、現在の宇宙のハッブルサイズにサイズ比をかけただけである。

第4欄の宇宙の温度については、今回チェックしていないが、初期のものについては素粒子とエネルギーの熱平衡から導かれているはずである。また、100秒後ぐらいから後で、物質が安定してからは、物質と輻射が熱平衡にある宇宙が断熱膨張して温度が下がっていったという仮定で計算されている。後者についてはエポックⅡで説明できる(かな)。

最後に、ふたたび第1欄の時間だが、先にも述べたように、ここが一番あやしい。いわゆる平坦な宇宙モデルだと、宇宙が始まってからの時間 t は、ハッブル定数あるいはハッブル時間と赤方偏移を使って、

$$t = (1/H_0) (2/3) (1+z)^{-3/2}$$

と表される。計算してみたらわかるように、表1の時間で近いのもあれば、桁が違うものもある。ぼくも電卓を叩くのがイヤになったので、まあ、適当に見ておいて欲しい。

2. フリードマン方程式

次の節の終わりまで書き終えて、インフレーション宇宙に入りかけたころ、言葉と図版だけでは、お話だけになってしまうことに気づいた。それなら一般向けの啓蒙書を読めばいい(たとえば、参考文献に挙げた『100歳になった相対性理論』『パラレルワールド』)。一方で、一般相対論的宇宙論の教科書は、そう気楽に読み切れるものでもない(たとえば、『宇宙論入門』)。そこで、やや天下りではあるが、ビッグバン宇宙モデルの根幹をなすフリードマン＝ルメートル方程式と、ビッグバン減速膨張解やインフレーション加速膨張解など、そのいくつかの解については、随所で説明することにした。

たしか朝永振一郎が言ったことだったかと思うが、物理的現象の理解というものは、①アイデアや思いつきで、その現象を直観的に理解する、②数式を立てて定式化し、その式を解いて定量的に解析する、③そして言葉(や

図版)をもって、小学生にでもわかるように説明する——細かい表現は違うかも知れない——の段階を踏んで、はじめてきちんと理解できたことになる。その意味で、言葉や図版だけで説明しきれず、数式に頼るのは少し情けないが、ご寛恕願いたい。

ポワソン方程式

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (1)$$

Δ : 空間偏微分演算子

Φ : 重力ポテンシャル

ρ : 密度分布

アインシュタイン方程式

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} + \Lambda g_{ik} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{ik} \quad (2)$$

g_{ik} : 時空の計量テンソル

R_{ik} : リッチテンソル

R : スカラー曲率

Λ : 宇宙定数(宇宙項)

エネルギー運動量テンソル

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - pg_{ik} \quad (3)$$

u_i : 4元速度

ε : 物質のエネルギー密度

p : 物質の圧力

2.1 アインシュタイン方程式

まずアインシュタイン方程式について、一言触れておこう。

ニュートン力学では、物質の密度分布 ρ と物質が作る重力ポテンシャル Φ の関係を表す式として、「ポワソン方程式」と呼ばれるものが知られている。

ポワソン方程式は、(1)式のような形をしていて、左辺が重力ポテンシャルの空間に関する2階偏微分方程式の形、右辺が密度分布になっている(右辺の G は万有引力定数)。ニュートン力学では、このような重力ポテンシャルの作る重力場の中で、物質の運動方程

式を解くことによって、物質の運動が得られる。その際、運動方程式とポワソン方程式を連立させて解くことによって、物質分布と物質運動が無矛盾に決まることになる。

このニュートン力学のポワソン方程式と運動方程式の両方の内容を含み、かつ、時空の構造やエネルギーと物質の等価性まで考慮して一般化したものが、アインシュタイン (A. Einstein) が導いた「アインシュタイン方程式」だと言っていいだろう。

アインシュタイン方程式は、(2) 式のような形をしているが、(運動方程式の内容も含んではいるものの) 見た目にはポワソン方程式に近く、

時空構造＝エネルギー物質分布

という関係式になっている。

すなわち、左辺は、時空構造に関する 2 階の偏微分方程式で、計量テンソル (メトリックテンソル) と呼ばれる 10 個の独立成分をもつ量がニュートン力学のポテンシャルの役割を果たしている。また、リッチテンソルやスカラー曲率と呼ばれる量は、計量テンソルの時間空間微分で得られる量なので、左辺は計量テンソルに関する時間空間についての 2 階の偏微分方程式になっている。

さらに左辺の Λ は有名な宇宙項で、宇宙定数とかラムダ項などとも呼ばれる。空間的な量として捉えれば斥力として働き、エネルギー的な量として解釈すると、正のエネルギー密度と負の圧力をもつというダークエネルギーとして作用する。後で詳しく述べる。

一方、アインシュタイン方程式の右辺は、エネルギー物質分布に関する部分で、エネルギー運動量テンソルと呼ばれるテンソル量がニュートン力学の物質密度の代わりに入っている。独立成分の数も多いし、エネルギーや圧力なども入って一般化されているが、基本的には物質密度的なものである。実際、相対論的效果が非常に小さいときに、アインシュ

タイン方程式がポワソン方程式に一致するように、万有引力定数 G などを含む右辺の係数は定められている。

ちなみに、エネルギー運動量テンソルは、宇宙を構成している物質が理想流体 (理想気体) の場合、(3) 式のような形をしている。ここで 4 元速度というのは、通常の空間速度を 4 次元に拡張したものである。また ε は熱エネルギーなども含めた物質のエネルギー密度で、密度 ρ を用いて、

$$\varepsilon = \rho c^2$$

と表すことも多い。熱エネルギーが小さければ、この密度は通常の物質密度と同じものになり、 ε は物質の静止質量エネルギーになる。

ニュートン力学のポワソン方程式と一般相対論のアインシュタイン方程式の違いを列挙しておく、

1) 右辺にエネルギーも入る：先にも書いたように、相対論ではエネルギーと質量は等価とみなすので、右辺には物質だけでなくエネルギーも入ってくる。

2) 左辺に時間が入る：ニュートン力学では、力は無限の速度で伝わるので、左辺は空間微分だけだった。しかし、一般相対論では、重力作用は有限の光速で伝わるので、左辺にも時間微分が入ってくる。

3) ポテンシャルの意味：最大の違いはポテンシャルの解釈だろう。ニュートン力学では、ポテンシャルはあくまでも仮想的なもの、重力の器として便利な概念だった。しかし、一般相対論では、ポテンシャル (計量テンソル) で表される空間の曲がり、物理的な実在だと考えている。

上記のアインシュタイン方程式は、まったく一般的に書いたものであって、計量テンソルなどの内容次第で、あるときはブラックホールを表すし、あるときは重力波を表すし、そしてまたあるときは宇宙構造を表す。

2.2 フリードマン＝ルメートル方程式

さて、本題のフリードマン方程式／ルメートル方程式だ。宇宙項を落とした場合は、1922年に宇宙項なしのアインシュタイン方程式を解いたソ連の数学者フリードマン (A. A. Friedmann) にちなんで「フリードマン方程式」と呼ぶべきだろうし、宇宙項を入れた場合は、1927年に宇宙項ありのアインシュタイン方程式を解いたベルギーの宇宙論学者ルメートル (G. E. Lemaitre) にちなんで「ルメートル方程式」あるいは「フリードマン＝ルメートル方程式」と呼ぶべきだろう。ただし、以下ではあまり厳密には区別しない。

フリードマン＝ルメートル方程式

FL1 (Friedman=Lemaitre Equation 1)

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (4)$$

FL2 (Friedman=Lemaitre Equation 2)

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p \quad (5)$$

さて、計量テンソルやリッチテンソルやエネルギー運動量テンソルは、ベクトルを一般化した2階のテンソルという量だが、これらのテンソルは時空が4次元であるために、 $4 \times 4 = 16$ 個の成分をもっている。対称性から（たとえば、エネルギー運動量テンソルで u_i と u_k を入れ替えても変わらない）、独立な成分は最大10個になり、アインシュタイン方程式も最大10本の成分しか出てこない。さらに、宇宙は一様で等方だという、いわゆる「宇宙原理」を仮定すると、アインシュタイン方程式から導かれる独立な式は、たったの2本になってしまう。それが、フリードマン＝ルメートル方程式の(4)式（以下ではFL1）と(5)式（以下ではFL2）だ。

このFL1とFL2は、実は非常に簡単な連立常微分方程式である。天下りではあるが、

ここからスタートすれば、高校生でも解ける！

すなわち、FL1とFL2は変数 a の時間 t に関する微分方程式の形になっている。変数 a は「スケールファクター」と呼ばれる量で、宇宙の大きさを表す因子である。宇宙の半径と考えてもらってもいいが、無限宇宙の半径がわかりにくければ、遠くの銀河との間の距離と解釈してもらっても構わない。また変数 a の上についている“ $\cdot$ ”（ドット）が時間微分 d/dt を表していて、ドットが一つなら1階微分、二つなら2階微分を意味している。したがって、FL1は時間に関する1階常微分方程式で、FL2は2階常微分方程式になっている。両者併せて、宇宙の大きさの時間変化を表す方程式になっているわけだ。そして、 a の時間に関する1階微分は宇宙膨張の速度のようなもので、2階微分は宇宙膨張の加速度（減速度）のようなものになる。

その他の文字だが、 ρ は物質密度、 p は圧力で、 Λ は先にも出た宇宙項で、一応、“定数”とみなしておこう。また k は、宇宙の曲率を決めるパラメータで、

$k=1$ ：閉じた宇宙

$k=0$ ：平坦な宇宙

$k=-1$ ：開いた宇宙

となる。ここで重要なのは k の値ではなく、符号だけだ。実際、たとえば、 k を25にしても、 $a \rightarrow 5a$ と置き換えれば、 k が1の場合と同等になる。だから、1/0/−1だけで十分なのだ。実は、この点は、ぼくも長年気になっていたのだが、今回、ちゃんと式を見ていて、1/0/−1だけでいいことがやっと納得できた（笑）。

宇宙のダイナミクスをきちんと解くためには、後一つ、密度 ρ や圧力 p に関する状態方程式というものが必要なのだが、差し当たっては不要なので忘れておこう。

次に、FL1とFL2を少し変形してみる。

加速度方程式

FL3 (Raychaudhuri Equation)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (6)$$

宇宙の物質保存の式

FL4

$$\frac{d}{dt}(\rho c^2 a^3) + p \frac{d}{dt}(a^3) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{4\pi}{3} a^3 \rho = M \text{ (一定)} \quad (8)$$

宇宙のエネルギー保存の式

FL5

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{GM}{a} - \frac{\Lambda c^2}{6} a^2 = -\frac{1}{2} k c^2 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} \dot{a}^2 - \frac{GM}{a} = -\frac{1}{2} k c^2 + \frac{\Lambda c^2}{6} a^2 \quad (10)$$

まず、FL2 から FL1 を差し引くと、FL3 (6) 式が得られる。これは時間微分の項としては、左辺に a の 2 階微分だけがあるので、「加速度方程式」とも呼ばれる。すなわち、この式は、宇宙膨張に関する“運動方程式”にほかならない。そう考えれば、右辺の項の意味がわかりやすくなる。

すなわち、右辺の第 1 項はエネルギーや圧力が入っているが、相対論ではエネルギーも圧力（熱エネルギー）も質量として作用するので、マイナスの付いたこの第 1 項は、宇宙に存在する物質／エネルギーによって宇宙膨張を減速させる引力としての働きをもっている。一方、宇宙項に関する第 2 項は宇宙膨張を加速させる斥力として働く。宇宙項が宇宙斥力とも呼ばれるゆえんである。ただし、ダークエネルギーでは、まったく同じこの項をエネルギーとして再解釈する（後述）。その意味では、すべては目の前にあったのである。

また FL1 全体に a^3 を掛けて時間微分を行い、その FL2 を代入して整理すると、FL4 (7) 式が得られる。もし圧力が非常に小さければ、この式は積分できて (8) 式となる。この (8)

式の意味するところは明らかで、圧力が無視できれば、宇宙の体積に密度を掛けたものが宇宙全体の質量（＝一定）になることを表しているにすぎない。その意味で、「宇宙の物質保存の式」と呼べる。

さらに、この (8) 式を FL1 へ代入して密度 ρ を消去すると、「宇宙のエネルギー保存の式」として FL5 (9) 式が得られる。すなわち、(9) 式の左辺第 1 項は宇宙膨張の運動エネルギーに相当するもので、第 2 項は宇宙の重力ポテンシャルに相当するものである。宇宙項を含む第 3 項は、ポテンシャルと考えれば、遠心力のポテンシャルやバネのポテンシャルと同じ形をしていることから、ある種の斥力のポテンシャルであることがわかる。

一方、(9) 式の右辺だが、エネルギー保存の式というからには、ここは宇宙の全エネルギー（＝一定）である。そして、 k の値が 1 ならば、宇宙の全エネルギーは負で、宇宙は重力的に束縛されている。逆に、 k の値が -1 なら、宇宙の全エネルギーは正で、宇宙は自由膨張している。そして値が 0 なら、ちょうどその境界になっているわけだ。ちなみに、 k の値が -1 で、かつ宇宙項がない場合は、スケールファクターが ∞ になったときに、宇宙膨張の速度が光速になることもわかる。

なお、(10) 式のように、左辺の宇宙項を右辺に移して考えれば、宇宙項に関する再解釈も、この段階でできる。右辺が宇宙の全エネルギーを表していると考えれば、宇宙項が存在すると、宇宙空間の膨張とともに、宇宙の全エネルギーが増加することを意味している。エネルギーは保存しないわけだ。そのエネルギーがどこから来るかについては、また別問題である（後述）。

……困った、丁寧に書いていくと、加速膨張のようにどんどん長くなってしまう。フリードマン＝ルメートル方程式のもっとも簡単な例として、急いで、アインシュタインのモ

デルを紹介しておこう。

2.3 アインシュタインの静止宇宙

フリードマン＝ルメートル方程式は、もともとが簡単な微分方程式なので、物質がない場合のミルン解やド・ジッター解、そして運動がない場合のアインシュタイン解など、いくつもの単純な解をもっている。

アインシュタインの静止宇宙

FL1&2&3 ただし、 $a = \text{一定}$

$$\frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^4} \varepsilon = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho \quad (11)$$

$$\frac{k}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} p \quad (12)$$

$$0 = -\frac{4\pi G}{3c^4} (\varepsilon + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (13)$$

静止宇宙の解

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^4} (\varepsilon + 3p) \sim \frac{4\pi G \varepsilon}{c^4} \quad (14)$$

$$a^2 = \frac{c^4}{4\pi G(\varepsilon + p)} \sim \frac{c^4}{4\pi G \varepsilon} = \frac{1}{\Lambda} \quad (15)$$

$$R = \frac{6}{a^2} \sim 6\Lambda \quad (16)$$

たとえば、宇宙が膨張していなくて、スケールファクター a が一定だと仮定すると、FL1、FL2、FL3 はそれぞれ、(11) 式～(13) 式となる。これらを解くと、あるいは加速度方程式(6) 式で左辺を0としてもよいが、(14) 式が得られる。これは、宇宙全体に存在する物質による重力と、宇宙項による斥力が釣り合っているという式にほかならない。これが「アインシュタインの静止宇宙モデル」である(1917年)。

しかし、こんな微妙な釣り合いなんてあまりにも恣意的だし、釣り合い自体が不安定な平衡状態なので、アインシュタインとしても、このモデルは非常に不本意だっただろう。だから、ハッブルが発見した銀河の後退運動や、

フリードマンの膨張宇宙モデルをアインシュタインがすんなりと受け入れたのも当然だろう。しかし、宇宙項を生涯最大の過ちだというのは、半世紀ほど早かったかも知れない。

参考までに、アインシュタイン静止宇宙の半径は(15) 式のようになり、およそ宇宙項の平方根に反比例する。すなわち、物質の量が多く、それに見合う宇宙斥力も大きなほど、アインシュタイン宇宙は小さくなる。またアインシュタイン宇宙の曲率(曲がり具合)は(16) 式のようになり、宇宙項に比例する。

3. 無からの宇宙(時空)の誕生

ここが一番まとめるのがキツイだろう。

宇宙創生については、入門的な本はたくさん読んだし、自分でもいろいろ書いてきたが、実は正式に勉強したことは一度もないし、論文もほとんど読んだことがない。ビッグバンモデルまでは古典的な一般相対論だけで済むし、大学時代にも勉強したけれど、インフレーションや宇宙創世の研究が進んだのは、ぼくが大学を出て以降だからなあ。大学時代にもっと勉強しておくんだったという反省すらできない。でも、専門的にやっていない分、ぼくのわか勉強でわかる範囲ぐらいなら、他の人にもわかりやすいかもしれない、と楽観的に考えることにしよう。

そもそも、どこから手を付けていいかさえわからないが、とりあえず、特異性、量子ゆらぎ、トンネル効果、インフレーション、そしてビッグバンの順だろうか。

3.1 特異性問題

宇宙の構造は、時間・空間と物質・エネルギーを統合したアインシュタインの一般相対論によって、はじめて物理的に議論できるようになった。宇宙は有限の過去からはじまり、ずっと膨張し続けていると考えられている。それがビッグバン膨張宇宙だ(図2)。

では、過去に遡っていくとどうなるだろう。宇宙はどんどん小さくなり、物質・エネルギー密度はどんどん高くなっていくだろう。そして、いまから約 137 億年前の宇宙開闢時には、宇宙の大きさは 0 となり、物質・エネルギー密度は無限大になってしまうだろう。

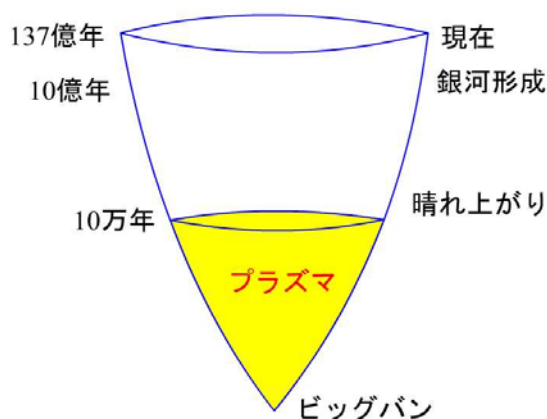


図2 単純なビッグバン膨張宇宙モデル

実際、ビッグバンモデルを適用すれば、たしかに、時刻 0 でサイズや密度などの物理量が 0 になったり ∞ になったりする。物理量の発散が起こるので、この“点”を「特異点」と呼んでいる。そして、一般相対論の枠組みでは、ブラックホールの中心や宇宙の最初で必ず特異点が生じることを数学的に厳密に証明したのが、ペンローズ (R. Penrose) とホーキング (S. Hawking) の「特異点定理 (Singularity Theorems)」だ (図3)。だいたい 1966 年～1970 年あたりである。

時刻 0 における特異性の出現は、たしかに数学的には正しいが、無限大の出現は自然界ではあってはならないことだ。特異性の存在が本当に禁じられているかどうかは証明されていないと思うが、物理的には起こって欲しくない事態であることは間違いない。実際、多くの場合、仮定のどこかが間違っていて、特異点が生じて無限大が出てくる前に、何か別の物理過程が働いて、発散が回避されるこ

とが多い。

たとえば、音波の伝播では、波動の非線形性によって波の突っ立ちが起こったとき、非線形性が無限大に発散する前に、衝撃波となって発散が抑えられる。星間雲の球対称重力収縮では、数学的には有限の自由落下時間で一点に収縮してしまうが、実際にはガスの圧力が働いたりガスが不透明になったりして、ガス雲の収縮は有限の半径でストップする。

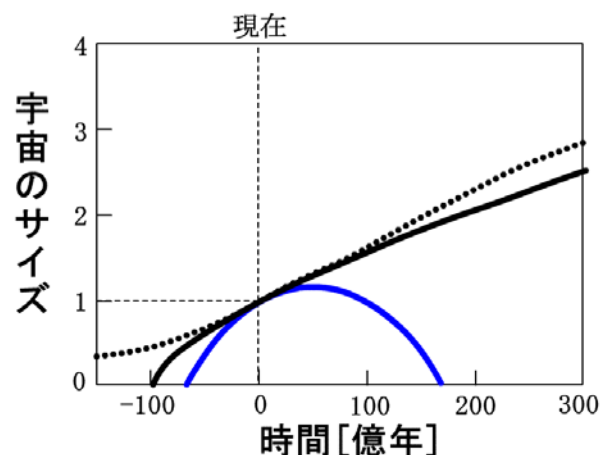


図3 特異点の存在

もちろん証明なのでいくつかの仮定は置かれている。たとえば、スケールファクターの2階微分が常に負（上に凸）ならば（図の実線）、有限の過去で宇宙のサイズは0になる。実際、先の加速度方程式 (6) 式からは、物質だけが存在する宇宙だとそうなる。もしスケールファクターの2階微分が過去で正（下に凸）になってもよければ（図の点線）、無限の過去から膨張してもいいので、特異点を無限の過去に追いやることができる。

宇宙の最初やブラックホール中心の特異性も、何らかの方法で回避したいわけだが、ことは相対論的重力と量子力学の双方にまたがる問題だけに、それほど簡単ではない、ようだ（笑）。

3.2 プランク時間

時空の最初の特異性は、“古典的な”一般相

対論の枠組みでは避けられない問題だと考えられている。時空の運動方程式であるアインシュタイン方程式も、その運動方程式を解いた解は確定的であり、因果関係に従ってものが生起するという意味では、一般相対論も“古典的理論”になるのだ。しかし、ものが不確定になる量子論を導入すると、話は変わってくる。因果関係を逆に辿って、アインシュタイン方程式の解を時刻 0 まで遡ることができなくなるからだ。というか、そんなことに意味がなくなるからだ。

では、具体的には、どこらへんまで遡れるのだろうか。時空が量子的にゆらいでしまつて、古典的なアインシュタイン方程式が成立しなくなるのはいつごろなのか。

このような問題で力を発揮するのが「次元解析」である。

物理量の単位と似ているが、単位よりも広い概念として、物理量の“次元”という言い方をすることがある。物理量の「次元」には、長さ (length) の次元 L (単位は m や cm)、質量 (mass) の次元 M (単位は kg や g)、時間 (time) の次元 T (単位は s)、電流の次元、温度の次元などがある。たいていは最初の三つだけで済むので、ここでも、次元 LMT だけ考えよう。なお、一般に変数はイタリク (斜字体) で表記するが、単位や次元はローマン (立体) で表記する。

この次元という考え方をすると、たとえば、太陽の質量は、SI 単位系の kg で表すのと、cgs 単位系の g で表すのとでは、桁が異なるが、次元としてはいずれにせよ、質量の次元 M をもつ。物理量の次元を表す記号として $[]$ を使うと、いまの話を、

$$[\text{太陽質量}] = M$$

と書く。

さて、時空の最初、時空自体が量子的にゆらいでいる状態が現在の問題だ。相対論によって記述される宇宙 (モデル) だから、この

問題には、相対論の基本定数である、光速と万有引力定数がからむだろう。また量子論が関係するわけだから、量子論の基本定数であるプランク定数もからむだろう。

これらの定数のうち、光速 c ($= 2.99792458 \times 10^8 m/s$) は、次元としては、

$$[c] = LT^{-1}$$

である。また、万有引力定数 G ($= 6.6726 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$) は、 N (ニュートン) を $kg \cdot m/s^2$ と分解すれば、 $G = 6.6726 \times 10^{-11} m^3/kg \cdot s^2$ となるので、次元としては、

$$[G] = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

である。さらに、プランク定数 h ($= 6.626 \times 10^{-34} J \cdot s$) は、 J (ジュール) を $kg \cdot m^2/s^2$ と分解すれば、 $h = 6.626 \times 10^{-34} kg \cdot m^2/s$ となるので、次元としては、

$$[h] = L^2 M T^{-1}$$

である。

これらの三つの定数の組み合わせを考えたときに、万有引力定数とプランク定数を掛けて、光速の 5 乗で割り、さらにルートをとって、

$$\sqrt{(Gh/c^5)}$$

とした量のみが、唯一、時間の次元をもつことがわかる。他には時間の次元をもつ量は作れないのだから、この時間の次元をもつ量こそが、時空のゆらぎが問題になる時間スケールになるはずなのである。この一番最初の、時空の量子的なゆらぎが終わり、時空が確定する時間を「プランク時間 (Planck time)」と呼んでいる。

具体的には、プランク時間は、

$$\begin{aligned} \text{プランク時間} &= (Gh/c^5)^{1/2} \\ &= 10^{-44} \text{秒} \end{aligned}$$

となる。

また基本定数からは同様な方法で、長さの時限をもった量として、

$$\begin{aligned} \text{プランク長さ} &= (hG/c^3)^{1/2} \\ &= 10^{-33} \text{cm} \end{aligned}$$

が導かれる。プランク長さぐらいの非常にミクロなスケールでは、時空の量子的ゆらぎが無視できなくなる。

3.3 虚時間の宇宙

宇宙最初の特異性を回避する方法の一つが、ハートル（J. Hartle）とホーキング（S. Hawking）が 1983 年に提唱した「虚時間」の概念を用いた「無境界仮説」である。

この虚時間、ぼくは以前は、図 2 のようなミンコフスキー時空で表した膨張宇宙の最初の尖った部分に丸くキャップをかぶせたようなイメージをもっていた。当たり前だが、実際には、もうちょっとちゃんとしていて、時間 1 次元 + 空間 3 次元の 4 次元ド・ジッター宇宙と虚時間 1 次元 + 空間 3 次元の 4 次元超球を、時刻 $t=0$ で接ぎ木したもののようだ。

もっとも、4 次元や 5 次元を視覚的に表現するのは無理なので、よくやられるように、以下では空間の次元を二つ落として、時間 1 次元（たとえば t ）と空間 1 次元（たとえば r ）の 2 次元宇宙を考える。そして、その 2 次元膨張宇宙を、もう一つ次元の多い 3 次元超空間（平らなミンコフスキー空間）に埋め込んだ形で表示しよう（図 4）。その 3 次元超空間の座標を、ここでは、 (u, v, w) と置いておく。

まず、ド・ジッター宇宙というのは、オランダのド・ジッター（W. de Sitter）が 1917 年に発見したアインシュタイン方程式の解で、物質や通常のエネルギーは存在しないが、宇宙項（いまふう言えばダークエネルギー）だけは存在する風変わりな宇宙だ。ド・ジッター宇宙は、無限の大きさで無限の過去から収縮を始め、時刻 $t=0$ で最小の大きさになり、ふたたび無限に膨張していくという双曲線正弦関数 ($\sinh$) 的な振る舞いを示す。そして、5 次元ミンコフスキー空間内の 4 次元超一葉双曲面で表現されるのだが、ここでは 3 次元

ミンコフスキー空間内の 2 次元一葉双曲面で表されている（図 4 上）。

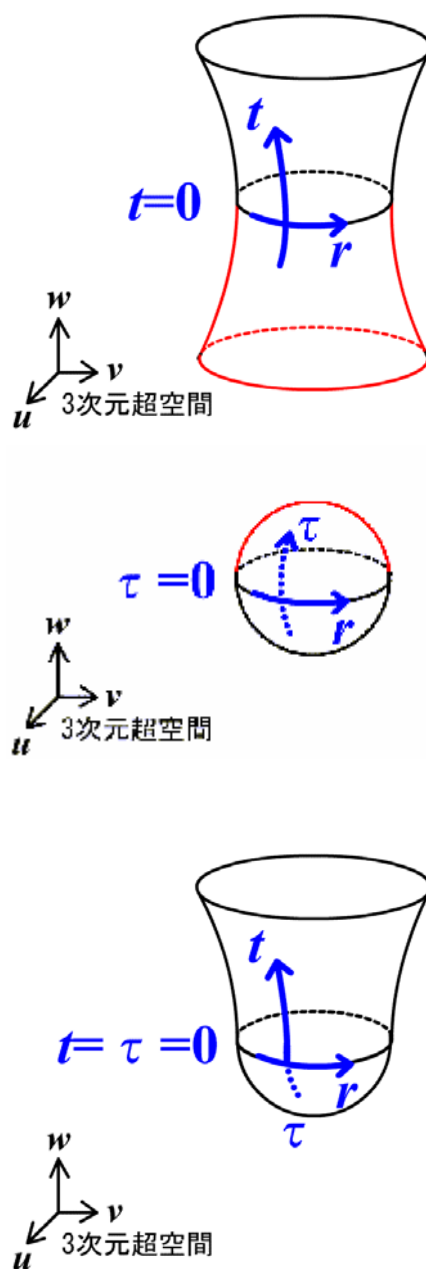


図 4 3次元超空間に埋め込んだ2次元膨張宇宙
上：2次元ド・ジッター宇宙、中：2次元超球、
下：2次元虚時間宇宙。宇宙膨張をイメージ的に
表した図1では、曲面の内部に宇宙があるように
描いてあるが、上の図では曲面上が宇宙そのもの
であって、曲面の内部や外部は宇宙“外”の超空間
領域になる。

ド・ジッター宇宙を表す回転一葉双曲面は、3次元超空間の座標を用いると、たとえば、

$$-w^2 + u^2 + v^2 = a^2$$

という式で表されるだろう。ここで定数 a は、宇宙のサイズが最小になったときの“半径”である。一方、回転一葉双曲面の表面そのものが実際の宇宙に対応していて、時間軸 t は下方から上方へ、空間軸 r は円周方向へ張られている。そしてド・ジッター宇宙においては、時刻 $t=0$ で、宇宙のサイズすなわち円周方向の長さは最小になっている。なお、超空間座標 (u, v, w) と時空座標 (t, r) は、双曲線正弦関数などで関連づけられるが、ここでは省略する。

つぎに、4次元超球だが、時間と空間が対称にみえないのは、時空計量の符号が異なっているため、実時間 t の代わりに虚時間（虚数時間） $\tau (=it)$ を用いれば、時間は空間のように振る舞う。そして、5次元ミンコフスキー空間（時間軸は虚時間にしたので、正確には、5次元ユークリッド空間と呼ぶべきだろう）内の虚時間と通常の3次元空間からなる4次元超球は、ここでは、3次元ミンコフスキー空間内の虚時間1次元と空間1次元からなる球面で表される（図4中）。

この球面は、たとえば、

$$w^2 + u^2 + v^2 = a^2$$

という式になる。虚時間軸 τ は下方から上方へ、空間軸 r は円周方向へ張られていることになる。そしてこの超球においては、虚時間 $\tau=0$ で、宇宙のサイズは最大になる。もっとも虚時間の考え方では、そもそも空間座標と時間座標は同じ物理量だとみなすべきだろう。だから、超球の上での“（時間的）方向”というものはない。超球の上ではどこにも“境界”は存在しないのだ（したがって「無境界仮説」と呼ばれる）。虚時間を用いれば、“時間がはじまる前”という問いかけ自体が無意味になるのである。

で、ホーキングらの考えた虚時間の宇宙というのは、ド・ジッター宇宙の上半分と虚時間超球の下半分とを、時刻 $t = \tau = 0$ で糊づけしたものなのだ（図4下）。

無限の過去から続くというド・ジッター宇宙の欠点もなくなり、宇宙最初の特異性も丸くなり、めでたしめでたしということらしい。なんだか、インチキをされたような、狐につままれたような気もするが……。

【ド・ジッター・モデルについての補遺】

ド・ジッター・モデルも、フリードマン＝ルメートル方程式の単純な解の一つである。この場合は、物質はないとして（ $\varepsilon = \rho = 0$ ）、ただし、宇宙項 Λ はあるとする。そうすると FL1 は (17) 式のようになる。

ド・ジッター宇宙

FL1 ただし、 $\varepsilon = 0$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = 0 \quad (17)$$

$$ct = \int \frac{da}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}a^2 - k}} \quad (18)$$

ド・ジッター宇宙の解

$$\alpha \equiv \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} \quad (19)$$

$$k=1 \quad a(t) = \frac{c}{\alpha} \cosh \alpha t = \frac{c}{\alpha} \frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2} \quad (20)$$

$$k=0 \quad a(t) \propto e^{\alpha t} \quad (21)$$

$$k=-1 \quad a(t) = \frac{c}{\alpha} \sinh \alpha t = \frac{c}{\alpha} \frac{e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}}{2} \quad (22)$$

この (17) 式には解析的な解が存在する。手順としては、まず (17) 式の左辺の第二項と第三項を右辺に移し、 a の時間微分を da/dt と置けば、変数分離型の微分方程式になる。それを書き直せば、(18) 式のようにでき、積分すると双曲線正弦関数 ($\sinh$) や双曲線余弦関数 ($\cosh$) を解と

してもつ。すなわち、宇宙項を含むパラメータ部分を (19) 式の α のようにまとめると、 k の値によって、1 のときは (20) 式、0 だと (21) 式、 -1 だと (22) 式の解になる。そして図 4 など考えているのは、(20) 式のような双曲線余弦関数 ($\cosh$) で表される解である。

このド・ジッター宇宙は、時刻 t が 0 のときに一番小さくなり、そのときの半径は (20) 式から、

$$a = c/\alpha = \sqrt{3/\Lambda}$$

である。

物質がないのに正体のわからない宇宙項だけあるなんて、ド・ジッター宇宙はあまりにもヘンテコすぎて、たんなるアカデミックな練習問題だと思われていた（と思う）。が、宇宙項の実在性によって、息を吹き返したわけである。

3.4 無からの宇宙（時空）の創生

まいったまいった、間に正月が挟まったとはいえ、この節に入って、1 か月筆が止まってしまった（笑）。仕方ないので、現状の範囲で無理矢理前へ進めることにしよう。

現在は、まだ完成された量子重力理論はないので、宇宙の創生について、きちんと物理できない段階ではある。しかし、アイデアはある。たとえば、一番有名なのは、ビレンケン (A. Vilenkin) が 1984 年に唱えた「無からの宇宙の創生」だろう。

この論文は「フィジカルレビューD」誌に掲載されたものだが、一度きちんと読んでみようとしてネットダイビングしたが、一般にはまだアブストラクト（概要）しか公開されていない。京都大学まで行けば読めるが、行ったときには忘れていた（^_^;。とりあえず、こんなアブストラクトだ。

A cosmological wave function describing the tunneling of the Universe from "nothing" into a de Sitter space is found in a simple minisuperspace model. The tunneling probability is proportional to $\exp(-3/8 G^2 \rho v)$, where ρv is the vacuum energy density at

an extremum of the effective potential $V(\phi)$. The tunneling is most probable to the highest maximum of $V(\phi)$.

このアブストラクトを読み解くには、波動関数（wave function；記号では ϕ 、上のアブストラクトでは ϕ ）と、ポテンシャル（potential；記号では V ）から説明する必要があるだろう。それらがわかれば、「トンネル効果」はむしろやさしい。

量子力学の表現には、シュレジンガーの波動力学とハイゼンベルグの行列力学があるが、数学的にはまったく同値である（ことをシュレジンガー自身が証明している）。前者の波動力学では素粒子の振る舞いは、“波動関数”というもので記述される。波動関数 ϕ は時間と空間の関数で、複素数の値をもち、その絶対値の 2 乗：

$$|\phi|^2$$

が素粒子の存在確率に比例するという性質をもっている。そうそう、量子力学では、粒子の存在は確定的ではなく確率的なのである。

さらに、波動関数がしたがう方程式が、有名な「シュレジンガー方程式」だ。シュレジンガー方程式は、虚数単位を i 、プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ (h バー)、粒子の質量を m と置けば、

シュレジンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (22)$$

$\Psi(\mathbf{r}, t)$: 波動関数

t : 時間

$\mathbf{r}$: 空間ベクトル

i : 虚数単位

$\hbar$: プランク定数/ 2π

m : 粒子の質量

∇^2 : 空間偏微分演算子

$V(\mathbf{r}, t)$: ポテンシャルエネルギー

と表すことができる。ここで、 ∇^2 はポワソン方程式の(1)式で出てきた Δ と同じモノで、空間に関する2階の偏微分演算子である。また V はポテンシャルだ。

この波動関数は、その言葉通り、ある種の波を表すものだ。実在する波ではないが、イメージとしては、水の波や電磁波など古典的な波を思い浮かべてもいいと思う。そして、ポテンシャルがなければ、この波は時空を伝わっていくが、それはこの波動関数で表される粒子が時空を伝播することである。

一方、ポテンシャルが存在すると、波動関数はポテンシャルの障壁に閉じ込められることもある。たとえば、いわゆる井戸型ポテンシャルの場合、図5のようなものになる。

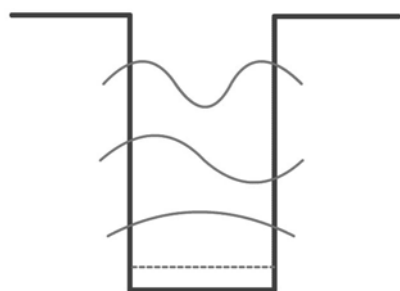


図5 井戸型ポテンシャルと波動関数の振る舞い

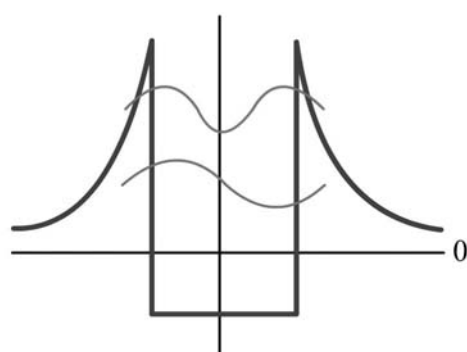


図6 原子核のポテンシャルとトンネル効果

このような井戸型ポテンシャルの中で波動関数の振る舞いを考えると、これもまた古典的なイメージでよくて、波はポテンシャルの壁で固定端(節)となるように振動するので、

振動の腹が一つだけの基本振動と腹が複数ある倍振動(ハーモニックス)だけが可能になる。その結果、どんな波長の波も許されるわけではなく、ポテンシャルの長さを半波長とする波(基本振動)と、1波長とする波、1.5波長とする波のように、とびとびの状態だけが許されることになる。

さらに、ポテンシャルの壁が図6のようになっていて、ポテンシャルの高さが有限で壁の厚みも有限だと、いわゆる「トンネル効果(tunneling)」が起こる。古典的な粒子だと、粒子のエネルギーがポテンシャルの高さよりも低い場合、いくら壁の厚みが薄くても壁を抜けることはできない。しかし、波動関数で記述される粒子は、有限の確率でもって壁を乗り越えることができる。ポテンシャルの内部では粒子は波動的に存在し、壁の部分ではその存在確率は指数的に減少するが、壁の外部でふたたび波動的に存在できることになる。これが、おそらくエサキダイオードで一躍人口に膾炙した、トンネル効果と呼ばれるものだった。

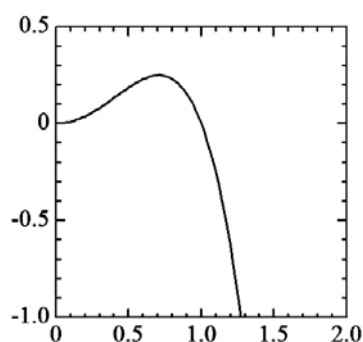


図7 宇宙のポテンシャル。横軸が宇宙のスケール a 、縦軸がポテンシャル V_0 。

ようやく宇宙の波動関数に辿り着いた。ビレンキンが唱えたのは、量子的存在であった宇宙は、トンネル効果によってポテンシャルの壁を乗り越え、無の状態から一挙に有の状態へ顕在化したというものである、と思う。

宇宙の波動関数 ϕ が図7のようなポテンシ

ャル $V(\phi)$ に閉じ込められていたとする。
 宇宙の最初は、宇宙のポテンシャルエネルギーは 0 で宇宙の大きさも 0 だが、図 7 のようなポテンシャルだと、ポテンシャルエネルギーは 0 だが有限の大きさ（プランク長さ = 10^{-33}cm ）の状態もある（横軸の 1）。そして、宇宙はある確率でもって、大きさ 0 の状態からプランク長さの状態まで、トンネル効果で創生されるのだ。トンネル効果で通り抜ける確率は、ポテンシャルの極大値における真空エネルギー密度 ρ_v というものに依存して、指数的に減少するが決して 0 ではない。そして 0 でない確率の事象は、いつかはどこかで起こりうるので、宇宙も誕生したのだろう。

ここで、素粒子の統一理論である「超ひも理論」と「高次元時空」そして「ブレーンワールド」に一言触れておいた方がいいだろう。

「超ひも理論」というのは、素粒子が点ではなく、プランク長さ程度の有限の長さをもった“ひも”で、そのひもの振動状態でさまざまな素粒子が記述でき、かつ、それぞれの素粒子に“超対称性パートナー粒子”が存在するという理論だ。そして、そのような超ひも理論が成り立つのは 10 次元とか 11 次元の高次元時空であり、われわれの 4 次元時空は、高次元時空の中の“膜 (membrane)”のようなものだというのが「ブレーンワールド」別名「M 理論」である（ランダー L. Randall とサンドラム R. Sundrum、1999 年）。

このような素粒子の統一理論やブレーンワールドを宇宙初期と関係させようという考えは当然ある。ただ、いまのところ、まだ検証する方法もないようだし、もう筆者の限界を超えているので、これぐらいにして、後は参考文献に譲りたい。

・・・つづく・・・

参考文献

○単行本

福江 純（2005）『100 歳になった相対性理論』、講談社。

ミチオ・カク（2006）『パラレルワールド』（斉藤隆央 訳）、NHK 出版。

バーバラ・ライデン（2003）『宇宙論入門』（牧野伸義 訳）、ピアソン・エデュケーション。

Gerhard Borner（1993）“The Early Universe”，Springer-Verlag.

○論文

Hartle, J. and Hawking, S. W. (1983) Wave function of the universe, *Phys. Rev.* **D28**, 2960.

Vilenkin, A. (1984) Quantum Creation of Universes, *Phys. Rev.* **D30**, 509.

Vilenkin, A. (1983) Birth of inflationary universes, *Phys. Rev.* **D27**, 2848.

福江 純（大阪教育大学）