背理法の論理とその指導に関する一考察

富永　雅（とみなが　まさる）

0. 序

背理法は，現在，高等学校 数学Aの“数と式”に関する指導内容の一部になっている．その背理法の指導の折，私は生徒の反応に対し次の点で関心をもった．

背理法は，例えば，EUCLID 原論においても有効に利用され，現代数学においても重要な証明法として高く評価されている．しかし，教科書や授業時間数において割かれている内容や時間はともに乏しく，生徒はその論理の正当性を充分に議論したり，理解することなく，単に教科書・問題集に出てくる問題を機械的に処理することのみに終始しているように思われる．そのため，生徒は，自らの解答を導く過程やその解答自身についてほとんど考察を加えることができないのではないか．

この点に関心をもち，改善の必要を感じた私は，自分自身もう一度，背理法の論理を見直し，一層理解を深めた上で，生徒がこの証明法の論理を充分に理解し，自由に使いこなせるよう指導するためにはどのようにすればよいかを考察し，本稿にまとめた．

小稿の第1稿は，私がまだ近畿大学附属高等学校で講師として勤務していた 1995 年夏に完成していたがいろいろと手直ししている間に時間が経ってしまった．その間，読みにくい原稿を精読し，有益な注意をして頂いた大阪教育大学数学教育講座の大学院生である木本聡君 に深く感謝します．

1. 背理法の論理について

1.1　背理法の定義

参考文献[３](以下，[３]と書く．他の文献も同じ)“「背理法の定義について」を読んで”において，長澤直孝氏は，教科書では背理法が次に示す２つのうちのいずれかで定義されていると指摘した．

(1) ある事柄が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより，その事柄が成り立つことを証明する方法．

(2) 証明すべき命題の結論が偽であると仮定して推論を進める中で矛盾を見つけることにより，もとの命題の結論が真であることを示す証明法

同氏は更に，推論の厳密性を重視する等の理由により背理法の定義として(1)が妥当ではないかと指摘した．

それから約 10 年を経た現在，背理法の定義がどのように表現されているかを少し調べたが，今でも両者が存在している．

私自身も長澤氏と同じく(1)の立場を支持しつつ，後に述べる「背理法の分類」と，「背理法と対偶法との関係」を考慮し，背理法を

“命題Aを証明するためにAの否定$\overline{\mathrm{A}}$を仮定して矛盾を導く(間接的)証明法”

と定義づけるべきであると考える(以下，本稿では“A”は証明すべき命題を表すものとする)．

1.2　背理法の分類とその正当性

先に，[３]より背理法には，異なる二者の立場があると紹介したが，その一因として，次に述べるように，“A”自身や矛盾の内容に着目して背理法をいくつかの型に分類するということをせず，明確に背理法という証明法を捉えていないことがあげられるのではないだろうか．

そこで，ここでは次のように背理法を分類することにする．

[１型] “A”が“命題p”の形の場合
$\overline{p}\Rightarrow r\wedge\overline{r}$　(r：真の命題)を示す．

[２型] “A”が“命題$p\Rightarrow q$”の形の場合(これは，更に３つに分類される)

(2-1 型)　$p\wedge\overline{q}\Rightarrow r\wedge\overline{r}$　(r：p, q 以外の真の命題)を示す．

(2-2 型)　$p\wedge\overline{q}\Rightarrow q\wedge\overline{q}$　を示す．

(2-3 型)　$p\wedge\overline{q}\Rightarrow p\wedge\overline{p}$　を示す．

参考までに，各々の場合にあてはまる命題の例を挙げておく．

[１型] ユークリッドの素数定理（“素数は無限に多く存在する”）

[２型] (2-1型) “l, m, n が同一平面上の異なる直線で $l /\!/ m$ かつ $m /\!/ n$ ならば，$l /\!/ n$ である．”

(2-2型) “$x>0$ のとき，$x \leqq x^t$ $(0<t<1)$ ならば，$x \leqq 1$ である．”

(2-3型) “x^2 が奇数ならば，x も奇数である．”

上記のように背理法を分類したわけであるが，このことが論理的に成立することは真理表を用いると明らかである（真理表[１型]，[２型]参照）．

[２型]のみの分類なら[２]でも紹介されている．(長澤氏は，背理法の定義として(2)を用いた場合[１型]の命題において「命題の結論」を明確にすることが困難であるということから(1)を用いた)

しかしながら，高等学校において生徒がこれらの分類と正当性を理解し用いることはおそらく容易ではないだろう．なぜなら，

① 各教科書において背理法は，否定・逆・裏・対偶を学んだ後すぐに学習するとはいうものの，それらの概念と密接に関連のある背理法の定義を把握し，分類やその正当性を論理記号や真理表を用いて理解することは生徒にとって難しい．

② 矛盾の概念を使用することは生徒にとって困難である．生徒が，“矛盾律 $r \wedge \overline{r}$ は偽である．”を理解したとしても，背理法の場合，導き出す矛盾の内容は証明する前にはわからない．つまり，分類[１型]，[２型]を視覚的にとらえることができても，何を導けばよいのかわからない．

③ 対偶法と背理法とを混同する（このことについては，後述する）．

というような理由からである．しかし指導にあたる教師は，上記のような分類を充分に理解し，実際に指導する場合には，生徒にとって直観的に理解し易い説明を行う必要があると考えられる．

真理表　$\overline{p}$ の真・偽，合成命題 $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$ の真・偽を次のように定める．

p	$\overline{p}$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	T
F	F	F	T

このことより，各々の真理表は次のようになる．

[１型]

p	r	$\overline{p}$	$r \wedge \overline{r}$	$\overline{p} \Rightarrow r \wedge \overline{r}$
T	T	F	F	T
F	T	T	F	F

[２型]

(2-1型)

p	q	$p \Rightarrow q$	r	$\overline{q}$	$p \wedge \overline{q}$	$r \wedge \overline{r}$	$p \wedge \overline{q} \Rightarrow r \wedge \overline{r}$
T	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T

(2-2 型)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\overline{q}$	$p\wedge\overline{q}$	$q\wedge\overline{q}$	$p\wedge\overline{q}\Rightarrow q\wedge\overline{q}$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	T

(2-3 型)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p\wedge\overline{q}$	$p\wedge\overline{p}$	$p\wedge\overline{q}\Rightarrow p\wedge\overline{p}$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T

1.3　背理法と対偶法との関係

背理法と同じく重要な証明法に対偶法(命題 $p\Rightarrow q$ を，その対偶 $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ を示すことによって証明する証明法)がある．両者の関係を，「対偶法は，背理法の特別な場合である．」としてとらえることがある(この特別な場合とは，(2-3 型)を指している)．しかし，ここでは，ある命題 $p\Rightarrow q$ を示す場合，背理法は，その仮定として p と $\overline{q}$ だけを用い，結論として矛盾を導いているが，対偶法は，その仮定として $\overline{q}$ だけを用い，結論として $\overline{p}$ を導いている．このように，各々の証明法の定義より，両者が異なるものであることが明白である以上，背理法と対偶法とは，同じ結論を導き，例えば，“否定”という同じ概念を用いるとはいえ，混同することなく，明確に分けて考えるべきである．

2. 背理法の論理を理解させる指導

2.1　ベン図の利用は適切か？

対偶法の論理を生徒に理解させるために，多くの教科書ではベン図を用いてその論理を説明している．実際，ベン図は対偶法の論理を直観的に理解させるため有用なものであった(勿論，数学的証明は必要であるが…)．そこで背理法の論理もベン図を用いることにより説明できるかどうかについて考えてみる．

[1]でもこのことについての考察がなされているがそのことを参考にしつつ独自に考えていく．

ここでは，背理法の[2型]，つまり，“$p\Rightarrow q$”型の命題を主として考えることにする．

P，Qをそれぞれ条件 p, q を満たす集合であるとすると，背理法とは“命題 $p\Rightarrow q$”を示すため，p かつ $\overline{q}$ ならば矛盾することを示す証明法，つまり，集合で言えば，P⊂Qを示すため，$\mathrm{P}\cap\overline{\mathrm{Q}}=\phi$ を示す証明法のことである．

そこで，実際にベン図を書いて考えてみることにする．

まず全体集合をUとおく．次にベン図を書くのであるが，教科書などでよく用いられる図1のような図を用いることはこの場合適切とはいえない．なぜなら，前述したように背理法とはP⊂Qを示すため $\mathrm{P}\cap\overline{\mathrm{Q}}=\phi$ を示す証明法のことであり，このことから，$\overline{\mathrm{Q}}$ はQと同様に重要な役割を担っていると考えられるからである．したがって，例えば，Qと $\overline{\mathrm{Q}}$ とが対等に扱われている図2のような図を書く必要がある．そして，背理法では，この図の関係が肯定できることを示せばよいことがわかる．そのためには，論理的可能性として図2，3，4のいずれかが成立するのであるから，図3，4の状態を否定すればよいことがわかる．

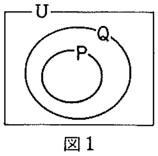

図1

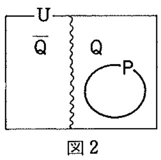

図2

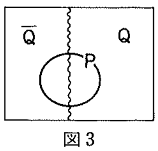

図3

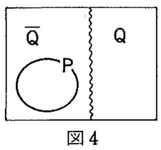

図4

このように考えると，背理法の論理を対偶法と同様ベン図を用いて説明できるように思えるが，これにも問題がないわけではない．

例えば,

① 背理法の[1型]は上記の方法ではベン図に表せない.
[1型]では条件pにあたるものがない. 例えば, "$\sqrt{2}$ は無理数である."の場合がそうである. 勿論, これをあえて"$\sqrt{2}$ が実数ならば, $\sqrt{2}$ は無理数である."として考え, Uとして実数, Pとして $\sqrt{2}$ という実数の元, そしてQとして無理数全体($\overline{Q}$は有理数の集合になる)を考えれば, 一見上記の方法を用いることができるように思えるが, それでは[2型]の背理法になってしまうのである.

② ベン図では一般の命題全てを表せない.
例えば背理法の分類における[1型], [2型](2-1型)の場合, p, q に関係しない命題 r の矛盾律 $r \wedge \overline{r}$ を利用し, もとの命題が真となることを示している. しかしながら, 数多くある命題全てをベン図に表すことはできない.

③ ベン図では矛盾の内容が明らかにできないことがある.
背理法は矛盾を導くことに大きな特徴がある. しかしながらベン図では, 矛盾の内容をはっきり表せないため, 背理法の特徴を出しきれない.

以上のことからすると, 背理法の論理をベン図で説明し, 生徒に理解させるということは, 適切な方法ではないと考えられる.
(更にこのことからも, 背理法と対偶法が異なるものであるとわかる)

2.2 生徒への背理法の指導

真理表の説明では難しく, また, ベン図での説明は適切でないと考えられる背理法の論理を生徒にいかにして納得させればよいのだろうか. それにはまず生徒が難しいと感じるであろう次の点について充分注意する必要がある.

① "命題A"を証明するのに, その否定 $\overline{\mathrm{A}}$ を仮定し証明すること.
否定という概念を用いての証明は生徒にとって初めてのことであり受け入れ難いと考えられる. もし, その証明が直観的に真であると生徒が感じれば, その直観に反して証明を進めることになり更に受け入れ難いものとなる.

② 矛盾という概念を用いること.
生徒にとっては矛盾という概念自体が難しいのである. その上, 背理法では矛盾の内容が証明しようとする時点で明確でないのだから生徒はどのように証明を進め何を導けばよいのかわからずに戸惑いを感じる.

③ Aとすると矛盾だからAであると断定すること.
他にB, C, …というようなAとは異なる可能性を考える生徒がいるかもしれない.

以上のような点に注意して教師が指導し, 生徒が理解できた上で, 初めは命題の選択に注意を払いながら背理法の定義をかみくだいた

$\overline{\mathrm{A}}$ とすることにより矛盾が生じるのであるから $\overline{\mathrm{A}}$ でない, つまりAであるということになる.

というような考え方を生徒ができればよいのではないかと考えられる.

3. 結び

本稿では, 背理法に関してその定義と分類の方法をまとめた上で, 指導についての考察を行った. その結果, 対偶法の様にベン図を用いて生徒に説明するのは無理があり, また, 真理表や論理記号を用いての説明はかなり難解なため, どちらも生徒が充分に理解し, 自由に使いこなせるようになるには程遠いことが明らかとなった.

背理法を指導するに際しては, 命題とその否定や対偶, 更に, 真理表や論理記号といった事項を生徒が予め理解していることが必要不可欠である. こうした論理の教育内容を再度見直し, 充実させた上で教材として生徒が直観的に理解できる命題を用いて背理法を身近なものとして考えられるよう指導していきたい.

参考文献

[1] 秋葉武夫 背理法指導への一提案
日本数学教育学会誌
第55巻 第7号 pp.13-17 1973

[2] 秋山 仁 数学の証明の仕方 駿台文庫
p.52 1989年7月14日

[3] 長澤直孝 「背理法の定義について」を読んで
数研通信数学 No.4 数研出版 p.1

(奈良県育英西中学高等学校)