非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

第四章

非标准分析和随机过程

4. 非标准分析和随机过程 –1

随机过程是个大领域，我们在此不可能作一个详尽的介绍。我们的目标是介绍 Keisler 的随机方程强解存在性定理的一个简单形式，所以只限介绍与之有关的知识。为了简单而又足够阐明主要思想，我们只考虑一维情况。

4. 非标准分析和随机过程 –1

随机过程是个大领域，我们在此不可能作一个详尽的介绍。我们的目标是介绍 Keisler 的随机方程强解存在性定理的一个简单形式，所以只限介绍与之有关的知识。为了简单而又足够阐明主要思想，我们只考虑一维情况。

设 $(\Gamma; \mathcal{F}, \lambda)$ 是一概率空间，称 $[0, 1]$ 为时间区间。一般教课书都取时间区间为 $[0, \infty)$，我们只考虑 $[0, 1]$ 区间只是为了便利。一个从 $\Gamma \times [0, 1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数可称为一个随机过程。

4. 非标准分析和随机过程 –1

随机过程是个大领域，我们在此不可能作一个详尽的介绍。我们的目标是介绍 Keisler 的随机方程强解存在性定理的一个简单形式，所以只限介绍与之有关的知识。为了简单而又足够阐明主要思想，我们只考虑一维情况。

设 $(\Gamma;\mathcal{F},\lambda)$ 是一概率空间，称 $[0,1]$ 为时间区间。一般教课书都取时间区间为 $[0,\infty)$，我们只考虑 $[0,1]$ 区间只是为了便利。一个从 $\Gamma\times[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数可称为一个随机过程。
可测函数 $x:\Gamma\to\mathbb{R}$ 常称随机变量，而 $\mathbb{E}(x)$ 则是 x 的均值或期望值，即

$$\mathbb{E}(x):=\int_\Gamma x(\gamma)d\lambda(\gamma).$$

4. 非标准分析和随机过程 –1

随机过程是个大领域，我们在此不可能作一个详尽的介绍。我们的目标是介绍 Keisler 的随机方程强解存在性定理的一个简单形式，所以只限介绍与之有关的知识。为了简单而又足够阐明主要思想，我们只考虑一维情况。

设 $(\Gamma;\mathcal{F},\lambda)$ 是一概率空间，称 $[0,1]$ 为时间区间。一般教课书都取时间区间为 $[0,\infty)$，我们只考虑 $[0,1]$ 区间只是为了便利。一个从 $\Gamma\times[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数可称为一个随机过程。

可测函数 $x:\Gamma\to\mathbb{R}$ 常称随机变量，而 $\mathbb{E}(x)$ 则是 x 的均值或期望值，即

$$\mathbb{E}(x):=\int_\Gamma x(\gamma)d\lambda(\gamma).$$

在表示一个随机变量 $x(\gamma)$ 的期望值时，概率空间中的变量 $\gamma\in\Gamma$ 常被省略。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$, $b(\gamma, 0) = 0$,

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$，$b(\gamma, 0) = 0$，
2. 对任何 $[0,1]$ 中 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k$，集合

$$\{b(\,\cdot\,, r_i) - b(\,\cdot\,, r_{i-1}) : i \in [k]\}$$

中的随机变量是相互独立的，

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$，$b(\gamma, 0) = 0$,
2. 对任何 $[0,1]$ 中 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k$，集合
$$\{b(\cdot, r_i) - b(\cdot, r_{i-1}) : i \in [k]\}$$
中的随机变量是相互独立的,
3. 对任何 $[0,1]$ 中 $r < r'$，随机变量 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 的概率分布是均值为 0 方差为 $r' - r$ 的正态分布,

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$, $b(\gamma, 0) = 0$,
2. 对任何 $[0,1]$ 中 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k$, 集合
$$\{b(\,\cdot\,, r_i) - b(\,\cdot\,, r_{i-1}) : i \in [k]\}$$
中的随机变量是相互独立的,
3. 对任何 $[0,1]$ 中 $r < r'$, 随机变量 $b(\,\cdot\,, r') - b(\,\cdot\,, r)$ 的概率分布是均值为 0 方差为 $r' - r$ 的正态分布,
4. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$, 路径 $b(\gamma, \cdot\,) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续的。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –1

定义 (4.1)

称随机过程 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 为 (标准) 布朗运动如果

1. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$，$b(\gamma, 0) = 0$，
2. 对任何 $[0,1]$ 中 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k$，集合
$$\{b(\cdot, r_i) - b(\cdot, r_{i-1}) : i \in [k]\}$$
中的随机变量是相互独立的，
3. 对任何 $[0,1]$ 中 $r < r'$，随机变量 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 的概率分布是均值为 0 方差为 $r' - r$ 的正态分布，
4. 对 λ-几乎处处 $\gamma \in \Gamma$，路径 $b(\gamma, \cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 是连续的。

用极限方法可构造布朗运动的一个表示，称之为 Wiener 过程。

$$\text{记} \quad \Phi_\sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –2

定义 (4.2)

设 $C([0,1])$ 为所有从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f 满足 $f(0)=0$。给定任意 $r_0=0<r_1<\ldots<r_k\leq 1$，任意勒贝格可测集 $A_1,A_2,\ldots,A_k$。令

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –2

定义 (4.2)

设 $C([0,1])$ 为所有从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f 满足 $f(0)=0$。给定任意 $r_0=0<r_1<\ldots<r_k\leq 1$，任意勒贝格可测集 $A_1,A_2,\ldots,A_k$。令

$$
\begin{aligned}
&C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k):\\
&\quad=\{f\in C([0,1]):\forall i\in[k]\,(f(r_i)\in A_i)\}.
\end{aligned}
$$

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –2

定义 (4.2)

设 $C([0,1])$ 为所有从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f 满足 $f(0)=0$。给定任意 $r_0=0<r_1<\ldots<r_k\leq 1$，任意勒贝格可测集 $A_1,A_2,\ldots,A_k$。令

$$
\begin{aligned}
&C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k):\\
&\quad=\{f\in C([0,1]):\forall i\in[k]\,(f(r_i)\in A_i)\}.
\end{aligned}
$$

令 $\mathcal{W}$ 为所有集合 $C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k)$ 生成的 σ-代数。Wiener 测度是一可数可加的测度 $\nu:\mathcal{W}\to[0,1]$ 使得

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –2

定义 (4.2)

设 $C([0,1])$ 为所有从 $[0,1]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数 f 满足 $f(0)=0$。给定任意 $r_0=0<r_1<\ldots<r_k\leq 1$，任意勒贝格可测集 $A_1,A_2,\ldots,A_k$。令

$$
\begin{aligned}
&C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k):\\
&\quad=\{f\in C([0,1]):\forall i\in[k]\,(f(r_i)\in A_i)\}.
\end{aligned}
$$

令 $\mathcal{W}$ 为所有集合 $C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k)$ 生成的 σ-代数。Wiener 测度是一可数可加的测度 $\nu:\mathcal{W}\to[0,1]$ 使得

$$
\nu(C(r_1,r_2,\ldots,r_k,A_1,A_2,\ldots,A_k))=\prod_{i=1}^{k}\int_{A_i}\Phi_{r_i-r_{i-1}}(x)dx.
$$

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –3

不难验证如果 $(\Gamma; \mathcal{F}, \lambda) := (C([0,1]); \mathcal{W}, \nu)$ 并且 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得 $b(f, r) := f(r)$ 则 b 是一布朗运动。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –3

不难验证如果 $(\Gamma;\mathcal{F},\lambda) := (C([0,1]);\mathcal{W},\nu)$ 并且 $b:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 $b(f,r) := f(r)$ 则 b 是一布朗运动。

设 b 是布朗运动，$g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。考虑以下随机积分方程

$$x(\gamma,r) = \int_0^r g(s,x(\gamma,s))\,db(\gamma,s).$$

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –3

不难验证如果 $(\Gamma;\mathcal{F},\lambda) := (C([0,1]);\mathcal{W},\nu)$ 并且 $b:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 $b(f,r) := f(r)$ 则 b 是一布朗运动。

设 b 是布朗运动，$g:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$。考虑以下随机积分方程

$$x(\gamma,r) = \int_0^r g(s,x(\gamma,s))db(\gamma,s).$$

定理 (4.3 Skorokhod)

如果 $g(r,x)$ 有界，勒贝格可测，且关于 x 连续，则存在概率空间 Γ，Γ 上的布朗运动 b，和随机过程 $x:\Gamma\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得 x 是以上方程的解。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –3

不难验证如果 $(\Gamma; \mathcal{F}, \lambda) := (C([0,1]); \mathcal{W}, \nu)$ 并且 $b : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得 $b(f, r) := f(r)$ 则 b 是一布朗运动。

设 b 是布朗运动，$g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$。考虑以下随机积分方程

$$x(\gamma, r) = \int_0^r g(s, x(\gamma, s))\, db(\gamma, s).$$

定理 (4.3 Skorokhod)

如果 $g(r, x)$ 有界，勒贝格可测，且关于 x 连续，则存在概率空间 Γ，Γ 上的布朗运动 b，和随机过程 $x : \Gamma \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得 x 是以上方程的解。

以上定理中，概率空间 Γ 和布朗运动 b 依赖于函数 g。因此所得解称为弱解。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –4

定理 (4.4 Barlow)

存在有界，勒贝格可测，且关于 x 连续的函数 $g(r,x)$，使得如果布朗运动 b 是 *Wiener* 过程，则方程的解 x 和 b 不可能在同一个空间上。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –4

定理 (4.4 Barlow)

存在有界，勒贝格可测，且关于 x 连续的函数 $g(r,x)$，使得如果布朗运动 b 是 *Wiener* 过程，则方程的解 x 和 b 不可能在同一个空间上。

用非标准分析方法我们将证明以下强解存在性定理。此定理是 Keisler 一系列定理中最简单的一个的简化。对更广泛的随机方程的强解存在性定理有很多更强更广泛的形式，有兴趣的读者可阅读所列 Keisler 的著作和文章。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –4

定理 (4.4 Barlow)

存在有界，勒贝格可测，且关于 x 连续的函数 $g(r,x)$，使得如果布朗运动 b 是 *Wiener* 过程，则方程的解 x 和 b 不可能在同一个空间上。

用非标准分析方法我们将证明以下强解存在性定理。此定理是 Keisler 一系列定理中最简单的一个的简化。对更广泛的随机方程的强解存在性定理有很多更强更广泛的形式，有兴趣的读者可阅读所列 Keisler 的著作和文章。

定理 (4.5 Keisler)

设 Ω 是一超有限均匀分布 *Loeb* 概率空间，b 是 $\Omega \times [0,1]$ 上的布朗运动，$g(r,x):[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数并关于 x 连续。则存在一随机过程 $x:\Omega\times[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足以上方程。

4.1 随机积分方程的弱解和强解 –4

定理 (4.4 Barlow)

存在有界，勒贝格可测，且关于 x 连续的函数 $g(r,x)$，使得如果布朗运动 b 是 *Wiener* 过程，则方程的解 x 和 b 不可能在同一个空间上。

用非标准分析方法我们将证明以下强解存在性定理。此定理是 Keisler 一系列定理中最简单的一个的简化。对更广泛的随机方程的强解存在性定理有很多更强更广泛的形式，有兴趣的读者可阅读所列 Keisler 的著作和文章。

定理 (4.5 Keisler)

设 Ω 是一超有限均匀分布 *Loeb* 概率空间，b 是 $\Omega \times [0,1]$ 上的布朗运动，$g(r,x) : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数并关于 x 连续。则存在一随机过程 $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 满足以上方程。

因为在以上定理中空间 Ω 不依赖函数 g，所以方程的解称为强解。

4.2 Anderson 随机游走 –1

为了证明 Keisler 定理我们先构造 Loeb 空间上的布朗运动，然后解释关于对布朗运动的随机积分。我们首先在非标准模型中构造 Anderson 随机游走，然后用把 Anderson 标准化得到布朗运动。

4.2 Anderson 随机游走 –1

为了证明 Keisler 定理我们先构造 Loeb 空间上的布朗运动，然后解释关于对布朗运动的随机积分。我们首先在非标准模型中构造 Anderson 随机游走，然后用把 Anderson 标准化得到布朗运动。

定义 (4.6)

取定一超整数 $K = 2^{K'}$。称超有限集 $T := \{i/K : i = 0, 1, \ldots, K-1\}$ 为 (超有限离散) **时间轴**。我们有时把集合 $\{t_i, t_{i+1} \ldots, t_j\}$ 记为 $[t_i, t_j]$ 或 $[t_i, t_{j+1})$。

4.2 Anderson 随机游走 –1

为了证明 Keisler 定理我们先构造 Loeb 空间上的布朗运动，然后解释关于对布朗运动的随机积分。我们首先在非标准模型中构造 Anderson 随机游走，然后用把 Anderson 标准化得到布朗运动。

定义 (4.6)

取定一超整数 $K = 2^{K'}$。称超有限集 $T := \{i/K : i = 0, 1, \ldots, K-1\}$ 为 (超有限离散) **时间轴**。我们有时把集合 $\{t_i, t_{i+1} \ldots, t_j\}$ 记为 $[t_i, t_j]$ 或 $[t_i, t_{j+1})$。记

$$\Omega := \left\{\omega \in {}^*V : \omega \in \{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\}^T\right\}$$

为样本空间。

4.2 Anderson 随机游走 –1

为了证明 Keisler 定理我们先构造 Loeb 空间上的布朗运动，然后解释关于对布朗运动的随机积分。我们首先在非标准模型中构造 Anderson 随机游走，然后用把 Anderson 标准化得到布朗运动。

定义 (4.6)

取定一超整数 $K = 2^{K'}$。称超有限集 $T := \{i/K : i = 0, 1, \ldots, K-1\}$ 为 (超有限离散) **时间轴**。我们有时把集合 $\{t_i, t_{i+1} \ldots, t_j\}$ 记为 $[t_i, t_j]$ 或 $[t_i, t_{j+1})$。记

$$\Omega := \left\{\omega \in {}^*V : \omega \in \{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\}^T\right\}$$

为样本空间。因为 T 是超有限的，所以 Ω 也是超有限的且 $|\Omega| = 2^K$。样本空间 Ω 中的元素称为**路径**。传统上 Ω 的元素常用 ω 来表示，所以在此节 ω 不再是用在第一节超幂构造中的自然数集，而是一条路径。

4.2 Anderson 随机游走 –2

定义 (4.7)

设 $(\Omega;\Sigma_0,\mu_0)$ 是定义 3.8 和命题 3.9 中定义的 Ω 上的内测度空间。则对每个 $\omega\in\Omega$ 有 $\mu_0(\{\omega\})=1/2^K$。对每个 $\omega,\omega'\in\Omega$ 和 $t\in T$，定义 $\omega\sim_t\omega'$ 如果 $\omega\upharpoonright[0,t)=\omega'\upharpoonright[0,t)$。记 $[\omega]_t:=\{\omega'\in\Omega:\omega'\sim_t\omega\}$。对每个 $t\in T$，设 $\mathcal{F}_t$ 是 Ω 上的内代数使得 Ω 的内子集 $A\in\mathcal{F}_t$ 当且仅当 A 是一些 $[\omega]_t$ 形式的集合的并。显然 $(\Omega;\mathcal{F}_t,\mu_0)$ 是一内概率空间，且对任何 T 中 $s<t$，有 $\mathcal{F}_s\subseteq\mathcal{F}_t$。称内代数序列

$$\{\mathcal{F}_t:t\in T\}$$

为一内过滤系统 (internal filtration)。

4.2 Anderson 随机游走 –3

定义 (4.8)

对每个 $t \in T$ 记 $X_t : \Omega \to \left\{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\right\}$ 为 Ω 上的内二值随机变量使得 $X_t(\omega) = \omega(t)$。因为在每个 $[\omega]_t$ 中满足 $\omega'(t) > 0$ 的路径 ω' 和满足 $\omega'(t_k) < 0$ 的路径 ω' 个数一样多，所以 X_t 是正还是负的概率各为 0.5。

4.2 Anderson 随机游走 –3

定义 (4.8)

对每个 $t \in T$ 记 $X_t : \Omega \to \left\{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\right\}$ 为 Ω 上的内二值随机变量使得 $X_t(\omega) = \omega(t)$。因为在每个 $[\omega]_t$ 中满足 $\omega'(t) > 0$ 的路径 ω' 和满足 $\omega'(t_k) < 0$ 的路径 ω' 个数一样多，所以 X_t 是正还是负的概率各为 0.5。

命题 (4.9)

在以上定义中每个 X_t 的内均值为 0，内方差为 Δt，如果 $I \subseteq T$ 是内集，则 $\{X_t : t \in I\}$ 中的随机变量是 * 相互独立的。

4.2 Anderson 随机游走 –3

定义 (4.8)

对每个 $t \in T$ 记 $X_t : \Omega \to \left\{-\sqrt{\Delta t}, \sqrt{\Delta t}\right\}$ 为 Ω 上的内二值随机变量使得 $X_t(\omega) = \omega(t)$。因为在每个 $[\omega]_t$ 中满足 $\omega'(t) > 0$ 的路径 ω' 和满足 $\omega'(t_k) < 0$ 的路径 ω' 个数一样多，所以 X_t 是正还是负的概率各为 0.5。

命题 (4.9)

在以上定义中每个 X_t 的内均值为 0，内方差为 Δt，如果 $I \subseteq T$ 是内集，则 $\{X_t : t \in I\}$ 中的随机变量是 * 相互独立的。

定义 (4.10)

设一内随机过程 $B : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 **Anderson 随机游走**如果

$$B(\omega, t) := 0 + \sum_{s<t} \omega(s).$$

显然 $B(\cdot\,, t) = 0 + \sum_{s<t} X_s$.

4.2 Anderson 随机游走 –4

如果 $t = t_k \in T$，则 Anderson 随机游走 $B(\omega, t)$ 是沿着路径 ω 走了 $k-1$ 部的结果。每一步的步长是 $\sqrt{\Delta t}$，而朝上还是朝下是由 $\omega(s)$ 是正还是负来决定。

4.2 Anderson 随机游走 –4

如果 $t = t_k \in T$，则 Anderson 随机游走 $B(\omega, t)$ 是沿着路径 ω 走了 $k-1$ 部的结果。每一步的步长是 $\sqrt{\Delta t}$，而朝上还是朝下是由 $\omega(s)$ 是正还是负来决定。

定义 (4.11)

一个内函数 $G : T \to {}^*\mathbb{R}$ 称为 S-**连续**的如果对任意 $s, t \in T$，有 $s \approx t$ 推出 $G(s) \approx G(t)$。

4.2 Anderson 随机游走 –4

如果 $t = t_k \in T$，则 Anderson 随机游走 $B(\omega, t)$ 是沿着路径 ω 走了 $k-1$ 部的结果。每一步的步长是 $\sqrt{\Delta t}$，而朝上还是朝下是由 $\omega(s)$ 是正还是负来决定。

定义 (4.11)

一个内函数 $G : T \to {}^*\mathbb{R}$ 称为 S-连续的如果对任意 $s, t \in T$, 有 $s \approx t$ 推出 $G(s) \approx G(t)$。

定理 (4.12 Anderson)

设 B 是 *Anderson* 随机游走。对每一个 $r \in [0,1]$，记 $r^- = \max\{t \in T : t < r\}$ 且设

$$b(\omega, r) := \begin{cases} \infty & \text{如果} B(\omega, r^-) \text{ 是正无穷大} \\ st\left(B(\omega, r^-)\right) & \text{如果} B(\omega, r^-) \text{ 有限的} \\ -\infty & \text{如果} B(\omega, r^-) \text{ 是负无穷大} \end{cases}.$$

则 b 是 $\Omega \times [0,1]$ 上的布朗运动。

4.2 Anderson 随机游走 –5

证明：我们一一验证定义 4.1 中的条件。条件 1. 是显然的。

4.2 Anderson 随机游走 –5

证明：我们一一验证定义 4.1 中的条件。条件 1. 是显然的。

验证条件 2. 给定标准实数 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \le 1$。则 $\{B(\cdot, r_i^-) - B(\cdot, r_{i-1}^-) : i \in [k]\}$ 中随机变量是 * 相互独立的。设 $E_1, E_2, \ldots, E_k$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限开区间，令

$$C_i := \{\omega \in \Omega : b(\omega, r_i) - b(\omega, r_{i-1}) \in E_i\}.$$

我们只需证明 $\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu_L(C_i)$。

4.2 Anderson 随机游走 –5

证明：我们一一验证定义 4.1 中的条件。条件 1. 是显然的。

验证条件 2. 给定标准实数 $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq 1$。则 $\{B(\cdot, r_i^-) - B(\cdot, r_{i-1}^-) : i \in [k]\}$ 中随机变量是 * 相互独立的。设 $E_1, E_2, \ldots, E_k$ 是 $\mathbb{R}$ 的有限开区间，令

$$C_i := \{\omega \in \Omega : b(\omega, r_i) - b(\omega, r_{i-1}) \in E_i\}.$$

我们只需证明 $\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) = \prod_{i=1}^{k} \mu_L(C_i)$。

设 $[a, b]$ 包含了所有 E_i。对每个 $i \in [k]$，定义 $^*[a, b]$ 上的内测度 P_i 使得对任一内集 $A \subseteq {}^*[a, b]$ 都有 $P_i(A) := \mu_0(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in A\})$。由习题 3.19，我们可找到内集 $F_i \subseteq {}^*[a, b]$ 使得 $P_{i,L}(F_i \Delta st^{-1}(E_i)) = 0$，这里 $P_{i,L}$ 是由 P_i 生成的 Loeb 测度。现在可推出

4.2 Anderson 随机游走 –6

$$\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) \approx \mu_0\left(\left\{\omega\in\Omega : \bigwedge_{i=1}^{k}\big(B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\big)\right\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\}\right) \approx \prod_{i=1}^{k} C_i.$$

4.2 Anderson 随机游走 –6

$$\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^k C_i\right) \approx \mu_0\left(\left\{\omega\in\Omega : \bigwedge_{i=1}^k \left(B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\right)\right\}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^k \mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega, r_i^-) - B(\omega, r_{i-1}^-) \in F_i\}\right) \approx \prod_{i=1}^k C_i.$$

验证条件 3. 设 $t_1 < t_2 < \cdots$ 在 T 中，X_{t_i} 在定义 4.8 中定义。随机变量 $X_{t_i}/\sqrt{\Delta t}$ 的均值为 0，方差为 1。

4.2 Anderson 随机游走 –6

$$\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) \approx \mu_0\left(\left\{\omega\in\Omega : \bigwedge_{i=1}^{k}\left(B(\omega,r_i^-) - B(\omega,r_{i-1}^-)\in F_i\right)\right\}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{k}\mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega,r_i^-) - B(\omega,r_{i-1}^-)\in F_i\}\right) \approx \prod_{i=1}^{k} C_i.$$

验证条件 3. 设 $t_1 < t_2 < \cdots$ 在 T 中，X_{t_i} 在定义 4.8 中定义。随机变量 $X_{t_i}/\sqrt{\Delta t}$ 的均值为 0，方差为 1。由中心极限定理我们有

$$\lim_{k\to\infty}\mu_L\left(\left\{\omega\in\Omega : \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}}\sum_{i=1}^{k} X_{t_i} < \alpha\right\}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha}\Phi_1(x)dx.$$

4.2 Anderson 随机游走 –6

$$\mu_L\left(\bigcap_{i=1}^{k} C_i\right) \approx \mu_0\left(\left\{\omega\in\Omega : \bigwedge_{i=1}^{k}\left(B(\omega,r_i^-)-B(\omega,r_{i-1}^-)\in F_i\right)\right\}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{k}\mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega,r_i^-)-B(\omega,r_{i-1}^-)\in F_i\}\right)\approx\prod_{i=1}^{k}C_i.$$

验证条件 3. 设 $t_1 < t_2 < \cdots$ 在 T 中，X_{t_i} 在定义 4.8 中定义。随机变量 $X_{t_i}/\sqrt{\Delta t}$ 的均值为 0，方差为 1。由中心极限定理我们有

$$\lim_{k\to\infty}\mu_L\left(\left\{\omega\in\Omega : \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}}\sum_{i=1}^{k}X_{t_i}<\alpha\right\}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha}\Phi_1(x)dx.$$

如果 k 是一超整数，则有

$$\mu_0\left(\left\{\omega\in\Omega : \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}}\sum_{i=1}^{k}X_{t_i}<\alpha\right\}\right)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha}\Phi_1(x)dx.$$

4.2 Anderson 随机游走 –7

令 $r'^{-} = r^{-} + k\Delta t$，则 k 是超有限的。因为

$$B(\cdot, r'^{-}) - B(\cdot, r^{-}) = \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} = (r'^{-} - r^{-}) \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}} \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t}$$ 而且

$$\begin{aligned}
&\mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^{-}) - B(\Omega, r^{-}) < \alpha - \epsilon\}\right) \\
&\lessapprox \mu_L\left(\{\omega \in \Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right) \\
&\lessapprox \mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^{-}) - B(\Omega, r^{-}) < \alpha + \epsilon\}\right),
\end{aligned}$$

4.2 Anderson 随机游走 –7

令 $r'^{-} = r^{-} + k\Delta t$，则 k 是超有限的。因为

$$B(\cdot, r'^{-}) - B(\cdot, r^{-}) = \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} = (r'^{-} - r^{-}) \frac{1}{\sqrt{k\Delta t}} \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t}$$ 而且

$$\begin{aligned}
&\mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^{-}) - B(\Omega, r^{-}) < \alpha - \epsilon\}\right) \\
&\quad \lessapprox \mu_L\left(\{\omega \in \Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right) \\
&\quad \lessapprox \mu_0\left(\{\omega \in \Omega : B(\omega, r'^{-}) - B(\Omega, r^{-}) < \alpha + \epsilon\}\right),
\end{aligned}$$

所以由 ϵ 的任意性，

$$\begin{aligned}
&\mu_L\left(\{\omega \in \Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha/(r'-r)} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r'-r)}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/(r'-r)} du.
\end{aligned}$$

4.2 Anderson 随机游走 –7

令 $r'^- = r^- + k\Delta t$，则 k 是超有限的。因为

$$B(\cdot, r'^-) - B(\cdot, r^-) = \sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} = (r'^- - r^-)\frac{1}{\sqrt{k\Delta t}}\sum_{i=0}^{k-1} X_{r+i\Delta t} \text{ 而且}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega, r'^-) - B(\Omega, r^-) < \alpha - \epsilon\}\right) \\
&\quad \lessapprox \mu_L\left(\{\omega\in\Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right) \\
&\quad \lessapprox \mu_0\left(\{\omega\in\Omega : B(\omega, r'^-) - B(\Omega, r^-) < \alpha + \epsilon\}\right),
\end{aligned}$$

所以由 ϵ 的任意性，

$$\begin{aligned}
&\mu_L\left(\{\omega\in\Omega : b(\omega, r') - b(\omega, r) < \alpha\}\right) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\alpha/(r'-r)} e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(r'-r)}}\int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/(r'-r)}du.
\end{aligned}$$

这证明了 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 有正态分布且均值为 0，方差为 $r' - r$。

4.2 Anderson 随机游走 –8

验证条件 4. **取定** $m, n \in \mathbb{N}$，$i = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$，**令** $\Omega_{m,n,i} :=$

$$\left\{\omega \in \Omega : \exists t \in T \cap \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right] \left(\left|B(\omega, t) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right)\right|^4 > \frac{1}{n}\right)\right\},$$

4.2 Anderson 随机游走 –8

验证条件 4. **取定** $m, n \in \mathbb{N}$，$i = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$，令 $\Omega_{m,n,i} :=$

$$\left\{ \omega \in \Omega : \exists t \in T \cap \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m} \right] \left(\left| B(\omega, t) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right) \right|^4 > \frac{1}{n} \right) \right\},$$

$$\Omega'_{m,n,i} := \left\{ \omega \in \Omega : \left| B\left(\omega, \frac{i+1}{2^m}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right) \right|^4 > \frac{1}{n} \right\}.$$

4.2 Anderson 随机游走 –8

验证条件 4. 取定 $m, n \in \mathbb{N}$，$i = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$，令 $\Omega_{m,n,i} :=$

$$\left\{\omega \in \Omega : \exists t \in T \cap \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right] \left(\left|B(\omega, t) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right)\right|^4 > \frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$\Omega'_{m,n,i} := \left\{\omega \in \Omega : \left|B\left(\omega, \frac{i+1}{2^m}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right)\right|^4 > \frac{1}{n}\right\}.$$

注意，因为 $K = 2^{K'}$，所有 $i/2^m$ 都在 T 中。集合 $\Omega_{m,n,i}, \Omega'_{m,n,i}$ 是内集，所以 Loeb 可测。如果 $t < (i+1)/2^m$ 且 $B(\omega, t) - B(\omega, i/2^m) > 1/\sqrt[4]{n}$，则由对称性，至少有一半 $\omega' \in [\omega]_t$ 使得 $B(\omega', (i+1)/2^m) \geq B(\omega, t)$。所以对这些 ω' 仍有

$$\left|B\left(\omega', \frac{i+1}{2^m}\right) - B\left(\omega', \frac{i}{2^m}\right)\right| > 1/\sqrt[4]{n}.$$

4.2 Anderson 随机游走 –9

同样如果 $B(\omega, t) - B(\omega, i/2^m) < -1/\sqrt[4]{n}$，则由对称性，至少有一半 $\omega' \in [\omega]_t$ 使得 $B(\omega', (i+1)/2^m) \leq B(\omega, t)$。因此我们有 $\mu_0(\Omega_{m,n,i}) \leq 2\mu_0(\Omega'_{m,n,i})$。

4.2 Anderson 随机游走 –9

同样如果 $B(\omega,t)-B(\omega,i/2^m)<-1/\sqrt[4]{n}$，则由对称性，至少有一半 $\omega'\in[\omega]_t$ 使得 $B(\omega',(i+1)/2^m)\le B(\omega,t)$。因此我们有 $\mu_0(\Omega_{m,n,i})\le 2\mu_0(\Omega'_{m,n,i})$。

如果 $t\in T$，则

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(B(t)^4) &= \sum_{s<t}\mathbb{E}(B(s+\Delta t)^4-B(s)^4)\\
&= \sum_{s<t}\mathbb{E}(B(s)+X_s)^4-B(s)^4)\\
&= \sum_{s<t}\mathbb{E}(4B(s)^3X_s+6B(s)^2X_s^2+4B(s)X_s^3)\\
&= \sum_{s<t}(\mathbb{E}(4B(s)^3X_s)+\mathbb{E}(6B(s)^2\Delta t)+\mathbb{E}(4B(s)X_s^3))\\
&= \sum_{s<t}\mathbb{E}(6B(s)^2\Delta t)=6\Delta t\sum_{s<t}s\le 6\Delta t\frac{t}{\Delta t}t=6t^2.
\end{aligned}
$$

4.2 Anderson 随机游走 –10

以上我们用到了一的事实，即 $B(s)$ 和 X_s 是相互独立的，所以 $\mathbb{E}(4B(s)^3X_s) = 0$ 和 $\mathbb{E}(4B(s)X_s^3) = 0$。同样我们也有 $\mathbb{E}((B(t) - B(s))^4) \leq 6(t-s)^2$。

4.2 Anderson 随机游走 –10

以上我们用到了一的事实，即 $B(s)$ 和 X_s 是相互独立的，所以 $\mathbb{E}(4B(s)^3X_s) = 0$ 和 $\mathbb{E}(4B(s)X_s^3) = 0$。同样我们也有 $\mathbb{E}((B(t) - B(s))^4) \le 6(t-s)^2$。因此

$$\mu_L\left(\bigcup_{i=0}^{2^m-1}\Omega_{m,n,i}\right) \le \sum_{i=0}^{2^m-1}\mu_L(\Omega_{m,n,i}) \le 2\sum_{i=0}^{2^m-1}\mu_L(\Omega'_{m,n,i})$$

$$\le 2\sum_{i=0}^{2^m-1}\frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\left(B\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - B\left(\frac{i}{2^m}\right)\right)^4\right) \le \frac{12\cdot 2^m}{n\cdot 2^{2m}} = \frac{12}{n\cdot 2^m}.$$

4.2 Anderson 随机游走 –10

以上我们用到了一的事实，即 $B(s)$ 和 X_s 是相互独立的，所以 $\mathbb{E}(4B(s)^3X_s) = 0$ 和 $\mathbb{E}(4B(s)X_s^3) = 0$。同样我们也有 $\mathbb{E}((B(t) - B(s))^4) \leq 6(t-s)^2$。因此

$$\mu_L\left(\bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}\right) \leq \sum_{i=0}^{2^m-1} \mu_L(\Omega_{m,n,i}) \leq 2\sum_{i=0}^{2^m-1} \mu_L(\Omega'_{m,n,i})$$

$$\leq 2\sum_{i=0}^{2^m-1} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\left(B\left(\frac{i+1}{2^m}\right) - B\left(\frac{i}{2^m}\right)\right)^4\right) \leq \frac{12 \cdot 2^m}{n \cdot 2^{2m}} = \frac{12}{n \cdot 2^m}.$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$，我们有 $\mu_L\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}\right) = 0$。所以 $\mu_L\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}\right) = 0$。

4.2 Anderson 随机游走 –11

现在证明对每一个 $\omega \in \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}$，函数 $b(\omega,\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

现在证明对每一个 $\omega \in \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}$，函数 $b(\omega,\cdot)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

任给标准实数 $\epsilon > 0$，取 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $3/\sqrt[4]{n} < \epsilon$。则 $\omega \notin \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}$。所以存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\omega \notin \bigcup_{i=0}^{2^m-1} \Omega_{m,n,i}$，而这意味着对所有 $i = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$，对所有 $t \in T \cap \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right]$ 都有 $\left| B(\omega,t) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$。任给 $[0,1]$ 中标准实数 $r < r'$ 使得 $|r' - r| < 1/2^m$，设 $r^- \in T \cap \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right)$ 和 $r'^- \in T \cap \left[\frac{i'}{2^m}, \frac{i'+1}{2^m}\right)$，则 $i = i'$ 或 $i' = i + 1$。所以

4.2 Anderson 随机游走 –12

$$
\begin{aligned}
&\left|B\left(\omega, r'^{-}\right) - B\left(\omega, r^{-}\right)\right| \\
&\quad \le \left|B\left(\omega, r'^{-}\right) - B\left(\omega, \frac{i'}{2^m}\right)\right| \\
&\qquad + \left|B\left(\omega, \frac{i'}{2^m}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right)\right| \\
&\qquad + \left|B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right) - B\left(\omega, r^{-}\right)\right| \\
&\quad \le \frac{3}{\sqrt[4]{n}} < \epsilon.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left|B\left(\omega, r'^{-}\right) - B\left(\omega, r^{-}\right)\right| \\
&\leq \left|B\left(\omega, r'^{-}\right) - B\left(\omega, \frac{i'}{2^m}\right)\right| \\
&\quad + \left|B\left(\omega, \frac{i'}{2^m}\right) - B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right)\right| \\
&\quad + \left|B\left(\omega, \frac{i}{2^m}\right) - B\left(\omega, r^{-}\right)\right| \\
&\leq \frac{3}{\sqrt[4]{n}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

因此 $|b(\omega, r') - b(\omega, r)| \leq \epsilon$。所以 $b(\omega, r)$ 在 $[0, 1]$ 上连续。证毕。 $\square$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –1

为了证明定理 Keisler 定理我们首先需解释关于布朗运动的随机积分定义。设 $x, y : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 是两个标准随机过程，在标准意义下 $\int_0^r x(\omega, s) dy(\omega, s)$ 一般不能被看作为对每条固定路径 ω 的关于变量 s 的 Stieltjes 积分。这是因为在 Stieltjes 积分的定义中通常要求函数 $y(\omega, s)$ 关于 s 是有界变差的，而对于几乎所有路径 ω，布朗运动 $b(\omega, s)$ 关于 s 不是有界变差的。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –1

为了证明定理 Keisler 定理我们首先需解释关于布朗运动的随机积分定义。设 $x, y : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 是两个标准随机过程，在标准意义下 $\int_0^r x(\omega, s) dy(\omega, s)$ 一般不能被看作为对每条固定路径 ω 的关于变量 s 的 Stieltjes 积分。这是因为在 Stieltjes 积分的定义中通常要求函数 $y(\omega, s)$ 关于 s 是有界变差的，而对于几乎所有路径 ω，布朗运动 $b(\omega, s)$ 关于 s 不是有界变差的。

定义 (4.13)

设 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 是在定义 4.7 中的内过滤系统。称 $(\Omega; \{\mathcal{F}_t\}, \mu_0)$ 为内适应空间 (internal adapted space)。一个内随机过程 $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是适应的如果对每个 $t \in T$，函数 $X(\cdot, t) : \Omega \to {}^*\mathbb{R}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的，即如果 $\omega', \omega'' \in [\omega]_t$，则有 $X(\omega', t) = X(\omega'', t)$。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –2

定义 (4.14)

记 $\mathcal{N}$ 为 Ω 的所有 μ_L 零测集的类。对每个标准实数 $r \in [0,1]$，令

$$\mathcal{G}_r := L\left(\bigcup\{\mathcal{F}_t : t \approx r\} \cup \mathcal{N}\right)$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –2

定义 (4.14)

记 $\mathcal{N}$ 为 Ω 的所有 μ_L 零测集的类。对每个标准实数 $r \in [0,1]$，令

$$\mathcal{G}_r := L\left(\bigcup\{\mathcal{F}_t : t \approx r\} \cup \mathcal{N}\right)$$

这里 $L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N})$ 是由有限可加代数 $\mathcal{B}$ 生成的包含了 $\mathcal{N}$ 的 σ-代数使得 $(\Omega; L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N}), \mu_L)$ 是一可数可加完备概率空间。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –2

定义 (4.14)

记 $\mathcal{N}$ 为 Ω 的所有 μ_L 零测集的类。对每个标准实数 $r \in [0,1]$，令

$$\mathcal{G}_r := L\left(\bigcup\{\mathcal{F}_t : t \approx r\} \cup \mathcal{N}\right)$$

这里 $L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N})$ 是由有限可加代数 $\mathcal{B}$ 生成的包含了 $\mathcal{N}$ 的 σ-代数使得 $(\Omega; L(\mathcal{B} \cup \mathcal{N}), \mu_L)$ 是一可数可加完备概率空间。称 $\{\mathcal{G}_r : r \in [0,1]\}$ 为 **(标准) 过滤系统**，并称 $(\Omega; \{\mathcal{G}_r : r \in [0,1]\}, \mu_L)$ 为 (标准) 适应空间。称 $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 是一个 Ω 上的适应随机过程如果 x 是 $\Omega \times [0,1]$ 上的 $\mu_L \times \lambda$ 可测函数且对每个 $r \in [0,1]$，函数 $x(\cdot, r) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{G}_r$ 可测的。这里 λ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格测度。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –3

定义 (4.15)

一个 Ω 上随机过程 x 称为**阶跃过程**如果存在 $r_0 = 0 < r_1 < \cdots < r_k = 1$ 使得对所有 $s \in [r_i, r_{i+1})$ 满足 $x(\omega, s) = x(\omega, r_i)$ 且 $x(\cdot, r_i) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是有界且是 $\mathcal{G}_{r_i}$ 可测。显然 x 是适应随机过程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –3

定义 (4.15)

一个 Ω 上随机过程 x 称为**阶跃过程**如果存在 $r_0 = 0 < r_1 < \cdots < r_k = 1$ 使得对所有 $s \in [r_i, r_{i+1})$ 满足 $x(\omega, s) = x(\omega, r_i)$ 且 $x(\cdot, r_i) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是有界且是 $\mathcal{G}_{r_i}$ 可测。显然 x 是适应随机过程。

设 b 是在定理 4.12 中由 Anderson 随机游走生成的布朗运动。对于以上定义的阶跃过程 x，记

$$\int_0^1 x(\omega, s) db(\omega, s) := \sum_{i=0}^{k} x(\omega, r_i)\big(b(\omega, r_{i+1}) - b(\omega, r_i)\big).$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –3

定义 (4.15)

一个 Ω 上随机过程 x 称为**阶跃过程**如果存在 $r_0 = 0 < r_1 < \cdots < r_k = 1$ 使得对所有 $s \in [r_i, r_{i+1})$ 满足 $x(\omega, s) = x(\omega, r_i)$ 且 $x(\cdot, r_i) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是有界且是 $\mathcal{G}_{r_i}$ 可测。显然 x 是适应随机过程。

设 b 是在定理 4.12 中由 Anderson 随机游走生成的布朗运动。对于以上定义的阶跃过程 x，记

$$\int_0^1 x(\omega, s)db(\omega, s) := \sum_{i=0}^{k} x(\omega, r_i)\big(b(\omega, r_{i+1}) - b(\omega, r_i)\big).$$

如果 $r \in [0, 1]$ 则

$$\int_0^r x(\omega, s)db(\omega, s) := \int_0^1 \mathbf{1}_{\Omega\times[0,r)}(\omega, s)x(\omega, s)db(\omega, s),$$

这里 $\mathbf{1}_{\Omega\times[0,r)}(\omega, s)$ 是 $\Omega \times [0, r)$ 的特征函数。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –4

如果 x 是一个阶跃过程，则 $\int_0^r x(\omega, s)\,db(\omega, s)$ 又是一个随机过程且当 $r = 1$ 时它的平方期望值

4.3 Keisler 强解存在性定理 –4

如果 x 是一个阶跃过程，则 $\int_0^r x(\omega,s)db(\omega,s)$ 又是一个随机过程且当 $r=1$ 时它的平方期望值

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 x(s)db(s)\right)^2\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x(r_i)(b(r_{i+1})-b(r_i))\right)^2\right)$$

$$=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(b(r_{i+1})-b(r_i))^2\right.$$

$$\left.+2\sum_{i<j} x(r_i)x(r_j)(b(r_{i+1})-b(r_i))(b(r_{j+1})-b(r_j))\right)$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –4

如果 x 是一个阶跃过程，则 $\int_0^r x(\omega, s)db(\omega, s)$ 又是一个随机过程且当 $r = 1$ 时它的平方期望值

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^1 x(s)db(s)\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=0}^{k} x(r_i)(b(r_{i+1}) - b(r_i))\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(b(r_{i+1}) - b(r_i))^2\right.$$

$$\left.+2\sum_{i<j} x(r_i)x(r_j)(b(r_{i+1}) - b(r_i))(b(r_{j+1}) - b(r_j))\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right) \mathbb{E}\left((b(r_{i+1}) - b(r_i))^2\right)$$

$$+2\sum_{i<j} \mathbb{E}(x(r_i)x(r_j)(b(r_{i+1}) - b(r_i)))\mathbb{E}(b(r_{j+1}) - b(r_j))$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –5

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right)(r_{i+1} - r_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(r_{i+1} - r_i)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^1 x^2(s)ds\right) = \int_{\Omega\times[0,1]} x^2(\omega, s)d(\mu_L \times \lambda).
\end{aligned}
$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –5

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right)(r_{i+1} - r_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(r_{i+1} - r_i)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\int_0^1 x^2(s)ds\right) = \int_{\Omega\times[0,1]} x^2(\omega, s)d(\mu_L \times \lambda).$$

按照相同思路可推出

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^r x(s)db(s)\right)^2\right) = \int_{\Omega\times[0,r)} x^2(\omega, s)d(\mu_L \times \lambda).$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –5

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E}\left(x^2(r_i)\right)(r_{i+1}-r_i) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^2(r_i)(r_{i+1}-r_i)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\int_0^1 x^2(s)ds\right) = \int_{\Omega\times[0,1]} x^2(\omega,s)d(\mu_L\times\lambda).
\end{aligned}
$$

按照相同思路可推出

$$
\mathbb{E}\left(\left(\int_0^r x(s)db(s)\right)^2\right) = \int_{\Omega\times[0,r)} x^2(\omega,s)d(\mu_L\times\lambda).
$$

因此关于布朗运动对阶跃过程的随机积分可看作是 $\Omega\times[0,1]$ 上平方可积函数空间 $L^2(\mu_L\times\lambda)$ 的元素。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –6

在以上推导过程中我们用到了 $x(\cdot, r)$ 和 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 之间的独立性，因而要求 x 必须是一适应随机过程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –6

在以上推导过程中我们用到了 $x(\cdot, r)$ 和 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 之间的独立性，因而要求 x 必须是一适应随机过程。

定义 (4.16)

称一个适应随机过程 $x : \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是 Itô 可积的如果存在阶跃随机过程序列 x_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times[0,1]} (x(\omega, s) - x_n(\omega, s))^2 d(\mu_L \times \lambda) = 0.$$

在以上推导过程中我们用到了 $x(\cdot, r)$ 和 $b(\cdot, r') - b(\cdot, r)$ 之间的独立性，因而要求 x 必须是一适应随机过程。

定义 (4.16)

称一个适应随机过程 $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 是 Itô 可积的如果存在阶跃随机过程序列 x_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times[0,1]} (x(\omega, s) - x_n(\omega, s))^2 d(\mu_L \times \lambda) = 0.$$

而随机积分

$$y(\omega, r) := \int_0^r x(\omega, s) db(\omega, s),$$

称为 **Itô 积分**，则是序列 $\int_0^r x_n(\omega, s) db(\omega, s)$ 的 L^2–极限。显然 y 也是适应随机过程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –7

随机积分的标准定义比较繁琐。而在非标出分析中定义就相对简单。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –7

随机积分的标准定义比较繁琐。而在非标出分析中定义就相对简单。

定义 (4.17)

设 B 是 Anderson 随机游走，$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 (关于 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 的) 内适应随机过程，$t \in T$。记 $\Delta B(\omega, s) := B(\omega, s + \Delta t) - B(\omega, s)$。则

$$\int_0^t X(\omega, s) dB(\omega, s) := \sum_{s<t} X(\omega, s) \Delta B(\omega, s).$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –7

随机积分的标准定义比较繁琐。而在非标出分析中定义就相对简单。

定义 (4.17)

设 B 是 Anderson 随机游走，$X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 (关于 $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ 的) 内适应随机过程，$t \in T$。记 $\Delta B(\omega, s) := B(\omega, s + \Delta t) - B(\omega, s)$。则

$$\int_0^t X(\omega, s) dB(\omega, s) := \sum_{s<t} X(\omega, s) \Delta B(\omega, s).$$

在以上定义中的和是 ${}^*\mathcal{V}$ 中有限和，所以对每一条路径 ω 此和都有意义，只不过对有些路径，和会是无穷大或无穷小使得所得结果不能拉回到标准世界中去。因此我们需要对所考虑的随机过程做一些限制。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –8

定义 (4.18)

设 ν_0 是 T 上的均匀分布内概率空间，即 $\nu_0(\{t\}) = 1/K$，ν_L 是 T 上由 ν_0 生成的 Loeb 测度。对一内函数 $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 和内集 $D \subseteq \Omega \times T$，记

$$\int_D X(\omega, t) d(\mu_0 \times \nu_0) :=$$

$$\sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega, t)\mu_0 \times \nu_0(\{(\omega, t)\}) = \sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega, t)\frac{1}{2^K K}.$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –8

定义 (4.18)

设 ν_0 是 T 上的均匀分布内概率空间，即 $\nu_0(\{t\}) = 1/K$，ν_L 是 T 上由 ν_0 生成的 Loeb 测度。对一内函数 $X : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 和内集 $D \subseteq \Omega \times T$，记

$$\int_D X(\omega, t) d(\mu_0 \times \nu_0) :=$$

$$\sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega, t)\mu_0 \times \nu_0(\{(\omega, t)\}) = \sum_{(\omega,t)\in D} X(\omega, t)\frac{1}{2^K K}.$$

称 X 是 S-可积的如果对 $\mu_L \times \nu_L$-几乎所有 $(\omega, t) \in \Omega \times T$，$X(\omega, t)$ 都是有限的，且对任一内集 $D \subseteq \Omega \times T$ 使得 $\mu_L \times \nu_L(D) = 1$ 都有

$$st\left(\int_D |X(\omega, t)| d(\mu_0 \times \nu_0)\right) = st\left(\int_{\Omega\times T} |X(\omega, t)| d(\mu_0 \times \nu_0)\right) \in \mathbb{R}.$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –9

如果 X^2 是 S-可积的，则称 X 是 S-平方可积的。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –9

如果 X^2 是 S-可积的，则称 X 是 S-平方可积的。

接下来证明定理 4.5。在此我们重新叙述此定理使其更完整详细。

定理 (4.19 Keisler)

设 Ω 是定义 *4.6* 中超有限均匀分布 *Loeb* 概率空间，b 是 $\Omega \times [0,1]$ 上由 *Anderson* 随机游走生成的布朗运动，$g(r,x) : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数并关于 x 连续。则存在一适应平方可积随机过程 $x : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得对几乎所有路径 $\omega \in \Omega$，$x(\omega, \cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$ 连续并且 $x(\omega, t)$ 满足所要解的方程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –10

证明：设 $|g| \leq M$。由定理 3.14 我们可找到 g 的内提升 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 和 $E \subseteq T$ 使得 $\nu_L(E) = 1$ 且对任一 $t \in E$，有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$ 都有 $st(G(t, y)) = g(st(t), st(y))$。我们可假设 $|G| \leq M$。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –10

证明：设 $|g| \leq M$。由定理 3.14 我们可找到 g 的内提升 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 和 $E \subseteq T$ 使得 $\nu_L(E) = 1$ 且对任一 $t \in E$，有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$ 都有 $st(G(t, y)) = g(st(t), st(y))$。我们可假设 $|G| \leq M$。

对 $i = 0, 1, \ldots, K$ 归纳定义 $\Omega \times T$ 上的内随机变量 $X(t_i) := X(\cdot\,, t_i)$ 使得 $X(0) = 0$ 且

$$X(t_{i+1}) := \sum_{j=0}^{i} G(t_j, X(t_j))\Delta B(t_j).$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –10

证明：设 $|g| \leq M$。由定理 3.14 我们可找到 g 的内提升 $G: T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 和 $E \subseteq T$ 使得 $\nu_L(E) = 1$ 且对任一 $t \in E$，有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$ 都有 $st(G(t, y)) = g(st(t), st(y))$。我们可假设 $|G| \leq M$。

对 $i = 0, 1, \ldots, K$ 归纳定义 $\Omega \times T$ 上的内随机变量 $X(t_i) := X(\cdot, t_i)$ 使得 $X(0) = 0$ 且

$$X(t_{i+1}) := \sum_{j=0}^{i} G(t_j, X(t_j))\Delta B(t_j).$$

显然 $X: \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 是适应随机过程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –11

因为

$$\mathbb{E}(X^2(t)) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{s<t} G(s, X(s))\Delta s\right)^2\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s, X(s))\Delta s\right.$$

$$\left. +2 \sum_{s<s'<t} G(s, X(s))\Delta B(s) G(s', X(s'))\Delta B(s')\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s, X(s))\Delta s\right) \leq M^2, \text{ 且}$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –11

因为

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2(t)) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{s<t} G(s,X(s))\Delta s\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s,X(s))\Delta s\right. \\
&\quad \left. +2\sum_{s<s'<t} G(s,X(s))\Delta B(s)G(s',X(s'))\Delta B(s')\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{s<t} G^2(s,X(s))\Delta s\right) \leq M^2, \text{ 且}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} \mu_L\left(\{\omega\in\Omega : |X(t)|^2 > n\}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}(X^2(t)) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M^2}{n} = 0,
$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –12

可知对几乎处处 $\omega \in \Omega$，$X(\omega, t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –12

可知对几乎处处 $\omega \in \Omega$，$X(\omega, t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

因为 $|G| \leq M$，用定理 4.12 证明中第四部分的思想加上概率论中的 Bernstain 不等式或 Doob 不等式，对几乎处处 $\omega \in \Omega$，路径函数 $X(\omega, \cdot) : T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –12

可知对几乎处处 $\omega \in \Omega$，$X(\omega, t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

因为 $|G| \leq M$，用定理 4.12 证明中第四部分的思想加上概率论中的 Bernstain 不等式或 Doob 不等式，对几乎处处 $\omega \in \Omega$，路径函数 $X(\omega, \cdot) : T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

可假设对每一 $\omega \in E$，$X(\omega, \cdot)$ 是 S-连续且取有限值的函数。对每一 $(\omega, r) \in E \times [0, 1]$，令

$$x(\omega, r) := st\left(X(\omega, r^-)\right).$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –12

可知对几乎处处 $\omega \in \Omega$，$X(\omega, t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

因为 $|G| \le M$，用定理 4.12 证明中第四部分的思想加上概率论中的 Bernstain 不等式或 Doob 不等式，对几乎处处 $\omega \in \Omega$，路径函数 $X(\omega, \cdot) : T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

可假设对每一 $\omega \in E$，$X(\omega, \cdot)$ 是 S-连续且取有限值的函数。对每一 $(\omega, r) \in E \times [0, 1]$，令

$$x(\omega, r) := st\left(X(\omega, r^-)\right).$$

则 x 是适应平方可积随机过程，且对每一 $\omega \in E$，$x(\omega, \cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是连续的。最后需证 x 满足所要解的随机积分方程。

4.3 Keisler 强解存在性定理 –12

可知对几乎处处 $\omega \in \Omega$，$X(\omega, t)$ 是有限的，且是 S-平方可积的。

因为 $|G| \leq M$，用定理 4.12 证明中第四部分的思想加上概率论中的 Bernstain 不等式或 Doob 不等式，对几乎处处 $\omega \in \Omega$，路径函数 $X(\omega, \cdot): T \to {}^*\mathbb{R}$ 是 S-连续的。

可假设对每一 $\omega \in E$，$X(\omega, \cdot)$ 是 S-连续且取有限值的函数。对每一 $(\omega, r) \in E \times [0, 1]$，令

$$x(\omega, r) := st\left(X(\omega, r^-)\right).$$

则 x 是适应平方可积随机过程，且对每一 $\omega \in E$，$x(\omega, \cdot): [0, 1] \to \mathbb{R}$ 是连续的。最后需证 x 满足所要解的随机积分方程。

因为 g 有界，所以 $g(s, x(\omega, s))$ 是平方可积的。因为 Itô 积分是适应阶跃过程的 L^2 极限，所以存在适应阶跃过程 $y_n: \Omega \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega\times[0,1]} (g(s, x(\omega, s)) - y_n(\omega, s))^2 d(\mu_L \times \lambda) = 0.$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –13

因为 y_n 是适应阶跃过程，所以存在内随机过程 $Y_n : \Omega \times T \to {}^*\mathbb{R}$ 使得对几乎所有 $(\omega, t) \in \Omega \times T$，有 $st(Y_n(\omega, t)) = y_n(\omega, st(t))$。这可推出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(X(r^-) - \sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{t<r^-} G(t, X(t))\Delta B(t) - \sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right) \\
&\leq \int_{\Omega\times T} \left(G(t, X(t)) - Y_n(t)\right)^2 d(\mu_0 \times \nu_0) \\
&\approx \int_{\Omega\times[0,1]} (g(s, x(\omega, s)) - y_n(\omega, s))^2 d(\mu_L \times \lambda) \to 0.
\end{aligned}
$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –14

所以

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbb{E}\left(\left(x(r)-\int_0^r g(s,x(s))\,db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2}\\
&\lessapprox \left(\mathbb{E}\left(\left(X(r^-)-\sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)\right)^2\right)\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\mathbb{E}\left(\left(\sum_{t<r^-} Y_n(t)\Delta B(t)-\int_0^r y_n(s)\,db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2}\\
&\quad+\left(\mathbb{E}\left(\left(\int_0^r y_n(s)\,db(s)-\int_0^r g(s,x(s))\,db(s)\right)^2\right)\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

4.3 Keisler 强解存在性定理 –15

令 $n \to \infty$，我们有

$$\mathbb{E}\left(\left(x(r) - \int_0^r g(s, x(s))\,db(s)\right)^2\right) = 0,$$

即 $x(\omega, r) = \displaystyle\int_0^r g(s, x(\omega, s))\,db(\omega, s)$。 $\square$