

非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

第二章

非标准分析和微积分

2. 非标准分析和微积分 -1

定义 (2.1)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。

2. 非标准分析和微积分 -1

定义 (2.1)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。

1. 如果对任何正标准实数 α 都有 $|r| < \alpha$, 则称 r 为无穷小, 记为 $r \approx 0$,

2. 非标准分析和微积分 -1

定义 (2.1)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。

1. 如果对任何正标准实数 α 都有 $|r| < \alpha$, 则称 r 为**无穷小**, 记为 $r \approx 0$,
2. 如果 $r - r' \approx 0$, 我们称 r' **无穷接近于** r 并记为 $r' \approx r$,

2. 非标准分析和微积分 -1

定义 (2.1)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。

1. 如果对任何正标准实数 α 都有 $|r| < \alpha$, 则称 r 为**无穷小**, 记为 $r \approx 0$,
2. 如果 $r - r' \approx 0$, 我们称 r' **无穷接近于** r 并记为 $r' \approx r$,
3. 如果存在一标准实数 $\alpha > 0$ 使得 $-\alpha < r < \alpha$, 我们称 r 是**有限的**,

2. 非标准分析和微积分 -1

定义 (2.1)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。

1. 如果对任何正标准实数 α 都有 $|r| < \alpha$, 则称 r 为**无穷小**, 记为 $r \approx 0$,
2. 如果 $r - r' \approx 0$, 我们称 r' **无穷接近于** r 并记为 $r' \approx r$,
3. 如果存在一标准实数 $\alpha > 0$ 使得 $-\alpha < r < \alpha$, 我们称 r 是**有限的**,
4. 如果存在一标准实数 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得 $r \approx \alpha$, 我们称 r 为**几乎标准的**。

2. 非标准分析和微积分 -2

定义 (2.2)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。则

2. 非标准分析和微积分 -2

定义 (2.2)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。则

1. $r \lesssim r'$ 表示 $r < r'$ 或 $r \approx r'$,

2. 非标准分析和微积分 -2

定义 (2.2)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。则

1. $r \lesssim r'$ 表示 $r < r'$ 或 $r \approx r'$,
2. $r \gtrsim r'$ 表示 $r > r'$ 或 $r \approx r'$,

2. 非标准分析和微积分 -2

定义 (2.2)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。则

1. $r \lesssim r'$ 表示 $r < r'$ 或 $r \approx r'$,
2. $r \gtrsim r'$ 表示 $r > r'$ 或 $r \approx r'$,
3. $r \ll r'$ 表示 $r < r'$ 并且 $r \not\approx r'$,

2. 非标准分析和微积分 -2

定义 (2.2)

设 $r, r' \in {}^*\mathbb{R}$ 。则

1. $r \lesssim r'$ 表示 $r < r'$ 或 $r \approx r'$,
2. $r \gtrsim r'$ 表示 $r > r'$ 或 $r \approx r'$,
3. $r \ll r'$ 表示 $r < r'$ 并且 $r \not\approx r'$,
4. $r \gg r'$ 表示 $r > r'$ 并且 $r \not\approx r'$, 不难证明如果 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $r \approx \alpha$ 和 $r \approx \beta$ 都成立, 则 $\alpha = \beta$ 。

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$ 。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$ 。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

则 $-\alpha \in S$ 并且 α 是 S 的上界。所以 S 有一上确界 β 。接下来证明 $r \approx \beta$ 。

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$ 。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

则 $-\alpha \in S$ 并且 α 是 S 的上界。所以 S 有一上确界 β 。接下来证明 $r \approx \beta$ 。如果 $r \ll \beta$ ，则存在 $\gamma > 0$ 使得 $\beta - r > \gamma$ 。所以 $\beta - \gamma > r$ 。但这推出 $\beta - \gamma$ 是 S 的上界，这和 β 是 S 的上确界矛盾。

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$ 。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

则 $-\alpha \in S$ 并且 α 是 S 的上界。所以 S 有一上确界 β 。接下来证明 $r \approx \beta$ 。如果 $r \ll \beta$ ，则存在 $\gamma > 0$ 使得 $\beta - r > \gamma$ 。所以 $\beta - \gamma > r$ 。但这推出 $\beta - \gamma$ 是 S 的上界，这和 β 是 S 的上确界矛盾。如果 $r \gg \beta$ 则存在 $\gamma > 0$ 使得 $r - \beta > \gamma$ 。所以 $\beta + \gamma < r$ 。

2. 非标准分析和微积分 -3

定理 (2.3)

每个有限实数 $r \in {}^*\mathbb{R}$ 都是几乎标准的。

证明：设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 大于 0 使得 $|r| < \alpha$ 。在标准意义下定义集合

$$S := \{\gamma \in \mathbb{R} : \gamma < r\}.$$

则 $-\alpha \in S$ 并且 α 是 S 的上界。所以 S 有一上确界 β 。接下来证明 $r \approx \beta$ 。如果 $r \ll \beta$ ，则存在 $\gamma > 0$ 使得 $\beta - r > \gamma$ 。所以 $\beta - \gamma > r$ 。但这推出 $\beta - \gamma$ 是 S 的上界，这和 β 是 S 的上确界矛盾。如果 $r \gg \beta$ 则存在 $\gamma > 0$ 使得 $r - \beta > \gamma$ 。所以 $\beta + \gamma < r$ 。但这推出 $\beta + \gamma \in S$ ，而这又和 β 是 S 的上界矛盾。所以我们有 $r \approx \beta$ 。□

2. 非标准分析和微积分 -4

定义 (2.4)

记 $\text{Fin}({}^*\mathbb{R}) := \{r \in {}^*\mathbb{R} : r \text{ 是有限的}\}$ 。记 $st : \text{Fin}({}^*\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 为一映射使得 $st(r) = \alpha$ 当且仅当 $r \approx \alpha$ 。映射 st 称为**标准化映照**。

2. 非标准分析和微积分 -4

定义 (2.4)

记 $\text{Fin}({}^*\mathbb{R}) := \{r \in {}^*\mathbb{R} : r \text{ 是有限的}\}$ 。记 $st: \text{Fin}({}^*\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 为一映射使得 $st(r) = \alpha$ 当且仅当 $r \approx \alpha$ 。映射 st 称为**标准化映照**。

当我们用非标准分析研究标准世界中的数学问题时，常常先把标准问题非标准化，然后在非标准模型中推导出一些结果，再用标准化映照把非标准结果拉回到标准超结构中去使其成为一个标准结果。所以标准化映照和转换原理是联系标准模型和非标准模型的两大工具。

2.1 极限和连续性 -1

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为超有限自然数或超整数。

2.1 极限和连续性 -1

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为**超有限自然数**或**超整数**。名字“超有限”指的是它在非标准模型中是有限的，但从标准世界的角度来看是无穷大。但我们更多时候用超整数这个词。

2.1 极限和连续性 -1

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为**超有限自然数**或**超整数**。名字“超有限”指的是它在非标准模型中是有限的，但从标准世界的角度来看是无穷大。但我们更多时候用超整数这个词。如果 $m \in {}^*\mathbb{N}$ ，记 $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ 。我们把一个实数数列 s 看成是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。由转换原理， ${}_s$ 是从 ${}^*\mathbb{N}$ 到 ${}^*\mathbb{R}$ 的函数。

2.1 极限和连续性 -1

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为**超有限自然数**或**超整数**。名字“超有限”指的是它在非标准模型中是有限的，但从标准世界的角度来看是无穷大。但我们更多时候用超整数这个词。如果 $m \in {}^*\mathbb{N}$ ，记 $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ 。我们把一个实数数列 s 看成是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。由转换原理， *s 是从 ${}^*\mathbb{N}$ 到 ${}^*\mathbb{R}$ 的函数。

定义 (2.5)

设 s 是一实数数列， α 是一实数。如果对任意超整数 K 都有 ${}^*s(K) \approx \alpha$ 则称 α 是 s 的极限，记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = \alpha.$$

2.1 极限和连续性 -1

我们称在 ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ 中的自然数为**超有限自然数**或**超整数**。名字“超有限”指的是它在非标准模型中是有限的，但从标准世界的角度来看是无穷大。但我们更多时候用超整数这个词。如果 $m \in {}^*\mathbb{N}$ ，记 $[m] := \{1, 2, \dots, m\}$ 。我们把一个实数数列 s 看成是从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数。由转换原理， ${}_s$ 是从 ${}^*\mathbb{N}$ 到 ${}^*\mathbb{R}$ 的函数。

定义 (2.5)

设 s 是一实数数列， α 是一实数。如果对任意超整数 K 都有 ${}_s(K) \approx \alpha$ 则称 α 是 s 的极限，记为

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = \alpha.$$

命题 (2.6)

在定义 2.5 中的数列极限定义和通常的 ϵ - N 定义是等价的。

2.1 极限和连续性 -2

定理 (2.7 Bolzano–Weierstrass)

如果 s 是一有界数列, 则 s 一定有一收敛子列。

2.1 极限和连续性 -2

定理 (2.7 Bolzano–Weierstrass)

如果 s 是一有界数列, 则 s 一定有一收敛子列。

证明: 设 α 是 $|s|$ 的上界。随便取一个超整数 K 。因为 $(\forall k \in \mathbb{N})(|s(k)| < \alpha)$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真, 所以 $(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*s(k)| < \alpha)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。

2.1 极限和连续性 -2

定理 (2.7 Bolzano–Weierstrass)

如果 s 是一有界数列, 则 s 一定有一收敛子列。

证明: 设 α 是 $|s|$ 的上界。随便取一个超整数 K 。因为 $(\forall k \in \mathbb{N})(|s(k)| < \alpha)$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真, 所以 $(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*s(k)| < \alpha)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。因此 $s(K) \in \text{Fin}({}^*\mathbb{R})$ 。设 $\alpha = \text{st}(s(K))$ 。我们证明 s 有一个子列 s' 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} s'(i) = \alpha$ 。

2.1 极限和连续性 -2

定理 (2.7 Bolzano–Weierstrass)

如果 s 是一有界数列, 则 s 一定有一收敛子列。

证明: 设 α 是 $|s|$ 的上界。随便取一个超整数 K 。因为 $(\forall k \in \mathbb{N})(|s(k)| < \alpha)$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真, 所以 $(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*s(k)| < \alpha)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。因此 $s(K) \in \text{Fin}({}^*\mathbb{R})$ 。设 $\alpha = \text{st}(s(K))$ 。我们证明 s 有一个子列 s' 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} s'(i) = \alpha$ 。如果对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 都能找到一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $k > m$ 且 $|s(k) - \alpha| < 1/m$, 则通过递归我们能找到一个 s 的子列收敛于极限 α 。

2.1 极限和连续性 -2

定理 (2.7 Bolzano-Weierstrass)

如果 s 是一有界数列, 则 s 一定有一收敛子列。

证明: 设 α 是 $|s|$ 的上界。随便取一个超整数 K 。因为 $(\forall k \in \mathbb{N})(|s(k)| < \alpha)$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真, 所以 $(\forall k \in {}^*\mathbb{N})(|{}^*s(k)| < \alpha)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。因此 $s(K) \in \text{Fin}({}^*\mathbb{R})$ 。设 $\alpha = \text{st}(s(K))$ 。我们证明 s 有一个子列 s' 使得 $\lim_{i \rightarrow \infty} s'(i) = \alpha$ 。如果对每一个 $m \in \mathbb{N}$ 都能找到一个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $k > m$ 且 $|s(k) - \alpha| < 1/m$, 则通过递归我们能找到一个 s 的子列收敛于极限 α 。

假设有一个 $m \in \mathbb{N}$ 使得对任何一个 $k \in \mathbb{N}$, $k > m$ 都有 $|s(k) - \alpha| \geq 1/m$ 。则由转换原理, 对任何一个 $k \in {}^*\mathbb{N}$, $k > m$ 都有 $|{}^*s(k) - \alpha| \geq 1/m$, 而这和 ${}^*s(K) \approx \alpha$ 矛盾。 $\square$

2.1 极限和连续性 -3

定理 (2.8 柯西判别法)

一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件, 即对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$ 。

2.1 极限和连续性 -3

定理 (2.8 柯西判别法)

一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件, 即对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$ 。

证明: 我们只证充分性。设 s 满足柯西条件。则容易证明 s 是有界数列。取定任意两个超整数 K, K' 我们证明 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$ 。

2.1 极限和连续性 -3

定理 (2.8 柯西判别法)

一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件, 即对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$ 。

证明: 我们只证充分性。设 s 满足柯西条件。则容易证明 s 是有界数列。取定任意两个超整数 K, K' 我们证明 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$ 。

对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $K, K' \geq N_m$ 。所以由转换原理我们有 $|{}^*s(K) - {}^*s(K')| < 1/m$ 。因此 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$, 即存在唯一的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对每一个超整数 K 都有 $st({}^*s(K)) = \alpha$ 。

2.1 极限和连续性 -3

定理 (2.8 柯西判别法)

一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件, 即对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$ 。

证明: 我们只证充分性。设 s 满足柯西条件。则容易证明 s 是有界数列。取定任意两个超整数 K, K' 我们证明 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$ 。

对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $K, K' \geq N_m$ 。所以由转换原理我们有 $|{}^*s(K) - {}^*s(K')| < 1/m$ 。因此 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$, 即存在唯一的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对每一个超整数 K 都有 $st({}^*s(K)) = \alpha$ 。由定义 2.5 我们有 $\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = \alpha$ 。 $\square$

2.1 极限和连续性 -3

定理 (2.8 柯西判别法)

一个数列 s 收敛当且仅当 s 满足柯西条件, 即对任意 $m \in \mathbb{N}$, 存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 满足对任意 $k, k' \geq N_m$ 都有 $|s(k) - s(k')| < 1/m$.

证明: 我们只证充分性。设 s 满足柯西条件。则容易证明 s 是有界数列。取定任意两个超整数 K, K' 我们证明 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$ 。

对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都有 $K, K' \geq N_m$ 。所以由转换原理我们有 $|{}^*s(K) - {}^*s(K')| < 1/m$ 。因此 ${}^*s(K) \approx {}^*s(K')$, 即存在唯一的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 使得对每一个超整数 K 都有 $st({}^*s(K)) = \alpha$ 。由定义 2.5 我们有 $\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = \alpha$. □

定义 (2.9)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$, $f: [a, b] \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$, 且 $L \in \mathbb{R}$ 。如果对任意 $r \in [a, b]$, $r \neq c$, $r \approx c$ 都有 ${}^*f(r) \approx L$, 则称 L 为 f 在 c 的极限并记为 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ 。

2.1 极限和连续性 -4

定义 (2.10)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 且 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果对任意 $r \in [a, b]$, $r \approx c$ 都有 ${}^*f(r) \approx f(c)$, 则称 f 在 c 连续。如果对每一个 $c \in [a, b]$ 都有 f 在 c 连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上连续。

2.1 极限和连续性 -4

定义 (2.10)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ 且 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。如果对任意 $r \in [a, b]$, $r \approx c$ 都有 $*f(r) \approx f(c)$, 则称 f 在 c 连续。如果对每一个 $c \in [a, b]$ 都有 f 在 c 连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上连续。

定理 (2.11 极值定理)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则存在 $c, d \in [a, b]$ 使得 $f(c)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值和 $f(d)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的最小值, 即对任何一个 $x \in [a, b]$ 都有 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K\}$ 有一最大数 $^*f(r_{i_0})$ 和最小数 $^*f(r_{i_1})$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K\}$ 有一最大数 $^*f(r_{i_0})$ 和最小数 $^*f(r_{i_1})$ 。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$ ，则有 $c, d \in [a, b]$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{ {}^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K \}$ 有一最大数 ${}^*f(r_{i_0})$ 和最小数 ${}^*f(r_{i_1})$ 。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$ ，则有 $c, d \in [a, b]$ 。因为 f 在 c 和 d 连续，我们有 ${}^*f(r_{i_0}) \approx f(c)$ 和 ${}^*f(r_{i_1}) \approx f(d)$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K\}$ 有一最大数 $^*f(r_{i_0})$ 和最小数 $^*f(r_{i_1})$ 。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$ ，则有 $c, d \in [a, b]$ 。因为 f 在 c 和 d 连续，我们有 $^*f(r_{i_0}) \approx f(c)$ 和 $^*f(r_{i_1}) \approx f(d)$ 。取任意 $x \in [a, b]$ ，则存在 $i_2 \leq K$ 使得 $r_{i_2} \approx x$ (只需取 i_2 为最大 i 使得 $r_i < x$)。则我们有 $^*f(r_{i_2}) \approx f(x)$ 。

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K\}$ 有一最大数 $^*f(r_{i_0})$ 和最小数 $^*f(r_{i_1})$ 。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$ ，则有 $c, d \in [a, b]$ 。因为 f 在 c 和 d 连续，我们有 $^*f(r_{i_0}) \approx f(c)$ 和 $^*f(r_{i_1}) \approx f(d)$ 。取任意 $x \in [a, b]$ ，则存在 $i_2 \leq K$ 使得 $r_{i_2} \approx x$ (只需取 i_2 为最大 i 使得 $r_i < x$)。则我们有 $^*f(r_{i_2}) \approx f(x)$ 。综合上述步骤我们可推出

$$f(d) \approx ^*f(r_{i_1}) \leq ^*f(r_{i_2}) \approx f(x) \approx ^*f(r_{i_2}) \leq ^*f(r_{i_0}) \approx f(c).$$

2.1 极限和连续性 -5

证明：取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。在 $\mathcal{V}$ 中每个有限实数集都有一个最大数和最小数，由转换原理集合 $\{^*f(r_i) : i = 0, 1, \dots, K\}$ 有一最大数 $^*f(r_{i_0})$ 和最小数 $^*f(r_{i_1})$ 。设 $st(r_{i_0}) = c$ 和 $st(r_{i_1}) = d$ ，则有 $c, d \in [a, b]$ 。因为 f 在 c 和 d 连续，我们有 $^*f(r_{i_0}) \approx f(c)$ 和 $^*f(r_{i_1}) \approx f(d)$ 。取任意 $x \in [a, b]$ ，则存在 $i_2 \leq K$ 使得 $r_{i_2} \approx x$ (只需取 i_2 为最大 i 使得 $r_i < x$)。则我们有 $^*f(r_{i_2}) \approx f(x)$ 。综合上述步骤我们可推出

$$f(d) \approx ^*f(r_{i_1}) \leq ^*f(r_{i_2}) \approx f(x) \approx ^*f(r_{i_2}) \leq ^*f(r_{i_0}) \approx f(c).$$

因为 $f(x)$ ， $f(c)$ 和 $f(d)$ 都是标准实数，所以 $f(d) \leq f(x) \leq f(c)$ 。

□

2.1 极限和连续性 -6

推论 (2.12)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 是有界的。

2.1 极限和连续性 -6

推论 (2.12)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 是有界的。

定理 (2.13 介值定理)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) < 0 < f(b)$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$ 。

2.1 极限和连续性 -6

推论 (2.12)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 是有界的。

定理 (2.13 介值定理)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) < 0 < f(b)$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$ 。

证明: 取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。则由转换原理, 存在 $i_0 < K$ 使得 ${}^*f(r_{i_0}) \leq 0 \leq {}^*f(r_{i_0+1})$ 。

2.1 极限和连续性 -6

推论 (2.12)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 f 是有界的。

定理 (2.13 介值定理)

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) < 0 < f(b)$, 则存在 $c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = 0$ 。

证明: 取定一个超整数 K 。对每个 $i = 0, 1, \dots, K$ 设 $r_i := a + i(b - a)/K$ 。则由转换原理, 存在 $i_0 < K$ 使得 ${}^*f(r_{i_0}) \leq 0 \leq {}^*f(r_{i_0+1})$ 。因为 $r_{i_0} \approx r_{i_0+1}$, 我们有 $st(r_{i_0}) = st(r_{i_0+1}) = c \in [a, b]$ 。因为 f 在 c 连续, 我们有 $0 \geq {}^*f(r_{i_0}) \approx f(c) \approx {}^*f(r_{i_0+1}) \geq 0$ 。因为 $f(c)$ 是标准实数, 所以 $f(c) = 0$ 。 □

2.2 导数和积分 -1

定义 (2.14)

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, $c \in (a, b)$, $L \in \mathbb{R}$ 。如果对于任何非零无穷小 t 都有

$$\frac{f(c+t) - f(c)}{t} \approx L,$$

2.2 导数和积分 -1

定义 (2.14)

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, $c \in (a, b)$, $L \in \mathbb{R}$ 。如果对于任何非零无穷小 t 都有

$$\frac{f(c+t) - f(c)}{t} \approx L,$$

则称 f 在 c 可导且有导数 L , 并记为

$$f'(c) = L = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(c+t) - f(c)}{t} \right).$$

2.2 导数和积分 -1

定义 (2.14)

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, $c \in (a, b)$, $L \in \mathbb{R}$. 如果对于任何非零无穷小 t 都有

$$\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \approx L,$$

则称 f 在 c 可导且有导数 L , 并记为

$$f'(c) = L = st \left(\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \right).$$

例 (2.15)

设 $f(x) = x^2$, $c \in \mathbb{R}$. 则对一非零无穷小 t 我们有

2.2 导数和积分 -1

定义 (2.14)

设 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, $c \in (a, b)$, $L \in \mathbb{R}$. 如果对于任何非零无穷小 t 都有

$$\frac{f(c+t) - f(c)}{t} \approx L,$$

则称 f 在 c 可导且有导数 L , 并记为

$$f'(c) = L = st \left(\frac{f(c+t) - f(c)}{t} \right).$$

例 (2.15)

设 $f(x) = x^2$, $c \in \mathbb{R}$. 则对一非零无穷小 t 我们有

$$f'(c) = st \left(\frac{(c+t)^2 - c^2}{t} \right) = st \left(\frac{2ct + t^2}{t} \right) = st(2c + t) = 2c.$$

2.2 导数和积分 -2

定理 (2.16 链式法则)

设 $f: (a, b) \rightarrow (d, e)$, $g: (d, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ 使得 f 在 c 可导且 g 在 $f(c)$ 可导。则 $g \circ f$ 在 c 可导且对任意非零无穷小 t ,

$$(g \circ f)'(c) = st \left(\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} \right) = g'(f(c)) * f'(c).$$

2.2 导数和积分 -2

定理 (2.16 链式法则)

设 $f: (a, b) \rightarrow (d, e)$, $g: (d, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ 使得 f 在 c 可导且 g 在 $f(c)$ 可导。则 $g \circ f$ 在 c 可导且对任意非零无穷小 t ,

$$(g \circ f)'(c) = st \left(\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} \right) = g'(f(c)) * f'(c).$$

证明：任取一非零无穷小 t 。

2.2 导数和积分 -2

定理 (2.16 链式法则)

设 $f: (a, b) \rightarrow (d, e)$, $g: (d, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ 使得 f 在 c 可导且 g 在 $f(c)$ 可导。则 $g \circ f$ 在 c 可导且对任意非零无穷小 t ,

$$(g \circ f)'(c) = st \left(\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} \right) = g'(f(c)) * f'(c).$$

证明: 任取一非零无穷小 t 。如果 ${}^*f(c+t) = f(c)$, 则

$$f'(c) = st \left(\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \right) = 0 \text{ 并且}$$

$$\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} = 0 = g'(f(c)) * f'(c).$$

2.2 导数和积分 -2

定理 (2.16 链式法则)

设 $f: (a, b) \rightarrow (d, e)$, $g: (d, e) \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$ 使得 f 在 c 可导且 g 在 $f(c)$ 可导。则 $g \circ f$ 在 c 可导且对任意非零无穷小 t ,

$$(g \circ f)'(c) = st \left(\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} \right) = g'(f(c)) * f'(c).$$

证明: 任取一非零无穷小 t 。如果 ${}^*f(c+t) = f(c)$, 则

$$f'(c) = st \left(\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \right) = 0 \text{ 并且}$$

$$\frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} = 0 = g'(f(c)) * f'(c).$$

如果 ${}^*f(c+t) \neq f(c)$, 则 $r = {}^*f(c+t) - f(c) \approx 0$ 且

$$\begin{aligned} \frac{{}^*g({}^*f(c+t)) - g(f(c))}{t} &= \frac{{}^*g(f(c)+r) - g(f(c))}{r} * \frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \\ &\approx g'(f(c)) * f'(c). \end{aligned}$$

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f'(c)$ 也是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值。

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f'(c)$ 也是 f 在 $[a, b]$ 上的最大值。所以对任意非零无穷小 $t > 0$ 有

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f'(c)$ 也是 f' 在 $[a, b]$ 上的最大值。所以对任意非零无穷小 $t > 0$ 有

$$0 \leq \frac{f(c-t) - f(c)}{-t} \approx \frac{f(c+t) - f(c)}{t} \leq 0.$$

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f(c)$ 也是 *f 在 ${}^*[a, b]$ 上的最大值。所以对任意非零无穷小 $t > 0$ 有

$$0 \leq \frac{{}^*f(c-t) - f(c)}{-t} \approx \frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \leq 0.$$

所以 $f'(c) = st \left(\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \right) = 0$ 。如果 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值, 则定理可由对称性证明。 □

2.2 导数和积分 -3

定理 (2.17 罗尔定理)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f(a) = f(b)$ 。则存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = 0$ 。

证明: 如果 f 是常函数, 则 f 的导数处处为 0。如果 f 不是常函数, 则 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值, 或 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值。假设 f 在 $c \in (a, b)$ 取到最大值。则 f 在 c 可导且由转换原理 $f(c)$ 也是 *f 在 ${}^*[a, b]$ 上的最大值。所以对任意非零无穷小 $t > 0$ 有

$$0 \leq \frac{{}^*f(c-t) - f(c)}{-t} \approx \frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \leq 0.$$

所以 $f'(c) = st \left(\frac{{}^*f(c+t) - f(c)}{t} \right) = 0$ 。如果 f 在 $d \in (a, b)$ 取到最小值, 则定理可由对称性证明。 $\square$

从罗尔定理可容易推出导数中值定理。

2.2 导数和积分 -4

定义 (2.18)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。

2.2 导数和积分 -4

定义 (2.18)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。

1. 集合 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, 是一 $[a, b]$ 的划分如果

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b;$$

2.2 导数和积分 -4

定义 (2.18)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. 集合 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, 是一 $[a, b]$ 的划分如果

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b;$$

2. 对每一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, 记

$$\text{mesh}(P) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in [k]\};$$

2.2 导数和积分 -4

定义 (2.18)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. 集合 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, 是一 $[a, b]$ 的划分如果

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b;$$

2. 对每一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, 记

$$\text{mesh}(P) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in [k]\};$$

3. $[a, b]$ 上的划分 P 比 $[a, b]$ 上的划分 P' 精细, 如果 P' 中的点都在 P 中;

2.2 导数和积分 -4

定义 (2.18)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. 集合 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$, 是一 $[a, b]$ 的划分如果

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b;$$

2. 对每一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$, 记

$$\text{mesh}(P) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in [k]\};$$

3. $[a, b]$ 上的划分 P 比 $[a, b]$ 上的划分 P' 精细, 如果 P' 中的点都在 P 中;
4. 设 P 和 P' 是 $[a, b]$ 上的两个划分。则 $P \cup P'$ 是 $[a, b]$ 上比 P 和 P' 都精细的划分,

2.2 导数和积分 -5

5. 如果存在一个 $I \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和每个相伴点集 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

2.2 导数和积分 -5

5. 如果存在一个 $l \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和每个相伴点集 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$^*R(^*f, P, T) := \sum_{i=1}^K ^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx l,$$

2.2 导数和积分 -5

5. 如果存在一个 $l \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和每个相伴点集 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$^*R(^*f, P, T) := \sum_{i=1}^K ^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx l,$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 且对任意一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和相伴点集 T , 记 f 在 $[a, b]$ 上的积分为

2.2 导数和积分 -5

5. 如果存在一个 $I \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和每个相伴点集 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$^*R(^*f, P, T) := \sum_{i=1}^K ^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx I,$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 且对任意一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和相伴点集 T , 记 f 在 $[a, b]$ 上的积分为

$$\int_a^b f(x) dx := I = st(^*R(^*f, P, T)).$$

2.2 导数和积分 -5

5. 如果存在一个 $l \in \mathbb{R}$ 使得对每一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和每个相伴点集 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\} \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

$$^*R(^*f, P, T) := \sum_{i=1}^K ^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx l,$$

则称 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 且对任意一个 $^*[a, b]$ 的划分 $P \in ^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 和相伴点集 T , 记 f 在 $[a, b]$ 上的积分为

$$\int_a^b f(x) dx := l = st(^*R(^*f, P, T)).$$

由相伴点集 T 的任意性, 可证明 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数一定有界。

2.2 导数和积分 -6

定义 (2.19)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 记

2.2 导数和积分 -6

定义 (2.19)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 记

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ 和 } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

2.2 导数和积分 -6

定义 (2.19)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 记

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ 和 } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^k M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ 和 } L(f, P) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1})$$

分别称为 f 在 $[a, b]$ 上的上和和 f 在 $[a, b]$ 上的下和。

2.2 导数和积分 -6

定义 (2.19)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 记

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ 和 } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^k M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ 和 } L(f, P) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1})$$

分别称为 f 在 $[a, b]$ 上的上和和 f 在 $[a, b]$ 上的下和。

由定义 2.19 可看出对 $[a, b]$ 的任意划分 P, P' 都有

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup P') \leq U(f, P \cup P') \leq U(f, P').$$

2.2 导数和积分 -6

定义 (2.19)

设 $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 有界。给定一个 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, 记

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\} \text{ 和 } m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^k M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ 和 } L(f, P) = \sum_{i=1}^k m_i(x_i - x_{i-1})$$

分别称为 f 在 $[a, b]$ 上的上和和 f 在 $[a, b]$ 上的下和。

由定义 2.19 可看出对 $[a, b]$ 的任意划分 P, P' 都有

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup P') \leq U(f, P \cup P') \leq U(f, P').$$

所以每个上和 $U(f, P)$ 是所有下和的上界而每个下和是所有上和的下界。

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明: 设 $\bar{l} = \inf\{U(f, P) : P \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的划分}\}$ 。由转换原理 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P')$ 。

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明: 设 $\bar{I} = \inf\{U(f, P) : P \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的划分}\}$ 。由转换原理 $\bar{I} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\bar{I} \leq {}^*U({}^*f, P')$ 。给定标准正实数 ϵ , 则存在一个超结构中的划分 P'' 使得 $U(f, P'') < \bar{I} + \epsilon$ 。

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明: 设 $\bar{l} = \inf\{U(f, P) : P \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的划分}\}$ 。由转换原理 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P')$ 。给定标准正实数 ϵ , 则存在一个超结构中的划分 P'' 使得 $U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。因为 P'' 只包含有限个点, 所以和式 ${}^*U({}^*f, P)$ 与和式 ${}^*U({}^*f, P \cup P'')$ 最多只有有限多个项不同, 而因为 f 是有界函数推出和式中的每一项都是无穷小, 所以 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P \cup P'') \leq U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明: 设 $\bar{l} = \inf\{U(f, P) : P \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的划分}\}$ 。由转换原理 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P')$ 。给定标准正实数 ϵ , 则存在一个超结构中的划分 P'' 使得 $U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。因为 P'' 只包含有限个点, 所以和式 ${}^*U({}^*f, P)$ 与和式 ${}^*U({}^*f, P \cup P'')$ 最多只有有限多个项不同, 而因为 f 是有界函数推出和式中的每一项都是无穷小, 所以 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P \cup P'') \leq U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。由于 $\epsilon > 0$ 在超结构中可任意小, 我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx \bar{l}$, 因此我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P')$ 。

2.2 导数和积分 -7

命题 (2.20)

设 $f: [a, b]$ 有界。如果 $P, P' \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 是 ${}^*[a, b]$ 的划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$, 则我们有

$${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P') \text{ 和 } {}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P').$$

证明: 设 $\bar{l} = \inf\{U(f, P) : P \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的划分}\}$ 。由转换原理 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P)$ 和 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P')$ 。给定标准正实数 ϵ , 则存在一个超结构中的划分 P'' 使得 $U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。因为 P'' 只包含有限个点, 所以和式 ${}^*U({}^*f, P)$ 与和式 ${}^*U({}^*f, P \cup P'')$ 最多只有有限多个项不同, 而因为 f 是有界函数推出和式中的每一项都是无穷小, 所以 $\bar{l} \leq {}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P \cup P'') \leq U(f, P'') < \bar{l} + \epsilon$ 。由于 $\epsilon > 0$ 在超结构中可任意小, 我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx \bar{l}$, 因此我们有 ${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*U({}^*f, P')$ 。

由对称性可证 ${}^*L({}^*f, P) \approx {}^*L({}^*f, P')$ 。

□

2.2 导数和积分 -8

定理 (2.21)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 $[a, b]$ 的划分 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 都有

$$U(f, P) \approx L(f, P).$$

2.2 导数和积分 –8

定理 (2.21)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 $[a, b]$ 的划分 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 都有

$$U(f, P) \approx L(f, P).$$

证明: “ $\Leftarrow$ ”: 设 $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ 是两个划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$ 。则我们有

2.2 导数和积分 –8

定理 (2.21)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 $[a, b]$ 的划分 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 都有

$$*U(*f, P) \approx *L(*f, P).$$

证明: “ $\Leftarrow$ ”: 设 $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ 是两个划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$ 。则我们有

$$*L(*f, P) \leq *R(*f, P, T) \leq *U(*f, P),$$

2.2 导数和积分 -8

定理 (2.21)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 $[a, b]$ 的划分 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 都有

$$*U(*f, P) \approx *L(*f, P).$$

证明: “ $\Leftarrow$ ”: 设 $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ 是两个划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$ 。则我们有

$$*L(*f, P) \leq *R(*f, P, T) \leq *U(*f, P),$$

$$*L(*f, P') \leq *R(*f, P', T') \leq *U(*f, P').$$

2.2 导数和积分 -8

定理 (2.21)

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是一有界函数。则 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积当且仅当对所有 $[a, b]$ 的划分 $P \in \mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 都有

$$*U(*f, P) \approx *L(*f, P).$$

证明: “ $\Leftarrow$ ”: 设 $P, P' \in \mathcal{P}([a, b])$ 是两个划分满足 $\text{mesh}(P) \approx 0 \approx \text{mesh}(P')$ 。则我们有

$$*L(*f, P) \leq *R(*f, P, T) \leq *U(*f, P),$$

$$*L(*f, P') \leq *R(*f, P', T') \leq *U(*f, P').$$

因为 $*U(*f, P)$, $*L(*f, P)$, 和 $*U(*f, P')$, $*L(*f, P')$ 都无穷接近, 所以由命题 2.20 和所给条件我们有 $*R(*f, P, T) \approx *R(*f, P', T')$, 即 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积。

2.2 导数和积分 -9

“ $\Rightarrow$ ”: 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积。给定 $[a, b]$ 的划分
 $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_K\} \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。

2.2 导数和积分 -9

“ $\Rightarrow$ ”: 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积。给定 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_K\} \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中取两个相伴集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ 和 $T' = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_K\}$ 使得对每个 i 都有 $M_i - {}^*f(t_i) \approx 0$ 和 ${}^*f(t'_i) - m_i \approx 0$ 。

2.2 导数和积分 -9

“ $\Rightarrow$ ”: 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积。给定 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_K\} \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中取两个相伴集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ 和 $T' = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_K\}$ 使得对每个 i 都有 $M_i - {}^*f(t_i) \approx 0$ 和 ${}^*f(t'_i) - m_i \approx 0$ 。则我们有

$${}^*U({}^*f, P) - {}^*R({}^*f, P, T) \leq \sum_{i=1}^K (M_i - {}^*f(t_i))(x_i - x_{i-1}) \approx 0 \text{ 和}$$

2.2 导数和积分 -9

“ $\Rightarrow$ ”: 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积。给定 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_K\} \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中取两个相伴集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ 和 $T' = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_K\}$ 使得对每个 i 都有 $M_i - {}^*f(t_i) \approx 0$ 和 ${}^*f(t'_i) - m_i \approx 0$ 。则我们有

$${}^*U({}^*f, P) - {}^*R({}^*f, P, T) \leq \sum_{i=1}^K (M_i - {}^*f(t_i))(x_i - x_{i-1}) \approx 0 \text{ 和}$$

$${}^*R({}^*f, P, T') - {}^*L({}^*f, P) \leq \sum_{i=1}^K ({}^*f(t'_i) - m_i)(x_i - x_{i-1}) \approx 0.$$

2.2 导数和积分 -9

“ $\Rightarrow$ ”: 假设 f 在 $[a, b]$ 上可积。给定 $[a, b]$ 的划分 $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_K\} \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 满足 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。在 ${}^*\mathcal{V}$ 中取两个相伴集合 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_K\}$ 和 $T' = \{t'_1, t'_2, \dots, t'_K\}$ 使得对每个 i 都有 $M_i - {}^*f(t_i) \approx 0$ 和 ${}^*f(t'_i) - m_i \approx 0$ 。则我们有

$${}^*U({}^*f, P) - {}^*R({}^*f, P, T) \leq \sum_{i=1}^K (M_i - {}^*f(t_i))(x_i - x_{i-1}) \approx 0 \text{ 和}$$

$${}^*R({}^*f, P, T') - {}^*L({}^*f, P) \leq \sum_{i=1}^K ({}^*f(t'_i) - m_i)(x_i - x_{i-1}) \approx 0.$$

所以 ${}^*U({}^*f, P) \approx {}^*R({}^*f, P, T) \approx {}^*R({}^*f, P, T') \approx {}^*L({}^*f, P)$ 。

□

2.2 导数和积分 -10

定理 (2.22)

设 $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上 F 可导且 $F'(x) = f(x)$ 。
则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

2.2 导数和积分 -10

定理 (2.22)

设 $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上 F 可导且 $F'(x) = f(x)$ 。
则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

证明: 取定一划分 $P \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 使得 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。对每个 $i \in [K]$ 由中值定理加上转换原理, 存在 $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 ${}^*F(x_i) - {}^*F(x_{i-1}) = {}^*F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = {}^*f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ 。

2.2 导数和积分 -10

定理 (2.22)

设 $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上 F 可导且 $F'(x) = f(x)$ 。
则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

证明: 取定一划分 $P \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 使得 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。对每个 $i \in [K]$ 由中值定理加上转换原理, 存在 $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 ${}^*F(x_i) - {}^*F(x_{i-1}) = {}^*F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = {}^*f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ 。所以

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^K ({}^*F(x_i) - {}^*F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^K {}^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

2.2 导数和积分 -10

定理 (2.22)

设 $F, f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 在 (a, b) 上 F 可导且 $F'(x) = f(x)$ 。
则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

证明: 取定一划分 $P \in {}^*\mathcal{P}([a, b])$ 使得 $\text{mesh}(P) \approx 0$ 。对每个 $i \in [K]$ 由中值定理加上转换原理, 存在 $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 使得 ${}^*F(x_i) - {}^*F(x_{i-1}) = {}^*F'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = {}^*f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ 。所以

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^K ({}^*F(x_i) - {}^*F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^K {}^*f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^b f(x) dx.$$

因为 $\int_a^b f(x) dx$ 和 $F(b) - F(a)$ 都是标准实数, 所以它们相等。□

2.3 Peano 存在性定理 -1

定理 (2.23)

设 $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是二元有界连续函数, $p \in \mathbb{R}$ 。则存在函数 $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对所有 $r \in [0, 1]$

$$y(r) = p + \int_0^r g(s, y(s)) ds.$$

2.3 Peano 存在性定理 -1

定理 (2.23)

设 $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是二元有界连续函数, $p \in \mathbb{R}$ 。则存在函数 $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对所有 $r \in [0, 1]$

$$y(r) = p + \int_0^r g(s, y(s)) ds.$$

证明: 取一超整数 K , 设 $T := \{t_i = i/K : i = 0, 1, \dots, K\}$, $\Delta t = 1/K$ 。

2.3 Peano 存在性定理 -1

定理 (2.23)

设 $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是二元有界连续函数, $p \in \mathbb{R}$ 。则存在函数 $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足对所有 $r \in [0, 1]$

$$y(r) = p + \int_0^r g(s, y(s)) ds.$$

证明: 取一超整数 K , 设 $T := \{t_i = i/K : i = 0, 1, \dots, K\}$, $\Delta t = 1/K$ 。归纳定义 Y 使得 $Y(0) := p$,

$$Y(t_{i+1}) := p + \sum_{j=0}^i {}^*g(t_j, Y(t_j))\Delta t.$$

2.3 Peano 存在性定理 -2

设 $|g| \leq B \in \mathbb{R}$ 。由转换原理, $|^*g| \leq B$ 。

2.3 Peano 存在性定理 -2

设 $|g| \leq B \in \mathbb{R}$ 。由转换原理, $|^*g| \leq B$ 。因为

$$|Y(t_{i+1})| \leq |p| + \sum_{j=0}^i |^*g(t_j, Y(t_j))| \Delta t \leq |p| + B,$$

2.3 Peano 存在性定理 -2

设 $|g| \leq B \in \mathbb{R}$ 。由转换原理, $|^*g| \leq B$ 。因为

$$|Y(t_{i+1})| \leq |p| + \sum_{j=0}^i |^*g(t_j, Y(t_j))| \Delta t \leq |p| + B,$$

所以对每个 $t \in T$, $Y(t)$ 是有限的。

2.3 Peano 存在性定理 -2

设 $|g| \leq B \in \mathbb{R}$ 。由转换原理, $|^*g| \leq B$ 。因为

$$|Y(t_{i+1})| \leq |p| + \sum_{j=0}^i |^*g(t_j, Y(t_j))| \Delta t \leq |p| + B,$$

所以对每个 $t \in T$, $Y(t)$ 是有限的。如果 $t_i < t_{i'}$, $t_i \approx t_{i'}$, 则

$$|Y(t_{i'}) - Y(t_i)| \leq \sum_{j=i}^{i'-1} B \Delta t = B(t_{i'-1} - t_{i-1}) \approx 0.$$

2.3 Peano 存在性定理 -2

设 $|g| \leq B \in \mathbb{R}$ 。由转换原理, $|^*g| \leq B$ 。因为

$$|Y(t_{i+1})| \leq |p| + \sum_{j=0}^i |^*g(t_j, Y(t_j))| \Delta t \leq |p| + B,$$

所以对每个 $t \in T$, $Y(t)$ 是有限的。如果 $t_i < t_{i'}$, $t_i \approx t_{i'}$, 则

$$|Y(t_{i'}) - Y(t_i)| \leq \sum_{j=i}^{i'-1} B \Delta t = B(t_{i'-1} - t_{i-1}) \approx 0.$$

所以 $Y(t_i) \approx Y(t_{i'})$ 。(这样的内函数称为是在 T 上 S -连续)。对每一标准实数 $r \in [0, 1]$, 取 $r^- = \max\{t \in T : t < r\}$ 并定义

$$y(r) := st(Y(r^-)).$$

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$y(r) \approx Y(r^-) = p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, Y(t))\Delta t$$

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$\begin{aligned} y(r) &\approx Y(r^-) = p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, Y(t))\Delta t \\ &= p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, {}^*y(t))\Delta t + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t \end{aligned}$$

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$\begin{aligned}y(r) &\approx Y(r^-) = p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, Y(t))\Delta t \\&= p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, {}^*y(t))\Delta t + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t \\&\approx p + \int_0^r g(s, y(s))ds + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t.\end{aligned}$$

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$\begin{aligned}y(r) &\approx Y(r^-) = p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, Y(t))\Delta t \\&= p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, {}^*y(t))\Delta t + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t \\&\approx p + \int_0^r g(s, y(s))ds + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t.\end{aligned}$$

因为 $Y(t) \approx {}^*y(t)$ 且 g 连续, 所以
 ${}^*g(t, Y(t)) \approx g(st(t), y(st(t))) \approx {}^*g(t, {}^*y(t))$ 。

2.3 Peano 存在性定理 -3

则 y 满足 Lipschitz 常数为 B 的 Lipschitz 条件且

$$\begin{aligned}y(r) &\approx Y(r^-) = p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, Y(t))\Delta t \\&= p + \sum_{t < r^-} {}^*g(t, {}^*y(t))\Delta t + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t \\&\approx p + \int_0^r g(s, y(s))ds + \sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t.\end{aligned}$$

因为 $Y(t) \approx {}^*y(t)$ 且 g 连续, 所以

${}^*g(t, Y(t)) \approx g(st(t), y(st(t))) \approx {}^*g(t, {}^*y(t))$ 。这推出
 $\sum_{t < r^-} ({}^*g(t, Y(t)) - {}^*g(t, {}^*y(t)))\Delta t \approx 0$, 即定理成立

□