非标准分析课程讲义

金人麟

College of Charleston, SC, USA

复旦大学哲学院暑期学校

2020 年 8 月 10 – 14 日

目录:

目录:

- 实数域和超结构的非标准扩张

目录:

- 实数域和超结构的非标准扩张
- 非标准分析和微积分

目录:

目录:

目录:

第一章

实数域和超结构的非标准扩张

实数域和超结构的非标准扩张

设 $\mathbb{R}$ 为所有 (标准) 实数的集合而

$$\mathcal{R} := (\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$$

则表示 (标准) 实数域。为了方便我们可设 $\mathcal{P} = \{+, *, 0, 1, <\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的零元，二元，和三元关系集。

实数域和超结构的非标准扩张

设 $\mathbb{R}$ 为所有 (标准) 实数的集合而

$$\mathcal{R} := (\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$$

则表示 (标准) 实数域。为了方便我们可设 $\mathcal{P} = \{+, *, 0, 1, <\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的零元，二元，和三元关系集。

现在我们将要把实数域 $\mathcal{R}$ 扩张成更大的有序域 ${}^*\mathcal{R}$ 使其包含无穷大和正无穷小。当然单纯地加一个无穷大 ∞ 和正无穷小 $1/\infty$ 不能使其成为有序域。我们的目标是要使 ${}^*\mathcal{R}$ 仍有 $\mathcal{R}$ 的大部分性质。

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1. 如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1. 如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；
2. 如果 $A \in \mathcal{U}$ 及 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$。

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1. 如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；
2. 如果 $A \in \mathcal{U}$ 及 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$。

记 $X \setminus A$ 为 A^C。如果 X 上的非主滤子再满足

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1. 如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；
2. 如果 $A \in \mathcal{U}$ 及 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$。

记 $X \setminus A$ 为 A^C。如果 X 上的非主滤子再满足

3. 对任意集合 $A \subseteq X$ 都有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^C \in \mathcal{U}$，

1.1 非主超滤子存在性 –1

定义 (1.1)

设 X 是一无限集合。又设 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$。如果所有 $\mathcal{U}$ 中有限个元素的交都是无限集，则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个**非主滤子基**。称一**非主滤子基** $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主滤子**，如果它满足：

1. 如果 $A, B \in \mathcal{U}$，则 $A \cap B \in \mathcal{U}$；
2. 如果 $A \in \mathcal{U}$ 及 $A \subseteq B \subseteq X$，则 $B \in \mathcal{U}$。

记 $X \setminus A$ 为 A^C。如果 X 上的非主滤子再满足

3. 对任意集合 $A \subseteq X$ 都有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^C \in \mathcal{U}$，

则称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的**非主超滤子**。

1.1 非主超滤子存在性 –2

命题 (1.2 假设 Zorn 引理)

每个无限集合 X 上的非主滤子都可扩充为非主超滤子。

1.1 非主超滤子存在性 –2

命题 (1.2 假设 Zorn 引理)

每个无限集合 X 上的非主滤子都可扩充为非主超滤子。

证明：设 $\mathcal{U}_0 := \{A \subseteq X : A^C$ 是一有限集$\}$ 并且 $\mathcal{U}_1$ 是 X 上的任一非主滤子。显然 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ 是 X 上的非主滤子基。设

1.1 非主超滤子存在性 –2

命题 (1.2 假设 Zorn 引理)

每个无限集合 X 上的非主滤子都可扩充为非主超滤子。

证明：设 $\mathcal{U}_0 := \{A \subseteq X : A^C$ 是一有限集$\}$ 并且 $\mathcal{U}_1$ 是 X 上的任一非主滤子。显然 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ 是 X 上的非主滤子基。设

$$\mathfrak{U} := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U} \text{ 且 } \mathcal{U} \text{ 是一非主滤子}\}.$$

1.1 非主超滤子存在性 –2

命题 (1.2 假设 Zorn 引理)

每个无限集合 X 上的非主滤子都可扩充为非主超滤子。

证明：设 $\mathcal{U}_0 := \{A \subseteq X : A^C \text{ 是一有限集}\}$ 并且 $\mathcal{U}_1$ 是 X 上的任一非主滤子。显然 $\mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1$ 是 X 上的非主滤子基。设

$$\mathfrak{U} := \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X) : \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U} \text{ 且 } \mathcal{U} \text{ 是一非主滤子}\}.$$

则 $(\mathfrak{U}; \subseteq)$ 是一偏序集。如果 $\mathfrak{U}'$ 是 $\mathfrak{U}$ 中的全序子集，则 $\mathfrak{U}'$ 中所有元素的并，即 $\bigcup \mathfrak{U}'$，是 $\mathfrak{U}'$ 中所有元素的上界。由 Zorn 引理可推出 $(\mathfrak{U}; \subseteq)$ 中有极大元 $\mathcal{U}$。接下来我们证明 $\mathcal{U}$ 满足定义 1.1 中的条件 *3.*。

1.1 非主超滤子存在性 –3

假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

1.1 非主超滤子存在性 –3

假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \text{ 和 } A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

都是有限集，

1.1 非主超滤子存在性 –3

假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \dots, B_m, C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \text{ 和 } A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

都是有限集，但这推出 $\bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i =$

1.1 非主超滤子存在性 –3

假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \text{ 和 } A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

都是有限集，但这推出 $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i =$

$$(A \cup A^C) \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subseteq \left(A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) \cup \left(A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right)$$

是一有限集，

1.1 非主超滤子存在性 –3

假设 $A \subseteq X$ 使得 $A, A^C \notin \mathcal{U}$。如果 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 或 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 是一非主滤子基，则其生成一个比 $\mathcal{U}$ 还大的非主滤子，但这和 $\mathcal{U}$ 是极大元矛盾。所以我们可假设 $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 和 $\mathcal{U} \cup \{A^C\}$ 都不是非主滤子基，即存在 $B_1, B_2, \ldots, B_m, C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathcal{U}$ 使得

$$A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \text{ 和 } A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i$$

都是有限集，但这推出 $\bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i =$

$$(A \cup A^C) \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i \subseteq \left(A \cap \bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) \cup \left(A^C \cap \bigcap_{i=1}^{n} C_i\right)$$

是一有限集，而这和 $\mathcal{U}$ 的非主性相矛盾。 $\square$

1.2 实数域的非标准扩张 –1

按命题 1.2 我们取定一个 ω 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$。超滤子 $\mathcal{U}$ 可以被看作 ω 上的一个有限可加的 $\{0,1\}$–测度，即每个集合 $A \in \mathcal{U}$ 的测度为 1，而每个集合 $A \notin \mathcal{U}$ 的测度为 0。因为 $\mathcal{U}$ 是个超滤子，所以对每个 $A \subseteq \omega$，A 的测度一定是 1 或 0。用 $\mathcal{U}$ 我们可定义 $\mathbb{R}^\omega$ 上的一个等价关系。

1.2 实数域的非标准扩张 –1

按命题 1.2 我们取定一个 ω 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$。超滤子 $\mathcal{U}$ 可以被看作 ω 上的一个有限可加的 $\{0,1\}$–测度，即每个集合 $A \in \mathcal{U}$ 的测度为 1，而每个集合 $A \notin \mathcal{U}$ 的测度为 0。因为 $\mathcal{U}$ 是个超滤子，所以对每个 $A \subseteq \omega$，A 的测度一定是 1 或 0。用 $\mathcal{U}$ 我们可定义 $\mathbb{R}^\omega$ 上的一个等价关系。

定义 (1.3)

对所有 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathbb{R}^\omega$，我们定义 $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$，即 $\langle x_n \rangle$ 和 $\langle y_n \rangle$ 等价，当且仅当

$$\{n \in \omega : x_n = y_n\} \in \mathcal{U}.$$

1.2 实数域的非标准扩张 –1

按命题 1.2 我们取定一个 ω 上的非主超滤子 $\mathcal{U}$。超滤子 $\mathcal{U}$ 可以被看作 ω 上的一个有限可加的 $\{0,1\}$–测度，即每个集合 $A \in \mathcal{U}$ 的测度为 1，而每个集合 $A \notin \mathcal{U}$ 的测度为 0。因为 $\mathcal{U}$ 是个超滤子，所以对每个 $A \subseteq \omega$，A 的测度一定是 1 或 0。用 $\mathcal{U}$ 我们可定义 $\mathbb{R}^\omega$ 上的一个等价关系。

定义 (1.3)

对所有 $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle \in \mathbb{R}^\omega$，我们定义 $\langle x_n \rangle \sim \langle y_n \rangle$，即 $\langle x_n \rangle$ 和 $\langle y_n \rangle$ 等价，当且仅当

$$\{n \in \omega : x_n = y_n\} \in \mathcal{U}.$$

换句话说，$\langle x_n \rangle$ 和 $\langle y_n \rangle$ 等价当且仅当这两个序列几乎处处相等。

1.2 实数域的非标准扩张 –2

定义 (1.4)

记 $[\langle x_n\rangle] := \{\langle y_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega : \langle y_n\rangle \sim \langle x_n\rangle\}$ 和

$$^*\mathbb{R} := \{[\langle x_n\rangle] : \langle x_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega\}.$$

1.2 实数域的非标准扩张 –2

定义 (1.4)

记 $[\langle x_n\rangle] := \{\langle y_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega : \langle y_n\rangle \sim \langle x_n\rangle\}$ 和

$$^*\mathbb{R} := \{[\langle x_n\rangle] : \langle x_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega\}.$$

集合 $^*\mathbb{R}$ 将是我们要构造的非标准实数域中所有实数的集合。但在此之前我们需要说明为什么 $\mathbb{R}$ 可被看成是 $^*\mathbb{R}$ 的子集和怎样把实数域上的关系都推广到 $^*\mathbb{R}$ 上去。

1.2 实数域的非标准扩张 –2

定义 (1.4)

记 $[\langle x_n\rangle] := \{\langle y_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega : \langle y_n\rangle \sim \langle x_n\rangle\}$ 和

$$^*\mathbb{R} := \{[\langle x_n\rangle] : \langle x_n\rangle \in \mathbb{R}^\omega\}.$$

集合 $^*\mathbb{R}$ 将是我们要构造的非标准实数域中所有实数的集合。但在此之前我们需要说明为什么 $\mathbb{R}$ 可被看成是 $^*\mathbb{R}$ 的子集和怎样把实数域上的关系都推广到 $^*\mathbb{R}$ 上去。

定义 (1.5)

对 $\mathbb{R}$ 上每个 m 元关系 P 定义

$$^*P := \{([\langle r_n^{(1)}\rangle], [\langle r_n^{(2)}\rangle], \ldots, [\langle r_n^{(m)}\rangle]) : \\ \{n \in \omega : (r_n^{(1)}, r_n^{(2)}, \ldots, r_n^{(m)}) \in P\} \in \mathcal{U}\}.$$

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 ${}^*\mathbb{R}$ 上定义了 ${}^*+, {}^*\ast, {}^*0, {}^*1, {}^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 $*$ 省略了。

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 $^*\mathbb{R}$ 上定义了 $^*+, ^**, ^*0, ^*1, ^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 * 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n \rangle] + [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n + b_n \rangle] \text{ 和 } [\langle a_n \rangle] * [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n * b_n \rangle].$$

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 $^*\mathbb{R}$ 上定义了 $^*+$, **, ^{*0}, ^{*1}, $^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 * 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n \rangle] + [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n + b_n \rangle] \text{ 和 } [\langle a_n \rangle] * [\langle b_n \rangle] = [\langle a_n * b_n \rangle].$$

我们以后将说明为什么 $^*\mathcal{R} := (\,^*\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$ 是有序域。

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 ${}^*\mathbb{R}$ 上定义了 ${}^*+, {}^**, {}^*0, {}^*1, {}^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 $*$ 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n\rangle] + [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n + b_n\rangle] \text{ 和 } [\langle a_n\rangle] * [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n * b_n\rangle].$$

我们以后将说明为什么 ${}^*\mathcal{R} := ({}^*\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$ 是有序域。

如果我们将每个 $r \in \mathbb{R}$ 等同于常数序列的等价类 $[\langle r\rangle] \in {}^*\mathbb{R}$，则 $\mathbb{R}$ 可被看作是 ${}^*\mathbb{R}$ 的子集。同时很容易证明对每个 $\mathbb{R}$ 的 m 元关系 P，都有

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 ${}^*\mathbb{R}$ 上定义了 ${}^*+$, **, ^{*0}, ^{*1}, ${}^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 $*$ 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n\rangle]+[\langle b_n\rangle]=[\langle a_n+b_n\rangle] \text{ 和 } [\langle a_n\rangle]*[\langle b_n\rangle]=[\langle a_n*b_n\rangle].$$

我们以后将说明为什么 ${}^*\mathcal{R}:=({}^*\mathbb{R};+,*,0,1,<)$ 是有序域。

如果我们将每个 $r\in\mathbb{R}$ 等同于常数序列的等价类 $[\langle r\rangle]\in{}^*\mathbb{R}$，则 $\mathbb{R}$ 可被看作是 ${}^*\mathbb{R}$ 的子集。同时很容易证明对每个 $\mathbb{R}$ 的 m 元关系 P，都有

$$(r^{(1)},r^{(2)},\ldots,r^{(m)})\in P$$

当且仅当 $([\langle r^{(1)}\rangle],[\langle r^{(2)}\rangle],\ldots,[\langle r^{(m)}\rangle])\in{}^*P.$

1.2 实数域的非标准扩张 –3

作为 $\mathcal{P}$ 中元素我们在 ${}^*\mathbb{R}$ 上定义了 ${}^*+, {}^*\!*, {}^*0, {}^*1, {}^*<$。为了使记号简单直观，这几个关系在使用时通常把 $*$ 省略了。读者可验证

$$[\langle a_n\rangle] + [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n + b_n\rangle] \text{ 和 } [\langle a_n\rangle] * [\langle b_n\rangle] = [\langle a_n * b_n\rangle].$$

我们以后将说明为什么 ${}^*\mathcal{R} := ({}^*\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <)$ 是有序域。

如果我们将每个 $r \in \mathbb{R}$ 等同于常数序列的等价类 $[\langle r\rangle] \in {}^*\mathbb{R}$，则 $\mathbb{R}$ 可被看作是 ${}^*\mathbb{R}$ 的子集。同时很容易证明对每个 $\mathbb{R}$ 的 m 元关系 P，都有

$$(r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots, r^{(m)}) \in P$$

$$\text{当且仅当 } ([\langle r^{(1)}\rangle], [\langle r^{(2)}\rangle], \ldots, [\langle r^{(m)}\rangle]) \in {}^*P.$$

所以 $\mathcal{R}$ 可被看作是 ${}^*\mathcal{R}$ 的子结构。如果一个 ${}^*\mathbb{R}$ 中的数 $[\langle r_n\rangle]$ 大于 $\mathbb{R}$ 中所有数，则称 $[\langle r_n\rangle]$ 为无穷大，如果一个 ${}^*\mathbb{R}$ 中的正数 $[\langle r_n\rangle]$ 小于 $\mathbb{R}$ 中所有正数，则称 $[\langle r_n\rangle]$ 为正无穷小。

1.3 超结构的非标准扩张 –1

命题 (1.6)

在 ${}^*\mathbb{R}$ 中 $[\langle n\rangle]$ 是一无穷大，而 $[\langle 1/n\rangle]$ 则是正无穷小。

1.3 超结构的非标准扩张 –1

命题 (1.6)

在 $^*\mathbb{R}$ 中 $[\langle n\rangle]$ 是一无穷大，而 $[\langle 1/n\rangle]$ 则是正无穷小。

定义 (1.7)

给定任一集合 X，设 $V_0 := \mathbb{R}\cup X$。对于任意自然数 $m\in\omega$ 定义 $V_{m+1} := V_m\cup\mathcal{P}(V_m)$。显然对任意 $m\in\omega$，都有 $V_m\subseteq V_{m+1}$。设 $\mathfrak{n}$ 是一足够大的自然数。

1.3 超结构的非标准扩张 –1

命题 (1.6)

在 $^*\mathbb{R}$ 中 $[\langle n\rangle]$ 是一无穷大，而 $[\langle 1/n\rangle]$ 则是正无穷小。

定义 (1.7)

给定任一集合 X，设 $V_0 := \mathbb{R}\cup X$。对于任意自然数 $m\in\omega$ 定义 $V_{m+1} := V_m\cup\mathcal{P}(V_m)$。显然对任意 $m\in\omega$，都有 $V_m\subseteq V_{m+1}$。设 $\mathfrak{n}$ 是一足够大的自然数。定义

$$V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} V_m.$$

1.3 超结构的非标准扩张 -1

命题 (1.6)

在 $^*\mathbb{R}$ 中 $[\langle n\rangle]$ 是一无穷大，而 $[\langle 1/n\rangle]$ 则是正无穷小。

定义 (1.7)

给定任一集合 X，设 $V_0 := \mathbb{R} \cup X$。对于任意自然数 $m \in \omega$ 定义 $V_{m+1} := V_m \cup \mathcal{P}(V_m)$。显然对任意 $m \in \omega$，都有 $V_m \subseteq V_{m+1}$。设 $\mathfrak{n}$ 是一足够大的自然数。定义

$$V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} V_m.$$

令 $\in$ 为 V 上的从属关系，即 $a \in b$ 表示 a 是集合 b 中的元素。则结构 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 被称之为超结构。如果 V 中的一个元素 a 属于 V_m 但不属于 V_{m-1}，我们称 a 是 $\mathcal{V}$ 中的第 m 层元素，记为 $l(a) = m$。

1.3 超结构的非标准扩张 –2

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $I(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $I(\mathbb{R}) = I(\mathbb{N}) = I(X) = 1$。

1.3 超结构的非标准扩张 –2

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $l(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $l(\mathbb{R}) = l(\mathbb{N}) = l(X) = 1$。注意，我们用 $\mathbb{N}$ 表示 V 中的自然数集，而用 ω 表示 V 之外元数学层次的自然数集。

1.3 超结构的非标准扩张 –2

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $l(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $l(\mathbb{R}) = l(\mathbb{N}) = l(X) = 1$。注意，我们用 $\mathbb{N}$ 表示 V 中的自然数集，而用 ω 表示 V 之外元数学层次的自然数集。利用集合论的符号，一个有序对 (a, b) 可以被看作为集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$。所以 $l((a, b)) = l(\{\{a\}, \{a, b\}\}) = \max\{l(\{a\}), l(\{a, b\})\} + 1 = \max\{l(a), l(b)\} + 2$。

1.3 超结构的非标准扩张 –2

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $l(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $l(\mathbb{R}) = l(\mathbb{N}) = l(X) = 1$。注意，我们用 $\mathbb{N}$ 表示 V 中的自然数集，而用 ω 表示 V 之外元数学层次的自然数集。利用集合论的符号，一个有序对 (a, b) 可以被看作为集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$。所以 $l((a, b)) = l(\{\{a\}, \{a, b\}\}) = \max\{l(\{a\}), l(\{a, b\})\} + 1 = \max\{l(a), l(b)\} + 2$。一个实数上的二元关系 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有序实数对的集合，每个有序实数对属于第二层，所以 $P \subseteq V_2$，这推出 $P \in V_3$。如果 $E \subseteq \mathbb{R}$，$f: E \to \mathbb{R}$ 是一函数，则 f 可被看作为 $E \times \mathbb{R}$ 的子集。所以 $E \times \mathbb{R} \in V_3$ 推出 $f \in V_4$。按照类似思路我们可以在 V 中找到 $\mathcal{R}$。

1.3 超结构的非标准扩张 –2

显然对于每个元素 $x \in \mathbb{R} \cup X$，都有 $l(x) = 0$。对实数集 $\mathbb{R}$，自然数集 $\mathbb{N}$，或 $X \neq \emptyset$ 则有 $l(\mathbb{R}) = l(\mathbb{N}) = l(X) = 1$。注意，我们用 $\mathbb{N}$ 表示 V 中的自然数集，而用 ω 表示 V 之外元数学层次的自然数集。利用集合论的符号，一个有序对 (a, b) 可以被看作为集合 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$。所以 $l((a, b)) = l(\{\{a\}, \{a, b\}\}) = \max\{l(\{a\}), l(\{a, b\})\} + 1 = \max\{l(a), l(b)\} + 2$。一个实数上的二元关系 $P \subseteq \mathbb{R}^2$ 是一个有序实数对的集合，每个有序实数对属于第二层，所以 $P \subseteq V_2$，这推出 $P \in V_3$。如果 $E \subseteq \mathbb{R}$，$f : E \to \mathbb{R}$ 是一函数，则 f 可被看作为 $E \times \mathbb{R}$ 的子集。所以 $E \times \mathbb{R} \in V_3$ 推出 $f \in V_4$。按照类似思路我们可以在 V 中找到 $\mathcal{R}$。一般情况下我们可假设 $X = \emptyset$。有时候需要研究一些基数较大的集合，比如一个基数大于 $\beth_\omega = |V(\emptyset)|$ 的拓扑空间 X'，我们可以把 X' 放入第 1 层的 X 之中再构造超结构 V。因为每一个特定的数学讨论只涉及有限个数学实体，所以只要 $\mathfrak{n}$ 足够大，这些数学实体都可以在 V 中找到。为了简便我们假设 $X = \emptyset$。

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$,

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in V_m$，定义 $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U},$$

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V}=(V;\in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m\leq\mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle\in V_m$，定义 $\langle a_n\rangle\sim\langle b_n\rangle$ 当且仅当
$$\{n\in\omega:a_n=b_n\}\in\mathcal{U},$$
2. 对于任意元素序列 $\langle a_n\rangle\in V_m^\omega$，设 $[\langle a_n\rangle]:=\{\langle b_n\rangle\in V_m^\omega:\langle a_n\rangle\sim\langle b_n\rangle\}$，

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in V_m$，定义 $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U},$$
2. 对于任意元素序列 $\langle a_n \rangle \in V_m^\omega$，设 $[\langle a_n \rangle] := \{\langle b_n \rangle \in V_m^\omega : \langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle\}$，
3. 记 ${}^*V_m := \{[\langle a_n \rangle] : \langle a_n \rangle \in V_m^\omega\}$。

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in V_m$，定义 $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U},$$
2. 对于任意元素序列 $\langle a_n \rangle \in V_m^\omega$，设 $[\langle a_n \rangle] := \{\langle b_n \rangle \in V_m^\omega : \langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle\}$,
3. 记 ${}^*V_m := \{[\langle a_n \rangle] : \langle a_n \rangle \in V_m^\omega\}$。
4. 记 ${}^*V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} {}^*V_m$.

1.3 超结构的非标准扩张 –3

接下来我们对 $\mathcal{V} = (V; \in)$ 进行扩张。

定义 (1.8)

设 $\mathcal{U}$ 是 ω 上的非主超滤子，$m \leq \mathfrak{n}$，

1. 对于任意两个元素序列 $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle \in V_m$，定义 $\langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n = b_n\} \in \mathcal{U},$$
2. 对于任意元素序列 $\langle a_n \rangle \in V_m^\omega$，设 $[\langle a_n \rangle] := \{\langle b_n \rangle \in V_m^\omega : \langle a_n \rangle \sim \langle b_n \rangle\}$,
3. 记 ${}^*V_m := \{[\langle a_n \rangle] : \langle a_n \rangle \in V_m^\omega\}$。
4. 记 ${}^*V := \bigcup_{m=0}^{\mathfrak{n}} {}^*V_m$.
5. 对于 ${}^*V$ 中的元素 $[\langle a_n \rangle]$ 和 $[\langle A_n \rangle]$，定义 $[\langle a_n \rangle] \; {}^*\!\in [\langle A_n \rangle]$ 当且仅当
$$\{n \in \omega : a_n \in A_n\} \in \mathcal{U}.$$

1.3 超结构的非标准扩张 –4

对每个 $A \in V$ 设 $*$ 是从 V 到 $^*V$ 的映射使得 $^*A = [\langle A\rangle]\ ^*\!\in\ ^*V$，则 V 可被嵌入到 $^*V$ 中去。同时很容易证明对所有 $a, A \in V$，都有 $a \in A$ 当且仅当 $[\langle a\rangle]\ ^*\!\in [\langle A\rangle]$。所以 $(V; \in)$ 可被看作为 $(^*V;\ ^*\!\in)$ 的子结构。

1.3 超结构的非标准扩张 –4

对每个 $A \in V$ 设 $*$ 是从 V 到 $^*V$ 的映射使得 $^*A = [\langle A\rangle] \ {}^*\!\in {}^*V$，则 V 可被嵌入到 $^*V$ 中去。同时很容易证明对所有 $a, A \in V$，都有 $a \in A$ 当且仅当 $[\langle a\rangle] \ {}^*\!\in [\langle A\rangle]$。所以 $(V; \in)$ 可被看作为 $(^*V; {}^*\!\in)$ 的子结构。

我们也可对 $^*V$ 中的元素进行分层，即如果 x 在 $^*V_0$，则 $l(x) = 0$ 并且 $l(x) = m + 1$ 当且仅当 x 在 $^*V_{m+1} \setminus {}^*V_m$ 中。$^*V$ 上的二元关系 $^*\!\in$ 可以被看作是属于关系。但是它不是集合论意义上真正的属于关系。我们可以通过一个变换 Φ 把 $^*V$ 双射到一个集合 W 使得 $x \ {}^*\!\in y$ 当且仅当 $\Phi(x) \in \Phi(y)$，即把 $^*\!\in$ 转变成集合论意义下真正的属于关系。映照 Φ 可按层次递归定义，即对所有 $^*V_0$ 中的 x 都有 $\Phi(x) = x$ 而对所有 $^*V \setminus {}^*V_0$ 中的 x 都有 $\Phi(x) := \{\Phi(y) : y \ {}^*\!\in x\}$。然后取 $W = \Phi(^*V)$。不过这样做会影响直观且徒增复杂度。所以我们还是用 $^*\mathcal{V} := (^*V \ {}^*\!\in)$ 而不用 $(W; \in)$ 作为 $\mathcal{V}$ 的扩张。当然为了记号上的便利我们通常把 $^*\!\in$ 直接写成 $\in$。

1.3 超结构的非标准扩张 –5

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 $^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

1.3 超结构的非标准扩张 –5

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 $^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

定义 (1.9)

我们将使用符号 $\rightarrow$ (推出)，$\neg$ (不)，$x, y, z, \ldots$ (变量)，$a, b, c, \ldots$ $A, B, C, \ldots$ (V 中的元素作为常量)，$\forall x$ (对所有 x)，$=$，$\in$，（，），按照以下规则 1.–3. 组成关于 $\mathcal{V}$ 的一阶**公式**和**语句**。

1.3 超结构的非标准扩张 –5

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 $^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

定义 (1.9)

我们将使用符号 $\rightarrow$ (推出)，$\neg$ (不)，$x, y, z, \ldots$ (变量)，$a, b, c, \ldots$ $A, B, C, \ldots$ (V 中的元素作为常量)，$\forall x$ (对所有 x)，$=$，$\in$，(，)，按照以下规则 1.–3. 组成关于 $\mathcal{V}$ 的一阶**公式**和**语句**。

1. 对于变量或常量 u, v，符号串 $u = v$，$u \in v$ 被称为原子公式，

1.3 超结构的非标准扩张 –5

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

定义 (1.9)

我们将使用符号 $\rightarrow$ (推出)，$\neg$ (不)，$x, y, z, \ldots$ (变量)，$a, b, c, \ldots$ $A, B, C, \ldots$ (V 中的元素作为常量)，$\forall x$ (对所有 x)，$=$，$\in$，(，)，按照以下规则 1.–3. 组成关于 $\mathcal{V}$ 的一阶**公式和语句**。

1. 对于变量或常量 u, v，符号串 $u = v$，$u \in v$ 被称为原子公式；
2. 如果 φ，ψ 是公式，则 $\neg\varphi$，$\varphi \rightarrow \psi$，和 $\forall x \varphi$ 是公式，在公式 $\forall x \varphi$ 中变量 x 被称为**有界变量**，一个公式中不是有界的变量称之为**自由变量**；

1.3 超结构的非标准扩张 –5

接下来我们介绍模型论中的一个概念，即基本子结构，并证明 $\mathcal{V}$ 是 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子结构。在这过程中我们需要先介绍一阶谓词逻辑。为了简要，我们避免一般化，只介绍针对超结构模型的一阶谓词逻辑，并且放弃不必要的严格性而或多或少依赖于读者的常识或直觉。

定义 (1.9)

我们将使用符号 $\rightarrow$ (推出)，$\neg$ (不)，$x, y, z, \ldots$ (变量)，$a, b, c, \ldots\ A, B, C, \ldots$ (V 中的元素作为常量)，$\forall x$ (对所有 x)，$=$，$\in$，(，)，按照以下规则 1.–3. 组成关于 $\mathcal{V}$ 的一阶**公式**和**语句**。

1. 对于变量或常量 u, v，符号串 $u = v$，$u \in v$ 被称为原子公式，
2. 如果 φ，ψ 是公式，则 $\neg\varphi$，$\varphi \rightarrow \psi$，和 $\forall x\varphi$ 是公式，在公式 $\forall x\varphi$ 中变量 x 被称为**有界变量**，一个公式中不是有界的变量称之为**自由变量**，
3. 如果在一个关于 $\mathcal{V}$ 的公式中所有变量都是有界的，则称此公式为关于 $\mathcal{V}$ 的语句。

1.3 超结构的非标准扩张 –6

按照以下递归规则我们可以定义一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句在 $\mathcal{V}$ 中的真假值。我们通常记 $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ 为一关于 $\mathcal{V}$ 的公式使得 $\overline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ 列出 φ 中所有自由变量而 $\overline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$ 列出 φ 中所有 V 中常量。如果 m 个自由变量 $\overline{x}$ 都被 V 中 m 个常量 $\overline{A}$ 替代，则可得到一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\overline{A}, \overline{a})$。

1.3 超结构的非标准扩张 –6

按照以下递归规则我们可以定义一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句在 $\mathcal{V}$ 中的真假值。我们通常记 $\varphi(\bar{x},\bar{a})$ 为一关于 $\mathcal{V}$ 的公式使得 $\bar{x}=(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(m)})$ 列出 φ 中所有自由变量而 $\bar{a}=(a^{(1)},a^{(2)},\ldots,a^{(k)})$ 列出 φ 中所有 V 中常量。如果 m 个自由变量 $\bar{x}$ 都被 V 中 m 个常量 $\overline{A}$ 替代，则可得到一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\overline{A},\bar{a})$。

4. 原子语句 $a=b$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 和 b 是同一集合，$a\in A$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 是 A 的元素，

1.3 超结构的非标准扩张 –6

按照以下递归规则我们可以定义一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句在 $\mathcal{V}$ 中的真假值。我们通常记 $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ 为一关于 $\mathcal{V}$ 的公式使得 $\overline{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ 列出 φ 中所有自由变量而 $\overline{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$ 列出 φ 中所有 V 中常量。如果 m 个自由变量 $\overline{x}$ 都被 V 中 m 个常量 $\overline{A}$ 替代，则可得到一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\overline{A}, \overline{a})$。

4. 原子语句 $a = b$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 和 b 是同一集合，$a \in A$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 是 A 的元素，
5. 语句 $\neg\varphi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，语句 $\varphi \to \psi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假或者 ψ 在 $\mathcal{V}$ 中为真，

1.3 超结构的非标准扩张 –6

按照以下递归规则我们可以定义一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句在 $\mathcal{V}$ 中的真假值。我们通常记 $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ 为一关于 $\mathcal{V}$ 的公式使得 $\bar{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$ 列出 φ 中所有自由变量而 $\bar{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(k)})$ 列出 φ 中所有 V 中常量。如果 m 个自由变量 $\bar{x}$ 都被 V 中 m 个常量 $\bar{A}$ 替代，则可得到一个关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{A}, \bar{a})$。

4. 原子语句 $a = b$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 和 b 是同一集合，$a \in A$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 a 是 A 的元素，
5. 语句 $\neg\varphi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，语句 $\varphi \to \psi$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 φ 在 $\mathcal{V}$ 中为假或者 ψ 在 $\mathcal{V}$ 中为真，
6. 语句 $\forall x \varphi(x, \bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当对所有 V 中元素 b 语句 $\varphi(b, \bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真。

1.3 超结构的非标准扩张 –7

在定义 1.9 第六部分中规定变量 x 取值为 V 中的元素 是为什么称所介绍的逻辑，公式，和语句为一阶的原因。如果我们把 $\forall x$ 解释为 "对所有 V 的子集 x" 则逻辑，公式，和语句就是二阶的了。自此以下我们所讨论的逻辑都是一阶的，所以词汇 "一阶" 有时将被省略。

1.3 超结构的非标准扩张 –7

在定义 1.9 第六部分中规定变量 x 取值为 V 中的元素 是为什么称所介绍的逻辑，公式，和语句为一阶的原因。如果我们把 $\forall x$ 解释为“对所有 V 的子集 x” 则逻辑，公式，和语句就是二阶的了。自此以下我们所讨论的逻辑都是一阶的，所以词汇“一阶”有时将被省略。

定义 (1.10)

在定义 1.9 中把 V 和 $\mathcal{V}$ 都换成 $^*V$ 和 $^*\mathcal{V}$，则我们得到关于 $^*\mathcal{V}$ 的公式和语句。也得到一个关于 $^*\mathcal{V}$ 的语句在 $^*\mathcal{V}$ 中的真假值。

在定义 1.9 第六部分中规定变量 x 取值为 V 中的元素 是为什么称所介绍的逻辑，公式，和语句为一阶的原因。如果我们把 $\forall x$ 解释为“对所有 V 的子集 x”则逻辑，公式，和语句就是二阶的了。自此以下我们所讨论的逻辑都是一阶的，所以词汇“一阶”有时将被省略。

定义 (1.10)

在定义 1.9 中把 V 和 $\mathcal{V}$ 都换成 $^*V$ 和 $^*\mathcal{V}$，则我们得到关于 $^*\mathcal{V}$ 的公式和语句。也得到一个关于 $^*\mathcal{V}$ 的语句在 $^*\mathcal{V}$ 中的真假值。

一个公式是关于 $\mathcal{V}$ 还是关于 $^*\mathcal{V}$ 是由常量在 V 中还是在 $^*V$ 中决定的。在决定一个语句在 $\mathcal{V}$ 或在 $^*\mathcal{V}$ 的真假值时对量词 $\forall x$ 的解释分别是“对每个 V 中元素 ...”或“对每个 $^*V$ 中元素 ...”。

1.3 超结构的非标准扩张 –8

为了使逻辑语言更接近我们的直觉，我们还要引入一些可以用已有符号来表示的新符号。比如语句 $\varphi(\mathbb{R},<)$:

1.3 超结构的非标准扩张 –8

为了使逻辑语言更接近我们的直觉，我们还要引入一些可以用已有符号来表示的新符号。比如语句 $\varphi(\mathbb{R},<)$:

$$\forall x \forall y \forall z (\neg(\neg(x \in \mathbb{R} \rightarrow \neg(y \in \mathbb{R})) \\ \rightarrow \neg(z \in \mathbb{R})) \rightarrow (\neg(x < y \rightarrow \neg(y < z)) \rightarrow x < z))$$

1.3 超结构的非标准扩张 –8

为了使逻辑语言更接近我们的直觉，我们还要引入一些可以用已有符号来表示的新符号。比如语句 $\varphi(\mathbb{R},<)$:

$$\forall x \forall y \forall z(\neg(\neg(x \in \mathbb{R} \to \neg(y \in \mathbb{R})) \\ \to \neg(z \in \mathbb{R})) \to (\neg(x < y \to \neg(y < z)) \to x < z))$$

表示实数上序的传递性，但很不直观。我们引入新记号 $\vee$ (表示 " 或")，$\wedge$ (表示 " 和")，$\leftrightarrow$ (表示 " 当且仅当")，$\exists x$ (表示 " 存在一个元素 x")，$\forall x \in A$ (表示 $\forall x(x \in A \to \cdots)$)，$\exists x \in A$ (表示 $\exists x(x \in A \wedge \cdots)$)。可看出 $\phi \vee \eta$ 是 $\neg\phi \to \eta$ 的另一种写法，$\phi \wedge \eta$ 是 $\neg(\neg\phi \vee \neg\eta)$ 的另一种写法，$\phi \leftrightarrow \eta$ 是 $(\phi \to \eta) \wedge (\eta \to \phi)$ 的另一种写法，$\exists x\varphi$ 是 $\neg\forall x\neg\varphi$ 的另一种写法，等等。

1.3 超结构的非标准扩张 –9

使用新引入的符号，$\mathbb{R}$ 上序的传递性可重写成

1.3 超结构的非标准扩张 –9

使用新引入的符号，$\mathbb{R}$ 上序的传递性可重写成

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y) \wedge (y < z) \to x < z)$$

1.3 超结构的非标准扩张 –9

使用新引入的符号，$\mathbb{R}$ 上序的传递性可重写成

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow x < z)$$

而新的传递性写法就比较直观。但是当证明一些涉及逻辑符号的命题时，因为新介绍的符号可以用最基本的逻辑符号来定义，所以我们只要考虑最基本的逻辑符号即可，从而使得证明简捷。

1.3 超结构的非标准扩张 –9

使用新引入的符号，$\mathbb{R}$ 上序的传递性可重写成

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow x < z)$$

而新的传递性写法就比较直观。但是当证明一些涉及逻辑符号的命题时，因为新介绍的符号可以用最基本的逻辑符号来定义，所以我们只要考虑最基本的逻辑符号即可，从而使得证明简捷。

如果 f 是一函数，$\bar{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)})$ 是一列在 f 定义域中的元素，则用 $f(\bar{a})$ 表示 $(f(a^{(1)}), f(a^{(2)}), \ldots, f(a^{(m)}))$。

使用新引入的符号，$\mathbb{R}$ 上序的传递性可重写成

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, ((x < y) \wedge (y < z) \to x < z)$$

而新的传递性写法就比较直观。但是当证明一些涉及逻辑符号的命题时，因为新介绍的符号可以用最基本的逻辑符号来定义，所以我们只要考虑最基本的逻辑符号即可，从而使得证明简捷。

如果 f 是一函数，$\bar{a} = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)})$ 是一列在 f 定义域中的元素，则用 $f(\bar{a})$ 表示 $(f(a^{(1)}), f(a^{(2)}), \ldots, f(a^{(m)}))$。

引理 (1.11)

设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$ 是关于 ${}^*\mathcal{V}$ 的语句。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 为真当且仅当

$$\{n \in \omega : \varphi(\overline{a_n}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}.$$

1.3 超结构的非标准扩张 –10

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta \to \psi$，或 $\forall x \psi(x, \bar{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句引理都成立。

1.3 超结构的非标准扩张 –10

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta \to \psi$，或 $\forall x \psi(x, \bar{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句引理都成立。

(a) 假设 φ 是原子语句 $[\langle a_n \rangle] = [\langle b_n \rangle]$ 或 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n \rangle]$。由等价类的定义，引理成立。

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta \to \psi$，或 $\forall x \psi(x, \bar{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句引理都成立。

(a) 假设 φ 是原子语句 $[\langle a_n \rangle] = [\langle b_n \rangle]$ 或 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n \rangle]$。由等价类的定义，引理成立。

(b) 假设 φ 是 $\neg\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$。则 φ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假，（由归纳假设）当且仅当

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta \to \psi$，或 $\forall x \psi(x, \bar{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句引理都成立。

(a) 假设 φ 是原子语句 $[\langle a_n \rangle] = [\langle b_n \rangle]$ 或 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n \rangle]$。由等价类的定义，引理成立。

(b) 假设 φ 是 $\neg\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$。则 φ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假，（由归纳假设）当且仅当

$$\{n \in \mathbb{N} : \psi(\overline{a_n}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} \notin \mathcal{U}$$

当且仅当

证明：引理的证明将用对于语句 φ 的复杂度进行归纳来完成。一个语句 φ 或者是原子语句，或者是 $\neg\psi$，$\eta \to \psi$，或 $\forall x \psi(x, \bar{a})$，其中 ψ 和 η 的复杂度都比 φ 低。假设对所有比 φ 复杂度低的语句引理都成立。

(a) 假设 φ 是原子语句 $[\langle a_n \rangle] = [\langle b_n \rangle]$ 或 $[\langle a_n \rangle] \in [\langle A_n \rangle]$。由等价类的定义，引理成立。

(b) 假设 φ 是 $\neg\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$。则 φ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n \in \mathbb{N} : \psi(\overline{a_n}) \text{ 在} \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \notin \mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n \in \omega : \neg\psi(\overline{a_n}) \text{ 在} \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}.$$

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)\to\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)\to\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假}\}\in\mathcal{U}$$
$$\text{或}\ \{n\in\omega:\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)\to\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，（由归纳假设）当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假}\}\in\mathcal{U}$$
$$\text{或}\ \{n\in\omega:\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假或}\ \eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

1.3 超结构的非标准扩张 –11

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)\rightarrow\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假}\}\in\mathcal{U}$$
$$\text{或}\ \{n\in\omega:\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为假或}\ \eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$$

当且仅当 $\{n\in\omega:\psi(\overline{a_n})\rightarrow\eta(\overline{a_n})\ \text{在}\ \mathcal{V}\ \text{中为真}\}\in\mathcal{U}$

1.3 超结构的非标准扩张 –11

(c) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right) \to \eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。则 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\psi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假或 $\eta\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，(由归纳假设) 当且仅当

$$\{n \in \omega : \psi(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为假}\} \in \mathcal{U}$$
$$\text{或 } \{n \in \omega : \eta(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}$$

当且仅当

$$\{n \in \omega : \psi(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为假或 } \eta(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}$$

当且仅当 $\{n \in \omega : \psi(\overline{a_n}) \to \eta(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}$
当且仅当 $\{n \in \omega : \varphi(\overline{a_n}) \text{ 在 } \mathcal{V} \text{ 中为真}\} \in \mathcal{U}$.

1.3 超结构的非标准扩张 –12

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。

1.3 超结构的非标准扩张 –12

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

1.3 超结构的非标准扩张 –12

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

对每个 $n'\in I^C$ 我们有 $\forall x\psi(x,\overline{a_{n'}})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

1.3 超结构的非标准扩张 –12

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

对每个 $n'\in I^C$ 我们有 $\forall x\psi(x,\overline{a_{n'}})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

现在设 $I'=\{n\in\omega:\forall x\psi(x,\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}$。

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in{}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 $^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

对每个 $n'\in I^C$ 我们有 $\forall x\psi(x,\overline{a_{n'}})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

现在设 $I'=\{n\in\omega:\forall x\psi(x,\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}$。则 $I'^C\in\mathcal{U}$。对每个 $n\in I'^C$ 有 $\forall x\psi(x,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以存在 $c_n\in V$ 使得 $\psi(c_n,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假。

(d) 假设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 是 $\forall x\psi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$。设 $\varphi\left(\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。则存在 $[\langle b_n\rangle]\in {}^*V$ 使得 $\psi\left([\langle b_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。由归纳假设我们有

$$I=\{n\in\omega:\psi\left(b_n,\overline{a_n}\right)\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

对每个 $n'\in I^C$ 我们有 $\forall x\psi(x,\overline{a_{n'}})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以

$$\{n\in\omega:\varphi(\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}.$$

现在设 $I'=\{n\in\omega:\forall x\psi(x,\overline{a_n})\ \text{在}\,\mathcal{V}\ \text{中为真}\}\notin\mathcal{U}$。则 $I'^C\in\mathcal{U}$。对每个 $n\in I'^C$ 有 $\forall x\psi(x,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假，所以存在 $c_n\in V$ 使得 $\psi(c_n,\overline{a_n})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假。如果 $n\notin I'^C$ 让 $c_n=\emptyset$，则我们有 $[\langle c_n\rangle]\in {}^*V$ 并且由归纳假设，$\psi\left([\langle c_n\rangle],\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。所以 $\forall x\varphi\left(x,\overline{[\langle a_n\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。 $\square$

1.3 超结构的非标准扩张 –13

定义 (1.12)

给定一个映照 $f: V \to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{a})$ 都有 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\bar{a}))$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子模型。

1.3 超结构的非标准扩张 –13

定义 (1.12)

给定一个映照 $f: V \to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{a})$ 都有 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\bar{a}))$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子模型。

定理 (1.13　J. Łoś, 1955)

设 $* : V \to {}^*V$ 是一映射使得 $*(a) = [\langle a \rangle]$。则 $*$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**。

1.3 超结构的非标准扩张 –13

定义 (1.12)

给定一个映照 $f: V \to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{a})$ 都有 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\bar{a}))$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子模型。

定理 (1.13　J. Łoś, 1955)

设 $*: V \to {}^*V$ 是一映射使得 $*(a) = [\langle a \rangle]$。则 $*$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**。

证明：设 $\varphi(\bar{a})$ 是关于 $\mathcal{V}$ 的语句。则由引理 1.11 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真推出

$$\{n \in \omega : \varphi(\bar{a}) \text{ 在} \mathcal{V} \text{ 中为真}\} = \omega \in \mathcal{U}$$

1.3 超结构的非标准扩张 –13

定义 (1.12)

给定一个映照 $f: V \to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{a})$ 都有 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\bar{a}))$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子模型。

定理 (1.13　J. Łoś, 1955)

设 $* : V \to {}^*V$ 是一映射使得 $*(a) = [\langle a\rangle]$。则 $*$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**。

证明：设 $\varphi(\bar{a})$ 是关于 $\mathcal{V}$ 的语句。则由引理 1.11 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真推出

$$\{n \in \omega : \varphi(\bar{a}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} = \omega \in \mathcal{U}$$

再推出 $\varphi(*(\bar{a})) = \varphi\left(\overline{[\langle a\rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。

定义 (1.12)

给定一个映照 $f: V \to {}^*V$，如果对所有关于 $\mathcal{V}$ 的语句 $\varphi(\bar{a})$ 都有 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真当且仅当 $\varphi(f(\bar{a}))$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真，则称 f 为从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**，亦称 $\mathcal{V}$ 为 ${}^*\mathcal{V}$ 的基本子模型。

定理 (1.13　J. Łoś, 1955)

设 $* : V \to {}^*V$ 是一映射使得 $*(a) = [\langle a \rangle]$。则 $*$ 是从 $\mathcal{V}$ 到 ${}^*\mathcal{V}$ 的**基本嵌入**。

证明：设 $\varphi(\bar{a})$ 是关于 $\mathcal{V}$ 的语句。则由引理 1.11 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为真推出

$$\{n \in \omega : \varphi(\bar{a}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} = \omega \in \mathcal{U}$$

再推出 $\varphi(*(\bar{a})) = \varphi\left(\overline{[\langle a \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为真。而 $\varphi(\bar{a})$ 在 $\mathcal{V}$ 中为假推出

$$\{n \in \omega : \varphi(\bar{a}) \text{ 在}\mathcal{V} \text{ 中为真}\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$$

再推出 $\varphi(*(\bar{a})) = \varphi\left(\overline{[\langle a \rangle]}\right)$ 在 ${}^*\mathcal{V}$ 中为假。 $\square$

1.3 超结构的非标准扩张 –14

以上定理也称为**转换原理**。

1.3 超结构的非标准扩张 –14

以上定理也称为**转换原理**。

我们通常记 $*(A)$ 为 ${}^*A$。如果 $r \in V_0$，为了方便可把 ${}^*r$ 直接记为 r。

1.3 超结构的非标准扩张 –14

以上定理也称为**转换原理**。

我们通常记 $*(A)$ 为 ${}^*A$。如果 $r \in V_0$，为了方便可把 ${}^*r$ 直接记为 r。

推论 (1.14)

$$ {}^*\mathcal{R} = ({}^*\mathbb{R}; +, *, 0, 1, <) $$

是有序域。

以上定理也称为**转换原理**。

我们通常记 $*(A)$ 为 $^*A$。如果 $r \in V_0$，为了方便可把 $^*r$ 直接记为 r。

推论 (1.14)

$$^*\mathcal{R} = (\,^*\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$$

是有序域。

证明：命题 "$\mathcal{R} = (\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$ 是有序域" 在 $\mathcal{V}$ 中为真且可由关于 $\mathcal{V}$ 的一阶语句来表达。由转换原理 "$^*\mathcal{R} = (\,^*\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$ 是有序域" 在 $^*\mathcal{V}$ 为真。 $\square$

以上定理也称为**转换原理**。

我们通常记 $*(A)$ 为 $^*A$。如果 $r \in V_0$，为了方便可把 $^*r$ 直接记为 r。

推论 (1.14)

$$^*\mathcal{R} = (\,^*\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$$

是有序域。

证明：命题 "$\mathcal{R} = (\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$ 是有序域" 在 $\mathcal{V}$ 中为真且可由关于 $\mathcal{V}$ 的一阶语句来表达。由转换原理 "$^*\mathcal{R} = (\,^*\mathbb{R};\, +,\, *\,, 0, 1, <)$ 是有序域" 在 $^*\mathcal{V}$ 为真。 □

在接下来各节中我们常称 $\mathcal{V}$ 为**标准模型**，称 $^*\mathcal{V}$ 为**非标准模型**。

1.3 超结构的非标准扩张 –15

在非标准分析的应用中读者应尽量把 $^*V_0$ 中的元素想象成点，而不是一个序列的等价类。比如人们一般会把标准实数想象成水平轴上的一个点，而不是一个柯西序列的等价类或一个戴特金分割。按本文作者自己的理解，数学基础研究中有分阶复杂度和量词复杂度。如果我们把点看成是一阶实体，点集或点集上的关系或函数为二阶实体，点集上的函数空间，拓扑空间等等为三阶实体，已次类推，则一个数学论述涉及的实体阶数越高就可认为越复杂。非标准分析的好处之一是把涉及二阶实体的论述，比如数列的极限过程，用只涉及一阶实体的论述，比如无穷小元素，来刻画，从而减低论述的分阶复杂度。所以如果读者一直把 $^*V_0$ 中的元素想象成一个序列的等价类，就较难体会非标准分析的这一好处。关于减低量词复杂度我们将会在介绍 $^*\mathcal{V}$ 的饱和性质时提到。

1.3 超结构的非标准扩张 –16

在这一节中 ${}^*\mathcal{V}$ 的构造方法称为**超幂**，超幂构造是超积构造的一种特殊情况。简单地说超积就是笛卡尔乘积模超滤子。超幂构造是构造非标准模型的一种方法，但在模型论中我们也可以用紧致性来构造非标准模型，称为 Henkin 构造。采用超幂构造的好处是可给初学者一个比较具体的构造方法，使得如果对一些实体的意义比较模糊的时候可以考虑将实体看作具体的序列等价类从而使得自己的理解有了一个比较确定的基础。当然再说一句，在有了一定的基础之后，读者应尽量把 ${}^*V_0$ 中的元素想象成点。

1.3 超结构的非标准扩张 –16

在这一节中 $^*\mathcal{V}$ 的构造方法称为**超幂**，超幂构造是超积构造的一种特殊情况。简单地说超积就是笛卡尔乘积模超滤子。超幂构造是构造非标准模型的一种方法，但在模型论中我们也可以用紧致性来构造非标准模型，称为 Henkin 构造。采用超幂构造的好处是可给初学者一个比较具体的构造方法，使得如果对一些实体的意义比较模糊的时候可以考虑将实体看作具体的序列等价类从而使得自己的理解有了一个比较确定的基础。当然再说一句，在有了一定的基础之后，读者应尽量把 $^*V_0$ 中的元素想象成点。

为了获取更强的饱和性质我们可以采用更大集合上的正则超滤子来构造超结构超幂，我们还可以构造超幂极限等来获得比饱和性更强的性质。有时可通过使用特性质的超滤子来获得超幂的特殊性质。非标准分析还可以公理化，称为内集合论。内集合论的公理是标准集合论公理 ZFC 的保守扩充，而内集合论公理的非标准模型包含了标准集合论宇宙。