非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

第三章

非标准分析和测度论

3. 非标准分析和测度论 –1

在这一节中我们介绍 Loeb 测度空间和一些应用。 Loeb 测度空间是建立在 ${}^*\mathcal{V}$ 中集合上的标准测度空间，所以是一个联系标准模型和非标准模型的桥梁。为了简便我们只考虑有限测度空间，而有限测度空间本质上就是概率空间。在构造 Loeb 测度空间时我们需要用到非标准模型内集的可数饱和性质。可数饱和性质不但在构造 Loeb 空间要用，在非标准分析其他方面都是一个重要的性质。

3.1 可数饱和性 –1

定义 (3.1)

设 $S = [\langle S_n \rangle] \in {}^*V$。集合 $T \subseteq S$ 是**内集**如果存在 $T_n \subseteq S_n$ 使得 $T = [\langle T_n \rangle]$。不是内集的集合称为**外集**。

3.1 可数饱和性 –1

定义 (3.1)

设 $S = [\langle S_n \rangle] \in {}^*V$。集合 $T \subseteq S$ 是**内集**如果存在 $T_n \subseteq S_n$ 使得 $T = [\langle T_n \rangle]$。不是内集的集合称为**外集**。

例 (3.2)

在 $\mathcal{V}$ 中所有 $[0,1]$ 的非空子集有一个上确界。以下一阶语句 $\varphi(\mathcal{P}, [0,1], <)$ 表示这一事实

$$\forall x \in \mathcal{P}([0,1])\, (x \neq \emptyset \to \exists \beta \in [0,1]$$
$$[\forall t \in x (t \leq \beta) \wedge \forall u \in [0,1]\, (u < \beta \to \exists v \in x (u < v))]) \,.$$

3.1 可数饱和性 –1

定义 (3.1)

设 $S = [\langle S_n \rangle] \in {}^*V$。集合 $T \subseteq S$ 是**内集**如果存在 $T_n \subseteq S_n$ 使得 $T = [\langle T_n \rangle]$。不是内集的集合称为**外集**。

例 (3.2)

在 $\mathcal{V}$ 中所有 $[0, 1]$ 的非空子集有一个上确界。以下一阶语句 $\varphi(\mathcal{P}, [0, 1], <)$ 表示这一事实

$$\forall x \in \mathcal{P}([0, 1]) \, (x \neq \emptyset \to \exists \beta \in [0, 1] \\ [\forall t \in x \, (t \leq \beta) \wedge \forall u \in [0, 1] \, (u < \beta \to \exists v \in x \, (u < v))]) \, .$$

由转换原理 $\varphi({}^*\mathcal{P}, {}^*[0, 1], {}^*<)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。所以每个非空集合 $A \in {}^*\mathcal{P}([0, 1])$ 都有上确界。

3.1 可数饱和性 –1

定义 (3.1)

设 $S = [\langle S_n \rangle] \in {}^*V$。集合 $T \subseteq S$ 是**内集**如果存在 $T_n \subseteq S_n$ 使得 $T = [\langle T_n \rangle]$。不是内集的集合称为**外集**。

例 (3.2)

在 $\mathcal{V}$ 中所有 $[0,1]$ 的非空子集有一个上确界。以下一阶语句 $\varphi(\mathcal{P}, [0,1], <)$ 表示这一事实

$$\forall x \in \mathcal{P}([0,1])\,(x \neq \emptyset \rightarrow \exists \beta \in [0,1]$$
$$[\forall t \in x(t \leq \beta) \wedge \forall u \in [0,1]\,(u < \beta \rightarrow \exists v \in x(u < v))]) \,.$$

由转换原理 $\varphi({}^*\mathcal{P}, {}^*[0,1], {}^*<)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。所以每个非空集合 $A \in {}^*\mathcal{P}([0,1])$ 都有上确界。如考虑 $U := \{t \in {}^*[0,1] : t \approx 0\}$，则 U 是 ${}^*[0,1]$ 的非空子集。但是 U 不可能有上确界 β。这是因为如果 $\beta \approx 0$ 则 $2\beta \in U$，所以 β 不是 U 的上界。如果 $\beta \gg 0$，则 $\beta/2 \gg 0$，所以 $\beta/2$ 是 U 的上界，因而 β 不是 U 的上确界。这说明 $U \notin {}^*\mathcal{P}([0,1]$，即 U 是 ${}^*[0,1]$ 的外子集。

3.1 可数饱和性 –2

如果一个内集的子集可以由关于 $^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

3.1 可数饱和性 –2

如果一个内集的子集可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

命题 (3.3)

设 $\varphi(x, \overline{A})$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一阶公式，$S \in {}^*V$。则集合 $B := \{b \in S : \varphi(b, \overline{A})$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真$\}$ 是 S 的内子集。

3.1 可数饱和性 –2

如果一个内集的子集可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

命题 (3.3)

设 $\varphi(x, \overline{A})$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一阶公式，$S \in {}^*V$。则集合 $B := \{b \in S : \varphi(b, \overline{A})$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真$\}$ 是 S 的内子集。

证明：设 $S = [\langle S_n \rangle]$，$A = [\langle A_n \rangle]$。对每一 $n \in \omega$，记

$$B_n = \{b \in S_n : \varphi(b, \overline{A_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\}.$$

3.1 可数饱和性 –2

如果一个内集的子集可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

命题 (3.3)

设 $\varphi(x, \overline{A})$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一阶公式，$S \in {}^*V$。则集合 $B := \{b \in S : \varphi(b, \overline{A})$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真$\}$ 是 S 的内子集。

证明：设 $S = [\langle S_n \rangle]$，$A = [\langle A_n \rangle]$。对每一 $n \in \omega$，记

$$B_n = \{b \in S_n : \varphi(b, \overline{A_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\}.$$

记 $B' = [\langle B_n \rangle]$。显然 $B' \subseteq S$ 并且对每个 $[\langle b_n \rangle] \in B'$，

$$\{n \in \omega : b_n \in S_n \wedge \varphi(b_n, \overline{A_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}.$$

3.1 可数饱和性 –2

如果一个内集的子集可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一个公式来定义，则这个子集一定是内集。

命题 (3.3)

设 $\varphi(x, \overline{A})$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的一阶公式，$S \in {}^*V$。则集合 $B := \{b \in S : \varphi(b, \overline{A})$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真$\}$ 是 S 的内子集。

证明：设 $S = [\langle S_n \rangle]$，$A = [\langle A_n \rangle]$。对每一 $n \in \omega$，记

$$B_n = \{b \in S_n : \varphi(b, \overline{A_n}) \text{ 在}\,\mathcal{V}\text{ 中为真}\}.$$

记 $B' = [\langle B_n \rangle]$。显然 $B' \subseteq S$ 并且对每个 $[\langle b_n \rangle] \in B'$，

$$\{n \in \omega : b_n \in S_n \wedge \varphi(b_n, \overline{A_n}) \text{ 在}\,\mathcal{V}\text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}.$$

所以 $B' \subseteq B$。如果 $[\langle b_n \rangle] \in B$，则由引理 1.11 $\{n \in \omega : b_n \in S_n \wedge \varphi(b_n, \overline{A_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真$\} \in \mathcal{U}$。所以 $[\langle b_n \rangle] \in B'$，而这证明了 $B = B'$ 是内集。 □

3.1 可数饱和性 –3

显然一个内集 $S \in {}^*V$ 的内子集一定可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的公式来定义，这是因为那个内子集自身可以作为公式中的参量。

3.1 可数饱和性 –3

显然一个内集 $S \in {}^*V$ 的内子集一定可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的公式来定义，这是因为那个内子集自身可以作为公式中的参量。

如果非标准模型不是由超幂构造，而是由模型论中 Henkin 构造或其他抽象构造，则命题 3.3 可以作为内集的定义。

显然一个内集 $S \in {}^*V$ 的内子集一定可以由关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的公式来定义，这是因为那个内子集自身可以作为公式中的参量。

如果非标准模型不是由超幂构造，而是由模型论中 Henkin 构造或其他抽象构造，则命题 3.3 可以作为内集的定义。

命题 (3.4 可数饱和性质)

设 $\{A^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ 是 ${}^*V$ 中非空内集组成的序列使得 $A^{(1)} \supseteq A^{(2)} \supseteq \cdots$。则

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} A^{(m)} \neq \emptyset.$$

3.1 可数饱和性 –4

证明：我们使用对角线方法。设 $A^{(m)} = [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。我们需要找到一个 $[\langle a_n \rangle] \in {}^*V$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。

3.1 可数饱和性 –4

证明：我们使用对角线方法。设 $A^{(m)} = [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。我们需要找到一个 $[\langle a_n \rangle] \in {}^*V$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。

任取一元 $[\langle a_n^{(m)} \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。对于任一自然数 m，令

$$\begin{aligned} U_m := \{ & n \in \omega : n > m, \\ & a_n^{(m)} \in A_n^{(m)}, \text{并且} \, A_n^{(m)} \subseteq A_n^{(m-1)} \subseteq \cdots \subseteq A_n^{(0)} \}. \end{aligned}$$

3.1 可数饱和性 –4

证明：我们使用对角线方法。设 $A^{(m)} = [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。我们需要找到一个 $[\langle a_n \rangle] \in {}^*V$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，都有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。

任取一元 $[\langle a_n^{(m)} \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。对于任一自然数 m，令

$$
\begin{aligned}
U_m := \{ & n \in \omega : n > m, \\
& a_n^{(m)} \in A_n^{(m)}, \text{ 并且 } A_n^{(m)} \subseteq A_n^{(m-1)} \subseteq \cdots \subseteq A_n^{(0)} \}.
\end{aligned}
$$

由引理 1.11，$U_m \in \mathcal{U}$。显然 $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots$ 并且

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} U_m = \emptyset.$$

3.1 可数饱和性 –5

现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在只需证明对任意 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。

现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在只需证明对任意 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。由引理 1.11，这等价于 $U = \{n \in \omega : a_n \in A_n^{(m)}\} \in \mathcal{U}$。当 $n \in U_m$，有 $m \leq m_n$，这是因为 m_n 是这些 m 中的最大值。

现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在只需证明对任意 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。由引理 1.11，这等价于 $U = \{n \in \omega : a_n \in A_n^{(m)}\} \in \mathcal{U}$。当 $n \in U_m$，有 $m \leq m_n$，这是因为 m_n 是这些 m 中的最大值。因为 $n \in U_{m_n}$，所以 $a_n^{(m_n)} \in A_n^{(m_n)}$ 并且 $A_n^{(m)} \supseteq A_n^{(m_n)}$，这推出

现在我们定义所要的序列 $\{a_n : n \in \omega\}$。给定 $n \in \omega$，令 $m_n := \max\{m : n \in U_m\}$。注意，因为所有 U_m 的交是空集，所以 m_n 一定存在。显然 $n \in U_{m_n}$。令

$$a_n := a_n^{m_n}.$$

现在只需证明对任意 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n^{(m)} \rangle]$。由引理 1.11，这等价于 $U = \{n \in \omega : a_n \in A_n^{(m)}\} \in \mathcal{U}$。当 $n \in U_m$，有 $m \leq m_n$，这是因为 m_n 是这些 m 中的最大值。因为 $n \in U_{m_n}$，所以 $a_n^{(m_n)} \in A_n^{(m_n)}$ 并且 $A_n^{(m)} \supseteq A_n^{(m_n)}$，这推出 $a_n = a_n^{(m_n)} \in A_n^{(m)}$。因此 $n \in U$。这证明了 $U_m \subseteq U$。由滤子的定义，我们有 $U \in \mathcal{U}$。 $\square$

3.1 可数饱和性 –6

推论 (3.5)

设 $S \in {}^*V$ 并且 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$。则存在超整数 K 和超有限序列 $\{A^{(m)} \in S : m = 0, 1, \ldots, K\} \in {}^*V$，即序列 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成 S 中的一个超有限序列。

3.1 可数饱和性 –6

推论 (3.5)

设 $S \in {}^*V$ 并且 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$。则存在超整数 K 和超有限序列 $\{A^{(m)} \in S : m = 0, 1, \ldots, K\} \in {}^*V$，即序列 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成 S 中的一个超有限序列。

证明：在 ${}^*\mathcal{V}$ 中令

$$F_m := \left\{ f : \exists K \in {}^*\mathbb{N}\,(K \geq m) \wedge (f : [K] \to S) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (f(i) = A^{(i)}) \right) \right\}.$$

3.1 可数饱和性 –6

推论 (3.5)

设 $S \in {}^*V$ 并且 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$。则存在超整数 K 和超有限序列 $\{A^{(m)} \in S : m = 0, 1, \ldots, K\} \in {}^*V$，即序列 $\{A^{(m)} \in S : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成 S 中的一个超有限序列。

证明：在 ${}^*\mathcal{V}$ 中令

$$F_m := \left\{ f : \exists K \in {}^*\mathbb{N}\,(K \geq m) \wedge (f : [K] \to S) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (f(i) = A^{(i)}) \right) \right\}.$$

则 $F_m \in {}^*V$ 且每个 F_m 包含了序列 $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(m)}\}$，所以非空。显然 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$。由命题 3.4 存在 $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$。显然 f 就是 ${}^*V$ 中超有限序列，且延拓了 $\{A^{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$。 $\square$.

3.1 可数饱和性 –7

我们通常只需要非标准模型的可数饱和性。但有时更强的饱和性会被用到。

3.1 可数饱和性 –7

我们通常只需要非标准模型的可数饱和性。但有时更强的饱和性会被用到。

定义 (3.6)

设 $\mathcal{A}$ 是一内集族。我们说 $\mathcal{A}$ 满足**有限交性质** 如果 $\mathcal{A}$ 中任意有限个内集的交非空。

3.1 可数饱和性 –7

我们通常只需要非标准模型的可数饱和性。但有时更强的饱和性会被用到。

定义 (3.6)

设 $\mathcal{A}$ 是一内集族。我们说 $\mathcal{A}$ 满足**有限交性质** 如果 $\mathcal{A}$ 中任意有限个内集的交非空。

设 κ 是一不可数正则基数。我们说一个非标准模型是 κ 饱和的如果每个势小于 κ 的满足有限交性质的内集族 $\mathcal{A}$ 都有非空交，即

$$\bigcap\{A : A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset.$$

3.1 可数饱和性 –7

我们通常只需要非标准模型的可数饱和性。但有时更强的饱和性会被用到。

定义 (3.6)

设 $\mathcal{A}$ 是一内集族。我们说 $\mathcal{A}$ 满足**有限交性质** 如果 $\mathcal{A}$ 中任意有限个内集的交非空。

设 κ 是一不可数正则基数。我们说一个非标准模型是 κ 饱和的如果每个势小于 κ 的满足有限交性质的内集族 $\mathcal{A}$ 都有非空交，即

$$\bigcap\{A : A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset.$$

显然可数饱和性即是 $\aleph_1$ 饱和性。如果 $\kappa \leq \lambda$ 是两个不可数正则基数，则 λ 饱和性推出 κ 饱和性。所以 κ 越大，κ 饱和性就越强。

3.1 可数饱和性 –8

定理 (3.7)

设 κ 是一无穷基数。存在 κ 上的非平凡超滤子 $\mathcal{U}$ 使得超结构在 κ 上的超幂模超滤子 $\mathcal{U}$，即

$$ {}^*V := \bigcup_{n=0}^{\mathfrak{n}} \left(V_n^{\kappa}/\mathcal{U} \right) $$

是 κ^+ 饱和的。

3.1 可数饱和性 –8

定理 (3.7)

设 κ 是一无穷基数。存在 κ 上的非平凡超滤子 $\mathcal{U}$ 使得超结构在 κ 上的超幂模超滤子 $\mathcal{U}$，即

$$^{*}V := \bigcup_{n=0}^{\mathfrak{n}} (V_n^{\kappa}/\mathcal{U})$$

是 κ^+ 饱和的。

根据以上定理我们可以构造一个非标准模型使其满足任意设定的 κ 饱和性质。以上定理涉及太多集合论知识，所以此处不讨论定理的证明。。

3.1 可数饱和性 –9

对于一递减内集序列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，可数饱和的形式表示是

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists x\, (x \in A_m) \to \exists x \forall m \in \mathbb{N}\, (x \in A_m).$$

对于一递减内集序列 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$，可数饱和的形式表示是

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists x\, (x \in A_m) \to \exists x \forall m \in \mathbb{N}\, (x \in A_m).$$

所以，粗略地讲，饱和性质可被看作是全称量词和存在量词的交换。一个数学问题的复杂性有时可用叙述此问题所用到的全称量词和存在量词的交替次数来衡量，所以在某些情况下使用饱和性能减低量词复杂度。

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中**超有限集**，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 使得 $|\Omega| = H$。

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中**超有限集**，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 使得 $|\Omega| = H$。

1. 记 $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，即 Σ_0 是 Ω 中所有内子集的集族；

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中超有限集，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ **使得** $|\Omega| = H$。

1. **记** $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，**即** Σ_0 **是** Ω **中所有内子集的集族**；
2. **令** $\mu_0 : \Sigma_0 \to {}^*[0,1]$ **为一函数使得** $\mu_0(A) = |A|/H$;

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中超有限集，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 使得 $|\Omega| = H$。

1. 记 $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，即 Σ_0 是 Ω 中所有内子集的集族；
2. 令 $\mu_0 : \Sigma_0 \to {}^*[0,1]$ 为一函数使得 $\mu_0(A) = |A|/H$;
3. 对 Ω 的任一子集 (可以是外子集) $E \subseteq \Omega$，令

$$\overline{\mu}(E) := \inf\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge E \subseteq A\} \text{ 和}$$

$$\underline{\mu}(E) := \sup\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge A \subseteq E\};$$

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中超有限集，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ **使得** $|\Omega| = H$。

1. **记** $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，**即** Σ_0 **是** Ω **中所有内子集的集族**；
2. **令** $\mu_0 : \Sigma_0 \to {}^*[0,1]$ **为一函数使得** $\mu_0(A) = |A|/H$;
3. **对** Ω **的任一子集 (可以是外子集)** $E \subseteq \Omega$，**令**

$$\overline{\mu}(E) := \inf\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge E \subseteq A\} \text{ 和}$$

$$\underline{\mu}(E) := \sup\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge A \subseteq E\};$$

4. **令** $\Sigma_L := \{E \subseteq \Omega : \overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)\}$；

3.2 Loeb 测度 –1

定义 (3.8)

设 Ω 是 ${}^*\mathcal{V}$ 中超有限集，即存在一超整数 $H \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 使得 $|\Omega| = H$。

1. 记 $\Sigma_0 := {}^*\mathcal{P}(\Omega)$，即 Σ_0 是 Ω 中所有内子集的集族；
2. 令 $\mu_0 : \Sigma_0 \to {}^*[0,1]$ 为一函数使得 $\mu_0(A) = |A|/H$;
3. 对 Ω 的任一子集 (可以是外子集) $E \subseteq \Omega$，令

$$\overline{\mu}(E) := \inf\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge E \subseteq A\} \text{ 和}$$

$$\underline{\mu}(E) := \sup\{st(\mu_0(A)) : A \in \Sigma_0 \wedge A \subseteq E\};$$

4. 令 $\Sigma_L := \{E \subseteq \Omega : \overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)\}$；
5. 定义 $\mu_L : \Sigma_L \to [0,1]$ 使得对每个 $E \in \Sigma_L$，$\mu_L(E) := \overline{\mu}(E)$。

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；
2. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_L$；

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；
2. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_L$；
3. 如果 $A \in \Sigma_0$，则 $\mu_L(A) = st(\mu_0(A))$；

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；
2. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_L$；
3. 如果 $A \in \Sigma_0$，则 $\mu_L(A) = st(\mu_0(A))$；
4. 如果 $E, E' \subseteq \Omega$ 使得 $E \subseteq E'$，$E' \in \Sigma_L$，且 $\mu_L(E') = 0$，则 $E \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(E) = 0$；

3.2 Loeb 测度 –2

在以上定义中 $\Sigma_0 \in {}^*V$ 是一代数，即 $\emptyset, \Omega \in \Sigma_0$ 且 Σ_0 对两集合的差和两集合的并封闭。μ_0 是一内函数，是 Σ_0 上 * 有限可加非标准测度。$\overline{\mu}$ 和 $\underline{\mu}$ 分别称为 (Loeb) 上测度和 (Loeb) 下测度。上测度和下测度不在 ${}^*V$ 中，都是标准意义下的函数，同样 μ_L 也是标准意义下的函数。

命题 (3.9)

设 Ω，Σ_0，Σ_L，μ_0，和 μ_L 为定义 *3.8* 中所定义。则

1. $\Omega \in \Sigma_L$，$\mu_L(\Omega) = 1$，对每个 $x \in \Omega$，$\{x\} \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(\{x\}) = 0$；
2. $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_L$；
3. 如果 $A \in \Sigma_0$，则 $\mu_L(A) = st(\mu_0(A))$；
4. 如果 $E, E' \subseteq \Omega$ 使得 $E \subseteq E'$，$E' \in \Sigma_L$，且 $\mu_L(E') = 0$，则 $E \in \Sigma_L$ 且 $\mu_L(E) = 0$；
5. 如果 $E, E' \in \Sigma_L$，则 $E \cup E' \in \Sigma_L$ 和 $E' \setminus E \in \Sigma_L$；

3.2 Loeb 测度 –3

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \leq \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；

3.2 Loeb 测度 –3

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \leq \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；
7. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq E \subseteq B_{m+1} \subseteq B_m$ 且 $\lim_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$；

3.2 Loeb 测度 –3

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \leq \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；
7. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq E \subseteq B_{m+1} \subseteq B_m$ 且 $\lim\limits_{m \to \infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$；
8. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E \Delta A) = 0$，这里 $E \Delta A := (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ 是集合 E 和 A 的对称差；

3.2 Loeb 测度 –3

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \leq \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；
7. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq E \subseteq B_{m+1} \subseteq B_m$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$；
8. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E \Delta A) = 0$，这里 $E \Delta A := (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ 是集合 E 和 A 的对称差；
9. Σ_L 是一 σ-代数，称为 **Loeb 可测代数**；

3.2 Loeb 测度 –3

6. 设 $E, E' \in \Sigma_L$，如果 $E \subseteq E'$，则 $\mu_L(E) \le \mu_L(E')$ 和 $\mu_L(E' \setminus E) = \mu_L(E') - \mu_L(E)$，如果 $E \cap E' = \emptyset$，则 $\mu_L(E \cup E') = \mu_L(E) + \mu_L(E')$；
7. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得对每个 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $A_m \subseteq A_{m+1} \subseteq E \subseteq B_{m+1} \subseteq B_m$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$；
8. 集合 $E \in \Sigma_L$ 当且仅当存在 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E\Delta A) = 0$，这里 $E\Delta A := (E \setminus A) \cup (A \setminus E)$ 是集合 E 和 A 的对称差；
9. Σ_L 是一 σ-代数，称为 **Loeb 可测代数**；
10. 如果 $\{E_m \in \Sigma_L : m \in \mathbb{N}\}$ 两两互不相交，则

$$\mu_L\left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m).$$

3.2 Loeb 测度 –4

证明：命题 3.9 中性质 1.–7. 的证明和实分析中 $[0, 1]$ 上勒贝格测度性质的证明相似，所以留给读者。

3.2 Loeb 测度 –4

证明：命题 3.9 中性质 1.–7. 的证明和实分析中 $[0,1]$ 上勒贝格测度性质的证明相似，所以留给读者。

现在证明性质 8. 设 $E \in \Sigma_L$。由性质 7. 存在内集 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq E \subseteq \cdots \subseteq B_2 \subseteq B_1$ 使得 $\lim_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$。由推论 3.5 序列 $\{(A_m, B_m) : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成一超有限内序列。所以存在内集 A_K, B_K 使得对 $m \in \mathbb{N}$

$$A_m \subseteq A_K \subseteq B_K \subseteq B_m.$$

证明：命题 3.9 中性质 1.–7. 的证明和实分析中 $[0,1]$ 上勒贝格测度性质的证明相似，所以留给读者。

现在证明性质 8. 设 $E \in \Sigma_L$。由性质 7. 存在内集 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq E \subseteq \cdots \subseteq B_2 \subseteq B_1$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty} \mu_L(B_m \setminus A_m) = 0$。由推论 3.5 序列 $\{(A_m, B_m) : m \in \mathbb{N}\}$ 可延拓成一超有限内序列。所以存在内集 A_K, B_K 使得对 $m \in \mathbb{N}$

$$A_m \subseteq A_K \subseteq B_K \subseteq B_m.$$

令 $A := A_K$。则对任一 $m \in \mathbb{N}$ 我们有 $(A \setminus E) \cup (E \setminus A) \subseteq B_m \setminus A_m$。所以 $\mu_L(E \Delta A) = 0$。设 $A \in \Sigma_0$ 使得 $\mu_L(E \Delta A) = 0$。则 $E = (A \setminus (A \setminus E)) \cup (E \setminus A)$。因为 $A, A \setminus E, E \setminus A \in \Sigma_L$，我们有 $E \in \Sigma_L$。注意我们不能期望 $A_K \subseteq E$ 或 $E \subseteq B_K$。

现在证明性质 9. 和 10. 设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$，先证 $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \in \Sigma_L$。不失一般性，可假设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$ 两两互不相交（否则用 $E'_m = E_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i$ 来替代）。

3.2 Loeb 测度 –5

现在证明性质 9. 和 10. 设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$，先证 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \in \Sigma_L$。不失一般性，可假设 $\{E_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \Sigma_L$ 两两互不相交（否则用 $E'_m = E_m \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1} E_i$ 来替代)。如果级数 $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m) = \infty$，则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{m=1}^{N} \mu_L(E_m) > 1$。但是由性质 6. 我们得到荒谬结论 $1 \geq \mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{N} E_m\right) > 1$。所以 $\sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m)$ 收敛。

3.2 Loeb 测度 –6

给定标准正实数 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{m=N+1}^{\infty} \mu_L(E_m) < \epsilon/4$。

对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 取定 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得 $A_m \subseteq E_m \subseteq B_m$ 满足

$$\mu_0(B_m) - \epsilon/2^{m+2} < \mu_L(E_m) < \mu_0(A_m) + \epsilon/2^{m+2}.$$

3.2 Loeb 测度 –6

给定标准正实数 $\epsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\displaystyle\sum_{m=N+1}^{\infty} \mu_L(E_m) < \epsilon/4$。对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 取定 $A_m, B_m \in \Sigma_0$ 使得 $A_m \subseteq E_m \subseteq B_m$ 满足

$$\mu_0(B_m) - \epsilon/2^{m+2} < \mu_L(E_m) < \mu_0(A_m) + \epsilon/2^{m+2}.$$

我们有 $\displaystyle\sum_{m=N+1}^{\infty} \mu_L(B_m) \leq \sum_{m=N+1}^{\infty} (\mu_L(E_m) + \epsilon/2^{m+2}) < \epsilon/2$。由推论 3.5 我们可延拓 $\{B_m : m \in \mathbb{N}\}$ 成超有限内序列 $\{B_m : 1 \leq m \leq K\}$ 使得 $\displaystyle\sum_{m=N+1}^{K} \mu_0(B_m) < \epsilon/2$。因此我们有 $A = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{N} A_m \in \Sigma_0$，$B = \displaystyle\bigcup_{m=1}^{K} B_m \in \Sigma_0$，和 $A \subseteq \displaystyle\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \subseteq B$。所以

3.2 Loeb 测度 –7

$$\mu_0\left(B \setminus A\right) \leq \sum_{m=1}^{N} \mu_0\left(B_m \setminus A_m\right) + \sum_{m=N+1}^{K} \mu_0(B_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

$$\mu_0\left(B \setminus A\right) \leq \sum_{m=1}^{N} \mu_0\left(B_m \setminus A_m\right) + \sum_{m=N+1}^{K} \mu_0(B_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

由性质 7. 推出 $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m \in \Sigma_L$。又因为

$$\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) < \sum_{m=1}^{N} \mu_L(E_m) + \mu_0\left(\bigcup_{m=N+1}^{K} B_m\right) < \sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m) + \epsilon \text{ 和}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m) - \epsilon < \sum_{m=1}^{N} \mu_L(E_m) = \mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{N} E_m\right) \leq \mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right),$$

由 ϵ 的任意性可推出 $\mu_L\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_L(E_m)$. 命题得证。□

由以上命题和习题 3.18 可知 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$ 是可数可加非原子完备概率空间，称为超有限集 Ω 上的**均匀分布 Loeb 概率空间**。我们通常直呼其为 Loeb 空间。

3.2 Loeb 测度 –8

由以上命题和习题 3.18 可知 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 是可数可加非原子完备概率空间，称为超有限集 Ω 上的**均匀分布 Loeb 概率空间**。我们通常直呼其为 Loeb 空间。

其实在以上 Loeb 空间的构造中 Σ_0 不一定要包含 Ω 的所有内子集。只需要求 Σ_0 是 Ω 上的内代数即可。为了使 μ_L 是非原子，只需要求对每个 $A\in\Sigma_0$ 使得 $|A|/|\Omega|\gg 1$ 都有 $B\in\Sigma_0$ 满足 $|A|/|B|\approx 2$ 即可。

3.2 Loeb 测度 –8

由以上命题和习题 3.18 可知 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 是可数可加非原子完备概率空间，称为超有限集 Ω 上的**均匀分布 Loeb 概率空间**。我们通常直呼其为 Loeb 空间。

其实在以上 Loeb 空间的构造中 Σ_0 不一定要包含 Ω 的所有内子集。只需要求 Σ_0 是 Ω 上的内代数即可。为了使 μ_L 是非原子，只需要求对每个 $A\in\Sigma_0$ 使得 $|A|/|\Omega|\gg 1$ 都有 $B\in\Sigma_0$ 满足 $|A|/|B|\approx 2$ 即可。

我们还可以由标准有限可加测度空间 $(\Gamma;\Sigma,\mu)$ 生成 Loeb 测度空间 $({}^*\Gamma;\Sigma_L,\mu_L)$。先把标准空间非标准化，即 $\Sigma_0 := {}^*\Sigma$ 和 $\mu_0 := {}^*\mu$，然后依照定义 3.8 和命题 3.9 的思路可构造 ${}^*\Gamma$ 上的 Loeb 测度空间。

3.2 Loeb 测度 –9

由 Loeb 空间我们还可构造实数上勒贝格测度。因为一个实数上的子集 E 是勒贝格可测当且仅当 E 和每个长度为 1 的闭区间的交是勒贝格可测的。所以我们只要构造 $[0,1]$ 上的勒贝格测度即可。

由 Loeb 空间我们还可构造实数上勒贝格测度。因为一个实数上的子集 E 是勒贝格可测当且仅当 E 和每个长度为 1 的闭区间的交是勒贝格可测的。所以我们只要构造 $[0,1]$ 上的勒贝格测度即可。

定理 (3.10)

设 K 是超整数，$\Omega = \{i/K : i \in [K]\}$。令 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$ 为在定义 *3.8* 和命题 *3.9* 中构造的 *Loeb* 概率空间。考虑限制在 Ω 上的标准化映照 $st : \Omega \to [0,1]$，定义 $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}([0,1])$ 和 $\lambda : \mathcal{L} \to [0,1]$ 使得 $E \in \mathcal{L}$ 当且仅当 $st^{-1}(E) \in \Sigma_L$ 并且 $\lambda(E) := \mu_L(st^{-1}(E))$。则 $\mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上勒贝格可测代数并且 λ 在勒贝格可测代数上是勒贝格测度。

由 Loeb 空间我们还可构造实数上勒贝格测度。因为一个实数上的子集 E 是勒贝格可测当且仅当 E 和每个长度为 1 的闭区间的交是勒贝格可测的。所以我们只要构造 $[0,1]$ 上的勒贝格测度即可。

定理 (3.10)

设 K 是超整数，$\Omega=\{i/K : i\in[K]\}$。令 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 为在定义 *3.8* 和命题 *3.9* 中构造的 *Loeb* 概率空间。考虑限制在 Ω 上的标准化映照 $st:\Omega\to[0,1]$，定义 $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{P}([0,1])$ 和 $\lambda:\mathcal{L}\to[0,1]$ 使得 $E\in\mathcal{L}$ 当且仅当 $st^{-1}(E)\in\Sigma_L$ 并且 $\lambda(E):=\mu_L(st^{-1}(E))$。则 $\mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上勒贝格可测代数并且 λ 在勒贝格可测代数上是勒贝格测度。

证明：因为 Σ_L 是 σ-代数，所以 $\mathcal{L}$ 也是 σ-代数。

3.2 Loeb 测度 –10

如果 $a \in (0,1)$，$E = \{a\}$，对任一 $\epsilon > 0$ 我们取 $i, i' \in [K]$ 使得 $i/K \ll a \ll i'/K$ 且 $st((i'-i)/K) < \epsilon$。则 $\{j/K : i \leq j \leq i'\} \supseteq st^{-1}(\{a\})$ 且 $\mu_L(\{j/K : i \leq j \leq i'\}) = st((i'-i)/K) < \epsilon$。所以 $\lambda(\{a\}) = \mu_L(st^{-1}(\{a\})) = 0$。显然这等式当 a 是 0 或 1 时仍成立。

3.2 Loeb 测度 –10

如果 $a \in (0,1)$，$E = \{a\}$，对任一 $\epsilon > 0$ 我们取 $i, i' \in [K]$ 使得 $i/K \ll a \ll i'/K$ 且 $st((i'-i)/K) < \epsilon$。则 $\{j/K : i \leq j \leq i'\} \supseteq st^{-1}(\{a\})$ 且 $\mu_L(\{j/K : i \leq j \leq i'\}) = st((i'-i)/K) < \epsilon$。所以 $\lambda(\{a\}) = \mu_L(st^{-1}(\{a\}) = 0$。显然这等式当 a 是 0 或 1 时仍成立。

如果 $(a,b) \subseteq [0,1]$，令 $i, i' \in [K]$ 使得 $st(i/K) = a$，$st(i'/K) = b$。则 $st^{-1}((a,b)) \subseteq \{j/K : i \leq j \leq i'\} \subseteq st^{-1}([a,b]) = st^{-1}(\{a,b\}) \cup st^{-1}((a,b))$。所以 $\lambda((a,b)) = \mu_L(\{j/K : 1 \leq j \leq i'\}) = b - a$。这也推出 $\lambda([a,b]) = b - a$。由 μ_L 的可数可加性可推出 λ 的可数可加性。

3.2 Loeb 测度 –10

如果 $a \in (0,1)$，$E = \{a\}$，对任一 $\epsilon > 0$ 我们取 $i, i' \in [K]$ 使得 $i/K \ll a \ll i'/K$ 且 $st((i'-i)/K) < \epsilon$。则 $\{j/K : i \leq j \leq i'\} \supseteq st^{-1}(\{a\})$ 且 $\mu_L(\{j/K : i \leq j \leq i'\}) = st((i'-i)/K) < \epsilon$。所以 $\lambda(\{a\}) = \mu_L(st^{-1}(\{a\}) = 0$。显然这等式当 a 是 0 或 1 时仍成立。

如果 $(a,b) \subseteq [0,1]$，令 $i, i' \in [K]$ 使得 $st(i/K) = a$，$st(i'/K) = b$。则 $st^{-1}((a,b)) \subseteq \{j/K : i \leq j \leq i'\} \subseteq st^{-1}([a,b]) = st^{-1}(\{a,b\}) \cup st^{-1}((a,b))$。所以 $\lambda((a,b)) = \mu_L(\{j/K : 1 \leq j \leq i'\}) = b - a$。这也推出 $\lambda([a,b]) = b - a$。由 μ_L 的可数可加性可推出 λ 的可数可加性。

如果 $\lambda(E) = 0$，$E' \subseteq E$，则 $st^{-1}(E') \subseteq st^{-1}(E)$。而 $\mu_L(st^{-1}(E)) = 0$，所以 $\lambda(E') = \mu_L(st^{-1}(E') = 0$。所以 $\mathcal{L}$ 包含了 $[0,1]$ 上的勒贝格可测代数，λ 在勒贝格可测代数上是勒贝格测度。

3.2 Loeb 测度 –11

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。

3.2 Loeb 测度 –11

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。如果 $A \subseteq \Omega$ 是内集，则 $st(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。这是因为如果 α_n 是 $st(A)$ 中的收敛数列且收敛于极限 α，$a_n \in A$ 使得 $st(a_n) = \alpha_n$，则由可数饱和性存在超整数 K 使得 $a_K \in A$ 并且 $st(a_K) = \alpha$。

3.2 Loeb 测度 –11

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。如果 $A \subseteq \Omega$ 是内集，则 $st(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。这是因为如果 α_n 是 $st(A)$ 中的收敛数列且收敛于极限 α，$a_n \in A$ 使得 $st(a_n) = \alpha_n$，则由可数饱和性存在超整数 K 使得 $a_K \in A$ 并且 $st(a_K) = \alpha$。

因为 $st^{-1}(E)$ 是 Ω 中的 Leob 可测集，对任一 $m \in \mathbb{N}$，存在内集 $A, B \subseteq \Omega$ 使得 $A \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B$ 并且 $\mu_L(B \setminus A) < 1/m$。

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。如果 $A \subseteq \Omega$ 是内集，则 $st(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。这是因为如果 α_n 是 $st(A)$ 中的收敛数列且收敛于极限 α，$a_n \in A$ 使得 $st(a_n) = \alpha_n$，则由可数饱和性存在超整数 K 使得 $a_K \in A$ 并且 $st(a_K) = \alpha$。

因为 $st^{-1}(E)$ 是 Ω 中的 Leob 可测集，对任一 $m \in \mathbb{N}$，存在内集 $A, B \subseteq \Omega$ 使得 $A \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B$ 并且 $\mu_L(B \setminus A) < 1/m$。令 $E_1 = st(A)$，$A' = st^{-1}(E_1)$，$F_2 = st(\Omega \setminus B)$，$E_2 = [0,1] \setminus F_2$，和 $B' = \Omega \setminus st^{-1}(F_2)$，则我们有 $A \subseteq A' \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B' \subseteq B$，$E_1 \subseteq E \subseteq E_2$, $\mu_L(A) \leq \mu_L(A') = \lambda(E_1)$，和 $\mu_L(B) \geq \mu_L(B') = 1 - \mu_L(st^{-1}(F_2)) = 1 - \lambda(F_2) = \lambda(E_2)$。

现在证明每个 $E \in \mathcal{L}$ 是 $[0,1]$ 上的勒贝格可测集。如果 $A \subseteq \Omega$ 是内集，则 $st(A)$ 是 $\mathbb{R}$ 的闭子集。这是因为如果 α_n 是 $st(A)$ 中的收敛数列且收敛于极限 α，$a_n \in A$ 使得 $st(a_n) = \alpha_n$，则由可数饱和性存在超整数 K 使得 $a_K \in A$ 并且 $st(a_K) = \alpha$。

因为 $st^{-1}(E)$ 是 Ω 中的 Leob 可测集，对任一 $m \in \mathbb{N}$，存在内集 $A, B \subseteq \Omega$ 使得 $A \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B$ 并且 $\mu_L(B \setminus A) < 1/m$。令 $E_1 = st(A)$，$A' = st^{-1}(E_1)$，$F_2 = st(\Omega \setminus B)$，$E_2 = [0,1] \setminus F_2$，和 $B' = \Omega \setminus st^{-1}(F_2)$，则我们有 $A \subseteq A' \subseteq st^{-1}(E) \subseteq B' \subseteq B$，$E_1 \subseteq E \subseteq E_2$, $\mu_L(A) \leq \mu_L(A') = \lambda(E_1)$，和 $\mu_L(B) \geq \mu_L(B') = 1 - \mu_L(st^{-1}(F_2)) = 1 - \lambda(F_2) = \lambda(E_2)$。所以 $\lambda(E_2 \setminus E_1) \leq \mu_L(B \setminus A) < 1/m$。因为 E_1 是闭集，E_2 是开集，并且 m 是 $\mathbb{N}$ 中任一元素，所以 E 是勒贝格可测集。 $\square$

3.3 Haar 测度以及内提升 –1

以下我们用 Loeb 测度构造紧致群上的 Haar 测度。此构造是由 D. Ross 给出。

3.3 Haar 测度以及内提升 –1

以下我们用 Loeb 测度构造紧致群上的 Haar 测度。此构造是由 D. Ross 给出。

设 $(G; *, e, \mathcal{T})$ 是一个 Hausdorff 紧致拓扑群，即 $(G; *, e)$ 是一个群，其中 $*$ 是群乘法，e 是群单位元，$\mathcal{T}$ 是 G 上的 Hausdorff 拓扑使得 G 是紧集（G 的任意开覆盖都有一个有限子覆盖)，并且函数 $x \mapsto x^{-1}$ 和对每个 $g \in G$，$x \mapsto gx$ 都是连续的。设 $\mathcal{B}$ 是 G 上的 Borel 代数。称一个测度 $\lambda : \mathcal{B} \to [0, 1]$ 为 Haar 测度如果 $\lambda(G) = 1$ 并且 λ 是平移不变的，即对每个 $B \in \mathcal{B}$ 和每个 $g \in G$，都有

$$\mu(B) = \mu(g^{-1}B).$$

以下我们用 Loeb 测度构造紧致群上的 Haar 测度。此构造是由 D. Ross 给出。

设 $(G;*,e,\mathcal{T})$ 是一个 Hausdorff 紧致拓扑群，即 $(G;*,e)$ 是一个群，其中 $*$ 是群乘法，e 是群单位元，$\mathcal{T}$ 是 G 上的 Hausdorff 拓扑使得 G 是紧集（G 的任意开覆盖都有一个有限子覆盖)，并且函数 $x \mapsto x^{-1}$ 和对每个 $g \in G$，$x \mapsto gx$ 都是连续的。设 $\mathcal{B}$ 是 G 上的 Borel 代数。称一个测度 $\lambda : \mathcal{B} \to [0,1]$ 为 Haar 测度如果 $\lambda(G) = 1$ 并且 λ 是平移不变的，即对每个 $B \in \mathcal{B}$ 和每个 $g \in G$，都有

$$\mu(B) = \mu(g^{-1}B).$$

定理 (3.11)

每个 Hausdorff 紧致拓扑群 $(G;*,e,\mathcal{T})$ 上都存在 (唯一) 一个 Haar 测度。

3.3 Haar 测度以及内提升 –2

证明：我们可假设 G 是无限集。我们假设非标准模型是 $|\mathcal{T}|^+$ 饱和的。对每一个 $g \in G$，记

$$\mathrm{Monad}(g) := \bigcap \{{}^*O : O \in \mathcal{T} \wedge g \in O\} \subseteq {}^*G.$$

3.3 Haar 测度以及内提升 –2

证明：我们可假设 G 是无限集。我们假设非标准模型是 $|\mathcal{T}|^+$ 饱和的。对每一个 $g \in G$，记

$$\mathrm{Monad}(g) := \bigcap \{{}^*O : O \in \mathcal{T} \wedge g \in O\} \subseteq {}^*G.$$

显然 $\mathrm{Monad}(g) = g * \mathrm{Monad}(e)$。用饱和性可找到 e 的 * 领域 $U \in {}^*\mathcal{T}$ 使得 $U \subseteq \mathrm{Monad}(e)$。因为 $\{xU : x \in {}^*G\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 开覆盖，所以存在一个 ${}^*G$ 的 * 有限子覆盖 $\{x_1U, x_2U, \ldots, x_KU\}$，此处 $K \in {}^*\mathbb{N}$。我们可取子覆盖长度 K 为最小。令 $\Omega = \{x_1, x_2. \ldots, x_K\}$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –2

证明：我们可假设 G 是无限集。我们假设非标准模型是 $|\mathcal{T}|^+$ 饱和的。对每一个 $g \in G$，记

$$\mathrm{Monad}(g) := \bigcap \{{}^*O : O \in \mathcal{T} \wedge g \in O\} \subseteq {}^*G.$$

显然 $\mathrm{Monad}(g) = g * \mathrm{Monad}(e)$。用饱和性可找到 e 的 * 领域 $U \in {}^*\mathcal{T}$ 使得 $U \subseteq \mathrm{Monad}(e)$。因为 $\{xU : x \in {}^*G\}$ 是 $^*G$ 的 * 开覆盖，所以存在一个 $^*G$ 的 * 有限子覆盖 $\{x_1U, x_2U, \ldots, x_KU\}$，此处 $K \in {}^*\mathbb{N}$。我们可取子覆盖长度 K 为最小。令 $\Omega = \{x_1, x_2. \ldots, x_K\}$。

因为 G 的紧性，每个 $x \in {}^*G$ 必在唯一一个 $\mathrm{Monad}(g)$ 中。这是因为 x 不可能同时在两个不同的 Monad 中并且如果 x 不在任何 Monad 中，则对每个 $g \in G$ 都可找到 g 的领域 $O_g \in \mathcal{T}$ 使得 $x \notin {}^*O_g$，而这些 O_g 是 G 的覆盖，所以 G 有个有限子覆盖 $O_1, O_2, \ldots, O_k$，但这推出 $x \in {}^*G \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} {}^*O_i$，矛盾。

3.3 Haar 测度以及内提升 –3

由命题 3.9 我们可找到 Ω 上的 Loeb 测度空间 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$。令 st 是从 Ω 到 G 的映照使得 $st(x_i) = g$ 当且仅当 $x_i \in \mathrm{Monad}(g)$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –3

由命题 3.9 我们可找到 Ω 上的 Loeb 测度空间 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$。令 st 是从 Ω 到 G 的映照使得 $st(x_i)=g$ 当且仅当 $x_i\in \mathrm{Monad}(g)$。

对每个开集 $O\in\mathcal{T}$ 可证明 $st^{-1}(O)\in\Sigma_L$。因为证明这个事实比较繁琐，我们在此省略。有兴趣的读者可 Henson 的文章。

3.3 Haar 测度以及内提升 –3

由命题 3.9 我们可找到 Ω 上的 Loeb 测度空间 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$。令 st 是从 Ω 到 G 的映照使得 $st(x_i)=g$ 当且仅当 $x_i\in\mathrm{Monad}(g)$。

对每个开集 $O\in\mathcal{T}$ 可证明 $st^{-1}(O)\in\Sigma_L$。因为证明这个事实比较繁琐，我们在此省略。有兴趣的读者可 Henson 的文章。

对每一个开集 $O\in\mathcal{T}$ 令

$$\lambda(O):=\mu_L(st^{-1}(O)).$$

则 λ 可延拓成 G 上的 Borel 概率测度，即对所有 G 的 Borel 子集 B 都有 $\lambda(B)=\mu_L(st^{-1}(B))$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –3

由命题 3.9 我们可找到 Ω 上的 Loeb 测度空间 $(\Omega; \Sigma_L, \mu_L)$。令 st 是从 Ω 到 G 的映照使得 $st(x_i) = g$ 当且仅当 $x_i \in \mathrm{Monad}(g)$。

对每个开集 $O \in \mathcal{T}$ 可证明 $st^{-1}(O) \in \Sigma_L$。因为证明这个事实比较繁琐，我们在此省略。有兴趣的读者可 Henson 的文章。

对每一个开集 $O \in \mathcal{T}$ 令

$$\lambda(O) := \mu_L(st^{-1}(O)).$$

则 λ 可延拓成 G 上的 Borel 概率测度，即对所有 G 的 Borel 子集 B 都有 $\lambda(B) = \mu_L(st^{-1}(B))$。

最后证明 λ 是平移不变的。取任意 Borel 集 $E \subseteq G$ 和 $g \in G$。我们证明 $\lambda(g^{-1}E) \geq \lambda(E)$。如果得证，则由群运算的可逆性得出 $\lambda(g^{-1}E) = \lambda(E)$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –4

取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup \{c \in \Omega : a \in A \wedge cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

3.3 Haar 测度以及内提升 –4

取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup \{c \in \Omega : a \in A \wedge cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

则 C 是内集。如果 $c \in C$，则存在 $a \in A$ 使得存在 $x \in cU \cap g^{-1}aU$。这推出 $st(c) = st(x) = st(g^{-1}a)$。所以 $C \subseteq st^{-1}(g^{-1}A)$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –4

取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup \{c \in \Omega : a \in A \wedge cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

则 C 是内集。如果 $c \in C$，则存在 $a \in A$ 使得存在 $x \in cU \cap g^{-1}aU$。这推出 $st(c) = st(x) = st(g^{-1}a)$。所以 $C \subseteq st^{-1}(g^{-1}A)$。取 $\Omega' := (\Omega \setminus A) \cup gC$。我们证 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。

3.3 Haar 测度以及内提升 –4

取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup\{c \in \Omega : a \in A \wedge cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

则 C 是内集。如果 $c \in C$，则存在 $a \in A$ 使得存在 $x \in cU \cap g^{-1}aU$。这推出 $st(c) = st(x) = st(g^{-1}a)$。所以 $C \subseteq st^{-1}(g^{-1}A)$。取 $\Omega' := (\Omega \setminus A) \cup gC$。我们证 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。任给 $y \in {}^*G$，不失一般性可假设 $y \in aU$ 这里 $a \in A$。然而 $g^{-1}y \in g^{-1}aU$。因为 $g^{-1}y \in {}^*G$，存在 $c \in \Omega$ 使得 $g^{-1}y \in cU$。所以 $cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset$。从而推出 $c \in C$ 且 $y \in gcU$。所以 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。由 K 的最小性可知 $|\Omega'| \geq |\Omega|$，而这又可推出 $|C| \geq |A|$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –4

取任意内集 $A \subseteq st^{-1}(B)$，令

$$C := \bigcup \{c \in \Omega : a \in A \wedge cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset\}.$$

则 C 是内集。如果 $c \in C$，则存在 $a \in A$ 使得存在 $x \in cU \cap g^{-1}aU$。这推出 $st(c) = st(x) = st(g^{-1}a)$。所以 $C \subseteq st^{-1}(g^{-1}A)$。取 $\Omega' := (\Omega \setminus A) \cup gC$。我们证 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。任给 $y \in {}^*G$，不失一般性可假设 $y \in aU$ 这里 $a \in A$。然而 $g^{-1}y \in g^{-1}aU$。因为 $g^{-1}y \in {}^*G$，存在 $c \in \Omega$ 使得 $g^{-1}y \in cU$。所以 $cU \cap g^{-1}aU \neq \emptyset$。从而推出 $c \in C$ 且 $y \in gcU$。所以 $\{xU : x \in \Omega'\}$ 是 ${}^*G$ 的 * 覆盖。由 K 的最小性可知 $|\Omega'| \geq |\Omega|$，而这又可推出 $|C| \geq |A|$。

因为每个 Loeb 可测集的测度都可由内集的测度从内部逼近，由命题 3.9-7. 我们有 $\mu_L(st^{-1}(g^{-1}E)) \geq \mu_L(st^{-1}(E))$，即 $\lambda(g^{-1}E) \geq \lambda(E)$。所以用 g^{-1} 代替 g 我们有 $\lambda(g^{-1}E) = \lambda(E)$。证毕。 $\square$

3.3 Haar 测度以及内提升 –5

有时在把一标准数学问题非标准化时需要把一标准可测函数非标准化。

3.3 Haar 测度以及内提升 –5

有时在把一标准数学问题非标准化时需要把一标准可测函数非标准化。

定义 (3.12)

设 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 是在定义 3.8 和命题 3.9 中由内测度空间 $(\Omega;\Sigma_0,\mu_0)$ 生成的 Loeb 测度空间，$(X;\mathcal{T})$ 是 Hausdorff 拓扑空间，标准函数 $f:\Omega\to X$ 是 Loeb 可测函数即如果对任意 $U\in\mathcal{T}$，集合 $f^{-1}(U)\in\Sigma_L$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –5

有时在把一标准数学问题非标准化时需要把一标准可测函数非标准化。

定义 (3.12)

设 $(\Omega;\Sigma_L,\mu_L)$ 是在定义 3.8 和命题 3.9 中由内测度空间 $(\Omega;\Sigma_0,\mu_0)$ 生成的 Loeb 测度空间，$(X;\mathcal{T})$ 是 Hausdorff 拓扑空间，标准函数 $f:\Omega\to X$ 是 Loeb 可测函数即如果对任意 $U\in\mathcal{T}$，集合 $f^{-1}(U)\in\Sigma_L$。称一 Σ_0 可测的内函数 $F:\Omega\to {}^*X$ 是 f 的**内提升**如果存在 Loeb 测度为 1 的集合 $E\subseteq\Omega$ 使得对每一个 $x\in E$，有 $st(F(x))=f(x)$，即对任一包含 $f(x)$ 的开集 U 有 $F(x)\in{}^*U$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –6

定理 (3.13)

设 X 是第二可数 *Hausdorff* 拓扑空间。则每一个标准 *Loeb* 可测函数 $f : \Omega \to X$ 都有一个 Σ_0 可测内提升 $F : \Omega \to {}^*X$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –6

定理 (3.13)

设 X 是第二可数 *Hausdorff* 拓扑空间。则每一个标准 *Loeb* 可测函数 $f:\Omega\to X$ 都有一个 Σ_0 可测内提升 $F:\Omega\to {}^*X$。

证明：设 $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 上可数拓扑基。任给 $n\in\mathbb{N}$，可找到 $A_{n,m}\in\Sigma_0$ 使得

$$A_{n,m}\subseteq A_{n,m+1}\subseteq f^{-1}(U_n)\ \wedge\ \mu_L\left(f^{-1}(U_n)\smallsetminus\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_{n,m}\right)=0.$$

3.3 Haar 测度以及内提升 –6

定理 (3.13)

设 X 是第二可数 *Hausdorff* 拓扑空间。则每一个标准 *Loeb* 可测函数 $f:\Omega \to X$ 都有一个 Σ_0 可测内提升 $F:\Omega \to {}^*X$。

证明：设 $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 上可数拓扑基。任给 $n\in\mathbb{N}$，可找到 $A_{n,m}\in\Sigma_0$ 使得

$$A_{n,m}\subseteq A_{n,m+1}\subseteq f^{-1}(U_n)\ \wedge\ \mu_L\left(f^{-1}(U_n)\setminus\bigcup_{m\in\mathbb{N}}A_{n,m}\right)=0.$$

令 $C_n := f^{-1}(U_n)\setminus\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}A_{n,m}$。令

$$F_m := \{h:\ h:\Omega\to {}^*X \text{ 是 } \Sigma_0 \text{ 可测内函数使得 } \forall n\le m\,(h(A_{n,m})\subseteq {}^*U_n)\}.$$

3.3 Haar 测度以及内提升 –7

则 F_m 是非空内集。显然 $F_m \supseteq F_{m+1}$。由可数饱和性存在内函数 $F \in \bigcap\{F_m : m \in \mathbb{N}\}$。我们证明 F 是 f 的一个内提升。

则 F_m 是非空内集。显然 $F_m \supseteq F_{m+1}$。由可数饱和性存在内函数 $F \in \bigcap\{F_m : m \in \mathbb{N}\}$。我们证明 F 是 f 的一个内提升。

令 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$，则 $\mu_L(E) = 0$。对每一个 $x \in \Omega \setminus E$，我们证 $st(F(x)) = f(x)$。任取包含 $f(x)$ 的开集 U_n，存在 $m > n$ 使得 $x \in A_{n,m}$。因为 $F \in F_m$，所以 $F(x) \in {}^*U_n$。这证明了 $st(F(x)) = f(x)$。 $\square$

则 F_m 是非空内集。显然 $F_m \supseteq F_{m+1}$。由可数饱和性存在内函数 $F \in \bigcap\{F_m : m \in \mathbb{N}\}$。我们证明 F 是 f 的一个内提升。

令 $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$，则 $\mu_L(E) = 0$。对每一个 $x \in \Omega \setminus E$，我们证 $st(F(x)) = f(x)$。任取包含 $f(x)$ 的开集 U_n，存在 $m > n$ 使得 $x \in A_{n,m}$。因为 $F \in F_m$，所以 $F(x) \in {}^*U_n$。这证明了
$st(F(x)) = f(x)$。 □

运用定理 3.13 我们可证以下结果。此结果将在下一节中用到。

定理 (3.14)

设 $g : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是有界勒贝格可测函数，$|g| \le M$，并对每个 $r \in [0,1]$，函数 $\hat{g}_r(\cdot) := g(r,\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。设 K 是超整数且 $T := \{i/K : i \in [K]\}$。则存在内函数 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$，存在 T 上 $Loeb$ 测度为 1 的集合 $E \subseteq T$ 使得对任意 $t \in E$，任意有限 $y \in {}^*\mathbb{R}$，有 $st(G(t,y)) = g(st(t), st(y))$。

证明：设 X 是值在 $-M$ 和 M 之间的所有 $\mathbb{R}$ 上连续函数集。对任意两个函数 h_1, h_2 定义 $d(h_1, h_2)$ 为所有 $|h_1(x) - h_2(x)|$ 的上确界。则 $(X; d)$ 是可分度量空间，所以其度量拓扑是第二可数的。

3.3 Haar 测度以及内提升 –8

证明：设 X 是值在 $-M$ 和 M 之间的所有 $\mathbb{R}$ 上连续函数集。对任意两个函数 h_1, h_2 定义 $d(h_1, h_2)$ 为所有 $|h_1(x) - h_2(x)|$ 的上确界。则 $(X; d)$ 是可分度量空间，所以其度量拓扑是第二可数的。

考虑 $\hat{g} : [0, 1] \to X$ 使得 $\hat{g}(r) := \hat{g}_{r^\circ}$，则 $\hat{g}$ 是勒贝格可测的。对每个 $t \in T$，记 $\hat{g}'(t) = \hat{g}(st(t))$，则 $\hat{g}' : T \to X$ 是 Loeb 可测的。

证明：设 X 是值在 $-M$ 和 M 之间的所有 $\mathbb{R}$ 上连续函数集。对任意两个函数 h_1, h_2 定义 $d(h_1, h_2)$ 为所有 $|h_1(x) - h_2(x)|$ 的上确界。则 $(X; d)$ 是可分度量空间，所以其度量拓扑是第二可数的。

考虑 $\hat{g} : [0, 1] \to X$ 使得 $\hat{g}(r) := \hat{g}_r$。，则 $\hat{g}$ 是勒贝格可测的。对每个 $t \in T$，记 $\hat{g}'(t) = \hat{g}(st(t))$，则 $\hat{g}' : T \to X$ 是 Loeb 可测的。由定理 3.13 可找到内函数 $\hat{G} : T \to {}^*X$ 和 Loeb 测度为一的集合 $E \subseteq T$ 使得对任何 $t \in E$，任何标准实数 $\epsilon > 0$，都有 ${}^*d(\hat{G}, {}^*\hat{g}') < \epsilon$。

3.3 Haar 测度以及内提升 –8

证明：设 X 是值在 $-M$ 和 M 之间的所有 $\mathbb{R}$ 上连续函数集。对任意两个函数 h_1, h_2 定义 $d(h_1, h_2)$ 为所有 $|h_1(x) - h_2(x)|$ 的上确界。则 $(X; d)$ 是可分度量空间，所以其度量拓扑是第二可数的。

考虑 $\hat{g} : [0, 1] \to X$ 使得 $\hat{g}(r) := \hat{g}_r$。，则 $\hat{g}$ 是勒贝格可测的。对每个 $t \in T$，记 $\hat{g}'(t) = \hat{g}(st(t))$，则 $\hat{g}' : T \to X$ 是 Loeb 可测的。由定理 3.13 可找到内函数 $\hat{G} : T \to {}^*X$ 和 Loeb 测度为一的集合 $E \subseteq T$ 使得对任何 $t \in E$，任何标准实数 $\epsilon > 0$，都有 ${}^*d(\hat{G}, {}^*\hat{g}') < \epsilon$。记 $G : T \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ 使得 $G(t, y) = \hat{G}(t)(y)$，则 G 是内函数。所以对每个有限 $t \in E$，$y \in {}^*\mathbb{R}$ 有限，我们有 $G(t, y) = \hat{G}(t)(y) \approx {}^*\hat{g}'(t)(y) \approx \hat{g}'(t)(st(y)) = \hat{g}(st(t))(st(y)) = g(st(t), st(y))$。 $\square$