第　1　問

a, b を実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2 + ax + b$ を C とおく。C は，原点で垂直に交わる 2 本の接線 ℓ_1, ℓ_2 を持つとする。ただし，C と ℓ_1 の接点 P_1 の x 座標は，C と ℓ_2 の接点 P_2 の x 座標より小さいとする。

(1) b を a で表せ。また a の値はすべての実数をとりうることを示せ。

(2) $i = 1, 2$ に対し，円 D_i を，放物線 C の軸上に中心を持ち，点 P_i で ℓ_i と接するものと定める。D_2 の半径が D_1 の半径の 2 倍となるとき，a の値を求めよ。

第　2　問

$y = x^3 - x$ により定まる座標平面上の曲線を C とする。C 上の点 $\mathrm{P}(\alpha, \alpha^3 - \alpha)$ を通り，点 P における C の接線と垂直に交わる直線を ℓ とする。C と ℓ は相異なる 3 点で交わるとする。

(1) α のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) C と ℓ の点 P 以外の 2 つの交点の x 座標を β, γ とする。ただし $\beta < \gamma$ とする。$\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1 \neq 0$ となることを示せ。

(3) (2) の β, γ を用いて，

$$u = 4\alpha^3 + \frac{1}{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2 - 1}$$

と定める。このとき，u のとりうる値の範囲を求めよ。

第　3　問

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = a_n^2 + n(n+2) \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_{2022} を 3 で割った余りを求めよ。

(2) a_{2022}, a_{2023}, a_{2024} の最大公約数を求めよ。

第　4　問

O を原点とする座標平面上で考える。0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\overrightarrow{v_k}$ を

$$\overrightarrow{v_k} = \left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める。投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $X_0, X_1, X_2, \cdots\cdots, X_N$ を以下の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) X_0 は O にある。

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする。X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める。

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{OX_n} = \overrightarrow{OX_{n-1}} + \overrightarrow{v_k}$$

により X_n を定める。ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする。

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める。

(1) $N = 5$ とする。X_5 が O にある確率を求めよ。

(2) $N = 98$ とする。X_{98} が O にあり，かつ，表が 90 回，裏が 8 回出る確率を求めよ。