集合と位相空間入門

福井敏純

目 次

第1章　集合

数学で「集合」といえば，集まることではなく,「ものの集まり」のことである．例えば「自然数全体の集まり」や「$0 \leq x \leq 1$ であるような実数 x の全体の集まり」等は集合である．しかし日常考える「ものの集まり」には「大きな数の集まり」や「背が高い人の集まり」のようなものもある．しかしこれらは数学では集合とはいわない．数学で「集合」と呼ぶ「ものの集まり」は「どんなものをとってきても，それがその集まりのなかにあるかないかがはっきり定まっている」ものでなければならないのである．

ここではそのように素朴に考えた集合の理論，素朴集合論 (naive set theory) の初歩を学ぶ．

1.1　集合

集合は，普通アルファベットの大文字 $A, B, C, \ldots, S, T, \ldots$ を使って表される．A が集合であるとき, A の中に入っている個々の「もの」を A の**元**，または**要素** (英語では element) という．a が集合 A の元であることを

$$a \in A, \quad \text{または} \quad A \ni a$$

と書き，a は集合 A に**属する** (または**含まれる**) という．$a \in A$ の否定は

$$a \notin A, \quad \text{または} \quad A \not\ni a$$

であらわす．

数学の各部門で頻繁に現れる基本的ないくつかものは，しばしば固有の記号で表され，固有名詞的に用いられる．代表的なものを挙げておく．

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \text{自然数全体の集合 (the set of natural numbers)} \\
\mathbb{Z} &= \text{整数全体の集合 (the set of integers)} \\
\mathbb{Q} &= \text{有理数全体の集合 (the set of rational numbers)} \\
\mathbb{R} &= \text{実数全体の集合 (the set of real numbers)} \\
\mathbb{C} &= \text{複素数全体の集合 (the set of complex numbers)}
\end{aligned}$$

なお自然数全体の集合に 0 を含める流儀と，含めない流儀があるので本を読むときや，人の話を聞くときは注意して欲しい．0 を含めないのはアメリカ流で，0 を含めるのはフラ

ンスに端を発するようである．しかしこの区別は厳密なものでなく同じ人でも都合によって自然数に 0 を含めたり，含めなかったりする．

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots.\}, \quad \text{または} \quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots.\}.$$

次に，個々の集合を具体的にあらわす記法について説明する．例として「10 より小さい素数の集まり」を考えよう．これを要素を列挙して

$$\{2, 3, 5, 7\}$$

とあらわすことができる．このようにすべての要素を列挙して集合をあらわす表記法を**外延的記法**という．

上の自然数全体の集合の表記 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots.\}$ も外縁的記法の一種と考えられる．一方，要素の性質を書いて集合を書きあらわすことも考えられる．たとえば，次のようなものである．

$$\{x \mid x \text{ は 10 より小さい素数}\}$$

これを集合の**内包的記法**という．いいかえると $P(x)$ を述語とし，述語 $P(x)$ を真にするようなすべての x 全体の集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

であらわす[1]のが，集合の**内包的記法**である．「$0 \leq x \leq 1$ であるような実数 x の全体の集合」は内包的記法を用いて

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

とあらわすのが普通である．

すべての x について述語 $P(x)$ が偽ということもおこりうる．このような場合も $\{x \mid P(x)\}$ を集合として扱えた方が便利である．そこで元を一つも含まないものも集合と考え，これを**空集合** (empty set) とよび，記号 $\emptyset$ であらわす．例えば

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

は空集合である

定義 1.1.1 (部分集合). 集合 A, B において A の元がすべて B の元であるとき，すなわち，

$$\forall x \quad x \in A \Longrightarrow x \in B \tag{1.1}$$

が成り立つならば，A は B の**部分集合** (subset) であるといい，

$$A \subset B \quad \text{または} \quad B \supset A$$

と書く．このことを A は B に**含まれる**，または B は A を**含む**などともいう．

[1] $\{x : P(x)\}$ や $\{x\,; P(x)\}$ を使うこともある．

空集合はすべての集合の部分集合である．$A=\emptyset$ とした時，$x \in A$ は常に偽であり，論理式 (1.1) は真であるからである．

$A \subset B$ の否定を

$$A \not\subset B \quad \text{または} \quad B \not\supset A$$

であらわす．これは論理記号で書くと次のようになる．

$$\exists x \quad x \in A \quad x \notin B$$

A が B の部分集合であるというときには，$A=B$ である特別の場合も除外されていない．$A \subset B$ かつ $A \neq B$ のときには A は B の**真部分集合** (proper subset) であるといい，

$$A \subsetneq B, \quad A \subsetneqq B, \quad B \supsetneq A, \quad B \supsetneqq A$$

などと書く．

A が B の部分集合であることを $A \subseteq B$ と書き, A が B の真部分集合であることを $A \subset B$ と書く流儀もある．不等号 $<$ の類推からこのように書くのがよいと考えるのであろう．しかしながらこの記法を使うのは，世界的には小数派[2]のようである．

数学の理論を展開するとき，そのとき考えている集合はすべて, ある 1 つの定まった集合 U の部分集合である，ということがわかっているような場合が少なくない．そのような場合 その定まった集合 U のことを**全体集合** (whole set)，または**宇宙** (universe) とよぶ．

変数 x が全体集合 U を動くとする．U の部分集合 A, B を述語 $P(x)$, $Q(x)$ を用いて内包的に次のようにあらわせているとする．

$$A=\{x \in U \mid P(x) \text{ が真 }\}, \quad B=\{x \in U \mid Q(x) \text{ が真 }\}$$

このとき，すべての $x \in U$ に対し $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ が成り立つということは $A \subset B$ と同値であることに注意しておこう．

次の命題は明らかであろう．

$$\begin{aligned} A=B &\Longleftrightarrow A \subset B,\ B \subset A \\ &\Longleftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \end{aligned}$$

よって 2 つの集合 A と B が等しいことを証明するには, $A \subset B$ であることと，$A \supset B$ であることを証明すればよい．実際，2 つの集合が等しいことの証明は，ほとんどすべての場合に，このようにして行われるのである．

[2]日本における中等教育では，しばしば使われている．

集合算

2つの集合 A, B が与えられたとき, A の元と B の元を全部合わせて得られる集合を, A と B の**和集合** (union) といい $A \cup B$ であらわす．内包的記法を用いると $A \cup B$ は次のように書きあらわすことができる．

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

2つの集合 A, B が与えられたとき, A, B の両方に共通な元全体の集合を, A と B の**共通部分** (intersection) といい $A \cap B$ であらわす．内包的記法を用いると $A \cap B$ は次のように書きあらわすことができる．

$$A \cap B := \{x \mid x \in A, x \in B\}$$

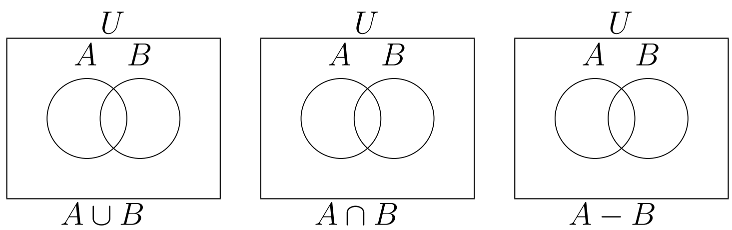
2つの集合 A, B が与えられたとき, A に属するが，B には属さない様な元全体の集合を, A に対する B の**差集合**といい

$$A - B \quad \text{または} \quad A \setminus B$$

であらわす．内包的記法を用いると $A - B$ は次のように書きあらわすことができる．

$$A - B := \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

演習 1.1.2. 和集合 $A \cup B$, 共通部分 $A \cap B$, 差集合 $A - B$ を，次の Venn 図に図示せよ．



Venn 図は直観的理解には便利で，よい Venn 図は思考を助けるが，Venn 図による説明だけでは，数学の証明とはいえないことに注意しておこう．

全体集合 U が与えられているとき，集合 A の U に対する差集合 $U - A$ を A の**補集合** (complement) といい，記号 A^c であらわす．

$$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

である．

演習 1.1.3. 全体集合 U の部分集合に対し $A - B = A \cap B^c$ を示せ．

演算 $\cup, \cap$ については次の公式が成り立つ.

$$\begin{array}{lrcl}
\text{交換律}: & A \cup B & = & B \cup A, \\
 & A \cap B & = & B \cap A. \\
\text{結合律}: & (A \cup B) \cup C & = & A \cup (B \cup C), \\
 & (A \cap B) \cap C & = & A \cap (B \cap C). \\
\text{分配律}: & (A \cup B) \cap C & = & (A \cap C) \cup (B \cap C), \\
 & (A \cap B) \cup C & = & (A \cup C) \cap (B \cup C). \\
\text{吸収律}: & (A \cup B) \cap A & = & A, \\
 & (A \cap B) \cup A & = & A.
\end{array}$$

演習 1.1.4. 以上を証明せよ.

1.2　集合と写像

定理 1.2.1 (de Morgan の法則). U を全体集合，A, B をその部分集合とすると次が成り立つ．

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

証明　最初の式だけ示す．

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A,\ x \in B) \\ &\Leftrightarrow \neg(x \in A) \text{ または } \neg(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ または } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

□

演習 1.2.2. de Morgan の法則の 2 番目の式を証明せよ．

対象 a と b の**順序対** (ordered pair) を (a, b) であらわす．すなわち

$$(a, b) = (a', b') \overset{\text{def}}{\iff} a = a',\ b = b'$$

と約束して，対 (a, b) を考察の対象とする．

集合 A, B に対して，A の元 a と B の元 b の順序対 (a, b) 全体からなる集合を A と B の**直積集合** (direct product of sets) といい $A \times B$ であらわす．すなわち，

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

である．自分自身との直積集合 $A \times A$ を A^2 と書く．n 個の A の元の組 $(a_1, \ldots, a_n)$ を考え,

$$(a_1, \ldots, a_n) = (a'_1, \ldots, a'_n) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad a_1 = a'_1,\ \ldots,\ a_n = a'_n$$

と約束する．$(a_1, \ldots, a_n)$ 達全体の集合を A の n 個の直積集合といい

$$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

と書く．

集合 A のすべての部分集合全体を A の**冪集合** (power set) といい記号 2^A または $\mathfrak{P}(A)$ であらわす．

例 1.2.3. 集合 $A = \{1, 2, 3\}$ のすべての部分集合全体 2^A は次のようになる．

$$2^A = \bigl\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\bigr\}$$

演習 1.2.4. 集合 $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ のすべての部分集合全体 2^A は次のようになる．

$$2^A = \bigl\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n\}\bigr\}$$

2^A はいくつ元を含むか?

写像

　集合 X, Y において，X の各元 x に対して Y のある元を対応させる規則が定まっているとき，X から Y への**写像** (map of X to Y) が定められているという．f が X から Y への写像であることを

$$f : X \to Y \quad \text{または} \quad X \xrightarrow{f} Y$$

のようにあらわす．このとき f によって X の元 x に Y の元 y が対応するとすれば

$$f(x) = y \quad \text{または} \quad x \mapsto y$$

と書いて，y を x の f による**像** (image) という．

　写像 $f : X \to Y$ において X を 写像 f の**定義域** (domain) といい

$$f(X) = \{y \mid \exists x \in X \text{ s.t. } f(x) = y\} = \{f(x) \mid x \in X\}$$

を写像 f の**値域** (range) という．

例 1.2.5. 集合 X に対し $1_X : X \to X, x \mapsto x,$ を**恒等写像** (identity) という．

例 1.2.6. 集合 X, Y と写像 $f : X \to Y, x \mapsto f(x),$ があるとする．X の部分集合 A に対し写像

$$f|_A : A \to Y, \quad a \mapsto f(a)$$

を f の A への**制限写像** (restriction) という．制限写像をあらわすのに記号 $f|_A, f|A$ などを用いる．

定義 1.2.7. 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとする．X の部分集合 A に対し,

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ s.t. } f(x) = y\} = \{f(a) \mid a \in A\}$$

を A の f による**像** (image) という．ここで $f(\emptyset) = \emptyset$ と約束する．また Y の部分集合 B に対し,

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

を B の f による**逆像** (inverse image) という．ここで $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ と約束する．また元 $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y)$ を次で定義する．

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

これは $f^{-1}(\{y\})$ のことであり，一般には X の部分集合である．

例 1.2.8. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2,$ を考える．$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ とおくと

$$f(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

となる．$B = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$ とおくと,

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$$

となる．また $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$ である．

演習 1.2.9. 写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2-y^2$, を考える．

(i) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ とおくとき $f(A)$ を求めよ．
(ii) $B=\{z\in\mathbb{R}\mid 1\le z\le 4\}$ とおくとき, $f^{-1}(B)$ を求めよ．

演習 1.2.10 (線形写像). a,b,c,d を実数とし，次の写像を考える．

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

ここでは $\mathbb{R}^2=\{\binom{x}{y}\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ としている．$0=\binom{0}{0}$ とおくとき，

(i) $ad-bc\neq 0$ のとき $f^{-1}(0)$ を求めよ．
(ii) $ad-bc=0$ のとき $f^{-1}(0)$ を求めよ．

集合 X, Y 間の写像 $f:X\to Y$ について，一般に成立する定理をあげておこう．

定理 1.2.11. A, A_1, A_2 を X の部分集合とするとき，次が成り立つ．

(i) $A_1\subset A_2\Longrightarrow f(A_1)\subset f(A_2)$.
(ii) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$.
(iii) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.
(iv) $f(X-A)\supset f(X)-f(A)$.
(v) $A\subset f^{-1}(f(A))$.

証明. (i): $y\in f(A_1)\iff\exists x\in A_1[f(x)=y]\Longrightarrow\exists x\in A_2[f(x)=y]\iff y\in f(A_2)$.
(ii): $y\in f(A_1\cup A_2)\iff\exists x\in A_1\cup A_2\ [f(x)=y]\iff\exists x\ [(x\in A_1\vee x\in A_2)\wedge f(x)=y]$
$\iff[\exists x\in A_1(f(x)=y)\vee\exists x\in A_2(f(x)=y)]\iff y\in f(A_1)\cup f(A_2)$
(iii): $y\in f(A_1\cap A_2)\iff\exists x\in A_1\cap A_2\ [f(x)=y]\iff\exists x\ [(x\in A_1\wedge x\in A_2)\wedge f(x)=y]$
$\Longrightarrow[\exists x_1\in A_1(f(x_1)=y)]\wedge[\exists x_2\in A_2(f(x_2)=y)]\iff y\in f(A_1)\cap f(A_2)$
(iv): $y\in f(X)-f(A)$ なる y をとる．$y\in f(X)$ より $f(x)=y$ なる $x\in X$ が存在する．$x\notin A$ を示せばよい．ところで $y\notin f(A)$ より $\forall a\in A\ f(a)\neq y$ なので $x\in A$ とはならない．よって $x\in X-A$.
(v): $x\in A$ より $f(x)\in f(A)$. これは $x\in f^{-1}(f(A))$ を意味している． □

演習 1.2.12. (iii), (iv), (v) で実際に両辺が異なるような例をあげよ．

定理 1.2.13. B, B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき，次が成り立つ．

(i) $B_1\subset B_2\Longrightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$.
(ii) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.
(iii) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$.
(iv) $f^{-1}(Y-B)=f^{-1}(Y)-f^{-1}(B)$.

(v) $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$.

証明. (i): $x \in f^{-1}(B_1) \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \Longrightarrow f(x) \in B_2 \Longleftrightarrow f(x) \in B_2$
(ii): $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Longleftrightarrow (f(x) \in B_1) \vee (f(x) \in B_2)$
$\Longleftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1)] \vee [x \in f^{-1}(B_2)] \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
(iii): $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Longleftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Longleftrightarrow (f(x) \in B_1) \wedge (f(x) \in B_2)$
$\Longleftrightarrow [x \in f^{-1}(B_1)] \wedge [x \in f^{-1}(B_2)] \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
(iv): $x \in f^{-1}(Y - B) \iff f(x) \in Y - B \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B)$
$\iff x \in X - f^{-1}(B)$
(v): $y \in B \cap f(X) \iff (y \in B) \wedge [\exists x \in X(f(x) = y)]$
$\iff \exists x \in f^{-1}(B)[f(x) = y] \iff y \in f(f^{-1}(B))$ □

1.3 全射と単射

定義 1.3.1 (全射). 写像 $f : X \to Y$ において，$f(X) = Y$ であるとき，f を X から Y の**上への写像** (map of X onto Y) または f は**全射** (surjection) であるという．いいかえると

$$f : \text{全射} \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, y \in Y,\ \exists\, x \in X \text{ s.t. } f(x) = y$$

である．全射を $f : X \twoheadrightarrow Y$ のように書くことがある．

surjection は Bourbaki による造語であるらしい．フランス語では on にあたる前置詞が sur なので surjection という言葉が作られたようである．

定義 1.3.2 (単射). 写像 $f : X \to Y$ において，

$$a \neq a' \quad \text{ならば} \quad f(a) \neq f(a'),$$

または，同じことであるが，

$$f(a) = f(a') \quad \text{ならば} \quad a = a'$$

であるとき，f を**一対一写像** (one-to-one map)，または f は**単射** (injection) であるという．単射を $f : X \hookrightarrow Y$ のように書くことがある．この使い方も Bourbaki による．

注: 病院で injection と言えば注射のことであるが, 数学で injection と言えば単射のことである．

例 1.3.3. 全射や単射のいろいろな例をあげておこう．

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 1$ は全射かつ単射．

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ は全射でもなく単射でもない．

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 + x$ は全射かつ単射．

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$ は全射だが単射でない．

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan^{-1} x$ は全射でないが単射．

定理 1.3.4. $f : X \to Y$ が単射ならば，X の部分集合 $A,\ A_1,\ A_2$ に対し次が成り立つ．

(i) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

(ii) $f(X - A) = f(X) - f(A)$.

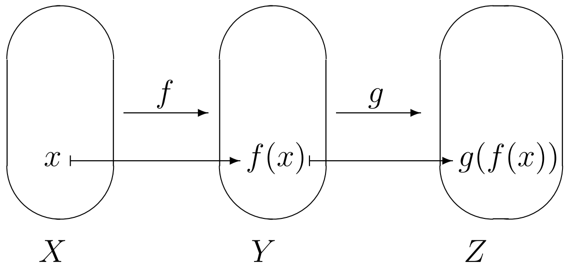
(iii) $A = f^{-1}(f(A))$.

証明. (i) だけ示す．他は演習に残す．
$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ は定理 1.2.11(iii) で示したので，$f(A_1 \cap A_2) \supset f(A_1) \cap f(A_2)$ を示せば十分．
$y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ とすると $\exists a_1 \in A_1\ f(a_1) = y,\ \exists a_2 \in A_2\ f(a_2) = y$. $f(a_1) = y = f(a_2)$ で f は単射なので $a_1 = a_2 \in A_1 \cap A_2$. よって $y = f(a_1) \in f(A_1 \cap A_2)$. □

演習 1.3.5. (ii), (iii) の証明を完成させよ．

写像の合成

写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられているとき $x \mapsto g(f(x))$ できまる写像 $X \to Z$ を f と g の**合成** (composition) といい $g\circ f$ であらわす.



例 1.3.6. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, と写像 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 1$, にたいし，合成 $g\circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $g\circ f(x) = x^2 + 1$ で与えられる．また合成 $f\circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $f\circ g(x) = (x+1)^2$ で与えられる．

演習 1.3.7. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し，次を示せ.

(i) f, g がともに全射ならば合成 $g\circ f$ は全射.
(ii) f, g がともに単射ならば合成 $g\circ f$ は単射.

例 1.3.8 (線形写像の合成). a, b, c, d, p, q, r, s を実数とし，次の写像 f, g を考える.

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \\
g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, &\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

このとき，合成 $g\circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は次の式で与えられる.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p(ax + by) + q(cx + dy) \\ r(ax + by) + s(cx + dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
$$

定理 1.3.9. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ に対し，

$$
h\circ (g\circ f) = (h\circ g)\circ f.
$$

よってこの写像を $h\circ g\circ f$ の様に書いても，曖昧さはない.

証明. 任意の $x \in X$ に対し，

$$
(h\circ (g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h\circ g)(f(x)) = ((h\circ g)\circ f)(x)
$$

より従う. □

定理 1.3.10. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対し，次が成り立つ.

(i) 合成 $g\circ f$ が全射ならば g は全射.
(ii) 合成 $g\circ f$ が単射ならば f は単射.

証明　(i) を示す．$z\in Z$ を任意にとる．$g(y)=z$ なる $y\in Y$ が存在することを示せばよい．仮定より $g\circ f$ が全射なので，$g\circ f(x)=z$ なる $x\in X$ が存在する．$y=f(x)$ が求めるものである．

(ii) を示す．$x_1,x_2\in X$ に対し，$f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$ を示せばよい．$f(x_1)=f(x_2)$ より $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$. $g\circ f$ は単射だから $x_1=x_2$ である． □

演習 1.3.11. 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ があるとき次を示せ.

(i) 合成 $g\circ f$ が全射で g が単射ならば f は全射.
(ii) 合成 $g\circ f$ が単射で f が全射ならば g は単射.

演習 1.3.12. 写像 $f:X\to Y$ を全射とし，写像 $g:Y\to Z$, $g':Y\to Z$ に対し $g\circ f=g'\circ f$ ならば $g=g'$ を示せ.

全単射と逆写像

定義 1.3.13 (全単射). 写像 $f:X\to Y$ が全射かつ単射であるとき，f は **全単射** (bijection) である，または**双射**であるという.

bijection も Bourbaki による造語である.

定義 1.3.14 (逆写像). 写像 $f:X\to Y$ が全単射であるとき，写像 $f^{-1}:Y\to X$ を

$$x=f^{-1}(y)\quad\Longleftrightarrow\quad f(x)=y$$

で定義することができる．f^{-1} もまた全単射である．f^{-1} を f の**逆写像** (inverse map) という.

定義 1.2.7 の記号に従うと，f が全単射であれば $f^{-1}(y)$ は一点からなる X の部分集合である．この記法によれば $\{x\}=f^{-1}(y)$ で，これは逆写像の上の記法 $x=f^{-1}(y)$ と紛らわしいが，意味をしっかり押えておけばまず混乱の恐れはない.

演習 1.3.15. 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ が全単射ならば $g\circ f:X\to Z$ も全単射で，$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ を示せ.

定理 1.3.16. 写像 $f:X\to Y$, $g:Y\to X$ について $g\circ f=1_X$, $f\circ g=1_Y$ ならば f は全単射で $g=f^{-1}$.

証明　$g\circ f=1_X$ は単射なので，定理 1.3.10 (ii) より, f は単射である．$f\circ g=1_Y$ は全射なので，定理 1.3.10 (i) より, f は全射である．よって f は全単射である．よって逆写像 f^{-1} が存在する．よって $g=g\circ 1_Y=g\circ(f\circ f^{-1})=(g\circ f)\circ f^{-1}=1_X\circ f^{-1}=f^{-1}$. □

演習 1.3.17. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, $g' : Y \to X$ について $g \circ f = 1_X$, $f \circ g' = 1_Y$ ならば f は全単射で $g = g' = f^{-1}$ を示せ.

例 1.3.18. 全単射の例を幾つか挙げてみよう.

(i) 写像 $f : (0,1) \to (a,b)$ を $f(x) = (b-a)x + a$ で定義すると，これは全単射である.
(ii) 写像 $f : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$, は全単射である.
(iii) 写像 $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x/(1-x^2)$, も全単射である.
(iv) $ad - bc \neq 0$ のとき，写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{x}{y}$, も全単射である.

1.4 有限集合と無限集合

まず，単射，全射の性質を述べる．

定理 1.4.1. $f : X \to Y$ を写像とする．

(i) f が単射 $\Longleftrightarrow$ $g \circ f = 1_X$ なる写像 $g : Y \to X$ が存在する．
(ii) f が全射 $\Longleftrightarrow$ $f \circ g = 1_Y$ なる写像 $g : Y \to X$ が存在する．

証明 (i), (ii) ともに $\Longleftarrow$ は定理1.3.10から明らかである．(i) の $\Longrightarrow$ を示そう．$f : X \to Y$ は単射であるから，写像 $f : X \to f(X)$ は全単射である．その逆写像 $g_0 : f(X) \to X$ とかく．X の元 x_0 を任意に決め固定する．写像 $g : Y \to X$ を

$$g(y) = \begin{cases} g_0(y) & y \in f(X) \text{ のとき} \\ x_0 & y \notin f(X) \text{ のとき} \end{cases}$$

を定めると，これは条件をみたす．
(ii) の $\Longrightarrow$ の証明: f の全射性より，任意の $y \in Y$ に対し $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．この x を $g(y)$ と書けば $f \circ g = 1_Y$ となる．□

上述の (ii) の証明は，Y が有限集合の時はこの論法でよいが，Y が無限集合の時は完全とは言い難い．実際，写像 g の存在を示す事は，

$$P = \{g \in X^Y \mid g(y) \in f^{-1}(y)\ \forall y \in Y\}$$

が空集合でない事を示すことであり，各 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が空集合でない事から，P が空集合でないことが帰結できるかどうかは直ちにはわからない．ここに選択公理の必要性があるのである．後述の定理3.3.8の証明も参照のこと．

有限集合 (finite set)

$n+1$ 人の人を n 個の部屋へ入れるとどこかの部屋には2人以上入ることになる．これが部屋割り論法である．

補題 1.4.2 (部屋割り論法). 自然数 m, n に対し $m > n$ ならば

$$\text{集合 } \{1, 2, \ldots, m\} \text{ から } \{1, 2, \ldots, n\} \text{ への写像}$$

は単射にはなり得ない．

証明 n に関する数学的帰納法で示す．$n = 1$ のときは明らかである．n のとき補題が成立すると仮定して $n+1$ のときを示す．$m > n+1$ として，単射写像

$$f : \{1, 2, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n+1\}$$

があったとして矛盾を導く．もし $n+1$ が f の像に入っていなければ，実際には f は $\{1,2,\dots,m\}$ から $\{1,2,\dots,n\}$ への写像で，仮定よりこれが単射なので，帰納法の仮定に矛盾する．よって $f(k)=n+1$ となる $k\in\{1,2,\dots,m\}$ が存在しなければならない．ここで写像

$$g:\{1,2,\dots,m-1\}\to\{1,2,\dots,n\}\quad \text{を}$$
$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (1\le x<k)\\ f(x+1) & (k\le x<m)\end{cases}$$

で定義すると f が単射なので g も単射となり帰納法の仮定に矛盾する．□

補題 1.4.3. 自然数 m,n に対し $m<n$ ならば集合 $\{1,2,\dots,m\}$ から $\{1,2,\dots,n\}$ への写像は全射にはなり得ない．

証明　全射 $f:\{1,2,\dots,m\}\to\{1,2,\dots,n\}$ があったとする．各 $k\in\{1,2,\dots,n\}$ に対し，$f^{-1}(k)$ の元を一つ選びそれを a_k と書く．このとき写像

$$g:\{1,2,\dots,n\}\longrightarrow\{1,2,\dots,m\},\quad k\mapsto a_k$$

は単射なので，補題 1.4.2 より $m\ge n$ となる．□

補題 1.4.4. $A_n=\{1,2,\dots,n\}$ とする．このとき次が成り立つ．

(i) 写像 $f:A_n\to A_n$ が単射ならば，全射である．
(ii) 写像 $f:A_n\to A_n$ が全射ならば，単射である．

略証　(i): $f:A_n\to A_n$ が単射かつ全射でないとすると $f(A_n)$ に入らない $k\in A_n$ が存在する．よって f は n 個の元の集合から，$n-1$ 個の元の集合 $A_n-\{k\}$ への単射になり，補題 1.4.2 に矛盾．
(ii): $f:A_n\to A_n$ が全射かつ単射でないとすると $f(x)=f(y)$ なる相異なる A_n の元 x,y が存在する．f を $A_n-\{y\}$ に制限すればこれは $n-1$ 個の元の集合から，n 個の元をもつ集合への全射になり，補題 1.4.3 に矛盾．□

無限集合 (infinite set)

空でない集合 A と，集合 $\{1,2,\dots,n\}$ との間に全単射写像があるとき A は**有限集合**であるという．どんな自然数 n に対しても A と 集合 $\{1,2,\dots,n\}$ との間に全単射写像が存在しないとき，A は**無限集合**であるであるという．

例 1.4.5. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は無限集合である．整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ や，有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$, 実数全体の集合 $\mathbb{R}$, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ も無限集合である．

演習 1.4.6. 他に無限集合の例を挙げよ．

演習 1.4.7. A を無限集合とする．例えば $A = \mathbb{N}$ とする．

(i) 単射でかつ全射でない写像 $f : A \to A$ の例を挙げよ．
(ii) 全射でかつ単射でない写像 $f : A \to A$ の例を挙げよ．

無限集合の間の全単射の中には変わった写像も存在する．

例 1.4.8. 整数全体は次のように一列に並べることが出来る．

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$$

この事は，$\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ の間に全単射が存在することを意味している．

例 1.4.9. 正の有理数全体 $\mathbb{Q}_+$ と $\mathbb{Z}$ の間に全単射が存在する．これは例えば次のようにして，構成する．まず分数を次のように並べる．

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

これを例えば次のようにして一列に並べる．

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6}, \frac{6}{5}, \frac{6}{4}, \frac{6}{3}, \frac{6}{2}, \frac{6}{1}, \ldots$$

この列から，既約でない分数をすべて消す．

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{5}, \frac{6}{1}, \ldots$$

これで正の有理数全体がもれも重複もなく一列に並んだ．

例 1.4.10. 開区間 $(0,1)$ と半開区間 $(0,1]$ の間に全単射が存在する．これは例えば数列 $\{x_i\}$ を $x_1 = 1,\, x_i > x_{i+1},\, 0 < x_i < 1$ $(i = 2, 3, \ldots)$ を満たすようにとり[3]，$f : (0,1] \to (0,1)$ を $f(x) = x,\, x \neq x_i,\, f(x_i) = x_{i+1}$ で定めればよい．

例 1.4.11. 区間 $(0,1]$ の元を無限小数展開するとき 0.32 の様に有限項で止まる小数はわざと $0.31999\ldots$ のように書き表すと約束しておく．この約束の下で定まる次の写像は単射である．

$$(0,1] \times (0,1] \to (0,1], \quad (0.a_1a_2\ldots, 0.b_1b_2\ldots) \mapsto (0.a_1b_1a_2b_2\ldots)$$

[3]厳密なことを言うと、この証明には，後述の選択公理を用いている．無限個 i に対して x_i が定めるというプロセスがあるからである．しかし x_i を具体的に指定する方法があれば，選択公理を用いる必要はない．ここでの証明には，例えば $x_i = \frac{1}{2^i}$ と置けばよく，この場面では選択公理は必要ない．

なぜなら $(0.a_1b_1a_2b_2\dots)$ の形の小数表示は 0 が無限に続くことはなく，この表示から一意的に $(0.a_1a_2\dots, 0.b_1b_2\dots)$ が定まるからである．この写像の像は，明らかに区間 $(0,1]$ の部分集合であるが，この部分集合と，$(0,1]\times(0,1]$ の間に全単射が構成できた．

$(0,1]\times(0,1]$ と $(0,1]$ の間に全単射が構成できないだろうか? 以下工夫して構成してみよう．無限小数展開を，有限個 (0 個も許す）の 0 の列の末尾に 0 でない数字をつけた塊の列にわける．例えば $0.00203025006\dots$ はその小数部分を $002|03|02|5|006|\dots$ のように分けておく．各 a_i, b_i をこのような塊とすれば，次の写像 g は全単射になる．

$$g:(0,1]\times(0,1]\to(0,1],\quad (0.a_1a_2\dots, 0.b_1b_2\dots)\mapsto(0.a_1b_1a_2b_2\dots)$$

例 1.4.10 の f を用いれば，次の写像は全単射である．

$$(0,1)\times(0,1)\to(0,1),\qquad (\alpha,\beta)\mapsto f\circ g(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta))$$

例 1.4.12. 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と開区間 $(0,1)$ の間には全単射が存在しないことが証明できる．これは次のように行う．もし，全単射 $f:\mathbb{N}\to(0,1)$ があったとする．$(0,1)$ の元を例 1.4.11 のように無限小数展開することにすれば

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

と書き表される．ここで

$$b_k=\begin{cases} 1 & (a_{kk}\text{が偶数のとき}) \\ 2 & (a_{kk}\text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおけば無限小数 $b=0.b_1b_2b_3\dots$ は，開区間 $(0,1)$ の元だが $f(k)$ と b は小数第 k 位の偶奇が異なるので $f(k)=b$ となる k は存在しない．よって f が全射でないことになり矛盾．この証明は Cantor によるもので，しばしば**対角線論法**と呼ばれる．

1.5　集合族

U を全体集合とする．ある集合 Λ から 2^U への写像

$$\Lambda\to 2^U,\quad \lambda\mapsto A_\lambda$$

が与えられているとする．A_λ は全体集合 U の部分集合である．このとき $\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ を Λ を**添数集合とする集合族** (family of sets indexed by Λ) という．集合族の記号と

して $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を用いることもある．集合族 $\{A_\lambda\}$ のの**和集合** (union) および**共通部分** (intersection) を

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in U \mid \exists\lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda\}$$
$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in U \mid \forall\lambda \in \Lambda\ x \in A_\lambda\}$$

によって定義する．

例 1.5.1. $\Lambda = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ とする．すると Λ を添数集合とする集合族とは，集合の有限列 $\{A_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ のことである．この集合族の和集合および共通部分はそれぞれ次のようになる．

$$\bigcup_{i\in\Lambda} A_i = A_1 \cup \cdots \cup A_n$$
$$\bigcap_{i\in\Lambda} A_i = A_1 \cap \cdots \cap A_n$$

例 1.5.2. $\Lambda = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ とする．すると Λ を添数集合とする集合族とは，集合の無限列 $\{A_i\}_{i=1,2,\dots}$ のことである．この集合族の和集合および共通部分はそれぞれ次のようになる．

$$\bigcup_{i\in\Lambda} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$
$$\bigcap_{i\in\Lambda} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

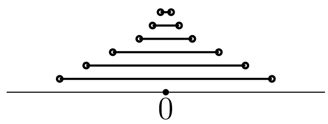
一般に，集合族というときは，このような $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合だけではなく，任意の集合 Λ で添字づけられた集合の集まりを考える．

例 1.5.3. θ を実数とし $A_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x\cos\theta + y\sin\theta = 1\}$ とおく．A_θ は原点中心の単位円の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ での接線だから，次が成り立つ．

$$\bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} A_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$$
$$\bigcap_{\theta\in\mathbb{R}} A_\theta = \emptyset$$

例 1.5.4. ε を正の実数として $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ とおく．

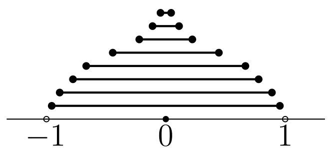
$$\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \mathbb{R}$$
$$\bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon = \{0\}$$



例 1.5.5. ε を正の実数として $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon\}$ とおく．

$$\bigcup_{0<\varepsilon<1} B_\varepsilon = (-1, 1)$$

$$\bigcap_{0<\varepsilon<1} B_\varepsilon = \{0\}$$



定理 1.5.6 (分配律). 任意の集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ と集合 B に対して，次が成立する．

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B)$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cup B = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cup B)$$

証明　任意の x に対し

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap B &\iff x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \text{ かつ } x \in B \\ &\iff (\exists\lambda \in \Lambda\ x \in A_\lambda) \text{ かつ } x \in B \\ &\iff \exists\lambda \in \Lambda\ (x \in A_\lambda \text{ かつ } x \in B) \\ &\iff \exists\lambda \in \Lambda \quad x \in A_\lambda \cap B \\ &\iff x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B) \end{aligned}$$

なので最初の式は成り立つ．二番目の式も同様である．　□

定理 1.5.7 (de Morgan の法則). 集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して次が成立する．

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c \qquad \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} {A_\lambda}^c$$

演習 1.5.8. de Morgan の法則を示せ．

演習 1.5.9. 写像 $f : X \to Y$, $A_\lambda \in 2^X$ に対して，次を示せ．

$$f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$$

さらに f が単射のときは二番目の式で等号が成立することを示せ．

演習 1.5.10. 写像 $f : X \to Y$, $B_\lambda \in 2^Y$ に対して，次を示せ．

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

定義 1.5.11. 集合 X, Y に対し，X から Y への写像全体の集合を Y^X と書く．

例 1.5.12. $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ のとき，写像 $f : X \to Y$ は次の 9 通り考えられるので Y^X は $9(= 3^2)$ 個の元からなる集合である．

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
1 の像	1	1	1	2	2	2	3	3	3
2 の像	1	2	3	1	2	3	1	2	3

演習 1.5.13. $X = \{1, 2, \ldots, m\}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき，集合 Y^X はいくつの元からなるか．

定義 1.5.14 (直積集合). いま Λ を添数集合とする X の部分集合族

$$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

が与えられているとする．いま X^Λ の部分集合

$$P = \{f \in X^\Lambda \mid \forall\lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) \in A_\lambda\}$$

を，Λ を添数集合とする集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の**直積集合** (direct product of sets) といい

$$P = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

であらわす．P の元 f を

$$f = (a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, \quad (a_\lambda = f(\lambda) \in A_\lambda)$$

または

$$f = (\ldots, a_\lambda, \ldots)$$

とあらわす．直積集合 $P = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に対して写像 $p_\lambda : P \to A_\lambda$ を $p_\lambda(x) = a_\lambda$ で定義する．この p_λ を**射影** (projection) と呼ぶ．

直積集合の普遍性 *

$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の直積集合 P と射影 $p_\lambda : P \to A_\lambda$ は次の性質を満たす．

> Q を集合として，各 λ に対し写像 $q_\lambda : Q \to A_\lambda$ があるならば，各 λ に対し $p_\lambda \circ \varphi = q_\lambda$ を満たす写像 $\varphi : Q \to P$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "q_\lambda"'] & P \arrow[d, "p_\lambda"] \\ & A_\lambda \end{tikzcd}$$

実際，$x \in Q$ に対し，$\varphi(x) = (q_\lambda(x))$ （または $\varphi(x) : \Lambda \to X,\ \lambda \mapsto q_\lambda(x)$）と置けば，$p_\lambda \circ \varphi(x) = q_\lambda(x)$ となる．更に $p_\lambda \circ \varphi' = q_\lambda$ となる別の写像 $\varphi' : Q \to P$ があったとすると，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，

$$\varphi'(x)(\lambda) = p_\lambda(\varphi'(x)) = q_\lambda(x) = p_\lambda(\varphi(x)) = \varphi(x)(\lambda)$$

なので $\varphi'(x)=\varphi(x)$. $x\in Q$ は任意であったから $\varphi=\varphi'$ となり φ の一意性がわかる．

さて，上の枠内の性質を持つ集合 P と射影 $p_\lambda : P \to A_\lambda$ があったとする．すると．$P=Q$, $p_\lambda=q_\lambda$ として枠内の性質を使うと $\varphi=1_P$ が上の性質を満たす．ところで，このような φ は一意的だから， φ は恒等写像でなければならない．

この性質を使って，上の枠内の性質を持つ集合 P と射影 $p_\lambda : P\to A_\lambda$ があったとするとき，直積 $\bar{P}=\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ とその射影 $\bar{p}_\lambda:\bar{P}\to A_\lambda$ に対し，逆写像を持つ写像 $\varphi : P\to\bar{P}$ が一意的に存在し．$p_\lambda=\bar{p}_\lambda\circ\varphi$ を満たす事を示そう．$\bar{P}$ は上の枠内の性質を満たすので写像 $\varphi : P\to\bar{P}$ が存在するが，P も上の枠内の性質を満たすので写像 $\phi:\bar{P}\to P$ も存在する．すると前段落で述べた性質より，$\varphi\circ\phi : P\to P$ は恒等写像でなければならない．同様に $\phi\circ\varphi:\bar{P}\to\bar{P}$ も恒等写像でなければならない．従って φ と ϕ は互いに他の逆写像である事がわかる．

演習 1.5.15. 集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ に対し，集合 S と各 $\lambda\in\Lambda$ に対し写像 $\iota_\lambda : A_\lambda\to S$ が与えられていて次の性質を満たすとする．

> T を集合として，各 λ に対し写像 $\imath_\lambda : A_\lambda\to T$ があるならば，各 λ に対し $\varphi\circ\iota_\lambda=\imath_\lambda$ を満たす写像 $\varphi : S\to T$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} T & S \arrow[l, dashed, "\varphi"'] \\ & A_\lambda \arrow[ul, "\imath_\lambda"] \arrow[u, "\iota_\lambda"'] \end{tikzcd}$$

$\bar{S}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\times\{\lambda\})$, $\bar{\iota}_\lambda : A_\lambda\to\bar{S}$, $x\mapsto(x,\lambda)$, と置く．$S=\bar{S}$ と置くと，この性質を満たすことを示せ．他にこの性質を満たす S があれば，逆写像を持つ写像 $\varphi : S\to\bar{S}$ があり $\varphi\circ\bar{\iota}_\lambda=\iota_\lambda$ を満たす事を示せ．(この $\bar{S}$ は集合の直和と呼ばれる事がある．)

第2章　同値関係

初等的な平面幾何学では回転や鏡映で移り合う図形を互いに合同であるといって合同かどうかの判定法や，合同な図形に共通な性質の探求がテーマであった．さらに拡大や縮小で移り合う図形は相似であるといって，相似かどうかの判定法や，相似な図形に共通な性質も考察した．

考察の 2 つの対象が同じである，あるいは等しいとはどういうことか図形の合同のもつ性質（等号の持つ性質といってもよい）を抽象化したものが同値関係である．この章では同値関係とクラス分けについてまとめ，いろんな例を紹介する．同値関係は数学のいろんな場面で現れるのがわかるであろう．

2.1　同値関係とクラス分け

考察するの 2 つの対象が同じである，あるいは等しいとはどういう事なのだろうか? ここでは等号の持つ性質，図形の合同のもつ性質を抽象化して同値関係を定義し，クラス分けについてまとめておく．

定義 2.1.1 (同値関係). 集合 X の元の間に関係 $\sim$ が定義されていて次の 3 つの性質が成立するとき，関係 $\sim$ は**同値関係** (equivalence relation) であるという:

(i) 反射律: 任意の $x \in X$ に対して $x \sim x$ である．
(ii) 対称律: 任意の $x, y \in X$ に対して $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ である．
(iii) 推移律: 任意の $x, y, z \in X$ に対して $x \sim y$, $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ である．

定義 2.1.2 (同値類). 集合 X に於ける同値関係 $\sim$ があるとき，元 x と同値な元すべてからなる集合 X の部分集合を $[x]$ で表し，**同値類** (equivalence class) という．すなわち:

$$[x] = \{a \in X \mid x \sim a\}$$

注意 2.1.3. $x \sim y$ ならば対称律より $y \sim x$ であり，推移律より $x \sim x$ が結論できる．こう考えると，反射律は不要な仮定のように見える．しかしながら，x の同値類 $[x]$ がただ一つの元からなるとき，この論法は適用できない．x の同値類 $[x]$ がただ一つの元からなるときは，$x \sim x$ かどうかわからないので，反射律を条件として課す必要があるのである．

補題 2.1.4 (同値関係の基本性質). 集合 X に於ける同値関係 $\sim$ があるとき，次の命題は互いに同値である．

(i) $x \sim y$.

(ii) $[x] = [y]$.

(iii) $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii): 同値類 $[x]$ の任意の元を a とすると $x \sim a$ である．仮定 $x \sim y$ と同値関係の対称律から $y \sim x$ である．同値関係の推移律により $y \sim a$ である．これは元 a が同値類 $[y]$ の元であることを示している．従って，$[x] \subset [y]$ となる．同様にして逆の包含関係 $[x] \supset [y]$ が示され $[x] = [y]$ がわかる．
(ii)$\Longrightarrow$(iii): $[x] \cap [y] = [x]$ であり，$x \in [x]$ であることから (iii) が示される．
(iii)$\Longrightarrow$(i): $a \in [x] \cap [y]$ とする．同値類の定義から $x \sim a,\, y \sim a$ である．対称律から $a \sim y$ となり．従って，推移律から $x \sim y$ がわかる．　□

定義 2.1.5 (クラス分け). 集合 X がその部分集合の族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ にクラス分けされるとは次の 2 条件が成立することをいう．

(i) $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$

(ii) $A_\lambda = A_\mu$ または $A_\lambda \cap A_\mu = \emptyset$

定理 2.1.6 (クラス分けする). 集合 X 上に同値関係 $\sim$ があるということと，集合をクラス分けするということとは同値である．即ち，集合上に同値関係があればその集合は同値類にクラス分けされるし，逆に集合がクラス分けされていれば同じクラスに属する元同士を関係があると定義することでその集合上に同値関係が決まる．

定義 2.1.7 (商集合). 同値類 $[x]$ を，新たに元 (要素) と考えてできる集合をもとの集合 X の同値関係 $\sim$ による**商集合** (quotient) といい

$$X/\!\sim \;\; = \;\; \{[x] \mid x \in X\}$$

と書く．

定理 2.1.6 の証明　　集合 X に於ける同値関係 $\sim$ があるとき，
$X = \bigcup_{x \in X}[x]$ であり定義 2.1.5 の条件 (i) が成立する．補題 2.1.4 により，2 つの同値類は

$$[x] = [y] \quad \text{または} \quad [x] \cap [y] = \emptyset$$

であり定義 2.1.5 の条件 (ii) が成立する．これで集合がクラス分けされた．逆は各自確認する事．　□

例 2.1.8. 整数の集合 $\mathbb{Z}$ に於いて，$n, m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$n \sim m \Longleftrightarrow n - m \in 6\mathbb{Z} = \{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

と定義すると，これは同値関係である．商集合 $\mathbb{Z}/\!\sim$ の元の個数は 6 個となる．

$$\mathbb{Z}/\!\sim\, = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}.$$

集合の濃度 (基数)

同値関係の例として，個数の概念の一般化である，集合の濃度という概念を紹介する．

定義 2.1.9 (集合の対等，濃度 (cardinal number)). 一般に集合 A と B が**対等** (equivalent) であるとは A の元と B の元との間に一対一の対応がつけられること，すなわち，全単射 $f : A \to B$ が存在することをいう．集合の対等は同値関係になる．集合 A と B が対等であるとき $A \sim B$ (または $\#A = \#B$) と書く．$A \sim B$ のとき集合 A と 集合 B は**同じ濃度** (equipotent) であるという．

集合 S の濃度の記号として，ここでは $\#A$ を用いたが $|A|$ を用いることもある．

演習 2.1.10. 対等であることは，同値関係であることを確認せよ．

ある自然数 n について

$$A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$$

であるとき，**集合 A の濃度は n である**といい，$\#A = n$ と書く．このような集合を**有限集合** (finite set) という．空でない集合 A が有限集合でないとき**無限集合** (infinite set) であるという．

集合 A が自然数の集合 $\mathbb{N}$ と対等，すなわち

$$A \sim \{1, 2, 3, \ldots\}$$

であるとき，A の濃度は**可算** (countable) である，または A は**可算集合** (countable set) であるといい，$\#A = \aleph_0$ （アレフゼロ）と書く．なお $\aleph$ はヘブライ語の第 1 アルファベットでアレフと読む．

例 2.1.11. 例 1.4.8 より，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は対等である．例 1.4.9 より，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と正の有理数全体の集合 $\mathbb{Q}_+$ は対等である．例 1.4.8 と同様にして，正の有理数全体の集合 $\mathbb{Q}_+$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は対等である事がわかる．

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z} = \#\mathbb{Q}_+ = \#\mathbb{Q}.$$

例 2.1.12. 例 1.3.18 より，開区間 (a, b) と開区間 $(0, 1)$ は対等である．これらは実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と対等であることもわかる．例 1.4.11 より $(0, 1) \times (0, 1)$ と $(0, 1)$ も対等であるから，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ も（もちろん開区間 $(0, 1)$ とも）対等である．

$$\aleph = \#\mathbb{R} = \#(0, 1) = \#(0, 1)^2 = \#\mathbb{R}^2.$$

演習 2.1.13. $\mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^2$ と対等でるあ事を示せ．一般に自然数 n に対し $\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}$ と対等である事を示せ．

例 2.1.14. 例 1.4.12 より $\mathbb{N}$ と $\mathbb{R}$ は対等でない．$\aleph_0 \neq \aleph$

$\mathbb{R}$ の濃度を $\aleph$ で表す．集合 A が有限集合であるか，または可算集合であるとき，A は**たかだか可算** (at most countable) であるという．

2.2　合同式

n を正の整数とする．

定義 2.2.1. 整数 x, y に対し，$x-y$ が 整数 n で割り切れるとき，整数 x, y は n を法として**合同** (congruent) であるといい

$$x \equiv y \pmod{n}$$

と書く．この式を n を法する**合同式** (congruence expression) という．

ここでひとつ記号を導入しておこう．整数 m, n に対し n が m を割り切るとき，すなわちある整数 k があって $m = kn$ と書けるとき, n は m を **整除する**といい，

$$n \mid m$$

とあらわす．定義より次が成り立つ．

$$x \equiv y \pmod{n} \iff n \mid x-y$$

定理 2.2.2. $x \equiv y \pmod{n}$ は同値関係である．

証明　$x \equiv y \pmod{n}$ を省略して $x \equiv y$ と書くことにする．

$x - x = 0 = 0 \cdot n$ より，反射律 $x \equiv x$ が成り立つ．

$x \equiv y$ とすると $x - y = kn$ をみたす整数 k が存在する．$y - x = (-k)n$ より $y \equiv x$ が成り立つ．

$x \equiv y,\ y \equiv z$ とすると, $x - y = k_1 n,\ y - z = k_2 n$ なる整数 $k_1,\ k_2$ が存在する．$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1 n + k_2 n = (k_1 + k_2)n$ より $x \equiv z$ が成り立つ． □

n を法として合同であるというのは同値関係であるから整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ をこれでクラス分けすることができる．その商集合を $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_n$ であらわす．

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv$$

x の同値類を $[x]_n$, または，単に $[x]$ とあらわすことにする．

$$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n-1]\}$$

以後しばしば $x \equiv y \pmod{n}$ を省略して $x \equiv y$ と書く．合同式について次の性質は重要である．

定理 2.2.3. $x \equiv x',\ y \equiv y'$ ならば

(i) $x + y \equiv x' + y'$. (同値関係 $\equiv$ と加法の両立性)
(ii) $xy \equiv x'y'$. (同値関係 $\equiv$ と乗法の両立性)

証明　$x \equiv x'$ より $x - x' = kn$ なる整数 k が存在する．同様に $y \equiv y'$ より $y - y' = \ell n$ となるような整数 ℓ がある．

(i) $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') = kn + \ell n = (k+\ell)n$ より $x+y \equiv x'+y'$.

(ii) $xy - x'y' = (x-x')y + x'(y-y') = kny + x'\ell n = (ky + x'\ell)n$ より $xy \equiv x'y'$.

よって定理は証明された．　□

この定理は商集合 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対し，次で加法，乗法が定義できることを示している．

$$[x]_n + [y]_n := [x+y]_n \tag{1}$$

$$[x]_n \cdot [y]_n := [x\ y]_n \tag{2}$$

つまり，右辺は同値類 $[x]_n$, $[y]_n$ の代表元 x, y のとり方によらず同値類だけで定まる．なぜなら

$$\begin{aligned} & [x]_n = [x']_n, \quad [y]_n = [y']_n \\ \Longrightarrow\ & x \equiv x', \quad y \equiv y' \\ \Longrightarrow\ & x+y \equiv x'+y', \quad xy \equiv x'y' \quad (\text{定理 } 2.2.3 \text{ より}) \\ \Longrightarrow\ & [x+y]_n = [x'+y']_n, \quad [xy]_n = [x'y']_n \end{aligned}$$

となるからである．このとき加法･乗法の定義 (1),(2) は**うまく定義されている** (well-defined である) という．

例 2.2.4. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[0]_2, [1]_2\}$ の加法，乗法の表をつくってみよう．

$+$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[1]_2$	$[1]_2$	$[0]_2$

$\times$	$[0]_2$	$[1]_2$
$[0]_2$	$[0]_2$	$[0]_2$
$[1]_2$	$[0]_2$	$[1]_2$

例 2.2.5. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$ の加法，乗法の表をつくってみよう．$[n]_3$ を 単に n と略記することにする．

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\times$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

例 2.2.6. $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$ の加法，乗法の表をつくってみよう．ここでも $[n]_4$ を 単に n と略記することにする．

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$\times$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

演習 2.2.7. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{[0]_5, [1]_5, [2]_5, [3]_5, [4]_5\}$ の加法，乗法の表を作れ．

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

演習 2.2.8. $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$ の加法，乗法の表を作れ．

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

×	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

演習 2.2.9. $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$ の加法，乗法の表を作れ．

+	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

×	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

演習 2.2.10. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]\}$ の加法，乗法の表を作れ．

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

演習 2.2.11. $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の乗法の表を作れ.

$\times$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0									
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

演習 2.2.12. 上の乗法の表を見て，$n = 2, 3, \ldots, 9$ のとき，集合 $\{[a^k] \mid k = 1, 2, 3, \ldots\}$ はどうなるか調べよ．ただし a は $1 \leq a < n$ なる整数である．

2.3　有理数をつくる

整数全体の集合

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

と，その部分集合である自然数全体の集合

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

から，有理数を理論的に構成するのがここでの目的である．基本となるのは次の諸性質である．任意の整数 a, b に対して，その和 $a+b$, その積 ab が定義されていて，次の性質をみたす．

(i) 加法に関する交換律: $a + b = b + a$.
(ii) 加法に関する結合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(iii) 乗法に関する交換律: $ab = ba$.
(iv) 乗法に関する結合律: $a(bc) = (ab)c$.
(v) 分配律: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

定義 2.3.1. 整数 p と自然数 q との順序対 (p, q) 全体の集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ を考える．$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に次で関係 $\sim$ を定義するとこれは同値関係になる．

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad pq' - p'q = 0$$

この同値関係 $\sim$ による，(p, q) の同値類を $[(p, q)]$ または p/q と書き，この同値関係 $\sim$ による，$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の商集合を $\mathbb{Q}$ と書く．

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\sim$$

$\sim$ が同値関係になることを示しておこう．推移律だけ示す．$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, $(p_2, q_2) \sim (p_3, q_3)$ より，$p_1q_2 - p_2q_1 = 0$, かつ $p_2q_3 - p_3q_2 = 0$ である．ところで

$$q_2(p_1q_3 - p_3q_1) = q_3(p_1q_2 - p_2q_1) + q_1(p_2q_3 - p_3q_2) = 0$$

が成り立つので，$q_2 \neq 0$ より，$p_1q_3 - p_3q_1 = 0$ でなければならず，$(p_1, q_1) \sim (p_3, q_3)$ が示された．

演習 2.3.2. $\sim$ が反射律と対称律をみたすことを確認せよ．

定義 2.3.3. $\mathbb{Q}$ の加法と乗法を次で定義する．

$$\begin{gathered} [(p, q)] + [(p', q')] := (pq' + p'q, qq') \\ [(p, q)] \cdot [(p', q')] := (pp', qq') \end{gathered}$$

これがうまく定義されている (well-defined である) ことを証明しよう．すなわち代表元のとり方によらず，同値類で加法，乗法が確定していること，すなわち $(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, $(p'_1, q'_1) \sim (p'_2, q'_2)$ ならば

$$(p_1 q'_1 + p'_1 q_1, q_1 q'_1) \sim (p_2 q'_2 + p'_2 q_2, q_2 q'_2)$$
$$(p_1 p'_1, q_1 q'_1) \sim (p_2 p'_2, q_2 q'_2)$$

であることを示せばよい．

$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2)$, $(p'_1, q'_1) \sim (p'_2, q'_2)$ なので $p_1 q_2 - p_2 q_1 = p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 = 0$ である．

$$\begin{aligned}&(p_1 q'_1 + p'_1 q_1)(q_2 q'_2) - (p_2 q'_2 + p'_2 q_2)(q_1 q'_1)\\ &= (p_1 q_2 - p_2 q_1) q'_1 q'_2 + (p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1) q_1 q_2 = 0\end{aligned}$$

より $(p_1 q'_1 + p'_1 q_1, q_1 q'_1) \sim (p_2 q'_2 + p'_2 q_2, q_2 q'_2)$ がわかり，

$$(p_1 p'_1)(q_2 q'_2) - (p_2 p'_2)(q_1 q'_1) = (p_1 q_2 - p_2 q_1) p'_1 q'_2 + (p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1) p_2 q_1 = 0$$

より $(p_1 p'_1, q_1 q'_1) \sim (p_2 p'_2, q_2 q'_2)$ がわかる．

上述の加法, 乗法の定義は，小学校以来慣れ親しんでいる分数の計算

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$$

を書き直したものであることに気づいたであろうか?

以後 (p, q) の同値類を p/q であらわすことにする．

定理 2.3.4. $\mathbb{Q}$ の元 $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$, $c = p_3/q_3$ に対し, 次が成り立つ．

(i) 加法に関する交換律: $a + b = b + a$.
(ii) 加法に関する結合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
(iii) 乗法に関する交換律: $ab = ba$.
(iv) 乗法に関する結合律: $a(bc) = (ab)c$.
(v) 分配律: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

証明　これらは (書き下すのは面倒かもしれないが，証明は) 易しい．例えば 加法に関する交換律は次のように証明できる．

$$p_1/q_1 + p_2/q_2 = (p_1 q_2 + p_2 q_1)/(q_1 q_2) = p_2/q_2 + p_1/q_1.$$

□

演習 2.3.5. 定理 2.3.4 の (ii)–(v) を証明せよ．

定義 2.3.6 (有理数の順序). 2 つの有理数 p_1/q_1, p_2/q_2 に対し $p_1/q_1 \leq p_2/q_2$ を次で定義する．

$$p_1/q_1 \leq p_2/q_2 \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad p_1 q_2 \leq p_2 q_1$$

演習 2.3.7. 順序がうまく定義されていること，すなわち $(p_1, q_1) \sim (p'_1, q'_1)$, $(p_2, q_2) \sim (p'_2, q'_2)$ のとき

$$p_1 q_2 \leq p_2 q_1 \iff p'_1 q'_2 \leq p'_2 q'_1$$

をしめせ.

演習 2.3.8. これにより $\mathbb{Q}$ は順序集合になることを示せ.

定理 2.3.9 ($\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Q}$ への埋め込み). 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を $p \mapsto p/1$ で定義する．f は単射で

(i) $f(p) + f(p') = f(p + p')$,
(ii) $f(p)f(p') = f(pp')$.
(iii) $p \leq p'$ ならば $f(p) \leq f(p')$.

整数 p に対し $p/1$ と p を同一視し，$p/1$ をしばしば p と書く.

定理 2.3.10 (零元). $O = 0/1$ とおくと次が成立．$a + O = a$, $a \cdot O = O$

以後，しばしば，有理数の零元 O と整数の 0 を区別しないで 0 で表す.

定理 2.3.11 (反数). $\mathbb{Q}$ の任意の元 $a = p/q$ に対し，$a + a' = a' + a = 0$ をみたす $\mathbb{Q}$ の元 a' が唯一つ存在する．$a' = (-p)/q$ である．a' を a の反数といい $-a$ であらわす.

定義 2.3.12 (差). $\mathbb{Q}$ の元 a,b に対し，その差を次で定義する.

$$a - b := a + (-b)$$

演習 2.3.13. $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$ と書くとき，次を示せ.

$$a - b = (p_1 q_2 - p_2 q_1)/(q_1 q_2)$$

さらに $a - b$ がうまく定義されていることを示せ.

定理 2.3.14 (単位元). $1 = 1/1$ とおくとすべての $\mathbb{Q}$ の元 a に対し，$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

定理 2.3.15 (逆数). 0 とは異なる $\mathbb{Q}$ の任意の元 $a = p/q$ に対し，$aa' = a'a = 1$ をみたす $\mathbb{Q}$ の 元 a' が唯一つ存在する．$a' = q/p$ である．a' を a の逆数といい $1/a$ であらわす.

定義 2.3.16 (商). $\mathbb{Q}$ の元 a,b に対し，$b \neq 0$ のとき，その商 $\frac{a}{b}$ を次で定義する.

$$\frac{a}{b} := a(1/b)$$

演習 2.3.17. $a = p_1/q_1$, $b = p_2/q_2$ と書くとき，次を示せ.

$$\frac{a}{b} = (p_1 q_2)/(q_1 p_2)$$

さらに $\frac{a}{b}$ がうまく定義されていることを示せ.

これで $\mathbb{Q}$ に加法，乗法，減法，0 でない数による除法が定義できたことになる．

定理 2.3.18. 有理数 a, b, c に対し，次が成り立つ．

(i) $a < b$ ならば $a + c < b + c$.
(ii) $a > 0$, $b > 0$ ならば $ab > 0$.
(iii) $a < b$, $c > 0$ ならば $ac < bc$.

演習 2.3.19. 定理 2.3.18 を証明せよ．

注意 2.3.20. $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ とおいて，集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ に次で同値関係をいれる．

$$(p_1, q_1) \sim (p_2, q_2) \overset{\text{def}}{\iff} p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0$$

集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ のこの同値関係による商集合を考えても同様にして有理数が構成できる．ただしこの場合は必ずしも分母にあたるものが正でないので，順序を定義するときは注意しなければばならない．

2.4 有理数の完備化としての実数の構成

有理数の数列

$$1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, 1.41421356, \cdots \longrightarrow \sqrt{2}$$

は有理数の範囲では収束しない．数列の収束を議論する際には，数として有理数のみを考えているのでは不十分であると考えられる．ここではコーシー列の考えを用いて，有理数の完備化として実数を導入[1]する．

定義 2.4.1. 数列 $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは，任意の正の数 ε に対しある正の整数 N が存在して $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となるときをいう．論理記号を用いるとコーシー列であるための条件は次のように書ける．

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n\ (m, n \geq N \text{ ならば } |a_m - a_n| < \varepsilon)$$

演習 2.4.2. $\{a_n\}$ がコーシー列であると言う命題の，否定命題を作れ．

演習 2.4.3. $\{a_n\}$ がコーシー列である事は次の条件と同値であることを示せ．任意の正の数 ε に対しある正の整数 N が存在して $n \geq N$ ならば $|a_n - a_N| < \varepsilon$ となる．

以後，コーシー列であるような有理数の数列を**有理コーシー列**といい，有理コーシー列の全体を $\widehat{\mathbb{Q}}$ であらわす．

$$\widehat{\mathbb{Q}} = \{\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \mid \text{有理コーシー列}\}$$

記号を簡単にするため，しばしば $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を単に $\{a_n\}$ と略記する．2 つの有理コーシー列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して関係 $\sim$ を次で定義する．

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \text{ ならば } |a_n - b_n| < \varepsilon$$

補題 2.4.4. これは同値関係である．

証明. 反射律，対称律は明らかなので，推移律のみ示す．コーシー列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ が $\{a_n\} \sim \{b_n\}, \{b_n\} \sim \{c_n\}$ とする．すると 任意の正の数 ε に対し，

$$\exists N_1 \text{ s.t. } n \geq N_1 \text{ ならば } |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\exists N_2 \text{ s.t. } n \geq N_2 \text{ ならば } |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．よって $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと

$$n \geq N \text{ ならば } |a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

よって $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ がわかる． □

[1]実数の導入方法には有理数の切断によるものなど他にいろいろあるが，どの方法で構成しても，互いに同型であることがわかっている．

有理コーシー列 $\{a_n\}$ に対し，この同値関係による同値類 $\alpha := [\{a_n\}]$ を**実数**という．また有理コーシー列全体の空間 $\widehat{\mathbb{Q}}$ のこの同値関係による商集合を**実数の集合**といい記号 $\mathbb{R}$ であらわす.

$$\mathbb{R} = \widehat{\mathbb{Q}}/\sim$$

コーシー列について基本的な性質をまとめておこう.

補題 2.4.5. コーシー列 $\{a_n\}$ は有界である.

証明. $\{a_n\}$ は コーシー列だから $\varepsilon = 1$ に対しある番号 N があって

	$m > n \geq N$	ならば	$\lvert a_m - a_n\rvert < 1.$
特に	$m > N$	ならば	$\lvert a_m - a_N\rvert < 1.$
つまり	$m > N$	ならば	$a_N - 1 < a_m < a_N + 1.$
よって	$m > N$	ならば	$\lvert a_m\rvert < \lvert a_N\rvert + 1$

ここで $K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_N| + 1\}$ とおくとすべての n に対し $|a_n| \leq K$ となるので $\{a_n\}$ は有界である. □

補題 2.4.6. $\{a_n\}, \{b_n\}$ がコーシー列ならば $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ もコーシー列である.

証明. まず $\{a_n + b_n\}$ がコーシー列であることを示す．$\{a_n\}, \{b_n\}$ はコーシー列であることより，任意の正の数 ε に対し次をみたす M_1, M_2 が存在する.

$$m, n \geq M_1 \text{ ならば } |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$m, n \geq M_2 \text{ ならば } |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$M = \max\{M_1, M_2\}$ とおけば，$m, n \geq M$ ならば

$$\begin{aligned} |(a_m + b_m) - (a_n + b_n)| &= |(a_m - a_n) + (b_m - b_n)| \\ &\leq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるので，$\{a_n + b_n\}$ はコーシー列であることがわかる.

次に $\{a_n b_n\}$ がコーシー列であることを示す．$\{a_n\}, \{b_n\}$ はコーシー列なので有界であり，すべての n に対して

$$|a_n| < K, \quad |b_n| < K$$

をみたす正定数 K が存在する．また $\{a_n\}, \{b_n\}$ はコーシー列であることより，任意の正の数 ε に対し次をみたす N_1, N_2 が存在する.

$$m, n \geq N_1 \text{ ならば } |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$
$$m, n \geq N_2 \text{ ならば } |b_m - b_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば $m, n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} |a_m b_m - a_n b_n| &= |a_m(b_m - b_n) + (a_m - a_n)b_n| \\ &\leq |a_m(b_m - b_n)| + |(a_m - a_n)b_n| \\ &= |a_m||b_m - b_n| + |a_m - a_n||b_n| \\ &< K|b_m - b_n| + |a_m - a_n|K \\ &< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となって $\{a_n b_n\}$ はコーシー列であることがわかる． □

定義 2.4.7 (実数の和と積). $\mathbb{R}$ の元 $\alpha = [\{a_n\}]$ と $\beta = [\{b_n\}]$ に対し，その和 $\alpha + \beta$ と積 $\alpha \cdot \beta$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &:= [\{a_n + b_n\}] \\ \alpha \cdot \beta &:= [\{a_n b_n\}] \end{aligned}$$

これがうまく定義されている (well-defined である) ことを証明しよう．そのためには，代表元のとり方によらず，同値類で和，積が確定していること，すなわち $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ ならば

$$\{a_n + b_n\} \sim \{a'_n + b'_n\}, \quad \{a_n b_n\} \sim \{a'_n b'_n\}$$

であることを示せばよい．

まず $\{a_n + b_n\} \sim \{a'_n + b'_n\}$ を示す．$\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ より，任意の正の数 ε に対し次をみたす M_1, M_2 が存在する．

$$\begin{aligned} n \geq M_1 \text{ ならば } |a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ n \geq M_2 \text{ ならば } |b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$M = \max\{M_1, M_2\}$ とおけば，$n \geq M$ ならば

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)| &= |(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n)| \\ &\leq |a_n - a'_n| + |b_n - b'_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

となるので，$\{a_n + b_n\} \sim \{a'_n + b'_n\}$ であることがわかる．

次に $\{a_n b_n\} \sim \{a'_n b'_n\}$ を示す．$\{a_n\}, \{b'_n\}$ はコーシー列なので有界であり，すべての n に対して

$$|a_n| < K, \quad |b'_n| < K$$

をみたす正定数 K が存在する．また $\{a_n\} \sim \{a'_n\}$, $\{b_n\} \sim \{b'_n\}$ であることより，任意の正の数 ε に対し次をみたす N_1, N_2 が存在する．

$$n \geq N_1 \text{ ならば } |a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$
$$n \geq N_2 \text{ ならば } |b_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおけば $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
|a_nb_n - a'_nb'_n| &= |a_n(b_m - b'_n) + (a_n - a'_n)b'_n| \\
&\leq |a_n(b_n - b'_n)| + |(a_n - a'_n)b'_n| \\
&= |a_n||b_n - b'_n| + |a_n - a'_n||b'_n| \\
&< K|b_n - b'_n| + |a_n - a'_n|K \\
&< K\frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K}K \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

となって $\{a_nb_n\} \sim \{a'_nb'_n\}$ であることがわかる．

定理 2.4.8. $\mathbb{R}$ の元 $\alpha = [\{a_n\}]$, $\beta = [\{b_n\}]$, $\gamma = [\{c_n\}]$ に対し, 次が成り立つ.

(i) 加法に関する交換律: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
(ii) 加法に関する結合律: $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
(iii) 乗法に関する交換律: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
(iv) 乗法に関する結合律: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
(v) 分配律: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$, $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.

演習 2.4.9. 定理 2.4.8 を証明せよ．これらは，有理数の場合のそれぞれの法則の帰結である．証明したい式の両辺の代表元である有理コーシー列が，対応する等号が成り立つように取れればよい．丁寧に書き下すのは面倒かもしれないが，証明は易しい．

定義 2.4.10 (実数の順序). $\mathbb{R}$ の元 $\alpha = [\{a_n\}]$ と $\beta = [\{b_n\}]$ に対し，$\alpha \leq \beta$ を次で定義する．

$$\alpha \leq \beta \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists N \text{ s.t. } n \geq N \text{ ならば } a_n \leq b_n$$

演習 2.4.11. これにより $\mathbb{R}$ は順序集合になることを示せ．

次の定理は明らかであろう．

定理 2.4.12 (有理数の実数への埋め込み). 有理数 p/q に対し，数列 $a_n = p/q, n = 1, 2, \ldots$ は定数数列であり，特にコーシー列である．この定数数列を $\{p/q\}$ と書く．写像 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $f(p/q) = [\{p/q\}]$ で定義すると，f は単射で

(i) $f(p/q) + f(p'/q') = f(p/q + p'/q')$,

(ii) $f(p/q)\cdot f(p'/q')=f(p/q\cdot p'/q')$.
(iii) $p/q\le p'/q'$ ならば $f(p/q)\le f(p'/q')$.

有理数 p/q に対し p/q と $f(p/q)$ を同一視し，$f(p/q)$ をしばしば p/q と書く．
$0=f(0)=[\{0\}]$, $1=f(1)=[\{1\}]$ とおくとすべての実数 $\alpha=[\{a_n\}]$ に対し

$$\alpha+0=0+\alpha=\alpha,\quad \alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$$

が成り立つ．

定義 2.4.13 (絶対値). 実数 $\alpha=[\{a_n\}]$ に対し，その絶対値 $|\alpha|$ を次で定義する．

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha=[\{a_n\}] & \alpha\ge 0\\ -\alpha=[\{-a_n\}] & \alpha<0\end{cases}$$

この定義を用いれば，実数列に対してもコーシー列の概念が定義される．

定義 2.4.14. 実数列 $\{\alpha_n\}$ が**コーシー列**であるとは次の条件をみたすことをいう．

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n\ (m,n\ge N \text{ ならば } |\alpha_m-\alpha_n|<\varepsilon)$$

定理 2.4.15 (実数の完備性). 実数列 $\{\alpha_n\}$ がコーシー列ならば収束する[2]．

証明. 数列 $\{\alpha_n\}$ はコーシー列であるから，任意の正の数 ε に対し

$$\exists N\ \forall m,n\ \bigl(m,n\ge N \text{ ならば } |\alpha_m-\alpha_n|<\varepsilon\bigr)$$

となる．ここで α_n は実数なので，有理コーシー列 $\{a_{n,k}\}_{k=1,2,\dots}$ を用いて，$\alpha_n=[\{a_{n,k}\}_{k=1,2,\dots}]$ と書くと，この条件は次のようになる．

$$\exists N\ \forall m,n\ \bigl(m,n\ge N \text{ ならば } \exists M\ \forall k\ (k\ge M \text{ ならば } |a_{m,k}-a_{n,k}|<\varepsilon)\bigr)$$

これを次のように書き直しておく．

$$\exists N\ \forall m,n\ \exists M\ \forall k\ \bigl((m,n\ge N,\ k\ge M\ ) \text{ ならば } |a_{n,k}-a_{m,k}|<\varepsilon\bigr) \tag{4.1}$$

$b_k=a_{k,k}$, $k=1,2,\dots$ とおくと，$M_1=\max\{N,M\}$ とおくことにより，

$$\exists N\ \forall n\ \exists M_1\ \forall k\ \bigl((n\ge N,\ k\ge M_1\ ) \text{ ならば } |a_{n,k}-b_k|<\varepsilon\bigr)$$

を得る．もし数列 $\{b_k\}_{k=1,2,\dots}$ が 有理コーシー列であることが示されれば，$\beta=[\{b_k\}]$ と書くとき，これは

$$\exists N\ \forall n\ \bigl(n\ge N \text{ ならば } |\alpha_n-\beta|<\varepsilon\bigr)$$

[2] コーシー列が収束するときその空間は完備であるという．

となり，実数列 $\{\alpha_n\}$ が実数 β に収束していることを示している．$\{b_k\}$ は明らかに有理数列だからコーシー列であることを示す．

さて $\{a_{n,k}\}_{k=1,2,\ldots}$ はコーシー列であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\exists N_n\ \forall i, j\ \big(i, j > N_n \text{ ならば } |a_{n,i} - a_{n,j}| < \varepsilon\big) \tag{4.2}$$

さて任意の $\varepsilon > 0$ に対し，(4.1) での N をとり N 以上の n を固定して (4.2) での N_n をとる．$N_* = \max\{N, N_n\}$ とおけば，$i, j \geq N_*$ のとき，

$$\begin{aligned}
|b_i - b_j| &= |a_{i,i} - a_{j,j}| \\
&\leq |a_{i,i} - a_{n,i}| + |a_{n,i} - a_{n,j}| + |a_{n,j} - a_{j,j}| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&= 3\varepsilon
\end{aligned}$$

となり，$\{b_k\}$ がコーシー列であることが示される．　□

2.5　p 進数

p を素数とする．0 でない有理数 $x \in \mathbb{Q}$ を $x = p^a q$ （但し a は整数で，q と p で割れない整数）と書くとき，x の p 進ノルム $|x|_p$ を次で定める．

$$|x|_p = p^{-a}$$

$x = 0$ のときはその p 進ノルムは 0, すなわち $|0|_p = 0$ としておく．

定理 2.5.1. x, y を有理数とするとき，次が成り立つ．

$$|xy|_p = |x|_p |y|_p, \qquad |x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

証明. x, y のいずれかが 0 であれば，示すべき式は自明であるから，x, y ともに 0 でないとする．$x = p^a q$, $y = p^b r$ と書く．但し a, b は整数で，q, r は p で割れない整数である．$xy = p^{a+b}(qr)$ なので

$$|xy|_p = p^{-a-b} = p^{-a} p^{-b} = |x|_p |y|_q$$

$a \leq b$ と仮定してよいから，

$$|x + y|_p = p^{-a} \leq p^{-a} + p^{-b} = |x|_p + |y|_p$$

となり証明が終わる．　□

この p 進ノルム $|x|_p$ を絶対値 $|x|$ の代わりに使って，$\mathbb{Q}$ の完備化を考える事ができる．以下説明しよう．

有理数列 $\{a_n\}$ が p 進コーシー列であるとは，次の性質を満たす時をいう．

任意の正の数 ε に対しある番号 N が存在して $n \geq N$ ならば $|a_n - a_N|_p < \varepsilon$

2 つの有理コーシー列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に対して関係 $\sim_p$ を次で定義する．

$$\{a_n\} \sim_p \{b_n\} \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \text{ s.t. } n \geq N \text{ ならば } |a_n - b_n|_p < \varepsilon$$

演習 2.5.2. $\sim_p$ は同値関係であることを示せ．

有理コーシー列全体をこの同値関係で割ったものを p **進有理数**といい $\mathbb{Q}_p$ で表す．整数コーシー列で表されるものを p **進整数**といい $\mathbb{Z}_p$ で表す．

例 2.5.3. $\{c_n\}$ を $0, 1, \ldots, p-1$ のいずれかの値をとる数列とし

$$a_n = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_n p^n$$

とおく． 任意の正の数 ε に対して $p^{N+1} > 1/\varepsilon$ なるように N を大きくとれば，$n > N$ のとき，

$$a_n - a_N = c_{N+1} p^{N+1} + \cdots + c_n p^n$$

なので，$|a_n - a_N|_p \leq p^{-N-1} < \varepsilon$ となり，$\{a_n\}$ はコーシー列である事がわかる．

例 2.5.4. $\{1 + p + p^2 + \cdots + p^n\}_n$ は p 進コーシー列なので $\mathbb{Z}_p$ の元 α を定める．このとき $\alpha = \frac{1}{1-p}$

p 進有理数には定義 2.4.7 と同様にして，和と積を定義することができる．

第3章　集合論の初歩

3.1　濃度の計算

集合 A, B に対し $\mathfrak{a} = \#A$, $\mathfrak{b} = \#B$ とおき，その和 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$，積 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$，冪 $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$ を次で定める．

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \#(A \sqcup B), \quad \mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b} = \#(A \times B), \quad \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} = \#(A^B)$$

演習 3.1.1. これらの定義はうまく定義されている事 (well-defonedness) を示せ．

定理 3.1.2. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}$, $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}\mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = (\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}}$

証明. $\mathfrak{a} = \#(A)$, $\mathfrak{b} = \#(B)$, $\mathfrak{c} = \#(C)$ と置く．$(A^B)^C \sim A^{B\times C}$ を示す．$f \in A^{B\times C}$ に対し $C \to A^B$, $c \mapsto f_c$, を $f_c(b) = f(b,c)$ で定める．これが $A^{B\times C}$ と $(A^B)^C$ の間の全単射を定める． □

定理 3.1.3. $\aleph + \aleph_0 = \aleph$, $2^{\aleph_0} = \aleph$.

証明. $(0,1) \subset (0,1) \cup \mathbf{N} \subset \mathbf{R}$ より $\aleph \leq \aleph + \aleph_0 \leq \aleph$

$\{0,1\}^{\mathbf{N}} = \{a = (a_1, a_2, a_3, \dots) : a_i = 0, 1\}$ なので

$$f : \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to [0,1], \qquad a \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$$

は全射．$a = (a_1, a_2, \dots)$, $b = (b_1, b_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $f(a) = f(b)$ とすると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} \tag{$*$}$$

$a \neq b$ とすると $a_k \neq b_k$ なる k が存在する．k をそのような k の最小数であるとする．$a_k > b_k$ と仮定すると $a_k = 1$, $b_k = 0$. $(*)$ の両辺から， 最初の $k-1$ 項までを消去して，両辺を 2^k 倍すると

$$1 \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k+i}}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{k+i}}{2^i} \leq 1$$

よって $a_{k+i} = 0$, $b_{k+i} = 1$, $i = 1, 2, \dots,$ が判る．

$$\#f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1) \quad x = 0 \text{ または } x \text{ は有限 2 進小数でない} \\ 2 & x \in (0,1] \quad x \text{ は有限 2 進小数} \end{cases}$$

有限 2 進小数全体を B と置くと $\#B = \aleph_0$. $2^{\mathbf{N}} \sim [0,1] \cup B$ なので

$$2^{\aleph_0} = \aleph + \aleph_0 = \aleph$$

□

例 3.1.4. $\aleph^2 = (2^{\aleph_0})^2 = (2^{2\aleph_0}) = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$\mathfrak{a} = \#A$, $\mathfrak{b} = \#B$ で単射 $A \to B$ が存在するとき $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ と書く.

定理 3.1.5. $\mathfrak{a}$ が有限でない濃度ならば $\aleph_0 \le \mathfrak{a}$.

証明. X を無限集合とするとき，単射 $F : \mathbb{N} \to X$ を構成すれば良い.
$c : 2^X - \{\emptyset\} \to X$ を $c(A) \in A$ なるものとする.
$F(1) = c(X)$ と置く.
$F : \{1, \dots, n\} \to X$ が構成されたとき X は無限集合だから $X - F(\{1, \dots, n\}) \neq \emptyset$.

$$F(n+1) = c(X - F(\{1, \dots, n\}))$$

とおく．F は単射．なぜなら $m < n$ ならば $F(m) \in F(\{1, \dots, n-1\})$

$$F(n) = c(X - F(\{1, \dots, n-1\})) \in X - F(\{1, \dots, n-1\})$$

よって $F(m) \neq F(n)$. □

定理 3.1.6 (濃度の比較可能性). 任意の 2 つの濃度は比較可能である．即ち，2 つの濃度 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対し $\mathfrak{a} \le \mathfrak{b}$ または $\mathfrak{a} \ge \mathfrak{b}$ が成立する.

証明. この定理は，後述の選択公理と同値な整列可能定理と定理 3.3.12 より従う. □

定理 3.1.7. $\mathfrak{a} \ge \aleph_0$ ならば $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$

証明. $\#(X) = \mathfrak{a}$ なる集合 X をとる.

$$\mathcal{A} = \{(A, \varphi_A) : A \in 2^X,\ \varphi : A \to A \times A, \text{全単射}\}$$

X は無限集合だから $\mathbb{N}$ と対等な部分集合を持つ．$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ より $\mathcal{A} \neq \emptyset$. $\mathcal{A}$ に

$$(A, \varphi_A) \le (B, \varphi_B) \Longrightarrow A \subset B,\ \varphi_A = \varphi_B|_A$$

で順序を定めると，$\mathcal{A}$ は帰納的順序集合になる．なぜなら $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{A}$ の全順序部分集合とすると，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が極大元になるからである．Zorn の補題より $\mathcal{A}$ の極大元 M が存在する．$\varphi_B : C \to B \times B$ は全単射だから $\#(M) = \#(M) \times \#(M)$. $\#(M) = \mathfrak{a}$ を示せば証明は終る．$M \subset X$ より $\#(M) \le \#(X)$. $\#(M) < \#(X)$ として矛盾を導く. $\#(M - X) \le \#(M)$ とすると

$$\#(X) = \#(M) + \#(X - M) \le \#(M) + \#(M) = 2\#(M) \le \#(M)^2 = \#(M) < \#(X)$$

なので矛盾．よって濃度の比較可能定理より $\#(M-X) > \#(M)$ でなければならない．よって単射 $f : M \to M - X$ が存在する．

$$\begin{aligned}&\#((M\times f(M))\cup(f(M)\times M)\cup(f(M)\times f(M)))\\&=3\#(M)\times\#(M)=3\#(M)=\#(M)=\#(f(M))\end{aligned}$$

より全単射 $f(M) \to (M\times f(M))\cup(f(M)\times M)\cup(f(M)\times f(M))$ が存在する．

$$(M\cup f(M))\times(M\cup f(M))=(M\times M)\cup(M\times f(M))\cup(f(M)\times M)\cup(f(M)\times f(M))$$

なので，全単射

$$\varphi : M\cup f(M)\to(M\cup f(M))\times(M\cup f(M))$$

が存在する．ところがこれは M の最大性に反する． □

定理 3.1.8. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を少なくとも 1 つは有限でない濃度とする．

(i) $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\max\{\mathfrak{a},\mathfrak{b}\}$

(ii) $2\le\mathfrak{a}\le\mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}=2^{\mathfrak{b}}$

(iii) $\mathfrak{a}\le\mathfrak{b}$ ならば $\mathfrak{b}\le\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}\le 2^{\mathfrak{b}}$

(iv) $\mathfrak{b}=2^{\mathfrak{a}}$ ならば $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}$

証明． (i): $\mathfrak{a}\le\mathfrak{b}$ とする．$\mathfrak{b}$ は有限でないから $\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$.

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}=1\cdot\mathfrak{b}\le\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}\le\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\\&\mathfrak{b}\le\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\le\mathfrak{b}+\mathfrak{b}=2\mathfrak{b}\le\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}=\mathfrak{b}\end{aligned}$$

(ii): $2^{\mathfrak{b}}\le\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\le(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{b}}\le 2^{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}=2^{\mathfrak{b}}$.

(iii): $\mathfrak{b}\le\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}\le\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}\le 2^{\mathfrak{b}}$.

(iv): $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}=(2^{\mathfrak{a}})^{\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}}=2^{\mathfrak{a}}=\mathfrak{b}$ □

3.2 順序集合

定義 3.2.1 (順序集合). 集合 X で定義された**順序関係** $\preceq$ とは X の任意の 2 元 a, b に対し $a\preceq b$ であるかそうでないかが定まっていて次の条件を満たすときをいう．

(i) 反射律: $a\preceq a$.

(ii) 反対称律: $a\preceq b$ かつ $b\preceq a$ ならば $a=b$.

(iii) 推移律: $a\preceq b$ かつ $b\preceq c$ ならば $a\preceq c$.

集合 X とその順序 $\preceq$ を組にしたもの $(X,\preceq)$ を**順序集合**という．また，順序関係のことを，単に**順序**ということがある．

$a\preceq b$, かつ $a\neq b$ のとき，便宜上 $a\prec b$ と書く．$b\preceq a$ を $a\succeq b$ と書き, $b\prec a$ を $a\succ b$ と書くことがある．

例 3.2.2. 自然数の集合 $\mathbb{N}$, 整数の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$ はいずれも次の大小の順序 $\leq$ によって順序集合になる．

$$a \preceq b \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad a \leq b$$

順序の記号は $\preceq$ の代りに 記号 $\leq$ を使うことも多いが, ここでは大小の順序と区別するため，記号 $\preceq$ を使うことにする．

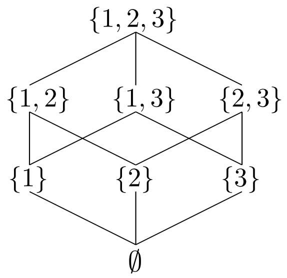
例 3.2.3. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ は，次により順序集合になる．

$$a \preceq b \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad b \text{ は } a \text{ の倍数.}$$

例 3.2.4. X を任意の集合とする．X の部分集合 A, B に対し，

$$A \preceq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subset B$$

と定めれば $(2^X, \preceq)$ は順序集合となる．例えば $X = \{1, 2, 3\}$ のとき，順序関係を図示すれば次のようになる．



定義 3.2.5 (全順序集合). 任意の $a, b \in X$ に対し，$a \preceq b$ または $b \preceq a$ の少なくとも一方が成り立つとき $(X, \preceq)$ は**全順序集合** (totally ordered set) であるといいその順序 $\preceq$ を**全順序**という．全順序集合でない順序集合を**半順序集合** (partial ordered set) といいその順序 $\preceq$ を**半順序**という．

例 3.2.2 は全順序集合であるが，例 3.2.3, 例 3.2.4 は全順序集合でない．順序集合 $(X, \preceq)$ の部分集合 A も，同一の順序関係 $\preceq$ によって順序集合 $(A, \preceq)$ となる．

定義 3.2.6 (辞書式順序). $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする．$\mathbb{N}_0^n$ について，次で全順序を定義することができる．この順序を**辞書式順序** (lexicographic order) という．

$$(a_1, \dots, a_n) \prec_L (b_1, \dots, b_n) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists j \text{ s.t. } a_i = b_i \ (\forall i < j),\ a_j < b_j$$

$n = 2$ の辞書式順序は次のような全順序である．

$$\begin{aligned}
&(0,0) \prec (0,1) \prec (0,2) \prec (0,3) \prec (0,4) \prec \cdots \\
\prec&(1,0) \prec (1,1) \prec (1,2) \prec (1,3) \prec (1,4) \prec \cdots \\
\prec&(2,0) \prec (2,1) \prec (2,2) \prec (2,3) \prec (2,4) \prec \cdots \\
\prec&(3,0) \prec (3,1) \prec (3,2) \prec (3,3) \prec (3,4) \prec \cdots \\
\prec&(4,0) \prec (4,1) \prec (4,2) \prec (4,3) \prec (4,4) \prec \cdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

定義 3.2.7 (全次数-辞書式順序). $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ とする．$\mathbb{N}_0^n$ について，次で全順序を定義することができる．この順序を**全次数-辞書式順序** (total degree-lexicographic order) という．

$$(a_1, \dots, a_n) \prec (b_1, \dots, b_n) \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n & \text{または} \\ a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n, & (a_1, \dots, a_n) \prec_L (b_1, \dots, b_n) \end{cases}$$

$n = 2$ の全次数-辞書式順序は次のような全順序である．

$$\begin{aligned} (0,0) \prec &(0,1) \prec (1,0) \\ \prec &(0,2) \prec (1,1) \prec (2,0) \\ \prec &(0,3) \prec (1,2) \prec (2,1) \prec (3,0) \\ \prec &(0,4) \prec (1,3) \prec (2,2) \prec (3,1) \prec (4,0) \\ \prec &(0,5) \prec \cdots \end{aligned}$$

定義 3.2.8 (極大元，極小元). 順序集合 $(X, \preceq)$ の元 m が X の**極大元** (maximal element) であるとは,

$$m \preceq x, \quad m \neq x \quad \text{なる } X \text{ の元 } x \text{ が存在しない}$$

ときをいう．

順序集合 $(X, \preceq)$ の元 m が X の**極小元** (minimal element) であるとは,

$$m \succeq x, \quad m \neq x \quad \text{なる } X \text{ の元 } x \text{ が存在しない}$$

ときをいう．

定義 3.2.9 (最大元，最小元). 順序集合 $(X, \preceq)$ の元 m が X の**最大元** (maximum element) であるとは,

$$\text{すべての } x \in X \text{ に対し } x \preceq m$$

が成立するときをいう．

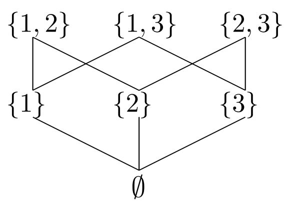
順序集合 $(X, \preceq)$ の元 m が X の**最小元** (minimum element) であるとは,

$$\text{すべての } x \in X \text{ に対し } x \succeq m$$

が成立するときをいう．

最大元は極大元であるが，逆は必ずしも真ではない．最小元についても同様である．

例 3.2.10. $A = \{1, 2, 3\}$ とし，$X = 2^A - \{A\}$ に，例 3.2.3 のように包含関係で順序をいれる．X には極大元が 3 つあるが最大元はない．



定義 3.2.11 (上限, 下限). 順序集合 $(X, \leq)$ の部分集合 A に対し，集合

$$A^* = \{x \in X \mid \forall a \in A\ a \preceq x\}$$

に最小元が存在するときその最小元を A の**上限** (supremum) といい，$\sup A$ であらわす．A^* の元を集合 A の**上界** (upper bound) という．

同様にして集合

$$A_* = \{x \in X \mid \forall a \in A\ x \preceq a\}$$

に最大元が存在するときその最大元を A の**下限** (infimum) といい，$\inf A$ であらわす．A_* の元を集合 A の**下界** (lower bound) という．

例 3.2.12. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は大小の順序で全順序集合になる．部分集合 $A = (0, 1)$ には，最大元はないが，上限は存在しその値は 1 である．最小元もないが，下限は存在しその値は 0 である．

順序数 (序数)*

2つの整列集合 $(X, \preceq), (Y, \preceq')$ を考える．次の条件を満たす全単射 $f : X \to Y$ が存在するとき，$(X, \preceq)$ と $(Y, \preceq')$ は**順序同型**であるという．

すべての $x, x' \in X$ について $x \preceq x'$ ならば $f(x) \preceq' f(x')$ が成り立つ．

順序同型は同値関係である．この同値関係による整列集合の同値類を，**順序数**[1]という．

濃度は個数の概念を一般化したものと考えられるが，順序数は一列に物を並べると言う考え方を一般化して得られる数概念と考えられる．その立場から見ると，次の事実は自明であるが，注意しておく価値はあるだろう．

整列集合 $(X, \preceq)$ と $(Y, \preceq')$ が同じ順序数を定めれば，X と Y は同じ濃度である．

3.3　整列集合，選択公理，Zorn の補題

定義 3.3.1 (整列集合). 順序集合 $(X, \preceq)$ が**整列集合** (well ordered set) であるとは X の任意の空でない部分集合 A がかならず A の中に最小元をもつときをいう．

演習 3.3.2. 整列集合は全順序集合になる．なぜなら 任意の2つの元 $x, y \in X$ に対し $\{x, y\}$ は最小元をもち，したがってそれらは比較可能となるからである．

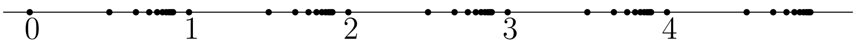
例 3.3.3. 自然数の集合 $\mathbb{N}$ は大小の順序に関して，整列集合になる．

[1] 公理的集合論の立場から述べれば $X \neq \emptyset$ のとき $(X, \preceq)$ と同型な整列集合の全体は集合でないことが示されている．従って，この順序数の定義の仕方は正当なものとは認められない．現代では整列集合 $(X, \preceq)$ に対し $G : X \to 2^X\ a \mapsto G(a) = \{x \in X \mid x < a\}$ の値域をを整列集合 $(X, \preceq)$ の順序数といい，ある整列集合の順序数であるような集合を順序数と呼ぶのが一般的である．

例 3.3.4. 実数の集合 $\mathbb{R}$ は大小の順序に関しては，整列集合でない．

例 3.3.5. 次の集合は大小の順序に関しては，整列集合である．

$$\{m - \tfrac{1}{n} : m \text{ 正の整数}, n \text{ は } 2 \text{ 以上の整数}\}$$



定義 3.3.6 (帰納的集合). 順序集合 $(X, \preceq)$ が**帰納的集合** (inductive set) であるとは X の空でない部分集合 A が X の順序に関して全順序集合であればかならず X の中に $\sup A$ が存在するときをいう．

定理 3.3.7. 次の命題は同値である．

(i) 任意の集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対し，すべての $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \neq \emptyset$ ならば $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$.
(ii) 任意の集合 X に対し，適当に順序関係を定義すれば, X を整列集合とすることができる．
(iii) 順序集合 $(X, \preceq)$ が帰納的であれば，X は少なくとも一つの極大元をもつ．

(i) は Zermelo により集合論の公理として要請されたもので**選択公理**という．(ii) は Cantor の**整列定理**，(iii) は **Zorn の補題**と呼ばれる．

整列定理 $\Longrightarrow$ 選択公理. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \neq \emptyset$ となる集合族 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を取る．$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とおくと，$A_\lambda \subset X$. X に整列順序を定め，$a_\lambda = \min A_\lambda$ とおくと $a_\lambda \in A_\lambda$. $a = (a_\lambda)$ は直積 $A = \prod_\lambda A_\lambda$ の元となり $A \neq \emptyset$. □

Zorn の補題 $\Longrightarrow$ 整列定理. $\mathcal{A} = \{(A, \preceq) : A \subset X,\ (A. \preceq) \text{ 整列集合}\}$ とおく．$(A, \preceq)$ が $(B, \preceq)$ の切片となっているとき $(A, \preceq) < (B, \preceq)$ と書く．すると $\leq$ は $\mathcal{A}$ 上の順序となる．$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{A}$ の全順序部分集合とすると，$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)$ はその極大元となる．よって $\mathcal{A}$ は帰納的部分集合となり，Zorn の補題よりある極大元 $(A_0, \prec)$ が存在する．$A_0 = X$ であれば証明が終る．$A_0 \subsetneq X$ とすると $x \in X - A_0$ が存在する．このとき $B = A_0 \cup \{x\}$ と置き $a \in A_0$ に対し $a \prec x$ とすれば整列集合になる．これは A_0 の極大性に反する．□

選択公理 $\Longrightarrow$ Zorn の補題. 帰納的順序集合 X を考える．$x_0 \in X$ をとる．x_0 が極大元でないとする．

$$\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ は整列集合で } \min A = x_0\}$$

任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し，その上界全体

$$A^* = \{x \in X : a \leq x\ \forall a \in A\}$$

を考える．x_0 は極大元でないから $A^* \neq \emptyset$.

$A^* \subset A$ なる $A \in \mathcal{A}$ があれば，$a \in A^*$ は $a \in A$ なので a は整列集合 A の極大元だから最大元．よって $A^* = \{a\}$ となり $a \leq x$ ならば $x \in A^* = \{a\}$ なので a が X の極大元となる．

よって，すべての A に対し $A^* \not\subset A$ と仮定したときのみ，X の極大元の存在が不明である．このときは，$\{A^* - A\}_{A \in \mathcal{A}}$ は空集合でない部分集合の族なので選択公理より，写像

$$c : \mathcal{A} \to 2^X, \quad c(A) \in A^* - A$$

が存在する．$c(A)$ は A の上界なので $A' = A \cup \{c(A)\}$ も整列集合になる．整列集合 A の a 切片を A_a と書き，

$$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} : a \in A,\ a \neq x_0 \Longrightarrow a = c(A_a)\}$$

と置く．$A \in \mathcal{B}$ ならば $c(A) = c(A'_{c(A)})$ なので $A' \in \mathcal{B}$ である．
任意の $A, B \in \mathcal{B}$ に対し，次のいずれかが成立する．

$$A = B, \quad \exists b\ A = B_b, \quad \exists a\ A_a = B$$

実際，整列集合の比較定理より

$$A \simeq B, \quad \exists b\ A \simeq B_b, \quad \exists a\ A_a \simeq B$$

のいずれかが成り立つ．順序同型 $h : A \to B_b$ (または B) があるとしよう．$A_0 = \{a \in A : h(a) \neq a\}$ が空集合でなければ，$a_0 = \min(A_0)$ に対し，$A_{a_0} = B_{h(a_0)}$ である．このとき $\mathcal{B}$ の定義より

$$a_0 = c(A_0) = c(B_{h(a_0)}) = h(a_0)$$

となり矛盾となる．よって $A_0 = \emptyset$ でなければならず．$A = B_b$ (または B) が判る．

さて $X_0 = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ と置く．
まず X_0 が全順序集合であることを示そう．
$a, b \in X_0$ に対し $a \in A,\ b \in B$ となる $A, B \in \mathcal{B}$ をとる．$A = B,\ A \subset B,\ A \supset B$ のいずれかが成立するから，a, b は A, B のいずれか一方に属しているとして良い．よって a, b は比較可能である．
次に X_0 が整列集合であることを示す．
Y を X_0 の空でない部分集合とする．$A \cap Y \neq \emptyset$ となる $A \in \mathcal{B}$ をとり $y = \min(A \cap Y)$ と置く．y は Y の最小元であることを示す．$z < y$ を満たす $z \in Y$ があったとする．$z \in B$ なる $B \in \mathcal{B}$ をとれば $z \notin A$ よりある $b \in B$ が存在して $A = B_b$. $y \in A$ より $y < b, z \notin A$ より $b \geq z$ よって $y < b \leq z$ となり矛盾．よって y は Y の最小元．
最後に $X_0 \in \mathcal{B}$ を示そう．
明らかに x_0 は X_0 の最小元．$x \neq x_0$ なる $x \in X_0$ をとり $x \in A$ なる $A \in \mathcal{B}$ をとる．$A = X_0$ ならば $X_0 \in \mathcal{B}$. $A \neq X_0$ ならば $w = \min(X_0 - A)$ とおく．$w \in B$ なる $B \in \mathcal{B}$ を取れば $w \notin A$ より $A = B_b$ となる $b \in B$ が存在する．$x \in A \subset B \subset X_0$ なので

$$A_x = B_x = (X_0)_x$$

となる．よって $x = c(A_x) = c((X_0)_x)$ となり $X_0 \in \mathcal{B}$ が判った．
$X_0 \in \mathcal{B}$ なので $(X_0)' \in \mathcal{B}$ となる．$B \in \mathcal{B}$ ならば $B \subset X_0$ なので $(X_0)' \subset X_0 \subset (X_0)'$．よって $(X_0)' = X_0$ となる．ところが $c(X_0) \in (X_0)'$ かつ $c(X_0) \notin X_0$ なので矛盾である．　□

実は，定理 1.4.1 (ii) の $\Longrightarrow$ を厳密に証明するには選択公理を仮定する必要がある．ここでその証明を与えておこう．

定理 3.3.8. $f : X \to Y$ が全射ならば，$f \circ g = 1_Y$ をみたす写像 $g : Y \to X$ が存在する．

証明　$f : X \to Y$ は全射だから，任意の $y \in Y$ に対し $A_y = f^{-1}(y)$ は空集合でない．したがって，$\{A_y \mid y \in Y\}$ は空でない集合からなる集合族である．ゆえに選択公理より，直積集合 $\prod_{y \in Y} A_y$ は空集合でなく，Y から X への写像 $g : Y \to X$ で $g(y) \in A_y$, $y \in Y$, をみたすものが存在する．(直積集合の定義を思い出すこと) この g に対して，$f \circ g = 1_Y$ となるのは示すのは容易．　□

命題 3.3.9. 整列集合 $(X, \preceq)$ に対し次が成り立つ．
(i)　$(X, \preceq)$ の任意の部分集合は整列集合である．
(ii)　X が空集合でなければ最小元が存在する．
(iii)　X の最大元でない任意の元 $x \in X$ には直後の元が存在する．

証明. (i), (ii) は整列集合の定義から明らか．
(iii): $\{y \in X : x \prec y\}$ の最小元が x の直後の元となる．　□

整列集合 $(X, \preceq)$ と $a \in X$ に対し

$$X_a = \{x \in X : x \prec a\}$$

を X の a 切片と呼ぶ．

定理 3.3.10 (超限帰納法). 整列集合 $(X, \preceq)$ と，$a \in X$ を変数として含む，ある命題 $P(a)$ が与えられているとする．このとき 次の 2 条件が成立すれば，すべての $x \in X$ に対して $P(x)$ は真．
(i)　X の最小元 a_0 に対して $P(a_0)$ は真．
(ii)　$a \in X$ を X の最小元でないとする．
任意の $x \in X_a$ に対し $P(x)$ が真ならば $P(a)$ も真．

証明. $Y = \{y \in X : P(y)$ は偽$\}$ と置く．$Y \neq \emptyset$ として矛盾を導く．Y の最小元を b とすれば $b \neq a_0$. b は Y の最小元だから $X_b \cap Y = \emptyset$. (ii) より $P(b)$ は真となり $b \in Y$ に矛盾する．　□

補題 3.3.11. X を整列集合とする．
(i)　$A \subsetneq X$ が「$x \in X, a \in A, x \prec a \Longrightarrow x \in A$」を満たせば A は切片となる．
(ii)　$f : X \to X$ が順序を保つ単射なら，任意の $x \in X$ に対し $x \preceq f(x)$.
(iii)　$a \in X$ に対し X と X_a は順序同型でない．
(iv)　$a, b \in X$ に対し $a \neq b$ ならば X_a と X_b は順序同型でない．

証明． (i): $b=\min(X-A)$ とすれば $A=X_b$

(ii): $A=\{x\in X: x\succ f(x)\}$ と置く．$A\neq\emptyset$ として矛盾を導く．A が空集合でないとすると，A の最小値 x_0 が存在する．$x_0\succ f(x_0)$ なので $f(x_0)\succ f(f(x_0))$ となり $f(x_0)\in A$ が判る．ところが $f(x_0)\prec x_0$ なので x_0 の最小性に矛盾する．

(iii): 順序同型 $f: X\to X_a$ が存在したとする．$f(a)\in X_a$ より $f(a)\prec a$. ところが (ii) より $a\preceq f(a)$ なので矛盾．

(iv): X は全順序集合なので $a\prec b$ または $a\succ b$. $a\prec b$ とすると $X_a\subset X_b$. $X=X_b$ として (iii) を適用する． □

定理 3.3.12 (整列集合の比較定理)． X, Y を整列集合とする．次のいづれかが成立する．

(a)　$X\simeq Y$ (順序同型)

(b)　$X\simeq Y_y$ (順序同型) なる $y\in Y$ が存在する．

(c)　$X_x\simeq Y$ (順序同型) なる $x\in X$ が存在する．

証明． 前補題より (a),(b),(c) は同時にはおこり得ない事に注意する．

$$
\begin{aligned}
X' =&\{x\in X:\exists y\in Y\ X_x\simeq Y_y\}\\
Y' =&\{y\in X:\exists x\in X\ X_x\simeq Y_y\}
\end{aligned}
$$

とおき，写像

$$f: X'\to Y',\qquad f(x)=y\Longleftrightarrow X_x\simeq Y_y$$

を考える．これはうまく定義されている事に注意せよ．f は順序を保つ全単射である．$x\in X'$, $z\prec x$ とすると $z\in X'$. なぜなら $X_x\simeq Y_{f(x)}$ であり X_z は $Y_{f(x)}$ のある切片と順序同型だからである．よって $X\neq X'$ ならば前補題の (i) より X' は X の切片となる．同様の議論を f^{-1} に適用すれば$Y\neq Y'$ ならば Y' は Y の切片となる． □

演習 3.3.13 (Hamel 基底)． $B\subset\mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 基底であるとは次の条件を満たすときを言う．

(i)　$x\in\mathbb{R}$ に対して $x_1,\ldots,x_n\in B$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}$ が存在して $x=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

(ii)　任意の $x_1,\ldots,x_n\in B$, $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}$ に対し
　$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ ならば $a_1=\cdots=a_n=0$

Zorn の補題の応用として，$\mathbb{R}$ に $\mathbb{Q}$ 基底が存在することを示すことが出来る (Hamel 基底と呼ばれる．)．以下この事を説明しよう．$\mathcal{B}$ を条件 (ii) を満たすような $\mathbb{R}$ の部分集合 B 全体のなす族とする．$\{1\}\in\mathcal{B}$ なので $\mathcal{B}\neq\emptyset$. このとき $\mathcal{B}$ は包含関係に関して帰納的順序集合になる．$\mathcal{B}$ の部分集合 $\mathcal{A}=\{B_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ が包含関係に関して全順序集合であれば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$ が $\mathcal{A}$ の極大元となる．よって Zorn の補題より $\mathcal{B}$ には極大元 B が存在するこの B が条件 (i) を満たす．なぜなら $x\in\mathbb{R}$, $x\neq 0$, を任意に取る．$x\in B$ なら (i) は明らか．$x\notin B$ ならば $B\cup\{x\}$ は条件 (ii) を満たさないから $a, a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{Q}$, $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{Q}$ で

$$ax+a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0,\quad a\neq 0$$

を満たすものが存在する．よって，

$$x = -\frac{1}{a}(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$$

となって (i) を満たす．

3.4　公理的集合論

集合論のパラドックス　自然数の集合 $\mathbb{N}$ の部分集合で，偶数全体からなるものを A とかく．このとき写像

$$f : \mathbb{N} \to A, \quad x \mapsto 2x$$

は全単射である．A は $\mathbb{N}$ の真部分集合であるのにこのような全単射があるのは,「部分は全体に等しい」というパラドックスの様に見えるが別に矛盾ではない．無限集合を考えるとしばしばこのようなことは生じるのである.「部分は全体に等しくない」という主張は無限集合については根拠はないのである．

深刻なパラドックスは，次の Russel のパラドックスである．まずすべての集合からなる集合 Ω を考える．つぎに Ω を 2 種類に分ける．一つは自分自身を含まない集合 (これを '普通' の集合と呼ぼう), 他方は自分自身を含む集合 (これを '特殊' な集合と呼ぼう) である．Ω_1 を '普通' の集合全体，Ω_0 を '特殊' な集合全体とする．

$$\Omega_0 = \{A \mid A \in A\}$$
$$\Omega_1 = \{A \mid A \notin A\}$$

明らかに $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$. さて Ω_1 は '普通' の集合であろうか，または '特殊' な集合であろうか?

Ω_1 が '普通' の集合ならば，$\Omega_1 \in \Omega_1$ だから '特殊' である．Ω_1 が '特殊' な集合ならば，$\Omega_1 \notin \Omega_1$ だから '普通' である．

矛盾のある仮定からはどんな命題でも証明できることは昔から知られていた．Russel のパラドックスは数学の深刻な危機と考えられ，この問題を回避するため幾つかのプログラムが提出された．その中で現在主流となっている考えを述べておこう．問題は集合とは何かを曖昧にしたまま，すべての集合の集合のような，さらに曖昧なものを考える事から生じる．そこで集合とは何か曖昧なまま議論するのでなく, 我々が通常扱うような集合が満たすような "集合に関するよい公理系" を定め，その公理系が無矛盾であることを示そうというもので，**公理的集合論** (axiomatic set theory) とよばれている．

Zermelo の考え　1908 年 E. Zermelo は公理的集合論を発表し, Russel のパラドックスによって深刻な危機に陥っていた数学を救うことを考えた．それによれば，集合とは幾つかの公理をみたす, 形式的な体系である．以下その公理を述べ，いかにして Russel のパラドックスを避けるかを説明する．

これ以降，集合やその元をあらわす記号をすべて小文字のアルファベットを用いる．2つの集合 a, x に対し $x \in a$ なる関係があれば「集合 x は集合 a の元 (または要素) である」と読む．または「集合 a と関係 $x \in a$ があれば x も集合である」と読んでももよい．

外延公理: $a = b \iff \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$

これは「2つの集合 a, b はその元が等しければ，相等しい」ということである．

内包公理 (分出公理): 集合 a とその元 x に関する命題 $P(x)$ が与えられれば $\{x \in a \mid P(x)\}$ は集合である．

内包公理を仮定すると次が示せる．

補題 3.4.1. すべての集合を元とする集合は存在しない．

証明　すべての集合を元とする集合 Ω があったとして矛盾を導く．$\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$ とすると内包公理よりこれは集合である．Ω はすべての集合を含むから $\Omega_1 \in \Omega$ となる．もし $\Omega_1 \in \Omega_1$ とすれば，Ω_1 の定義より $\Omega_1 \notin \Omega_1$ となる．またもし $\Omega_1 \notin \Omega_1$ とすれば，Ω_1 の定義より $\Omega_1 \in \Omega_1$ となり，いずれの場合も矛盾となる． □

集合論の公理系としては，パラドックスが回避されると同時に，今まで展開して来た集合論の論法が展開される公理系であることが望ましい．よってそれらを保証する命題を公理として要請する必要がある．

空集合の公理: 要素を一つも含まない集合が存在する．これを空集合といい $\emptyset$ で表す．

外延公理より空集合の一意性もわかる．

対の公理: x, y が集合ならば，$\{x, y\}$ は集合である．

$\{x, x\}$ を $\{x\}$ と書く．

和集合の公理: 集合 a に対し a に含まれる集合の和集合 $\mathfrak{S}(a)$ が存在する．つまり

$$x \in \mathfrak{S}(a) \quad \iff \quad \exists z\ [x \in z \in a]$$

をみたす集合 $\mathfrak{S}(a)$ (または $\cup(a)$) が存在する．

a が集合ならば 対の公理より $\{a, a\} = \{a\}$ も集合で, もう一度対の公理を使うと $a' := \{a, \{a\}\}$ も集合であることがわかる．和集合の公理より a' に含まれる集合の和集合も集合なので, それを a^+ と書く．

$$a^+ = \mathfrak{S}\{a, \{a\}\} = a \cup \{a\}.$$

冪集合の公理: 集合 a に対し a の部分集合全体からなる集合 $\mathfrak{P}(a)$ が存在する．つまり

$$x \in \mathfrak{P}(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, z[z \in x \to z \in a]$$

をみたす集合 $\mathfrak{P}(a)$ が存在する．

次の演算規則が成立する．

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P}a = a, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{S}a \supset a, \quad \mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}a = \mathfrak{P}\mathfrak{S}a$$

証明　$\mathfrak{S}\mathfrak{P}a \subset a$ の証明: $x \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}a \Longleftrightarrow \exists z\ [x \in z \wedge z \in \mathfrak{P}a]$
$\Longleftrightarrow \exists z\ \forall w\ [x \in z \wedge (w \in z \to w \in a)] \Longrightarrow x \in a.$
$\mathfrak{S}\mathfrak{P}a \supset a$ の証明: $x \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}a \Longleftrightarrow \exists z\ \forall w\ [x \in z \wedge (w \notin z \vee w \in a)]$
$\Longleftarrow \forall w\ [x \in a \wedge (w \notin a \vee w \in a)] \Longleftrightarrow x \in a.$
$\mathfrak{P}\mathfrak{S}a \supset a$ の証明: $x \in \mathfrak{P}\mathfrak{S}a \Longleftrightarrow \forall z\ [z \in x \to z \in \mathfrak{S}a] \Longleftrightarrow \forall z\ [z \notin x \vee z \in \mathfrak{S}a]$
$\Longleftrightarrow \forall z\ \exists w\ [z \notin x \vee (z \in w \wedge w \in a)] \Longleftrightarrow \forall z\ \exists w\ [(z \notin x \vee z \in w) \wedge (z \notin x \wedge w \in a)] \Longleftarrow$
$\forall z\ [(z \notin x \vee z \in x) \wedge (z \notin x \vee x \in a)] \Longleftrightarrow \forall z\ [z \notin x \vee x \in a] \Longleftarrow x \in a.$
$\mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}a \subset \mathfrak{P}\mathfrak{S}a$ の証明: $x \in \mathfrak{P}\mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}a \Longleftrightarrow \forall z\ [z \in x \to z \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}a]$
$\Longleftrightarrow \forall z\ [z \notin x \vee z \in \mathfrak{S}\mathfrak{P}\mathfrak{S}a] \Longleftrightarrow \forall z\ \exists w\ [z \notin x \vee (z \in w \wedge w \in \mathfrak{P}\mathfrak{S}a)]$
$\Longleftrightarrow \forall z\ \exists w\ \forall z'\ [z \notin x \vee (z \in w \wedge [z' \in w \to z' \in \mathfrak{S}a])]$
$\Longrightarrow \forall z\ \exists w\ [z \notin x \vee (z \in w \wedge [z \in w \to z \in \mathfrak{S}a])]$
$\Longleftrightarrow \forall z\ [z \notin x \vee (z \in \mathfrak{S}a)] \Longleftrightarrow x \in \mathfrak{P}\mathfrak{S}a$ □

無限公理: $\emptyset \in a$ かつ '$x \in a$ ならば $x^+ \in a$' をみたす集合 a が存在する．

これは自然数全体を含む集合が存在することを主張している．von Neumann は集合を用いて自然数を

$$0 = \emptyset, \quad 1 = 0^+ = \{0\}, \quad 2 = 1^+ = \{0, 1\}, \quad 3 = 2^+ = \{0, 1, 2\}, \ldots$$

と定義したが，無限公理はこれらをすべて含む集合が存在することを主張しているのである．

∈-帰納法の公理: 任意の集合 a に対し

$$\forall\, x \in a\ P(x) \Longrightarrow P(a)$$

ならばすべての集合 a に対し $P(a)$ が成り立つ．

この公理より $x \in x$ をみたす集合 x は存在しないことがわかる．$x \in y \wedge y \in x$ をみたすような集合 x, y も存在しない．

以上が Zermelo が考えた公理系で，通常 Z 公理系と略称される．Frankel は Zermero の公理系では順序数などの記述が不自然になることに気付き，その欠点を改良すべく，更に次の公理系を考えた．

置換公理: 集合 a の任意の元 x に対し $P(x,y)$ をみたすような y が存在すれば, ある集合 b があって，集合 a の任意の元 x に対し $P(x,y)$ をみたすような $y \in b$ が存在する．

これより集合の写像による像は集合になることが従う．

以上の公理系を総称して ZF 公理系という．さらに，ZF 公理系に選択公理を加えたものを ZFC 公理系という．ZFC 公理系は，現在の数学を記述するのに十分強力であると考えられているが，ZFC 公理系が無矛盾であるかどうかはまだ証明されていない．

第4章　距離空間

ユークリッド空間に於ける距離の概念を抽象化すると，距離のある空間，距離空間，の概念が得られる．距離空間では，ユークリッド空間における点列の収束などのいろいろな概念を，一般化することが出来る．本章では，距離空間における諸性質 (開集合，集合の内点，境界点，外点等の概念，点列の収束や写像の連続性等) について解説する．

4.1　距離空間の定義とその例

定義 4.1.1 (距離空間). 空でない集合 X に対し

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

が**距離関数** (distance function) であるとは次の性質を満たす時をいう.

(D0) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geq 0$.
(D1) $d(x, y) = 0$ と $x = y$ は同値.
(D2) 任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d(y, x)$.
(D3) 任意の $x, y, z \in X$ に対し $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

集合 X と距離関数 d とを合わせて考えて (X, d) を**距離空間** (metric space) という．また，条件 (D1) を弱めた条件
(D1′)　$x = y$ ならば $d(x, y) = 0$
を考え，条件 (D0), (D1′), (D2), (D3) を満たすような $d(x, y)$ を X 上の**擬距離** (pseudo-metric) という．集合 X と擬距離 d とを合わせて考えた (X, d) を擬距離空間という．

命題 4.1.2 (部分距離空間). (擬) 距離空間 (X, d_X) の部分集合 A には (X, d_X) から自然に (擬) 距離空間の構造が入る．即ち

$$d(x, y) = d_X(x, y), \quad x, y \in A$$

とおけば，これは A の (擬) 距離関数になる．

距離空間の例をいくつか述べる．

例 4.1.3 (ユークリッド空間). $\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

で $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定義するとこれは距離関数になる. $\mathbb{R}^n$ にこの距離をいれた空間を**ユークリッド空間** (Euclidean space) という.

例 4.1.4. $\mathbb{R}^n$ にはいろいろな距離関数を定義することが出来る．$k \geq 1$ として，$\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{|x_1 - y_1|^p + \cdots + |x_n - y_n|^p}$$

で $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を定義するとこれは距離関数になる. $p = 2$ の場合が例 4.1.3 の距離関数である．

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$$

とおくと，これも $\mathbb{R}^n$ の距離関数になる．$1 \leq p \leq q \leq \infty$ のとき，次の関係がある事が示される．

$$d_\infty \leq d_q \leq d_p \leq d_1 \leq n d_\infty$$

例 4.1.5 (l^p 空間). $p \geq 1$ とする．実数列 $x = \{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ で

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

を満たすもの全体を l^p と書く．l^p の 2 つの元 x, y に対し，その間の距離を

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

で定めると，(l^p, d_p) は距離空間になる．

例 4.1.6. $\mathbb{R}^2$ の元 $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対し，

$$d(x, y) = |x_1 - y_1|$$

とおくと，これは $\mathbb{R}^2$ の擬距離になる．

例 4.1.7 (関数空間). 閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $C[0, 1]$ で表す．$k \geq 1$ として，$C[0, 1]$ の元 f, g に対し

$$d_k(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^k dx \right)^{1/k}$$

とおくと，これは $C[0, 1]$ の距離関数になる.

$$d_\infty(x, y) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

とおくと，これも $C[0, 1]$ の距離関数になる．

例 4.1.8 (L^p 空間). 閉区間 $[0,1]$ 上の実数値関数で p 乗可積分な関数全体の集合を $L^p[0,1]$ で表す．ここで関数 $f(x)$ が p 乗可積分であるとは次の積分が存在するときを言う．

$$\int_0^1 |f(x)|^p dx$$

$L^p[0,1]$ の元 f, g に対し

$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

とおくと，これは $L^p[0,1]$ の擬距離関数になる.

例 4.1.9 (離散距離). 集合 X に次で $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を定義するとこれは距離関数になる．

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x=y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

相異なる 2 点間距離が常に 1 なので，これを**離散距離**という．

例 4.1.10 (密着擬距離). 集合 X に対し，恒等的に 0 であるような関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 0$, は擬距離関数になる．これを**密着擬距離**という．

例 4.1.11 (p 進距離). p を素数とする．$x \in \mathbb{Z}$ に対し，$x = p^e u_p$, v は非負整数, u_p は p と互いに素な整数，となるとき，$e = e_p(x)$ と書く．

$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-e_p(x-y)} & (x \neq y) \\ 0 & (x=y) \end{cases}$$

と置けば，d_p は $\mathbb{Z}$ の距離となる．この距離を $\mathbb{Z}$ の **p 進距離**という．

p 進距離は $\mathbb{Q}$ に拡張される．$x \in \mathbb{Q}$ に対し，$x = p^e u$, $v \in \mathbb{Z}$, u は分母分子に p を因数としては含まない有理数，となるとき，$e = e_p(x)$ と書く．

$$d_p(x,y) = \begin{cases} p^{-e_p(x-y)} & (x \neq y) \\ 0 & (x=y) \end{cases}$$

とすれば d_p は $\mathbb{Q}$ の距離となる．この距離を $\mathbb{Q}$ の **p 進距離**という．

定義 4.1.12 (開球). (X,d) を距離空間とする. X の点 a と正の数 ε に対し a を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の**開球** (open ball) $B(a;\varepsilon)$ を次で定義する.

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in X \mid d(x,a) < \varepsilon\}$$

$B(a;\varepsilon)$ を $B_\varepsilon(a)$ と書くこともある．

(X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A の**直径** (diameter) $\delta(A)$ を次で定義する．

$$\delta(A) = \sup\{d(a,b) : a,b \in A\}.$$

演習 4.1.13. (X,d) を距離空間， A をその部分集合とする．$a \in A$, $\delta(A) < r$ ならば $A \subset B(a;2r)$ を示せ．

4.2　開集合と閉集合

以下，特に断らなければ，X, Y などは距離空間または擬距離空間とする．

定義 4.2.1 (開集合). X の部分集合 U が次の条件を満たすとき**開集合** (open set) であるという．

U の各点 x に対しある正の数 ε が存在して $B(x;\varepsilon) \subset U$ となる．

補題 4.2.2. 開球は開集合である．

証明　任意の $x \in B(a;\varepsilon)$ に対し，$B(x;\delta) \subset B(a;\varepsilon)$ なる開球 $B(x;\delta)$ の存在を示せばよい．$y \in B(x;\delta)$ ならば

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \delta + d(x,a)$$

なので $\delta < \varepsilon - d(x,a)$ なる $\delta > 0$ をとればよい． □

この補題より次の条件は同値である事がわかる．
(i)　U は開集合
(ii)　任意の $x \in U$ に対し，$B \subset U$ なる x 中心の開球 B が存在する．
(iii)　任意の $x \in U$ に対し，$B \subset U$ なる x を含む開球 B が存在する．

定理 4.2.3 (開集合の性質).

(O1) 空集合 $\emptyset$ と X はともに開集合である．
(O2) 有限個の開集合の共通部分は開集合である．即ち，$U_1, U_2, \ldots, U_k$ が開集合ならば $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ も開集合である．
(O3) 任意個の開集合の和集合は開集合である．即ち，U_λ, $\lambda \in \Lambda$, が開集合ならば $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合である．

条件 (O2′) は次の条件と同値である．

(O2′) U_1, U_2 が開集合ならば $U_1 \cap U_2$ も開集合である．

証明　U が開集合であることは次の条件が成り立つことと同値であった．

任意の $x \in X$ に対し $x \in U$ ならば，開球 $B(x;\varepsilon)$ が存在して $B(x;\varepsilon) \subset U$

(O1): $U = \emptyset$ の時は $x \in U$ が成立せずこの条件式は真．$U = X$ の時はこれは明らかに真．
(O2): $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k = \emptyset$ のときは明らかなので，$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k \neq \emptyset$ と仮定する．$x \in U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ とすると，$x \in U_i$, $i = 1, \ldots, k$. U_i は開集合だから $\varepsilon_i > 0$ が存在して $B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$ と置くと $B(x;\varepsilon) \subset B(x;\varepsilon_i) \subset U_i$ なので $B(x;\varepsilon) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. よって $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$ は開集合である．
(O3): $x \in \cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とすると，ある λ が存在して $x \in U_\lambda$. U_λ は開集合だから $B(x;\varepsilon) \subset U_\lambda \subset_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ よって $\cup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ は開集合である． □

注意 4.2.4. 無限個の開集合の共通部分は開集合になるとは限らない．例えば通常の距離をいれた $\mathbb{R}$ では $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots,$ は開集合であるが，そのすべての共通部分は開集合ではない．

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$$

定義 4.2.5 (閉集合). X の部分集合 F が閉集合であるとは次の同値な条件が成り立つときを言う．

(i)　$X - F$ は開集合

(ii)　任意の $x \notin F$ に対し，$B \cap F = \emptyset$ なる x 中心の開球 B が存在する．

(iii)　任意の $x \notin F$ に対し，$B \cap F = \emptyset$ なる x を含む開球 B が存在する．

定理 4.2.6 (閉集合の性質).

(C1)　空集合 $\emptyset$ と X はともに閉集合である．

(C2)　有限個の閉集合の和集合は閉集合である．即ち $F_1, F_2, \ldots, F_k$ が閉集合ならば $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ も閉集合である．

(C3)　任意個の閉集合の共通部分は閉集合である．即ち F_λ, $\lambda \in \Lambda$, が閉集合ならば $\cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合である．

証明　定理 4.2.3 に de Morgan の法則を適用すればよい．　□

点 a を中心とする半径 $\varepsilon \geq 0$ の**閉球** (closed ball) $\overline{B}(a;\varepsilon)$ と言う概念もしばしば 使われるので，次に定義を挙げておこう．

$$\overline{B}(a;\varepsilon) := \{x \in X \mid d(x,a) \leq \varepsilon\}$$

$\overline{B}(a;\varepsilon)$ を $\overline{B}_\varepsilon(a)$ と書くこともある．

演習 4.2.7. 閉球は閉集合であることを示せ．

定義 4.2.8 (近傍). V が $x \in X$ の**近傍**であるとは次の同値な条件が成り立つときをいう．

(i)　$B \subset V$ なる x 中心の開球 B が存在する.

(ii)　$x \in B \subset V$ なる開球 B が存在する.

(iii)　$x \in U \subset V$ なる開集合 U が存在する.

開集合である近傍を**開近傍**という．閉集合である近傍を**閉近傍**という．

例 4.2.9. 開球 $B(a;\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, は a の開近傍である．閉球 $\overline{B}(a;\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, は a の閉近傍である．

注意 4.2.10. 近傍といえば開近傍のことを指す場合もある．しかし，ここでは論理展開の便宜上，近傍といえば開集合でないものも考えているのである．

4.3　開核と閉包

定義 4.3.1 (内点). X の部分集合 A に対し，$x \in X$ は A の**内点**であるとは，次の同値な条件を満たすときを言う.

(i)　$x \in B \subset A$ を満たす x 中心の開球 B が存在する.

(ii)　$x \in B \subset A$ を満たす開球 B が存在する.

(iii)　$x \in U \subset A$ を満たす開集合 U が存在する.

(iv)　$V \subset A$ を満たす x の近傍 V が存在する.

定義 4.3.2 (外点，境界点). 外点，境界点の概念を次で定義する.

- x は A の**外点** $\iff$ x は $X - A$ の内点
- x は A の**境界点** $\iff$ x は A の内点でも外点でもない.

内点の場合と同じように, 外点, 境界点の概念も開球 (または，開集合，x の近傍) を使って述べることが出来る．開集合を使って述べたものを参考までに挙げておく.

- x は A の**外点** $\iff$ $x \in U$, $A \cap U = \emptyset$ を満たす開集合 U が存在する.
- x は A の**境界点** $\iff$ x を含む任意の開集合 U は $A \cap U \neq \emptyset$ かつ $(X - A) \cap U \neq \emptyset$ を満たす.

A の**開核** (interior) A° (内点集合という事もある) , **境界** (boundary) ∂A, A の**閉包** (closure) $\overline{A}$ を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
A^\circ &:= \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点}\} \\
\partial A &:= \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の境界点}\} \\
\overline{A} &:= \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点か境界点}\}
\end{aligned}
$$

定義より明らかに $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ である．A の外点全体の集合は $(X - A)^\circ$ である事もわかる.

例 4.3.3 (開球の開核，閉包). 開球の開核はそれ自身である.

$$B(a;\varepsilon)^\circ = B(a;\varepsilon)$$

例 4.3.4. ユークリッド空間においては，$\overline{B(a;\varepsilon)} = \overline{B}(a;\varepsilon)$ である．しかしながら,，このことは任意の距離空間で成立するわけではない．例えば，離散距離空間 X （例 4.1.9）においては

$$\overline{B(a;1)} = \{a\} \subsetneq X = \overline{B}(a;1).$$

定理 4.3.5 (開核の性質). 開核に対し，次の性質が成り立つ.

(i)　$A_1 \subset A_2$ ならば $A_1^\circ \subset A_2^\circ$

(ii)　$A^\circ \subset A$

(iii)　A° は開集合.

証明 (i),(ii) は定義から明らか. $x \in A^\circ$ とすると $x \in B \subset A$ なる開球 B がある. $B = B^\circ \subset A^\circ$ なので A° は開集合. □

命題 4.3.6 (開核と閉包の双対性). 開核と閉包には次の関係がある.

(i) $X - A^\circ = \overline{X - A}$, $A^\circ = X - \overline{X - A}$.

(ii) $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$, $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$.

証明 (i) の最初の式をまず示す.

$$
\begin{aligned}
x \in X - A^\circ &\Longleftrightarrow x \notin A^\circ \\
&\Longleftrightarrow x \text{ は } A \text{ の内点ではない} \\
&\Longleftrightarrow x \text{ のどんな近傍も } X - A \text{ と交わる} \\
&\Longleftrightarrow x \in \overline{X - A}
\end{aligned}
$$

(i) の 2 番目の式は, 最初の式の補集合をとればよい. (ii) は (i) で A を $X - A$ に置きかえれば得られる. □

$\overline{A} = X - (X - A)^\circ$ を使えば, 開核の性質より 次の性質は明らかである.

(i) $A_1 \subset A_2$ ならば $\overline{A_1} \subset \overline{A_2}$

(ii) $A \subset \overline{A}$

(iii) $\overline{A}$ は閉集合.

定理 4.3.7 (開核・閉包の開集合・閉集合による特徴づけ). X の部分集合 A に対し次が成り立つ.

(i) 開核 A° は A に含まれる最大の開集合である.

(ii) 閉包 $\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

証明 (i): U を A に含まれる最大の開集合 (即ち A に含まれる開集合すべての和集合) とすると, $U \subset A$. 両辺の開核をとると $U \subset A^\circ$ であるが U の最大性より $U = A^\circ$.
(ii): A を含む最小の閉集合を F とすると $X - F$ は $X - A$ に含まれる最大の開集合である. よって (i) より $X - F = (X - A)^\circ$ となる. $\overline{A} = X - (X - A)^\circ = X - (X - F) = F$ となり証明が終る. □

系 4.3.8 (開集合・閉集合の開核・閉包による特徴づけ).

(i) A が開集合 $\Longleftrightarrow A^\circ = A$.

(ii) A が閉集合 $\Longleftrightarrow \overline{A} = A$.

命題 4.3.9. A が x の近傍 $\Longleftrightarrow x \in A^\circ \Longleftrightarrow x \notin \overline{X - A}$

定義 4.3.10 (集積点, 孤立点). X の部分集合 A の集積点, 孤立点の概念を次で定義する.

- x は A の**集積点** $\Longleftrightarrow$ x を含む任意の開集合 U に対し $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.
- x は A の**孤立点** $\Longleftrightarrow$ $A \cap U = \{x\}$ を満たす開集合 U が存在する.

集積点, 孤立点の概念も開球や近傍の言葉で記述することができる.

演習 4.3.11. 集積点, 孤立点の概念を, 開球や近傍の言葉で記述せよ.

4.4　点列の収束

定義 4.4.1 (点列の収束). 距離空間 (X, d) の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ が点 x に収束するとは, 任意の正の数 ε に対しある番号 n_0 が存在して

$$n \geq n_0 \quad ならば \quad x_n \in B(x; \varepsilon)$$

が成立するときをいう. この条件は次の各条件と同値であることに注意しておこう.

(i)　x 中心の任意の開球 B に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(ii)　x を含む任意の開球 B に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(iii)　x の任意の近傍 V に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(iv)　x を含む任意の開集合 U に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

点列 (x_n) が x に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad または \quad x_n \to x \quad (n \to \infty)$$

と書く.

演習 4.4.2. 距離空間において，収束点列の収束先は一意であることを示せ．即ち，距離空間における点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ が，点 a, b に収束すると仮定したとき，$a = b$ となることを示せ.

定理 4.4.3 (収束による閉包の特徴づけ). : X の部分集合 A に対し

$$a \in \overline{A} \Longleftrightarrow A \text{ の点列 } (x_n) \text{ で } a \text{ に収束するものが存在する}$$

証明　$\Longleftarrow$ の証明: $a \notin \overline{A}$ ならば $a \in U \subset X - A$ なる開集合 U が存在する．A の点列 (x_n) が a に収束するとすると，ある番号 n_0 があって $x_n \in U$ $(n \geq n_0)$ となるが，これは $x_n \in A$ に矛盾する.

$\Longrightarrow$ の証明: $B_n = B(a; \frac{1}{n})$ と置く．$B_n \cap A \neq \emptyset$ なので x_n を $B_n \cap A$ の元とすると (x_n) は a に収束する．実際，a 中心の開球 B を任意にとると $B_n \subset B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在する．よって $x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ となる.　□

系 4.4.4.

(i)　A は開集合 $\Longleftrightarrow$ $X - A$ の任意の点列は A の点には収束しない.

(ii)　A は閉集合 $\Longleftrightarrow$ X の点列として収束する A 内の点列は A の点に収束.

定義 4.4.5 (部分列). 点列 (x_n) に対し，ある増加列 n_k (即ち $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \dots$) をとり，$(x_{n_k})_{k=1,2,\dots}$ と表される点列を (x_n) の**部分列** (subsequence) と言う.

定理 4.4.6 (部分列と集積点). 距離空間の点列 (x_n) に対し，$A = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ と置く．$a \notin A$ のとき，

a が A の集積点. $\Longleftrightarrow$ a に収束する (x_n) の部分列が存在する.

証明

$$
\begin{aligned}
a \text{ が } A \text{ の集積点} &\iff \text{任意の正の数 } \varepsilon \text{ に対し } B(a;\varepsilon)\cap(A-\{a\})\neq\emptyset\\
&\iff \text{任意の自然数 } k \text{ に対し } B(a;1/k)\cap(A-\{a\})\neq\emptyset\\
&\iff \text{任意の自然数 } k \text{ に対し } \exists y_k\in B(a;1/k)\cap(A-\{a\})\\
&\iff \text{任意の自然数 } k \text{ に対し } \exists n_k\ x_{n_k}\in B(a;1/k),\ x_{n_k}\neq a\\
&\iff (x_n) \text{ の部分列で } a \text{ に収束するものが存在する.}
\end{aligned}
$$

最後の $\Longrightarrow$ の部分では n_k は増大列ではないかも知れないが，n_k の部分列で増大列であるものが取れると言う事実を使っている. □

4.5 連続性

定義 4.5.1 (連続写像). 距離空間 (X, d_X) から 距離空間 (Y, d_Y) の写像 $f : X \to Y$ が X の点 a で**連続である**とは, 任意の正の数 ε に対して次を満たす正の数 δ が存在するときをいう.

$$\text{任意の } x\in X \text{ に対し}\quad d_X(x,a)<\delta \quad\text{ならば}\quad d_Y(f(x),f(a))<\varepsilon.$$

この条件は

$$f(B(a;\delta))\subset B(f(a);\varepsilon),\quad\text{または}\quad B(a;\delta)\subset f^{-1}(B(f(a);\varepsilon))$$

と同値であることに注意しておこう. よって f が点 a で連続であるとは次の同値な条件が成り立つ事である.

(i) $f(a)$ 中心の任意の開球 B' に対し $f(B)\subset B'$ (または，同じことだが $B\subset f^{-1}(B')$) となる a 中心の開球 B が存在する.
(ii) $f(a)$ を含む任意の開球 B' に対し $f(B)\subset B'$ (または，同じことだが $B\subset f^{-1}(B')$) となる a を含む開球 B が存在する.
(iii) $f(a)$ の任意の近傍 V に対し $f(U)\subset V$ なる a の近傍 U が存在する.
(iv) $f(a)$ の任意の近傍 V に対し $f^{-1}(V)$ は a の近傍.

X の各点で連続であるような写像を**連続写像**という.

定理 4.5.2 (一点での連続性の特徴づけ). 距離空間 X から 距離空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について次は同値である.

(i) $f : X \longrightarrow Y$ は点 $a\in X$ で連続.
(ii) X の任意の部分集合 A に対し，$a\in\overline{A}$ ならば $f(a)\in\overline{f(A)}$
(iii) 点列 (x_n) が a に収束すれば，点列 $(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束する.

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): $a\in X$ に対し，$f(a)\notin\overline{f(A)}$ とすると，$f(a)$ の近傍 V で $V\cap f(A)=\emptyset$ なるものが存在する.

$$f^{-1}(V)\cap A\subset f^{-1}(V)\cap f^{-1}(f(A))=f^{-1}(V\cap f(A))=f^{-1}(\emptyset)=\emptyset$$

であるが (i) より $f^{-1}(V)$ は a の近傍なので $a \notin A$.
(ii)$\Longrightarrow$(i): $a \in X$ とし，V を $f(a)$ の近傍とする．$A = f^{-1}(Y-V)$ と置くと，$f(A) = Y-V$. $f(A) \cap V = \emptyset$ なので $f(a) \notin \overline{f(A)}$ となる．. (ii) より $a \notin \overline{A}$ が従う．これは a の近傍 U で $U \cap A = \emptyset$ なるものが存在することを意味する．$A = f^{-1}(Y-V) = X - f^{-1}(V)$ なので， $U \subset f^{-1}(V)$.
(i)$\Longrightarrow$(iii): $f(a)$ を中心とする開球 B' をとる．仮定から a を中心とした開球 B が存在し $f(B) \subset B'$. 点列 (x_n) が a に収束するので，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在する．このとき $f(x_n) \in f(B) \in B'$ なので $f(x_n)$ は $f(a)$ に収束する．
(iii)$\Longrightarrow$(i): f が a で連続でないと仮定する．すると $f(a)$ を中心とするある開球 B' が存在して a 中心のどんな開球の像も B' に含まれない．$B_n = B(a; \frac{1}{n})$ とおくと $x_n \in B_n$ で $f(x_n) \notin B'$ なる x_n が存在する．点列 (x_n) は a に収束するが，$(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束しない． □

定理 4.5.3 (連続写像の特徴づけ). 距離空間 X から 距離空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について次は同値である.

(i) $f : X \longrightarrow Y$ は連続写像.
(ii) 任意の開集合の f による逆像は開集合である.
(iii) 任意の閉集合の f による逆像は閉集合である.
(iv) X の任意の部分集合 A に対し，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(v) すべての X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ について, $x_n \to a$ ならば $f(x_n) \to f(a)$.

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): U を Y の開集合とし，$f^{-1}(U)$ が開集合であることを示す．$a \in f^{-1}(U)$ に対し $V \subset U$ なる $f(a)$ の近傍をとると $f^{-1}(V)$ は a の近傍であり，$B \subset f^{-1}(V)$ なる a 中心の開球が存在する．よって $a \in B \subset f^{-1}(U)$ となり $f^{-1}(U)$ は開集合.
(ii)$\Longrightarrow$(i): $a \in X$ と a の近傍 V に対し $f^{-1}(V)$ が a の近傍であることを示す．V は a の近傍なので，$a \in U \subset V$ なる開集合 U が存在 $a \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$ で $f^{-1}(U)$ は開集合なので $f^{-1}(V)$ は a の近傍.
(ii) と (iii) の同値性は $X - f^{-1}(A) = f^{-1}(Y - A)$ より従う．後は演習問題. □

例 4.5.4. A を 距離空間 X の部分集合とする．次の関数は連続である．

$$f : X \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

証明 任意の $a \in A$ に対し $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ なので $a \in A$ で inf をとれば

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$$

を得る．x, y を入れ換えれば

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$$

なので，次の不等式を得る．

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

これは任意の点列 $(x_n) \to x$ に対し $(f(x_n)) \to f(x)$ を意味する． $\square$

演習 4.5.5. $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x,A) = 0$ を示せ．

演習 4.5.6. 距離空間 (X,d) と $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ なる X の部分集合 A, B に対し，

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

と置くと，f は連続関数で，$f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ が成り立つことを示せ．

第 5 章　位相空間

距離空間において，開集合のみで記述される性質を，位相的性質と言う．例えば「点列が収束する」「写像が連続である」などは位相的性質である．実は，位相的性質は，距離空間の概念を一般化した位相空間で議論することができる．ここでは，位相空間を導入し，その基本的な性質について説明する．

5.1　位相空間の定義とその例

定義 5.1.1 (開集合による位相空間の定義). 空でない集合 X に X の部分集合の族 $\mathrm{Open}(X)$ で次の (O1)-(O3) を満たすものが与えられたとき X に**位相**が与えられたと言う.

(O1) $\emptyset, X \in \mathrm{Open}(X)$
(O2) $U_1, U_2 \in \mathrm{Open}(X)$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathrm{Open}(X)$.
(O3) U_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathrm{Open}(X)$.

この条件 (O1)-(O3) を**開集合の公理**ということがある. 位相の与えられた集合 X を**位相空間**といい $\mathrm{Open}(X)$ の元を**開集合** (open set) とよぶ.

位相空間の例をいくつか挙げてみよう.

例 5.1.2 (距離位相). 距離空間 (X, d) に対し 定義 4.2.1 で定義した開集合全体を $\mathrm{Open}(X)$ とおくとこれは開集合の公理を満たす. これを距離空間 X の**距離位相**という.

例 5.1.3 (擬距離位相). 擬距離空間 (X, d) に対し 定義 4.2.1 で定義した開集合全体を $\mathrm{Open}(X)$ とおくとこれは開集合の公理を満たす.

例 5.1.4 (密着位相). 集合 X に対し $\mathrm{Open}_{\text{密着}}(X) = \{X, \emptyset\}$ とおくとこれは開集合の公理を満たす. この位相を X の**密着位相**という. 密着位相は密着擬距離から定まる位相でもある.

例 5.1.5 (離散位相). 集合 X に対し X の部分集合全体を $\mathrm{Open}_{\text{離散}}(X)$ とおくとこれは開集合の公理を満たす. この位相を X の**離散位相**という. 離散位相は離散距離から定まる位相でもある.

例 5.1.6 (余有限位相). 集合 X に対し

$$\mathrm{Open}_{余有限}(X) = \{A \subset X : X - A \text{ は有限集合 }\} \cup \{\emptyset\}$$

とおくとこれは開集合の公理を満たす. この位相を X の**余有限位相** (cofinite topology) という.

例 5.1.7. $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ として

$$\mathrm{Open}(X) = \{A \subset \mathbb{N}\} \cup \{A \cup \{\infty\} \mid \mathbb{N} - A \text{ は有限集合 }\}$$

と置くと，これは開集合の公理を満たす.

集合 X に対して，位相のいれ方はいろいろある事が推察されよう.

定義 5.1.8 (位相の強弱). 集合 X に 2 つの位相 $\mathrm{Open}_1(X)$ と $\mathrm{Open}_2(X)$ が与えられたとき, $\mathrm{Open}_1(X) \supset \mathrm{Open}_2(X)$ ならば位相 $\mathrm{Open}_1(X)$ は 位相 $\mathrm{Open}_2(X)$ より**強い** (または**細かい**) 位相であるという. 位相 $\mathrm{Open}_2(X)$ は 位相 $\mathrm{Open}_1(X)$ より**弱い** (または **粗い**) 位相であるという言う方をする事もある.

余有限位相は離散位相より弱く (粗く)，密着位相より強い (細かい) 位相である．位相空間の例を続けよう.

例 5.1.9 ($\mathbb{R}$ の通常の位相). 実数の集合 $\mathbb{R}$ に対し， $\mathbb{R}$ の通常の距離が定める位相を $\mathbb{R}$ の通常の位相という．このとき，部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が開集合であることは，次の条件と同値である.

$$\forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset A$$

例 5.1.10 ($\mathbb{R}$ の上半開区間位相). 実数の集合 $\mathbb{R}$ に対し， $A \subset \mathbb{R}$ が開集合であることを次の条件で定める.

$$\forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 : [a, a + \varepsilon) \subset A$$

これは開集合の公理を満たす．この位相を $\mathbb{R}$ の上半開区間位相と言う．$\mathbb{R}$ の通常の位相よりも強い位相である．同様にして次の条件で下半開区間位相を定めることが出来る.

$$\forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a] \subset A$$

例 5.1.11 ($\mathbb{R}$ の上半位相). 実数の集合 $\mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{Open}_{上}(\mathbb{R}) = \{(-\infty, a) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

とおくと, $\mathrm{Open}_{上}(\mathbb{R})$ は開集合の公理を満たす. この位相を $\mathbb{R}$ の上半位相という.

例 5.1.12 ($\mathbb{R}$ の下半位相). 実数の集合 $\mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{Open}_{下}(\mathbb{R}) = \{(a, \infty) \subset \mathbb{R} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

とおくと, $\mathrm{Open}_{下}(\mathbb{R})$ は開集合の公理を満たす. この位相を $\mathbb{R}$ の下半位相という.

例 5.1.13 ($\mathbb{R}$ の散乱位相). 実数の集合 $\mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{Open}_{散乱}(\mathbb{R}) = \{A \cup B \mid A \text{ は } \mathbb{R} \text{ の通常の位相で開集合},\ B \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$$

とおくと, $\mathrm{Open}_{散乱}(\mathbb{R})$ は開集合の公理を満たす. この位相を $\mathbb{R}$ の散乱位相という.

以下，X を位相空間とする.

定義 5.1.14 (閉集合). $X - A$ が開集合のとき， A を**閉集合** (closed set) と言う．閉集合全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す.

定理 5.1.15 (閉集合の性質). (C1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}(X)$
(C2) $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathcal{F}(X)$ ならば $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}(X)$
(C3) $F_\lambda \in \mathcal{F}(X)$, $\lambda \in \Lambda$, ならば $\cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}(X)$

(C1)–(C3) を閉集合系の公理と言う．閉集合系の公理を満たす任意の集合族 $\mathcal{F}(X)$ が与えれたとき

$$\mathrm{Open}(X) = \{A \subset X \mid X - A \in \mathcal{F}(X)\}$$

で X に位相を定めることが出来る．$\mathcal{F}(X)$ はこの位相に関する閉集合全体である.

定義 5.1.16 (近傍). $x \in X$ に対し， X の部分集合 V が x の**近傍**であるとは $x \in U \subset V$ なる開集合 U が存在するときを言う．x の近傍全体を $\mathcal{V}(x)$ で表す.

定義 5.1.17 (近傍系). 任意の $x \in X$ に対し集合族

$$\mathcal{V}(x) = \{x \text{ の近傍 }\}$$

を x の**近傍系**という. 近傍系 $\mathcal{V}(x)$ は，次の (N1)-(N4) を満たす.

(N1) 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対し， $x \in V$.
(N2) $V \in \mathcal{V}(x)$ かつ $V \subset W$ ならば $W \in \mathcal{V}(x)$
(N3) 任意の $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$ に対し, $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.
(N4) 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対し，ある $V_1 \in \mathcal{V}(x)$ が存在し $y \in V_1$ ならば $V \in \mathcal{V}(y)$.

注意：(N4) は V_1 として V の開核を取ればよい.

この条件 (N1)-(N4) を**近傍系の公理**という.

また次が成立する.

$$\mathrm{Open}(X) = \{U \subset X \mid \forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ s.t. } V \subset U\}$$

任意の $x \in X$ に対し近傍系の公理を満たすような集合族 $\mathcal{V}(x)$ が与えられているとき, 上の式で $\mathrm{Open}(X)$ を定義するとこれは開集合の公理を満たすの．よって近傍系の公理系を満たす集合族 $\mathcal{V}(x)$, $x \in X$, が与えられればこれらを近傍系とするような位相空間を定義することができる．この位相を近傍系から生成される位相という.

5.2　位相の基底

位相空間での議論は，距離空間において位相的性質を議論する場合と，並行にいく場合が多い．しかし，開球の概念は距離空間でのみ定義され，位相空間では考えることができないので，開球を使った議論を，位相空間に一般化することはできない．しかしながら，位相空間で位相的性質を論ずる際，開集合すべてを記述して，それを証明に用いるのは，現実的とは言えない場合が多い．位相空間でも，距離空間において開球が果たす役割を演ずる概念を導入しておくのが便利である．ここではそれに相当するものとして，開基底の概念と近傍基底の概念を導入しよう．

定義 5.2.1 (開基底). 位相空間 X の部分集合の族 $\mathcal{B}(X)$ が X の**開基底** (open base) であるとは，任意の開集合が $\mathcal{B}(X)$ の任意個の元の和集合で書けるときを言う．開基底 $\mathcal{B}(X)$ の元を**基本開集合** (basic open set) という．$\mathcal{B}(X)$ は次の条件を満たす．

(B1) 任意の $x \in X$ に対し $x \in B$ なる $B \in \mathcal{B}(X)$ が存在する．

(B2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(X)$ と任意の $x \in B_1 \cap B_2$ に対し $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ なる $B_3 \in \mathcal{B}(X)$ が存在する．

この条件 (B1) - (B2) を**開基底の公理**という．開基底の公理を満たすような任意の $\mathcal{B}(X)$ に対し，

$$\mathrm{Open}(X) = \left\{ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \;\middle|\; B_\lambda \in \mathcal{B}(X) \right\}$$

とおくと, $\mathrm{Open}(X)$ は開集合の公理を満たす．

命題 5.2.2. $\mathcal{B}(X)$ が開基底の公理を満たすとき次は同値．

- $\exists\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} : B_\lambda \in \mathcal{B}(X), U = \bigcup_\lambda B_\lambda$
- $\forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}(X) : x \in B \subset U$

命題 5.2.3. X に二つの位相 $\mathrm{Open}_1(X), \mathrm{Open}_2(X)$ が与えられていて $\mathcal{B}_1(X)$ を $\mathrm{Open}_1(X)$ の開基底とする．このとき次は同値．

(i) $\mathrm{Open}_2(X)$ は $\mathrm{Open}_1(X)$ より強い．

(ii) 任意の $B \in \mathcal{B}_1(X)$ に対し，$B \in \mathrm{Open}_2(X)$

例 5.2.4 (距離位相の開基底). 距離空間 (X, d) に対し

$$\mathcal{B}_1(X) = \left\{ B\bigl(x; \frac{1}{n}\bigr) \;\middle|\; x \in X, n = 1, 2, \ldots \right\}$$
$$\mathcal{B}_2(X) = \{B(x;\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$
$$\mathcal{B}_3(X) = \{B(x;\varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}\}$$

はどれも開基底の公理を満たす．これから定まる X のどの位相も**距離位相**と一致する．

定義 5.2.5 (部分開基底). 位相空間 X の部分集合の族 $\mathcal{S}(X)$ が X の**部分開基底** (open subbase) であるとは

$$\{S_1 \cap \cdots \cap S_k \mid S_i \in \mathcal{S}(X)\}$$

が開基底になるときをいう．部分開基底 $\mathcal{S}(X)$ は次の条件を満たす

(S1) 任意の $x \in X$ に対し $x \in S$ なる $S \in \mathcal{S}(X)$ が存在する．

この条件 (S1) を**部分開基底の公理**という．部分開基底の公理を満たすような任意の $\mathcal{S}(X)$ に対し，

$$\mathcal{B}(X) = \{S_1 \cap \cdots \cap S_k \mid S_i \in \mathcal{S}(X)\}$$

とおくと, $\mathcal{B}(X)$ は開基底の公理を満たす．

よって部分開基底の公理を満たすような集合族 $\mathcal{S}(X)$ が与えられれば, これから開基底 $\mathcal{B}(X)$ をつくり, さらに開集合族 $\mathrm{Open}(X)$ をつくることができる．この位相を集合族 $\mathcal{S}(X)$ から**生成された位相**ということがある．一般には位相空間 $(X, \mathrm{Open}(X))$ に対し, 開基底, 部分開基底は一意的に定まるわけではない．しかし, 部分開基底の公理は極めて緩い条件なので, 一般には集合 X への位相の入れ方はきわめてたくさんあると推察される．

定義 5.2.6 (近傍基底). 任意の $x \in X$ に対し集合族 $\mathcal{B}(x)$ が次の性質を満たすとき $\mathcal{B}(x)$ を x の**近傍基底** (または **基本近傍系**) という．

x の任意の近傍 V に対し, $B \subset V$ なる $B \in \mathcal{B}(x)$ が存在する．

$\mathcal{B}(X)$ の元を**基本近傍**という．このとき近傍基底 $\mathcal{B}(x)$ は (b1)–(b3) を満たす．

(b1) すべての $B \in \mathcal{B}(x)$ に対し, $x \in B$.

(b2) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(x)$ に対し, $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ なる $B_3 \in \mathcal{B}(x)$ が存在する．

(b3) 任意の $B \in \mathcal{B}(x)$ に対し，ある $B_1 \in \mathcal{B}(x)$ が存在して，$y \in B_1$ ならば $B \in \mathcal{B}(y)$.

この条件 (b1)-(b3) を**近傍基底の公理**という．任意の $x \in X$ に対し近傍基底の公理を満たすような集合族 $\mathcal{B}(x)$ が与えられているとき,

$$\mathrm{Open}(X) := \{U \subset X \mid \forall x \in U\ \exists B \in \mathcal{B}(x) \text{ s.t. } B \subset U\}$$

とおくとこれは開集合の公理を満たすので, X は位相空間となる．この位相に関して $\mathcal{B}(x)$, $x \in X$, は近傍基底になる．この位相を近傍基底から生成される位相という．

例 5.2.7 (距離位相の近傍基底). 距離空間 (X, d) に対し

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1(x) &= \left\{ B\big(x; \frac{1}{n}\big) \;\middle|\; n = 1, 2, \ldots \right\} \\
\mathcal{B}_2(x) &= \{B\big(x; \varepsilon\big) \mid \varepsilon \in \mathbb{Q}\} \\
\mathcal{B}_3(x) &= \{B\big(x; \varepsilon\big) \mid \varepsilon > 0\} \\
\mathcal{B}_4(x) &= \{x \text{ を含む開球 }\}
\end{aligned}$$

はどれも近傍基底の公理を満たす．これから定まる X のどの位相も**距離位相**と一致する．

第 1 章の距離空間に於ける議論で,「a 中心の開球」や「開球」としたところは，それぞれ「a の基本近傍 (近傍基底)」や「基本開集合 (開基底)」と読み替えることにすれば，位相空間に於いても距離空間と並行に議論できる場合が多い.

5.3　開核，閉包

X に位相が入っているとき, 距離空間のときと同様にして閉集合, 近傍, 内点, 外点, 境界点, 集積点, 孤立点の概念を定義する事ができる. 内点集合, 境界点集合, 閉包の定義も同様である. 繰り返しになるが，述べておく.

定義 5.3.1 (内点, 外点, 境界点, 集積点, 孤立点). 位相空間 X の部分集合 A の内点, 外点, 境界点, 集積点, 孤立点の概念を次で定義する.

- x は A の**内点** $\iff x \in U \subset A$ を満たす開集合 U が存在する.
- x は A の**外点** $\iff x \in U,\ A \cap U = \emptyset$ を満たす開集合 U が存在する.
- x は A の**境界点** $\iff x$ を含む任意の開集合 U は $A \cap U \neq \emptyset$ かつ $(X - A) \cap U \neq \emptyset$ を満たす.
- x は A の**集積点** $\iff x$ を含む任意の開集合 U に対し $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.
- x は A の**孤立点** $\iff A \cap U = \{x\}$ を満たす開集合 U が存在する.

定義 5.3.2 (開核，境界，閉包). 位相空間 X の部分集合 A に対し，A の**開核** (interior) A° (内点集合という事もある)，**境界** (boundary) ∂A, A の**閉包** (closure) $\overline{A}$ を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
A^\circ &:= \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点}\} \\
\partial A &:= \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の境界点}\} \\
\overline{A} &:= A \cup \partial A
\end{aligned}
$$

開核 A° を $\mathrm{Int}(A)$ と書き，閉包 $\overline{A}$ を $\mathrm{cl}(A)$ と書く事もある．閉包 $\overline{A}$ の元を A の**触点** (adherent point) ということもある．A の集積点全体を A^a で表し，A の孤立点全体を A^i で表すと，$A^a = A^\circ \cup \partial A$ であり，$\overline{A} = A^a \cup A^i$. A の点は A の孤立点でなければ A の集積点である．特に $A^i \subset A \subset A^i \cup A^a$.

次の性質は距離空間のときと同様に証明できる.

命題 5.3.3 (開核と閉包の双対性).
(i)　$X - A^\circ = \overline{X - A}$,　$A^\circ = X - \overline{X - A}$.
(ii)　$X - \overline{A} = (X - A)^\circ$,　$\overline{A} = X - (X - A)^\circ$.
(iii)　A° は A に含まれる最大の開集合である.
(iv)　$\overline{A}$ は A を含む最小の閉集合である.

定理 5.3.4 (開核の性質，開核による位相の特徴づけ). 位相空間 X の部分集合 A，B に対し，次が成り立つ．

$$X^\circ = X, \quad A^\circ \subset A, \quad (A^\circ)^\circ = A^\circ, \quad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

また，この 4 つの性質を満たす作用素 $2^X \to 2^X$, $A \mapsto A^\circ$ が与えられたとき，

$$\mathrm{Open}(X) = \{A \subset X \mid A^\circ = A\}$$

とおくと，X に位相空間の構造が定まり A° はこの位相に関する開核になる．

定理 5.3.5 (閉包の性質，閉包による位相の特徴づけ). 位相空間 X の部分集合 A，B に対し，次が成り立つ．

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

また，この 4 つの性質を満たす作用素 $2^X \to 2^X$, $A \mapsto \overline{A}$ が与えられたとき，

$$\mathrm{Open}(X) = \{A \subset X \mid \overline{X - A} = X - A\}$$

とおくと，X に位相空間の構造が定まり $\overline{A}$ はこの位相に関する閉包になる．

定義 5.3.6 (稠密，全粗). A を位相空間 X の部分集合とする．

- A が X の中で**稠密** (dense) $\Longleftrightarrow \overline{A} = X$
- A が X の中で**全疎** (nowhere dense) $\Longleftrightarrow (\overline{A})^\circ = \emptyset$

補題 5.3.7. 位相空間 X の部分集合 A に対し，次の条件は同値である．
(i) A は稠密．
(ii) A を含む閉集合は X しかない．
(iii) 空でない基本開集合は A の点を含む．
(iv) A の補集合の開核は空集合．

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): A を含む閉集合 F をとると $X = \overline{A} \subset \overline{F} = F$ より $F = X$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): 空でない開集合 U が A と交わらないすると $A \subset X - U \subsetneqq X$．$X - U$ は閉集合なので，これは (ii) に矛盾．
(iii)$\Longrightarrow$(iv): $(X - A)^\circ \neq \emptyset$ とする．するとこれは基本開集合だから $B \subset (X - A)^\circ$ なる基本開集合 B が存在する．$B \subset (X - A)^\circ \subset X - A$ より $A \cap B = \emptyset$.
(iv)$\Longrightarrow$(i): $X - \overline{A} = (X - A)^\circ = \emptyset$ より $\overline{A} = X$. □

5.4 可算公理

定義 5.4.1 (可算公理). X の各点 x が高々可算な近傍基底を持つとき, X は**第一可算公理**を満たすという. また高々可算個の開基底がとれるとき, X は**第二可算公理**を満たすという.

命題 5.4.2. 距離空間は第一可算公理を満足する.

証明　例 5.2.4 より従う. □

命題 5.4.3. 位相空間が第二可算公理を満足すれば，第一可算公理も満足する.

証明　$\mathcal{B}(X) = \{B_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ を可算開基底とすれば $x \in X$ に対し $\mathcal{B}(x) = \{B_n \mid x \in B_n\}$ は可算近傍基底になる. □

定義 5.4.4 (可分). 位相空間 X は，高々可算かつ稠密な部分集合が存在するとき**可分** (separable) という.

定理 5.4.5. 第二可算公理を満たす位相空間は可分である.

証明　位相空間 X の可算開基底 $\mathcal{B}(X) = \{B_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ をとる．$b_n \in B_n$, $n = 1, 2, \dots,$ なる b_n をとるとこれらの点全体 $D = \{b_1, b_2, \dots\}$ は高々可算個である．任意の $x \in X$ に対し，x の任意近傍 V をとると $x \in B_n \subset V$ なる B_n があるから $b_n \in V$ である．すなわち x の任意の近傍に D の点があるので，D は稠密部分集合である. □

距離空間ではこの定理の逆が成立する.

定理 5.4.6. 可分距離空間は第二可算公理を満たす.

証明　X を可分距離空間，$A \subset X$ を稠密部分集合とする.

$$\mathcal{B}(X) = \{B(a; \varepsilon) \mid a \in A, \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}\}$$

は開基底となることを示す．X の任意の開集合 U と任意の $x \in U$ に対し，$x \in B \subset U$ なる開球 $B = B(a; \varepsilon_1)$ をとる．$\overline{A} = X$ より，$a \in B(x; \varepsilon_1/3) \cap A$ なる a が存在する．$\varepsilon_1/3 < \varepsilon < \varepsilon_1/2$ なる有理数 ε をとると $x \in B(a; \varepsilon) \subset U$. □

定義 5.4.7 (点列の収束). 位相空間 X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ が x に**収束**するとは次の同値な条件を満たすときを言う.

(i) $\mathcal{B}(x)$ を近傍基底とすると，任意の $B \in \mathcal{B}(x)$ に対し，
$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(ii) $\mathcal{B}$ を開基底とすると，$x \in B$ なる任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し，
$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(iii) x の任意の近傍 V に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(iv) x を含む任意の開集合 U に対し，$x_n \in B$ $(n \geq n_0)$ なる n_0 が存在.

(x_n) が x に収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{または} \quad x_n \to x$$

と書く.

定理 4.4.3 の証明と同様にして次を示すことが出来る．

定理 5.4.8. 位相空間 X の部分集合 A に対し

$$\overline{A} \supset \{a \in A \mid A \text{ の点列 } (x_n) \text{ で } a \text{ に収束するものが存在する }\}$$

が成り立つ．さらに第一可算公理を仮定すれば等号が成立．

第一可算公理を仮定しなければ等号は成立しない．(例 6.1.8)

定義 5.4.9 (開被覆). 位相空間 X に対し,

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad U_\lambda \text{は } X \text{ の開集合}$$

を満たすような $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**開被覆**という. 特に, Λ が有限集合 (または可算集合) のとき $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の**有限開被覆** (または **可算開被覆**) という．一般の開被覆では，Λ は有限集合や可算集合とは限らないことに注意しておこう．

二つの開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$ を考える．単射 $\varphi : \Lambda \to M$ が存在して, $U_\lambda = V_{\varphi(\lambda)}$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$ が成り立つとき $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\{V_\mu\}_{\mu \in M}$ の**部分被覆**であるという.

X の部分集合 A に対し,

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, \quad U_\lambda \text{は } X \text{ の開集合}$$

を満たすような $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の**開被覆**という．Λ が有限集合 (または可算集合) のとき A の**有限開被覆** (または **可算開被覆**) という．A の部分被覆も X の時と同様に定義する．

定義 5.4.10 (リンデレーフ空間). X の任意の開被覆が可算部分被覆を持つとき X は**リンデレーフ空間** という.

定理 5.4.11. 第二可算公理を満たす位相空間はリンデレーフ空間である.

証明 $X = \bigcup U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, を位相空間 X の任意の開被覆とし，$\mathcal{B}(X) = \{B_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ を可算開基底とする．$x \in X$ に対し，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し，$x \in U_\lambda$ であるが，$B_n \subset U_\lambda$ となる n も存在する．任意の $x \in X$ に対しこのような U_λ と B_n をとると，このような B_n 全体は $\mathcal{B}(X)$ の部分族であり，それを $\{B_{n_i} \mid i = 1, 2, \dots\}$ と書く．$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_{n_i}$ に注意する．$B_{n_i} \subset U_{\lambda_i}$ なるように λ_i をとると $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\lambda_i}$ となる． □

例 5.4.12. $\mathbb{R}$ の上半開区間位相 (例 5.1.10) は次を満たす.

(i) 第一可算公理を満たす.

(ii) 第二可算公理を満たさない.

(iii) 可分 ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)

(iv) リンデレーフ空間である.

$\mathbb{R}^2$ に，$\mathbb{R}$ の上半開区間位相空間の直積位相をいれると次を満たす.

(i)　第一可算公理を満たす.

(ii)　第二可算公理を満たさない.

(iii)　可分 ($\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2$)

(iv)　リンデレーフ空間でない.

(v)　部分空間 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ は離散位相空間であり可分でない.

5.5 連続写像

定義 5.5.1 (連続写像). 位相空間 X, Y 間の写像 $f : X \to Y$ が X の点 a で**連続である**とは, 次の同値な条件が成り立つ事である.

(i) $f(a)$ の (基本) 近傍 B' に対し $f(B) \subset B'$ (または，同じことだが $B \subset f^{-1}(B')$) となる a の (基本) 近傍 B が存在する.

(ii) $f(a)$ を含む任意の (基本) 開集合 B' に対し $f(B) \subset B'$ (または，同じことだが $B \subset f^{-1}(B')$) となる a を含む (基本) 開集合 B が存在する.

(iii) $f(a)$ の任意の近傍 V に対し $f^{-1}(V)$ は a の近傍.

X の各点で連続であるような写像を**連続写像**という.

定理 5.5.2 (一点での連続性の特徴づけ). 位相空間 X, Y 間の写像 $f : X \to Y$ に関する次の条件について (i)$\Longleftrightarrow$(ii)$\Longrightarrow$(iii) が成り立つ.

(i) $f : X \longrightarrow Y$ は点 $a \in X$ で連続.

(ii) X の任意の部分集合 A に対し，$a \in \overline{A}$ ならば $f(a) \in \overline{f(A)}$

(iii) 点列 (x_n) が a に収束すれば，点列 $(f(x_n))$ は $f(a)$ に収束する.

X が第一可算公理を満たせば，(iii)$\Longrightarrow$(i) も成り立つ.

定義 5.5.3 (連続写像). 位相空間 X から位相空間 Y への写像 $f : X \to Y$ について次の条件は同値である. この条件の内少なくとも一つ (したがって全部) が成り立つとき f は**連続写像**であるという.

(i) 任意の開集合の f による逆像が開集合である.

(ii) 任意の閉集合の f による逆像が閉集合である.

(iii) 任意の基本開集合の f による逆像が開集合である.

(iv) 部分開基底の任意の元の f による逆像が開集合である.

(v) 任意の $x \in X$ に対し $f(x)$ の近傍の f による逆像が x の近傍である.

(vi) 任意の $x \in X$ と $f(x)$ の任意の近傍 V に対し, $f(U) \subset V$ なる x の近傍 U が存在する.

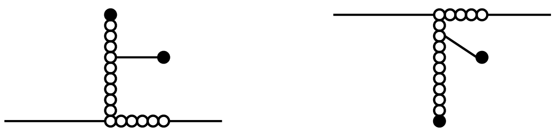
(vii) 任意の $A \subset X$ に対し $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

系 5.5.4 (位相の強弱). 集合 X に 2 つの位相 $\mathrm{Open}_1(X)$, $\mathrm{Open}_2(X)$ が入っているとする．恒等写像 $(X, \mathrm{Open}_1(X)) \to (X, \mathrm{Open}_2(X))$ が連続である事は，次の各条件と同値である．

	$(X, \mathrm{Open}_1(X))$ は $(X, \mathrm{Open}_2(X))$ より強い位相である．
開集合	$\mathrm{Open}_1(X) \supset \mathrm{Open}_2(X)$
閉集合	$\mathcal{F}_1(X) \supset \mathcal{F}_2(X)$.
開基底	$\mathcal{B}_2(X) \subset \mathrm{Open}_1(X)$.
部分開基底	$\mathcal{S}_2(X) \subset \mathrm{Open}_1(X)$.
近傍	任意の $x \in X$ に対し $\mathcal{V}_1(x) \supset \mathcal{V}_2(x)$.
閉包	任意の $A \subset X$ に対し $\mathrm{cl}_1(A) \subset \mathrm{cl}_2(f(A))$.

定義 5.5.5. 位相空間 X 上の実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**上半連続** (**下半連続**) であるとは, $\mathbb{R}$ に上半位相 (下半位相) をいれたとき $f : X \to \mathbb{R}$ が連続となるときを言う.

例 5.5.6. $\mathbb{R}$ に距離位相をいれて得られる位相空間上の上半連続関数, 下半連続関数のグラフの例をあげておく. 横軸が定義域 (距離位相), 縦軸が値域 (上半位相, 下半位相) の $\mathbb{R}$ である.



定義 5.5.7 (位相の誘導). 集合 X, Y の間に写像 $f : X \longrightarrow Y$ があるとする.

(i) Y が位相空間ならば,

$$\mathrm{Open}(X) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathrm{Open}(Y)\}$$

を開集合全体とするような位相を X にいれる事ができる. これは f を連続とするような最も弱い (粗い) 位相である. これを Y から f により誘導された位相という.

(ii) X が位相空間ならば,

$$\mathrm{Open}(Y) = \{A \mid f^{-1}(A) \in \mathrm{Open}(X)\}$$

を開集合全体とするような位相を Y にいれる事ができる．これは f を連続とするような最も強い (細かい) 位相である．

定義 5.5.8 (部分位相空間). A が位相空間 X の部分集合ならば，包含写像 $\iota : A \to X$, $\iota(a) = a$, が連続になるような A の最弱の位相が考えることが出来る. この位相空間を**部分位相空間**という．

$$\mathrm{Open}(A) = \{U \cap A : U \in \mathrm{Open}(X)\}$$

となる．部分集合については，特に断らなければ，この誘導された位相をいれておく．

定義 5.5.9 (積位相空間). 2つの位相空間 X, Y に対し

$$\{A \times B \subset X \times Y \mid A \in \mathrm{Open}(X), B \in \mathrm{Open}(B)\}$$

を開基底とするような位相を $X \times Y$ にいれる事ができる．これを**積位相空間**とよぶ．これは自然な射影 $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$ を連続にするような最も弱い (粗い) 位相である．

定義 5.5.10 (商位相空間). 位相空間 X に同値関係 $\sim$ があるとき，その同値関係による $Y = X/\sim$ とすれば，自然な写像 $X \to Y = X/\sim$ が連続になるような最強の位相を Y に定めることが出来る．この位相空間を**商位相空間**という．商集合については，特に断らなければ，この誘導された位相をいれておく．

5.6 開写像，閉写像，同相写像

定義 5.6.1 (開写像, 閉写像). 写像 $f : X \to Y$ において X の任意の開集合の f による像が Y の開集合なら f は**開写像** (open map) であるという．同様に X の任意の閉集合の f による像が Y の閉集合なら f は**閉写像** (closed map) であるという．

定理 5.6.2. 写像 $f : X \to Y$ について次は同値.

(i) f は開写像
(ii) X の任意の部分集合 A に対し $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$
(iii) 開基 $\mathcal{B}(X)$ の元 B に対し $f(B)$ は開集合.
(iv) $x \in X$ の開近傍 V に対し，$f(V) \supset W$ なる $f(x)$ の開近傍 W が存在する.

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): $A^\circ \subset A$ より $f(A^\circ) \subset f(A)$. f は開写像なので $f(A^\circ)$ は開集合. $(f(A))^\circ$ は $f(A)$ に含まれる最大の開集合なので $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): $B \in \mathcal{B}(X)$ ならば $B^\circ = B$. これより，$f(B) = f(B^\circ) \subset (f(B))^\circ \subset f(B)$ よって $(f(B))^\circ = f(B)$ なので $f(B)$ は開集合である.
(iii)$\Longrightarrow$(iv): x の開近傍 V に対し，$x \in B \subset V$ なる $B \in \mathcal{B}(X)$ が存在する．$W = f(B)$ と置けばよい.
(iv)$\Longrightarrow$(i): U を開集合とする．仮定より，各 $y \in f(U)$ に対し開近傍 W_y が存在して $f(U) = \cup_{y \in f(U)} W_y$ となり $f(U)$ は開集合となる. □

定理 5.6.3. 写像 $f : X \to Y$ について次は同値.

(i) f は閉写像
(ii) X の任意の部分集合 A に対し $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): $A \subset \overline{A}$ より $f(A) \subset f(\overline{A})$ である．この閉包をとって $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A})$. 最後の等号は f は閉写像なので $f(\overline{A})$ は閉集合である事より従う.
(ii)$\Longrightarrow$(i): A を閉集合とすると，$f(A) \subset \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$ となり $\overline{f(A)} = f(A)$. よって $f(A)$ は閉集合である. □

演習 5.6.4. $f : X \to Y$ に対し次は同値.

(i) f は閉写像.

(ii) 開集合 U に対し $\{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\}$ は開集合.

(iii) 閉集合 F に対し $\{y \in Y : f^{-1}(y) \cap F \neq \emptyset\}$ は閉集合.

例 5.6.5. X, Y を位相空間とするとき, 射影 $p : X \times Y \to X$ は連続な開写像である.

例 5.6.6. 一般には射影は閉写像とならない. 例えば, 射影 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, は距離位相に関して閉写像でない. なぜなら $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であるが, その像 $p(A) = (0, \infty)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合でないからである.

例 5.6.7. 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ に距離位相をいれておく. このとき定数でない正則関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は開写像である.

例 5.6.8. 距離空間 $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像の例.

(i) $f(x) = x^2$ は連続な閉写像であるが開写像でない.
なぜなら $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

(ii) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ は連続写像であるが開写像でも閉写像でもない. なぜなら $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$ は開集合でも閉集合でもない.

定義 5.6.9 (同相写像). 写像 $f : X \to Y$ が**同相写像** (homeomorphism) とは，f は全単射で，かつ f, f^{-1} が連続なるときを言う．このとき $f : X \xrightarrow{\simeq} Y$ と書く．位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき，X と Y は**同相である**といい，$X \simeq Y$ と書く.

次は定義から明らかであろう.

定理 5.6.10. 全単射 $f : X \to Y$ について次は同値.

(i) f は同相写像.

(ii) f は連続な開写像.

(iii) f は連続な閉写像.

(iv) X の任意の部分集合 A に対し $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

定義 5.6.11 (埋め込み). 写像 $f : X \to Y$ が**埋め込み** (embedding) とは，f が X から $f(X)$ への同相写像を定めるときを言う.

5.7 分離公理

定義 5.7.1 (ハウスドルフ空間). 位相空間 X が**ハウスドルフ空間** (Hausdorff space) であるとは, 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ なるものが存在するときをいう.

ハウスドルフ空間が重要なのは次の定理による.

定理 5.7.2. ハウスドルフ空間では収束する点列の極限は唯一つである.

距離空間はハウスドルフ空間である. 擬距離空間はハウスドルフ空間とは限らない.

例 5.7.3. 余有限位相はハウスドルフ空間ではない. しかしながら任意の収束点列の極限は唯一つである.

例 5.7.4 (ザリスキ位相). $f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, k$, を n 変数の多項式とする.

$$F(f_1, \dots, f_k) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, .i = 1, \dots, k\}$$

なる形の $\mathbb{R}^n$ の部分集合全体は閉集合の公理を満たす. このタイプの集合のみを閉集合とする位相を $\mathbb{R}^n$ の**ザリスキ位相** (Zariski topology) と言う. ザリスキ位相はハウスドルフでない.

定理 5.7.5 (ハウスドルフ空間の特徴づけ). 次は同値.

(i) X はハウスドルフ空間である.

(ii) $x \in X$, $y \neq x$ に対し $y \notin \overline{U}$ なる x の開近傍 U が存在する.

(iii) 任意の $x \in X$ に対し, $\cap\{\overline{V} : V$ は x の開近傍 $\} = \{x\}$.

(iv) 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合である.

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): $y \neq x$ とすると, $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V で $x \in U, y \in V$ なものがある. このとき $y \notin \overline{U}$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): $\supset$ は明らか. $\subset$ を示す. $y \neq x$ とすると $y \notin \overline{U}$ なる y の開近傍 U がある.
(iii)$\Longrightarrow$(iv): まず $U \cap V = \emptyset \Longleftrightarrow (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ に注意する. $(X \times X) - \Delta$ が開集合であることを示す. 任意の $(x, y) \in (X \times X) - \Delta$ に対し $x \neq y$. (iii) より, $y \notin \overline{U}$ なる x の開近傍 U が存在する. $U \times (X - \overline{U}) = \emptyset$ より, $U \times (X - \overline{U})$ は (x, y) を含む開集合.
(iv)$\Longrightarrow$(i): $x \neq y$ ならば $(x, y) \notin \Delta$. Δ は閉集合だから $(x, y) \in U \times V$ なる開集合 U, V で $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ なるものが存在する. □

命題 5.7.6. ハウスドルフ空間では一点は閉集合である.

命題 5.7.7. ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフである.

定理 5.7.8. 位相空間 X から ハウスドルフ空間 Y への連続写像 $f, g : X \to Y$ をとる.

(i) 一致点集合 $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は閉集合.

(ii) f のグラフ $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ は閉集合.

証明 (i): $F : X \to Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (f(x), g(x))$, は連続写像. Y は ハウスドルフ空間なので Δ は $Y \times Y$ の閉集合である. よって $E = F^{-1}(\Delta)$ も閉集合である.
(ii): 写像 $F : X \times Y \to Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (f(x), y)$, に (i) を適用すればよい. □

定理 5.7.9. 位相空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続写像 $f, g : X \to Y$ は X の稠密集合上で一致すれば X 全体で一致する.

証明　前定理の証明より，一致点集合 $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ は閉集合である．仮定より A は稠密集合を含むので，A 自身が稠密である．よって $A = \overline{A} = X$ □

定義 5.7.10 (分離公理). 位相空間 X に対し，次の条件を**分離公理**と呼ぶ．

- T_0　X の任意の 2 点に対し，どちらか一方の開近傍で他を含まないものが存在する．
- T_1　X の任意の 2 点 x, y に対し，x の開近傍で y を含まないものが存在する．
- T_2　X の任意の 2 点 x, y に対し，x，y の開近傍で互いに交わらないものが存在する．
- T_3　X の任意の点 x と任意の閉集合 F に対し，$x \in U$，$F \subset V$ なる開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset$ なるものが存在する．
- T_4　X の互いに交わらない任意の閉集合 F, G に対し，$F \subset U, G \subset V$ なる開集合 U, V で $U \cap V = \emptyset$ なるものが存在する．

条件 T_i を満たす空間を T_i 空間という．T_2 空間はハウスドルフ空間の事である．

定理 5.7.11.

- (i)　$T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$
- (ii)　$T_1 \Longleftrightarrow$ 任意の $x \in X$ に対し $\{x\}$ は閉集合である．
- (iii)　$T_3 \Longleftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と x を含む開集合 U に対し，$x \in V \subset \overline{V} \subset U$ を満たす x の開近傍 V が存在する．
- (iv)　$T_4 \Longleftrightarrow$ 任意の閉集合 F とそれを含む開集合 U に対し，$F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ を満たす開集合 V が存在する．

証明　(i): 明らか．
(ii): 任意 $x \in X$ に対し $\{x\}$ は閉集合 $\Longleftrightarrow$ 任意 $x \in X$ に対し $X - \{x\}$ は開集合
$\Longleftrightarrow$ 任意 $x \in X$ に対し，任意の $y \in X - \{x\}$ は $X - \{x\}$ 内に開近傍を持つ
$\Longleftrightarrow$ 任意 $x \in X$ と任意の $y \in X - \{x\}$ に対し $y \in U \subset X - \{x\}$ なる開集合 U が存在
$\Longleftrightarrow T_1$
(iii): X を T_3 空間とする．$x \in X$ を含む開集合 U をとる．$X - U$ は x を含まない閉集合だから，互いに交わらない開集合 V, W が存在して $x \in V$, $X - U \subset W$．$V \cap W = \emptyset$ なので $V \subset X - W$ であるが $X - W$ は閉集合なので $\overline{V} \subset X - W \subset U$．これより $x \in V \subset V \subset U$ を得た．
逆に，$x \in X, F$ を x を含まない閉集合とすると，$X - F$ は x を含む開集合となるから，ある開集合 U で $x \in U \subset \overline{U} \subset X - F$ となるものが存在する．このとき $V = X - \overline{U}$ とおけば，これは開集合で，$F \subset V, U \cap V = \emptyset$ となる．よって T_3 を満たす．
(iv): (iii) の証明で，点 x のところを閉集合と読み直せばよい． □

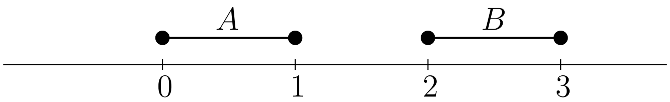
定義 5.7.12 (正則空間，正規空間).

- (i)　条件 T_1 と T_3 を満たす空間を，**正則空間** (regular space) という．
- (ii)　条件 T_1 と T_4 を満たす空間を，**正規空間** (normal space) という．

明らかに，正則空間はハウスドルフ空間である．また，正規空間は正則空間である．しかしながら，これらの逆は成立しないことが知られている．

5.8 連結性

ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $[0,1]$ はつながっているが和集合 $X=[0,1]\cup[2,3]$ はつながっていない．ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分位相空間 X の部分集合として $A=[0,1]$, $B=[2,3]$ は閉集合であるが，開集合でもある．($A=X\cap\{x<3/2\}$, $B=X\cap\{x>3/2\}$ だから) つまり X は互いに交わらない開かつ閉集合の和集合になっている．この考え方を一般化して，位相空間がつながっている (連結である) と言う事を定式化しよう．



定義 5.8.1 (連結性). 位相空間 X が **連結** (connected) であるとは次の同値な条件を満たすときを言う．

(i) X が互いに交わらない (空でない) 開集合の和集合にならない．

(ii) X 内の開かつ閉集合は $\emptyset$ か X のみに限る．

(iii) 任意の連続写像 $f:X\to\{0,1\}$ は全射でない．

ただし $\{0,1\}$ には離散位相をいれておく．部分集合 $A\subset X$ が X から誘導される位相に付いて連結のとき，A は連結であると言う．

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): A を開かつ閉な部分集合とすると $X=A\cup(X-A)$. A，$X-A$ ともに開かつ閉だから一方は $\emptyset$ で 他方は X でなければならない．
(ii)$\Longrightarrow$(iii): 連続写像 $f:X\to\{0,1\}$ をとる．$\{0\}$ は $\{0,1\}$ の開かつ閉な部分集合だから $f^{-1}(0)$ は開かつ閉．よって $f^{-1}(0)=X$ または $f^{-1}(0)=\emptyset$. よって f は全射でない．
(iii)$\Longrightarrow$(i): 空でない開かつ閉な部分集合 A, B があって，$X=A\cup B$ と書けたとすると，$f(A)=0$, $f(B)=1$ と定義すれば f は連続な全射になる． □

例 5.8.2. $\mathbb{R}$ 内の区間 (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ は連結である．

証明 X を上のどれかの区間とし，X が連結でないとする．すると，空でない互いに交わらない開かつ閉部分集合 A, B が存在して $X=A\cup B$. $a\in A$, $b\in B$, $a<b$ とする．$\alpha=\sup\{y:[a,y)\subset A\}$ と置くと，$\alpha\le b$ で $\alpha\in X$. よって $\alpha\in\overline{A}=A$. A は開集合だから $(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\subset A$ なる $\varepsilon>0$ が存在する．これは α のとり方に矛盾する． □

例 5.8.3. $\mathbb{R}$ の連結部分集合は区間である．

定理 5.8.4. 連結集合の連続写像による像は連結である．

証明 X を連結位相空間とし $f:X\to Y$ を連続写像とする．$f:X\to f(X)$ は連続写像である．もし $f(X)$ が連結でないとすると連続な全射 $g:f(X)\to\{0,1\}$ が存在する．$g\circ f:X\to\{0,1\}$ は連続な全射となり矛盾． □

系 5.8.5 (中間値の定理). 連結位相空間 X 上の連続関数 $f:X\to\mathbb{R}$ と $x,y\in X$ に対し $f(x)=a$, $f(y)=b$ ならば $a<c<b$ なるすべての c に対し $f^{-1}(c)\neq\emptyset$.

証明　$f(X)$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合だから $[a,b] \subset f(X)$.　□

定理 5.8.6. 位相空間 X の連結部分集合 A に対し $A \subset B \subset \overline{A}$ なる X の部分集合 B は連結である.

証明　連続写像 $f : B \to \{0,1\}$ をとる．仮定より $f|_A$ は全射でない．よって，例えば $f(A) = \{0\}$ とする $f(B) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{0\}} = \{0\}$ となり f は全射ではない.　□

定理 5.8.7. X の連結部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を満たせば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も連結集合である.

証明　空でない閉集合 B_1, B_2 が存在して

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = B_1 \cup B_2, \qquad B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

となったとする．$x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ をとると，$x \in B_1$ または $x \in B_2$. $x \in B_1$ とする. $B_2 \cap A_\lambda \neq \emptyset$ なる A_λ をとり，

$$B_1' = B_1 \cap A_\lambda, \qquad B_2' = B_2 \cap A_\lambda$$

と置けば，B_1', B_2' は閉集合で，

$$A_\lambda = B_1' \cup B_2', \qquad B_1' \cap B_2' = \emptyset$$

となり，A_λ の連結性に矛盾する.　□

$x \in X$ に対し x を含むすべての連結部分集合の和集合を x の**連結成分**という．前定理より，x の連結成分は x を含む最大の連結集合である．位相空間は，いくつかの連結成分に分割することが出来る．即ち，位相空間 X に対し，連結部分集合 $C_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ が存在して，

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda, \quad C_\lambda \cap C_\mu = \emptyset \ (\lambda \neq \mu)$$

と書くことが出来る.

定義 5.8.8 (完全不連結). 位相空間 X が**完全不連結**であるとは，任意の点 $x \in X$ の連結成分が $\{x\}$ のときを言う.

例 5.8.9. $\mathbb{R}$ の部分空間として，$\mathbb{Q}$ や $\mathbb{Z}$ は完全不連結である.

位相空間がつながっている事を表すのに，次の弧状連結性もよく使われる.

定義 5.8.10 (弧状連結). 位相空間 X が**弧状連結** (path-connected) であるとは，任意の $x, y \in X$ に対し連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ となるものが存在するときを言う.

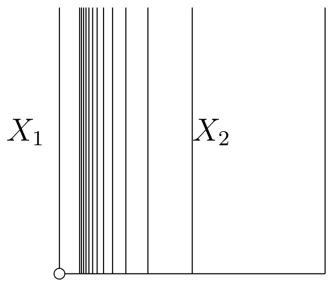
定理 5.8.11. 弧状連結空間は連結である.

証明　弧状連結位相空間 X が連結でないとする．すると空でない開かつ閉集合 A, B が存在して $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ となる．$x \in A$, $y \in B$ として，連続写像 $\gamma : [0,1] \to X$ で $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ となるものをとる．$[0,1]$ は連結だから $Y = \gamma([0,1])$ も連結であるところが $A' = Y \cap A$, $B' = Y \cap B$ とおくと，$Y = A' \cup B'$, $A' \cap B' = \emptyset$, $A' \neq \emptyset$, $B' \neq \emptyset$. となって矛盾. □

例 5.8.12 (櫛型空間). $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X_1, X_2 を次で定義し $X = X_1 \cup X_2$ と置く.

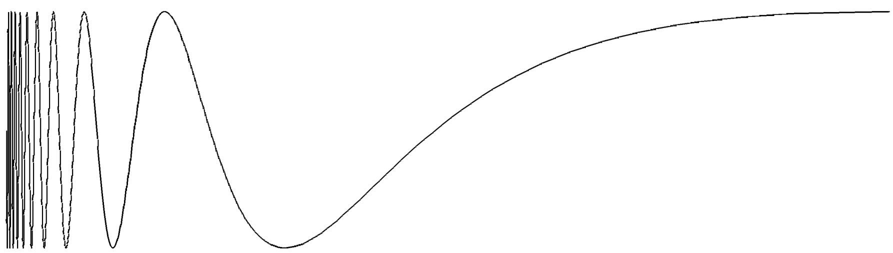
$$X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 < y \leq 1\}$$
$$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x = 1/n, 0 \leq y \leq 1, \text{または } y = 0, 0 < x \leq 1\}$$

X は $\mathbb{R}^2$ の部分空間として連結であるが，弧状連結でない.



例 5.8.13. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 Z を次で定める.

$$Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x),\ x > 0\}$$



$\overline{Z} = Z \cup Y$, $Y = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$, となる．$Z$ は弧状連結であるが $\overline{Z}$ は弧状連結ではない．$Z \subset X \subset \overline{Z}$ なる任意の X は連結なので，関数

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

のグラフは連結である．関数 $\sin(1/x)$, $x > 0$, は原点に連続には拡張し得ないことを考慮すると，関数のグラフが連結であっても，その関数は連続とは限らない事が分かる.

グラフが弧状連結であっても連続とは限らない．

例 5.8.14. 次の関数 f のグラフは弧状連結であるが，f は連続ではない．

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

弧状連結な部分集合達が共通点を持てばその和集合も弧状連結である．よって，位相空間の弧状連結な最大の部分集合として，**弧状連結成分** (path-component) を定義する事が出来る．すると，連結成分のときと同じようにして，位相空間を弧状連結成分に分割することが出来る．

補題 5.8.15. 位相空間 X に対し，次は同値．
(i)　各弧状連結成分は開集合．
(ii)　各 $x\in X$ は弧状連結近傍を持つ．

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii): 各弧状連結成分は開集合なので，$x\in X$ を含む弧状連結成分が弧状連結開近傍になる．
(ii)$\Longrightarrow$(i): C を弧状連結成分とすると $x\in C$ は弧状連結開近傍 V を持つ．$V\subset C$ より C は開集合．□

定理 5.8.16. 位相空間 X が弧状連結であることと，X が連結かつ，各 $x\in X$ が弧状連結近傍を持つことは同値．

証明　弧状連結であれば連結で，X 自身が各点の弧状連結近傍である．逆に，連結かつ各点が弧状連結近傍をもつとすると，前補題より各弧状連結成分 C は開集合である．$X-C$ は C 以外の弧状連結成分の和集合だから，開集合であり，C は閉集合でもある．よって C は X の連結成分であり，X の連結性より $X=C$．□

	部分空間	閉部分空間	開部分空間	直積空間	可算直積	商空間
T_1 空間	○	○	○	○	○	×
T_2 空間	○	○	○	○	○	×
T_3 空間	○	○	○	○	○	×
T_4 空間	×	○	×	×	×	×
第一可算	○	○	○	×	○	×
第二可算	○	○	○	×	○	×
可分	×	×	○	×	○	○
コンパクト	×	○	×	○	○	○
リンデレーフ	×	○	×	×	×	○

第6章　直積空間

6.1　直積空間とその位相

定義 6.1.1 (直積空間). 位相空間の族 X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対しその直積を次で定める．

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \{x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : x_\lambda \in X_\Lambda\}$$

各 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ が空集合でないとき，直積 X が空集合でない事を主張するのが選択公理であった．直積 X は Λ から $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への写像 f で $f(\lambda) = x_\lambda \in X_\lambda$ を満たすものと考えることが出来る．直積 X からは X_λ への射影と呼ばれる写像 p_λ を次で定義する．

$$p_\lambda : X \to X_\lambda, \qquad x = (x_\mu)_{\mu\in\Lambda} \mapsto x_\lambda$$

補題 6.1.2. $A_\lambda \subset X_\lambda$ のとき
(i) $\displaystyle\prod_\lambda A_\lambda = \bigcap_\lambda p_\lambda^{-1}(A_\lambda)$
(ii) $\displaystyle X - \prod_\lambda A_\lambda = \bigcup_\lambda p_\lambda^{-1}(X_\lambda - A_\lambda)$

定義 6.1.3 (直積位相). 直積空間 X にすべての p_λ が連続になるような最弱の位相をいれる．これを直積位相と言う．直積位相については次が成り立つ．

(i) 次の集合族が部分開基底となる．

$$\{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \mid U_\lambda \in \mathrm{Open}(X_\lambda)\}$$

(ii) 次の集合族が開基底となる．

$$\begin{aligned}&\{p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n}) \mid U_{\lambda_i} \in \mathrm{Open}(X_{\lambda_i})\}\\ &= \{\prod_\mu U_\mu \mid U_\mu \in \mathrm{Open}(X_\mu), \text{有限個の } \mu \text{ を除き } U_\mu = X_\mu\}\end{aligned}$$

定理 6.1.4. (i) $A_\lambda \subset X_\lambda$ のとき，閉包について次が成立．

$$\overline{\prod_\lambda A_\lambda} = \prod_\lambda \overline{A_\lambda}$$

(ii) $x = (x_\lambda) \in X$ を固定すると，次の集合は X の稠密集合．

$$\{y = (y_\lambda) \in X : \text{有限個の } \lambda \text{ を除き } x_\lambda = y_\lambda\}$$

(iii) $\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)^{\circ} = \prod_{i=1}^{n} A_i^{\circ}$

(iv) $\partial(\prod_{i=1}^{n} A_i) = (\partial A_1 \times \overline{A_2} \cdots \times \overline{A_n}) \cup (\overline{A_1} \times \partial A_2 \times \overline{A_3} \cdots \times \overline{A_n}) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_{n-1}} \times \partial A_n)$

証明　(i): $x = (x_\lambda) \in \overline{\prod_\lambda A_\lambda}$ x_μ を含む X_μ の開集合 U_μ をとると

$$p_\mu^{-1}(U_\mu) \cap \prod_\lambda A_\lambda = (U_\mu \cap A_\mu) \times \prod_{\lambda \neq \mu} A_\lambda \neq \emptyset$$

よって $U_\mu \cap A_\mu \neq \emptyset$. つまり $x_\mu \in \overline{A_\mu}$.
逆に $x_\lambda \in \overline{A_\lambda}$ とする．$x = (x_\lambda)$ の基本開近傍 $U = p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$ は $U_{\lambda_i} \cap A_{\lambda_i} \neq \emptyset$ なので $U \cap \prod_\lambda A_\lambda \neq \emptyset$. よって $x \in \overline{\prod_\lambda X_\lambda}$.
(ii): 基本開集合 $p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$ は $y_\lambda = x_\lambda$ $(\lambda \neq \lambda_i,\ i = 1, \ldots, n)$ なる点を含む．これはこの集合の稠密性を意味する．
(iii):

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)^{\circ} &= X - \overline{X - \prod_{i=1}^{n} A_i} \\
&= X - \overline{X - \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(A_i)} \\
&= X - \overline{\bigcup_{i=1}^{n} p_i^{-1}(X_i - A_i)} \\
&= X - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{p_i^{-1}(X_i - A_i)} && \text{(閉包の性質)} \\
&= X - \bigcup_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{X_i - A_i}) && \text{(iii)} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (X - p_i^{-1}(\overline{X_i - A_i})) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(X_i - \overline{X_i - A_i}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} A_i^{\circ}
\end{aligned}$$

(iv): (iii) と (v) より，

$$
\begin{aligned}
\partial\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) &= \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i} - \left(\prod_{j=1}^{n} A_j\right)^{\circ} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} - \prod_{j=1}^{n} A_j^{\circ} \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{A_i}) - \bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(A_j^{\circ}) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap \left(X - \bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(A_j^{\circ})\right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} (X - p_j^{-1}(A_j^{\circ})\right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap \bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}(X_j - A_j^{\circ}) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap p_j^{-1}(X_j - A_j^{\circ})\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i\neq j} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap p_j^{-1}(\overline{A_j}) \cap p_j^{-1}(X_j - A_j^{\circ})\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} \left(\bigcap_{i\neq j} p_i^{-1}(\overline{A_i}) \cap p_j^{-1}(\partial A_j)\right) \\
&= \bigcup_{j=1}^{n} \left(\prod_{i\neq j} \overline{A_i} \times \partial A_j\right)
\end{aligned}
$$

となって証明された. □

定理 6.1.5. Y を Y_λ の直積空間とする．このとき次は同値.

(i) $f : X \to Y$ が連続

(ii) 任意の λ に対し $p_\lambda \circ f : X \to Y_\lambda$ が連続.

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii) は明らかだから逆を示す．U_λ を Y_λ の開集合とすると $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ は部分開基底の元．$f^{-1}({p_\lambda}^{-1}(U_\lambda)) = (p_\lambda \circ f)^{-1}(U_\lambda)$ は X の開集合．よって f は連続. □

定理 6.1.6. 各 $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ が連続ならば，次の写像は連続である.

$$
f = \prod_\lambda f_\lambda : \prod_\lambda X_\lambda \to \prod_\lambda Y_\lambda, \qquad (x_\lambda) \mapsto (f_\lambda(x_\lambda))
$$

証明 $X = \prod_\lambda X_\lambda$, $Y = \prod_\lambda Y_\lambda$ と置き，$p_\lambda : X \to X_\lambda$, $q_\lambda : Y \to Y_\lambda$ を射影とすると，$q_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, $U_\lambda \in \mathrm{Open}(Y_\lambda)$, は Y の部分開基底．$f^{-1}(q_\lambda^{-1}(U_\lambda)) = p_\lambda^{-1}(f_\lambda^{-1}(U_\lambda))$, は開集合だから f は連続である. □

命題 6.1.7. Λ を非可算無限集合とし，$X_\lambda, \lambda \in \Lambda,$ を密着位相でない位相空間とする．このとき，直積位相空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は第一可算公理を満たさない．

証明　任意の $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ に対し，可算近傍基 $\mathcal{B}(x) = \{B_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ があるとして矛盾を導く．各 n に対し，B_n は $x = (x_\lambda)$ の近傍なので，$B_n \supset V_n \ni x$ なる x の基本近傍 V_n が存在する．直積位相の基本近傍の定義より

$$V_n = \bigcap_{i=1}^{k(n)} p_{\lambda_{n,i}}^{-1}(B_{\lambda_{n,i}})$$

を満たす，番号 $k(n)$ と Λ の点 $\lambda_{n,1}, \dots, \lambda_{n,k(n)}$ および $x_{\lambda_{n,i}}$ の近傍 $B_{\lambda_{n,i}}, i = 1, \dots, k(n),$ が存在する．$\Lambda^* = \{\lambda_{n,i} : i = 1, \dots, k(n), n = 1, 2, \dots\}$ は高々可算集合だから，$\lambda \in \Lambda - \Lambda^*$ が存在する．X_λ とは異なる x_λ の近傍 U_λ をとると $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ は x の近傍である．$p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \supset B_n$ なる n があるとすると，

$$U_\lambda = p_\lambda(p_\lambda^{-1}(U_\lambda)) \supset p_\lambda(B_n) \supset p_\lambda(V_n) = \bigcap_{i=1}^{k(n)} p_\lambda(p_{\lambda_{n_i}}^{-1}(B_{\lambda_{n_i}})) = X_\lambda$$

となって矛盾．□

例 6.1.8. Λ を非可算無限集合とする．$X = \mathbb{R}^\Lambda = \{f : \Lambda \to \mathbb{R}\}$ に

$$B(f; \lambda_1, \dots, \lambda_n, \varepsilon) = \{g \in X \mid |g(\lambda_i) - f(\lambda_i)| < \varepsilon\}$$

なる集合全体を近傍基底とするような位相をいれる．Λ 上恒等的に零となる関数を f_0 と書く．有限個の点で 0 となり 他では 1 となる関数全体を E と置くと，$B(f_0; \lambda_1, \dots, \lambda_n, \varepsilon) = \{g \in X \mid |g(\lambda_i)| < \varepsilon\}$ は 必ず E と交わるので，f_0 は E の閉包の元であるが f_0 に収束する E の点列は存在しない．実際，もし E の点列 $\{f_n\}$ が f_0 に収束したとすると $\{\lambda \in \Lambda \mid \exists n\ f_n(\lambda) = 0\}$ は高々可算集合である．Λ は非可算無限集合だから任意の n に対し $f_n(\lambda) = 1$ となる λ が存在する事になり矛盾．

定理 6.1.9. $X = \prod_\lambda X_\lambda$ とする．射影 $p_\lambda : X \to X_\lambda$ は開写像．

証明　基本開集合の像は開集合である事をみればよい．□

定理 6.1.10. $X = \prod_\lambda X_\lambda$ とする．X がハウスドルフ空間であることと，各 X_λ がハウスドルフ空間であることは同値である．

証明　各 X_λ がハウスドルフ空間であるとする．相異なる点 $x = (x_\lambda)$, $y = (y_\lambda)$ をとる．$x_{\lambda_0} \neq y_{\lambda_0}$ なる λ_0 をとる．X_{λ_0} はハウスドルフ空間なので x_{λ_0} と y_{λ_0} の交わらない近傍 U_{λ_0}, V_{λ_0} が存在する．$U = p_{\lambda_0}^{-1}(U_{\lambda_0})$, $V = p_{\lambda_0}^{-1}(V_{\lambda_0})$, とおくと，これらは開集合で，$x \in U$, $y \in V$ で，$U \cap V = \emptyset$. 逆に，X がハウスドルフ空間であるとすると，各 X_λ は $X_\lambda \times \prod_{\mu\neq\lambda}\{x_\mu\}$ に同相だから，ハウスドルフになる．□

定理 6.1.11. $X=\prod_\lambda X_\lambda$ とする．X が連結であることと，各 X_λ が連結であることは同値である．

証明　連続写像による連結集合の像は連結だから，X が連結であれば，各 X_λ は連結になる．各 X_λ が連結であり，X が連結でないとすると，$x=(x_\lambda)\in X$ をとる．x を含む X の連結成分を A とする．このとき有限個の λ を除いて $x_\lambda=y_\lambda$ となる $y=(y_\lambda)$ は x と同じ連結成分に属する．なぜなら，帰納法により，x と y は唯一つの成分が異なると仮定して証明すれば十分．$x_\lambda=y_\lambda$ $(\lambda\neq\lambda_o)$ $x_{\lambda_0}\neq y_{\lambda_0}$ とする．このとき $\bigcap_{\lambda\neq\lambda_0}p_\lambda^{-1}(x_\lambda)$ は X_{λ_0} に同相だから連結で，x y を含む．よって x と y は同じ連結成分に含まれる．ところで有限個の λ を除いて $x_\lambda=y_\lambda$ となる $y=(y_\lambda)$ 全体は X の稠密集合なので $\overline{A}=X$．よって X も連結となる．　□

演習 6.1.12. $X=\prod_\lambda X_\lambda$ とする．X が弧状連結であることと，各 X_λ が弧状連結であることは同値である．

6.2　カントール集合とペアノ曲線

離散位相空間 $\{0,1\}$ の直積位相空間 $A=\prod_{i=1}^\infty A_i$, $A_i=\{0,1\}$, $i=1,2,\dots,$ を調べてみよう．まず次の補題より A の濃度は $[0,1]$ の濃度と等しいことが分かる．

補題 6.2.1.　(1) 写像 $f:A\to[0,1]$, $a=(a_1,a_2,\dots)\mapsto\sum_{i=1}^\infty 2a_i/3^i$, は単射だが全射ではない．よって $\#A\leq\#[0,1]$.

(2) 写像 $g:A\to[0,1]$, $a=(a_1,a_2,\dots)\mapsto\sum_{i=1}^\infty a_i/2^i$, は全射だが単射ではない．よって $\#A\geq\#[0,1]$.

証明　(1)　**単射性:** A の元 $a=(a_1,a_2,\dots)$, $b=(b_1,b_2,\dots)$ で $f(a)=f(b)$ なるものを取る．

$$\frac{2a_1}{3}+\frac{2a_2}{3^2}+\cdots+\frac{2a_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{2a_k}{3^k}+\sum_{i=1}^\infty\frac{2a_{k+i}}{3^{k+i}}=\frac{2b_1}{3}+\frac{2b_2}{3^2}+\cdots+\frac{2b_{k-1}}{3^{k-1}}+\frac{2b_k}{3^k}+\sum_{i=1}^\infty\frac{2b_{k+i}}{3^{k+i}}$$

$a\neq b$ と仮定する．$k=\min\{i:a_i\neq b_i\}$ と置き，$a_k=1$, $b_k=0$ とする．両辺の最初の $k-1$ 項を消去し 3^k を掛けると，

$$2\leq 2+\sum_{i=1}^\infty\frac{2a_{k+i}}{3^i}=\sum_{i=1}^\infty\frac{2b_{k+i}}{3^i}\leq\sum_{i=1}^\infty\frac{2}{3^i}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\leq 1$$

これは矛盾．よって $a=b$ を得る．
全射でないこと: $a=(a_1,a_2,\dots)\in A$ とする．$f(a)\in[0,1]$ は判っている．
$a_1=0$ とすると

$$f(a)=\sum_{i=2}^\infty\frac{2a_i}{3^i}\leq\sum_{i=2}^\infty\frac{2}{3^i}=\frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

$a_1 = 1$ とすると

$$f(a) = \frac{2}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} \geq \frac{2}{3}$$

f の像は $(1/3, 2/3)$ の元は含まないので全射でない．

(2) **全射性** (一言で言うと，すべての実数は 2 進展開できるから全射)

$x \in [0,1]$ に対し $a_k = 0, 1,\ k = 1, 2, \ldots$ を次を満たすように定められれば，S_k は x に収束する 2 進小数を定めることになる．

$$0 \leq x - S_k \leq \frac{1}{2^k}, \qquad \text{但し} \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{2^i}$$

これは，次のように定めれば良い．

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ならば $a_1 = 0$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ならば $a_1 = 1$ とすれば，$0 \leq x - \frac{a_1}{2} \leq \frac{1}{2}$.

$a_1, \ldots, a_k$ まで定まっていると仮定する．

$0 \leq x - S_k \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ ならば $a_{k+1} = 0$, $\frac{1}{2^{k+1}} \leq x - S_k \leq \frac{1}{2^k}$ ならば $a_{k+1} = 1$ と置くと $x - S_{k+1} = x - S_k - \frac{a_{k+1}}{2^{k+1}}$ は 0 以上 $\frac{1}{2^{k+1}}$ 以下である．

単射でないこと: A の元 $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ で $g(a) = g(b)$ なるものを取る．

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{a_k}{2^k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k+i}}{2^{k+i}} = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots + \frac{b_{k-1}}{2^{k-1}} + \frac{b_k}{2^k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{k+i}}{2^{k+i}}$$

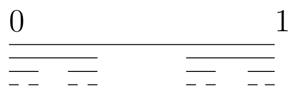
$a \neq b$ と仮定する．$k = \min\{i : a_i \neq b_i\}$ と置き，$a_k = 1$, $b_k = 0$ とする．両辺の最初の $k-1$ 項を消去し 2^k を掛けると，

$$1 \leq 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{k+i}}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{k+i}}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

よって $a_{k+i} = 0$, $b_{k+i} = 1$, $i \geq 1$ を得る． □

さて写像 f の像を**カントール集合** (Cantor set) という．カントール集合を C で表す．

$$f : A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i \to [0,1] \subset \mathbb{R}, \qquad (a_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i}$$



f は単射であるので f は A から C への全単射 φ を定める．

定理 6.2.2. $A = \prod A_i$ に直積位相，C にユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相をいれると φ は A から C への同相写像である．

証明　$a=(a_i)\in A$ の直積位相による近傍基底は

$$\langle a_{i_1},\dots,a_{i_k}\rangle := \{b=(b_i)\in A : b_{i_1}=a_{i_1},\dots,b_{i_k}=a_{i_k}\}$$

の形をしている．まず φ は連続写像である事を示す．$c\in C$ をとる．$c=\sum_{i=1}^{\infty}2a_i/3^i$ と書ける．$\varepsilon>0$ を任意にとり c の近傍 $B(c;\varepsilon)\cap C$ を考える．$\sum_{i=N}^{\infty}2/3^i<\varepsilon$ なるように N を選ぶと $f(\langle a_1,\dots,a_N\rangle)\subset B(c;\varepsilon)$．次に φ は開写像である事を示す．$a=(a_i)$ を含む近傍 $\langle a_{i_1},\dots,a_{i_k}\rangle$ をとる．$N=\max\{i_1,\dots,i_k\}$ とすれば

$$B\left(\varphi(a);\frac{1}{3^{N+1}}\right)\cap C\subset\varphi(\langle a_{i_1},\dots,a_{i_k}\rangle)$$

$\square$

同様にして，全射 g は連続な開写像であることが示される．

$$g : A=\prod_{i=1}^{\infty}A_i\to[0,1],\qquad (a_i)\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^i}$$

$k=1,2,\dots,\infty$ に対し A^k と A は同相である．なぜなら $h : A\mapsto\prod_{i=1}^{k}A$ を例えば次のように定めれば同相写像になるからである．

k が有限のとき

$$\begin{array}{ll}
A & \ni (a_1,a_2,a_3,\dots)\\
\downarrow & \\
A & \ni (a_1,a_{k+1},a_{2k+1},\dots)\\
\times & \quad\times\\
A & \ni (a_2,a_{k+2},a_{2k+2},\dots)\\
\times & \quad\times\\
\vdots & \quad\vdots\\
\times & \quad\times\\
A & \ni (a_k,a_{2k},a_{3k},\dots)
\end{array}$$

k が無限のとき

$$\begin{array}{ll}
A & \ni (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,\dots)\\
\downarrow & \\
A & \ni (a_1,a_2,a_4,a_7,\dots)\\
\times & \quad\times\\
A & \ni (a_3,a_5,a_8,\dots)\\
\times & \quad\times\\
A & \ni (a_6,a_9,\dots)\\
\times & \quad\times\\
A & \ni (a_{10},\dots)\\
\times & \quad\times\\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}$$

$k=1,2,\dots,\infty$ に対し $g : A\to[0,1]$ の誘導する連続全射 (開写像でもある)

$$G : A^k\to[0,1]^k,\qquad (a_i)\mapsto(g(a_i))$$

を考える．すると，写像 $G\circ h\circ\varphi^{-1} : C\to[0,1]^k$ は連続全射になる．この写像の i 成分を h_i とかく．h_i は C から $[0,1]$ への関数であるが，これを連続関数 $f_i : [0,1]\to[0,1]$ に拡張する事が出来る．(C は $[0,1]$ から無限個の区間を引き抜いて得られるが，引き抜かれた区間では，例えば線形になるように，拡張すればよい．) すると写像 $[0,1]\mapsto[0,1]^k$, $x\mapsto(f_i(x))$, は連続全射である．この写像を一般化されたペアノ曲線，$k=2$ のときは**ペアノ曲線**と言う．

第7章　収束

第一可算公理を満たさないような位相空間では, 点列の収束の概念を用いた条件式では，集合の閉包や写像の連続性を記述することはできない．収束の概念を用いて閉包や連続性を記述するには点列の概念を一般化したネットの収束の概念，またはそれと同等なフィルターの収束の概念を導入する必要がある．ここでは，ネットやフィルターの基本性質をまとめておこう.

7.1　ネット

位相空間 X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ を，写像 $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$, とみて，一般化したのがネットの概念である．まず擬有向集合の概念を導入する．

定義 7.1.1 (擬有向集合). $(\Lambda, \leq)$ が**擬有向集合**, であるとは次の条件を満たすときをいう.

(i)　$\lambda \in \Lambda$ ならば $\lambda \leq \lambda$.

(ii)　$\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対し $\lambda \leq \mu$, $\mu \leq \nu$ ならば $\lambda \leq \nu$.

(iii)　$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $\lambda \leq \nu$, $\mu \leq \nu$ なる Λ の元 ν が存在する.

定義 7.1.2 (ネット). 擬有向集合 Λ から位相空間 X への写像 $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$, $\lambda \mapsto \boldsymbol{x}(\lambda) = \boldsymbol{x}_\lambda$, を**ネット** (net) と言う．

$\lambda_0 \in \Lambda$ に対し Λ の部分集合 $\Lambda(\lambda_0)$ を次で定める．

$$\Lambda(\lambda_0) = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}$$

例 7.1.3 (点列). X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ に対し $\boldsymbol{x} : \mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$, はネットである．

例 7.1.4 (リーマン積分). 極限としてリーマン積分をあたえる部分和も，ネットとして捉えることができる．閉区間 $[0,1]$ の分割 $P : 0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 1$ 及び $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [a_{i-1}, a_i]$, $i = 1, \ldots, n$, の対 (P, ξ) 全体を Λ とする．$(P, \xi), (Q, \eta) \in \Lambda$ に対し，

$$(P, \xi) \geq (Q, \eta) \Longleftrightarrow P \text{ は } Q \text{ の細分}$$

と定義すると Λ は擬有向集合になる．関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\boldsymbol{x} : \Lambda \to \mathbb{R}, \qquad (P, \xi) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(a_i - a_{i-1})$$

はネットになる．

定義 7.1.5 (ネットの収束). ネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$, $\lambda \mapsto \boldsymbol{x}(\lambda) = x_\lambda$, が点 $a \in X$ に **収束**するとは，a の任意の近傍 U に対して, 適当に $\lambda_0 \in \Lambda$ を選べば

$$\boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset U, \qquad (\text{即ち}, \lambda \geq \lambda_0 \quad \text{ならば} \quad \boldsymbol{x}_\lambda \in U)$$

となるときを言う. a をネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ の極限点といい

$$\boldsymbol{x}_\lambda \to a \quad \text{または} \quad \lim_{\Lambda} \boldsymbol{x} = a$$

と書く.

定義 7.1.6 (極大ネット). ネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$, $\lambda \mapsto \boldsymbol{x}(\lambda) = x_\lambda$, が**極大ネット** (maximal net) であるとは，任意の部分集合 $A \subset X$ に対し，適当に $\lambda_0 \in \Lambda$ を選べば

$$\boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset A \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset X - A$$

が成立するときを言う.

定義 7.1.7 (部分ネット). 2つのネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$, $\boldsymbol{y} : M \to X$ に対し，写像 $\phi : M \to \Lambda$ が存在して次の条件を満たすとき $\boldsymbol{y} : M \to X$ は $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ の**部分ネット** (subnet) であるという.

(i) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \circ \phi$

(ii) 任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し, 適当に $\mu_0 \in M$ を選べば
$\phi(M(\mu_0)) \subset \Lambda(\lambda_0) \qquad (\text{即ち} \quad \mu \geq \mu_0 \quad \text{ならば} \quad \phi(\mu) \geq \lambda_0)$.

定義 7.1.8 (ネットの像). 位相空間間の写像 $f : X \to Y$ と，X のネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ に対し，$f \circ \boldsymbol{x} : \Lambda \to Y$, $\lambda \mapsto f(\boldsymbol{x}(\lambda))$, は Y のネットになる.

7.2 フィルター

位相空間 X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ に対し集合 $A_n = \{x_m : m \geq n\}$ を考えると，集合族 $\{A_n : n = 1, 2, \ldots\}$ は有限交差性を満たす. このことに注目して点列の収束の概念を一般化したのがフィルター基底及びフィルターの収束の概念である.

定義 7.2.1 (フィルター). 集合 X の部分集合族 Φ が**フィルター** (filter) であるとは次の条件を満たすときを言う.

(i) $\emptyset \notin \Phi$

(ii) $A \in \Phi$, $A \subset B$ ならば $B \in \Phi$

(iii) $A, B \in \Phi$ ならば $A \cap B \in \Phi$

例 7.2.2 (単項フィルター). $a \in X$ に対し $\Phi = \{A \in X \mid a \in A\}$ はフィルターになる.

例 7.2.3 (余有限フィルター). 無限集合 X に対し $\Phi = \{A \subset X \mid X - A$ は有限集合 $\}$ はフィルターになる.

定義 7.2.4 (フィルター基底). 集合 X の部分集合族 Ψ がフィルター Φ の**フィルター基底** (filter base) であるとは次を満たすときを言う.

$$\Phi = \{F \subset X \mid \exists B \in \Psi : B \subset F\} \tag{2.1}$$

フィルター基底は次の条件を満たす.

(i) $\emptyset \notin \Psi$

(ii) $A, B \in \Psi$ ならば $C \subset A \cap B$ なる $C \in \Psi$ が存在.

逆にこの条件を満たす Ψ が与えられたとき，(2.2) で，フィルター Φ が定まる．Φ をフィルター基底 Ψ の生成するフィルターという.

フィルター Φ は，自分自身のフィルター基底である.

定義 7.2.5 (フィルター部分基底). 集合 X の部分集合族 Ψ がフィルター Φ の**フィルター部分基底** (filter subbase) であるとは次を満たすときを言う.

$$\Phi = \{F \subset X \mid \exists S_1, \ldots, S_k \in \Psi : S_1 \cap \cdots \cap S_k \subset F\} \tag{2.2}$$

これは，集合族 $\{S_1 \cap \cdots \cap S_k : S_i \in \Psi\}$ がフィルター基底になる事と同値である．フィルター部分基底は次の条件 (**有限交叉性**) を満たす.

(i) $S_1, \ldots, S_k \in \Psi$ ならば $S_1 \cap \cdots \cap S_k \neq \emptyset$.

逆にこの条件を満たす Ψ が与えられたとき，(2.2) で，フィルター Φ が定まる．Φ をフィルター部分基底 Ψ の生成するフィルターという.

定義 7.2.6 (フィルターの収束). フィルター基底 Ψ の生成するフィルター Φ が a に**収束**するとは，次の同値な条件を満たすときを言う.

(i) a の近傍系が Φ の元である，即ち $\mathcal{V}(a) \subset \Phi$ が成り立つ.

(ii) a の任意の近傍 V に対し，$F \subset V$ なる $F \in \Psi$ が存在する.

定義 7.2.7 (フィルターの集積点). フィルター基底 Ψ の生成するフィルター Φ に対し a が フィルター Φ の（または，フィルター基底 Ψ の）**集積点** (accumulation point) であるとは，次の同値な条件を満たすときを言う.

(i) a の任意の近傍 V と，フィルター Φ の任意の元 F に対し，$F \cap V \neq \emptyset$.

(ii) a の任意の近傍 V と，フィルター基底 Ψ の任意の元 F に対し，$F \cap V \neq \emptyset$.

(iii) $a \in \bigcap_{F \in \Phi} \overline{F}$

(iv) $a \in \bigcap_{F\in\Psi} \overline{F}$

例 7.2.8. $X = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cup \{(0,0)\}$ と置く．

$$\mathrm{Open}(X) = \{A \subset X : (0,0) \notin A \text{ or } [(0,0) \in A,\ \exists N\ \forall n \geq N\ \#((X-A)\cap\{n\}\times\mathbb{N}) < \infty]\}$$

点列 (n,n), $n = 1, 2, \ldots,$ は $(0,0)$ を集積点に持つが，$(0,0)$ に収束する部分列は存在しない．

定理 7.2.9. フィルター（基底）Φ が a に収束すれば a を集積点に持つ．

定理 7.2.10. $\Psi \supset \Phi$ なるフィルター（基底）Ψ, Φ に対し，

(i) Φ が a に収束すれば， Ψ が a に収束する．
(ii) Ψ が a を集積点に持てば，Φ が a を集積点に持つ．

定理 7.2.11. フィルター（基底）Φ について，次は同値．

(i) フィルター（基底）Φ が a を集積点に持つ．
(ii) a に収束するフィルター（基底）Ψ で $\Psi \supset \Phi$ なるものが存在する．

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii): $\Psi = \Phi \cap \mathcal{V}(a)$ とおくとこれはフィルター基底で a に収束．
(ii)$\Longrightarrow$(i): Ψ が a に収束すれば a を集積点に持つ．よって Φ は a を集積点に持つ．　□

定義 7.2.12 (極大フィルター). フィルター基底 Ψ の生成するフィルター Φ が次の同値な条件を満たすとき**極大フィルター** (maximal filter)，または**ウルトラフィルター**[1](ultrafilter)，であるという．

(i) フィルター Φ' が $\Phi \subset \Phi'$ ならば $\Phi = \Phi'$.
(ii) 任意の部分集合 $A \subset X$ に対し $A \in \Phi$ または $X - A \in \Phi$ のいずれかが成立．

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii): 部分集合 A に対し $\mathcal{S} = \{C \subset X : A \cup C \in \Phi\}$ と置く．

$\mathcal{S}$ が有限交叉性を持てば，$\Phi \subset \mathcal{S}$ であるから，Φ の極大性より $\Phi = \mathcal{S}$ となる．$X - A \in \mathcal{S}$ なので $X - A \in \Phi$ がわかる．

$\mathcal{S}$ が有限交叉性を持たなければ，$S_1 \cap \cdots \cap S_k = \emptyset$ となる $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{S}$ が存在する．$A \cup S_i \in \Phi$ なので

$$A = A \cup \emptyset = A \cup \bigcap_{i=1}^{k} S_i = \bigcap_{i=1}^{k} (A \cup S_i) \in \Phi.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i): $\Phi \subsetneq \Phi'$ とすると $A \notin \Phi$ なる $A \in \Phi'$ がある．(ii) より $X - A \in \Phi \subset \Phi'$ であるが $\emptyset = A \cap (X - A) \in \Phi'$ となり，Φ' がフィルターであることに矛盾する．　□

定理 7.2.13. 任意のフィルター Φ に対し，Φ を含む極大フィルターが存在する．

[1]超フィルターという事もある．

証明　Φ のフィルター基底 Ψ をとる．$\mathcal{A}$ を Ψ を含むすべてのフィルター基底のなす族とする．$\Psi \in \mathcal{A}$ より，$\mathcal{A}$ は空集合でない．$\mathcal{A}$ に極大元があることを示せばよい．そのために Zorn の補題を用いる．よって示すべき事は，$\mathcal{A}$ が帰納的であること，即ち，$\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{E}$ が，包含関係に関して全順序集合であれば，必ず $\mathcal{A}$ の中に $\sup \mathcal{E}$ が存在すること，である．$\mathcal{E} = \{E_\lambda\} \subset \mathcal{A}$ を全順序集合とする．$E = \cup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ はフィルター基底になる（各自確かめよ）のでこれが $\sup \mathcal{E}$ である．□

この定理は極大フィルターの存在を主張している定理であるが，その構成法に付いては何の情報もない．実際，無限集合について余有限フィルターを含むような極大フィルターの具体的な構成法は知られていない．

定義 7.2.14 (フィルターの像). 位相空間間の写像 $f : X \to Y$ と，X のフィルター Φ に対し，

$$f_*(\Phi) = \{G \subset Y \mid \exists F \in \Phi\ f(F) \subset G\}$$

は Y のフィルターになる．これを，フィルター Φ の f による像と言う．これは $\{f(F) \mid F \in \Phi\}$ をフィルター基底とするフィルターである．

定理 7.2.15. 極大フィルターの連続写像による像は極大フィルターである．

証明　Φ を位相空間 X の極大フィルターとし，連続写像 $f : X \to Y$ による Φ の像 $f_*(\Phi)$ を考える．Y の部分集合 A を任意に取る．極大フィルターの極大性より，$f^{-1}(A)$ または $X - f^{-1}(A)$ は Φ の元である．よって A または $Y - A$ は $f_*(\Phi)$ の元．□

7.3　ネットとフィルターの対応

定義 7.3.1 (ネットとフィルターの対応). (i) ネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ に対し，次でフィルター $\Phi(\boldsymbol{x})$ を定める．

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \{F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda,\ \boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset F\}$$

これは $\{\boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \mid \lambda_o \in \Lambda\}$ をフィルター基底とするフィルターである．
(ii)　フィルター Φ に対し，

$$(x, F) \geq (y, G) \Longleftrightarrow F \subset G$$

とすれば，集合 $\Lambda = \{(x, F) \mid x \in F \in \Phi\}$ は擬有向集合になる．

$$\boldsymbol{x}(\Phi) : \Lambda \to X, \quad (x, F) \mapsto x$$

でネット $\boldsymbol{x}(\Phi)$ が定まる．

定理 7.3.2. フィルター Φ に対し，$\Phi(\boldsymbol{x}(\Phi)) = \Phi$.

証明　フィルター Φ に対し，$\Lambda = \{(x, F) \mid x \in F \in \Phi\}$ と置く．

$$\Phi(\boldsymbol{x}(\Phi)) = \{G \subset X \mid \exists (x, F) \in \Lambda,\ F \subset G\} = \Phi$$

□

定理 7.3.3 (ネットとフィルターの対応).

(0)　$\boldsymbol{x}$ が a に収束 $\Longleftrightarrow \Phi(\boldsymbol{x})$ が a に収束

(i)　$\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ の部分ネット $\Longrightarrow \Phi(\boldsymbol{y}) \supset \Phi(\boldsymbol{x})$

(ii)　$\boldsymbol{x}$ は極大ネット $\Longleftrightarrow \Phi(\boldsymbol{x})$ は極大フィルター

(0′)　Φ が a に収束 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}(\Phi)$ が a に収束

(i′)　$\Psi \supset \Phi \Longrightarrow \boldsymbol{x}(\Psi)$ は $\boldsymbol{x}(\Phi)$ の部分ネット

(ii′)　Φ は極大フィルター $\Longleftrightarrow \boldsymbol{x}(\Phi)$ は極大ネット

証明　(0): ネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ が a に収束
$\Longleftrightarrow a$ の任意の近傍 V に対し，$\boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset V$ なる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在
$\Longleftrightarrow \mathcal{V}(a) \subset \Phi(\boldsymbol{x}) \Longleftrightarrow$ フィルター $\Phi(\boldsymbol{x})$ が a に収束．
(i): $\boldsymbol{y} : M \to X$ は $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ の部分ネット
$\Longrightarrow \{G \subset X \mid \exists \mu_0 \in M,\ \boldsymbol{y}(M(\mu_0)) \subset G\} \supset \{F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda,\ \boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset F\}$
$\Longleftrightarrow \Phi(\boldsymbol{y}) \supset \Phi(\boldsymbol{x})$
(ii): $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ は極大ネット
$\Longleftrightarrow$ 任意の $A \subset X$ に対し A または $X - A$ は $\{F \subset X \mid \exists \lambda_0 \in \Lambda,\ \boldsymbol{x}(\Lambda(\lambda_0)) \subset F\}$ の元
$\Longleftrightarrow \Phi(\boldsymbol{x})$ は極大フィルター
(0′), (i′), (ii′) も同様だから略す．□

定理 7.3.4 (閉包の特徴づけ). $A \subset X$ に対し次は同値．

(i)　$a \in \overline{A}$

(ii)　a に収束する A のネットが存在．

(iii)　a に収束する A のフィルターが存在．

証明　(ii) $\Longrightarrow$ (i) は収束の定義を用いた標準的議論より従う．(i)$\Longrightarrow$(ii) を示す．$a \in \overline{A}$ とすると a の各近傍は A と交わる．$\Lambda = \mathcal{V}(a)$ として，$U \in \mathcal{V}(a)$ に対し $x \in U \cap A$ とすれば，ネット

$$\boldsymbol{x} : \Lambda \to X, \quad U \mapsto x$$

は，a に収束する．
(i)$\Longleftrightarrow$(iii) は (ii) と (iii) の同値性 (定理 7.3.3) より明らかであるが，直接の証明法を与えておく．
(i)$\Longrightarrow$(iii): $a \in \overline{A}$ ならば $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}(a)\}$ が求める A のフィルターである．
(iii)$\Longrightarrow$(i): A のフィルター A が a に収束すれば，各 $V \in \mathcal{V}(a)$ に対し ある $F \in \Phi$ があって $F \subset V$. これは $F \subset A$ より $F \cap A \neq \emptyset$ なので $a \in \overline{A}$.　□

定理 7.3.5 (1 点での連続性の特徴づけ). $f : X \to Y$ に対し，次は同値.

(i)　f は a で連続

(ii)　a に収束する X のネットの f による像は $f(a)$ に収束.

(iii)　a に収束する X のフィルターの f による像は $f(a)$ に収束.

証明　(i)$\Longrightarrow$(ii):標準的議論. (ii)$\Longrightarrow$(i): f が a で連続でないとすると，$f(a)$ の近傍 V' で $f^{-1}(V')$ が a の近傍でないものが存在する．このとき，a の任意の近傍 V は，$X - f^{-1}(V')$ と交わる．各 $V \in \mathcal{V}(a)$ に対し，$x \in V \cap (X - f^{-1}(V'))$ を取ると，ネット

$$\boldsymbol{x} : \Lambda \to X, \quad V \mapsto x$$

は a に収束するが，$f \circ \boldsymbol{x}$ は $f(a)$ に収束しない．(i)$\Longleftrightarrow$(iii) は (ii) と (iii) の同値性 (定理 7.3.3) より明らかであるが，直接の証明法を与えておく．

(i)$\Longrightarrow$(iii): a に収束する X のフィルター Φ をとる．$\mathcal{V}(a) \subset \Phi$ より $f(\mathcal{V}(a)) \subset f(\Phi)$. $f(\mathcal{V}(a))$ は $f(a)$ に収束するので，$f(\Phi)$ も $f(a)$ に収束する．

(iii)$\Longrightarrow$(i): $a \in \overline{A}$ ならば a に収束する A のフィルター Φ が存在する．$f(\Phi)$ は $f(a)$ に収束する $f(A)$ のフィルターなので $f(a) \subset \overline{f(A)}$. □

定理 7.3.6 (連続性の特徴づけ). $f : X \to Y$ に対し，次は同値.

(i)　f は連続

(ii)　a に収束する X のネットの f による像は $f(a)$ に収束.

(iii)　a に収束する X のフィルターの f による像は $f(a)$ に収束.

証明　前定理より明らか. □

定理 7.3.7 (ハウスドルフ空間の特徴づけ). 次は同値.

(i)　X はハウスドルフ空間.

(ii)　収束するネットの極限は唯一つに限る.

(iii)　収束するフィルターの極限は唯一つに限る.

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii) はネットの収束の定義より従う．(ii) $\Longrightarrow$ (i) を示す．X がハウスドルフ空間でないとすると, 次の条件 を満たす X の点 a, b がある : $a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ を満たす開集合 U, V は存在しない．$\Lambda = \mathcal{V}(a) \times \mathcal{V}(b)$ として，

$$(U_1, V_1) \geq (U_2, V_2) \quad \Longleftrightarrow \quad U_1 \subset U_2,\ \ V_1 \subset V_2$$

と置くと，Λ は擬有向集合になる．各 $(U, V) \in \Lambda$ に対し $x \in U \cap V$ なる x を取ると，

$$\boldsymbol{x} : \Lambda \to X, \quad (U, V) \mapsto x$$

はネットになる．構成法より，このネットは a, b 両方に収束する．

(i)$\Longleftrightarrow$(iii) は (ii) と (iii) の同値性 (定理 7.3.3 より明らか) より明らかであるが直接の証明も与えておく．

(i)$\Longrightarrow$(iii): X をハウスドルフ空間とし a に収束するフィルターをとる．$a \neq b$ ならば，$a \in U$, $b \in V$, $U \cap V = \emptyset$ なる開集合 U, V が存在する．Φ が a に収束することより $U \in \Phi$. Φ が b にも収束するとすると $V \in \Phi$ となり，フィルターの元の有限交差性に矛盾．

(iii)$\Longrightarrow$(i): X がハウスドルフ空間でないとすると，X の 2 点 a, b で任意の $U \in \mathcal{V}(a)$, $V \in \mathcal{V}(b)$ に対し $U \cap V \neq \emptyset$ なるものがある．すると $\mathcal{V}(a) \cap \mathcal{V}(b)$ が a にも b にも収束するフィルターとなる． $\square$

第8章　コンパクト性

コンパクト性は，歴史的には，距離空間に於ける可算コンパクト性や点列コンパクト性としてまず認識された．本章では，まず距離空間のコンパクト性について解説し，一般の位相空間にそれがどのように一般化されるかをみる．

8.1　距離空間におけるコンパクト性

定理 8.1.1. 距離空間 (X, d) について, 次は同値.

(i) X の任意の可算開被覆は有限部分被覆を持つ. (可算コンパクト性)
(ii) X の任意の点列は収束部分列を持つ. (点列コンパクト性)

証明　(ii)⇒(i) を示す. X の可算開被覆

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad U_i \text{は } X \text{ の開集合}$$

を考える. すべての n について $X \neq U_1 \cup \cdots \cup U_n$ と仮定して矛盾を導けばよい. さてこの仮定より

$$x_n \in X - U_1 \cup \cdots \cup U_n \tag{1.1}$$

なる x_n がとれる. 仮定より, $x_n \notin U_s$, $s = 1, \ldots, n$ である. (ii) より, X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ は収束部分列 $(x_{n_k})_{k=1,2,\ldots}$ をもつ.

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

とおく. $x \in U_m$ なる m をとる. 収束の定義よりある番号 n_0 があって

$$k \geq n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in U_m$$

とできる. n_k が m より大きくなるように k をとれるからこれは (1.1) に矛盾する.
次に (i)⇒(ii) を示す. 対偶を示せばよい. (ii) を否定すると, X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ で集積点を持たないものが存在する.

$$E = \{x_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

とおくと E は閉集合で, 集積点を持たないから

$$E \cap U(x_n; \varepsilon_n) = \{x_n\}, \quad \text{ただし} \quad U(x_n; \varepsilon_n) = \{x \in X \mid d(x, x_n) < \varepsilon_n\}$$

を満たす正の数 ε_n が存在する．すると

$$X = (X - E) \cup U(x_1, \varepsilon_1) \cup U(x_2, \varepsilon_2) \cup \cdots \cup U(x_n, \varepsilon_n) \cup \cdots$$

は可算開被覆で, 有限部分被覆をもたない. □

本節の目標は，定理 8.1.1 の 2 つの条件（可算コンパクト性と点列コンパクト性) が次の X のコンパクト性と同値である事が示すことである．

定義 8.1.2 (コンパクト). 距離空間 X の任意の開被覆が有限部分被覆を持つとき，X は**コンパクト** (compact) であるという.

注意 8.1.3. コンパクト性と可算コンパクト性は異なる条件である．例えば，非可算無限個の元を含む距離空間 (X, d) に対し，$\varepsilon > 0$ として，$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ とおくと，$\{B_\varepsilon(x)\}_{x \in X}$ は X の開被覆である．このときこれから可算個選んで X を覆えるかとどうかは，わからない．

定理 8.1.4. コンパクト距離空間の閉部分集合はコンパクトである.

証明　X をコンパクト距離空間, A をその部分集合とする．A の任意の開被覆 $A \subset \cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ が，有限部分被覆を持つことを示せばよい．A は閉集合なので $X - A$ は開集合，よって

$$X = (X - A) \cup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

X はコンパクトなので，このうち有限個を選べば X を覆うことができる．つまり，有限個の $U_{\lambda_1}, \ldots U_{\lambda_n}$ を選べば

$$X = (X - A) \cup U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$$

となり,

$$A \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n}$$

を得る． □

定理 8.1.5. コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである.

証明　X をコンパクト位相空間とし $f : X \to Y$ を連続写像とする．$f(X)$ がコンパクトであることを示す．$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ を任意の開被覆とするとき，f は連続なので，$X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$ は X は X の開被覆．X のコンパクト性より，$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ をうまく選べば $X \subset f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_n)$ となる．よって $f(X) \subset U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_n$ となる．つまり，$f(X)$ はコンパクトである． □

定理 8.1.6. 距離空間のコンパクト部分集合は閉集合である.

証明 距離空間 X のコンパクト部分集合 A をとり，$X - A$ が開集合であることを示す．$x \in X - A$ を任意に取る．任意の $y \in A$ に対し，$x \in U_x$, $y \in V_y$, $U_x \cap V_y = \emptyset$ なる開集合 U_x, V_y が存在する (ハウスドルフ性)．$A \subset \bigcup_y V_y$ となるから，A のコンパクト性より $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ となる，有限個の点 $y_1, \ldots, y_n$ を取ることができる．そこで $U = \bigcap_{i=1}^n U_i$ とおけば，これは x を含む開集合で A とは交わらない． □

定義 8.1.7. 距離空間 (X, d) の部分集合 E が**全有界** (totally bounded) とは任意の $\varepsilon > 0$ に対し，E の有限個の点 $x_1, \ldots, x_n$ で $E \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$ なるものが存在するときを言う．

定理 8.1.8. コンパクトな距離空間は全有界である．

証明 $\varepsilon > 0$ として，$B(x; \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ とおくと，$\{B(x; \varepsilon)\}_{x \in X}$ は X の開被覆である．X はコンパクトなのでこのうちの有限個が X を覆っている． □

定理 8.1.9. 点列コンパクトな距離空間は全有界である．

証明 全有界でないとすると $\varepsilon > 0$ が存在して，$B(x; \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ とおくと，X の開被覆 $\{B(x; \varepsilon)\}_{x \in X}$ を考えると，そのうちの有限個では X を覆えない．さて x_1 を任意に取り x_2 を $B(x_1; \varepsilon)$ に属さないように取る．$x_1, \ldots, x_n$ まで取れたとして，x_{n+1} を $B(x_1; \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n; \varepsilon)$ に属さないように取る．このとき

$$d(x_i, x_j) \geq \varepsilon, \qquad i \neq j$$

なので (x_i) は収束する部分列を持たない． □

定理 8.1.10. 全有界な距離空間は可分である．

証明 X を全有界な距離空間とする．定義から任意の n に対し，有限個の点 $x_1^{(n)}, \ldots, x_{i_n}^{(n)}$ が存在して，

$$X = \bigcup_{i=1}^{i_n} B(x_i^{(n)}; \varepsilon)$$

そこで

$$A = \{x_i^{(n)} : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq i_n\}$$

と置くと，これは可算集合で $\overline{A} = X$．なぜなら任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\varepsilon > 1/n$ なる n を取れば $d(x, x_i^{(n)}) < 1/n < \varepsilon$ を満たす $x_i^{(n)} \in A$ が存在するからである．よって X は可分． □

さて，定理 8.1.1 に表れた二つの条件（(i) 可算コンパクト性と (ii) 点列コンパクト性) がコンパクト性と同値である事が示そう．コンパクト性 $\Rightarrow$(i) は明らかである．逆を示す．点列コンパクトならリンデレーフ空間であることを示せばよい．点列コンパクトならば，定理 8.1.9 より X は全有界である．定理 8.1.10 より，X は可分である．定理 5.4.6 より，X は第二可算公理を満たす．よって定理 5.4.11 より，X はリンデレーフ空間である

定理 8.1.11. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A がコンパクトであるのは A が有界閉集合であることと同値である. ここで A が有界と言うのは A が原点を中心とするある開球 $B(0,\varepsilon)$ の部分集合になることである.

証明　$A \subset \mathbb{R}^n$ がコンパクトなら，定理 8.1.6 より，A は閉集合である．また A は全有界なので有界である．有界閉集合は閉球の閉部分集合なので，定理 8.1.4 より，閉球がコンパクトであることが示せればよい．閉球が点列コンパクトであることを示す． □

8.2　位相空間におけるコンパクト性

定義 8.2.1 (コンパクト). 位相空間 X の任意の開被覆が有限部分被覆を持つとき，X は**コンパクト** (compact) であるという.

定義 8.2.2 (有限交叉性). 位相空間 X の部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が**有限交叉性**をもつとは, 任意の $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda$ に対し

$$A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_n} \neq \emptyset$$

を満たすときをいう.

定理 8.2.3. 位相空間 X について次の条件は同値である.

(i) X はコンパクト.
(ii) X の閉部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもてば,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset.$$

(iii) すべての位相空間 Z に対し, 射影 $p: X\times Z \to Z$ は閉写像.
(iv) X の任意のネットは収束する部分ネットを持つ.
(v) X の任意のフィルターは集積点を持つ.
(vi) X の任意の極大ネットは収束する.
(vii) X の任意の極大フィルターは収束する.

証明　(ii)⇒(i): $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ を X の開被覆とする. $A_\lambda = X - U_\lambda$ とすれば

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X - U_\lambda) = X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \emptyset$$

よって仮定より $\{A_\lambda\}$ は有限交叉性をもたない. よって $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \Lambda$ が存在して $A_{\lambda_1} \cap \cdots \cap A_{\lambda_n} = \emptyset$. つまり $U_{\lambda_1} \cap \cdots \cap U_{\lambda_n} = X$.
(i)⇒(iii): $A \subset X\times Z$ を閉集合とする. $Z - p(A)$ が開集合であることを示す. 任意の $z \in Z - p(A)$ に対し, $V \cap p(A) = \emptyset$ なる開近傍 V を構成すればよい. $z \notin p(A)$ を固定す

る．任意の x に対し $(x,z) \notin A$ かつ A は閉集合だから X での点 x の開近傍 U_x と Z での z の開近傍 V_x が存在して $(U_x \times V_x) \cap A = \emptyset$ とできる．$X = \bigcup U_x$ で X はコンパクトなので, X の点 $x_1, \ldots, x_n$ をうまく選べば $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ とできる．$V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$ とおくと V は z の開近傍で $(X \times V) \cap A = \emptyset$, すなわち $V \cap p(A) = \emptyset$.
(iii)⇒(ii): 有限交叉性をもつ X の閉部分集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset \tag{2.1}$$

なるものがあると仮定する．$Z = \Lambda \cup \{\infty\}$ とおき

$$\{\lambda\}, \quad \Lambda(\lambda) := \{\mu \in \Lambda \mid A_\mu \supset A_\lambda\} \cup \{\infty\}, \qquad \lambda \in \Lambda$$

を開基底にするような位相を Z にいれる．

$$A = \{(x, \lambda) \in X \times Z \mid \lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda\}$$

とおくと, A は $X \times Z$ の閉集合になる．なぜなら $(x, \lambda) \in X \times Z - A$ とすると, $\lambda \neq \infty$ ならば $(X - A_\lambda) \times \{\lambda\}$ が (x, λ) を含む開集合になる．$\lambda = \infty$ のときは (2.1) より各 $x \in X$ に対しある $\mu \in \Lambda$ が存在して $x \notin A_\mu$ となる．$x \in X - A_\mu$ で $X - A_\mu$ は開集合なので $(X - A_\mu) \times \Lambda(\mu)$ が (x, ∞) を含む開集合になる．ところが $p(A) = \Lambda$ は Z の閉集合でないので (iii) が成立しない．
(ii)$\Longrightarrow$(v): $\Phi = \{F_\lambda\}$ をフィルター基底とする．F_λ は有限交差性を持つので，$\overline{F_\lambda}$ も有限交差性を持つ．(ii) より，$\cap_\lambda \overline{F_\lambda} \neq \emptyset$. よって Φ は集積点を持つ．
(v)$\Longrightarrow$(ii): $\{F_\lambda\}$ を有限交差性を持つ閉集合の族とする．すると $\Phi = \{F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n}\}$ はフィルター基底となる．Φ は集積点をもつので $\bigcap_\lambda F_\lambda = \bigcap_\lambda \overline{F_\lambda} \neq \emptyset$.
(iv)$\Longleftrightarrow$(v), (vi)$\Longleftrightarrow$(vii) は明らか．極大フィルターの存在定理（定理7.2.13）より，(vii)$\Longrightarrow$(v) も明らか．
(v)$\Longrightarrow$(vii): 極大フィルター Φ を任意に取ると，仮定よりそれはある集積点 a を持つ．よって Φ を含むフィルター Ψ で a に収束するものが存在する．極大フィルターの極大性より $\Psi = \Phi$. □

定理 8.1.6, 8.1.4, 8.1.5 とまったく同じ証明により，次が成り立つことがわかる．

定理 8.2.4. コンパクト位相空間の閉部分集合はコンパクトである．

定理 8.2.5. コンパクト集合の連続写像による像はコンパクトである．

定理 8.2.6. ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である．

定理 8.2.7. コンパクト位相空間からハウスドルフ空間への連続写像は閉写像である．

証明　X をコンパクト位相空間 Y をハウスドルフ空間とする．A を X の閉部分集合とすると，A はコンパクトである．連続写像 $f : X \to Y$ による像 $f(A)$ はコンパクトであり，Y はハウスドルフ空間だから， $f(A)$ は閉集合である． □

定理 8.2.8 (Tychonoff の定理). コンパクト位相空間 X_λ, $\lambda \in \Lambda$, の直積空間 $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ はコンパクトである．

証明　X の極大フィルター Φ を取る．$(p_\lambda)_*(\Phi)$ は極大フィルターなので，ある $a_\lambda \in X_\lambda$ に収束する．$a = (a_\lambda) \in X$ を含む基本開集合

$$U = p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_{\lambda_n})$$

をとる．$(p_{\lambda_i})_*(\Phi)$ は a_{λ_i} に収束するので，$p_{\lambda_i}(F_{\lambda_i}) \subset U_{\lambda_i}$ なる $F_{\lambda_i} \in \Phi$ が存在する．$F = F_{\lambda_1} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n}$ と置くと，$F \in \Phi$. 明らかに $F \subset U$. よって Φ は a に収束する．　□

定理 8.2.9. コンパクトハウスドルフ空間は正規空間である．

証明　X をコンパクトハウスドルフ空間とし，互いに交わらない閉集合 F, G をとる．F, G はコンパクトであることに注意しておこう．ハウスドルフ性より $x \in F$, $y \in G$ に対し，互いに交わらない開集合 $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ で $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ なるものが存在する．$y \in G$ を固定すると，$F \subset \bigcup_{x\in F} U_{x,y}$ であるが F はコンパクトであるから実はこのうちの有限個で覆えている．即ち $x_1, \ldots, x_n \in F$ をうまくとれば $F \subset U_{x_1,y} \cup \cdots \cup U_{x_n,y}$ となる．この右辺を U_y と置けば，$V_y = V_{x_1,y} \cap \cdots \cap V_{x_n,y}$ は y の開近傍であって，$U_y \cap V_y = \emptyset$ となる．$G \subset \bigcup_{y\in G} V_y$ であるが G のコンパクト性より，実はこのうちの有限個で覆えている．即ち $y_1, \ldots, y_m \in G$ をうまくとれば $G \subset V_{y_1} \cup \cdots \cup U_{y_m}$ となる．この右辺を V と置き，$U = U_{y_1} \cap \cdots \cap U_{y_m}$ と置けば，$F \subset U$, $U \cap V = \emptyset$ となるので証明が終る．　□

8.3　局所コンパクト性

位相空間 X の部分集合 A が**相対コンパクト**であるとは $\overline{A}$ がコンパクトであるときを言う．

定義 8.3.1 (局所コンパクト空間). X の各点が少なくとも一つの相対コンパクト開近傍を持つとき**局所コンパクト空間**という.

定理 8.3.2. ハウスドルフ空間 X に対し次の条件は同値である．

(i) X は局所コンパクト．
(ii) 各 $x \in X$ と x の開近傍 V に対し $x \in W \subset \overline{W} \subset V$ を満たす相対コンパクト開集合 W が存在.
(iii) 各コンパクト集合 $K \subset X$ と K を含む開集合 U に対し，$K \subset W \subset \overline{W} \subset U$ を満たす相対コンパクト開集合 W が存在.
(iv) X は相対コンパクト開集合からなる開基底を持つ．

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii): $x \in U$ かつ $\overline{U}$ がコンパクトである開集合 U が存在する．よって $\overline{U} \cap V$ は $\overline{U}$ での x の開近傍である．$\overline{U}$ はコンパクトハウスドルフ空間であるから正規空間で，x を含む $\overline{U}$ の開集合 V_1 が存在して $V_1 \subset \overline{U} \cap V$ かつ V_1 の $\overline{U}$ での閉包も $\overline{U} \cap V$ の部分集合であるように出来る. $V_1 = \overline{U} \cap U_1$ なる X の開集合 U_1 をとれば，$W = U \cap U_1$ が求めるもの．
(ii)$\Longrightarrow$(iii): コンパクト集合 K の各点 $x \in K$ に対し $\overline{V_x} \subset U$ なる x の開近傍 V_x をとる．$K \subset_{x \in K} V_x$ であるが K のコンパクト性より，このうちの有限個 $V_1, \ldots, V_n$ で覆えている．それら有限個の和集合を V とおくと，$\overline{V} = \overline{V_1} \cup \cdots \cup \overline{V_n}$ はコンパクト集合の有限個の和集合なのでコンパクトがわかる．
(iii)$\Longrightarrow$(iv): すべての相対コンパクト開集合の族を $\mathcal{B}$ と書く．一点はコンパクトなので (iii) より $\mathcal{B}$ は開基底となる．
(iv)$\Longrightarrow$(i): 自明． □

系 8.3.3. 局所コンパクトハウスドルフ空間は正則空間である．

証明 前定理の条件 (ii) より明らか． □

定義 8.3.4 (σ コンパクト). X が次の同値な条件を満たすとき σ **コンパクト** (または**無限遠で可算**) であるという.

- X がコンパクト部分集合の可算個の和集合である．
- $\overline{U_i} \subset U_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots,$ となる相対コンパクト開集合 U_i, $i = 1, 2, \ldots,$ が存在して $X = \bigcup_i U_i$.
- X は局所コンパクトリンデレーフ空間である.

8.4 パラコンパクト性

定義 8.4.1. X の二つの開被覆 $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, $\{V_\mu \mid \mu \in M\}$ をとる. $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が $\{V_\mu \mid \mu \in M\}$ の**細分**であるとは任意の $\mu \in M$ に対し $U_\lambda \subset V_\mu$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在するときをいう. $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が**局所有限**とは, 任意の $x \in X$ に対し適当な x の近傍 U をとれば $U \cap U_\lambda \neq \emptyset$ なる $\lambda \in \Lambda$ は有限個であるときをいう.

定義 8.4.2 (パラコンパクト). X の任意の開被覆が局所有限な細分を持つとき X は**パラコンパクト** であるという.

定理 8.4.3. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X については次の条件は同値.

(i) X はパラコンパクト.
(ii) X は σ コンパクト空間の自由和.

証明 例えば, 一松信, 多変数解析函数論, 培風館 (1960) 274–275 ページ □

定理 8.4.4. 距離空間はパラコンパクトである.

証明　例えば A.H.Stone, Bull. Amer. Math. Soc.,**54** (1948). 977–982. □

8.5　コンパクト化

一点コンパクト化

定理 8.5.1. 位相空間 X に 1 点 ∞ $(\notin X)$ を付け加えた集合 $X^* = X \cup \{\infty\}$ に次で位相を定める.

$$\mathrm{Open}(X^*) = \mathrm{Open}(X) \cup \{X^* - K : K \text{ は } X \text{ のコンパクト閉集合}\}$$

このとき,

(i) X^* はコンパクト位相空間になる.
(ii) X^* の部分空間としての X の位相はもとの位相に一致.
(iii) X がコンパクトでなければ X は X^* で稠密.
(iv) X^* がハウスドルフ空間 $\Longleftrightarrow$ X は局所コンパクトハウスドルフ空間

8.6　固有写像

コンパクトという概念を写像に拡張したものが，固有写像の概念である．まず距離空間の場合に述べる.

定義 8.6.1 (固有写像). 距離空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が**固有写像**であるとは次が成り立つときをいう.

$$Y \text{ の部分集合 } K \text{ がコンパクトならば, } f^{-1}(K) \text{ もコンパクト.}$$

定理 8.6.2. 距離空間 X, Y 間の連続写像 $f : X \to Y$ について次は同値である.
(i) f は固有写像.
(ii) f は閉写像で, すべての $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクト.
(iii) 点列 $(f(x_n))$ が収束する X の点列 (x_n) は，収束する部分列をもつ.

証明　(i)⇒(ii): (i) を仮定する．一点はコンパクトなので任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクト．次に f が閉写像であることを示す．$C \subset X$ を閉集合とする．$y \in \mathrm{cl}(f(C))$ をとると C の点列 $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ で $(f(x_n))_{n=1,2,\ldots}$ が y に収束するものが存在する.

$$K = \{y\} \cup \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

とおくと ($(f(x_n))$ は収束するので) K はコンパクトよって $f^{-1}(K)$ もコンパクトである. $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ はコンパクト集合 $f^{-1}(K)$ の点列なので収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\ldots}$ を持つ.

この部分列の収束先を x と書くと, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は閉集合 C の点列でもあるので C は x を含む. よって

$$y = \lim_{k\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(x) \in f(C).$$

よって $f(C)$ は閉集合である.
(ii)⇒(iii): (ii) を仮定する. 次を満たすような X の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ と $y \in Y$ があったとして矛盾を導けばよい.

(1) $f(x_n) \longrightarrow y \in Y$ $(n \longrightarrow \infty)$
(2) $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ は収束する部分列を持たない.

(2) より $E = \{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ は閉集合である. よって $f(E) = \{f(x_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$ も閉集合である. (1) より $y \in f(E)$. したがって $f(x_n) = y$ となる 番号 n が存在する. (x_n) の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ に対しても, 同様の議論ができて, $f(x_{n_k}) = y$ なる 番号 k が存在する. よって適当な部分列を取る事により有限個の n を除いては $f(x_n) = y$ となると仮定して良い. よってある番号 n_0 があって

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば} \quad y = f(x_n)$$

よって $f^{-1}(y)$ は集積点を持たない点列 $(x_n)_{n=n_0,n_0+1,\dots}$ を含むので コンパクトになり得ず矛盾.
(iii)⇒(i): 対偶を示す. K を Y のコンパクト部分集合とし, $f^{-1}(K)$ がコンパクトでないとする. すると集積点を持たない $f^{-1}(K)$ の点列 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ が存在し, $(f(x_n))_{n=1,2,\dots}$ はコンパクト集合 K の点列なので, 収束する部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ をもつ. $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ は集積点を持たないので, $\{x_{n_k}\}_{k=1,2,\dots}$ のどんな部分列も収束しない. □

例 8.6.3 (固有写像の例). Y を距離空間, K をコンパクト距離空間とする. 射影 $p : Y \times K \to Y$ は固有写像である. X を $Y \times K$ の閉部分集合とすると射影 $p : Y \times K \to Y$ の X への制限 $f : X \to Y$ も固有写像である.

固有写像の概念を距離空間でない一般の位相空間に一般化してみよう.

定義 8.6.4. 位相空間 X, Y 間の写像 $f : X \to Y$ に対し

- f が**固有写像** (proper) であるとは, Y の任意のコンパクト部分集合 K に対し, $f^{-1}(K)$ がコンパクトの時を言う.
- f が**普遍閉写像** (universally closed) であるとは, 任意の位相空間 Z に対し,

$$f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z \quad \text{は閉写像}$$

  が成り立つときを言う.
- f が**完全写像** (perfect map) であるとは, f は閉写像で, すべての $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクトであるときを言う.

定理 8.6.5. コンパクト位相空間から Hausdorff 空間への連続写像は完全写像である.

定理 8.6.6. 位相空間 X, Y 間の連続写像 $f : X \to Y$ について次は同値である.
(i)　f は普遍閉写像.
(ii)　f は完全写像.
(iii)　$f \circ \boldsymbol{x} : \Lambda \to Y$ が収束する X のネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ は，収束する部分ネットを持つ.
(iv)　$f_*(\Phi)$ が収束する X のフィルター Φ は集積点を持つ.

証明　(i)⇒(ii): 仮定より任意の位相空間 Z に対し $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ は閉写像である. Z =1 点 とすれば f は閉写像が分かる. 閉写像 $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ を $f^{-1}(y) \times Z$ に制限して得られる写像 $f^{-1}(y) \times Z \to \{y\} \times Z$ も閉写像であり定理 8.2.3 より $f^{-1}(y)$ はコンパクトであることもわかる.
(ii)⇒(iii): (ii) を仮定する. 次を満たすような X のネット $\boldsymbol{x} : \Lambda \to X$ と $y \in Y$ があったとして矛盾を導けばよい.

(1)　$f \circ \boldsymbol{x} \longrightarrow y \in Y$
(2)　$\boldsymbol{x}$ は収束する部分ネットを持たない.

(2) より $E = \boldsymbol{x}(\Lambda)$ は閉集合である. よって $f(E)$ も閉集合である. (1) より $y \in f(E)$. したがって $f(x) = y$ となる $x \in E$ が存在する. $\boldsymbol{x}$ の任意の部分ネット $\boldsymbol{x}' : \Lambda' \to X$ に対しても, 同様の議論ができて，$f(x') = y$ なる $x' \in E' = \boldsymbol{x}'(\Lambda')$ が存在する. よって適当な部分ネットを取ることにより $\boldsymbol{x} : \mathbb{N} \to X$ が存在して $x_n = \boldsymbol{x}(n)$ とおけば $f(x_n) = y$ とできる. よってある番号 n_0 があって

$$n \geq n_0 \quad \text{ならば} \quad y = f(x_n)$$

よって $f^{-1}(y)$ は集積点を持たない点列 $(x_n)_{n=n_0,n_0+1,\ldots}$ を含むので コンパクトになり得ず矛盾.
(iii)⇒(i): Z を任意の位相空間とする. $X \times Z$ の閉集合 A をとり $(f \times \mathrm{id}_Z)(A)$ の閉包に属する点 (y_0, z_0) をとる. $(y_0, z_0) \in (f \times \mathrm{id}_Z)(A)$ を示せばよい. $\{(f(x_\lambda), z_\lambda)\}$ が (y_0, z_0) に収束する A のネット $\{(x_\lambda, z_\lambda)\}$ をとる. (ii) より $\{(x_\lambda, z_\lambda)\}$ は収束する部分ネットを持つので, その極限を (x_0, z_0) とすれば A は閉集合なので $(x_0, z_0) \in A$. $(y_0, z_0) = (f(x_0), z_0) \in (f \times \mathrm{id}_Z)(A)$. □

定理 8.6.7. 位相空間 X, Y 間の連続な写像 $f : X \to Y$ について
(i)　f が普遍閉写像なら固有写像である.
(ii)　f が固有写像で Y が局所コンパクトハウスドルフ空間ならば f は完全写像である.

証明　(i): $K \subset Y$ をコンパクト部分集合とする. 定理 8.2.3 より, 任意の位相空間 Z に対し $K \times Z \to Z$ は閉写像である. 仮定より写像 $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ は閉写像であり, それを $f^{-1}(K) \times Z$ に制限して得られる写像 $f^{-1}(K) \times Z \to K \times Z$ も閉写像である.

よって合成 $f^{-1}(K)\times Z \to K\times Z \to Z$ も閉写像なので, 定理 8.2.3 より, $f^{-1}(K)$ はコンパクトである.
(ii): 任意の $y\in Y$ に対し $\{y\}$ はコンパクトなので $f^{-1}(y)$ はコンパクト. よって f は閉写像であることを示せば十分. $A\in X$ を閉集合とする任意の $y\in \mathrm{cl}(f(A))$ に対し $y\in f(A)$ を示せばよい. V を $\mathrm{cl}(V)$ がコンパクトであるような y の近傍とする. $K=f^{-1}(\mathrm{cl}(V))$ はコンパクトなので制限写像 $f|_K : K\to \mathrm{cl}(V)$ はコンパクト位相空間から Hausdorff 空間への連続写像になり定理 8.2.7 より閉写像である. よって $f(K\cap A)$ は $\mathrm{cl}(V)$ の閉集合であり $y\in f(K\cap A)\subset f(A)$ をえる. □

定理 8.6.8. 集合 X に 2 つの位相 $\mathrm{Open}_{強}(X)$ (強位相), $\mathrm{Open}_{弱}(X)$(弱位相), があり $\mathrm{Open}_{強}(X)\supset \mathrm{Open}_{弱}(X)$ と仮定する. 集合 Y にも 2 つの位相 $\mathrm{Open}_{強}(Y)$ (強位相), $\mathrm{Open}_{弱}(Y)$(弱位相), があり $\mathrm{Open}_{強}(Y)\supset \mathrm{Open}_{弱}(Y)$ と仮定する. このとき, 強弱両位相に関して連続な関数 $f: X\to Y$ が, 弱位相に関して普遍閉写像ならば, 強位相に関しても普遍閉写像である.

証明 $X^*=X\cup\{\infty\}$, $Y^*=Y\cup\{\infty\}$ とおき

$$U\in \mathrm{Open}_{弱}(X^*) \iff \begin{cases} U\not\ni\infty \text{ かつ } U\in \mathrm{Open}_{弱}(X), \text{ または} \\ U\ni\infty \text{ かつ } X^*-U \text{ は強位相に関して} \\ \text{コンパクトかつ弱位相について閉集合} \end{cases}$$

で X^* に弱位相を定義する. 同様にして Y^* にも弱位相 $\mathrm{Open}_{弱}(Y^*)$ を定義しておく. すると $f^*: X^*\to Y^*$ を $f^*|_X=f$, $f(\infty)=\infty$ で定義すると, これは弱位相に関して連続である.

$$U\in \mathrm{Open}_{強}(X^*) \iff \begin{cases} U\not\ni\infty \text{ かつ } U\in \mathrm{Open}_{強}(X), \text{ または} \\ U\ni\infty \text{ かつ } X^*-U \text{ は強位相に関して} \\ \text{コンパクト閉集合} \end{cases}$$

で X^* に強位相を定義すると, X^* はコンパクトになる. よって射影 $p: X^*\times Y\to Y$ は強位相に関して普遍閉写像である. また写像 $g: X\to X^*\times Y$, $x\mapsto (x, f(x))$, は強位相に関して連続である.

Y のネット $\{f(x_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ が強位相で y_0 に収束するような X のネット $\{x_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ をとる. $p: X^*\times Y\to Y$ は強位相で普遍閉写像なので $X^*\times Y$ のネット $\{g(x_\lambda)\}=\{(x_\lambda, f(x_\lambda))\}$ は収束する部分ネットをもつ. それを $\{(x_\mu, f(x_\mu)):\mu\in M\}$ とする. このとき X^* のネット $\{x_\mu:\mu\in M\}$ は強位相で収束するが, その収束先が ∞ でないことを示せばよい. もし ∞ に強位相で収束したとすると, 弱位相でも ∞ に収束し, $f^*: X^*\to Y^*$ は弱位相で連続であったので $y_0=\lim f^*(x_\mu)$(弱位相での収束) $=f^*(\infty)=\infty$ となり矛盾. □

第9章　完備距離空間

9.1　コーシー列と完備性

(X, d) を距離空間とする． X の部分集合 A に対し， $\delta(A)$ で A の直径を表す．即ち，

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}.$$

定義 9.1.1 (コーシー列). X の点列が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは次の条件を満たすときを言う．

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n \;\; : \forall m_1, m_2 \geq n : d(x_{m_1}, x_{m_2}) < \varepsilon$$

$A_n = \{x_m : m \geq n\}$ と置けば，この条件は次のように言い替えることができる．

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n \;\; : \delta(A_n) < \varepsilon$$

コーシー列の概念は，距離 d に依存するので，距離 d を明示して d-コーシー列と言うこともある．

例 9.1.2. $\mathbb{R}$ に於ける次の 2 種類の距離 d_e, d_φ を考える

$$d_e(x, y) = |x - y|, \quad d_\varphi(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|$$

点列 $x_n = n$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は d_e-コーシー列ではないが，d_φ-コーシー列である．(ヒント：写像 $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $x \mapsto x/(1 + |x|)$, を考えると，$d_\varphi(x, y) = d_e(f(x), f(y)))$

定理 9.1.3. 収束する点列はコーシー列である．

証明　点列 (x_n) が a に収束するとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$A_n \subset B(a; \varepsilon/2)$ なる n が存在する．よって $\delta(A_n) < \varepsilon$. □

定理 9.1.4. コーシー列の部分列はコーシー列である．

定理 9.1.5. 集積点を持つ（収束部分列を持つ）コーシー列は収束する．言い替えれば，収束しないコーシー列は収束する部分列を持たない．

証明　コーシー列 (x_n) に対し，集合 $A=\{x_n : n=1,2,\dots\}$ が 点 a を集積点に持てば，点列 (x_n) は a に収束する事を示す．前と同様に，$A_n=\{x_m : m\geq n\}$ と置く．a は A の集積点だから，任意の n に対し a は A_n の閉包に属する．即ち，

$$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}$$

(x_n) はコーシー列だから，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta(\overline{A_n})=\delta(A_n)<\varepsilon/2$ なる n が存在する．よって，$A_n\subset B(a;\varepsilon)$ となり，$x_n\to a$ が示された．□

定義 9.1.6. 距離空間 (X,d) の任意のコーシー列が収束するとき，(X,d) は**完備** (complete) である，または**完備距離空間**である，と言う．

定理 9.1.7. 距離空間 (X,d) が次の性質を満たせば完備である．

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall x\in X,\quad 閉球\ \overline{B}(x;\varepsilon)\ はコンパクト$$

証明　コーシー列 (x_n) をとる．仮定より n を十分大きく取れば，$\delta(A_n)<\varepsilon/2$ とできるので，$A_n\subset\overline{B}(x_n;\varepsilon)$．よって定理 8.2.3 より，$\{x_n : n=1,2,\dots\}$ は集積点を持つ．よって定理 9.1.5 より，(x_n) は収束する．□

定理 9.1.8. 距離空間については，コンパクト性は完備かつ全有界であることと同値である．

証明　コンパクト距離空間が全有界であることは既に示した．コンパクトなら点列コンパクトであり，任意の点列は収束部分列を持つ．よって，任意のコーシー列 (x_n) は収束部分列を持つ．このときコーシー列の定義から部分列を取る前のコーシー列 (x_n) も収束しなければならない事がわかる．
次に，全有界な完備距離空間 X が点列コンパクトであることを示す．全有界性より，任意の正整数 n に対し，半径 $\frac{1}{n}$ の有限個の開球 $B_i^{(n)}$, $i=1,\dots,r_n$, が存在して，X を覆う．X の任意の点列 (x_n) をとる．無限個の x_n を含むような開球 $B_{j_1}^{(1)}$ をとり，点列 (x_n) から $B_{j_1}^{(1)}$ に含まれるような x_n だけを取って得られる (x_n) の部分列を $(x_n^{(1)})$ と書く．次に無限個の $x_n^{(1)}$ を含むような開球 $B_{j_2}^{(2)}$ をとり，点列 (x_n) から $B_{j_2}^{(2)}$ に含まれるような $x_n^{(1)}$ だけを取って得られる $(x_n^{(1)})$ の部分列を $(x_n^{(2)})$ と書く．以下同様にして $B_{j_k}^{(k)}$ と部分列の列 $(x_n^{(k)})$ を構成することが出来る．構成から $k\geq m$ ならば $x_n^{(k)}\in B_{j_m}^{(m)}$ である．よって $(x_n^{(n)})$ はコーシー列であり，完備性よりこれは収束する．よって点列 (x_n) は収束部分列を持つ事がわかった．□

9.2　距離空間の完備化

(X,d) を距離空間とする．(X,d) を完備距離空間の中に稠密に埋め込む事が出来ることを示そう．

補題 9.2.1. (x_n), (y_n) がコーシー列ならば，実数列 $d(x_n, y_n)$ はコーシー列となる．よって実数の完備性より $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ は常に存在する．

証明　(x_n), (y_n) はコーシー列だから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\exists\, N_1 :\ m, n \geq N_1 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$
$$\exists\, N_2 :\ m, n \geq N_2 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

となる．三角不等式より

$$d(x_m, y_m) \leq d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m)$$

が成り立つので

$$d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) \tag{2.1}$$

同様に，三角不等式より

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_m, x_n) + d(x_m, y_m) + d(y_n, y_m)$$

となるので，

$$-d(x_m, x_n) - d(y_n, y_m) \leq d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n) \tag{2.2}$$

が成り立つ．(2.1), (2.2) より，$m, n \geq \max\{N_1, N_2\}$ ならば

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_n, y_m) < 2\varepsilon$$

となる．よって $\{d(x_n, y_n)\}$ はコーシー列である　□

X のコーシー列全体を $\mathrm{Cauchy}(X)$ で表し，$(x_n), (y_n) \in \mathrm{Cauchy}(X)$ に対し，次で同値関係を定める．

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

この同値関係による商集合を $\widehat{X}$ と書く．$x \in X$ に対し，$x_n = x$, $n = 1, 2, \ldots,$ と置いて定まるコーシー列のクラスを対応させることにより写像 $\iota : X \to \widehat{X}$ が定義される．これは明らかに単射である．また，$\widehat{x}, \widehat{y}$ を $\widehat{X}$ の元，$(x_n), (y_n)$ をそれぞれの代表元とする．より

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \widehat{y}) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

と置けば，これは，代表元のとり方によらず同値類のみで定まる関数で，$d(x, y) = \widehat{d}(\iota(x), \iota(y))$, $x, y \in X$, となる．

定理 9.2.2.
(i)　$(\widehat{X}, \widehat{d})$ は距離空間になる．
(ii)　$(\widehat{X}, \widehat{d})$ は完備である．
(iii)　$\iota(X)$ は $\widehat{X}$ の中で稠密である．

証明　(i): d の満たす性質が $\widehat{d}$ に遺伝する事を見ればよい．
(ii): $(\widehat{x}_n)_{n=1,2,\dots}$ を $\widehat{X}$ のコーシー列とする．$(\widehat{x}_n)_{n=1,2,\dots}$ が収束することを示せばよい．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$(\widehat{x}_n)_{n=1,2,\dots}$ がコーシー列なので，ある番号 N_1 が存在し

$$m, n \geq N_1 \Longrightarrow \widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) < \varepsilon$$

となる．$(x_{n,m})_{m=1,2,\dots}$ を $(\widehat{x}_n)$ の代表元とする．$\widehat{d}(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m,k}, x_{n,k})$ なので，ある番号 N_2 が存在して

$$k \geq N_2 \Longrightarrow d(x_{m,k}, x_{n,k}) < \varepsilon$$

特に $n = k \geq \max\{N_1, N_2\}$ とすれば

$$d(x_{m,k}, x_{k,k}) < \varepsilon$$

となる．N_1, N_2 より大きい番号 k をとる．$\widehat{x}_k$ の代表元 $(x_{k,s})_{s=1,2,\dots}$ はコーシー列なので，ある番号 N_3 が存在して

$$m, n \geq N_3 \Longrightarrow d(x_{k,m}, x_{k,n}) < \varepsilon$$

となる．$m, n \geq \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ならば

$$\begin{aligned} d(x_{m,m}, x_{n,n}) &\leq d(x_{m,m}, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{k,n}) + d(x_{k,n}, x_{n,n}) \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

よって $(x_{n,n})_{n=1,2,\dots}$ はコーシー列となる．$(x_{n,n})$ の表す $\widehat{X}$ の元を $\widehat{x}$ と書くと，

$$\widehat{d}(\widehat{x}_n, \widehat{x}) = \lim_{m\to\infty} d(x_{n,m}, x_{n,n}) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

なので，$(\widehat{x}_n)$ は $\widehat{x}$ に収束することがわかる．
(iii): 任意の $\widehat{x} \in \widehat{X}$ に対し，その代表元であるコーシー列 (x_n) を取る．

$$\widehat{d}(\widehat{x}, \iota(x_n)) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

となり，$\widehat{x}$ は $\iota(X)$ の点列で近似できる．つまり $\iota(X)$ は $\widehat{X}$ で稠密である．　□

9.3　一様連続

定義 9.3.1. 距離空間の間の写像 $f : X \to Y$ が**一様連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して，

$$\forall x, y \in X \quad d_X(x, y) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

となるときを言う．

明らかに，一様連続写像は連続である．

演習 9.3.2. 一様連続写像によるコーシー列の像はコーシー列になる．

定理 9.3.3. X を距離空間，Y を完備距離空間とする．X の稠密集合 A からの写像 $f : A \to Y$ が一様連続ならば，f は写像 $F : X \to Y$ に一意に拡張する．更に，F も一様連続となる

証明 概略のみ示す．$x \in X$ に収束する A の点列 (a_n) をとる．点列 (a_n) は Cauchy 列なので点列 $(f(a_n))$ も Cauchy 列であり，ある点 $y \in Y$ に収束する．y は点列 (a_n) の選び方によらずに定まる． □

9.4 Baire 空間

定義 9.4.1 (Baire 空間). 任意の稠密開集合の可算個の共通部分が稠密であるような位相空間を **Baire 空間**という．

U_i, $i = 1, 2, \ldots,$ を稠密開集合とすると $F_i = X - U_i$ は内点を持たない閉集合であり Baire 空間では

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)^{\circ} = X - \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{U_i} = X - X = \emptyset$$

となる．内点を持たない閉部分集合は塵の様なものだとすると，Baire 空間では，塵は積もっても山にならないのである．

定理 9.4.2 (Baire). 局所コンパクトハウスドルフ空間は，Baire 空間である．

証明 稠密開集合 $D_1, D_2, \ldots$ をとる．開集合 U に対し $U \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \neq \emptyset$ を示す．$B_0 = U$ と置く．D_1 は稠密だから $B_0 \cap D_1 \neq \emptyset$. 局所コンパクト性より，空でない相対コンパクト開集合 B_1 で $\overline{B_1} \subset B_0 \cap D_1$ を満たすものが存在する．帰納的に，空でない相対コンパクト開集合 B_n で $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap D_1$ を満たすものが存在する事がわかる．コンパクト集合 $\overline{B_1}$ の部分集合族として，$\{\overline{B_n}\}$ は有限交差性を持つので，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$. $\overline{B_1} \subset U \cap D_1$, $\overline{B_n} \subset D_n$ より，$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. □

定理 9.4.3 (Baire). 完備距離空間は，Baire 空間である．

証明 稠密開集合 $D_1, D_2, \ldots$ をとる．開集合 U に対し $U \cap \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i \neq \emptyset$ を示す．$B_0 = U$ と置く．D_1 は稠密だから $B_0 \cap D_1 \neq \emptyset$. 開球 B_1 で $\overline{B_1} \subset B_0 \cap D_1$, $\delta(B_1) \leq 1$ を満たすものが存在する．帰納的に，開球 B_n で $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap D_1$, $\delta(B_n) \leq 1/n$ を満たすものが存在する事がわかる．

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \subset U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$$

集合族 $\{\overline{B_n}\}$ は有限交差性をもつのでフィルター基底となる．$x_n \in \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_n}$ なるように x_n を取ると，$\delta(\overline{B_n}) < 1/n$ より (x_n) はコーシー列であり，完備性よりこれは収束する． よってフィルター $\{\overline{B_n}\}$ は集積点を持つ．よって $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} \neq \emptyset$. □

可算個の全疎集合の和集合として表せる集合を**疎** (meager) な集合，または**第 1 類の集合**という．第 1 類でない集合を**第 2 類の集合**という．

定理 9.4.4. Baire 空間では疎な集合は内点を持たない．

証明　$\{Z_n\}_{n=1,2,\dots}$ を可算個の全疎集合とする．$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ なる開集合 U があったとすると $U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Z_n}$ となり，補集合を取って $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{Z_n}^c \subset U^c$. $\overline{Z_n}$ は稠密開集合だから，閉集合 U^c は X で稠密である．よって $U^c = X$. つまり $U = \emptyset$ を得る． □

例 9.4.5. 至るところ微分可能でない連続関数全体は $C(I)$ の第 2 類の集合である．

例 9.4.6. 至るところ解析的でない C^∞ 関数全体は $C(I)$ の第 2 類の集合である．

第10章　写像空間

10.1　写像空間の点収束位相とコンパクト開位相

X, Y を位相空間とし, X から Y への連続写像全体を $C(X, Y)$ で表す．$C(X, Y)$ に位相を入れるのが目的である．

定義 10.1.1 (点収束位相). $C(X, Y)$ は Y^X の部分集合である．Y^X の位相から，$C(X, Y)$ に自然に位相空間の構造が入る．この位相を**点収束位相**と言う．定義より点収束位相は，すべての $x \in X$ について

$$\mathrm{ev}_x : C(X, Y) \to Y, \qquad f \mapsto f(x)$$

を連続にするような最弱の位相である．

$x_1, \ldots, x_k \in X$, U を Y の開集合として

$$W(x_1, \ldots, x_k; U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(x_i) \in U, \imath = 1, \ldots, k\}$$

と置く．点収束位相は $\{W(x_1, \ldots, x_k; U) \mid x_1 \ldots, x_k \in X, U \in \mathrm{Open}(Y)\}$ を開基底とする位相である．点収束位相は単純であるが，写像

$$\Phi : C(X, Y) \times X \longrightarrow Y \qquad \Phi(f, x) = f(x)$$

は一般には連続とは限らない．よって点収束位相より強い位相を考えよう．

定義 10.1.2 (コンパクト開位相). X のコンパクト部分集合 K と Y の開部分集合 U に対し

$$W(K, U) = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$$

とおく.

$$\{W(K, U) \mid K \subset X, \text{コンパクト};\ U \subset Y, \text{開}\}$$

は部分開基底の公理を満たすので, これを部分開基底とするような位相を $C(X, Y)$ に入れることができる. この位相を**コンパクト開位相** (または**弱位相**) という. $C(X, Y)$ にコンパクト開位相を入れた位相空間を $C_W(X, Y)$ であらわす. W は weak の頭文字である.

定理 10.1.3. X を局所コンパクトなハウスドルフ空間とする. 写像

$$\Phi : C(X, Y) \times X \longrightarrow Y$$

を $\Phi(f,x) = f(x)$ で定義すれば, コンパクト開位相から誘導された位相に関して Φ は連続である. さらに, Φ を連続にするような最も弱い $C(X,Y)$ の位相はコンパクト開位相である.

証明　任意の $(f_0, x_0) \in C(X,Y) \times X$ に対し $f_0(x_0) \in U$ なる開集合 $U \subset Y$ をとる. このとき x_0 のコンパクト近傍 K をとり $x \in K$, $f \in W(K,U)$ とすれば $\Phi(f,x) = f(x) \in U$. よって $W(K,U) \times K \subset \Phi^{-1}(U)$. □

定理 10.1.4. X が σ コンパクト位相空間で Y が距離空間ならコンパクト開位相による収束はコンパクト一様収束である. さらに X が第二可算公理を満たし, Y が完備距離空間ならば $C_W(X,Y)$ は完備距離空間になる.

略証　X がコンパクトのときは Y の距離関数 d_Y を用いて

$$d(f,g) := \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

とおけば $C(X,Y)$ は距離空間となり, この距離空間から定まる位相が弱位相になる. さらに Y が完備距離空間なら $C_W(X,Y)$ も完備距離空間となる.

X がコンパクトでないとき, 仮定より X は可算個のコンパクト集合 $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ の和集合として書ける. $C_W(X_n, Y)$ は完備距離空間である.

$$\rho : C_W(X,Y) \longrightarrow \prod_n C_W(X_n, Y), \quad f \mapsto (f|_{X_n})_n$$

は上への同相写像でその像は閉集合である. 可算個の完備距離空間の直積は完備距離空間で $C_W(X,Y)$ はその閉集合と同相なので $C_W(X,Y)$ にも完備距離空間の構造が入る. □

固有写像全体は $C_S(X,Y)$ の開集合である.

10.2　写像空間の強位相

写像 $f : X \longrightarrow Y$ に対し, その**グラフ** Γ_f を次で定義する.

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

定義 10.2.1 (強位相). 直積位相空間 $X \times Y$ の開部分集合 V に対し

$$W(V) = \{f \in C(X,Y) \mid \Gamma_f \subset V\}$$

とおく. $\{W(V) \mid V \subset X, \text{開集合}\}$ は開基底の公理を満たすのでこれを開基底とするような位相を考える事ができる. この位相を**強位相**といい, $C(X,Y)$ に強位相を入れた位相空間を $C_S(X,Y)$ であらわす. X がパラコンパクトで, Y が距離空間のとき, $f \in C(X,Y)$ と 正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ に対し

$$B_\delta(f) = \{g \in C(X,Y) \mid d(g(x), f(x)) < \delta(x),\ \forall x \in X\}$$

とおけば, この形の集合全体が f の近傍基底をなす. 局所有限な X のコンパクト被覆 $\{K_\alpha\}$ と Y の開被覆 $\{V_\alpha\}$ に対し，次の形の集合が部分開基底になる.

$$\{f : X \to Y : f(K_\alpha) \subset V_\alpha \ \forall \alpha\}$$

補題 10.2.2. 強位相は弱位相より強い.

証明 X のコンパクト部分集合 K と, Y の開部分集合 U に対して $W(K,U)$ が強位相の意味での開集合である事を示す. $f \in W(K,U)$ を任意にとるとき,

$$f \in W(V) \subset W(K,U)$$

を満たすような $X \times Y$ の開集合 V が存在すればよい. $V = X \times U$ が求めるものである. □

注意 10.2.3. X がコンパクトならば弱位相と強位相は一致するが, X がコンパクトでないときは強位相は弱位相より真に強い位相である.

以後 X, Y は距離空間とする.

定理 10.2.4. X がコンパクトでないとき $C_S(X,Y)$ は第一可算公理を満たさない. したがって $C_S(X,Y)$ は距離空間にならない.

証明 $f \in C(X,Y)$ として f の可算個の近傍基底 $W_1, W_2, \ldots$ があったとして矛盾を導く.

正値連続関数 $\delta_m : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ で $B_{\delta_m}(f) \subset W_m$ なるものをとる. X はコンパクトでないので集積点を持たない X の点列 (x_n) が存在する. そこで正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ で

$$\delta(x_n) < \delta_n(x_n), \ \forall n$$

なるものをとれば $\{W_m\}$ は近傍基底であったからある番号 m が存在して

$$W_m \subset B_\delta(f).$$

ところが $B_{\delta_m} \subset W_m$ であったから $\delta_m(x) \leq \delta(x)$ となり矛盾. □

定理 10.2.5. X は σ コンパクトな距離空間とする. 関数列 $\{f_n\}$ が強位相に関して f に収束する事は次の条件と同値である: あるコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して次の条件を満たす.

- $\{f_n|_K\}$ は $f|_K$ に一様収束.
- ある番号 N があって $n \geq N$ ならば $f_n|_{X-K} \equiv f|_{X-K}$

証明　この条件を満たせば $\{f_n\}$ が強位相の意味で f に収束するのは明らかだから, 条件を満たすコンパクト集合がないとすれば，強位相の意味で $\{f_n\}$ が f に収束しないことを示す.

X のコンパクト部分集合 $\{K_i\}, i = 1, 2, \ldots$ で

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad \mathrm{Int}(K_{i-1}) \subset K_i$$

なるものをとる．このとき「$\{f_n\}$ のうち 無限個が $B_\delta(f)$ に属さない」ような連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が存在する事を示せばよい．まず

- ℓ_1 を $f_{\ell_1} \neq f$ なるようにとる.
- x_1 を $d(f_{\ell_1}(x_1), f(x_1)) = a_1 > 0$ なるようにとる.
- m_1 を $x_1 \in K_{m_1}$ なるようにとる.

ここで K_{m_1} 上 $\delta := a_1$ で関数 δ を定義する.

次に $\ell_1, \ldots, \ell_s$ $(\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_s)$ と m_s が既にきまっていて δ が K_{m_s} 上の連続関数として定義されていると仮定する.

- ℓ_{s+1} $(> \ell_s)$ を $X - K_{m_s+1}$ 上 $f_{\ell_{s+1}} \neq f$ なるようにとる.
- $x_{s+1} \notin K_{m_s+1}$ を $d(f_{\ell_{s+1}}(x_s), f(x_s)) = a_{s+1} > 0$ なるようにとる.
- m_{s+1} を $x_{s+1} \in K_{m_{s+1}}$ なるようにとる.

ここで δ を次の条件を満たすように $K_{m_{s+1}}$ 上に連続に拡張する.

$$\delta(x) = \begin{cases} \delta(x) & x \in K_{m_s} \\ a_{s+1} & x \in K_{m_{s+1}} - K_{m_s+1} \end{cases}$$

このプロセスを無限回繰り返せば $f_{\ell_1}, f_{\ell_2}, \ldots$ と正値連続関数 $\delta : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が構成できて

$$f_{\ell_j} \notin B_\delta(f), \quad j = 1, 2, \ldots$$

となる．よって f_n は f に収束しない. □

定理 10.2.6. パラコンパクト空間 X と完備距離空間 Y に対して $C_S(X, Y)$ は Baire 空間になる.