复旦大学哲学院 2020 暑期学校
非标准分析课程讲义

金人麟
Department of Mathematics, College of Charleston
Charleston, SC 29424, USA
jinr@cofc.edu

简介：本课程介绍非标准分析的概念和一些应用。非标准分析的主要特征之一是实数系统的扩张使其含有无穷大数和无穷小正数而同时又使得扩张了的实数系统仍满足标准实数系统的所有一阶逻辑性质。在一个具有无穷大数或无穷小正数的实数框架中工作，有时能简化一些问题的表述使其更直观明了，有时还能简化证明过程使得一些未知的定理能较容易被发现。本课程的目的是想把非标准分析作为一种数学工具来介绍，使得读者在课程后能使用此工具在各自感兴趣的数学领域中发掘其应用潜能。我们基本不讨论非标准分析及其创立者 Abraham Robinson 的历史和非标准分析的哲学意义，对这方面感兴趣的读者可以在所列的参考书，例如 [34, 8, 9] 等，中找到这方面的讨论。全课程共分五章，第一章主要介绍非标准分析的概念和逻辑背景，第二、三、四、五章介绍非标准分析在其他数学领域中的应用。在第二章中我们介绍怎样用非标准分析来建立微积分。在第三章中我们介绍 Loeb 测度空间及一些简单应用。在第四章中我们介绍非标准分析在随机过程中的应用。在第五章中我们介绍非标准分析在组合数论中的应用。非标准分析的应用范围比此课程所能介绍的要多得多，本文作者之所以选择这些领域完全是个人爱好。对其他应用有兴趣的读者可以参看 [7, 16, 20, 32] 等。作者在每一章的结尾都附有一些习题。在做这些习题的过程中读者可以加深对课程的理解。

目录

1 实数域和超结构的非标准扩张

设 $\mathbb{R}$ 为所有 (标准) 实数的集合而

$$\mathcal{R} := (\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$$

则表示 (标准) 实数域。为了方便我们可设 $\mathcal{P} = \{+, *, 0, 1, <\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的零元，二元，和三元关系集。现在我们将要把实数域 $\mathcal{R}$ 扩张成更大的有序域 ${}^*\mathcal{R}$ 使其包含无穷大和正无穷小。当然单纯地加一个无穷大 ∞ 和正无穷小 $1/\infty$ 不能使其成为有序域。我们的目标是要使 ${}^*\mathcal{R}$ 仍有 $\mathcal{R}$ 的大部分性质。

1.1 非主超滤子存在性

把有理数域扩张成实数域的方法之一是将实数看成有理数柯西序列的等价类，而把 $\mathcal{R}$ 扩张成 ${}^*\mathcal{R}$ 的方法也将沿用这个思路。

设 $\omega := \{0, 1, 2, \ldots\}$。记 $\mathbb{R}^\omega$ 为所有实数序列 $\langle r_n \rangle_{n=1}^\infty$ 的集合。为方便 $\langle r_n \rangle_{n=1}^\infty$ 可简记为 $\langle r_n \rangle$。序列 $\langle r \rangle$ 表示每项都为 r 的常数序列。接下来我们在 $\mathbb{R}^\omega$ 上定义一个等价关系。设 $\mathcal{P}(X)$ 表示 X 的幂集。

定义 1.1 *设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个***非主滤子基***。称一***非主滤子基*** *$\mathcal{U}$ 为 X 上的***非主滤子***，如果它满足：*

1. *如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；*
2. *如果 $A \in \mathcal{U}$ 及 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$。*

记 $X \smallsetminus A$ 为 A^C。如果 X 上的非主滤子再满足

3. *对任意集合 $A \subseteq X$ 都有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^C \in \mathcal{U}$，*

*则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的***非主超滤子***。*

一个非主滤子基中所有有限个元素的交生成一个非主滤子，所以一个非主滤子基和它所生成的非主滤子没有本质的差别。

一个 X 上的非主超滤子一定包含元素 X。

然而非主超滤子的存在性则依赖于选择公理。和选择公理等价的 Zorn 引理 (cf. [30, Theorem I.12.1]) 通常使用起来比较方便。Zorn 引理讲的是

如果一个偏序集中的所有全序子集都有上界，则这个偏序集一定有个极大元 m，即在这偏序集中没有比 m 更大的元素。

命题 1.2 (假设 Zorn 引理) 每个无限集合 X 上的非主滤子都可扩充为非主超滤子。

证明：设 $\mathcal{U}_0 := \{A \subseteq X : A^C$ 是一有限集$\}$ 并且 $\mathcal{U}_1$ 是 X 上的任一非主滤子。显然 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ 是 X 上的非主滤子基。设

$$\mathfrak{U} := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U} \text{ 且} \mathcal{U} \text{ 是一非主滤子}\}.$$

则 $(\mathfrak{U}; \subseteq)$ 是一偏序集。如果 $\mathfrak{U}'$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的全序子集，则 $\mathfrak{U}'$ 中所有元素的并，即 $\bigcup \mathfrak{U}'$, 是 $\mathfrak{U}'$ 中所有元素的上界。由 Zorn 引理可推出 $(\mathfrak{U}; \subseteq)$ 中有极大元 $\mathcal{U}$。接下来我们证明 $\mathcal{U}$ 满足定义 1.1 中的条件 *3.*。假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \text{ 和 } A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

都是有限集，但这推出

$$\bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i = (A \cup A^C) \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subseteq \left(A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) \cup \left(A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right)$$

是一有限集，而这和 $\mathcal{U}$ 的非主性相矛盾。 □

1.2 实数域的非标准扩张

按命题 1.2 我们取定一个 ω 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$。超滤子 $\mathcal{U}$ 可以被看作 ω 上的一个有限可加的 $\{0,1\}$–测度，即每个集合 $A \in \mathcal{U}$ 的测度为 1，而每个集合 $A \notin \mathcal{U}$ 的测度为 0。因为 $\mathcal{U}$ 是个超滤子，所以对每个 $A \subseteq \omega$，A 的测度一定是 1 或 0。用 $\mathcal{U}$ 我们可定义 $\mathbb{R}^\omega$ 上的一个等价关系。

定义 1.3 对所有 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathbb{R}^\omega$，我们定义 $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$，即 $\langle x_n \rangle$ 和 $\langle y_n \rangle$ 等价，当且仅当

$$\{n \in \omega : x_n = y_n\} \in \mathcal{U}.$$

换句话说，$\langle x_n \rangle$ 和 $\langle y_n \rangle$ 等价当且仅当这两个序列几乎处处相等。

定义 1.4 记 $[\langle x_n\rangle] := \{\langle y_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega : \langle y_n\rangle \sim \langle x_n\rangle\}$ 和

$$^*\mathbb{R} := \{[\langle x_n\rangle] : \langle x_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega\}.$$

集合 $^*\mathbb{R}$ 将是我们要构造的非标准实数域中所有实数的集合。但在此之前我们需要说明为什么 $\mathbb{R}$ 可被看成是 $^*\mathbb{R}$ 的子集和怎样把 $\mathcal{P}$ 中的关系都推广到 $^*\mathbb{R}$ 上去。

定义 1.5 对 $\mathbb{R}$ 上每个 m 元关系 $P \in \mathcal{P}$ 定义

$$\begin{aligned}^*P := \{([\langle r_n^{(1)}\rangle], [\langle r_n^{(2)}\rangle], \ldots, [\langle r_n^{(m)}\rangle]) :\\ \{n \in \omega : (r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \ldots, r_n^{(m)}) \in P\} \in \mathcal{U}\}.\end{aligned}$$

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 $^*\mathbb{R}$ 上定义了 $^*+, {}^*\!*, {}^*0, {}^*1, {}^*\!<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 * 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n\rangle] + [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n + b_n\rangle] \text{ 和 } [\langle a_n\rangle] * [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n * b_n\rangle].$$

我们以后将说明为什么 $^*\mathcal{R} := ({}^*\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$ 是有序域。

如果我们将每个 $r \in \mathbb{R}$ 等同于常数序列的等价类 $[\langle r\rangle] \in {}^*\mathbb{R}$，则 $\mathbb{R}$ 可被看作是 $^*\mathbb{R}$ 的子集。同时很容易证明对每个 $P \in \mathcal{P}$，都有

$$(r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(m)}) \in P \text{ 当且仅当 } ([\langle r^{(1)}\rangle], [\langle r^{(2)}\rangle], \ldots, [\langle r^{(m)}\rangle]) \in {}^*P.$$

所以 $\mathcal{R}$ 可被看作是 $^*\mathcal{R}$ 的子结构。读者如熟悉模型论，则可知 $\mathcal{R}$ 是 $^*\mathcal{R}$ 的基本子结构。如果一个 $^*\mathbb{R}$ 中的数 $[\langle r_n\rangle]$ 大于 $\mathbb{R}$ 中所有数，则称 $[\langle r_n\rangle]$ 为无穷大，如果一个 $^*\mathbb{R}$ 中的正数 $[\langle r_n\rangle]$ 小于 $\mathbb{R}$ 中所有正数，则称 $[\langle r_n\rangle]$ 为正无穷小。

命题 1.6 在 $^*\mathbb{R}$ 中 $[\langle n\rangle]$ 是一无穷大，而 $[\langle 1/n\rangle]$ 则是正无穷小。

1.3 超结构的非标准扩张

利用无穷小数来发展微积分只是非标准分析应用中的一小部分。为了在其他数学领域中的应用，只考虑实数域的扩张是不够的。例如实数上的勒贝格测度就无法在实数域的扩张中来讨论。此外我们还需研究函数空间，函数空间上的算子，算子空间上的各种拓扑，等等。我们现在要介绍一种结构称之为超结构。超结构是一个能包含某一次数学讨论中牵涉到的所有数学实体的母结构。超结构的思想取自于集合论，它在 [35] 中已被提出。

定义 1.7 给定任一集合 X，设 $V_0 := \mathbb{R} \cup X$。对于任意自然数 $m \in \omega$ 定义 $V_{m+1} := V_m \cup \mathcal{P}(V_m)$。显然对任意 $m \in \omega$，都有 $V_m \subseteq V_{m+1}$。设 $\mathfrak{n}$ 是一足够大的自然数。定义

$$V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} V_m.$$

令 $\in$ 为 V 上的从属关系，即 $a \in b$ 表示 a 是集合 b 中的元素。则结构 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 被称之为**超结构**。如果 V 中的一个元素 a 属于 V_m 但不属于 V_{m-1}，我们称 a 是 $\mathcal{V}$ 中的第 m 层元素，记为 $l(a) = m$。

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $l(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $l(\mathbb{R}) = l(\mathbb{N}) = l(X) = 1$。注意，我们用 $\mathbb{N}$ 表示 V 中的自然数集，而用 ω 表示 V 之外元数学层次的自然数集。利用集合论的符号，一个有序对 (a,b) 可以被看作为集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$。所以 $l((a,b)) = l(\{\{a\},\{a,b\}\}) = \max\{l(\{a\}), l(\{a,b\})\}+1 = \max\{l(a), l(b)\}+2$。一个实数上的二元关系 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有序实数对的集合，每个有序实数对属于第二层，所以 $P \subseteq V_2$，这推出 $P \in V_3$。如果 $E \subseteq \mathbb{R}$，$f : E \to \mathbb{R}$ 是一函数，则 f 可被看作为 $E \times \mathbb{R}$ 的子集。所以 $E \times \mathbb{R} \in V_3$ 推出 $f \in V_4$。按照类似思路我们可以在 V 中找到 $\mathcal{R}$。一般情况下我们可假设 $X = \emptyset$。有时候需要研究一些基数较大的集合，比如一个基数大于 $\beth_\omega = |V(\emptyset)|$ 的拓扑空间 X'，我们可以把 X' 放入第 1 层的 X 之中再构造超结构 V。因为每一个特定的数学讨论只涉及有限个数学实体，所以只要 $\mathfrak{n}$ 足够大，这些数学实体都可以在 V 中找到。为了简便我们假设 $X = \emptyset$。

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 1.8 设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in V_m$，定义 $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U},$$
2. 对于任意元素序列 $\langle a_n \rangle \in V_m^\omega$，设 $[\langle a_n \rangle] := \{\langle b_n \rangle \in V_m^\omega : \langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle\}$，
3. 记 ${}^*V_m := \{[\langle a_n \rangle] : \langle a_n \rangle \in V_m^\omega\}$。
4. 记 ${}^*V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} {}^*V_m$.

5. 对于 $^*V$ 中的元素 $[\langle a_n\rangle]$ 和 $[\langle A_n\rangle]$，定义 $[\langle a_n\rangle]\ {}^*\!\in [\langle A_n\rangle]$ 当且仅当

$$\{n\in\omega : a_n\in A_n\}\in\mathcal{U}.$$

对每个 $A\in V$ 设 $*$ 是从 V 到 $^*V$ 的映射使得 $^*A=[\langle A\rangle]\ {}^*\!\in\ {}^*V$，则 V 可被嵌入到 $^*V$ 中去。同时很容易证明对所有 $a,A\in V$，都有 $a\in A$ 当且仅当 $[\langle a\rangle]\ {}^*\!\in[\langle A\rangle]$。所以 $(V;\in)$ 可被看作为 $(^*V;\ {}^*\!\in)$ 的子结构。

我们也可对 $^*V$ 中的元素进行分层，即如果 x 在 $^*V_0$，则 $l(x)=0$ 并且 $l(x)=m+1$ 当且仅当 x 在 $^*V_{m+1}\smallsetminus {}^*V_m$ 中。$^*V$ 上的二元关系 $^*\!\in$ 可以被看作是属于关系。但是它不是集合论意义上真正的属于关系。我们可以通过一个变换 Φ 把 $^*V$ 双射到一个集合 W 使得 $x\ {}^*\!\in y$ 当且仅当 $\Phi(x)\in\Phi(y)$，即把 $^*\in$ 转变成集合论意义下真正的属于关系。映照 Φ 可按层次递归定义，即对所有 $^*V_0$ 中的 x 都有 $\Phi(x)=x$ 而对所有 $^*V\smallsetminus {}^*V_0$ 中的 x 都有 $\Phi(x):=\{\Phi(y):y\ {}^*\!\in x\}$。然后取 $W=\Phi(^*V)$。不过这样做会影响直观且徒增复杂度。所以我们还是用 $^*\mathcal{V}:=(^*V\ {}^*\!\in)$ 而不用 $(W;\in)$ 作为 $\mathcal{V}$ 的扩张。当然为了记号上的便利我们通常把 $^*\!\in$ 直接写成 $\in$。

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 $^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

定义 1.9 我们将使用符号 $\to$ (推出)，$\neg$ (不)，$x,y,z,\ldots$ (变量)，$a,b,c,\ldots$ $A,B,C,\ldots$ (V 中的元素作为常量)，$\forall x$ (对所有 x)，$=$，$\in$，(，)，按照以下递归规则 1.–3. 组成关于 $\mathcal{V}$ 的一阶**公式**和**语句**。

1. 对于变量或常量 u,v，符号串 $u=v$，$u\in v$ 被称为原子公式，

2. 如果 φ，ψ 是公式，则 $\neg\varphi$，$\varphi\to\psi$，和 $\forall x\,\varphi$ 是公式，在公式 $\forall x\,\varphi$ 中变量 x 被称为**有界变量**，一个公式中不是有界的变量称之为**自由变量**，

3. 如果在一个关于 $\mathcal{V}$ 的公式中所有变量都是有界的，则称此公式为关于 $\mathcal{V}$ 的语句。

按照以下递归规则我们可以定义一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句在 $\mathcal{V}$ 中的真假值。我们通常记 $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ 为一关于 $\mathcal{V}$ 的公式使得 $\overline{x}=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)})$ 列出 φ

中所有自由变量而 $\overline{a}=(a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(k)})$ 列出 φ 中所有 V 中常量。如果 m 个自由变量 $\overline{x}$ 都被 V 中 m 个常量 $\overline{A}$ 替代，则可得到一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\overline{A},\overline{a})$。

4. 原子语句 $a=b$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 和 b 是同一集合，$a\in A$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 是 A 的元素，

5. 语句 $\neg\varphi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，语句 $\varphi\to\psi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假或者 ψ 在 $\mathcal{V}$ 中为真，

6. 语句 $\forall x\,\varphi(x,\overline{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当对所有 V 中元素 b 语句 $\varphi(b,\overline{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真。

在定义 1.9 第六部分中规定变量 x 取值为 V 中的<u>元素</u> 是为什么称所介绍的逻辑，公式，和语句为一阶的原因。如果我们把 $\forall x$ 解释为 “对所有 V 的子集 x” 则逻辑，公式，和语句就是二阶的了。自此以下我们所讨论的逻辑都是一阶的，所以词汇 “一阶” 有时将被省略。

定义 1.10 *在定义 1.9 中把 V 和 $\mathcal{V}$ 都换成 $^*V$ 和 $^*\mathcal{V}$，则我们得到关于 $^*\mathcal{V}$ 的公式和语句。也得到一个关于 $^*\mathcal{V}$ 的语句在 $^*\mathcal{V}$ 中的真假值。*

一个公式是关于 $\mathcal{V}$ 还是关于 $^*\mathcal{V}$ 是由常量在 V 中还是在 $^*V$ 中决定的。在决定一个语句在 $\mathcal{V}$ 或在 $^*\mathcal{V}$ 的真假值时对量词 $\forall x$ 的解释分别是 “对每个 V 中元素 ...” 或 “对每个 $^*V$ 中元素 ...”。

为了使逻辑语言更接近我们的直觉，我们还要引入一些可以用已有符号来表示的新符号。比如语句 $\varphi(\mathbb{R},<)$:

$$\begin{aligned}\forall x\,\forall y\,\forall z\,(\neg(\neg(x\in\mathbb{R}\to\neg(y\in\mathbb{R}))\to\neg(z\in\mathbb{R}))\\ \to(\neg(x<y\to\neg(y<z))\to x<z))\end{aligned}\tag{1}$$

表示实数上序的传递性，但很不直观。我们引入新记号 $\vee$ (表示 “ 或”)，$\wedge$ (表示 “ 和”)，$\leftrightarrow$ (表示 “ 当且仅当”)，$\exists x$ (表示 “ 存在一个元素 x”)，$\forall x\in A$ (表示 $\forall x\,(x\in A\ \to\cdots)$)，$\exists x\in A$ (表示 $\exists x\,(x\in A\wedge\cdots)$)。可看出 $\phi\vee\eta$ 是 $\neg\phi\to\eta$ 的另一种写法，$\phi\wedge\eta$ 是 $\neg(\neg\phi\vee\neg\eta)$ 的另一种写法，$\phi\leftrightarrow\eta$ 是 $(\phi\to\eta)\wedge(\eta\to\phi)$ 的另一种写法，$\exists x\,\varphi$ 是 $\neg\forall x\,\neg\varphi$ 的另一种写法，等等。使用新引入的符号，语句 (1) 可重写成

$$\forall x\in\mathbb{R}\,\forall y\in\mathbb{R}\,\forall z\in\mathbb{R}\,((x<y)\wedge(y<z)\to x<z)$$

而新的传递性写法就比较直观。但是当证明一些涉及逻辑符号的命题时，因为新介绍的符号可以用最基本的逻辑符号来定义，所以我们只要考虑最基本的逻辑符号即可，从而使得证明简捷。

如果 f 是一函数，$\overline{a}=(a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(m)})$ 是一列在 f 定义域中的元素，则用 $f(\overline{a})$ 表示 $(f(a^{(1)}),f(a^{(2)}),\ldots,f(a^{(m)}))$。

引理 1.11 设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的语句。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 为真当且仅当

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}. \tag{2}$$

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta\to\psi$，或 $\forall x\,\psi(x,\overline{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句 (2) 都成立。

(a) 假设 φ 是原子语句 $[\langle a_n\rangle]=[\langle b_n\rangle]$ 或 $[\langle a_n\rangle]\in[\langle A_n\rangle]$。由等价类的定义，(2) 成立。

(b) 假设 φ 是 $\neg\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 φ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n\in\mathbb{N}:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\neg\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}.$$

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)\to\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假}\}\in\mathcal{U}\ \ \text{或}\ \{n\in\omega:\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假或}\ \eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\to\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}.$$

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\,\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

对每个 $n'\in I^C$ 我们有 $\forall x\,\psi(x,\overline{a_{n'}})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

现在设 $I'=\{n\in\omega:\forall x\,\psi(x,\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}$。则 $I'^C\in\mathcal{U}$。对每个 $n\in I'^C$ 有 $\forall x\,\psi(x,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以存在 $c_n\in V$ 使得 $\psi(c_n,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假。如果 $n\notin I'^C$ 让 $c_n=\emptyset$，则我们有 $[\langle c_n\rangle]\in {}^*V$ 并且由归纳假设，$\psi\left([\langle c_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。所以 $\forall x\,\varphi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。 □

定义 1.12 给定一个映照 $f:V\to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\overline{a})$ 都有 $\varphi(\overline{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\overline{a}))$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 $^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 $^*\mathcal{V}$ 的**基本子模型**。

定理 1.13 (J. Łoś, 1955) 设 $*:V\to {}^*V$ 是一映射使得 $*(a)=[\langle a\rangle]$。则 $*$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 $^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**。

证明：设 $\varphi(\overline{a})$ 是关于 $\mathcal{V}$ 的语句。则由引理1.11 $\varphi(\overline{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真推出

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}=\omega\in\mathcal{U}$$

再推出 $\varphi(*(\overline{a}))=\varphi\left(\overline{[\langle a\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为真。而 $\varphi(\overline{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假推出

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}=\emptyset\notin\mathcal{U}$$

再推出 $\varphi(*(\overline{a}))=\varphi\left(\overline{[\langle a\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。 □

定理1.13 也称为**转换原理** (transfer principle)。

我们通常记 $*(A)$ 为 $^*A$。如果 $r\in V_0$，为了方便可把 $^*r$ 直接记为 r。

推论 1.14 $^*\mathcal{R}=({}^*\mathbb{R};+,*,0,1,<)$ 是有序域。

证明：命题“$\mathcal{R}=(\mathbb{R};+,*,0,1,<)$ 是有序域” 在 $\mathcal{V}$ 中为真且可由关于 $\mathcal{V}$ 的一阶语句来表达。由定理 1.13 “$^*\mathcal{R}=({}^*\mathbb{R};+,*,0,1,<)$ 是有序域” 在 $^*\mathcal{V}$ 为真。 □

在接下来各章中我们常称 $\mathcal{V}$ 为**标准模型**，称 ${}^*\mathcal{V}$ 为**非标准模型**。

在非标准分析的应用中读者应尽量把 ${}^*V_0$ 中的元素想象成点，而不是一个序列的等价类。比如人们一般会把标准实数想象成水平轴上的一个点，而不是一个柯西序列的等价类或一个戴特金分割。按本文作者自己的理解，数学基础研究中有分阶复杂度和量词复杂度。如果我们把点看成是一阶实体，点集或点集上的关系或函数为二阶实体，点集上的函数空间，拓扑空间等等为三阶实体，已次类推，则一个数学论述涉及的实体阶数越高就可认为越复杂。非标准分析的好处之一是把涉及二阶实体的论述，比如数列的极限过程，用只涉及一阶实体的论述，比如无穷小元素，来刻画，从而减低论述的分阶复杂度。所以如果读者一直把 ${}^*V_0$ 中的元素想象成一个序列的等价类，就较难体会非标准分析的这一好处。关于减低量词复杂度我们将会在介绍 ${}^*\mathcal{V}$ 的饱和性质时提到。

在这一章中 ${}^*\mathcal{V}$ 的构造方法称为**超幂**，超幂构造是超积构造的一种特殊情况。简单地说超积就是笛卡尔乘积模超滤子。超幂构造是构造非标准模型的一种方法，但在模型论中我们也可以用紧致性来构造非标准模型，称为 Henkin 构造。采用超幂构造的好处是可给初学者一个比较具体的构造方法，使得如果对一些实体的意义比较模糊的时候可以考虑将实体看作具体的序列等价类从而使得自己的理解有了一个比较确定的基础。当然再说一句，在有了一定的基础之后，读者应尽量把 ${}^*V_0$ 中的元素想象成点。

为了获取更强的饱和性质我们可以采用更大集合上的正则超滤子来构造超结构超幂，我们还可以构造超幂极限等来获得比饱和性更强的性质 ([6, 21])。有时可通过使用特性质的超滤子来获得超幂的特殊性质 ([4])。非标准分析还可以公理化，称为内集合论。内集合论的公理是标准集合论公理 ZFC 的保守扩充，而内集合论公理的非标准模型包含了标准集合论宇宙 ([33])。

结束本章之前我们小试牛刀，用非标准模型作为工具来证明 König 引理。当然 König 引理的标准证明并不复杂，我们在此的用意只是提供一种不一样的思路。

称一个偏序集 $(T;\prec)$ 为**树**如果对每一 $t\in T$，集合

$$\hat{t} := \{s\in T : s\prec t\}$$

是 T 的良序子集。设 T 为一树。对每个 $t\in T$，记 $ht(t)$ 为 $\hat{t}$ 的序型。对每个 $m\in\mathbb{N}$ 记 $Lv_m(T) := \{t\in T : ht(t)=m\}$ 为 T 的 m 层元素集

合。如果对每个 $m\in\mathbb{N}$，集合 $Lv_m\neq\emptyset$，我们称 T 的高度无限。注意如果 $k<ht(t)$，则 $\hat{t}\cap Lv_k(T)\neq\emptyset$。

例子 1.15 设 T 是一无限高的树且对每一 $m\in\mathbb{N}$，集合 $Lv_m(T)$ 都是有限的。则 T 一定包含一个无限全序子集。

证明：不失一般性我们可假设 $T\subseteq\mathbb{N}$。由转换原理存在超整数 K 使得 $Lv_K({}^*T)\neq\emptyset$。取定一个 $t_K\in Lv_K({}^*T)$，令 $B:=T\cap\hat{t}_K$。因为 $\hat{t}_K$ 是全序集，所以 B 是全序集。对每个 $k\in\mathbb{N}$，由转换原理 $\hat{t}_K\cap Lv_k({}^*T)\neq\emptyset$。由习题1.20 对每个 $k\in\mathbb{N}$，有 $Lv_k({}^*T)=Lv_k(T)$。所以 $B\subseteq T$ 并且 $B\cap Lv_k(T)\neq\emptyset$。由 k 的任意性推出 B 是无限集。 □

1.4 第一章习题

习题 1.16 证明在定义 *1.3* 中所建立的关系 $\sim$ 是一等价关系。

习题 1.17 根据定义 *1.5* 证明 ${}^*<$ 是 ${}^*\mathbb{R}$ 上的全序。

习题 1.18 证明命题 *1.6* 。

习题 1.19 如果 $X=\emptyset$，即 $V_0=\mathbb{R}$，证明从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本嵌入是唯一的。

习题 1.20 证明 $A\in V$ 是一有限集当且仅当

$$ {}^*A=\{{}^*a:a\in A\}. $$

习题 1.21 设 $N\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$。令

$$ \mathcal{F}:=\{A\subseteq\mathbb{N}:N\in{}^*A\}. $$

证明 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的非主超滤子。

习题 1.22 证明如果语句“$\mathbb{R}$ 的每个非空有上界子集都有一个上确界”中的参量 $\mathbb{R}$ 换成 ${}^*\mathbb{R}$，则新语句在 ${}^*\mathcal{V}$ 中不成立。

希望读者从习题1.22 看出 $\mathcal{P}({}^*\mathbb{R})$ 和 ${}^*\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 的差别。

2 非标准分析和微积分

在这一章中我们将用非标准分析方法建立一元微积分中一些基本定理。一元微积分的内容是大家熟悉的。介绍非标准分析在这里的的应用并不是想要显示非标准分析的优势，而只是让读者熟悉非标准分析的思想。所以我们只考虑一元函数，且在大部分情况下仅考虑连续函数。从历史角度来说微积分或数学分析是 Abraham Robinson 创立非标准分析后第一个应用的领域。在这一章中我们还将介绍一些非标准分析中常用的记号和工具。我们将用希腊字母表示标准实数。

定义 2.1 设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$。

1. 如果对任何正标准实数 α 都有 $|r| < \alpha$, 则称 r 为**无穷小**, 记为 $r \approx 0$,
2. 如果 $r - r' \approx 0$, 我们称 r' **无穷接近**于 r 并记为 $r' \approx r$,
3. 如果存在一标准实数 $\alpha > 0$ 使得 $-\alpha < r < \alpha$, 我们称 r 是**有限的**,
4. 如果存在一标准实数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $r \approx \alpha$, 我们称 r 为**几乎标准的**。

定义 2.2 设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$。则

1. $r \lessapprox r'$ 表示 $r < r'$ 或 $r \approx r'$,
2. $r \gtrapprox r'$ 表示 $r > r'$ 或 $r \approx r'$,
3. $r \ll r'$ 表示 $r < r'$ 并且 $r \not\approx r'$,
4. $r \gg r'$ 表示 $r > r'$ 并且 $r \not\approx r'$, 不难证明如果 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $r \approx \alpha$ 和 $r \approx \beta$ 都成立，则 $\alpha = \beta$。

定理 2.3 每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

则 $-\alpha \in S$ 并且 α 是 S 的上界。所以 S 有一上确界 β。接下来证明 $r \approx \beta$。如果 $r \ll \beta$，则存在 $\gamma > 0$ 使得 $\beta - r > \gamma$。所以 $\beta - \gamma > r$。但这推出 $\beta - \gamma$ 是 S 的上界，这和 β 是 S 的上确界矛盾。如果 $r \gg \beta$ 则存在 $\gamma > 0$ 使得 $r - \beta > \gamma$。所以 $\beta + \gamma < r$。但这推出 $\beta + \gamma \in S$，而这又和 β 是 S 的上界矛盾。所以我们有 $r \approx \beta$。 □

定义 2.4 记 $Fin({}^*\mathbb{R}) := \{r \in {}^*\mathbb{R} : r$ 是有限的$\}$。记 $st : Fin({}^*\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 为一映射使得 $st(r) = \alpha$ 当且仅当 $r \approx \alpha$。映射 st 称为**标准化映照**。

当我们用非标准分析研究标准世界中的数学问题时，常常先把标准问题非标准化，然后在非标准模型中推导出一些结果，再用标准化映照把非标准结果拉回到标准超结构中去使其成为一个标准结果。所以标准化映照和转换原理是联系标准模型和非标准模型的两大工具。

2.1 极限和连续性

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为**超有限自然数**或**超整数**。名字"超有限"指的是它在非标准模型中是有限的，但从标准世界的角度来看是无穷大。但我们更多时候用超整数这个词。如果 $m \in {}^*\mathbb{N}$，记 $[m] := \{1, 2, \ldots, m\}$。我们把一个实数数列 s 看成是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。由转换原理，${}^*s$ 是从 ${}^*\mathbb{N}$ 到 ${}^*\mathbb{R}$ 的函数。

定义 2.5 设 s 是一实数数列，α 是一实数。如果对任意超整数 K 都有 ${}^*s(K) \approx \alpha$ 则称 α 是 s 的极限，记为

$$\lim_{k\to\infty} s(k) = \alpha.$$

命题 2.6 在定义 *2.5* 中的数列极限定义和通常的 ϵ–N 定义是等价的。

定理 2.7 (Bolzano–Weierstrass) 如果 s 是一有界数列，则 s 一定有一收敛子列。

证明：设 α 是 $|s|$ 的上界。随便取一个超整数 K。因为 $(\forall k \in \mathbb{N})(|s(k)| < \alpha)$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真，所以 $(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*s(k)| < \alpha)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。因此 $s(K) \in Fin({}^*\mathbb{R})$. 设 $\alpha = st(s(K))$。我们证明 s 有一个子列 s' 使得 $\lim\limits_{i\to\infty} s'(i) = \alpha$。如果对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 都能找到一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $k > m$ 且 $|s(k) - \alpha| < 1/m$，则通过递归我们能找到一个 s 的子列收敛于极限 α。

假设有一个 $m \in \mathbb{N}$ 使得对任何一个 $k \in \mathbb{N}$，$k > m$ 都有 $|s(k) - \alpha| \geq 1/m$。则由转换原理，对任何一个 $k \in {}^*\mathbb{N}$，$k > m$ 都有 $|{}^*s(k) - \alpha| \geq 1/m$，而这和 ${}^*s(K) \approx \alpha$ 矛盾。 □

定理 2.8 (柯西判别法) 一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件，即对任意 $m \in \mathbb{N}$，存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$。

证明：我们只证充分性。设 s 满足柯西条件。则容易证明 s 是有界数列。取定任意两个超整数 K, K' 我们证明 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$。

对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $K, K' \geq N_m$。所以由转换原理我们有 $|{}^*s(K) - {}^*s(K')| < 1/m$。因此 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$，即存在唯一的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对每一个超整数 K 都有 $st({}^*s(K)) = \alpha$。由定义 2.5 我们有

$$\lim_{k \to \infty} s(k) = \alpha.$$

□

定义 2.9 设 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $c \in [a,b]$，$f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$，且 $L \in \mathbb{R}$。如果对任意 $r \in [a,b]$，$r \neq c$，$r \approx c$ 都有 ${}^*f(r) \approx L$，则称 L 为 f 在 c 的极限并记为

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

定义 2.10 设 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 且 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$。如果对任意 $r \in [a,b]$，$r \approx c$ 都有 ${}^*f(r) \approx f(c)$，则称 f 在 c 连续。如果对每一个 $c \in [a,b]$ 都有 f 在 c 连续，则称 f 在 $[a,b]$ 上连续。

定理 2.11 (极值定理) 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $c, d \in [a,b]$ 使得 $f(c)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值和 $f(d)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值，即对任何一个 $x \in [a,b]$ 都有 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$。

证明: 取定一个超整数 K。对每个 $i = 0, 1, \ldots, K$ 设 $r_i := a + i(b-a)/K$。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{{}^*f(r_i) : i = 0, 1, \ldots, K\}$ 有一最大数 ${}^*f(r_{i_0})$ 和最小数 ${}^*f(r_{i_1})$。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$, 则有 $c, d \in [a,b]$。因为 f 在 c 和 d 连续, 我们有 ${}^*f(r_{i_0}) \approx f(c)$ 和 ${}^*f(r_{i_1}) \approx f(d)$。取任意 $x \in [a,b]$，则存在 $i_2 \leq K$ 使得 $r_{i_2} \approx x$ (只需取 i_2 为最大 i 使得 $r_i < x$)。则我们有 ${}^*f(r_{i_2}) \approx f(x)$。综合上述步骤我们可推出

$$f(d) \approx {}^*f(r_{i_1}) \leq {}^*f(r_{i_2}) \approx f(x) \approx {}^*f(r_{i_2}) \leq {}^*f(r_{i_0}) \approx f(c).$$

因为 $f(x)$，$f(c)$ 和 $f(d)$ 都是标准实数，所以 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$。 □

推论 2.12 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 是有界的。

定理 2.13 (介值定理) 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a) < 0 < f(b)$，则存在 $c \in [a,b]$ 使得 $f(c) = 0$。

证明：取定一个超整数 K。对每个 $i=0,1,\ldots,K$ 设 $r_i := a+i(b-a)/K$。则由转换原理，存在 $i_0 < K$ 使得 ${}^*f(r_{i_0}) \le 0 \le {}^*f(r_{i_0+1})$。因为 $r_{i_0} \approx r_{i_0+1}$，我们有 $st(r_{i_0}) = st(r_{i_0+1}) = c \in [a,b]$。因为 f 在 c 连续，我们有 $0 \ge {}^*f(r_{i_0}) \approx f(c) \approx {}^*f(r_{i_0+1}) \ge 0$。因为 $f(c)$ 是标准实数，所以 $f(c)=0$。

□

2.2 导数和积分

定义 2.14 设 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 是一函数，$c\in(a,b)$，$L\in\mathbb{R}$。如果对于任何非零无穷小 t 都有

$$\frac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t} \approx L,$$

则称 f 在 c 可导且有导数 L，并记为

$$f'(c) = L = st\left(\frac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t}\right).$$

例子 2.15 设 $f(x)=x^2$，$c\in\mathbb{R}$。则对一非零无穷小 t 我们有

$$f'(c) = st\left(\frac{(c+t)^2-c^2}{t}\right) = st\left(\frac{2ct+t^2}{t}\right) = st(2c+t) = 2c.$$

定理 2.16 (链式法则) 设 $f:(a,b)\to(d,e)$，$g:(d,e)\to\mathbb{R}$，$c\in(a,b)$ 使得 f 在 c 可导且 g 在 $f(c)$ 可导。则 $g\circ f$ 在 c 可导且对任意非零无穷小 t，

$$(g\circ f)'(c) = st\left(\frac{{}^*g({}^*f(c+t))-g(f(c))}{t}\right) = g'(f(c))*f'(c). \tag{3}$$

证明：任取一非零无穷小 t。如果 ${}^*f(c+t)=f(c)$，则

$$f'(c) = st\left(\frac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t}\right) = 0 \text{ 并且}$$

$$\frac{{}^*g({}^*f(c+t))-g(f(c))}{t} = 0 = g'(f(c))*f'(c).$$

如果 ${}^*f(c+t)\ne f(c)$，则 $r = {}^*f(c+t)-f(c)\approx 0$ 且

$$\begin{aligned}&\frac{{}^*g({}^*f(c+t))-g(f(c))}{t}\\ &\qquad = \frac{{}^*g(f(c)+r))-g(f(c))}{r} * \frac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t} \approx g'(f(c))*f'(c).\end{aligned}$$

所以 (3) 在两种情况下都成立。 □

定理 2.17 (罗尔定理) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$。

证明：如果 f 是常函数，则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数，则 f 在 $c\in(a,b)$ 取到最大值，或 f 在 $d\in(a,b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c\in(a,b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f(c)$ 也是 ${}^*f$ 在 ${}^*[a,b]$ 上的最大值。所以对任意非零无穷小 $t>0$ 有

$$0\le\frac{{}^*f(c-t)-f(c)}{-t}\approx\frac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t}\le 0.$$

所以 $f'(c)=st\left(\dfrac{{}^*f(c+t)-f(c)}{t}\right)=0$。如果 f 在 $d\in(a,b)$ 取到最小值，则定理可由对称性证明。 □

从罗尔定理可容易推出导数中值定理。

定义 2.18 设 $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$，$f:[a,b]\to\mathbb{R}$。

1. 集合 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}\in\mathcal{P}([a,b])$，$k\in\mathbb{N}$，是一 $[a,b]$ 的划分如果

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b;$$

2. 对每一个 $[a,b]$ 的划分 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_k\}$，记

$$mesh\ (P):=\max\{x_i-x_{i-1}:i\in[k]\};$$

3. $[a,b]$ 上的划分 P 比 $[a,b]$ 上的划分 P' 精细，如果 P' 中的点都在 P 中；

4. 设 P 和 P' 是 $[a,b]$ 上的两个划分。则 $P\cup P'$ 是 $[a,b]$ 上比 P 和 P' 都精细的划分，

5. 如果存在一个 $I\in\mathbb{R}$ 使得对每一个 ${}^*[a,b]$ 的划分 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_K\}\in{}^*\mathcal{P}([a,b])$ 满足 $mesh\ (P)\approx 0$ 和每个相伴点集 $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_K\}\in{}^*\mathcal{P}([a,b])$ 满足 $t_i\in{}^*[x_{i-1},x_i]$ 都有

$${}^*R({}^*f,P,T):=\sum_{i=1}^{K}{}^*f(t_i)(x_i-x_{i-1})\approx I,$$

则称 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，且对任意一个 ${}^*[a,b]$ 的划分 $P \in {}^*\mathcal{P}([a,b])$
满足 $mesh\ (P) \approx 0$ 和相伴点集 T，记 f 在 $[a,b]$ 上的积分为

$$\int_a^b f(x)dx := I = st\left({}^*R({}^*f, P, T)\right).$$

由相伴点集 T 的任意性，可证明 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数一定有界。

定义 2.19 设 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$，$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a,b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$，记

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ 和 } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ 和 } L(f,P) = \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1})$$

分别称为 f 在 $[a,b]$ 上的**上和**和 f 在 $[a,b]$ 上的**下和**。

由定义 2.19 可看出对 $[a,b]$ 的任意划分 P, P' 都有

$$L(f,P) \leq L(f, P \cup P') \leq U(f, P \cup P') \leq U(f, P').$$

所以每个上和 $U(f,P)$ 是所有下和的上界而每个下和是所有上和的下界。

命题 2.20 设 $f : [a,b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a,b])$ 是 ${}^*[a,b]$ 的划分满足 $mesh\ (P) \approx 0 \approx mesh\ (P)$，则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明：设 $\overline{I} = \inf\{U(f,P) : P \text{ 是} [a,b] \text{ 上的划分}\}$。由转换原理 $\overline{I} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\overline{I} \leq {}^*U({}^*f, P')$。给定标准正实数 ϵ，则存在一个超结构中的划分 P'' 使得 $U(f, P'') < \overline{I} + \epsilon$。因为 P'' 只包含有限个点，所以和式 ${}^*U({}^*f, P)$ 与和式 ${}^*U({}^*f, P \cup P'')$ 最多只有有限多个项不同，而因为 f 是有界函数推出和式中的每一项都是无穷小，所以 $\overline{I} \leq {}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P \cup P'') \leq U(f, P'') < \overline{I} + \epsilon$。由于 $\epsilon > 0$ 可取任意小的标准正实数，我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx \overline{I}$，因此我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P')$。

由对称性可证 ${}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P')$。 □

定理 2.21 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 ${}^*[a,b]$ 的划分 $P\in {}^*\mathcal{P}([a,b])$ 满足 $mesh\,(P)\approx 0$ 都有

$$ {}^*U({}^*f,P)\approx {}^*L({}^*f,P). $$

证明："$\Leftarrow$": 设 $P,P'\in {}^*\mathcal{P}([a,b])$ 是两个划分满足 $\mathrm{mesh}\,(P)\approx 0\approx \mathrm{mesh}\,(P')$。则我们有

$$ {}^*L({}^*f,P)\le {}^*R({}^*f,P,T)\le {}^*U({}^*f,P), $$

$$ {}^*L({}^*f,P')\le {}^*R({}^*f,P',T')\le {}^*U({}^*f,P'). $$

因为 ${}^*U({}^*f,P)$，${}^*L({}^*f,P)$，和 ${}^*U({}^*f,P')$，${}^*L({}^*f,P')$ 都无穷接近，所以由命题 2.20 和所给条件我们有 ${}^*R({}^*f,P,T)\approx {}^*R({}^*f,P',T')$，即 f 在 $[a,b]$ 上黎曼可积。

"$\Rightarrow$": 假设 f 在 $[a,b]$ 上可积。给定 $[a,b]$ 的划分 $P=\{x_0<x_1<\cdots<x_K\}\in {}^*\mathcal{P}([a,b])$ 满足 $\mathrm{mesh}\,(P)\approx 0$。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中取两个相伴集合 $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_K\}$ 和 $T'=\{t'_1,t'_2,\ldots,t'_K\}$ 使得对每个 i 都有 $M_i-{}^*f(t_i)\approx 0$ 和 ${}^*f(t'_i)-m_i\approx 0$。则我们有

$$ {}^*U({}^*f,P)-{}^*R({}^*f,P,T)\le\sum_{i=1}^{K}(M_i-{}^*f(t_i))(x_i-x_{i-1})\approx 0 \text{ 和} $$

$$ {}^*R({}^*f,P,T')-{}^*L({}^*f,P)\le\sum_{i=1}^{K}({}^*f(t'_i)-m_i)(x_i-x_{i-1})\approx 0. $$

所以 ${}^*U({}^*f,P)\approx {}^*R({}^*f,P,T)\approx {}^*R({}^*f,P,T')\approx {}^*L({}^*f,P)$。 □

定理 2.22 设 $F,f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 连续，在 (a,b) 上 F 可导且 $F'(x)=f(x)$。则

$$ \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). $$

证明：取定一划分 $P\in {}^*\mathcal{P}([a,b])$ 使得 $\mathrm{mesh}\,(P)\approx 0$。对每个 $i\in[K]$ 由中值定理加上转换原理，存在 $t_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使得 ${}^*F(x_i)-{}^*F(x_{i-1})={}^*F'(t_i)(x_i-x_{i-1})={}^*f(t_i)(x_i-x_{i-1})$。所以

$$ F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{K}({}^*F(x_i)-{}^*F(x_{i-1}))=\sum_{i=1}^{K}{}^*f(t_i)(x_i-x_{i-1})\approx\int_a^b f(x)dx. $$

因为 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $F(b)-F(a)$ 都是标准实数，所以它们相等。 □

2.3 Peano 存在性定理

定理 2.23 设 $g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是二元有界连续函数，$p\in\mathbb{R}$。则存在函数 $y:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足对所有 $r\in[0,1]$

$$y(r)=p+\int_0^r g(s,y(s))ds. \tag{4}$$

证明：取一超整数 K，设 $T:=\{t_i=i/K:i=0,1,\ldots,K\}$，$\Delta t=1/K$。归纳定义 Y 使得 $Y(0):=p$，

$$Y(t_{i+1}):=p+\sum_{j=0}^{i}{}^*g(t_j,Y(t_j))\Delta t.$$

设 $|g|\le B\in\mathbb{R}$。由转换原理，$|{}^*g|\le B$。因为

$$|Y(t_{i+1})|\le|p|+\sum_{j=0}^{i}|{}^*g(t_j,Y(t_j))|\Delta t\le|p|+B,$$

所以对每个 $t\in T$，$Y(t)$ 是有限的。如果 $t_i<t_{i'}$，$t_i\approx t_{i'}$，则

$$|Y(t_{i'})-Y(t_i)|\le\sum_{j=i}^{i'-1}B\Delta t=B(t_{i'-1}-t_{i-1})\approx 0.$$

所以 $Y(t_i)\approx Y(t_{i'})$。(这样的内函数称为是在 T 上 S-连续)。对每一标准实数 $r\in[0,1]$，取 $r^-=\max\{t\in T:t<r\}$ 并定义

$$y(r):=st(Y(r^-)).$$

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$\begin{aligned}
y(r)\approx Y(r^-)&=p+\sum_{t<r^-}{}^*g(t,Y(t))\Delta t\\
&=p+\sum_{t<r^-}{}^*g(t,{}^*y(t))\Delta t+\sum_{t<r^-}({}^*g(t,Y(t))-{}^*g(t,{}^*y(t))\Delta t\\
&\approx p+\int_0^r g(s,y(s))ds+\sum_{t<r^-}({}^*g(t,Y(t))-{}^*g(t,{}^*y(t))\Delta t.
\end{aligned}$$

因为 $Y(t)\approx{}^*y(t)$ 且 g 连续，所以 ${}^*g(t,Y(t))\approx g(st(t),y(st(t)))\approx{}^*g(t,{}^*y(t))$。这推出 $\sum_{t<r^-}({}^*g(t,Y(t))-{}^*g(t,{}^*y(t))\Delta t\approx 0$，即 (4) 成立 □

2.4 第二章习题

习题 2.24 设 $r, r' \in Fin({}^*\mathbb{R})$。证明

1. $st(r+r') = st(r) + st(r')$,
2. $st(r * r') = st(r) * st(r')$,
3. 如果 $r \le r'$，则 $st(r) \le st(r')$。

习题 2.25 证明命题 *2.6*。

习题 2.26 用非标准分析直接证明闭区间套定理。

习题 2.27 设 $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。定义 f 在 A 上一致连续如果对任意 $x, y \in {}^*A$，$x \approx y$ 推出 ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$。证明此定义和传统 ϵ–δ 一致连续函数定义等价。

习题 2.28 用非标准方法证明一函数 f 在 c 可导推出 f 在 c 连续。

习题 2.29 设 f, g 在 $[a,b], [b,c]$ 上黎曼可积。按照定义 *2.18* 证明

1. $|f|$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积并满足 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$;
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
3. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$。

3 非标准分析和测度论

在这一章中我们介绍 Loeb 测度空间和一些应用。 Loeb 测度空间是建立在 ${}^*\mathcal{V}$ 中集合上的标准测度空间，所以是一个联系标准模型和非标准模型的桥梁。为了简便我们只考虑有限测度空间，而有限测度空间本质上就是概率空间。在构造 Loeb 测度空间时我们需要用到非标准模型内集的可数饱和性质。可数饱和性质不但在构造 Loeb 空间要用，在非标准分析其他方面都是一个重要的性质。

3.1 可数饱和性

在设 $S \in {}^*V$ 是一无限集合。集合 S 有很多子集，有些在 ${}^*V$ 中而有些不在 ${}^*V$ 中。在 ${}^*V$ 中的集合称为内集合，而不在 ${}^*V$ 中的集合称为外集合。

定义 3.1 设 $S = [\langle S_n \rangle] \in {}^*V$。集合 $T \subseteq S$ 是**内集**如果存在 $T_n \subseteq S_n$ 使得 $T = [\langle T_n \rangle]$。不是内集的集合称为**外集**。

例子 3.2 在 $\mathcal{V}$ 中所有 $[0,1]$ 的非空子集有一个上确界。以下一阶语句 $\varphi(\mathcal{P}, [0,1], <)$ 表示这一事实：

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathcal{P}([0,1])\,(x \neq \emptyset \rightarrow \\ &\qquad \exists \beta \in [0,1]\,[\forall t \in x\,(t \leq \beta) \wedge \forall u \in [0,1]\,(u < \beta \rightarrow \exists v \in x\,(u < v))])\,.\end{aligned}$$

由转换原理 $\varphi({}^*\mathcal{P}, {}^*[0,1], {}^*<)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。所以每个非空集合 $A \in {}^*\mathcal{P}([0,1])$ 都有上确界。如考虑 $U := \{t \in {}^*[0,1] : t \approx 0\}$，则 U 是 ${}^*[0,1]$ 的非空子集。但是 U 不可能有上确界 β。这是因为如果 $\beta \approx 0$ 则 $2\beta \in U$，所以 β 不是 U 的上界。如果 $\beta \gg 0$，则 $\beta/2 \gg 0$，所以 $\beta/2$ 是 U 的上界，因而 β 不是 U 的上确界。这说明 $U \notin {}^*\mathcal{P}([0,1]$，即 U 是 ${}^*[0,1]$ 的外子集。

如果一个内集的子集可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

命题 3.3 设 $\varphi(x, \overline{A})$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一阶公式，$S \in {}^*V$。则集合

$$B := \{b \in S : \varphi(b, \overline{A}) \text{ 在}{}^*\mathcal{V} \text{ 中为真}\}$$

是 S 的内子集。

证明： 设 $S = [\langle S_n \rangle]$，$A = [\langle A_n \rangle]$。对每一 $n \in \omega$，记

$$B_n = \{b \in S_n : \varphi(b, \overline{A_n}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\}.$$

记 $B' = [\langle B_n \rangle]$。显然 $B' \subseteq S$ 并且对每个 $[\langle b_n \rangle] \in B'$，

$$\{n \in \omega : b_n \in S_n \wedge \varphi(b_n, \overline{A_n}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}.$$

所以 $B' \subseteq B$。如果 $[\langle b_n\rangle] \in B$，则由引理1.11 $\{n \in \omega : b_n \in S_n \wedge \varphi(b_n, \overline{A_n})$ 在$\mathcal{V}$ 中为真$\} \in \mathcal{U}$。所以 $[\langle b_n\rangle] \in B'$，而这证明了 $B = B'$ 是内集。 □

显然一个内集 $S \in {}^*V$ 的内子集一定可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的公式来定义，这是因为那个内子集自身可以作为公式中的参量。

如果非标准模型不是由超幂构造，而是由模型论中 Henkin 构造或其他抽象构造，则命题3.3 可以作为内集的定义。

命题 3.4 (可数饱和性质) 设 $\{A^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ 是 ${}^*V$ 中非空内集组成的序列使得
$A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \cdots$。则

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} A^{(m)} \neq \emptyset.$$

证明：我们使用对角线方法。设 $A^{(m)} = [\langle A_n^{(m)}\rangle]$。我们需要找到一个 $[\langle a_n\rangle] \in {}^*V$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $[\langle a_n\rangle] \in [\langle A_n^{(m)}\rangle]$。任取一元 $[\langle a_n^{(m)}\rangle] \in [\langle A_n^{(m)}\rangle]$。对于任一自然数 m，令

$$U_m := \{n \in \omega : n > m, a_n^{(m)} \in A_n^{(m)}, \text{并且} A_n^{(m)} \subseteq A_n^{(m-1)} \subseteq \cdots \subseteq A_n^{(0)}\}.$$

由引理 1.11，$U_m \in \mathcal{U}$。显然 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ 并且 $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m = \emptyset$。现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在只需证明对任意 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $[\langle a_n\rangle] \in [\langle A_n^{(m)}\rangle]$。由引理 1.11，这等价于 $U = \{n \in \omega : a_n \in A_n^{(m)}\} \in \mathcal{U}$。当 $n \in U_m$，有 $m \leq m_n$，这是因为 m_n 是这些 m 中的最大值。因为 $n \in U_{m_n}$，所以 $a_n^{(m_n)} \in A_n^{(m_n)}$ 并且 $A_n^{(m)} \supseteq A_n^{(m_n)}$，这推出 $a_n = a_n^{(m_n)} \in A_n^{(m)}$。因此 $n \in U$。这证明了 $U_m \subseteq U$。由滤子的定义，我们有 $U \in \mathcal{U}$。 □

推论 3.5 设 $S \in {}^*V$ 并且 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$。则存在超整数 K 和超有限序列 $\{A^{(m)} : m = 0, 1, \ldots, K\} \in {}^*V$，即序列 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成一个超有限序列。

证明：在 $^*\mathcal{V}$ 中令

$$F_m := \left\{ f : \exists K \in {}^*\mathbb{N}\,(K \geq m) \wedge (f : [K] \to S) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (f(i) = A^{(i)}) \right) \right\}.$$

则 $F_m \in {}^*V$ 且每个 F_m 包含了序列 $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}\}$，所以非空。显然 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$。由命题3.4 存在 $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$。显然 f 就是 $^*V$ 中超有限序列，且延拓了 $\{A^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$。 □.

我们通常只需要非标准模型的可数饱和性。但有时更强的饱和性会被用到。

定义 3.6 设 $\mathcal{A}$ 是一内集族。我们说 $\mathcal{A}$ 满足**有限交性质** 如果 $\mathcal{A}$ 中任意有限个内集的交非空。

设 κ 是一不可数正则基数。我们说一个非标准模型是 κ 饱和的如果每个势小于 κ 的满足有限交性质的内集族 $\mathcal{A}$ 都有非空交，即

$$\bigcap \{A : A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset.$$

显然可数饱和性即是 $\aleph_1$ 饱和性。如果 $\kappa \leq \lambda$ 是两个不可数正则基数，则 λ 饱和性推出 κ 饱和性。所以 κ 越大，κ 饱和性就越强。

定理 3.7 设 κ 是一无穷基数。存在 κ 上的非平凡超滤子 $\mathcal{U}$ 使得超结构在 κ 上的超幂模超滤子 $\mathcal{U}$，即

$$^*V := \bigcup_{n=0}^{\mathrm{n}} (V_n^{\kappa}/\mathcal{U})$$

是 κ^+ 饱和的。

根据以上定理我们可以构造一个非标准模型使其满足任意设定的 κ 饱和性质。以上定理涉及太多集合论知识，所以此处不讨论定理的证明。感兴趣的读者可参看 [6] 第六章。

对于一递减内集序列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，可数饱和的形式表示是

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists x\, (x \in A_m) \to \exists x \forall m \in \mathbb{N}\, (x \in A_m).$$

所以，粗略地讲，饱和性质可被看作是全称量词和存在量词的交换。一个数学问题的复杂性有时可用叙述此问题所用到的全称量词和存在量词的交替次数来衡量，所以在某些情况下使用饱和性能减低量词复杂度。有兴趣的读者可参看 [19]。

3.2 Loeb 测度

定义 3.8 设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中**超有限集**，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 使得 $|\Omega| = H$。

1. 记 $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，即 Σ_0 是 Ω 中所有内子集的集族；

2. 令 $\mu_0 : \Sigma_0 \to {}^*[0,1]$ 为一函数使得

$$\mu_0(A) = \frac{|A|}{H};$$

3. 对 Ω 的任一子集 *(*可以是外子集*)* $E \subseteq \Omega$，令

$$\overline{\mu}(E) := \inf\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge E \subseteq A\} \text{ 和}$$

$$\underline{\mu}(E) := \sup\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge A \subseteq E\};$$

4. 令 $\Sigma_L := \{E \subseteq \Omega : \overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)\}$；

5. 定义 $\mu_L : \Sigma_L \to [0,1]$ 使得对每个 $E \in \Sigma_L$，$\mu_L(E) := \overline{\mu}(E)$。

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为（ Loeb ）上测度和（ Loeb ）下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 3.9 设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；

2. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_L$；

3. 如果 $A \in \Sigma_0$，则 $\mu_L(A) = st(\mu_0(A))$；

4. 如果 $E, E' \subseteq \Omega$ 使得 $E \subseteq E'$，$E' \in \Sigma_L$，且 $\mu_L(E') = 0$，则 $E \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(E) = 0$；

5. 如果 $E, E' \in \Sigma_L$，则 $E \cup E' \in \Sigma_L$ 和 $E' \setminus E \in \Sigma_L$；

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \leq \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；

7. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq E \subseteq B_{m+1} \subseteq B_m$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$;

8. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E\Delta A) = 0$，这里 $E\Delta A := (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ 是集合 E 和 A 的对称差;

9. Σ_L 是一 σ-代数，称为 **Loeb 可测代数**;

10. 如果 $\{E_m \in \Sigma_L : m \in \mathbb{N}\}$ 两两互不相交，则
$$\mu_L\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m).$$

证明：命题3.9 中性质 1.–7. 的证明和实分析中 $[0,1]$ 上勒贝格测度性质的证明相似，所以留给读者。现在证明性质 8. 设 $E \in \Sigma_L$。由性质 7. 存在内集 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq E \subseteq \cdots \subseteq B_2 \subseteq B_1$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$。由推论3.5 序列 $\{(A_m, B_m) : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成一超有限内序列。所以存在内集 A_K, B_K 使得对 $m \in \mathbb{N}$
$$A_m \subseteq A_K \subseteq B_K \subseteq B_m.$$
令 $A := A_K$。则对任一 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $(A \setminus E) \cup (E \setminus A) \subseteq B_m \setminus A_m$。所以 $\mu_L(E\Delta A) = 0$。设 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E\Delta A) = 0$。则 $E = (A \setminus (A \setminus E)) \cup (E \setminus A)$。因为 $A, A \setminus E, E \setminus A \in \Sigma_L$，我们有 $E \in \Sigma_L$。注意我们不能期望 $A_K \subseteq E$ 或 $E \subseteq B_K$。

现在证明性质 9. 和 10. 设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$，先证 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \in \Sigma_L$。不失一般性，可假设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$ 两两互不相交（否则用 $E'_m = E_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i$ 来替代)。如果级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m) = \infty$，则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{m=1}^{N} \mu_L(E_m) > 1$。但是由性质 6. 我们得到荒谬结论 $1 \geq \mu_L\left(\bigcup\limits_{m=1}^{N} E_m\right) > 1$。所以 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m)$ 收敛。给定标准正实数 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum\limits_{m=N+1}^{\infty} \mu_L(E_m) < \epsilon/4$。对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 取定 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得 $A_m \subseteq E_m \subseteq B_m$ 满足
$$\mu_0(B_m) - \epsilon/2^{m+2} < \mu_L(E_m) < \mu_0(A_m) + \epsilon/2^{m+2}.$$

我们有 $\sum_{m=N+1}^{\infty}\mu_L(B_m)\le\sum_{m=N+1}^{\infty}(\mu_L(E_m)+\epsilon/2^{m+2})<\epsilon/2$。由推论3.5 我们可延拓 $\{B_m : m\in\mathbb{N}\}$ 成超有限内序列 $\{B_m : 1\le m\le K\}$ 使得 $\sum_{m=N+1}^{K}\mu_0(B_m)<\epsilon/2$。因此我们有 $A=\bigcup_{m=1}^{N}A_m\in\Sigma_0$，$B=\bigcup_{m=1}^{K}B_m\in\Sigma_0$，和 $A\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\subseteq B$。所以

$$\mu_0\left(B\setminus A\right)\le\sum_{m=1}^{N}\mu_0\left(B_m\setminus A_m\right)+\sum_{m=N+1}^{K}\mu_0(B_m)<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon.$$

由性质 7. 推出 $\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\in\Sigma_L$。又因为

$$\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)<\sum_{m=1}^{N}\mu_L(E_m)+\mu_0\left(\bigcup_{m=N+1}^{K}B_m\right)<\sum_{m=1}^{\infty}\mu_L(E_m)+\epsilon \text{ 和}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mu_L(E_m)-\epsilon<\sum_{m=1}^{N}\mu_L(E_m)=\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{N}E_m\right)\le\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right),$$

由 ϵ 的任意性可推出

$$\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}E_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu_L(E_m).$$

命题得证。 □

由以上命题和习题3.18 可知 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 是可数可加非原子完备概率空间，称为超有限集 Ω 上的**均匀分布 Loeb 概率空间**。我们通常直呼其为 Loeb 空间。

其实在以上 Loeb 空间的构造中 Σ_0 不一定要包含 Ω 的所有内子集。只需要求 Σ_0 是 Ω 上的内代数即可。为了使 μ_L 是非原子，只需要求对每个 $A\in\Sigma_0$ 使得 $|A|/|\Omega|\gg 1$ 都有 $B\in\Sigma_0$ 满足 $|A|/|B|\approx 2$ 即可。

我们还可以由标准有限可加测度空间 $(\Gamma;\Sigma,\mu)$ 生成 Loeb 测度空间 $({}^*\Gamma;\Sigma_L,\mu_L)$。先把标准空间非标准化，即 $\Sigma_0:={}^*\Sigma$ 和 $\mu_0:={}^*\mu$，然后依照定义3.8 和命题3.9 的思路可构造 ${}^*\Gamma$ 上的 Loeb 测度空间。

由 Loeb 空间我们还可构造实数上勒贝格测度。因为一个实数上的子集 E 是勒贝格可测当且仅当 E 和每个长度为 1 的闭区间的交是勒贝格可测的。所以我们只要构造 $[0,1]$ 上的勒贝格测度即可。

定理 3.10 设 K 是超整数，$\Omega = \{i/K : i \in [K]\}$。令 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$ 为在定义 *3.8* 和命题 *3.9* 中构造的 *Loeb* 概率空间。考虑限制在 Ω 上的标准化映照 $st : \Omega \to [0,1]$，定义 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}([0,1])$ 和 $\lambda : \mathcal{L} \to [0,1]$ 使得 $E \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $st^{-1}(E) \in \Sigma_L$ 并且 $\lambda(E) := \mu_L(st^{-1}(E))$。则 $\mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上勒贝格可测代数并且 λ 在勒贝格可测代数上是勒贝格测度。

证明：因为 Σ_L 是 σ-代数，所以 $\mathcal{L}$ 也是 σ-代数。

如果 $a \in (0,1), E = \{a\}$, 对任一 $\epsilon > 0$ 我们取 $i, i' \in [K]$ 使得 $i/K \ll a \ll i'/K$ 且 $st((i'-i)/K) < \epsilon$。则 $\{j/K : i \le j \le i'\} \supseteq st^{-1}(\{a\})$ 且 $\mu_L(\{j/K : i \le j \le i'\}) = st((i'-i)/K) < \epsilon$。所以 $\lambda(\{a\}) = \mu_L(st^{-1}(\{a\}) = 0$。显然这等式当 a 是 0 或 1 时仍成立。

如果 $(a,b) \subseteq [0,1]$，令 $i, i' \in [K]$ 使得 $st(i/K) = a$，$st(i'/K) = b$。则 $st^{-1}((a,b)) \subseteq \{j/K : i \le j \le i'\} \subseteq st^{-1}([a,b]) = st^{-1}(\{a,b\}) \cup st^{-1}((a,b))$。所以 $\lambda((a,b)) = \mu_L(\{j/K : 1 \le j \le i'\}) = b-a$。这也推出 $\lambda([a,b]) = b-a$。由 μ_L 的可数可加性可推出 λ 的可数可加性。如果 $\lambda(E) = 0$，$E' \subseteq E$，则 $st^{-1}(E') \subseteq st^{-1}(E)$。而 $\mu_L(st^{-1}(E)) = 0$，所以 $\lambda(E') = \mu_L(st^{-1}(E') = 0$。所以 $\mathcal{L}$ 包含了 $[0,1]$ 上的勒贝格可测代数，λ 在勒贝格可测代数上是勒贝格测度。

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。如果 $A \subseteq \Omega$ 是内集，则 $st(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。这是因为如果 α_n 是 $st(A)$ 中的收敛数列且收敛于极限 α，$a_n \in A$ 使得 $st(a_n) = \alpha_n$，则由可数饱和性存在超整数 K 使得 $a_K \in A$ 并且 $st(a_K) = \alpha$。

因为 $st^{-1}(E)$ 是 Ω 中的 Leob 可测集，对任一 $m \in \mathbb{N}$，存在内集 $A, B \subseteq \Omega$ 使得 $A \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B$ 并且 $\mu_L(B \setminus A) < 1/m$。令 $E_1 = st(A)$，$A' = st^{-1}(E_1)$，$F_2 = st(\Omega \setminus B)$，$E_2 = [0,1] \setminus F_2$，和 $B' = \Omega \setminus st^{-1}(F_2)$，则我们有 $A \subseteq A' \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B' \subseteq B$，$E_1 \subseteq E \subseteq E_2$, $\mu_L(A) \le \mu_L(A') = \lambda(E_1)$，和 $\mu_L(B) \ge \mu_L(B') = 1 - \mu_L(st^{-1}(F_2)) = 1 - \lambda(F_2) = \lambda(E_2)$。所以 $\lambda(E_2 \setminus E_1) \le \mu_L(B \setminus A) < 1/m$。因为 E_1 是闭集，E_2 是开集，并且 m 是 $\mathbb{N}$ 中任一元素，所以 E 是勒贝格可测集。 $\square$

注意，如果在以上定理中 $A = \{2i/K : 1 \le i \le K/2\}$，则 $\mu_L(A) = 1/2$ 但 $\lambda(st(A)) = 1$。所以 Loeb 可测集 A 和 $[0,1]$ 中任何勒贝格可测集都没有关系。所以可说 Loeb 测度比勒贝格测度更“丰富”。

3.3　Haar 测度以及内提升

以下我们用 Loeb 测度构造紧致群上的 Haar 测度。此构造是由 D. Ross 给出 [36]。

设 $(G;*,e,\mathcal{T})$ 是一个 Hausdorff 紧致拓扑群，即 $(G;*,e)$ 是一个群，其中 $*$ 是群乘法，e 是群单位元，$\mathcal{T}$ 是 G 上的 Hausdorff 拓扑使得 G 是紧集（G 的任意开覆盖都有一个有限子覆盖），并且函数 $x\mapsto x^{-1}$ 和对每个 $g\in G$，$x\mapsto gx$ 都是连续的。设 $\mathcal{B}$ 是 G 上的 Borel 代数。称一个测度 $\lambda:\mathcal{B}\to[0,1]$ 为 Haar 测度如果 $\lambda(G)=1$ 并且 λ 是平移不变的，即对每个 $B\in\mathcal{B}$ 和每个 $g\in G$，都有

$$\mu(B)=\mu(g^{-1}B).$$

定理 3.11 *每个 Hausdorff 紧致拓扑群 $(G;*,e,\mathcal{T})$ 上都存在 (唯一) 一个 Haar 测度。*

证明：我们可假设 G 是无限集。我们假设非标准模型是 $|\mathcal{T}|^+$ 饱和的。对每一个 $g\in G$，记

$$\mathrm{Monad}(g):=\bigcap\{{}^*O:O\in\mathcal{T}\wedge g\in O\}\subseteq{}^*G.$$

显然 $\mathrm{Monad}(g)=g*\mathrm{Monad}(e)$。用饱和性可找到 e 的 * 领域 $U\in{}^*\mathcal{T}$ 使得 $U\subseteq\mathrm{Monad}(e)$。因为 $\{xU:x\in{}^*G\}$ 是 $^*G$ 的 * 开覆盖，所以存在一个 $^*G$ 的 * 有限子覆盖 $\{x_1U,x_2U,\ldots,x_KU\}$，此处 $K\in{}^*\mathbb{N}$。我们可取子覆盖长度 K 为最小。令 $\Omega=\{x_1,x_2\ldots,x_K\}$。

因为 G 的紧性，每个 $x\in{}^*G$ 必在唯一一个 $\mathrm{Monad}(g)$ 中。这是因为 x 不可能同时在两个不同的 Monad 中并且如果 x 不在任何 Monad 中，则对每个 $g\in G$ 都可找到 g 的领域 $O_g\in\mathcal{T}$ 使得 $x\not\in{}^*O_g$，而这些 O_g 是 G 的覆盖，所以 G 有个有限子覆盖 $O_1,O_2,\ldots,O_k$，但这推出 $x\in{}^*G\subseteq\bigcup_{i=1}^{k}{}^*O_i$，矛盾。

由命题3.9 我们可找到 Ω 上的 Loeb 测度空间 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$。令 st 是从 Ω 到 G 的映照使得 $st(x_i)=g$ 当且仅当 $x_i\in\mathrm{Monad}(g)$。

对每个开集 $O\in\mathcal{T}$ 可证明 $st^{-1}(O)\in\Sigma_L$。因为证明这个事实比较繁琐，我们在此省略。有兴趣的读者可参看 [36, 18]。

对每一个开集 $O\in\mathcal{T}$ 令

$$\lambda(O):=\mu_L(st^{-1}(O)).$$

则 λ 可延拓成 G 上的 Borel 概率测度，即对所有 G 的 Borel 子集 B 都有 $\lambda(B) = \mu_L(st^{-1}(B))$。

最后证明 λ 是平移不变的。取任意 Borel 集 $E \subseteq G$ 和 $g \in G$。我们证明 $\lambda(g^{-1}E) \geq \lambda(E)$。如果得证，则由群运算的可逆性得出 $\lambda(g^{-1}E) = \lambda(E)$。取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup \{c \in \Omega : a \in A \,\wedge\, cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

则 C 是内集。如果 $c \in C$，则存在 $a \in A$ 使得存在 $x \in cU \cap g^{-1}aU$。这推出 $st(c) = st(x) = st(g^{-1}a)$。所以 $C \subseteq st^{-1}(g^{-1}A)$。取 $\Omega' := (\Omega \smallsetminus A) \cup gC$。我们证 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。任给 $y \in {}^*G$。不失一般性可假设 $y \in aU$ 这里 $a \in A$。然而 $g^{-1}y \in g^{-1}aU$。因为存在 $g^{-1}y \in {}^*G$，存在 $c \in \Omega$ 使得 $g^{-1}y \in cU$。所以 $cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset$。从而推出 $c \in C$ 且 $y \in gcU$。所以 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。由 K 的最小性可知 $|\Omega'| \geq |\Omega|$，而这又可推出 $|C| \geq |A|$。

因为每个 Loeb 可测集的测度都可由内集的测度从内部逼近，由命题3.9-7. 我们有 $\mu_L(st^{-1}(g^{-1}E)) \geq \mu_L(st^{-1}(E))$，即 $\lambda(g^{-1}E) \geq \lambda(E)$。所以用 g^{-1} 代替 g 我们有 $\lambda(g^{-1}E) = \lambda(E)$。证毕。 □

有时在把一标准数学问题非标准化时需要把一标准可测函数非标准化。

定义 3.12 *设 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$ 是在定义 3.8 和命题 3.9 中由内测度空间 $(\Omega; \Sigma_0, \mu_0)$ 生成的 Loeb 测度空间，$(X; \mathcal{T})$ 是 Hausdorff 拓扑空间，标准函数 $f : \Omega \to X$ 是 Loeb 可测函数即如果对任意 $U \in \mathcal{T}$，集合 $f^{-1}(U) \in \Sigma_L$。称一 Σ_0 可测的内函数 $F : \Omega \to {}^*X$ 是 f 的***内提升***如果存在 Loeb 测度为 1 的集合 $E \subseteq \Omega$ 使得对每一个 $x \in E$，有 $st(F(x)) = f(x)$，即对任一包含 $f(x)$ 的开集 U 有 $F(x) \in {}^*U$。*

定理 3.13 *设 X 是第二可数 Hausdorff 拓扑空间。则每一个标准 Loeb 可测函数 $f : \Omega \to X$ 都有一个 Σ_0 可测内提升 $F : \Omega \to {}^*X$。*

证明：设 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 上可数拓扑基。任给 $n \in \mathbb{N}$，可找到 $A_{n,m} \in \Sigma_0$ 使得

$$A_{n,m} \subseteq A_{n,m+1} \subseteq f^{-1}(U_n) \,\wedge\, \mu_L\left(f^{-1}(U_n) \smallsetminus \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}\right) = 0.$$

令 $C_n := f^{-1}(U_n) \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}$。令

$$F_m := \{h : h : \Omega \to {}^*X \text{ 是} \Sigma_0 \text{ 可测内函数使得} \forall n \le m\, (h(A_{n,m}) \subseteq {}^*U_n)\}.$$

则 F_m 是非空内集。显然 $F_m \supseteq F_{m+1}$。由可数饱和性存在内函数 $F \in \bigcap\{F_m : m \in \mathbb{N}\}$。我们证明 F 是 f 的一个内提升。

令 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$，则 $\mu_L(E) = 0$。对每一个 $x \in \Omega \setminus E$，我们证 $st(F(x)) = f(x)$。任取包含 $f(x)$ 的开集 U_n，存在 $m > n$ 使得 $x \in A_{n,m}$。因为 $F \in F_m$，所以 $F(x) \in {}^*U_n$。这证明了 $st(F(x)) = f(x)$。 □

运用定理3.13 我们可证以下结果。此结果将在下一章中用到。

定理 3.14 设 $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数，$|g| \le M$，并对每个 $r \in [0,1]$，函数 $\hat{g}_r(\cdot) := g(r, \cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。设 K 是超整数且 $T := \{i/K : i \in [K]\}$。则存在内函数 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$，存在 T 上 *Loeb* 测度为 1 的集合 $E \subseteq T$ 使得对任意 $t \in E$，任意有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$，有 $st(G(t,y)) = g(st(t), st(y))$。

证明：设 X 是值在 $-M$ 和 M 之间的所有 $\mathbb{R}$ 上连续函数集。对任意两个函数 h_1, h_2 定义 $d(h_1, h_2)$ 为所有 $|h_1(x) - h_2(x)|$ 的上确界。则 $(X; d)$ 是可分度量空间，所以其度量拓扑是第二可数的。

考虑 $\hat{g} : [0,1] \to X$ 使得 $\hat{g}(r) := \hat{g}_r$。，则 $\hat{g}$ 是勒贝格可测的。对每个 $t \in T$，记 $\hat{g}'(t) = \hat{g}(st(t))$，则 $\hat{g}' : T \to X$ 是 Loeb 可测的。由定理3.13 可找到内函数 $\hat{G} : T \to {}^*X$ 和 Loeb 测度为一的集合 $E \subseteq T$ 使得对任何 $t \in E$，任何标准实数 $\epsilon > 0$，都有 ${}^*d(\hat{G}, {}^*\hat{g}') < \epsilon$。记 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 使得 $G(t,y) = \hat{G}(t)(y)$，则 G 是内函数。所以对每个有限 $t \in E$，$y \in {}^*\mathbb{R}$ 有限，我们有 $G(t,y) = \hat{G}(t)(y) \approx {}^*\hat{g}'(t)(y) \approx \hat{g}'(t)(st(y)) = \hat{g}(st(t))(st(y)) = g(st(t), st(y))$。 □

3.4 第三章习题

习题 3.15 证明 $\mathbb{N}$ 作为 ${}^*\mathbb{N}$ 的子集是外集。

习题 3.16 设 $A_n \subseteq [0,1]$ 且 $[\langle A_n \rangle]$ 是 ${}^*[0,1]$ 的内子集。又设 β_n 是 A_n 在 $\mathcal{V}$ 中的的上确界。证明 $[\langle \beta_n \rangle]$ 是 $[\langle A_n \rangle]$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中的上确界。

习题 3.17 证明对每个 $^*\mathbb{N}$ 的有界内子集 A 都存在唯一 $m \in {}^*\mathbb{N}$ 和一个内函数 f，即 f 的函数图像是一内集，使得 f 是从 A 到 $[m]$ 的一一对应。我们称 m 为 A 的内势，记为 $|A| = m$。

习题 3.18 设 Ω 是一超有限集合，$(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$ 是均匀分布 *Loeb* 概率空间，且 $E \in \Sigma_L$。如果 $\mu_L(E) > 0$，证明存在 $E' \in \Sigma_L$，$E' \subseteq E$，使得 $\mu_L(E') = \mu_L(E)/2$。

习题 3.19 设 Γ 是一标准无限集，Σ_0 是 Γ 上的代数，$\mu_0 : \Sigma_0 \to [0,1]$ 是标准有限可加测度，即 $\mu_0(\emptyset) = 0$，$\mu_0(\Gamma) = 1$，$\mu_0(\Gamma \smallsetminus A) = 1 - \mu_0(A)$，且如果 $A, B \in \Sigma_0$，$A \cap B = \emptyset$，则 $\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B)$。证明存在一 $^*\Gamma$ 上的 σ-代数 $\Sigma_L \supseteq {}^*\Sigma_0$，存在标准可数可加测度 $\mu_L : \Sigma_L \to [0,1]$，使得如果 $F \in {}^*\Sigma_0$ 则 $\mu_L(F) = st({}^*\mu_0(F))$ 并且如果 $E \in \Sigma_L$，则 *(1)* 对任给标准正实数 ϵ，总存在 $F, F' \in {}^*\Sigma_0$ 使得 $F \subseteq E \subseteq F'$ 且 $\mu_L(F' \smallsetminus F) < \epsilon$; *(2)* 总存在 $F \in {}^*\Sigma_0$ 使得 $\mu_L(F \Delta E) \approx 0$。

习题 3.20 设 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是勒贝格可测函数，K 是一超整数且 $T := \{i/K : i \in [K]\}$。则存在一内函数 $F : T \to {}^*\mathbb{R}$ 和 T 上 *Loeb* 测度为 1 的集合 $E \subseteq T$ 使得对任意 $t \in E$，有 $st(F(t)) = f(st(t))$.

4 非标准分析和随机过程

随机过程是个大领域，我们在此不可能作一个详尽的介绍。我们的目标是介绍 Keisler 的随机方程强解存在性定理的一个简单形式，所以只限介绍与之有关的知识。为了简单而又足够阐明主要思想，我们只考虑一维情况。

4.1 随机积分方程的弱解和强解

设 $(\Gamma; \mathcal{F}, \lambda)$ 是一概率空间，称 $[0,1]$ 为时间区间。一般教课书都取时间区间为 $[0, \infty)$，我们只考虑 $[0,1]$ 区间只是为了便利。一个从 $\Gamma \times [0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数可称为一个随机过程。

可测函数 $x : \Gamma \to \mathbb{R}$ 常称随机变量，而 $\mathbb{E}(x)$ 则是 x 的均值或期望值，即

$$\mathbb{E}(x) := \int_\Gamma x(\gamma) d\lambda(\gamma).$$

在表示一个随机变量 $x(\gamma)$ 的期望值时，概率空间中的变量 $\gamma \in \Gamma$ 常被省略。

定义 4.1 称随机过程 $b:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 为 *(标准)* 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma\in\Gamma$，$b(\gamma,0)=0$，
2. 对任何 $[0,1]$ 中 $r_0=0<r_1<r_2<\cdots<r_k$，集合

$$\{b(\,\cdot\,,r_i)-b(\,\cdot\,,r_{i-1}):i\in[k]\}$$

   中的随机变量是相互独立的，

3. 对任何 $[0,1]$ 中 $r<r'$，随机变量 $b(\,\cdot\,,r')-b(\,\cdot\,,r)$ 的概率分布是均值为 0 方差为 $r'-r$ 的正态分布，
4. 对 λ-几乎处处 $\gamma\in\Gamma$，路径 $b(\gamma,\cdot):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的。

用极限方法可构造布朗运动的一个表示，称之为 Wiener 过程。记

$$\Phi_\sigma(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

定义 4.2 设 $C([0,1])$ 为所有从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f 满足 $f(0)=0$。给定任意 $r_0=0<r_1<\ldots<r_k\le 1$，任意勒贝格可测集 $A_1,A_2,\ldots,A_k$。令

$$C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k):=\{f\in C([0,1]):\forall i\in[k]\,(f(r_i)\in A_i)\}.$$

令 $\mathcal{W}$ 为所有集合 $C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k)$ 生成的 σ-代数。*Wiener* 测度是一可数可加的测度 $\nu:\mathcal{W}\to[0,1]$ 使得

$$\nu(C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k))=\prod_{i=1}^{k}\int_{A_i}\Phi_{r_i-r_{i-1}}(x)dx.$$

不难验证如果 $(\Gamma;\mathcal{F},\lambda):=(C([0,1]);\mathcal{W},\nu)$ 并且 $b:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 $b(f,r):=f(r)$ 则 b 是一布朗运动。

设 b 是布朗运动，$g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。考虑以下随机积分方程

$$x(\gamma,r)=\int_0^r g(s,x(\gamma,s))db(\gamma,s). \tag{5}$$

定理 4.3 (Skorokhod [37]) 如果 $g(r,x)$ 有界，勒贝格可测，且关于 x 连续，则存在概率空间 Γ，Γ 上的布朗运动 b，和随机过程 $x:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 x 是方程 *(5)* 的解。

以上定理中，概率空间 Γ 和布朗运动 b 依赖于函数 g。因此所得解称为弱解。

定理 4.4 (Barlow [2]) *存在有界，勒贝格可测，且关于 x 连续的函数 $g(r,x)$，使得如果布朗运动 b 是 Wiener 过程，则方程的解 x 和 b 不可能在同一个空间上。*

用非标准分析方法我们将证明以下强解存在性定理。此定理是 [27, Theorem 5.2] 的简化。对更广泛的随机方程的强解存在性定理有很多更强更广泛的形式，有兴趣的读者可阅读 [27, 28]。

定理 4.5 (Keisler) *设 Ω 是一超有限均匀分布 Loeb 概率空间，b 是 $\Omega\times[0,1]$ 上的布朗运动，$g(r,x):[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数并关于 x 连续。则存在一随机过程 $x:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足方程 (5)。*

因为在以上定理中空间 Ω 不依赖函数 g，所以方程的解称为强解。

为了证明定理 4.5 我们先构造 Loeb 空间上的布朗运动，然后解释关于对布朗运动的随机积分。我们首先在非标准模型中构造 Anderson 随机游走，然后用把 Anderson 标准化得到布朗运动。

4.2 Anderson 随机游走

定义 4.6 *取定一超整数 $K=2^{K'}$。称超有限集*

$$T:=\{i/K : i=0,1,\ldots,K-1\}$$

为 (超有限离散) **时间轴**。*我们有时把集合 $\{t_i,t_{i+1}\ldots,t_j\}$ 记为 $[t_i,t_j]$ 或 $[t_i,t_{j+1})$。记*

$$\Omega:=\left\{\omega\in {}^*V : \omega\in\{-\sqrt{\Delta t},\sqrt{\Delta t}\}^T\right\}$$

*为样本空间。因为 T 是超有限的，所以 Ω 也是超有限的且 $|\Omega|=2^K$。样本空间 Ω 中的元素称为***路径**。*传统上 Ω 的元素常用 ω 来表示，所以在此章 ω 不再是用在第一章超幂构造中的自然数集，而是一条路径。*

定义 4.7 *设 $(\Omega;\Sigma_0,\mu_0)$ 是定义 3.8 和命题 3.9 中定义的 Ω 上的内测度空间。则对每个 $\omega\in\Omega$ 有 $\mu_0(\{\omega\})=1/2^K$。对每个 $\omega,\omega'\in\Omega$ 和 $t\in T$，定义 $\omega\sim_t\omega'$ 如果 $\omega\restriction[0,t)=\omega'\restriction[0,t)$。记 $[\omega]_t:=\{\omega'\in\Omega:\omega'\sim_t\omega\}$。对每个 $t\in T$，设 $\mathcal{F}_t$ 是 Ω 上的内代数使得 Ω 的内子集 $A\in\mathcal{F}_t$ 当且仅当 A*

是一些 $[\omega]_t$ 形式的集合的并。显然 $(\Omega;\mathcal{F}_t,\mu_0)$ 是一内概率空间，且对任何 T 中 $s<t$，有 $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$。称内代数序列

$$\{\mathcal{F}_t:t\in T\}$$

为**一内过滤系统** *(internal filtration)*。

定义 4.8 对每个 $t\in T$ 记 $X_t:\Omega\to\left\{-\sqrt{\Delta t},\sqrt{\Delta t}\right\}$ 为 Ω 上的内二值随机变量使得 $X_t(\omega)=\omega(t)$。因为在每个 $[\omega]_t$ 中满足 $\omega'(t)>0$ 的路径 ω' 和满足 $\omega'(t_k)<0$ 的路径 ω' 个数一样多，所以 X_t 是正还是负的概率各为 0.5。

命题 4.9 在以上定义中每个 X_t 的内均值为 0，内方差为 Δt，如果 $I\subseteq T$ 是内集，则 $\{X_t:t\in I\}$ 中的随机变量是 * 相互独立的。

定义 4.10 设一内随机过程 $B:\Omega\times T\to{}^*\mathbb{R}$ 是 **Anderson 随机游走**如果

$$B(\omega,t):=0+\sum_{s<t}\omega(s).$$

显然 $B(\,\cdot\,,t)=0+\sum_{s<t}X_s$.

如果 $t=t_k\in T$，则 Anderson 随机游走 $B(\omega,t)$ 是沿着路径 ω 走了 $k-1$ 部的结果。每一步的步长是 $\sqrt{\Delta t}$，而朝上还是朝下是由 $\omega(s)$ 是正还是负来决定。

定义 4.11 一个内函数 $G:T\to{}^*\mathbb{R}$ 称为 S**-连续**的如果对任意 $s,t\in T$，有 $s\approx t$ 推出 $G(s)\approx G(t)$。

定理 4.12 (Anderson [1]) 设 B 是 *Anderson* 随机游走。对每一个 $r\in[0,1]$，记 $r^-=\max\{t\in T:t<r\}$ 且设

$$b(\omega,r):=\begin{cases}\infty & \text{如果}B(\omega,r^-)\ \text{是正无穷大}\\ st\left(B(\omega,r^-)\right) & \text{如果}B(\omega,r^-)\ \text{有限的}\\ -\infty & \text{如果}B(\omega,r^-)\ \text{是负无穷大}\end{cases}.$$

则 b 是 $\Omega\times[0,1]$ 上的布朗运动。

证明：我们一一验证定义 4.1 中的条件。条件 1. 是显然的。

验证条件 2. 给定标准实数 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \le 1$。则 $\{B(\cdot, r_i^-) - B(\cdot, r_{i-1}^-) : i \in [k]\}$ 中随机变量是 * 相互独立的。设 $E_1, E_2, \ldots, E_k$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限开区间，令

$$C_i := \{\omega \in \Omega : b(\omega, r_i) - b(\omega, r_{i-1}) \in E_i\}.$$

我们只需证明 $\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^k C_i\right) = \prod_{i=1}^k \mu_L(C_i)$。

设 $[a,b]$ 包含了所有 E_i。对每个 $i \in [k]$，定义 ${}^*[a,b]$ 上的内测度 P_i 使得对任一内集 $A \subseteq {}^*[a,b]$ 都有 $P_i(A) := \mu_0(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in A\})$。由习题 3.19，我们可找到内集 $F_i \subseteq {}^*[a,b]$ 使得
$P_{i,L}(F_i \Delta st^{-1}(E_i)) = 0$，这里 $P_{i,L}$ 是由 P_i 生成的 Loeb 测度。现在可推出

$$\begin{aligned}\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^k C_i\right) &\approx \mu_0\left(\left\{\omega \in \Omega : \bigwedge_{i=1}^k \left(B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\right)\right\}\right)\\ &= \prod_{i=1}^k \mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\}\right) \approx \prod_{i=1}^k C_i.\end{aligned}$$

验证条件 3. 设 $t_1 < t_2 < \cdots$ 在 T 中，X_{t_i} 在定义 4.8 中定义。随机变量 $X_{t_i}/\sqrt{\Delta t}$ 的均值为 0，方差为 1。由中心极限定理我们有

$$\lim_{k\to\infty} \mu_L\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}} \sum_{i=1}^k X_{t_i} < \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \Phi_1(x)dx.$$

如果 k 是一超整数，则有

$$\mu_0\left(\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}} \sum_{i=1}^k X_{t_i} < \alpha\right\}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} \Phi_1(x)dx.$$

令 $r'^- = r^- + k\Delta t$，则 k 是超有限的。因为

$$B(\cdot, r'^-) - B(\cdot, r^-) = \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} = \sqrt{r'^- - r^-}\frac{1}{\sqrt{k\Delta t}} \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} \text{ 而且}$$

$$\begin{aligned}&\mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^-) - B(\Omega, r^-) < \alpha - \epsilon\}\right)\\ &\lessapprox \mu_L\left(\{\omega \in \Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right)\\ &\lessapprox \mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^-) - B(\Omega, r^-) < \alpha + \epsilon\}\right),\end{aligned}$$

所以由 ϵ 的任意性，

$$\begin{aligned}&\mu_L\left(\{\omega\in\Omega: b(\omega,r')-b(\omega,r)<\alpha\}\right)\\&\quad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha/\sqrt{r'-r}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi(r'-r)}}\int_{-\infty}^{\alpha}e^{-u^2/2(r'-r)}du.\end{aligned}$$

这证明了 $b(\cdot,r')-b(\cdot,r)$ 有正态分布且均值为 0，方差为 $r'-r$。

验证条件 4. 取定 $m,n\in\mathbb{N}$，$i=0,1,\dots,2^m-1$，令 $\Omega_{m,n,i}:=$

$$\left\{\omega\in\Omega:\exists t\in T\cap\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right]\ \left(\left|B(\omega,t)-B\left(\omega,\frac{i}{2^m}\right)\right|^4>\frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$\Omega'_{m,n,i}:=\left\{\omega\in\Omega:\left|B\left(\omega,\frac{i+1}{2^m}\right)-B\left(\omega,\frac{i}{2^m}\right)\right|^4>\frac{1}{n}\right\}.$$

注意，因为 $K=2^{K'}$，所有 $i/2^m$ 都在 T 中。集合 $\Omega_{m,n,i},\Omega'_{m,n,i}$ 是内集，所以 Loeb 可测。如果 $t<(i+1)/2^m$ 且 $B(\omega,t)-B(\omega,i/2^m)>1/\sqrt[4]{n}$，则由对称性，至少有一半 $\omega'\in[\omega]_t$ 使得 $B(\omega',(i+1)/2^m)\geq B(\omega,t)$。所以对这些 ω' 仍有

$$\left|B\left(\omega',\frac{i+1}{2^m}\right)-B\left(\omega',\frac{i}{2^m}\right)\right|>1/\sqrt[4]{n}.$$

同样如果 $B(\omega,t)-B(\omega,i/2^m)<-1/\sqrt[4]{n}$，则由对称性，至少有一半 $\omega'\in[\omega]_t$ 使得 $B(\omega',(i+1)/2^m)\leq B(\omega,t)$。因此我们有 $\mu_0(\Omega_{m,n,i})\leq 2\mu_0(\Omega'_{m,n,i})$。

如果 $t\in T$，则

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(B(t)^4)&=\sum_{s<t}\mathbb{E}(B(s+\Delta t)^4-B(s)^4)\\&=\sum_{s<t}\mathbb{E}(B(s)+X_s)^4-B(s)^4)\\&=\sum_{s<t}\mathbb{E}(4B(s)^3X_s+6B(s)^2X_s^2+4B(s)X_s^3)\\&=\sum_{s<t}(\mathbb{E}(4B(s)^3X_s)+\mathbb{E}(6B(s)^2\Delta t)+\mathbb{E}(4B(s)X_s^3))\\&=\sum_{s<t}\mathbb{E}(6B(s)^2\Delta t)=6\Delta t\sum_{s<t}s\leq 6\Delta t\frac{t}{\Delta t}t=6t^2.\end{aligned}$$

以上我们用到了一的事实，即 $B(s)$ 和 X_s 是相互独立的，所以
$\mathbb{E}(4B(s)^3X_s)=0$ 和 $\mathbb{E}(4B(s)X_s^3)=0$。同样我们也有 $\mathbb{E}((B(t)-B(s))^4)\leq$

$6(t-s)^2$。因此

$$\begin{aligned}\mu_L\left(\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}\right) &\le \sum_{i=0}^{2^m-1}\mu_L(\Omega_{m,n,i}) \le 2\sum_{i=0}^{2^m-1}\mu_L(\Omega'_{m,n,i}) \\ &\le 2\sum_{i=0}^{2^m-1}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\left(B\left(\frac{i+1}{2^m}\right)-B\left(\frac{i}{2^m}\right)\right)^4\right) \le \frac{12\cdot 2^m}{n\cdot 2^{2m}} = \frac{12}{n\cdot 2^m}.\end{aligned}$$

对每一个 $n\in\mathbb{N}$，我们有 $\mu_L\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}\right)=0$。所以 $\mu_L\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}\right)=0$。

现在证明对每一个 $\omega\in\Omega\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}$，函数 $b(\omega,\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

任给标准实数 $\epsilon>0$，取 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $3/\sqrt[4]{n}<\epsilon$。则 $\omega\notin\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}$。所以存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\omega\notin\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}$，而这意味着对所有 $i=0,1,\ldots,2^m-1$，对所有 $t\in T\cap\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right]$ 都有 $\left|B(\omega,t)-B\left(\omega,\frac{i}{2^m}\right)\right|\le\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$。任给 $[0,1]$ 中标准实数 $r<r'$ 使得 $|r'-r|<1/2^m$，设 $r^-\in T\cap\left[\frac{i}{2^m},\frac{i+1}{2^m}\right)$ 和 $r'^-\in T\cap\left[\frac{i'}{2^m},\frac{i'+1}{2^m}\right)$，则 $i=i'$ 或 $i'=i+1$。所以

$$\begin{aligned}&\left|B\left(\omega,r'^-\right)-B\left(\omega,r^-\right)\right| \\ &\quad\le\left|B\left(\omega,r'^-\right)-B\left(\omega,\frac{i'}{2^m}\right)\right|+\left|B\left(\omega,\frac{i'}{2^m}\right)-B\left(\omega,\frac{i}{2^m}\right)\right| \\ &\qquad+\left|B\left(\omega,\frac{i}{2^m}\right)-B\left(\omega,r^-\right)\right|\le\frac{3}{\sqrt[4]{n}}<\epsilon.\end{aligned}$$

因此 $|b(\omega,r')-b(\omega,r)|\le\epsilon$。所以 $b(\omega,r)$ 在 $[0,1]$ 上连续。证毕。 □

4.3 Keisler 强解存在性定理

为了证明定理4.5 我们首先需解释关于布朗运动的随机积分定义。设 $x,y:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 是两个标准随机过程，在标准意义下 $\int_\Omega x(\omega,r)dy(\omega,r)$ 一般不能被看作为对每条固定路径 ω 的关于变量 r 的 Stieltjes 积分。这是因为在 Stieltjes 积分的定义中通常要求函数 $y(\omega,r)$ 关于 r 是有界变差的，而对于几乎所有路径 ω，布朗运动 $b(\omega,r)$ 关于 r 不是有界变差的。

定义 4.13 设 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 是在定义 *4.7* 中的内过滤系统。称 $(\Omega; \{\mathcal{F}_t\}, \mu_0)$ 为内适应空间 *(internal adapted space)*。一个内随机过程 $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是适应的如果对每个 $t \in T$，函数 $X(\cdot, t) : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，即如果 $\omega', \omega'' \in [\omega]_t$，则有 $X(\omega', t) = X(\omega'', t)$。

定义 4.14 记 $\mathcal{N}$ 为 Ω 的所有 μ_L 零测集的类。对每个标准实数 $r \in [0, 1]$，令

$$\mathcal{G}_r := L\left(\bigcup\{\mathcal{F}_t : t \approx r\} \cup \mathcal{N}\right)$$

这里 $L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N})$ 是由有限可加代数 $\mathcal{B}$ 生成的包含了 $\mathcal{N}$ 的 σ-代数使得 $(\Omega; L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N}), \mu_L)$ 是一可数可加完备概率空间。称 $\{\mathcal{G}_r : r \in [0, 1]\}$ 为 **(标准) 过滤系统**，并称 $(\Omega; \{\mathcal{G}_r : r \in [0, 1]\}, \mu_L)$ 为 *(标准)* 适应空间。称 $x : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是一个 Ω 上的适应随机过程如果 x 是 $\Omega \times [0, 1]$ 上的 $\mu_L \times \lambda$ 可测函数且对每个 $r \in [0, 1]$，函数 $x(\cdot, r) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{G}_r$ 可测的。这里 λ 是 $[0, 1]$ 上的勒贝格测度。

定义 4.15 一个 Ω 上随机过程 x 称为**阶跃过程**如果存在 $r_0 = 0 < r_1 < \cdots < r_k = 1$ 使得对所有 $s \in [r_i, r_{i+1})$ 满足 $x(\omega, s) = x(\omega, r_i)$ 且 $x(\cdot, r_i) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是有界且是 $\mathcal{G}_{r_i}$ 可测。显然 x 是适应随机过程。

设 b 是在定理 *4.12* 中由 *Anderson* 随机游走生成的布朗运动。对于以上定义的阶跃过程 x，记

$$\int_0^1 x(\omega, s) db(\omega, s) := \sum_{i=0}^{k} x(\omega, r_i)(b(\omega, r_{i+1}) - b(\omega, r_i)).$$

如果 $r \in [0, 1]$ 则

$$\int_0^r x(\omega, s) db(\omega, s) := \int_0^1 \mathbf{1}_{\Omega \times [0, r)}(\omega, s) x(\omega, s) db(\omega, s),$$

这里 $\mathbf{1}_{\Omega \times [0, r)}(\omega, s)$ 是 $\Omega \times [0, r)$ 的特征函数。

如果 x 是一个阶跃过程，则 $\displaystyle\int_0^r x(\omega, s) db(\omega, s)$ 又是一个随机过程且当 $r = 1$ 时它的平方期望值

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 x(s) db(s)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x(r_i)(b(r_{i+1}) - b(r_i))\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(b(r_{i+1}) - b(r_i))^2\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+2\sum_{i<j} x(r_i)x(r_j)(b(r_{i+1})-b(r_i))(b(r_{j+1})-b(r_j))\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right)\mathbb{E}\left((b(r_{i+1})-b(r_i))^2\right)\\
&\quad+2\sum_{i<j}\mathbb{E}(x(r_i)x(r_j)(b(r_{i+1})-b(r_i)))\mathbb{E}(b(r_{j+1})-b(r_j))\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right)(r_{i+1}-r_i)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1}x^2(r_i)(r_{i+1}-r_i)\right)\\
&=\mathbb{E}\left(\int_0^1 x^2(s)ds\right)=\int_{\Omega\times[0,1]}x^2(\omega,s)d(\mu_L\times\lambda).
\end{aligned}
$$

按照相同思路可推出

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^r x(s)db(s)\right)^2\right)=\int_{\Omega\times[0,r)}x^2(\omega,s)d(\mu_L\times\lambda).$$

因此关于布朗运动对阶跃过程的随机积分可看作是 $\Omega\times[0,1]$ 上平方可积函数空间 $L^2(\mu_L\times\lambda)$ 的元素。

在以上推导过程中我们用到了 $x(\cdot,r)$ 和 $b(\cdot,r')-b(\cdot,r)$ 之间的独立性，因而要求 x 必须是一适应随机过程。

定义 4.16 称一个适应随机过程 $x:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 是 *Itô* 可积的如果存在阶跃随机过程序列 x_n 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times[0,1]}(x(\omega,s)-x_n(\omega,s))^2d(\mu_L\times\lambda)=0.$$

而随机积分

$$y(\omega,r):=\int_0^r x(\omega,s)db(\omega,s),$$

称为 **Itô 积分**，则是序列 $\displaystyle\int_0^r x_n(\omega,s)db(\omega,s)$ 的 L^2–极限。显然 y 也是适应随机过程。

随机积分的标准定义比较繁琐。而在非标出分析中定义就相对简单。

定义 4.17 设 B 是 *Anderson* 随机游走，$X:\Omega\times T\to{}^*\mathbb{R}$ 是 *(*关于 $\{\mathcal{F}_t: t\in T\}$ 的*)* 内适应随机过程，$t\in T$。记 $\Delta B(\omega,s):=B(\omega,s+\Delta t)-B(\omega,s)$。则

$$\int_0^t X(\omega,s)dB(\omega,s):=\sum_{s<t}X(\omega,s)\Delta B(\omega,s).$$

在以上定义中的和是 ${}^*\mathcal{V}$ 中有限和，所以对每一条路径 ω 此和都有意义，只不过对有些路径，和会是无穷大或无穷小使得所得结果不能拉回到标准世界中去。因此我们需要对所考虑的随机过程做一些限制。

定义 4.18 设 ν_0 是 T 上的均匀分布内概率空间，即 $\nu_0(\{t\}) = 1/K$，ν_L 是 T 上由 ν_0 生成的 *Loeb* 测度。对一内函数 $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 和内集 $D \subseteq \Omega \times T$，记

$$\int_D X(\omega,t)d(\mu_0 \times \nu_0) :$$
$$= \sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega,t)\mu_0 \times \nu_0(\{(\omega,t)\}) = \sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega,t)\frac{1}{2^K K}.$$

称 X 是 S-可积的如果对 $\mu_L \times \nu_L$-几乎所有 $(\omega,t) \in \Omega \times T$，$X(\omega,t)$ 都是有限的，且对任一内集 $D \subseteq \Omega \times T$ 使得 $\mu_L \times \nu_L(D) = 1$ 都有

$$st\left(\int_D |X(\omega,t)|d(\mu_0 \times \nu_0)\right) = st\left(\int_{\Omega\times T} |X(\omega,t)|d(\mu_0 \times \nu_0)\right) \in \mathbb{R}.$$

如果 X^2 是 S-可积的，则称 X 是 S-平方可积的。

接下来证明定理 4.5。在此我们重新叙述此定理使其更完整详细。

定理 4.19 (Keisler) 设 Ω 是定义 *4.6* 中超有限均匀分布 *Loeb* 概率空间，b 是 $\Omega\times[0,1]$ 上由 *Anderson* 随机游走生成的布朗运动，$g(r,x) : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数并关于 x 连续。则存在一适应平方可积随机过程 $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得对几乎所有路径 $\omega \in \Omega$，$x(\omega,\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续并且 $x(\omega,t)$ 满足方程 *(5)*。

证明：设 $|g| \le M$。由定理 3.14 我们可找到 g 的内提升 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 和 $E \subseteq T$ 使得 $\nu_L(E) = 1$ 且对任一 $t \in E$，有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$ 都有 $st(G(t,y)) = g(st(t), st(y))$。我们可假设 $|G| \le M$。

对 $i = 0, 1, \ldots, K$ 归纳定义 $\Omega \times T$ 上的内随机变量 $X(t_i) := X(\cdot, t_i)$ 使得 $X(0) = 0$ 且

$$X(t_{i+1}) := \sum_{j=0}^{i} G(t_j, X(t_j))\Delta B(t_j).$$

显然 $X:\Omega\times T\to {}^*\mathbb{R}$ 是适应随机过程。因为

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2(t)) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{s<t} G(s,X(s))\Delta B(s)\right)^2\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s,X(s))\Delta s\right.\\ &\quad \left.+2\sum_{s<s'<t} G(s,X(s))\Delta B(s) G(s',X(s'))\Delta B(s')\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s,X(s))\Delta s\right)\le M^2,\text{ 且}\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mu_L\left(\{\omega\in\Omega:|X(t)|^2>n\}\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\mathbb{E}(X^2(t))\le\lim_{n\to\infty}\frac{M^2}{n}=0,$$

可知对几乎处处 $\omega\in\Omega$，$X(\omega,t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

因为 $|G|\le M$，用定理4.12 证明中第四部分的思想加上概率论中的 Bernstain 不等式 (参看 [27, Theorem 3.2 和 Theorem 5.2]) 或 Doob 不等式 (参看 [1, Theorem 35])，对几乎处处 $\omega\in\Omega$，路径函数 $X(\omega,\cdot):T\to{}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

可假设对每一 $\omega\in E$，$X(\omega,\cdot)$ 是 S-连续且取有限值的函数。对每一 $(\omega,r)\in E\times[0,1]$，令

$$x(\omega,r):=st\left(X(\omega,r^-)\right).$$

则 x 是适应平方可积随机过程，且对每一 $\omega\in E$，$x(\omega,\cdot):[0,1]\to\mathbb{R}$ 是连续的。最后需证 x 满足随机积分方程 (5)。

因为 g 有界，所以 $g(s,x(\omega,s))$ 是平方可积的。因为 Itô 积分是适应阶跃过程的 L^2 极限，所以存在适应阶跃过程 $y_n:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times[0,1]}(g(s,x(\omega,s))-y_n(\omega,s))^2 d(\mu_L\times\lambda)=0.$$

因为 y_n 是适应阶跃过程，所以存在内随机过程 $Y_n:\Omega\times T\to{}^*\mathbb{R}$ 使得对几乎所有 $(\omega,t)\in\Omega\times T$，有 $st(Y_n(\omega,t))=y_n(\omega,st(t))$。这可推出

$$\mathbb{E}\left(\left(X(r^-)-\sum_{t<r^-}Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{t<r^-} G(t, X(t))\Delta B(t) - \sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right) \\
&\le \int_{\Omega\times T} (G(t, X(t)) - Y_n(t))^2\, d(\mu_0 \times \nu_0) \\
&\approx \int_{\Omega\times[0,1]} (g(s, x(\omega, s)) - y_n(\omega, s))^2 d(\mu_L \times \lambda) \to 0.
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbb{E}\left(\left(x(r) - \int_0^r g(s, x(s))db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2} \\
&\quad \lessapprox \left(\mathbb{E}\left(\left(X(r^-) - \sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right)\right)^{1/2} \\
&\qquad + \left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t) - \int_0^r y_n(s)db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2} \\
&\qquad + \left(\mathbb{E}\left(\left(\int_0^r y_n(s)db(s) - \int_0^r g(s, x(s))db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，我们有

$$
\mathbb{E}\left(\left(x(r) - \int_0^r g(s, x(s))db(s)\right)^2\right) = 0,
$$

即 $x(\omega, r) = \int_0^r g(s, x(\omega, s))db(\omega, s)$。 □

4.4 第四章习题

习题 4.20 证明命题 *4.9*。

习题 4.21 证明对任意概率空间 $(\Gamma; \mu)$ 上的的随机变量 $X : \Gamma \to \mathbb{R}$，对任意正数 a，有

$$
\mu\left(\{\gamma \in \Gamma : |X(\gamma)| \ge a\}\right) \le a\mathbb{E}(|X|).
$$

习题 4.22 证明 *Anderson* 随机游走是一内适应随机过程。

习题 4.23 设 b 是 *Anderson* 随机游走生成的布朗运动，证明 b 是 $(\Omega; \{\mathcal{G}_r : r \in [0,1]\}, \mu_L)$ 上的适应过程，即 $b(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{G}_r$ 可测的。

习题 4.24 设 $T := \{i/K : i = 0, 1, \ldots, K-1\}$。证明，*(1)* 如果 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一标准连续函数，则存在 S-连续内函数 $F : T \to {}^*\mathbb{R}$ 使得对任意 $t \in T$，有 $st(F(t)) = f(st(t))$；*(2)* 如果 $F : T \to {}^*\mathbb{R}$ 是一 S-连续内函数且每个值 $F(t)$ 都是有限的，则 $f(r) := st(F(r^-))$ 定义了一个 $[0,1]$ 上的标准连续函数。

习题 4.25 设 M 是标准正实数，$G : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是内函数满足对任意 $(\omega, t) \in \Omega \times T$ 都有 $|G(\omega, t)| \leq M$。对 $i = 0, 1, \ldots, K$ 令 $\Omega \times T$ 上的内随机变量 $X(t_i) := X(\cdot, t_i)$ 满足 $X(0) = 0$ 且

$$X(t_{i+1}) := \sum_{j=0}^{i} G(t_j, X(t_j))\Delta B(t_j).$$

证明对几乎处处 $\omega \in \Omega$，路径函数 $X(\omega, \cdot) : T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

5 非标准分析和组合数论

在过去二十多年中非标准分析在组合数论中的很多应用被发现。组合数论对于初学者来说，门槛比较低，问题比较容易解释清楚。所以非标准分析在此领域中的应用一旦有成，就比较能使不了解非标准分析的学者对非标准分析的实用性产生信心。由于篇幅关系我们只能介绍其中一小部分。感兴趣的读者可看其他的文章，例如 [11, 12, 23, 24, 25, 26, 31] 等。

作为热身我们先来证明众所周知的 Ramsey 定理的一个最简单形式。

5.1 Ramsey 定理的非标准证明

设 X 是一集合，记 $[X]^2 := \{\{a,b\} : a, b \in X \wedge a \neq b\}$。

定理 5.1 任给函数 $f : [\mathbb{N}]^2 \to \{0,1\}$，存在 $i = 0$ 或 $i = 1$ 和一无限集合 $X \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $f{\restriction}[X]^2 \equiv i$。

证明：取定一超整数 N。对 $i = 0, 1$ 定义

$$\mathcal{C}_i := \{C \subseteq \mathbb{N} : {}^*f{\restriction}[C \cup \{N\}]^2 \equiv i\}.$$

注意，$\mathcal{C}_i$ 可能不是内集。如果 $\mathcal{C}_0$ 包含了一个无限集 C，则 $f{\restriction}[C]^2 \equiv 0$，即定理得证。所以我们可假设 $\mathcal{C}_0$ 仅包含有限集。同样可假设 $\mathcal{C}_1$ 仅包含有限集。

取 $C_0 \in \mathcal{C}_0$ 极大，即任何 $\mathcal{C}_0$ 中包含了 C_0 的集合只能是 C_0 自身。取 $C_1 \in \mathcal{C}_1$ 极大。如果 $\mathcal{C}_i = \emptyset$，则取 $C_i = \emptyset$。设 $b \in \mathbb{N}$ 是 $C_0 \cup C_1$ 的上界。显然以下语句

$$(\exists n \in {}^*\mathbb{N})\ (n > b \wedge {}^*f\restriction[C_0 \cup \{n\}]^2 \equiv 0 \wedge {}^*f\restriction[C_1 \cup \{n\}]^2 \equiv 1)$$

在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。这是因为 N 就是 n 的实例。由转换原理存在 $n \in \mathbb{N}$ 满足 $n > b$ 使得对 $i = 0, 1$ 有 $f\restriction[C_i \cup \{n\}]^2 \equiv i$。注意 ${}^*f$ 是从 $[{}^*\mathbb{N}]^2$ 到 $\{0, 1\}$ 的函数，所以存在 $i \in \{0, 1\}$ 使得 ${}^*f(\{n, N\}) = i$。如果 $i = 0$，则 $C_0 \cup \{n\} \in \mathcal{C}_0$。如果 $i = 1$，则 $C_1 \cup \{n\} \in \mathcal{C}_1$。这和 C_0 或 C_1 的极大性矛盾。所以定理成立。 □

5.2 和集现象

和集现象是组合数学中牵涉到密度的问题。密度通常用极限来定义。用非标准分析方法处理数列极限问题比较有优势。我们介绍密度中的一个，称为上 Banach 密度。

定义 5.2 设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 为一无限集。A 的**上 Banach 密度** *(upper Banach density)* 是

$$BD(A) := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k+n]|}{n+1}.$$

上 Banach 密度是在自然数集上建立 Banach 空间的重要概念，读者可参看 [15]。

如果在上 Banach 密度的定义中集合 $\mathbb{N}$ 由整数集合 $\mathbb{Z}$ 替代，则可以定义 $\mathbb{Z}$ 中子集的上 Banach 密度。

在标准实分析中一个勒贝格测度为零的实数子集是一个小集合。大家知道实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个零测集的并。除了勒贝格测度之外还有一个衡量实数子集大小的概念，即第一纲/第二纲集。令 X 为一个实数子集，如果在每一个非空开区间 (a, b) 中总有一个非空子开区间 $(c, d) \subseteq (a, b)$ 使得 $(c, d) \cap X = \emptyset$，集合 X 就被称为无处稠密集。如果一个实数子集 X 可以被表示为最多可数个无处稠密集的并，X 就被称为第一纲集。Baire 定理指出实数集 $\mathbb{R}$ 一定不是可数个第一纲集的并，所以第一纲集是在序拓扑意义下的一种小集合。但是在测度意义下的小集合概念和在序拓扑意义下的小集合概念是不可比较的。这是因为由构造 Cantor 集的方法，可以构造一个第一纲集 $A \subseteq \mathbb{R}$，使得 $\mathbb{R} \setminus A$ 的勒贝格测度为零。所以在测度意义下 A

是一个大集合而在序拓扑意义下 A 是一个小集合，同时 $\mathbb{R}\setminus A$ 在测度意义下是小集合而在序拓扑意义下是个大集合。

当考虑和集的时候，情况就不同了。如果 A 和 B 是一个加法群中的两个子集，定义

$$A \pm B := \{a \pm b : a \in A,\, b \in B\}.$$

以下是一个众所周知的定理。

定理 5.3 设 λ 为 $\mathbb{R}$ 上的勒贝格测度，$A, B \subseteq \mathbb{R}$ 使得 $\lambda(A) > 0$ 和 $\lambda(B) > 0$。则 $A + B$ 一定包含了一个非空开区间。

粗略地讲，以上定理表明了如果 A 和 B 都不是测度意义下的小集合，则 $A + B$ 就不是序拓扑意义下的小集合。此定理可用勒贝格稠点定理来证明。令 a 是一个实数子集 A 中的元素，如果对任意 $\epsilon > 0$ 总存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $0 < \delta' < \delta$, $\lambda(A \cap (a-\delta', a+\delta'))/(2\delta') > 1-\epsilon$, 则 a 被称为 A 的稠点 (density point)。勒贝格稠点定理指的是如果 A 是一个勒贝格正测集，那么几乎所有 A 中的点都是 A 的稠点。如果 A 和 B 都是正测集，令 a 和 b 分别是 A 和 B 的稠点，再令 $\delta > 0$ 使得 $\lambda(A \cap (a-\delta, a+\delta))/(2\delta) > 2/3$ 和 $\lambda(B \cap (b-\delta, b+\delta))/(2\delta) > 2/3$。用鸽巢原理 (pigeonhole principle) 就可证明 $A + B$ 包含了以 $a + b$ 为中心的非空开区间。

在 [22] 中作者第一次提出了以下**和集现象** (sumset phenomenon)：假设在一个有序加群 G 上可定义一种类似测度的度量，如果两个 G 的子集 A 和 B 都不是在这类测度意义下的小集合，则 $A + B$ 就不是序拓扑意义下的小集合。定理 5.3 是和集现象的一个证据。是否还有其他证据?

在自然数集上密度概念和测度概念很相像，但因为自然数的序拓扑是离散拓扑，所以没有多大意义。在 [15] 中提到了关于 $\mathbb{N}$ 的无限子集的一个概念被称为 syndeticity，似乎和稠密集的概念很接近。让我们暂把 syndeticity 翻译成**链接**。

定义 5.4 设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一无限集。

1. 如果存在一个自然数 k 使得对任意 $m \in \mathbb{N}$，$A \cap [m, m+k] \neq \emptyset$，则称 A 为**链接的** *(syndetic)*，即 A 在 $\mathbb{N}$ 中的缝隙长度 *(gap size)* 是有界的。

2. 如果 A 包含了任意长的有限自然数区间，A 被称为**厚实的** *(thick)*。

3. 如果 A 是一个链接集和一个厚实集的交，则 A 被称为**局部链接的** *(piecewise syndetic)*，即存在一自然数区间 $[a_n, b_n]$ 使得 $b_n - a_n \to \infty$ 并且 A 在 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$ 中的缝隙长度是有界的。

例如，所有 10 的整数倍是一链接集，所有整数区间 $[2^n, 2^n+n]$ 的并是一厚实集，而所有在集合 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[2^n, 2^n+n]$ 中的 10 的整数倍形成了一个局部链接集。

对 $\mathbb{Z}$ 的子集，用同样方法可定义链接集，厚实集，和局部链接集。

从直观上讲，链接集可对应于实数上的稠密集，厚实集对应于实数上的开区间，而局部链接集则对应于实数上的非无处稠密集。在 [15] 中提到了以下定理。

定理 5.5 设 $A \subseteq \mathbb{N}$。如果 $BD(A) > 0$，则 $(A-A)\cap\mathbb{N}$ 是一链接集。

注意，利用类似于构造 Cantor 集的方法，我们可以构造一个无限集 A 使得 $BD(A) > \frac{1}{2}$ 但 A 不是局部链接的。

虽然我们可以用模糊的语言来叙述关于自然数集的和集现象，但如果能把这些概念加以严格处理应该是很有意义的。特别是关于序拓扑。因为 $\mathbb{N}$ 上的序拓扑是离散拓扑，所以不是很有用。我们怎样来严格定义一种拓扑来替代序拓扑呢？另外在以上定理中集合 $A-A$ 能否被 $A+B$ 替代呢？

非标准分析方法是解决以上问题的合适方法。在 [29] 中有一个类似于序拓扑的 U–拓扑被介绍，而那正好是我们所需要的。

定义 5.6 设 $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ 是一非空前截，即 $a \in U$ 推出 $[0, a] \subseteq U$，且满足 $1 \in U$ 和 $U + U \subseteq U$，则 U 被称为一个**加法分割** *(additive cut)*。

加法分割是一个加法半群，且把 ${}^*\mathbb{N}$ 分割成前截 U 和后截 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$。自然数集 ${}^*\mathbb{N}$ 上的加法分割有点像实分析中的 Dedekind 分割。按照定义，${}^*\mathbb{N}$ 本身是一个加法分割。如果一个加法分割 $U \neq {}^*\mathbb{N}$，那么 U 一定是个外集。这是因为 U 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中有上界但没有最大元。另外 $\mathbb{N}$ 是一个加法分割。令 H 为一超整数，则

$$U_H := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} [0, H/n] \tag{6}$$

也是一个加法分割。容易看出 U_H 是 $[0, H]$ 中最大的加法分割，而 $\mathbb{N}$ 是 $[0, H]$ 中最小的加法分割。为了直观上的方便，我们常把 $a \in U$ 写成 $a < U$ 并且把 $a \in {}^*\mathbb{N} \setminus U$ 写成 $a > U$。

定义 5.7 设 H 为一超整数, $U \subseteq [0, H]$ 是一加法分割。如果一个集合 $O \subseteq [0, H]$ 满足性质: 对任意 $a \in O$ 总存在 $r > U$ 使得 $[a-r, a+r] \cap [0, H] \subseteq O$, 则 O 被称为一个 U–开集。

所有 U–开集组成 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。注意, U–拓扑不是 T_1 拓扑。

定义 5.8 设 U 为 $[0, H]$ 中的一个加法分割。对每个 $a, b \in [0, H]$, 定义

1. $a \sim b$ 当且仅当 $|a - b| < U$;
2. $[a]_U := \{c \in [0, H] : c \sim a\}$;
3. $[0, H]/\sim := \{[a]_U : a \in [0, H]\}$;
4. $[a]_U < [b]_U$ 当且仅当 $a < b$ 并且 $a \not\sim b$。

利用 U 的可加性质, 容易证明 $\sim$ 是 $[0, H]$ 上的一个等价关系, 每个 $[a]_U$ 是一等价类, 被称为包含 a 的单子 (monad), 并且 $[0, H]/\sim$ 是一个自稠的全序集, 即任意两个单子之间存在另一个单子。所以 $[0, H]/\sim$ 上的序拓扑就是 Hausdorff 的了。设 $\varphi(a) = [a]_U$ 是从 $[0, H]$ 到 $[0, H]/\sim$ 上的商映照, 则可以看出由 φ 引导出的 $[0, H]$ 上的商拓扑就是 $[0, H]$ 上的 U–拓扑。虽然 U–拓扑不满足 Hausdorff 性质, 但它是真正序拓扑的合适替代。以下介绍 $[0, H]$ 上关于和集现象的定理。

定理 5.9 设 H 是一超整数, U 是 $[0, H]$ 中的一个加法分割。如果 A 和 B 是 $[0, H]$ 中的 *Loeb* 正测集, 那么 $A + B$ 一定不是 $[0, 2H]$ 上的 U–无处稠密集。

定理 5.9 可用多种方式证明, 例如可先证明 $[0, H]$ 上的和勒贝格稠点定理平行的 Loeb 稠点定理, 再用其证明定理 5.9, 参看 [13]。但这里我们仍用 [22] 中的方法, 因为它比较简单直观。

证明: 首先, 集合 A 和 B 可以被设为内集, 这是因为每个 Loeb 正测集包含一个 Loeb 正测内集。

假设对特定的 H 和 U, 定理 5.9 不成立, 我们将导出矛盾。令 μ_H 表示在定义 3.8 和命题 3.9 中定义的 $[0, H]$ 上的 Loeb 测度。为了方便, 在这一节中如果内集 C 不是 $[0, H]$ 的子集, 就规定 $\mu_H(C) := \mu_H(st(|C|/H))$。设

$$\begin{aligned}\alpha := \sup\{&\mu_H(A) : \exists H > U,\ A \subseteq [0, H],\ \exists B \subseteq [0, H],\\ &A, B \text{ 是内集},\ \mu_H(B) > 0,\ A + B \text{ 是 } [0, 2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.\end{aligned}$$

因为假设定理不成立，所以存在一个反例。因此 $\alpha > 0$。设

$$\beta := \sup\{\mu_H(B) : \exists H > U,\, B \subseteq [0,H],\, \exists A \subseteq [0,H],\\ A, B \text{ 是内集}, \mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha,\, A+B \text{ 是 } [0,2H] \text{ 中 } U\text{–无处稠密集}\}.$$

同样 $\beta > 0$。因为 α 定义在先，所以 $\beta \leqslant \alpha$。由 α 和 β 的定义我们可以取定一个超整数 $H > U$，取定内集 $A, B \subseteq [0,H]$ 使得 $\mu_H(A) > \frac{9}{10}\alpha$，$\mu_H(B) > \frac{9}{10}\beta$，并且 $A+B$ 是 $[0,2H]$ 中的 U–无处稠密集。

如果 $\alpha + \beta > \frac{10}{9}$，那么 $\mu_H(A) + \mu_H(B) > 1$。由鸽巢原理，可推出 $A+B$ 包含了 $[0,2H]$ 中的单子 $[H]_U$。因为 $A+B$ 是内集，所以可以找到 $r > U$ 使得 $[H-r, H+r] \subseteq A+B$。这和假设 $A+B$ 在 $[0,2H]$ 中 U–无处稠密相矛盾。所以我们可假设 $\alpha+\beta \leqslant \frac{10}{9}$ 和 $\beta \leqslant \frac{5}{9}$。

给定任一 $m \in U$，集合 $A+B+[0,m]$ 仍在 $[0,2H]$ 中 U–无处稠密，所以由 β 的定义我们有 $\mu_H(B+[0,m]) \leqslant \beta$。设

$$\mathcal{M} := \left\{ m \in [0,H] : \frac{|B+[0,m]|}{H+1} < \frac{11}{10}\beta \right\}.$$

由命题 3.3, 集合 $\mathcal{M}$ 是内集。由习题5.24, 存在 $m_0 > U$ 使得 $[0,m_0] \subseteq \mathcal{M}$。

现在取定 $K > U$ 使得 $K < \frac{1}{100}(H+1)$，$2K < m_0$，并且存在 $x_0 \in [0, H-K]$ 使得 $\frac{1}{K}|A \cap [x_0, x_0+K-1]| > \frac{9}{10}\alpha$。$K$ 的存在是因为存在标准正实数 ϵ 使得 A 的元素多于 $\frac{9+\epsilon}{10}\alpha(H+1)$，所以把区间 $[0,H]$ 切割成长度为 K 的子区间 (最后的子区间可能长度小于 K)，并且 K 足够小的话，其中必能找到一个 $[x_0, x_0+K-1]$ 使得 A 在其中的元素多于 $\frac{9}{10}\alpha K$。令

$$\mathcal{I} := \{[iK, (i+1)K-1] : i = 0, 1, \ldots, \lfloor H/K \rfloor\}.$$

如果 $\mathcal{I}$ 中至少三分之二的区间包含 B 中的元，那么 $B+[0,m_0]$ 包含了 $\mathcal{I}$ 中至少百分之六十的区间，所以 $\beta \geq \mu_H(B+[0,m_0]) > 0.6 - 0.01 > 0.58$，这和 $\beta \leqslant \frac{5}{9} = 0.\bar{5}$ 矛盾。所以我们可设 $\mathcal{I}$ 中至少三分之一的区间不含 B 中的元素，即 B 中的元素都集中在 $\mathcal{I}$ 中最多三分之二的区间之中，因此这至少三分之二的区间中必定有一个 $[y_0, y_0+K-1]$ 使得 $B \cap [y_0, y_0+K-1]$ 包含了至少 $\frac{3}{2}\beta K$ 元素。

设 $A' := A \cap [x_0, x_0+K-1] - x_0$，$B' := B \cap [y_0, y_0+K-1] - y_0$。因为 $\mu_K(A') > \frac{9}{10}\alpha$，$\mu_K(B') \geqslant \frac{3}{2}\beta$，所以由 β 的定义我们可以说 $A'+B'$ 不是在 $[0,2K]$ 中 U–无处稠密的，因此 $A+B$ 也不是在 $[0,2H]$ 中 U–无处稠密的，这和 A 和 B 的选择矛盾。 □

让我们来看为什么定理 5.3 是定理 5.9 的简单推论。设 A 和 B 是实数单位区间 I 上的两个勒贝格正测集。我们要证明 $A+B$ 包含一个非空开区间。给定一个超整数 H，定义映照 $f:[0,2H]\to\mathbb{R}$ 使得 $f(x):=st(x/H)$。令 $U=U_H$，这里 U_H 是在 (6) 中所定义的加法分割。容易证明对任意 $a\in[0,2H]$，$f^{-1}(f(a))=[a]_U$。由定理3.10 可知 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 是 $[0,H]$ 上 Loeb 可测集并且其 Loeb 测度分别等于 A 和 B 的勒贝格测度。设 $A'\subseteq f^{-1}(A)$ 和 $B'\subseteq f^{-1}(B)$ 使得 A' 和B' 是 $[0,H]$ 中的 Loeb 正测内集。

由定理 5.9，$A'+B'$ 不是在 U–无处稠密的，所以存在区间 $[a,b]\subseteq[0,2H]$ 使得 $b-a>U$ 并且 $[a,b]$ 中任意长度大于 U 的区间都含有 $A'+B'$ 中的元素。因为 $A'+B'$ 是内集，所以 $A'+B'$ 在 $[a,b]$ 中最大空隙存在且长度小于 U。现在容易证明 $f(a)<f(b)$ 并且 $(f(a),f(b))\subseteq f(A'+B')\subseteq A+B$。所以 $A+B$ 包含了非空开区间 $(f(a),f(b))$。

在以上证明中我们使用了在 (6) 中定义的加法分割 U_H。如果使用另外的加法分割，例如 $U=\mathbb{N}$ 会有什么结果呢? 下面我们将使用 $U=\mathbb{N}$ 来证明自然数集上的和集现象。首先我们需要上 Banach 密度和局部链接性的的非标准分析等价条件。

引理 5.10 设 $A\subseteq\mathbb{N}$ 并且 $\alpha\in\mathbb{R}$。则 $BD(A)\geqslant\alpha$ 当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a,b]$ 使得 $st(|{}^*A\cap[a,b]|/(b-a+1))\geqslant\alpha$。

证明: “$\Rightarrow$”: 由上 Banach 密度的定义对每个 $k\in\mathbb{N}_+$ 能找到 $[a_k,b_k]\subseteq\mathbb{N}$ 使得 $b_k-a_k>k$, $|A\cap[a_k,b_k]|/(b_k-a_k+1)>\alpha-1/k$。由转换原理, 存在一个超整数 K 满足 $b_K-a_K>K$ 和 $|{}^*A\cap[a_K,b_K]|/(b_K-a_K+1)>\alpha-1/K\approx\alpha$。显然 $[a,b]=[a_K,b_K]$ 满足要求。

“$\Leftarrow$”: 任给 $k\in\mathbb{N}$。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中存在 $a,b\in{}^*\mathbb{N}$ 满足 $b-a>k$ 和 $|{}^*A\cap[a,b]|/(b-a+1)>\alpha-1/k$。由转换原理在 $\mathcal{V}$ 中存在 $a_k,b_k\in\mathbb{N}$ 满足 $b_k-a_k>k$ 和 $|A\cap[a_k,b_k]|/(b_k-a_k+1)>\alpha-1/k$，而这两性质推出 $BD(A)\geqslant\alpha-1/k$。因为 k 是任意的，所以 $BD(A)\geqslant\alpha$。 □

引理 5.11 设 $A\subseteq\mathbb{N}$。

1. 集合 A 是厚实的当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a,b]\subseteq{}^*A$。
2. 集合 A 是局部链接的当且仅当存在长度为超整数的区间 $[a,b]$ 和有限自然数 $k\in\mathbb{N}$ 使得 ${}^*A$ 在 $[a,b]$ 中的缝隙的长度小于 k，即 $g=\max\{d-c:[c,d]\subseteq[a,b]\setminus{}^*A\}<k$。

证明：第一部分只需转换原理的简单应用。我们只证明第二部分。

“$\Rightarrow$”：设 A 是一链接集 B 和一厚实集 C 的交。那么 ${}^*A = {}^*B \cap {}^*C$。因为B 在 $\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于一个自然数 k，所以由转换原理 ${}^*B$ 在 ${}^*\mathbb{N}$ 中缝隙的长度小于 k。因为 C 是厚实集，由第一部分，存在一超有限区间 $[a,b] \subseteq {}^*C$。显然 ${}^*A$ 在 $[a,b]$ 中缝隙的长度小于 k。

“$\Leftarrow$”：设 $g = \max\{d-c : [c,d] \subseteq [a,b] \setminus {}^*A\}$。因为右边所涉集合是内集，所以 g 存在。由引理的假设，g 一定是有限的。对任意 $m \in \mathbb{N}$ 语句“存在区间 $[a,b]$ 满足 $b-a > m$ 并且 ${}^*A$ 在 $[a,b]$ 中的缝隙的长度 $\leqslant g$”在 ${}^*\mathcal{V}$ 中成立，由转换原理，存在区间 $[a_m,b_m] \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $b_m - a_m > m$ 并且 A 在 $[a_m,b_m]$ 中缝隙的长度 $\leqslant g$。令 $C = A \cup \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[a_m,b_m]$ 和 $B = (\mathbb{N} \setminus \bigcup_{m\in\mathbb{N}}[a_m,b_m]) \cup A$。显然 B 是链接集，C 是厚实集，并且 $A = B \cap C$。
□

定理 5.12 设 $A, B \subseteq \mathbb{N}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A+B$ 一定是局部链接的。

证明　由引理 5.10，存在超有限区间 $[x, x+K_1]$ 和 $[y, y+K_2]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x, x+K_1]|/(K_1+1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st({}^*B(y, y+K_2)/(K_2+1)) \geqslant BD(B)$。实际上我们可假设 $K_1 = K_2 = K$，因为不然的话取 $K = \lceil\sqrt{\min\{K_1, K_2\}}\rceil$，再把 $[x, x+K_1]$ 和 $[y, y+K_2]$ 分割成长度为 $K+1$ 的子区间（最后一个区间的长度可能小于 $K+1$），然后在这些子区间中可找到 $[x', x'+K]$ 和 $[y', y'+K]$ 使得 $st(|{}^*A \cap [x', x'+K]|/(K+1)) \geqslant BD(A)$ 和 $st(|{}^*B \cap [y', y'+K]|/(K+1)) \geqslant BD(B)$，再用 K 替代 K_1 和 K_2。由定理 5.9 集合 ${}^*(A+B)$ 在 $[x+y, x+y+2K]$ 中不是 U–无处稠密的，所以存在超有限区间 $[a,b] \subseteq [x+y, x+y+2K]$ 和有限自然数 $k \in \mathbb{N}$ 使得 ${}^*(A+B)$ 在 $[a,b]$ 中缝隙的长度都小于 k。由引理 5.11，$A+B$ 是局部链接的。 □

注意，定理 5.12 是对定理 5.5 的一个充实。在定理 5.12 的结论中局部链接不能被改成链接，这是加法和减法本质上的差别。

在过去十几年中定理 5.12 被不断推广或重证，例如在 [5, 3] 中作者们把定理 5.12 推广至 amenable 群并建立了等价关系，在 [10] 中作者用组合方法重证定理 5.12 并给出了一些量化信息。在 [13] 中定理 5.12 中的上 Banach 密度被推广至上渐近密度和下渐近密度。

在发现定理 5.12 的过程中非标准分析无疑发挥了重要的作用。只有通过定理 5.9，连续情况和离散情况下和集现象才能被严格地统一起来。在定

理 5.9 的应用中我们只用到了 $U = U_H$ 和 $U = \mathbb{N}$ 两种情况。对于其他类型加法分割的应用，还有待于进一步探究。

5.3 Szemerédi 定理关于 $k = 4$ 的简单证明

设 a, d 是实数。称一个实数集合 $p := \{a+di : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$ 为长度等于 k 的等差数列，记为 k-a.p.。一般情况下 a, d 是整数，$d \neq 0$。记 p 中的第 i 项 $a+d(i-1)$ 为 $p(i)$。大写字母 P, Q, R 等常被用来表示长度为超整数的 a.p.。如果 p, q 是两个 k-a.p.，记 $p \oplus q := \{p(i)+q(i) : i = 0, 1, \ldots, k-1\}$。显然 $p \oplus q$ 也是一个 k-a.p.。

定理 5.13 (Szemerédi [38]) *设 $A \subseteq \mathbb{N}$。如果 $BD(A) > 0$，则对任意 $k \in \mathbb{N}$，A 中一定包含 k-a.p.。*

Szemerédi 定理其实是在 1936 年由 P. Erdős 和 P. Turán 提出的一个猜想。而这猜想的提出则是为了推广证明于 1927 年的 van der Waerden 定理。

定理 5.14 (van der Waerden) *任给 $n, k \in \mathbb{N}$，如果 $\mathbb{N}$ 被分割成 n 个子集 $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。*

记 $W(k, n) \in \mathbb{N}$ 为最小自然数 w 使得如果 $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ 是 $[w]$ 的一个分割，则一定有一子集 C_i 包含 k-a.p.。

在 1953 年 K. F. Roth 用调和分析的方法证明了在 $k = 3$ 的情况下猜想正确。在 1975 年，E. Szemerédi [38] 用纯组合方法证明了对所有 $k \in \mathbb{N}$，猜想都正确。所以我们现在称此猜想为 Szemerédi 定理。可是 Szemerédi 的证明很难读，所以在 1977 年 H. Furstenberg [15] 用测度论中的历遍理论给出了 Szemerédi 定理的又一个非常不同的证明。在 2001 年 T. Gowers [17] 再次用调和分析的方法给出了 Szemerédi 定理的一个新证明，同时还给出了 k 和 $BD(A)$ 之间的一个数值关系。虽然两个新证明比 Szemerédi 的组合证明要好读一些，但各自都不短且需要很多本方向的基础知识。

在 2017 年一次由美国数学研究所 (AIM) 资助的工作坊 Nonstandard Methods in Combinatorial Number Theory 中本文作者有幸聆听了 T. Tao 的一系列讲座，介绍 Szemerédi 定理的原始组合证明，并试图进行简化 [39]。他相信如果 Szemerédi 的原始思想被大家所理解掌握，则会使其在组合数

论的研究中发挥更大的影响。T. Tao 挑战讲座的听众，用非标准分析的方法对 [39] 再作简化，使得 Szemerédi 的组合证明能更简单直观。而在这一节中的工作是本文作者响应这一挑战的的尝试。

理解文章 [38] 或 [39] 的困难对不同读者有所不同。对本文作者来说有两点值得一提。第一点是证明中涉及了很多相互联系的参量，例如 $\epsilon, \delta, \kappa, L, H, M, N, L', N'$, 等由一种特殊的序关系联系在一起 (参看例如 [39, 第 32 页倒数 4 行])。在非标准证明中这些参量比较少涉及，且它们之间的关系可以比较简单地处理。第二点是在 [38, 39] 证明中的归纳方法比较奇特，例如 [39, Theorem 6.6]。为了证明在一个有正上 Banach 密度的集合 $A \subseteq \mathbb{N}$ 包含 k-a.p.，需要对每个 $\Omega \subseteq [k]$ 递归证明组合命题 $C(k, \Omega)$。其中关键一步是证明如果 $k_0 := \min([k] \smallsetminus \Omega) \leq k$, 则 $C(k, \Omega) \Rightarrow C((k, \Omega \smallsetminus [k_0 - 1]) \cup \{k_0\})$。首先命题 $C(k, \emptyset)$ 平凡为真。按照此方法，证明 $C(3, [3])$ 的递归步骤就是 $C(3, \emptyset) \Rightarrow C(3, \{1\}) \Rightarrow C(3, \{2\}) \Rightarrow C(3, \{1, 2\}) \Rightarrow C(3, \{3\}) \Rightarrow C(3, \{1, 3\}) \Rightarrow C(3, \{2, 3\}) \Rightarrow C(3, [3])$。对于一般 k，递归步骤需要进行 $2^k - 1$ 步。用这个归纳方法使得证明缺乏直观。当然在 $k = 3$ 时，有简单的直接证明。而我们在此所要显示的是在 $k = 4$ 时也有简单的直接证明，从而避免以上的归纳方法。有非标准分析基础的读者如果想了解 Szemerédi 定理的组合证明而又觉得 [38, 39] 太难，可以尝试从这一节入手，再看 [23] 中对 Szemerédi 定理的完整证明。

因为 [39] 中假设了 Szemerédi 正则引理的一个弱形式成立，所以我们在此也作同样处理。以下是正则引理的弱形式。

引理 5.15 *存在一正值函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。设 V, W 是有限集，$\epsilon > 0$，对每个 $w \in W$ 有 $E_w \subseteq V$. 则存在一个 V 的分割 $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n$ 使得 $n \leq f(\epsilon)$，且对每个 $i \leq n$ 和 $w \in W$ 存在 $0 \leq c_{i,w} \leq 1$ 使得对每个集合 $F \subseteq V$ 都有集合 $W' \subseteq W$ 满足 $|W'| \geq (1 - \epsilon)|W|$ 并对每一 $w \in W'$ 都有*

$$\left| |F \cap E_w| - \sum_{i=1}^{n} c_{i,w} |F \cap V_i| \right| \leq \epsilon |V|.$$

其实 $f(\epsilon)$ 可以取为指数函数 $b^{1/\epsilon}$ [39, paragraph right below Lemma 1.3]，只是我们在证明中并不需要这点。在以上引理中 $|V|$ 比 n 大得多。如果 ϵ 取得越小，就得允许 n 更大。以上正则引理可证明非标准形式的混合引理 (Mixing Lemma)。

为简化记号，对 ${}^*\mathbb{N}$ 中两个正自然数 $a < b$，记 $a \lll b$ 当且仅当 $a/b \approx 0$。显然自然数 n 是超有限的当且仅当 $1 \lll n$。在这一节中所有不

在 $\mathbb{N}$ 中的集合都是内集。对任意内集 A 和 $n \in {}^*\mathbb{N}$，记 $\delta_n(A) = |A|/n$ 且 $\mu_n(A) = st(\delta_n(A))$。如果 $A \subseteq \Omega$，则 $\mu_{|\Omega|}(A)$ 就是 A 在 Ω 上的 Loeb 测度。为了方便我们不要求 $|A|$ 小于等于 n。所以 $\mu_n(A) = \infty$ 也是可能的。

定义 5.16 设 $A, S \subseteq {}^*\mathbb{N}$。记

$$SD(A) := \sup\left\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 } a.p. \text{ 满足} |P| \ggg 1\right\}.$$

如果 $SD(S) \geq \gamma$，记

$$SD_{S,\gamma}(A) := \sup\{\mu_{|P|}(A \cap P) : P \text{ 是 } a.p., |P| \ggg 1 \text{ 并且} \mu_{|P|}(S \cap P) \geq \gamma.\}.$$

以上定义中 sup 是标准算子，所以 $SD(A)$ 、和 $SD_{S,\gamma}(A)$ 是 $[0,1]$ 中的标准实数。可以证明对任一自然数子集 $A \subseteq \mathbb{N}$，有 $SD({}^*A) \geq BD(A)$。所以可称 $SD({}^*A)$ 为 A 的**强 Banach 密度**。

引理 5.17 (Mixing Lemma) 设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$，$1 \lll H \leq N/2$，和 $R \subseteq [N-H]$ 使得对每个 $x \in R$ 都有

$$\mu_N(A) = SD(A) = \mu_H((x + [H]) \cap A) = \alpha.$$

则以下成立。

(i) 给定 $E \subseteq [H]$，$\mu_H(E) > 0$，$K \ggg 1$，和 K-$a.p.$ $P \subseteq R$，存在 $x \in P$ 使得

$$\mu_H(A \cap (x + E)) \geq \alpha\mu_H(E);$$

(ii) 给定 $m, m' \ggg 1$，m-$a.p.$ $P \subseteq R$ 使得 $W\left(3^{m'}, m'\right) \leq m$，给定 $[H]$ 的内分割 $\{V_i \mid i \in [m']\}$，则存在一个 m'-$a.p.$ $P' \subseteq P$，一个集合 $I \subseteq [m']$ 使得 $U = \bigcup\{V_i \mid i \in I\}$ 满足 $\mu_H(U) = 1$，和一个正无穷小 ϵ 使得对每个 $i \in I$ 和每个 $x \in P'$ 有

$$|\delta_H(A \cap (x + V_i)) - \alpha\delta_H(V_i)| \leq \epsilon\delta_H(V_i);$$

(iii) 给定 $m \ggg 1$，m-$a.p.$ $P \subseteq R$，和一个内集族 $\{E_w \subseteq [H] \mid w \in W\}$ 满足 $|W| \ggg 1$ 和对每个 $w \in W$ 有 $\mu_H(E_w) > 0$。则存在 $x \in P$ 和 $T \subseteq W$ 使得 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 并且对每个 $w \in T$ 都有

$$\mu_H(A \cap (x + E_w)) = \alpha\mu_H(E_w).$$

证明：(i) 由 α 的最大性，对所有 $i \in [N]$ 都有 $\mu_K((i+P)\cap A) \le \alpha$。如果 (i) 不成立，即 (i) 中所述的 x 不存在，则

$$\begin{aligned}\alpha\mu_H(E) &\gg \frac{1}{K}\sum_{x\in P}\frac{1}{H}\sum_{i\in[H]}\chi_{A\cap(x+E)}(x+i)\\ &= \frac{1}{H}\sum_{i\in[H]}\frac{1}{K}\sum_{x\in P}\chi_{A\cap(x+E)}(x+i)\\ &= \frac{1}{H}\sum_{i\in E}\frac{1}{K}\sum_{x\in P}\chi_{A}(x+i) \gtrapprox \alpha\mu_H(E),\end{aligned}$$

矛盾。所以 (i) 成立。

(ii) 这部分证明需要利用内集性质，所以基本用 δ_H 而不是 μ_H。取定 $j\in\mathbb{N}$。对每个 $x\in P$ 令

$$c_i^j(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \delta_H((x+V_i)\cap A) \ge \left(\alpha+\frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i),\\ 0 & \text{if } \left(\alpha-\frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i) < \delta_H((x+V_i)\cap A) < \left(\alpha+\frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i),\\ -1 & \text{if } \delta_H((x+V_i)\cap A) \le \left(\alpha-\frac{1}{j}\right)\delta_H(V_i).\end{cases}$$

并令 $c^j : P \to \{-1,0,1\}^{[m']}$ 使得 $c^j(x)(y) = c_y^j(x)$。由 van der Waerden 定理可找到一 m'–a.p. $P'_j \subseteq P$ 使得对任何 $x, x' \in P'_j$，都有 $c^j(x) = c^j(x')$。

对所有 $x \in P'_j$ 令 $I_j^+ = \{i\in[m'] : c^j(x)(i) = 1\}$，$I_j^- = \{i\in[m'] : c^j(x)(i) = -1\}$ 和 $I_j = [m'] \smallsetminus (I_j^+ \cup I_j^-)$。再令 $U_j^+ = \bigcup\{V_i : i\in I_j^+\}$，$U_j^- = \bigcup\{V_i : i \in I_j^-\}$，和 $U_j = [H]\smallsetminus(U_j^+\cup U_j^-)$。因为 U_j^- 是 $\{V_i : i\in I_j^-\}$ 中互不相交集合的并，所以 $\delta_H((x+U_j^-)\cap A) \le (\alpha - 1/j)\delta_H(U_j^-)$。由 (i) 可推出 $\mu_H(U_j^-) = 0$。同理 $\delta_H(A\cap(x+U_j^+)) \ge (\alpha+1/j)\delta_H(U_j^+)$。因为 $\alpha \ge \mu_H(A\cap(x+U_j^+)) \ge (\alpha+1/j)\mu_H(U_j^+)$，所以 $\mu_H(U_j^+) < 1$，进而推出 $\mu_H(U_j) > 0$。如果 $\mu_H(U_j^+) > 0$，则对每个 $x \in P'_j$ 都有 $\mu_H(A\cap(x+U_j)) < \alpha\mu_H(U_j)$，而这和 (i) 矛盾。所以我们有 $\mu_H(U_j^+) = 0$ 和 $\mu_H(U_j) = 1$。

由可数饱和性可找到 $J \ggg 1$ 使得 $|P'_J| \ggg 1$ 和 $\mu_H(U_J) = 1$。因为 $1/J \approx 0$，所以只需令 $P' = P'_J, I = I_J$, 和 $U = U_J$ 就使 (ii) 得证。

(iii) 应用引理5.15 和转换原理可找到一正无穷小 ϵ，$[H]$ 的一个超有限分割 $[H] = V_0\cup V_1\cup\cdots\cup V_{m'}$，和对所有 $i\in[m']$ 和 $w \in W$ 有实数 $0 \le c_{i,w} \le 1$ 使得 $W(3^{m'}, m') \le m$ 并且对每个集合 $F \subseteq [H]$ 存在集合 $T_F \subseteq W$ 满足 $|W\smallsetminus T_F| \le \epsilon|W|$ 使得对每个 $w\in T_F$ 有

$$\left| |F\cap E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w}|F\cap V_i| \right| \le \epsilon H. \tag{7}$$

无穷小 ϵ 存在是因为如果 ϵ 标准正数，则 m' 一定再 $\mathbb{N}$ 中。所以当 ϵ 是相当大的无穷小时可保证 m' 是足够小的超整数。

由 (7) 并令 $F := [H]$ 可得出对所有 $w \in T_{[H]}$.

$$\left| |E_w| - \sum_{i=1}^{m'} c_{i,w}|V_i| \right| \leq \epsilon H. \tag{8}$$

应用 (ii) 能找到 $x \in P$，一个正无穷小 ϵ_1，和集合 $I \subseteq [m']$ 满足

$$I = \{i \in [m'] : |\delta_H((x+V_i) \cap A) - \alpha\delta_H(V_i)| < \epsilon_1 \delta_H(V_i)\}, \tag{9}$$

$U = \bigcup\{V_i : i \in I\}$，和 $\mu_H(U) = 1$。令 $I' = [m'] \setminus I$ 和 $U' = [H] \setminus U$。对每个 $w \in T := T_{[H]} \cap T_{(A-x)\cap[H]}$ 有

$$\begin{aligned}
&|\delta_H(A \cap (x+E_w)) - \alpha\delta_H(E_w)| \\
&\quad \leq \frac{1}{H}\left(\left| |(A-x) \cap E_w| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|(A-x) \cap V_i| \right| \right. \\
&\qquad + \left| \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|A \cap (x+V_i)| - \sum_{i\in[m']} c_{w,i}\alpha|V_i| \right| \\
&\qquad \left. + \left| \alpha \sum_{i\in[m']} c_{w,i}|V_i| - \alpha \sum_{i\in[m']} |E_w| \right| \right) \\
&\quad \leq \epsilon + \frac{1}{H}\sum_{i\in I} c_{w,i}\epsilon_1|V_i| + 2\delta_H(U') + \alpha\epsilon \\
&\quad \leq \epsilon + \epsilon_1\delta_H(U) + 2\delta_H(U') + \alpha\epsilon \approx 0.
\end{aligned}$$

因此对所有 $w \in T$ 可得出

$$\mu_H(A \cap (x+E_w)) = \alpha\mu_H(E_w).$$

这里 $\mu_{|W|}(T) = 1$ 是因为 $\epsilon \approx 0$ 和 $\mu_{|W|}(T_{[H]}) = \mu_{|W|}(T_{[H]\cap(A-x)}) = 1$。 □

引理 5.18 设 $N \ggg 1$，$A \subseteq [N]$ 满足 $\mu_N(A) = SD(A) = \alpha > 0$，和 $H = \lfloor N/8 \rfloor$。存在一个整数区间 $x_0 + [H] \subseteq [N]$，集合 $T \subseteq x_0 + [H]$ 满足 $\mu_H(T) = 1$，和

$$\mathcal{P}_t := \{p \subseteq [N] : p \text{ 是 } 4\text{-}a.p., p(1), p(2) \in A, \text{ 并 } p(4) = t\}$$

使得对每个 $t \in T$ 有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \alpha^2/3$。

证明：令 $S := [N-H] \cup \{0\}$。注意我们有 $\{0\} \cup (H+[H]) \cup (2H+2[H]) \cup (3H+3[H]) \subseteq S$。

对每个 $w \in [H]$ 令

$$\mathcal{Q}_w := \{q \subseteq [H] : q \text{ 是 4-a.p.}, q(1) \in A, \text{ and } q(4) = w\}$$

$$\text{且 } E_w = \{q(2) : q \in \mathcal{Q}_w\}.$$

显然 $\mu_H(E_w) = \alpha/3$。这是因为 $|q(4) - q(1)|$ 必须是 3 的倍数。由引理5.17第三部分，存在 $l \in [H]$ 和 $W \subseteq [H]$ 满足 $\mu_H(W) = 1$ 使得对每个 $w \in W$ 有

$$\mu_H(A \cap (H + l + E_w)) = \alpha \mu_H(E_w) = \alpha^2/3.$$

令 $x_0 := 3H + 3l$ 和 $T := 3H + 3l + W \subseteq x_0 + [H]$。令 $p_0 := \{0, H+l, 2H+2l, 3H+3l\}$。对每个 $t = 3H + 3l + w \in T$，令

$$\mathcal{P}_t := \{p_0 \oplus q : q \in \mathcal{Q}_w \text{ 和 } H + l + q(2) \in (H + l + E_w) \cap A\}.$$

则有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H((H + l + E_w) \cap A) = \alpha^2/3$ 并由 $\mathcal{Q}_w$ 的定义，对每个 $p_0 \oplus q \in \mathcal{P}_t$ 我们有 $p_0(4) + q(4) = 3H + 3l + w = t$，$p_0(2) + q(2) = H + l + q(2) \in (H + l + E_w) \cap A \subseteq A$，和 $p_0(1) + q(1) = q(1) \in [H] \cap A$。□

引理 5.19 设 $N \ggg 1$，$B, S_\gamma \subseteq [N]$ 满足 $B \subseteq S_\gamma$，$\mu_N(S_\gamma) = SD(S_\gamma) = \gamma > 11/12$，和 $\mu_N(B) = SD_{S_\gamma,\gamma}(B) = \beta > 0$。存在整数区间 $x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor] \subseteq [N]$ 和集合 $T \subseteq x_0 + [\lfloor N/24 \rfloor]$ 满足 $\mu_{N/24}(T) \geq 1 - 12(1-\gamma)$，和一个包含 4-*a.p.* 的集合 $\{p_t : t \in T\}$ 使得对每个 $t \in T$ 都有 $p_t(1), p_t(2) \in B$，$p_t(3), p_t(4) \in S_\gamma$，和 $p_t(3) = t$。

证明：令 $H := [N/8]$。注意，对每个 $x \in [N-H] \cup \{0\}$，都有 $\mu_H(S_\gamma \cap (x + [H])) = \gamma$ 和 $\mu_H(B \cap (x + [H])) = \beta$。记 $\mathcal{Q}$ 为 $[H]$ 中所有 4-a.p. 的集合。对每个 $w \in [\lfloor H/3 \rfloor, \lfloor 2H/3 \rfloor]$ 记

$$\mathcal{Q}_w^3 := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(3) = w\}$$

$$\text{且 } E_w^3 := \{q(2) : q \in \mathcal{Q}_w^3\}.$$

则我们有 $\mu_H(E_w^3) = \beta/2$。对每个 $w' \in [H]$ 和 $i = 3, 4$，记

$$\mathcal{R}_{w'}^i := \{q \in \mathcal{Q} : q(1) \in B \text{ 和 } q(i) = w'\}$$

$$\text{且 } F^i_{w'} := \{q(2) : q \in \mathcal{R}^i_{w'}\}.$$

显然 $\mu_H(F^i_{w'}) \le \beta$。

由引理5.17 第三部分，存在 $l \in [H]$，$W_3 \subseteq [\lfloor H/3\rfloor, \lfloor 2H/3\rfloor]$ 满足 $\mu_H(W_3) = 1/3$，和 $W^i \subseteq [H]$ 满足 $\mu_H(W^i) = 1$ 使得对所有 $w \in W_3$ 和 $w' \in W^3$ 或 $w' \in W^4$ 都有

$$\mu_H(B \cap (H + l + E^3_w)) = \frac{\beta^2}{2} \text{ 和 } \mu_H(B \cap (H + l + F^i_{w'})) \le \beta^2.$$

显然对 $i = 3$ 或 4 我们有 $\mu_H(((i-1)H + (i-1)l + W^i) \cap S_\gamma) = \gamma$。

记 $T^3 := 2H + 2l + W_3$。对每个 $t = 2H + 2l + w \in T^3$ 记

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_t := \{&p \subseteq [N] : \\ &p \text{ 是 } 4 - a.p., p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (H + l + E^3_w), p(3) = t\}\end{aligned}$$

$$\text{和} \quad \mathcal{P} := \bigcup_{i \in T^3} \mathcal{P}_t.$$

注意,对每个 $t = 2H+2l+w \in T^3$ 都有 $\mu_H(\mathcal{P}_t) = \mu_H(B \cap (2H+2l+E^3_w)) = \beta^2/2$。

称一个 4-a.p. $p \in \mathcal{P}$ 为**理想的**如果对 $i = 3, 4$ 有 $p(i) \in S_\gamma \cap ((i-1)H + (i-1)l + [H])$。令 $\mathcal{P}_g$ 为包含 $\mathcal{P}$ 中所有理想 4–a.p. 的集合。称一个 4-a.p. $p \in \mathcal{P}$ 是**不理想的**如果其不是理想的。令 $\mathcal{P}_b := \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_g$。令 $T^3_g := \{p(3) : p \in \mathcal{P}_g\}$。则 $T^3_g \subseteq S_\gamma$。我们现在证 $\mu_H(T^3_g) \ge \dfrac{1}{3} - 4(1-\gamma)$。

因为 $\mathcal{P}_b \subseteq \bigcup_{i=3,4} \{p \in \mathcal{P} : p(1) \in B \cap [H], p(2) \in B \cap (h + l + [H]), p(i) \notin S_\gamma\}$，所以

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_b| &\le \sum_{i=3}^{4} \sum_{w' \in [H] \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}| \\ &\le \sum_{i=3}^{4} \left(\sum_{w' \in [H] \setminus W^i} |F^i_{w'}| + \sum_{w' \in W^i \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}| \right).\end{aligned}$$

因此 $|\mathcal{P}_g| = |\mathcal{P}| - |\mathcal{P}_b|$

$$\ge \sum_{t \in T^3} |\mathcal{P}_t| - \sum_{i=3}^{4} \left(\sum_{w' \in [H] \setminus W^i} |F^i_{w'}| + \sum_{w' \in W^i \setminus (S_\gamma - (i-1)H - (i-1)l)} |F^i_{w'}| \right).$$

现在可推出

$$\begin{aligned}
\mu_H(T_g^3)\cdot\frac{\beta^2}{2} &= st\left(\frac{1}{H}\sum_{t\in T_g^3}\frac{1}{H}|\mathcal{P}_t|\right)\\
&\ge st\left(\frac{1}{H^2}|\mathcal{P}_g|\right) = st\left(\frac{1}{H^2}(|\mathcal{P}|-|\mathcal{P}_b|)\right)\\
&\ge st\left(\frac{1}{H^2}\sum_{t\in T^3}|\mathcal{P}_t|\right)\\
&\quad -st\left(\frac{1}{H^2}\sum_{i=3}^{4}\left(\sum_{w'\in[H]\smallsetminus W^i}|F_{w'}^i| + \sum_{w'\in W^i\smallsetminus(S_\gamma-(i-1)H-(i-1)l)}|F_{w'}^i|\right)\right)\\
&\ge \mu_H(T^3)\cdot\frac{\beta^2}{2} - 2(1-\gamma)\cdot\beta^2 = \left(\frac{1}{3}-4(1-\gamma)\right)\cdot\frac{\beta^2}{2}.
\end{aligned}$$

从而 $\mu_H(T_g^3)\ge\dfrac{1}{3}-4(1-\gamma)$。所以我们有 $\mu_{N/24}(T_g^3)=1-12(1-\gamma)$。这是因为 $H=\lfloor N/8\rfloor$。如果令 $x_0:=2H+2l+\lfloor H/3\rfloor-1$，$T:=T_g^3$，并对每个 $t\in T$ 取定一个 $p_t\in\mathcal{P}_g$ 使得 $P_t(3)=t$，则引理得证。 □

备注 5.20 以上证明 $\mu_{N/24}(T_g^3)>1-12(1-\gamma)$ 的思想来源于 *[39, Page 34]*.

定理 5.21 (Szemerédi) 如果 $U\subseteq\mathbb{N}$ 且 $SD(U)>0$，则 U 包含了非平凡长度为 4 的等差数列。

证明：设 $N\ggg 1$ 且 $A\subseteq[N]$ 使得 $\mu_N(A)=SD(A)=\alpha>0$。我们只需在 A 中找到一个 4-a.p.。对每个 $n,j\in\mathbb{N}$ 令

$$S_{j,n}:=\{x\in[N-n]:\mu_n((x+[n])\cap A)\ge\alpha-1/j\}.$$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{N-n}(S_{j,n})=1$。所以只要 $n\in\mathbb{N}$ 足够大，我们可假设 $\gamma_{j,n}:=SD(S_{j,n})>11/12$。设 $R_{j,n}$ 是 $[N]$ 中差为 d 的一个超有限长度的 a.p. 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(R_{j,n}\cap S_{j,n})=\gamma_{j,n}$。对每个 $\tau\subseteq[n]$ 记

$$B_\tau:=\{x\in[R_{j,n}]:A\cap(x+[n])=x+\tau\}.$$

则因为 n 有限，存在 $\tau_{j,n}$ 使得 $\mu_{|R_{j,n}|}(B_{\tau_{j,n}})=\beta_{j,n}>0$。记 $B_{j,n}:=B_{\tau_{j,n}}$。取定一差为 d 长度为超整数 N' 的 a.p. $P_{j,n}\subseteq R_{j,n}$ 使得 $\mu_{N'}(P_{j,n}\cap S_{j,n})=\gamma_{j,n}$ 和 $\mu_{N'}(P_{j,n}\cap B_{j,n})=\beta_{j,n}$。设 $\varphi:P_{j,n}\to[N']$ 为仿射映照，即 $\varphi(x)=$

$(x-\min P_{j,n})/d+1$。应用引理 5.19 并考虑 $[N']$ 和 $S'=\varphi((S_{j,n})\cap P_{j,n})$ 代替 $[N]$ 和 S，然后再由 φ^{-1} 拉回来，我们获得 $x_0+d\,[\lfloor|P_{j,n}|/24\rfloor]\subseteq P_{j,n}$ 和 $T_{j,n}\subseteq x_0+d\,[\lfloor|P_{j,n}|/24\rfloor]$ 满足 $\mu_{N'/24}(T_{j,n})\geq 1-12(1-\gamma_{j,n})$，并且找到包含 4-a.p. 的集合 $\mathcal{P}_{j,n}=\{p_t:t\in T_{j,n}\}$ 使得对每个 $t\in T_{j,n}$ 有 $p_t(1),p_t(2)\in B_{j,n}\cap P_{j,n}$，$p_t(3),p_t(4)\in S_{j,n}\cap P_{j,n}$，和 $p_t(3)=t$。

由可数饱和性我们可得到 $H\ggg 1$ 和 $J\ggg 1$ 使得 $\gamma:=\gamma_{J,H}\approx 1$，$P:=P_{J,H}$ 满足 $|P|\ggg 1$，$S:=S_\gamma$，$B:=B_{J,H}\subseteq S$，$T:=T_{J,H}$，且 $\mathcal{P}_{J,H}=\{p_t:t\in T\}$ 使得对每个 $t\in T$ 都有 $p_t(1),P_t(2)\in B$，$p_t(3),p_t(4)\in S$，和 $p_t(3)=t$。

注意，我们现在有 $\mu_{N-H}(S)=1$，$T\subseteq x_0+d\,[\lfloor|P|/24\rfloor]$，$\mu_{|P|/24}(T)=1$，$\gamma\approx 1$，$x,y\in B$ 推出 $((x+[n])\cap A)-x=((y+[H])\cap A)-y$，并且 $x\in S$ 推出 $\mu_H((x+[H])\cap A)=\alpha$。虽然现在可能 $\mu_{|P|}(B)=0$，但是 $\mathcal{P}_{J,H}=\{p_x:x\in T\}$ 的存在性是由可数饱和性保证的。

因为 $\mu_{N/24}(T)=1$，我们可找到差为 d 有超有限长度的 a.p. $P'\subseteq T$。记 $\mathcal{P}':=\{p_t\in\mathcal{P}_{J,H}:t\in P'\}$。

现在对每个 $p_t\in\mathcal{P}'$ 我们有 $p_t(1),p_t(2)\in B$，$p_t(3)=t\in S$，和 $p_t(4)\in S$。

对一个 (或所有) $x\in B$ 记 $\tau_0:=((x+[H])\cap A)-x$。则有 $\mu_H(\tau_0)=\alpha$。这是因为 $B\subseteq S$。由引理 5.18 并用 H 代替 N，用 τ_0 代替 A，我们可找到 $x_0+[\lfloor H/8\rfloor]\subseteq[H]$，$T_Q\subseteq x_0+[\lfloor H/8\rfloor]$ 满足 $\mu_H(T_Q)=1/8$，且对每个 $w\in T_Q$，

$$\mathcal{Q}_w:=\{q\subseteq[H]:q(1),q(2)\in\tau_0,\ \text{并}\ p(4)=w\},$$

和 $E_w=\{q(3):q\in\mathcal{Q}_w\}$ 使得 $\mu_H(E_w)=\alpha^2/24$。

由引理 5.17 第三部分可找到 $x'\in P'$ 和 $T'_Q\subseteq T_Q$ 满足 $\mu_H(T'_Q)=1/8$ 使得对每个 $w\in T'_Q$，有 $\mu_H((x'+E_w)\cap A)=\alpha\mu_H(E_w)=\alpha^3/24$。

取定 $p_{x'}\in\mathcal{P}'$。因为 $p_{x'}(4)\in S$，我们有 $\mu_H((p_{x'}(4)+T'_Q)\cap A)=\alpha/8$。所以存在 $w\in T'_Q$ 使得 $p_{x'}(4)+w\in A$。

取 $q_w\in\mathcal{Q}_w$。则有 $p_{x'}(4)+q_w(4)=p_{x'}(4)+w\in A$。注意，我们有 $p_{x'}(3)+q_w(3)\in(x+E_w)\cap A\subseteq A$。还注意，$p_{x'}(1),p_{x'}(2)\in B$ 推出对 $i=1,2$ 有 $A\cap(p_{x'}(i)+[\lfloor H/8\rfloor])=p_{x'}(i)+\tau_0$。所以对 $i=1,2$ 有 $p_{x'}(i)+q_w(i)\in p_{x'}(i)+\tau_0\subseteq A$。因此我们得到了 A 中的 4-a.p.

$$\{p_{x'}(i)+q_w(i):i=1,2,3,4\}.$$

$\square$

我们不知道以上的思路是否可用来做一个整个 Szemerédi 定理的直接归纳证明，而不是用 [39, Theorem 6.6] 中的归纳法。

5.4 第五章习题

习题 5.22 令 H 为一超整数。证明

$$U_H := \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} [0, H/n]$$

是一个加法分割。

习题 5.23 设 $U \subseteq \mathbb{N}$ 是一加法分割，η, κ 是两个正则基数。称 U 是 (η, κ) 型的如果 η 是最小基数使得 U 包含了基数为 η 且在 U 中无上界的子集，κ 是最小基数使得 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ 包含了基数为 κ 且在 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ 中无下界的子集。证明 *(1)* 不存在 $(\aleph_0, \aleph_0)$ 型的加法分割；*(2)* 对任一超整数，存在 (η, κ) 型的加法分割 U 满足 $\mathbb{N} \subseteq U \subseteq U_H$ 且 η 和 κ 都大于 $\aleph_0$。

习题 5.24 设 U 是加法分割，A 是 ${}^*\mathbb{N}$ 中非空内子集。证明 *(1)* $A \cap U$ 非空且在 U 中无上界推出 $A \setminus U \neq \emptyset$；*(2)* $A \setminus U$ 非空且在 ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ 中无下界推出 $A \cap U \neq \emptyset$。

习题 5.25 设 H 是一超整数，U_H 由 *(6)* 中定义。证明 $[0, H]/\sim := \{[a]_{U_H} : a \in [0, H]\}$ 在自然序下和标准实数单位区间 $[0, 1]$ 序同构。

习题 5.26 设 $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ 使得 $BD(A) > 0$ 和 $BD(B) > 0$。则 $A - B := \{a - b : a \in A \wedge b \in B\}$ 一定是 $\mathbb{Z}$ 中局部链接集。

习题 5.27 设 $A \subseteq \mathbb{N}$。记

$$SD'(A) := \lim_{n \to \infty} \sup\{\mu_n(A \cap p) : p \text{ 是一个 } n\text{-}a.p.\}.$$

证明 $SD'(A) = SD({}^*A)$。

习题 5.28 用引理 *5.17* 直接证明 *Roth* 定理，即如果 $A \subseteq \mathbb{N}$，$BD(A) > 0$，则 A 包含了长度为 3 的等差数列。

参考文献

[1] *R. M. Anderson*, A non-standard representation for Brownian motion and Itô integration, Israel Journal of Mathematics, 25 (1976), 15 – 46.

[2] *M. T. Barlow*, One dimensional stochastic differential equations with no strong solutions, Proceedings of London Mathematical Society,(2) 26 (1982), 335 – 347.

[3] *M. Beiglböck, V. Bergelson, and A. Fish*, Sumset Phenomenon in Countable Amenable Groups, Advances in Math. 223 (2010), no. 2, 416–432.

[4] *M. Benedikt*, Ultrafilters which extend measures, Journal of Symbolic Logic, 63 (2), 1998, 638 – 662.

[5] *V. Bergelson, H. Furstenberg, and B. Weiss*, Piecewise-Bohr sets of integers and combinatorial number theory, Topics in Discrete Math., (Dedicated to Jarik Nesetril on the occasion of his 60th birthday), Springer, 2006, 13–37.

[6] *C. C. Chang and H. J. Keisler*, (1990) Model Theory, 3rd ed., North-Holland, Amsterdam

[7] *N. J. Cutland, C. W. Henson, and L. Arkeryd*, editors, Nonstandard Analysis: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers 1997.

[8] *J. W. Dauben*, Abraham Robinson and Nonstandard Analysis: History, Philosophy, and Foundations of Mathematics, in William Aspray and Philip Kitcher, eds. History and Philosophy of Modern Mathematics, pages 177 – 200, Minnesota Studies in Philososphy of Science XI, University of Minnesota Press, 1988

[9] *J. W. Dauben*, Abraham Robinson: The Creation of Nonstandard Analysis, A Personal and Mathematical Odyssey, Princeton Legacy Library (307), Princeton University Press, 1995

[10] *M. Di Nasso*, An elementary proof of Jin's Theorem with a bound, The Electronic Jour. of Combinatorics, 21 (2014), Issue 2.

[11] *M. Di Nasso*, Hypernatural numbers as ultra lters, in Nonstandard Analysis for the Working Mathematician–Second edition, edited by P. Loeb and M. Wolff, Springer, 2015, 443 – 474

[12] *M. Di Nasso and L. Luperi Baglini*, Ramsey properties of nonlinear Diophantine equations, Advances in Mathematics, 324 (2018), 84 – 117

[13] *M. Di Nasso, I. Goldbring, R. Jin, S. Leth, M. Lupini, and K. Mahlburg*, High density piecewise syndeticity of sumsets, Advances in Mathematics, 278 (2015) 1 – 33

[14] *S. Fajardo and H. J. Keisler*, Model Theory of Stochastic Processes, Lecture Notes in Logic, Association for Symbolic Logic, 2002

[15] *H. Furstenberg*, Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory, Princeton University Press, 1981.

[16] *R. Goldblatt*, Lectures on the hyperreals–an introduction to nonstandard analysis, Springer, 1998.

[17] *T. Gowers*, A new proof of Szemerédi's theorem, GAFA 11 (2001), 465 – 588.

[18] *C. W. Henson*, Analytic Sets, Baire Sets, and The Standard Part Map, Canadian Journal of Mathematics, 31 (1979), 663 – 672.

[19] *C. W. Henson and H. J. Keisler*, On the Strength of Nonstandard Analysis, Journal of Symbolic Logic, 51 (1986), no. 2, 377 – 386.

[20] *R. Jin*, 非标准分析及其应用,《中国科学 · 数学》2016 年第 46 卷，第 4 期，371 – 408

[21] *R. Jin*, Better Nonstandard Universes with Applications, in Nonstandard Analysis: Theory and Applications, edited by N. J. Cutland, C. W. Henson, and L. Arkeryd, Kluwer Academic Publishers 1997, 183 – 208

[22] *R. Jin*, Sumset phenomenon, The Proceedings of American Mathematical Society, Vol. 130, No. 3 (2002), 855 – 861.

[23] *R. Jin*, Combinatorial Proof of Szemerédi's Theorem in Nonstandard Analysis,

[24] *R. Jin*, Freiman's inverse problem with small doubling property, Advances in Mathematics, 216 (2007), No. 2, 711 – 752.

[25] *R. Jin*, Solution to the Inverse Problem for Upper Asymptotic Density, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), 595 (2006), 121 – 166.

[26] *R. Jin*, Density Problems and Freiman's Inverse Problems in Nonstandard Analysis for the Working Mathematician–Second edition, edited by P. Loeb and M. Wolff, Springer, 2015, 403 – 441

[27] *H. J. Keisler*, An infinitesimal approach to stochastic analysis, Memoirs of American Mathematical Society, 48 (1984), no. 297.

[28] *H. J. Keisler*, Stochastic differential equations with extra properties in Nonstandard Analysis: Theory and Applications, edited by N. J. Cutland, C. W. Henson, and L. Arkeryd, Kluwer Academic Publishers 1997,

[29] *H. J. Keisler and S. Leth*, Meager Sets on the Hyperfinite Time Line, The Journal of Symbolic Logic, 56 (1991), 71 – 102.

[30] *K. Kunen*, Set Theory, Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations, College Publications 2011

[31] *S. C. Leth*, Applications of nonstandard models and Lebesgue measure to sequences of natural numbers, The Transactions of American Mathematical Society, 307 (1988), 457 – 468.

[32] *P. Loeb and M. Wolff*, editors, Nonstandard Analysis for the Working Mathematician, Second edition, Springer Netherlands, 2015.

[33] *E. Nelson*, Internal Set Theory: A new approach to nonstandard analysis, Bulletin of the American Mathematical Society, 83 (1977), 1165 – 1198

[34] *A. Robinson*, Nonstandard Analysis, Princeton University Press, revised edition. Originally published by North-Holland, Amsterdam (1966) and (1974).

[35] *A. Robinson and E. Zakon*, (1969) A set-theoretical characterization of enlargements, In Luxemburg (1969), 109–122.

[36] *D. Ross*, Loeb Measure and Probability, in Nonstandard Analysis: Theory and Applications, edited by N. J. Cutland, C. W. Henson, and L. Arkeryd, Kluwer Academic Publishers 1997, 91 – 120

[37] *A. V. Skorokhod*, Studies in The Theory of Random Processes, Addison-Wesley, 1965.

[38] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression.* Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik, Acta Arith. 27 (1975), 199 – 245.

[39] T. Tao, *Szemerédi's proof of Szemerédi's Theorem*, https://terrytao.files.wordpress.com/2017/09/szemeredi-proof1.pdf