

非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

一个没有标准证明的标准定理

Freiman 逆问题

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Facts:

1.

$$2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \frac{|A|(|A| + 1)}{2};$$

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Facts:

1.

$$2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \frac{|A|(|A| + 1)}{2};$$

2. 如果 A 是一等差数列，则 $|A + A| = 2|A| - 1$;

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Facts:

1.

$$2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \frac{|A|(|A| + 1)}{2};$$

2. 如果 A 是一等差数列，则 $|A + A| = 2|A| - 1$;

3. 如果 $A = \{2^i : i = 1, 2, \dots, k\}$ ，则 $|A + A| = |A|(|A| + 1)/2$;

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Facts:

1.

$$2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \frac{|A|(|A| + 1)}{2};$$

- 2. 如果 A 是一等差数列，则 $|A + A| = 2|A| - 1$;
- 3. 如果 $A = \{2^i : i = 1, 2, \dots, k\}$ ，则 $|A + A| = |A|(|A| + 1)/2$;
- 4. 如果 $|A + A| = 2|A| - 1$ ，则 A 一定是一等差数列。

Freiman 逆问题 -1

Freiman 现象： 设 $A \subseteq \mathbb{Z}$ 是一个有限集。如果 $|A + A|$ 比较小，则 A 应该有等差数列结构。

Facts:

1.

$$2|A| - 1 \leq |A + A| \leq \frac{|A|(|A| + 1)}{2};$$

- 2. 如果 A 是一等差数列，则 $|A + A| = 2|A| - 1$;
- 3. 如果 $A = \{2^i : i = 1, 2, \dots, k\}$ ，则 $|A + A| = |A|(|A| + 1)/2$;
- 4. 如果 $|A + A| = 2|A| - 1$ ，则 A 一定是一等差数列。

问题

如果 $|A + A| > 2|A| - 1$ ， A 会有什么结构呢？

Freiman 逆问题 -2

定理 (Freiman)

1. 如果 $|A| > 3$ 且 $|A + A| = 2|A| - 1 + b$, 这里 $0 \leq b < |A| - 2$, 则 A 一定是一长度为 $|A| + b$ 的等差数列的子集;

Freiman 逆问题 -2

定理 (Freiman)

1. 如果 $|A| > 3$ 且 $|A + A| = 2|A| - 1 + b$, 这里 $0 \leq b < |A| - 2$, 则 A 一定是一长度为 $|A| + b$ 的等差数列的子集;
2. 如果 $|A| > 6$ 且 $|A + A| = 3|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并;

Freiman 逆问题 -2

定理 (Freiman)

1. 如果 $|A| > 3$ 且 $|A + A| = 2|A| - 1 + b$, 这里 $0 \leq b < |A| - 2$, 则 A 一定是一长度为 $|A| + b$ 的等差数列的子集;
2. 如果 $|A| > 6$ 且 $|A + A| = 3|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并;
3. 如果 $|A| > 10$ 且 $|A + A| = 3|A| - 2$, 则 A 是一长度为 $2|A| + 1$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + 1$ 。

Freiman 逆问题 -2

定理 (Freiman)

1. 如果 $|A| > 3$ 且 $|A + A| = 2|A| - 1 + b$, 这里 $0 \leq b < |A| - 2$, 则 A 一定是一长度为 $|A| + b$ 的等差数列的子集;
2. 如果 $|A| > 6$ 且 $|A + A| = 3|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并;
3. 如果 $|A| > 10$ 且 $|A + A| = 3|A| - 2$, 则 A 是一长度为 $2|A| + 1$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + 1$ 。

参考文献: G. A. Freiman, **Foundations of a structural theory of set addition**. Translated from the Russian. Translations of Mathematical Monographs, Vol 37. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1973

Freiman 逆问题 -3

猜测 (Freiman)

如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \frac{1}{3}|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

Freiman 逆问题 -3

猜测 (Freiman)

如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \frac{1}{3}|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

定理 (Jin)

存在 $\epsilon > 0$ 使得如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \epsilon|A|$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

Freiman 逆问题 -3

猜测 (Freiman)

如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \frac{1}{3}|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

定理 (Jin)

存在 $\epsilon > 0$ 使得如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \epsilon|A|$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

参考文献: R. Jin, *Freiman's inverse problem with small doubling property*, Advances in Mathematics, 216 (2007), No. 2, 711 – 752.

Freiman 逆问题 -3

猜测 (Freiman)

如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \frac{1}{3}|A| - 3$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

定理 (Jin)

存在 $\epsilon > 0$ 使得如果 $|A|$ 足够大且 $|A + A| = 3|A| - 3 + b$, 这里 $0 \leq b < \epsilon|A|$, 则 A 是一长度为 $2|A| - 1 + 2b$ 的等差数列的子集或者 A 是两个具有相同公差的等差数列的并的子集且这两个等差数列的总长度为 $|A| + b$ 。

参考文献: R. Jin, *Freiman's inverse problem with small doubling property*, Advances in Mathematics, 216 (2007), No. 2, 711 – 752.

问题

能否给出一个以上定理的标准证明？