第 1 問

(1) 接線は傾きを持つので，$y=mx$ とおくと，$y=x^2+ax+b$ と連立して，

$$x^2+(a-m)x+b=0. \quad \cdots ①$$

条件より，判別式を D とおくと，$D=0$ より，

$$(a-m)^2-4b=0.$$

$$m^2-2am+a^2-4b=0. \quad \cdots ②$$

②の判別式を D' とおくと，$D'/4>0$ より，

$$(-a)^2-(a^2-4b)>0. \qquad b>0.$$

このとき，②の 2 解を m_1，m_2 とする．$\ell_1 \perp \ell_2$ となる条件は，$m_1m_2=-1$ であることだから，解と係数の関係より，

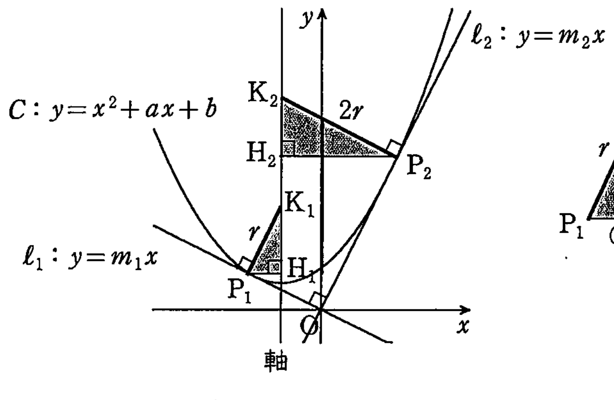
$$a^2-4b=-1. \qquad b=\frac{a^2+1}{4}. \qquad \cdots（答）$$

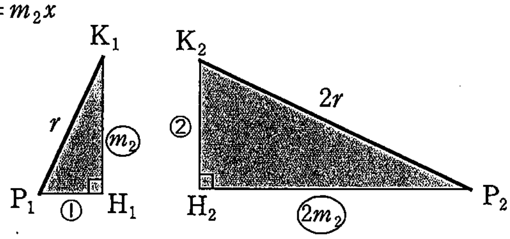
このとき，任意の実数 a に対して $b>0$ となることから，a の値はすべての実数をとりうる．

（証明終り）

(2) $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の接点の x 座標は，①の重解であるから，$m_1m_2=-1$ より，$m_1<0<m_2$ として，

$$(\mathrm{P_1}\text{ の } x \text{ 座標})=\frac{m_1-a}{2}, \quad (\mathrm{P_2}\text{ の } x \text{ 座標})=\frac{m_2-a}{2}.$$





一方，円 D_1，D_2 の中心を K_1，K_2 とし，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ から C の軸：$x=-\dfrac{a}{2}$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{H_2}$ とする．D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍より，$\mathrm{P_1K_1}=r$，$\mathrm{P_2K_2}=2r$ と表せる．

$\triangle \mathrm{P_1H_1K_1} \backsim \triangle \mathrm{K_2H_2P_2}$ に注目すると，$\mathrm{P_1H_1}:\mathrm{P_2H_2}=1:2m_2$ より，

$$\left(-\frac{a}{2}-\frac{m_1-a}{2}\right):\left\{\frac{m_2-a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}=1:2m_2.$$

$$(-m_1):m_2=1:2m_2.$$

$$m_2=-2m_1m_2=2. \quad (m_1m_2=-1 \text{ より．} m_2>0 \text{ を満たす.})$$

これを②$(m^2-2am-1=0)$ に代入して，$2^2-4a-1=0$.　　$a=\dfrac{3}{4}$.　　…（答）

第　1　問（つづき）

【参考】

(1)　$y=x^2+ax+b$ において，$y'=2x+a$ より，$(t,\ t^2+at+b)$ における接線の方程式は，

$$y=(2t+a)(x-t)+t^2+at+b.$$

$$y=(2t+a)x-t^2+b.$$

これが原点 $(0,\ 0)$ を通るので，代入して，

$$-t^2+b=0.\qquad t^2=b.$$

よって，$b>0$ の下で，$t=\pm\sqrt{b}$.

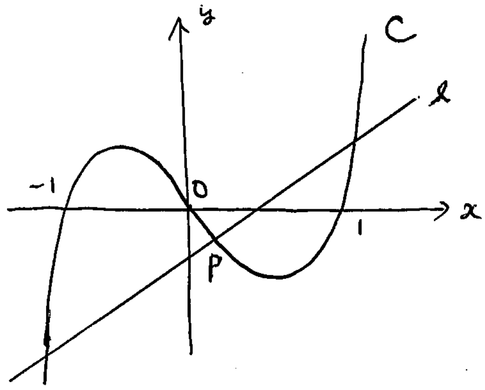
したがって，2 接線の傾きは，$2\sqrt{b}+a$，$-2\sqrt{b}+a$ であり，接線が直交することから，

$$(2\sqrt{b}+a)(-2\sqrt{b}+a)=-1.$$

これにより，$b=\dfrac{a^2+1}{4}$ を得る．

第2問

(1)



$y=x^3-x$ のとき $y'=3x^2-1$。

$\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき l は y 軸と平行となり条件を満たさない。

よって、$\alpha\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ で、l は

$$y=-\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)+\alpha^3-\alpha.$$

C と連立して、

$$(x^3-\alpha^3)-(x-\alpha)+\frac{1}{3\alpha^2-1}(x-\alpha)=0.$$

$$(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\right)=0.$$

$$f(x)=x^2+\alpha x+\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}$$

$$\left(=x^2+\alpha x+\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}\right)$$ とおくと、

条件は、

$f(x)=0$ を満たす異なる2つの実数 x があり、それらは α でないこと。

よって、$f(\alpha)\neq 0$ かつ $\alpha^2-4\cdot\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}>0$。

$$3\alpha^2-1+\frac{1}{3\alpha^2-1}\neq 0 \quad かつ \quad \frac{-9\alpha^4+15\alpha^2-8}{3\alpha^2-1}>0.$$

第2問（つづき）

$$(3\alpha^2-1)^2+1 \neq 0 \quad かつ \quad \frac{9\alpha^4-15\alpha^2+8}{3\alpha^2-1}<0.$$

ここで，$9\alpha^4-15\alpha^2+8=9\left(\alpha^2-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{7}{4}>0$ なので，

条件は，　$3\alpha^2-1<0.$

よって，　$-\frac{1}{\sqrt{3}}<\alpha<\frac{1}{\sqrt{3}}.$　　　…（答）

（$\alpha \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ も満たす）

(2)　$\beta,\ \gamma$ は $f(x)=0$ の2解なので解と係数の関係から，

$$\beta+\gamma=-\alpha,\quad \beta\gamma=\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}.$$

よって，

$$\begin{aligned}\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2-1&=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma-1\\&=\alpha^2-\frac{3\alpha^4-4\alpha^2+2}{3\alpha^2-1}-1\\&=-\frac{1}{3\alpha^2-1}\end{aligned}$$

となり，これは0でない．　　　（証明終り）

(3)　$u=4\alpha^3-(3\alpha^2-1)=4\alpha^3-3\alpha^2+1$ であるから，

$$\frac{du}{d\alpha}=12\alpha^2-6\alpha=6\alpha(2\alpha-1).$$

α	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{du}{d\alpha}$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\frac{4}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$\frac{4}{3\sqrt{3}}$

$\frac{4}{3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{16}{27}}<1$ であるから，

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}<u\leqq 1.\qquad …（答）$$

第３問

(1)　以下，合同式の法はすべて３とする．$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，

$$a_{6m-5}\equiv 1,\ a_{6m-4}\equiv 1,\ a_{6m-3}\equiv 0,\ a_{6m-2}\equiv 0,\ a_{6m-1}\equiv 0,\ a_{6m}\equiv 2 \qquad \cdots ★$$

であることを数学的帰納法で示す．

(I)　$m=1$ のとき，$a_{n+1}=a_n^2+n(n+2)$ より，

$$\begin{aligned}
&a_1=4\equiv 1,\\
&a_2=a_1^2+1\cdot 3\equiv 1^2+1\cdot 0=1,\\
&a_3=a_2^2+2\cdot 4\equiv 1^2+2\cdot 1=3\equiv 0,\\
&a_4=a_3^2+3\cdot 5\equiv 0^2+0\cdot 2=0,\\
&a_5=a_4^2+4\cdot 6\equiv 0^2+1\cdot 0=0,\\
&a_6=a_5^2+5\cdot 7\equiv 0^2+2\cdot 1=2
\end{aligned}$$

であるから，★ が成り立つ．

(II)　$m=k$ のとき，★ が成り立つと仮定すると，$a_{6k}\equiv 2$ であるから，$a_{n+1}=a_n^2+n(n+2)$ より，

$$\begin{aligned}
&a_{6k+1}={a_{6k}}^2+6k(6k+2)\equiv 2^2+0\cdot 2=4\equiv 1,\\
&a_{6k+2}={a_{6k+1}}^2+(6k+1)(6k+3)\equiv 1^2+1\cdot 0=1,\\
&a_{6k+3}={a_{6k+2}}^2+(6k+2)(6k+4)\equiv 1^2+2\cdot 1=3\equiv 0,\\
&a_{6k+4}={a_{6k+3}}^2+(6k+3)(6k+5)\equiv 0^2+0\cdot 2=0,\\
&a_{6k+5}={a_{6k+4}}^2+(6k+4)(6k+6)\equiv 0^2+1\cdot 0=0,\\
&a_{6k+6}={a_{6k+5}}^2+(6k+5)(6k+7)\equiv 0^2+2\cdot 1=2
\end{aligned}$$

となる．つまり，$m=k+1$ のときも ★ は成り立つ．

(I)，(II) より，$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して ★ が成り立つから，$a_{2022}=a_{6\cdot 337}\equiv 2$ より，

a_{2022} を３で割った余りは２　　　　$\cdots$(答)

である．

(2)　a_{2022}，a_{2023}，a_{2024} の最大公約数を G とする．$a_{n+1}=a_n^2+n(n+2)$ より，

$$\begin{aligned}
&a_{2023}={a_{2022}}^2+2022\cdot 2024 \quad \text{すなわち，}\quad a_{2023}-{a_{2022}}^2=2022\cdot 2024,\\
&a_{2024}={a_{2023}}^2+2023\cdot 2025 \quad \text{すなわち，}\quad a_{2024}-{a_{2023}}^2=2023\cdot 2025
\end{aligned}$$

となるが，$a_{2023}-{a_{2022}}^2$ と $a_{2024}-{a_{2023}}^2$ はそれぞれ G の倍数であるから，G は $2022\cdot 2024$ の約数であり，かつ，$2023\cdot 2025$ の約数である．

$2022\cdot 2024$ と $2023\cdot 2025$ をそれぞれ素因数分解すると，

$$\begin{aligned}
&2022\cdot 2024=(2\cdot 3\cdot 337)\cdot(2^3\cdot 11\cdot 23)=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23\cdot 337,\\
&2023\cdot 2025=(7\cdot 17^2)\cdot(3^4\cdot 5^2)=3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17^2
\end{aligned}$$

となり，この２数に共通する素因数は３しかないので，G も３以外の素因数をもたない．

一方，(1) の結果より a_{2022} は３の倍数でないから，最大公約数 G も３の倍数でなく，

$$G=1 \qquad \cdots(\text{答})$$

と定まる．

第3問　（つづき）

（注）　一般に，連続する2つの整数は互いに素であるから，

$$2022 \text{ と } 2023 \text{ は互いに素}, \qquad \cdots①$$
$$2023 \text{ と } 2024 \text{ は互いに素}, \qquad \cdots②$$
$$2024 \text{ と } 2025 \text{ は互いに素} \qquad \cdots③$$

である．

G は $2022 \cdot 2024$ の約数であり，かつ，$2023 \cdot 2025$ の約数であるが，②，③より 2024 と $2023 \cdot 2025$ は互いに素であるから，G は 2022 の約数に限られ，さらに①を用いると，G は 2022 と 2025 の公約数に限られる．

ところが，

$$2025 - 2022 = 3$$

より，2022 と 2025 の公約数は 3 以外の素因数をもたないので，G は 3 以外の素因数をもたない．

第４問

表が出たときの動きを，次の３つに分類する．

$$\begin{cases} A：\text{それまでに裏が出た回数が3で割ると1余るとき，} \ \overrightarrow{v_A}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{だけ進む，} \\ B：\text{それまでに裏が出た回数が3で割ると2余るとき，} \ \overrightarrow{v_B}=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{だけ進む，} \\ C：\text{それまでに裏が出た回数が3で割り切れるとき，} \ \overrightarrow{v_C}=(1,\ 0)\ \text{だけ進む．} \end{cases}$$

A，B，C がそれぞれ a，b，c 回（a，b，c は0以上の整数）だけ起こるとする．

(1)　X_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）がOにある条件は，

$$a\cdot\overrightarrow{v_A}+b\cdot\overrightarrow{v_B}+c\cdot\overrightarrow{v_C}=\left(c-\frac{a+b}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a-b)\right)=\vec{0}\ ,$$

すなわち，

$$\begin{cases} c-\dfrac{a+b}{2}=0, \\ a-b=0 \end{cases}\quad \text{より，}\quad a=b=c.$$

よって，$N=5$ に対して，X_5 がOにあるのは，

$$\begin{cases} a+b+c\leqq 5, \\ a=b=c \end{cases}\quad \text{より，}\quad (a,\ b,\ c)=(0,\ 0,\ 0),\ \ (1,\ 1,\ 1).$$

したがって，

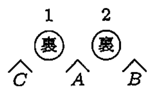
(ア)　5回とも裏が出る，

(イ)　裏が2回出て，A，B，C が1回ずつ起こる

のいずれかの場合である．

(ア)　の確率は，　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$．

(イ)　のとき，2回出る裏に対する A，B，C の起こり方は，



の1通りであるから，確率は，　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5$．

よって，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{16}. \qquad \cdots(\text{答})$$

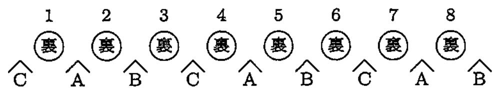
(2)　表が90回，裏が8回出て X_{98} がOにあるのは，

$$\begin{cases} a+b+c=90, \\ a=b=c \end{cases}\quad \text{より，}\quad (a,\ b,\ c)=(30,\ 30,\ 30).$$

第 4 問 (つづき)

したがって，A, B, C がそれぞれ 30 回ずつ起こるときである.

8 回出る裏に対する A, B, C の起こり方を考える.



30 回ずつ起こる A, B, C を上図の 3 か所の A, B, C のそれぞれに入れればよい.

30 個の球を 3 か所に入れる入れ方は，30 個の球と 2 枚の仕切りの並べ方と考えて，

$$ {}_{32}\mathrm{C}_2 = 16 \cdot 31 \text{ (通り)}. $$

A, B, C のすべてに対して，

$$ (16 \cdot 31)^3 \text{ (通り)}. $$

よって，求める確率は，

$$ (16 \cdot 31)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{98} = \frac{31^3}{2^{86}}. \qquad \cdots\text{(答)} $$