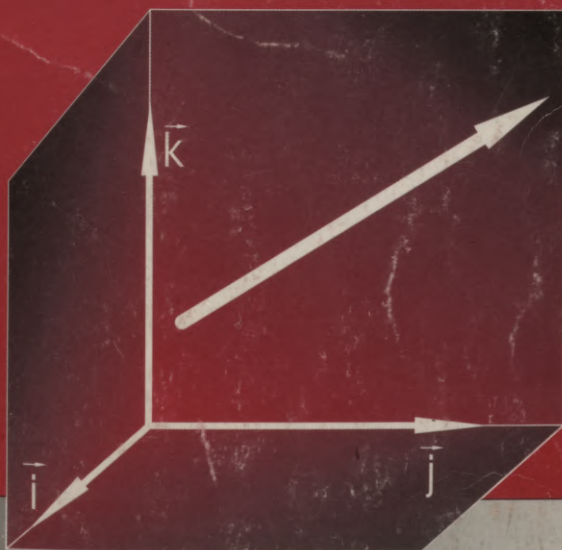


Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

I. Algebras elementi
2. Vektori

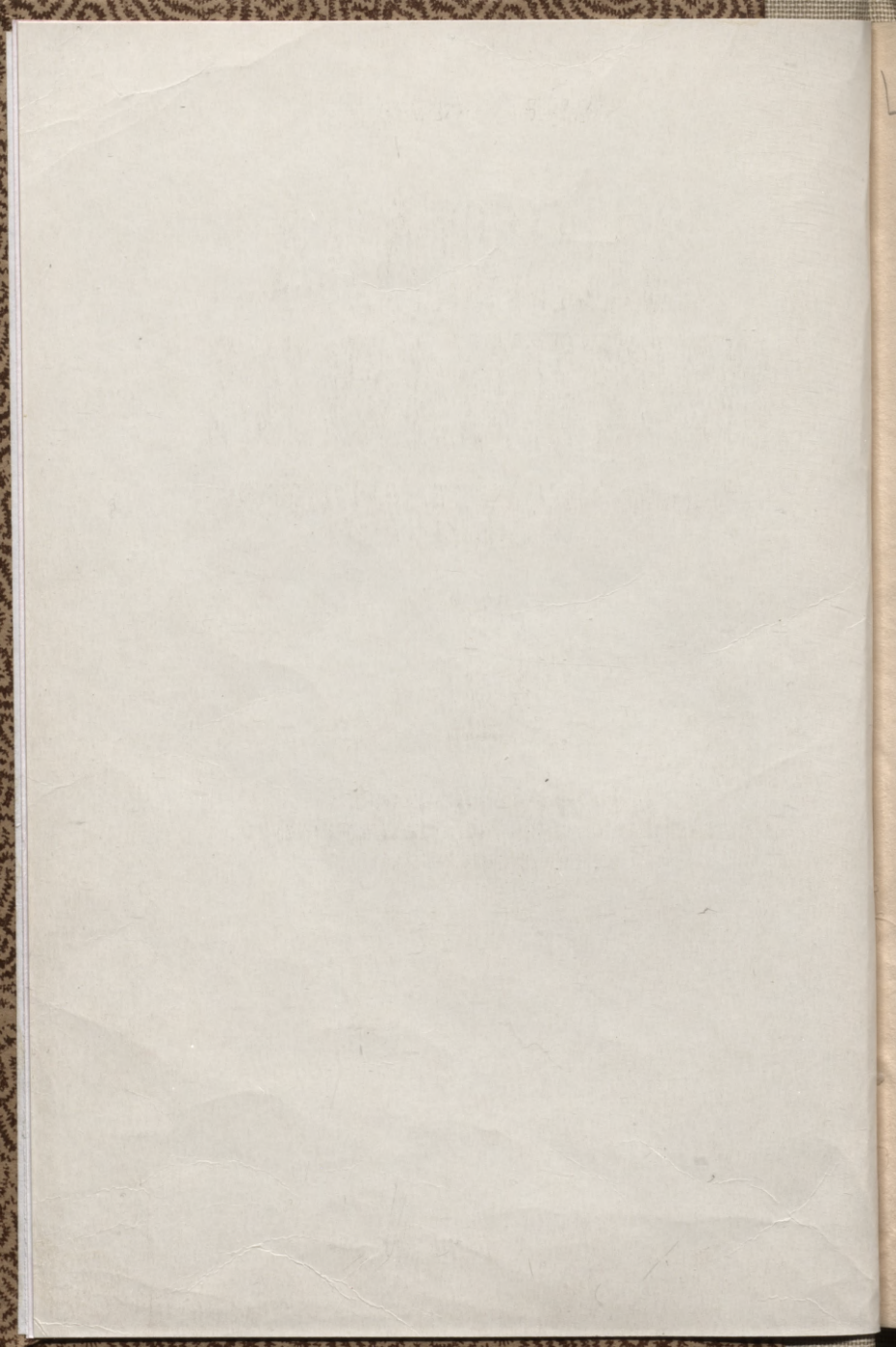


I

Lekciju
konspekts inženierzinātņu un
dabaszinātņu studentiem



ZVAIGZNE ABC



98-5
L 30

L
513

Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

I.nodaļa. **Algebras elementi**

2.nodaļa. **Vektori**

I

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un dabaszinātņu
studentiem



ZVAIGZNE ABC

48- 3.214
0904060109

parb. B. J. O. K. parb. B. J. O. K.

Lekciju konspekts augstākajā matemātikā tiks izdots vairākās grāmatās, tāpēc katras grāmatas titulā un uz vāka norādītas tajā iekļautās nodaļas.

Šajā (pirmajā) grāmatā ir divas nodaļas: algebras elementi un vektori. Šīs tēmas aplūkotas tādā apjomā, kas atbilst inženierzinātņu un dabaszinātņu studiju programmām.

Grāmatu kā mācību līdzekli var lietot arī koledžu studenti un vidusskolēni, kas apgūst matemātikas profilkursu.

Grāmatā uz krāsas fona ir izvietots atdalītais materiāls (definīcijas, formulas, kopsavilkumi, vēsturiskas uzzīņas).

PRIEKŠVārds

Inženierzinātņu un dabas zinātņu bakalauru studiju programmās paredzētais augstākās matemātikas kurss sastāv no vairāku matemātikas disciplīnu nodaļām. Aplūkojamos jautājumus nosaka galvenokārt citu mācību priekšmetu vajadzības, kā arī to matemātikas zināšanu minimums, kāds ir nepieciešams, lai varētu patstāvīgi lasīt attiecīgās specialitātes zinātniski tehnisko literatūru. Inženieru un zinātnes darbinieku vispārīgā matemātiskā sagatavotība, prasme radoši lietot matemātiku savā specialitātē nav domājama bez dziļām teorētiskām zināšanām vairākās matemātikas nozarēs. Tomēr speciālistu sagatavošanas pirmajā posmā – bakalaura studijās – augstākās matemātikas kurss ir orientēts galvenokārt uz matemātikas vienkāršākiem praktiskiem lietojumiem, vispārīgās matemātiskās kultūras un eksaktās domāšanas attīstīšanu. Tāpēc šajā mācību līdzeklī ir aplūkotas tikai svarīgākās pamatidejas un praktiskās lietošanas metodes. Grāmatas pamatā ir lekcijas augstākajā matemātikā, ko autori vairāku gadu laikā ir lasījuši Latvijas Universitātē un Rīgas Tehniskajā universitātē.

Mācību grāmata ir sadalīta vairākās daļās; pirmajā daļā aplūkoti algebras elementi un vektori. Nākamās daļas veltītas citiem augstākās matemātikas jautājumiem.

Grāmatā no vielas sistemātiskā izklāsta ir atdalīti dažādi komentāri, kopsavilkumi un vēsturiskas ziņas. Šīs piezīmes domātas, lai lasītājs varētu iegūt pārskatu par svarīgākajiem faktiem, spriedumiem, formulām un metodēm, neiedziļinoties attiecīgo jautājumu sīkāka izklāstā.

1. PAMATJAUTĀJUMI

piemēram, sistēmas

$$\begin{cases} 2x-4y+9z=28 \\ 7x+3y-6z=-1 \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y-4z=0 \\ 4x+2y-2z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x-5y=6 \\ 6x-2y=14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

3

Sistēmu sauc par *saderīgu*, ja tai eksistē vismaz viens atrisinājums.

Sistēmu sauc par *nesaderīgu*, ja tai neeksistē neviens atrisinājums.

Acīmredzami katrai homogēnai sistēmai par atrisinājumu der skaitļi $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots, x_n = 0$. Šādu atrisinājumu sauc par *triviālo atrisinājumu*. Tātad katra homogēna vienādojumu sistēma ir saderīga. Ir tādas homogēnas vienādojumu sistēmas, kurām eksistē tikai triviālais atrisinājums. Bet ir arī tādas homogēnas sistēmas, kurām bez triviālā atrisinājuma eksistē arī no nulles atšķirīgi jeb netriviāli atrisinājumi. Piemēram, var pārliecināties, ka homogēnai vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} 3x + y - 4z = 0 \\ 4x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

bez triviālā atrisinājuma $x = 0, y = 0, z = 0$ (to pieraksta šādi: $(0; 0; 0)$) ir arī netriviāli atrisinājumi $(3; -5; 1)$, $(6; -10; 2)$ u. c.

Viens no lineāru vienādojumu sistēmu teorijas pamatzdevumiem ir izstrādāt atrisināšanas metodes, ja sistēmā vienādojumu skaits un nezināmo skaits ir brīvi izraudzīts; pie tam sistēma var būt kā homogēna, tā arī nehomogēna. Risināšanas gaitā ir jānoskaidro, vai dotā sistēma ir saderīga vai nesaderīga. Ja sistēma ir saderīga, tad tai ir jāatrod visu atrisinājumu kopa.

2. JĒDZIENS PAR GAUSA METODI

Atrisinot vienādojumu, parasti vispirms ir nepieciešams to vienkāršot, t. i., pārveidot tā, lai no iegūtās izteiksmes varētu noteikt visas nezināmā lieluma vērtības. Pie tam pārveidojumu rezultātā iegūtajam vienādojumam ir jābūt ekvivalentam ar doto vienādojumu. **Par ekvivalentiem sauc vienādojumus, kuriem ir vienas un tās pašas saknes.** No dotā vienādojuma iegūst ekvivalentu vienādojumu, ja izpilda šādus pārveidojumus:

- 1) vienādojuma labās un kreisās puses izteiksmes aizstāj ar identiskām izteiksmēm;
- 2) vienādojuma abām pusēm pieskaita vienu un to pašu skaitli vai arī izteiksmi, kas satur nezināmo lielumu, bet nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu;
- 3) vienādojuma abas puses reizina vai dala ar vienu un to pašu no nulles atšķirīgu skaitli vai arī ar izteiksmi, kas satur nezināmo lielumu, bet nav vienāda ar nulli un nemaina vienādojuma definīcijas apgabalu.

Arī divas vienādojumu sistēmas sauc par *ekvivalentām*, ja tām ir vieni un tie paši atrisinājumi. Atrisinot vienādojumu sistēmu, parasti cenšas no dotās sistēmas pakāpeniski iegūt tai ekvivalentu, bet vienkāršāku sistēmu, kurai var viegli noteikt atrisinājumus. Risināšanas gaitā jebkuru sistēmas vienādojumu var aizstāt ar ekvivalentu vienādojumu. Taču vienādojumu sistēmas atrisināšanas metožu izstrādāšanā galvenā nozīme ir šādai īpašībai:

Ja sistēmas kādam vienādojumam pieskaita jebkuru citu šīs sistēmas vienādojumu, tad iegūst dotajai sistēmai ekvivalentu sistēmu.

Šī īpašība ir pamatā pazīstamajam saskaitīšanas paņēmienam.

Piemēram, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 7y = -3, \end{cases}$$

pirmo vienādojumu reizina ar -2 un pieskaita otram vienādojumam. Rezultātā iegūst dotajai sistēmai ekvivalentu sistēmu

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ -13y=-13 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} x+3y=5 \\ y=1. \end{cases}$$

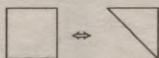
No šīs sistēmas viegli atrast, ka $x+3=5$ jeb $x=2$. Tātad sistēmas atrisinājums ir $x=2, y=1$ (to pieraksta šādi: (2; 1)). Risināšanas gaitā lineāru vienādojumu sistēmu, kuras kreisās puses izteiksmes veido kvadrātiskas formas figūru, esam pārveidojuši par ekvivalentu sistēmu, kuras kreisās puses izteiksmes veido trijstūra veida figūru:

$$\left\{ \begin{array}{l} x+3y \\ 2x-7y \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 5 \\ -3 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+3y \\ y \end{array} \right\} = \begin{array}{l} 5 \\ 1. \end{array}$$

No iegūtās sistēmas pēdējā vienādojuma ir redzama nezināmā lieluma y vērtība, kuru ievietojot pirmajā vienādojumā atrod x vērtību. Šo vienādojumu sistēmas atrisināšanas paņēmieni sauc par *Gausa metodi*. To var lietot arī tad, ja vienādojumu un nezināmo skaits ir lielāks nekā divi. Piemēram, lai atrisinātu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3x-6y+3z=-12 \\ 2x+3y+4z=8 \\ 4x+5y-2z=4 \end{cases} \quad (1)$$

ar Gausa metodi, šī kvadrāta veida sistēma ir jāpārveido par ekvivalentu sistēmu, kurai ir trijstūra forma:



Pārveidojumus veic pēc šāda algoritma.

1. Pirmo vienādojumu izdala ar šī vienādojuma nezināmā lieluma x koeficientu (šajā piemērā – ar skaitli 3). Rezultātā iegūst sistēmu

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 2x+3y+4z=8 \\ 4x+5y-2z=4 \end{cases} \quad (2)$$

2. Sistēmas (2) pirmo vienādojumu vispirms reizina ar skaitli -2 un pieskaita otrajam vienādojumam, bet pēc tam pirmo vienādojumu reizina ar skaitli -4 un pieskaita trešajam vienādojumam. Šādu darbību rezultātā iegūst ekvivalentu sistēmu, kuras otrais un trešais vienādojums nesatur nezināmo lielumu x :

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ 7y+2z=16 \\ 13y-6z=20 \end{cases} \quad (3)$$

3. Sistēmas (3) otro vienādojumu izdala ar šī vienādojuma nezināmā y koeficientu, t. i., ar skaitli 7:

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ y+\frac{2}{7}z=\frac{16}{7} \\ 13y-6z=20 \end{cases} \quad (4)$$

KÄRLIS FRĪDRIHS GAUSS (1777-1855)

Viens no visizcilākajiem 19. gadsimta vācu matemātiķiem, mūža lielāko daļu bijis Getingenas universitātes profesors, matemātikas katedras vadītājs un astronomiskās observatorijas direktors. Gauss ir veicis fundamentālus pētījumus dažādās nozarēs: skaitļu teorijā, neeiklida ģeometrijā, diferenciālģeometrijā, varbūtību teorijā, arī astronomijā un fizikā. Gausa teorētiskie darbi bieži bija saistīti ar praktiskām problēmām – astronomiskiem novērojumiem, ģeodēziju, Zemes magnētiskā lauka pētījumiem. Labas matemātika spējas un atjautību Gauss ir parādījis jau agrā bērnībā. Kā viena no visinteresantākajām viņa bērnības epizodēm jāatzīmē aritmētiskās progresijas locekļu summas īpašības atklāšana (no galiem vienādi attālinātu aritmētiskās progresijas locekļu summas ir vienādas). Tas noticis šādi. Lai Kārlis Frīdrihs klasē neblēņotos, kamēr pārējie skolēni mācās aritmētikas darbības, skolotājs līcis viņam saskaitīt visus veselos skaitļus no 1 līdz 100. Taču par lielu pārsteigumu skolotājam zēns tūlīt paziņojis, ka uzdevumu ir atrisinājis, un pateicis atbildi: 5050. Izrādījās, ka Gauss nav vis saskaitījis skaitļus pēc kārtas, kā to vēlējis skolotājs, bet gan vispirms saskaitījis pirmo skaitli 1 ar pēdējo skaitli 100, ieguvis summu 101. Pēc tam ievērojis, ka, saskaitot otro skaitli no sākuma (skaitli 2) ar otro skaitli no beigām (skaitli 99), arī iegūst 101; līdzīgi, $3+98=101$, $4+97=101$ utt. Tā kā pirmajā simtā ir 50 šādu skaitļu pāru, tad, sareizinot 101 ar 50, Gauss atradis visu skaitļu summu 5050.



Kā veltījums izcilā zinātnieka piemiņai, uz Vācijas 10 marku naudas zīmes ir Gausa portrets, kā arī attēloti daži viņa pētījumu atribūti (gadījuma lielumu normālā sadalījuma blīvuma funkcija un tās grafiks – Gausa likne, Gausa lietotais astronomisko novērojumu instruments u. c.).

4. Sistēmas (4) otro vienādojumu reizina ar skaitli -13 un pieskaita trešajam vienādojumam:

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ y+\frac{2}{7}z=\frac{16}{7} \\ -\frac{68}{7}z=-\frac{68}{7} \end{cases} \quad (5)$$

5. Sistēmas (5) pēdējo vienādojumu izdala ar nezināmā lieluma z koeficientu, t. i., ar skaitli $-\frac{68}{7}$. Rezultātā iegūst sistēmu

$$\begin{cases} x-2y+z=-4 \\ y+\frac{2}{7}z=\frac{16}{7} \\ z=1 \end{cases} \quad (6)$$

No sistēmas (6) trešā vienādojuma redzams, ka $z=1$, šo vērtību ievieto otrajā vienādojumā un iegūst, ka $y=2$. Pēc tam atrastās z un y vērtības ievieto pirmajā vienādojumā un atrod, ka $x=-1$. Tā kā dotā sistēma (1) ir ekvivalenta ar sistēmu (6), tad arī dotās sistēmas atrisinājums ir $(-1; 2; 1)$. Par to var pārliecināties, ievietojot šajā sistēmā atrastās x, y un z vērtības.

Piezīmes

1. Ja, lietojot Gausa metodi, iegūst trijstūra veida sistēmu, kuras pēdējā vienādojumā nezināmā lieluma koeficients ir 0, bet šī vienādojuma brīvais loceklis nav 0, tad šim vienādojumam nav atrisinājuma un līdz ar to arī sistēmai atrisinājums neeksistē, t. i., **sistēma nav saderīga**. Piemēram, var pārliecināties, ka no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} 2x+6y-2z=4 \\ 3x-y+2z=1 \\ 4x+2y+z=4 \end{cases}$$

ar Gausa metodi iegūst sistēmu

$$\begin{cases} x+3y-z=2 \\ y-\frac{1}{2}z=\frac{1}{2} \\ 0 \cdot z=1 \end{cases}$$

Tā kā nav tāda skaitļa, kuru reizinot ar 0 iegūst 1, tad pēdējam vienādojumam atrisinājuma nav un līdz ar to dotā sistēma nav saderīga.

2. Ja ekvivalentu pārveidojumu rezultātā iegūst trijstūra veida sistēmu, kuras pēdējā vienādojumā nezināmā lieluma koeficients ir 0, un šajā vienādojumā arī brīvais loceklis ir 0, tad šim vienādojumam un tātad arī sistēmai ir **bezgalīgi daudz atrisinājumu**. Piemēram,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ -3x-3y-3z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+\frac{1}{3}z=0 \\ 0 \cdot z=0 \end{cases}$$

Acīmredzami trešo vienādojumu apmierina jebkurš reāls skaitlis; apzīmēsim to ar C . Tātad $z=C$. Ievietojot šo vērtību otrajā vienādojumā, iegūst, ka $y=-\frac{1}{3}C$.

Savukārt no pirmā vienādojuma atrodam, ka $x - \frac{1}{3}C + C = 1$ jeb $x = 1 - \frac{2}{3}C$. Līdz ar to dotās sistēmas atrisinājumu kopa ir $(1 - \frac{2}{3}C; -\frac{1}{3}C; C)$, kur C – jebkurš reāls skaitlis.

3. Ja vienādojumu sistēma ir homogēna, tad pārveidojumu rezultātā iegūtā trijstūra veida sistēma arī ir homogēna (t. i., visi tās brīvie locekļi ir vienādi ar nulli). Ja turklāt pēdējā vienādojumā nezināmā lieluma koeficients nav nulle, tad šī vienādojuma atrisinājums ir nulle. Līdz ar to no pārējiem vienādojumiem izriet, ka sistēmai ir **tikai triviāls atrisinājums**.

Piemērs

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 0 \\ -3x + 8y - 10z = 0 \\ 4x - 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, y = 0, x = 0.$$

4. Ja, pārveidojot homogēnu sistēmu, iegūst trijstūra veida homogēnu sistēmu, kuras pēdējā vienādojumā nezināmā lieluma koeficients ir nulle, tad sistēmai ir **bezgalīgi daudz atrisinājumu**.

Piemērs

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 4x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = C, y = \frac{1}{2}C, x = z - 3y = C - \frac{3}{2}C = -\frac{1}{2}C.$$

Tātad atrisinājumu kopa ir $(-\frac{1}{2}C; \frac{1}{2}C; C)$, kur C – jebkurš reāls skaitlis.

Aplūkojām lineāru vienādojumu sistēmu piemērus, kuros vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu. **Gausa metodi var lietot arī tad, ja sistēmas vienādojumu skaits ir mazāks vai arī lielāks nekā nezināmo skaits.** Ja vienādojumu skaits ir mazāks nekā nezināmo skaits, tad, pakāpeniski izslēdzot nezināmos lielumus vienādojumos, iegūst trapeces veida sistēmu, kuras pēdējā vienādojumā ir vairāk nekā viens nezināmais.

Piemērs

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10 \\ -3x + 8y - 10z = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ -3x + 8y - 10z = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ 2y - 4z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ y - 2z = -5 \end{cases}$$

Iegūtās trapeces veida sistēmas pēdējā vienādojumā ir divi nezināmi lielumi. Šādam vienādojumam ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Lai atrastu šos atrisinājumus, nezināmajam lielumam z piešķir brīvi izraudzītas vērtības $z = C$, tad $y = 2C - 5$. Ievietojot šīs izteiksmes pirmajā vienādojumā, atrod, ka $x = 2y - 2z + 5 = 2(2C - 5) - 2C + 5 = 2C - 5$. Tātad dotajai vienādojumu sistēmai ir **bezgalīgi daudz atrisinājumu** $(2C - 5; 2C - 5; C)$, kur C – jebkurš reāls skaitlis. Ja pārveidojumu rezultātā pēdējā vienādojumā koeficienti pie nezināmajiem ir nulles, bet brīvais loceklis nav nulle, tad sistēmai **nav atrisinājuma**.

Ja vienādojumu sistēmā ir vairāk vienādojumu nekā nezināmo, tad daži vienādojumi ir pārējo vienādojumu sekas un tos var atmet. Pārveidojot sistēmu ar Gausa metodi, atmetamo vienādojumu vietā rodas identitāte $0 = 0$. Rezultātā iegūst

trijstūra vai trapeces veida sistēmu, kuru risina analogi kā iepriekš aplūkotajos uzdevumos.

Piemērs

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+y=1 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=0 \\ -y+z=0 \\ 4y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=0 \\ -y+z=0 \\ 4y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=0 \\ 0=0 \\ 3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-z=0 \\ z=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow z=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}, x=\frac{2}{3}.$$

Tādējādi Gausa metode dod iespēju jebkurai lineāru vienādojumu sistēmai noskaidrot jautājumu par sistēmas saderību, kā arī noteikt tās atrisinājumu kopu. Ja sistēmā ir daudz vienādojumu un nezināmo, tad aprēķinus veic ar datoru, lietojot skaitļošanas programmu. Tomēr jāatzīmē, ka izpildīto pārveidojumu rezultātā iegūto vienādojumu koeficienti parasti ir daļskaitļi, ar kuriem nav ērti veikt nepieciešamās darbības, ja risināšanai nelieto datoru. Gausa metodes lietošana ir sarežģīta arī tad, ja vienādojumu koeficienti ir burtu izteiksmes. Tāpēc lineārajā algebrā aplūko arī citas sistēmu atrisināšanas metodes. Ar vienu no tām iepazīsimies turpmākajā vienas apskatā.

3. OTRĀS UN TREŠĀS KĀRTAS DETERMINANTI

Aplūkosim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

kurā vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu. Atrisinot šādas sistēmas, ir jāveic dažādas aritmētiskās darbības ar sistēmas koeficientiem. Lai noskaidrotu ar atrisinājuma atrašanu saistītus jautājumus, sistēmas koeficientus izraksta noteiktā secībā tabulas veidā:

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}$$

Determinanta jēdziens ir saistīts ar šāda veida tabulām.

Definīcija. **Par 2. kārtas determinantu sauc simbolu**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ar šo simbolu apzīmē izteiksmi

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12},$$

ku sauc par **determinanta izvirzījumu**.

Parasti starp determinanta simbolu un tā izvirzījumu raksta vienādības zīmi un īsāka pieraksta dēļ determinantu apzīmē ar burtu D vai Δ . Tātad

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Piemērs

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 = -14.$$

Definīcija. *Par 3. kārtas determinantu sauc simbolu*

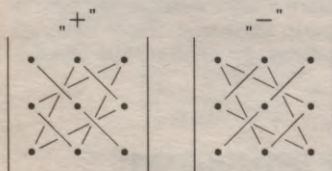
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Ar šo simbolu apzīmē izteiksmi

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33},$$

ku sauc par *determinanta izvirzījumu*. Starp determinanta simbolu un izvirzījumu raksta vienādības zīmi.

Kā redzams, 3. kārtas determinanta izvirzījumā ir 6 locekļi; trīs no tiem ņemti ar «+» zīmi, trīs – ar «-» zīmi. Pirmais ar «+» zīmi ņemtais loceklis $a_{11}a_{22}a_{33}$ iegūts, sareizinot tos determinanta elementus, kas atrodas uz t. s. galvenās diagonāles (šī diagonāle savieno determinanta kreiso augšējo stūri ar labo apakšējo



1. zīm.

stūri). Locekļi $a_{12}a_{23}a_{31}$ un $a_{21}a_{32}a_{13}$ iegūti, sareizinot elementus, kas atrodas tādu trijstūru virsotnēs, kuru viena mala paralēla galvenai diagonālei, bet pretējā virsotne atrodas determinanta stūrī. Ar «-» zīmi ņemtie locekļi izveidoti pēc analoga likuma attiecībā pret otru determinanta diagonāli, kas savieno kreiso apakšējo stūri ar labo augšējo. Šī determinanta izvirzījuma sastādīšanas «trijstūru shēma» ilustrēta 1. zīmējumā.

Piemērs

$$\begin{vmatrix} 15 & 45 & 75 \\ 3 & 10 & 16 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 15 \cdot 10 \cdot 7 + 45 \cdot 16 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 \cdot 75 - 75 \cdot 10 \cdot (-2) - \\ - 4 \cdot 16 \cdot 15 - 3 \cdot 45 \cdot 7 = 105.$$

Lieto arī citas 3. kārtas determinanta izvirzījuma sastādīšanas shēmas.

Aplūkotajiem determinantiem ir spēkā šādas īpašības.

1. *Determinanta vērtība nemainās, ja tā pierakstā rindas maina vietām ar kolonnām:* pirmo rindu ar pirmo kolonnu, otro rindu ar otro kolonnu, trešo rindu

=====

Otrās kārtas determinants:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Trešās kārtas determinants:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

ar trešo kolonnu. Šādu determinanta pārveidojumu sauc par *transponēšanu*. Tātad

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. *Determinanta vērtība nemainās, ja kādas rindas (kolonnas) elementiem pieskaita jebkuras citas rindas (kolonnas) elementus, kas reizināti ar brīvi izraudzītu skaitli k , piemēram,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k \cdot a_{31} & a_{22} + k \cdot a_{32} & a_{23} + k \cdot a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Šeit 2. rindas elementiem pieskaitīti attiecīgie 3. rindas elementi, kas reizināti ar vienu un to pašu skaitli k (turpmāk šādu pārveidojumu norādīsim ar pierakstu « $R_2 + R_3 \cdot k$ »).

3. *Apmainot vietām divas determinanta rindas (kolonnas), mainās determinanta zīme, bet nemainās tā absolūtā vērtība (modulis), piemēram,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

4. *Ja visi kādas rindas (kolonnas) elementi satur kopīgu reizinātāju, tad to var izņemt pirms determinanta simbola, piemēram,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. *Ja kādas rindas (kolonnas) katrs elements ir izteikts kā divu saskaitāmo summa, tad šis determinants ir vienāds ar divu determinantu summu. Pirmajā determinantā attiecīgās rindas (kolonnas) elementi ir pirmie saskaitāmie, bet otrajā determinantā – otrie saskaitāmie. Pārējās abas determinantu rindas (kolonnas) vienādas ar dotā determinanta rindām (kolonnām):*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} + a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} + a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} + a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a''_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a''_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a''_{33} \end{vmatrix}.$$

6. *Ja determinanta kādas rindas (kolonnas) visi elementi ir nulles, tad determinants vienāds ar nulli.*
7. *Ja determinantā ir divas vienādas rindas (kolonnas), tad determinants vienāds ar nulli.*
8. *Ja determinantā kādas rindas (kolonnas) visi elementi ir proporcionāli citas rindas (kolonnas) elementiem, tad determinants vienāds ar nulli, piemēram,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Īpašības var pārbaudīt, uzrakstot katras vienādības labās un kreisās puses determinantu izvirkzījumus un konstatējot iegūto izteiksmju vienādību. Atzīmēsim, ka dažas īpašības ir citu īpašību sekas. Tā, piemēram, 2. īpašību var pierādīt, izmantojot 5. un 8. īpašību. 7. īpašība ir 8. īpašības atsevišķs gadījums, kad $k=1$; 6. īpašība izriet no 7. un 2. īpašības u. tml.

Bieži pirms determinanta aprēķināšanas ir lietderīgi izpildīt pārveidojumus, kas nemaina determinanta vērtību. Parasti determinantu pārveido tā, lai viens vai vairāki elementi būtu nulles vai arī lai samazinātu determinanta elementus. Tas atvieglo reizināšanas darbību izpildīšanu, aprēķinot determinanta vērtību. Tā, piemēram, iepriekš aplūkotajā piemērā ir lietderīgi veikt šādus pārveidojumus:

$$\begin{vmatrix} 15 & 45 & 75 \\ 3 & 10 & 16 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 16 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{\langle R_2 - 3R_1 \rangle}{=} 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 7 \end{vmatrix} \underset{\langle K_3 - K_2 \rangle}{=} 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(3 + 0 + 0 + 4 - 0 - 0) = 105.$$

Izpildot otro pārveidojumu, pie 2. rindas elementiem pieskaitījām 1. rindas elementus, kas reizināti ar -3 (apzīmējums $\langle R_2 - 3R_1 \rangle$), pēc tam pie 3. kolonnas elementiem pieskaitījām 2. kolonnas elementus, kas reizināti ar -1 ($\langle K_3 - K_2 \rangle$).

4. DETERMINANTA IZVIRZĪŠANA PĒC RINDAS VAI KOLONNAS ELEMENTIEM

Iepazīsimies ar dažiem jēdzieniem, kas nepieciešami ar determinantu lietojumiem saistītos jautājumos. Ja 3. kārtas determinantā izvītro kādu rindu un kādu kolonnu, tad iegūst 2. kārtas determinantu; to sauc par dotā 3. kārtas determinanta minoru.

Piemēram, ja izvītro 3. rindu un 2. kolonnu, tad iegūst 2. kārtas determinantu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Tā kā 3. rindā un 2. kolonnā atrodas determinanta elements a_{32} , tad saka, ka iegūtais 2. kārtas determinants ir šim elementam atbilstošais minors; to apzīmē ar simbolu M_{32} .

Definīcija. *Par 3. kārtas determinanta*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

elementam a_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) atbilstošo minoru sauc tādu 2. kārtas determinantu, ko iegūst, dotajā determinantā svītrojot i -to rindu un j -to kolonnu. Šo minoru apzīmē ar simbolu M_{ij} .

Definīcija. *Par elementam a_{ij} atbilstošo algebrisko papildinājumu jeb adjunktu sauc skaitli*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Piemērs

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Kā redzams, elementa a_{ij} adjunkts ir vienāds ar šim elementam atbilstošo minoru, ja indeksu summa $i+j$ ir pāra skaitlis, un vienāds ar minoram pretējo skaitli, ja $i+j$ ir nepāra skaitlis.

Atzīmēsim divas ļoti svarīgas **adjunktu īpašības**.

1. **Īpašība.** Summa, kuras saskaitāmie ir kādas determinanta rindas (kolonnas) visu elementu reizinājumi ar to atbilstošajiem adjunktiem, ir vienāda ar determinanta vērtību. Šādu summu sauc par *determinanta izvirzījumu* pēc attiecīgās rindas (kolonnas) elementiem.

Apzīmējot determinanta vērtību ar burtu D , šo īpašību var pierakstīt šādi:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \quad (\text{izvirzījums pēc 1. rindas elementiem}),$$

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \quad (\text{izvirzījums pēc 2. rindas elementiem}),$$

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \quad (\text{izvirzījums pēc 3. rindas elementiem}),$$

$$D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \quad (\text{izvirzījums pēc 1. kolonnas elementiem}),$$

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} \quad (\text{izvirzījums pēc 2. kolonnas elementiem}),$$

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \quad (\text{izvirzījums pēc 3. kolonnas elementiem}).$$

Pierādīsim pirmo vienādību.

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33} = D. \end{aligned}$$

Kā redzams, izvirzījums pēc 1. rindas elementiem sakrīt ar izteiksmi, ko iegūst, izvirzot determinantu pēc trijstūru shēmas. Analogi var pārbaudīt arī pārējos izvirzījumus.

2. **Īpašība.** Summa, kuras saskaitāmie ir kādas determinanta rindas (kolonnas) visu elementu reizinājumi ar citas rindas (kolonnas) attiecīgo elementu adjunktiem, ir vienāda ar nulli.

Tātad

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \quad (1. \text{ rindas elementi reizināti ar 2. rindas elementu adjunktiem}),$$

$$a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0 \quad (1. \text{ rindas elementi reizināti ar 3. rindas elementu adjunktiem}),$$

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0 \quad (2. \text{ rindas elementi reizināti ar 1. rindas elementu adjunktiem}),$$

$$a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{23} = 0 \quad (1. \text{ kolonnas elementi reizināti ar 2. kolonnas elementu adjunktiem}),$$

$$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} + a_{31}A_{33} = 0 \quad (1. \text{ kolonnas elementi reizināti ar 3. kolonnas elementu adjunktiem}) \text{ u. tml.}$$

Pierādīsim, ka 2. kolonnas elementu reizinājumu summa ar 1. kolonnas elementu adjunktiem ir vienāda ar nulli. Patiesām

$$\begin{aligned} a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} &= a_{12}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{22}(-1)^{2+1}M_{21} + a_{32}(-1)^{3+1}M_{31} = \\ &= a_{12}M_{11} - a_{22}M_{21} + a_{32}M_{31} = a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{22}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + \\
& + a_{32}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) = a_{12}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{32}a_{23} - a_{22}a_{12}a_{33} + \\
& + a_{22}a_{32}a_{13} + a_{32}a_{12}a_{23} - a_{32}a_{22}a_{13} = 0.
\end{aligned}$$

Analogi var pārbaudīt pārējās vienādības.

Adjunktu 1. īpašību (determinanta izvirzīšanu pēc rindas vai kolonnas elementiem) plaši lieto determinanta vērtības aprēķināšanai, ja determinanta kādā rindā vai kolonnā ir vairākas nulles vai arī ja, izpildot pārveidojumus, kas nemaina determinanta vērtību, rindās (kolonnās) ir iegūtas nulles.

Piemēram, determinanta

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

1. rindā un 3. kolonnā ir viena nulle, bet 2. kolonnā ar nulli ir vienādi divi elementi. Tāpēc šo determinantu ir izdevīgi izvirzīt pēc 2. kolonnas elementiem, jo šādā izvirzījumā divi locekļi ir vienādi ar nulli:

$$\begin{aligned}
D &= 0 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} = -2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (2 \cdot 6 - 1 \cdot 3) = -18.
\end{aligned}$$

5. JĒDZIENS PAR AUGSTĀKU KĀRTU DETERMINANTIEM

Esam iepazinušies ar 2. un 3. kārtas determinanta jēdzienu. Izmantojot iepriekšējā punktā aplūkotos jēdzienus, definēsim 4. kārtas determinantu. Ar 4. kārtas determinantu saprot simbolu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Šim simbolam piekārto noteiktu izteiksmi, ko sauc par determinanta izvirzījumu. To sastāda analogi kā 3. kārtas determinantam, izvirzot to pēc kādas rindas vai kolonnas elementiem. Ja 4. kārtas determinantā svītro kādu rindu vai kolonnu, tad iegūst 3. kārtas determinantu. Izsvītrojot i -to rindu un j -to kolonnu ($i, j = 1, 2, 3, 4$), iegūtais 3. kārtas determinants ir elementa a_{ij} minors un to apzīmē ar M_{ij} , bet šī elementa adjunks ir $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Summu, kas veidota no 4. kārtas determinanta kādas rindas vai kolonnas elementu reizinājumiem ar to atbilstošajiem adjunktiem, sauc par izvirzījumu pēc attiecīgās rindas (kolonnas) elementiem. Var pārlicināties, ka visi izvirzījumi pēc jebkuras rindas (kolonnas) elementiem ir vienādi. Tāpēc 4. kārtas determinantu var definēt ar jebkuru šādu izvirzījumu, piemēram, pēc 1. rindas elementiem:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

kur A_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$) ir elementa a_{ij} adjunks.

Analogi 5. kārtas determinantu var definēt šādi:

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} + a_{15}A_{15},$$

kur A_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) ir elementa a_{ij} adjunks, t. i., jau pazīstamais 4. kārtas determinants.

Ar šādu induktīvu metodi var definēt jebkuras n -tās kārtas determinantu, ja ir zināms $(n-1)$ -ās kārtas determinanta jēdziens.

Definīcija. *Par n -tās kārtas determinantu sauc simbolu*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ar šo simbolu apzīmē izteiksmi

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

kur $A_{ij} = (-1)^{1+j}M_{ij}$ ir elementa a_{ij} adjunks, tātad tas ir $(n-1)$ -ās kārtas determinants. Šādi definētam n -tās kārtas determinantam ir spēkā iepriekš aplūkotās 3. kārtas determinantu īpašības.

1. piemērs. Aprēķināt 4. kārtas determinantu.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{«R_2 - 2R_1»}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 13 & -7 & 0 & -3 \\ -6 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43} =$$

$$= (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 13 & -7 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{«R_3 - R_1»}{=} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 13 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{33} = 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (3 \cdot (-7) - 13 \cdot (-1)) = 2 \cdot (-8) = -16.$$

2. piemērs. Aprēķināt 5. kārtas determinantu.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Šo determinantu ir lietderīgi izvīzīt pēc 1. kolonnas elementiem, kurā visi elementi ir nulles, izņemot pirmo elementu. Pirmā elementa minors ir 4. kārtas determinants, kura 1. kolonnā visi elementi ir nulles, izņemot pirmo elementu. Tātad šo minoru ir lietderīgi izvīzīt pēc 1. kolonnas elementiem. Turpinot šādi izvīzīt dotā determinanta minorus, iegūstam

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 720.$$

Ievērosim, ka dotajā determinantā visi elementi zem galvenās diagonāles ir nulles. Kā redzams, šāds determinants ir vienāds ar galvenās diagonāles elementu reizinājumu. Acīmredzot tā var aprēķināt jebkuras kārtas determinantu, kurā visi elementi zem (vai arī virs) galvenās diagonāles ir nulles, t. i.,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

6. LINEĀRAS VIENĀDOJUMU SISTĒMAS ATRISINĀŠANA, LIETOJOT DETERMINANTUS. KRĀMERA FORMULAS

Aplūkosim vienādojumu sistēmu, kurā vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu. Lai saīsinātu pierakstus, izraudzīsimies 3. kārtas vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases} \quad (7)$$

No šīs vienādojumu sistēmas koeficientiem var sastādīt 3. kārtas determinantu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

kuru sauc par *sistēmas determinantu*.

Reizinot sistēmas (7) pirmā vienādojuma abas puses ar determinanta (8) pirmās kolonnas elementa a_{11} adjunktu A_{11} , otro vienādojumu – ar adjunktu A_{21} un trešo vienādojumu – ar adjunktu A_{31} , iegūstam dotajai sistēmai ekvivalentu sistēmu

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x + A_{11}a_{12}y + A_{11}a_{13}z = A_{11}b_1 \\ A_{21}a_{21}x + A_{21}a_{22}y + A_{21}a_{23}z = A_{21}b_2 \\ A_{31}a_{31}x + A_{31}a_{32}y + A_{31}a_{33}z = A_{31}b_3. \end{cases}$$

Saskaitot šīs sistēmas vienādojumus, iegūstam vienādību

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}. \quad (9)$$

Šajā vienādībā nezināmā lieluma x koeficients ir determinanta (8) izvirzījums pēc 1. kolonnas elementiem. Koeficients pie y ir summa, kuras saskaitāmie ir šī determinanta 2. kolonnas elementu reizinājumi ar 1. kolonnas atbilstošo elementu adjunktiem, un saskaņā ar adjunktu īpašību šī izteiksme ir vienāda ar nulli. Analogi arī nezināmā lieluma z koeficients ir vienāds ar nulli kā summa, kas sastādīta no determinanta (8) 3. kolonnas elementu reizinājumiem ar 1. kolonnas atbilstošo elementu adjunktiem. Vienādojuma (9) labās puses izteiksme ir determinanta

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

izvirzījums pēc 1. kolonnas elementiem. Acīmredzami šo determinantu iegūst, ja sistēmas determinantā (8) 1. kolonnu aizvieto ar sistēmas brīvo locekļu kolonnu. Ievērojot teikto, vienādojumu (9) var pārrakstīt tā:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

jeb, lietojot apzīmējumus (8) un (10), īsākā formā

$$D \cdot x = D_1. \quad (11)$$

Reizinot sistēmas (7) vienādojumus ar 2. kolonnas adjunktiem un saskaitot iegūtās vienādības, iegūstam vienādojumu, kas nesatur nezināmos lielumus x un z . Šajā vienādojumā koeficients pie y ir sistēmas determinants D , bet labās puses izteiksme ir tāda determinanta D_2 izvirzījums pēc 2. kolonnas elementiem, ko iegūst, ja sistēmas determinantā (8) 2. kolonnu aizvieto ar brīvo locekļu kolonnu:

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Tātad iegūstam vienādojumu

$$D \cdot y = D_2. \quad (13)$$

Analogi, reizinot sistēmas (7) vienādojumus ar 3. kolonnas elementu adjunktiem un saskaitot, iegūstam vienādojumu

$$D \cdot z = D_3. \quad (14)$$

Šeit D_3 ir determinants, kuru iegūst, sistēmas determinantā (8) aizvietojot 3. kolonnu ar brīvo locekļu kolonnu, t. i.,

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Ja sistēmas determinants $D \neq 0$, tad no vienādībām (11), (13) un (14) iegūstam sistēmas (7) atrisinājuma formulas

$$x = \frac{D_1}{D}, \quad y = \frac{D_2}{D}, \quad z = \frac{D_3}{D}. \quad (16)$$

Vienādības (16) sauc par *Krāmiera formulām*. Kā redzams, Krāmiera formulu pierādījumā būtisks ir nosacījums, ka sistēmas determinants $D \neq 0$.

Lineārās algebras kursā tiek pierādīta šāda teorēma.

Ja lineāru vienādojumu sistēmas determinants nav vienāds ar nulli, tad sistēmai eksistē viens un tikai viens atrisinājums, kuru var aprēķināt pēc Krāmiera formulām.

Šo teorēmu sauc par *sistēmas atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmu*. Atrisinājuma eksistences pierādījumā jāpārlicienās, ka ar formulām (16) aprēķinātās x , y un z vērtības apmierina vienādojumu sistēmu (7). Atrisinājuma unitātes (vienīguma) konstatēšanai jāpierāda, ka jebkurš cits atrisinājums identiski sakrīt ar skaitļiem, ko iegūst, izmantojot formulas (16).

1. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

Atrodam determinantu D , D_1 , D_2 un D_3 vērtības:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 348, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 28 & -4 & 9 \\ -1 & 3 & -6 \\ 5 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 696,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 28 & 9 \\ 7 & -1 & -6 \\ 7 & 5 & -9 \end{vmatrix} = 1044, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 28 \\ 7 & 3 & -1 \\ 7 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 1392.$$

Izmantojot Krāmera formulas (16), aprēķinām, ka

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{696}{348} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{1044}{348} = 3, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{1392}{348} = 4.$$

2. piemērs. Atrisināt homogēnu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 0 \\ 7x + 3y - 6z = 0 \\ 7x + 9y - 9z = 0. \end{cases}$$

Aprēķinām determinantus:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 348, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 7 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Līdz ar to } x = \frac{0}{348} = 0, \quad y = \frac{0}{348} = 0, \quad z = \frac{0}{348} = 0.$$

=====

Krāmra formulas

Lineāras vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

atrisinājumu atrod šādi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Gabriēls Krāmers (1704–1752) – Šveices matemātiķis, izstrādājis determinantu teorijas pamatus.

Acīmredzami jebkurai homogēnai sistēmai, kurai vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu, palīgdeterminanti $D_1=0, D_2=0, \dots, D_n=0$, jo šajos determinantos vienā kolonnā visi elementi ir vienādi ar nulli. Ja sistēmas determinants $D \neq 0$, tad ar Krāmiera formulām atrod sistēmas triviālo atrisinājumu. No sistēmas atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmas izriet, ka šādā gadījumā triviālais atrisinājums ir vienīgais atrisinājums. Līdz ar to varam secināt, ka nepieciešams nosacījums, lai homogēnai vienādojumu sistēmai eksistētu arī netriviāls atrisinājums, ir nosacījums, ka sistēmas determinants $D=0$.

1. piemērs. Atrisināt homogēnu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

Kā jebkurai homogēnai sistēmai, šai sistēmai eksistē triviāls atrisinājums $x=0, y=0, z=0$. Lai noskaidrotu, vai sistēmai ir arī netriviāli atrisinājumi, aprēķinām sistēmas determinantu:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$\text{«R}_2 + 2\text{R}_1\text{»}$

Tā kā sistēmas determinants ir vienāds ar nulli, tad šai sistēmai ir arī netriviāli atrisinājumi. Lai atrastu šos atrisinājumus, ievērosim, ka pēc izpildītā pārveidojuma sistēmas determinantā otrā rinda ir vienāda ar trešo rindu. Tas nozīmē, ka sistēmas vienādojumi nav savstarpēji neatkarīgi, bet 3. vienādojums ir pirmo divu vienādojumu sekas un tāpēc šo vienādojumu var atmetēt. To izdarot, iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

ar diviem vienādojumiem un trīs nezināmiem. Šajā sistēmā par nezināmā lieluma z vērtību var izraudzīties jebkuru reālu skaitli (apzīmēsim to ar C), bet nezināmos x un y aprēķina pēc Krāmiera formulām, izmantojot izraudzīto z vērtību:

$$\begin{cases} x + y = -2C \\ 2x + y = C, \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -2C & 1 \\ C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2C - C}{1 - 2} = 3C, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2C \\ 2 & C \end{vmatrix}}{-1} = -5C.$$

Tādējādi dotās sistēmas atrisinājumu kopa ir $(3C; -5C; C)$, kur C – jebkurš reāls skaitlis. Ja izvēlamies $C=0$, tad iegūstam sistēmas triviālo atrisinājumu.

2. piemērs. Noteikt, ar kādām burta k vērtībām sistēmai

$$\begin{cases} (5-k)x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - (4+k)y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + (5-k)z = 0 \end{cases}$$

eksistē netriviāli atrisinājumi.

Noteiksim, ar kādām k vērtībām sistēmas determinants ir vienāds ar nulli. Šajā nolūkā ir jāatrisina vienādojums

$$D = \begin{vmatrix} 5-k & -3 & 2 \\ 6 & -4-k & 4 \\ 4 & -4 & 5-k \end{vmatrix} = 0.$$

Atrodam determinanta izvirzījumu:

$$\begin{vmatrix} 5-k & -3 & 2 \\ 6 & -4-k & 4 \\ 4 & -4 & 5-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-k & -3 & 2 \\ 2-k & -4-k & 4 \\ 0 & -4 & 5-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-k & -3 & 2 \\ 0 & -1-k & 2 \\ 0 & -4 & 5-k \end{vmatrix} = (2-k) \cdot \begin{vmatrix} -1-k & 2 \\ -4 & 5-k \end{vmatrix} = (2-k)((-1-k)(5-k)+8) = (2-k)(k^2-4k+3).$$

Tā kā $D=0$, tad iegūstam vienādojumu

$$(2-k)(k^2-4k+3)=0.$$

No šī vienādojuma secinām, ka $2-k=0$ vai $k^2-4k+3=0$.

Šo vienādojumu saknes ir $k_1=2$, $k_2=1$, $k_3=3$. Ar šādām k vērtībām dotajai sistēmai ir netriviāli atrisinājumi.

7. MATRICU ALGEBRAS ELEMENTI

MATRICAS JĒDZIENS

No iepriekšējās vielas apskata izriet, ka vienādojumu sistēmas atrisinājums ir atkarīgs no sistēmas koeficientiem. Pētot jautājumus, kas saistīti ar sistēmas atrisinājumu atrašanu, parasti koeficientus pieraksta taisnstūrveida tabulā, kurā ir tik rindu, cik sistēmā vienādojumu, un tik kolonnu, cik sistēmā nezināmo. Šādu **koeficientu tabulu sauc par matricu**. Šī paragrāfa 1. punktā aplūkotajām sistēmām atbilst šādas koeficientu matricas:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Skaitļu tabulu, kas veido matricu, parasti ieslēdz apaļajās iekavās (dažkārt ieslēdz arī kvadrātiekvāpās vai arī matricas abās pusēs novelk divas vertikālas svītras). Ja matricā ir m rindas un n kolonnas, tad vispārīgā veidā to pieraksta šādi:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Parasti matricas apzīmē ar alfabēta lielajiem burtiem A , B , C , X , Y , nenorādot rindu un kolonnu skaitu; dažkārt lieto arī matricas elementa simbolu (a_{ij}) norādot indeksu i un j vērtības: $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$.

Matrica var sastāvēt arī tikai no vienas rindas vai tikai no vienas kolonnas

$$(a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}), \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Šādas matricas sauc attiecīgi par **rindas matricām** un **kolonnas matricām**.

Ja matricā rindu skaits ir vienāds ar kolonnu skaitu, t. i., $m=n$, tad to sauc par **kvadrātisku matricu** un rindu (kolonnu) skaitu sauc par **matricas kārtu**.

Kvadrātiskai matricai atbilst šīs matricas determinants. Ja kvadrātisku matricu apzīmē ar burtu A , tad šīs matricas determinantu apzīmē ar simbolu $\det A$, piemēram,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -161.$$

Matricu praktiskie lietojumi ir saistīti ar pārveidojumiem, kurus veic saskaņā ar īpašiem matricu algebras likumiem. To pamatā ir attieksme «matricu vienādība», kā arī šādas darbības un operācijas ar matricām: matricu saskaitīšana (atņemšana), matricas reizināšana ar skaitli, matricu reizināšana, matricas transponēšana, inversās matricas atrašana. Aplūkosim šīs darbības.

Matricu vienādība. Šī attieksme tiek definēta matricām, kurām rindu skaits ir vienāds un arī kolonnu skaits ir vienāds.

Definīcija. *Saka, ka matricas A un B ir vienādas, un raksta $A=B$, ja visi šo matricu atbilstošie elementi ir vienādi, t. i., ja $a_{ij}=b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$).*

Piemēram, ja

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ un } X=A,$$

tad $x_{11}=2$, $x_{12}=4$, $x_{13}=0$, $x_{21}=5$, $x_{22}=9$, $x_{23}=1$.

Matricu saskaitīšana un atņemšana, nulles matrica. Šīs darbības definē matricām, kurām rindu skaits ir vienāds un arī kolonnu skaits ir vienāds.

Definīcija. *Par matricu A un B summu sauc matricu C (raksta $A+B=C$), ja visi matricas C elementi ir vienādi ar matricu A un B atbilstošo elementu summu, t. i., $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$).*

Piemērs

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Acīmredzami matricu saskaitīšanai ir spēkā šādas īpašības:

- 1) komutatīvā īpašība: $A+B=B+A$;
- 2) asociatīvā īpašība: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Definīcija. *Par matricu A un B starpību sauc matricu C (raksta $A-B=C$), ja $A=B+C$ vai arī $A=C+B$.*

No definīcijas izriet, ka $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Ja kādai matricai O ir īpašība, ka $A+O=A$ (vai arī $O+A=A$), tad matricu O sauc par **nulles matricu**; šīs matricas visi elementi ir vienādi ar nulli.

Matricas reizināšana ar skaitli. Par matricas A reizinājumu ar skaitli k sauc matricu B , kuras visi elementi ir atbilstošo matricas A elementu reizinājums ar skaitli k , t. i., $b_{ij}=ka_{ij}$ ($i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$).

Piemērs

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 12 & 32 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

Matricas reizināšanai ar skaitli ir spēkā šādas īpašības:

- 1) *distributīvā īpašība attiecībā pret skaitļa reizināšanu ar matricu summu:*
 $k(A+B) = kA + kB$;
- 2) *distributīvā īpašība attiecībā pret skaitļu summas reizināšanu ar matricu:*
 $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2B$;
- 3) $1 \cdot A = A$;
- 4) $0 \cdot A = O$.

Matricu reizināšana. Šī darbība ir definēta tikai tad, ja pirmā reizinātāja – matricas A kolonnu skaits ir vienāds ar otrā reizinātāja – matricas B rindu skaitu.

Definīcija. Ja matricā A ir m rindas un n kolonnas, bet matricā B ir n rindas un k kolonnas, tad par šo matricu reizinājumu sauc matricu C , kuras elementus atrod pēc formulas

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

2. zīm.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$ (2. zīm.).

Ja matrica C ir matricu A un B reizinājums, tad raksta $C = AB$. Reizinājumā iegūtajai matricai C ir tik rindu, cik rindu ir matricai A , un tik kolonnu, cik kolonnu ir matricai B .

1. piemērs. Sareizināt matricas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ un } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Saskaņā ar matricu reizināšanas definīciju reizinājumā iegūtajai matricai ir 2 rindas un 4 kolonnas. Šīs matricas pirmās rindas pirmo elementu iegūst, reizinot matricas A pirmās rindas elementus ar matricas B pirmās kolonnas elementiem un iegūtos reizinājumus saskaitot, t. i., $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 24$. Matricas C pirmās rindas otro elementu iegūst, reizinot matricas A pirmās rindas elementus ar matricas B otrās kolonnas elementiem un iegūtos reizinājumus saskaitot, t. i., $c_{12} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 13$. Analogi $c_{13} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 14$, $c_{14} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 0 = 13$. Matricas C otrās rindas elementus atrod, reizinot matricas A otrās rindas elementus ar matricas B kolonnu elementiem un iegūtos reizinājumus saskaitot, t. i., $c_{21} = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 39$, $c_{22} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 32$, $c_{23} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 10$, $c_{24} = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 8$.

Tātad

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 13 & 14 & 13 \\ 39 & 32 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. piemērs. Sareizināt matricas

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ -3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ un } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tā kā matricai A ir 3 kolonnas un matricai B ir 3 rindas, tad var sareizināt matricu A ar matricu B (bet nevar reizināt matricu B ar matricu A). Reizinājumā $C = AB$ iegūtajai matricai ir 3 rindas un 1 kolonna:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \\ -3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + 8 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 \\ -3 \cdot 3 + 7 \cdot 6 + 9 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 39 \\ 51 \end{pmatrix}.$$

Definīcija. Par vienības matricu E sauc tādu matricu, kuras reizinājums ar jebkuru matricu A ir vienāds ar matricu A (ja vien šī reizināšana ir definēta), t. i., $EA = A$.

Var pierādīt, ka vienības matrica E ir kvadrātiska matrica, kuras visi elementi ir vienādi ar nulli, izņemot galvenās diagonāles elementus, kuri ir vienādi ar 1, t. i.,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ja A ir kvadrātiska matrica, tad ir spēkā arī vienādība $AE = A$, t. i., reizināšana ar vienības matricu ir komutatīva. Viegli pārlicināties, ka vienības matricai atbilstošais determinants ir vienāds ar 1, t. i., $\det E = 1$.

Piemērs

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{un arī} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matricas transponēšana. Par matricas transponēšanu sauc pārveidojumu, kuru izpildot kādas matricas rindas aizvieto ar šīs matricas kolonnām. Matricas A transponēto matricu apzīmē ar simbolu A^T . Piemēram, ja

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tad} \quad A^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricu transponēšanas operācijai ir spēkā šādas īpašības:

- 1) $(A^T)^T = A$,
- 2) $(k_1 A + k_2 B)^T = k_1 A^T + k_2 B^T$,
- 3) $(AB)^T = B^T A^T$.

Inversā matrica. Algebrā par kāda skaitļa $a \neq 0$ apgriezto lielumu sauc skaitli $\frac{1}{a}$ jeb a^{-1} . Apgrieztajam lielumam ir īpašība, ka $a^{-1} \cdot a = 1$ un arī $a \cdot a^{-1} = 1$. Ar analoģu sakarību definē matricas apgriezto jeb inverso matricu.

Definīcija. Pieņemsim, ka A ir kvadrātiska matrica, kuras determinants $\det A \neq 0$. Par šīs matricas inverso matricu sauc matricu A^{-1} , ja $A \cdot A^{-1} = E$ vai arī $A^{-1} \cdot A = E$, kur E ir vienības matrica.

Izmantojot definīciju, var pierādīt šādu kvadrātiskas matricas A inversās matricas atrašanas algoritmu.

1. Atrod $\det A$. Ja $\det A = 0$, tad inversā matrica neeksistē.
2. Ja $\det A \neq 0$, tad matricā A katru tās elementu a_{ij} aizstāj ar šī elementa adjunktu A_{ij} ; šo adjunktu matricu apzīmē ar A^* .
3. Adjunktu matricu A^* transponē. Iegūto matricu sauc par dotās matricas piesaistīto matricu un apzīmē ar burtu P .

4. Katru piesaistītās matricas elementu daļa ar dotās matricas determinantu $\det A$. Iegūtā matrica ir **inversā matrica** A^{-1} , t. i.,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Piemērs. Atrast matricas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

inverso matricu.

1. Aprēķinām

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

2. Atrodam matricas A elementu adjunktus un uzrakstām adjunktu matricu A^* :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Transponējot matricu A^* , iegūstam piesaistīto matricu

$$P = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matricas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ piesaistītā matrica ir

$$P = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

bet inversā matrica ir

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot P.$$

4. Izdalot katru piesaistītās matricas elementu ar matricas A determinanta vērtību 2, iegūstam inverso matricu:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lai pārbaudītu aprēķinu pareizību, pārliecināsimies, ka $AA^{-1} = E$. Patiešām,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1,5 & -1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. LINEĀRAS VIENĀDOJUMU SISTĒMAS ATRISINĀŠANA, IZMANTOJOT INVERSO MATRICU

Atrisinot lineāru vienādojumu $ax=b$ ar vienu nezināmo, vienādojuma abas puses dala ar koeficientu $a \neq 0$. Rezultātā iegūst, ka $x = \frac{b}{a}$ jeb $x = a^{-1}b$. Šo rezultātu var iegūt arī, reizinot vienādojuma abas puses ar koeficienta a apgriezto lielumu a^{-1} . Šādas darbības rezultātā iegūstam vienādību $a^{-1}ax = a^{-1}b$, no kuras seko, ka $1 \cdot x = a^{-1}b$ jeb $x = a^{-1}b$.

Analogu procedūru veic, atrisinot lineāru vienādojumu sistēmu ar inversās matricas palīdzību. Pieņemsim, ka lineāru vienādojumu sistēma, kuras vienādojumu skaits ir vienāds ar nezināmo skaitu, ir uzrakstīta matricu reizinājuma formā

$$AX=B,$$

kur A ir sistēmas koeficientu matrica, X – nezināmo lielumu matrica, B – brīvo locekļu matrica. Reizināsim šīs vienādības abas puses ar koeficientu matricas A inverso matricu A^{-1} :

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Saskaņā ar matricu reizināšanas asociatīvo īpašību šo vienādību var pārveidot šādi: $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Bet, tā kā $A^{-1}A = E$, tad $EX = A^{-1}B$. Pēc vienības matricas definīcijas $EX = X$, tāpēc

$$X = A^{-1}B,$$

t. i., nezināmo lielumu matrica ir vienāda ar sistēmas inversās matricas un brīvo locekļu matricas reizinājumu. Nezināmo lielumu vērtības nosaka, pielīdzinot šīs matricu vienādības atbilstošos elementus.

Piezīme. Ja $\det A = 0$, tad sistēma nav saderīga un inversā matrica A^{-1} neeksistē.

Piemērs. Atrisināt ar inversās matricas palīdzību vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+2y &= 1 \\ &3y+2z=0 \\ -x &+2z=1. \end{cases}$$

Šajā gadījumā

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Iepriekšējā jautājuma apskatā atradām matricas A inverso matricu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1,5 & -1 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Tāpēc saskaņā ar formulu $X = A^{-1}B$ iegūstam

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1,5 & -1 & 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tātad $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ un no matricu vienādības definīcijas izriet, ka

$$x=5, y=-2, z=3.$$

9. MATRICU POLINOMI UN VIENĀDOJUMI

Dažādos matricu algebras lietojumos bieži ir jāpārveido polinomu veida izteiksmes, kuru locekļi ir matricas, jāatrisina matricu vienādojumi u. c. uzdevumi, kuros izmanto iepriekš definētās darbības ar matricām. Aplūkosim dažus piemērus.

1. piemērs. $P(x) = x^2 - 3x + 5$. Atrast $P(A)$, ja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ievietojot dotajā polinomā x vietā matricu A , šī matrica ir jākāpina kvadrātā, t. i., jāreizina pati ar sevi; skaitlis 3 jāreizina ar matricu A , bet brīvais loceklis 5 jāizteic kā šī skaitļa reizinājums ar trešās kārtas vienības matricu. Tādējādi jāpārveido šāds matricu polinoms:

$$P(A) = A \cdot A - 3 \cdot A + 5 \cdot E =$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 13 & 0 & 18 \\ 4 & 1 & 6 \\ 24 & 0 & 37 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 6 \\ 12 & 0 & 27 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. piemērs. Atrisināt matricu vienādojumu $AX = B$, ja $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Reizinot dotā vienādojuma kreiso un labo pusi ar matricas A inverso matricu A^{-1} , iegūstam vienādību

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

no kuras seko, ka $EX = A^{-1}B$ jeb $X = A^{-1}B$.

Atrodam inverso matricu A^{-1} :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A^* = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Līdz ar to

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,2 \\ -0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & 1,2 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

10. DAŽI LINEĀRU VIENĀDOJUMU SISTĒMU ATRISINĀŠANAS TEORIJAS JAUTĀJUMI. KRONEKERA-KAPELLI TEORĒMA

Risinot ar Gausa metodi lineāru vienādojumu sistēmas šī paragrāfa 2. punktā, aplūkojām piemērus, kuros kāds sistēmas vienādojums ir citu vienādojumu sekas, t. i., šo vienādojumu var iegūt no citiem vienādojumiem, tos reizinot ar kādiem skaitļiem un saskaitot. Saka, ka tāds vienādojums ir *pārējo vienādojumu lineāra kombinācija*, un risināšanas gaitā to no sistēmas svītro. Tādējādi sistēmā atstāj tikai tos vienādojumus, no kuriem neviena nav pārējo vienādojumu lineāra kombinācija; šādus vienādojumus saucim par *lineāri neatkarīgiem*.

Ja sistēmā visu lineāri neatkarīgo vienādojumu skaits r ir mazāks nekā nezināmo lielumu skaits n , tad $n-r$ nezināmajiem piešķir brīvi izraudzītas vērtības, bet pārējo r nezināmo lielumu vērtības aprēķina no sistēmas (ja vien tā ir saderīga).

Tātad, lai atrisinātu brīvi izraudzītu lineāru vienādojumu sistēmu, vispirms ir jānoskaidro, vai sistēma ir saderīga. Pēc tam jānosaka, kuri vienādojumi ir citu vienādojumu lineāras kombinācijas, un tātad no sistēmas jāsvītro. Beidzot ir jānosaka, kuriem nezināmajiem lielumiem var piešķirt brīvi izraudzītas vērtības.

Lai atbildētu uz šiem jautājumiem, ir jāpēta sistēmas koeficientu matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Aplūkosim dažas šīs matricas rindas. Ja nevienu no tām nevar izteikt kā pārējo rindu lineāru kombināciju, tad saka, ka *rindas ir lineāri neatkarīgas*. Ja aplūkotas rindas pievieno vēl kādu citu rindu, tad ir iespējams, ka izvēlētais rindas joprojām ir lineāri neatkarīgas. Visu iespējamo matricas lineāri neatkarīgo rindu skaitu sauc par *matricas rang*u, to apzīmē ar burtu r . Lieto arī apzīmējumus $r(A)$ vai $\text{rang}(A)$. Analogi spriež par matricas kolonnām. Izrādās, ka *matricas vislielākais lineāri neatkarīgo kolonnu skaits ir vienāds ar visu lineāri neatkarīgo rindu skaitu, t. i., ar matricas rang*u. Lai noteiktu matricas rang un vienlaikus konstatētu, kuras rindas un kuras kolonnas ir lineāri neatkarīgas, ar matricu veic pārveidojumus, kuri nemaina tās rang. Šādus pārveidojumus sauc par *matricas elementārajiem pārveidojumiem*.

Matricas rangs nemainās, ja veic šādus pārveidojumus:

- 1) maina vietām jebkuras divas rindas (vai kolonnas);
- 2) reizina (vai daļa) jebkuru rindu (vai kolonnu) ar brīvi izraudzītu skaitli, kas nav nulle;
- 3) pieskaita kādai rindai (vai kolonnai) citu rindu (vai kolonnu), kas reizināta ar brīvi izraudzītu skaitli.

Šo elementāro pārveidojumu rezultātā no dotās matricas var iegūt matricu, kuras elementi ir tikai nulles un vieninieki, turklāt nevienā rindā un kolonnā nav divu vai vairāk vieninieku, bet ir iespējams, ka kādā rindā (vai kolonnā) visi elementi ir nulles. Šādas matricas to rindu (vai kolonnu) skaits, kurās ne visi elementi ir nulle, ir vienāds ar matricas rangu r . Ilustrēsim teikto ar piemēriem.

1. piemērs. Noteikt matricas A rangu.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{\text{«R}_1 - 2\text{R}_2\text{»} \\ \text{«R}_3 - 6\text{R}_2\text{»} \\ \text{«R}_4 - 2\text{R}_2\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -17 & -12 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«R}_1 : (-5)\text{»}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -17 & -12 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{«R}_2 - 3\text{R}_1\text{»} \\ \text{«R}_3 + 17\text{R}_1\text{»} \\ \text{«R}_4 + 3\text{R}_1\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«R}_3 : (-12)\text{»}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{«R}_2 - 2\text{R}_3\text{»} \\ \text{«R}_4 - \text{R}_3\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tā kā iegūtajā matricā trīs rindās ne visi elementi ir nulle, tad secinām, ka dotās matricas rangs $r=3$. Ceturtajā rindā visi elementi ir nulles, un tāvad dotās matricas 4. rindu var izteikt kā pārējo rindu lineāru kombināciju. Līdz ar to, ja A ir kādas lineāru vienādojumu sistēmas koeficientu matrica, tad 4. vienādojuma kreisās puses izteiksme ir pārējo vienādojumu kreisās puses izteiksmju lineāra kombinācija.

2. piemērs. Noteikt matricas A rangu.

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{«R}_1 - 4\text{R}_2\text{»}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -20 & -23 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{«K}_2 - 3\text{K}_1\text{»} \\ \text{«K}_3 - 5\text{K}_1\text{»} \\ \text{«K}_4 - 6\text{K}_1\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & -10 & -20 & -23 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 &\xrightarrow{\substack{\text{«K}_2 : (-10)\text{»} \\ \text{«K}_3 : (-20)\text{»} \\ \text{«K}_4 : (-23)\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{«K}_3 - \text{K}_2\text{»} \\ \text{«K}_4 - \text{K}_2\text{»}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tā kā iegūtās matricas divās rindās (un arī kolonnās) ne visi elementi ir vienādi ar nulli, tad matricas rangs $r=2$. Matricas 3. un 4. kolonnā visi elementi ir vienādi ar nulli, un tāvad šīs kolonnas ir pārējo divu kolonnu lineāras kombinācijas. Ja matrica A ir lineāru vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + \quad \quad x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3 \end{cases}$$

koeficientu matrica, kuras 3. kolonnas elementi ir nezināmā lieluma x_3 koeficienti un 4. kolonnas elementi ir nezināmā x_4 koeficienti, tad nezināmajiem x_3 un x_4 var piešķirt brīvi izraudzītas vērtības C_1 un C_2 un pārējos nezināmos x_1 un x_2 izteikt ar tām.

Izmantojot matricas ranga jēdzienu, var noskaidrot arī jautājumu, vai lineāru vienādojumu sistēma ir saderīga. Ja sistēmas vienādojumi ir pretrunīgi, tad sistēma ir nesaderīga, piemēram, vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$$

nav saderīga, jo, otrā vienādojuma abas puses dalot ar 3, iegūst

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+2y=3. \end{cases}$$

Acimredzamī nav tādu x un y vērtību, ar kurām summa $x + 2y$ ir vienāda gan ar skaitli 5, gan arī ar skaitli 3. Viegli ievērot, ka dotajā sistēmā koeficienti pie x un y ir proporcionāli, bet nav proporcionāli brīvajiem locekļiem, proti,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \neq \frac{5}{9}.$$

Vispārīgā gadījumā sistēma nav saderīga, ja kāda vienādojuma kreisās puses izteiksme ir citu vienādojumu kreisās puses izteiksmju lineāra kombinācija, bet šī vienādojuma brīvais loceklis nav pārējo vienādojumu brīvo locekļu tāda pati lineāra kombinācija (ar tiem pašiem reizinātājiem, kādi ir kreisās puses izteiksmju lineāra kombinācijā). Piemēram, aplūkosim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+3z=4 \\ x-4y+9z=10. \end{cases}$$

Sīs sistēmas trešā vienādojuma kreisās puses izteiksme ir pirmo divu vienādojumu kreisās puses izteiksmju lineāra kombinācija, jo $x - 4y + 9z = -3(x + 2y - z) + +2(2x + y + 3z)$. Taču trešā vienādojuma brīvais loceklis $10 \neq -3 \cdot 1 + 2 \cdot 4$. Tātad sistēmas trešais vienādojums ir pretrunīgs ar pārējiem vienādojumiem, un tāpēc sistēma nav saderīga. Šo faktu var konstatēt arī ar koeficientu matricas palīdzību. Patiešām, matricā

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

3. rinda ir pirmo divu rindu lineāra kombinācija, proti, $\langle R_3 = 2R_2 - 3R_1 \rangle$. Var pārliecināties, ka šīs matricas rangs $r=2$. Ja koeficientu matricai kā ceturto kolonnu pievieno brīvo locekļu kolonnu, tad iegūst t. s. *paplašināto matricu* A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sajā matricā 3. rinda vairs nav pirmo divu rindu lineāra kombinācija; visas A_1 rindas ir lineāri neatkarīgas un var pārliecināties, ka matricas rangs $r_1 = 3$. Tādējādi varam izdarīt šādu secinājumu: ja sistēma nav saderīga, tad tās koeficientu matricas rangs nav vienāds ar paplašinātās matricas rangu. Ir spēkā arī apgrieztais un pretējais apgalvojums. To parasti formulē šādas teorēmas veidā (aplūkosim to bez pierādījuma).

Kronekera–Kapelli teorēma

Lineāru vienādojumu sistēma ir saderīga tad un tikai tad, ja sistēmas matricas A rangs r ir vienāds ar paplašinātās matricas A_1 rangu r_1 .

Kopsavilkums

Pieņemsim, ka ir dota nehomogēna lineāru vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

kurā vispārīgajā gadījumā $m \neq n$. No iepriekšējā vielas izklāsta izriet šāds sistēmas risināšanas algoritms.

1. Sastāda sistēmas **koeficientu matricu**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un nosaka tās rangu r .

2. Sastāda **paplašināto matricu**

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

un nosaka tās rangu r_1 .

3. Ja $r = r_1$, tad sistēma ir saderīga. No sistēmas svīturo tos vienādojumus, kuriem atbilstošajās matricas A_1 rindās pēc elementāro pārveidojumu izpildes visi elementi ir nulles.
4. Pārnes labajā pusē vienādojumu tos locekļus, kuriem atbilstošajās matricas A koeficientu kolonnās pēc elementāro pārveidojumu izpildes visi elementi ir nulles. Šiem nezināmajiem lielumiem piešķir brīvi izraudzītas vērtības $C_1, C_2, \dots, C_k$.
5. Iegūto sistēmu, kurā vienādojumu skaits ir vienāds ar kreisās puses nezināmo lielumu skaitu, atrisina, piemēram, ar Krāmiera formulu palīdzību.

Piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 7 \\ 6x + 8y + z = 8 \\ 2x + 2y + 11z = -6 \\ 10x + 13y + 7z = 9. \end{cases}$$

1. Atrodam sistēmas koeficientu matricas A rangu:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 11 \\ 10 & 13 & 7 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\substack{\text{«R}_2 - 3\text{R}_1\text{»} \\ \text{«R}_3 - \text{R}_1\text{»} \\ \text{«R}_4 - 5\text{R}_1\text{»}}]{} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 16 \\ 0 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 32 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{«R}_3 - \text{R}_2\text{»}]{\text{«R}_4 - 2\text{R}_2\text{»}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\text{«K}_1 : 2\text{»}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{«K}_3 + 5\text{K}_1\text{»}]{\text{«K}_2 - 3\text{K}_1\text{»}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\text{«K}_3 + 16\text{K}_2\text{»}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Secinām, ka sistēmas rangs $r = 2$.

2. Atrodam sistēmas paplašinātās matricas A_1 rangū:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 6 & 8 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 11 & -6 \\ 10 & 13 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\langle R_2 - 3R_1 \rangle \\ \langle R_3 - R_1 \rangle \\ \langle R_4 - 5R_1 \rangle}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 16 & -13 \\ 0 & -1 & 16 & -13 \\ 0 & -2 & 32 & -26 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 &\xrightarrow{\substack{\langle R_3 - R_2 \rangle \\ \langle R_4 - 2R_2 \rangle}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle K_1 : 2 \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\
 &\xrightarrow{\substack{\langle K_2 - 3K_1 \rangle \\ \langle K_3 + 5K_1 \rangle \\ \langle K_4 - 7K_1 \rangle}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\langle K_3 + 16K_2 \rangle \\ \langle K_4 - 13K_2 \rangle}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Tātad $r_1 = 2$. Tā kā $r = r_1$, tad sistēma ir saderīga.

3. Izpildot ar matricu A , elementāros pārveidojumus, ieguvām matricu, kuras 3. un 4. rindā visi elementi ir nulles; tātad no sistēmas var svītrot 3. un 4. vienādojumu, jo tie ir pirmo divu vienādojumu sekas.
4. Locekļus, kas satur z , pārnēs vienādojuma labajā pusē, jo pēc elementāro pārveidojumu izpildes matricas A trešajā kolonnā visi elementi ir nulles. Tādējādi iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 + 5z \\ 6x + 8y = 8 - z, \end{cases}$$

kurā nezināmajam z var dot jebkuru reālu skaitlisku vērtību C , t. i., $z = C$.

5. x un y vērtības atrodam pēc Krāmiera formulām:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7+5C & 3 \\ 8-C & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{56+40C-24+3C}{-2} = \frac{43C+32}{-2} = -21,5C-16.$$

Tātad dotajai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu ($-21,5C - 16$; $16C + 13$; C), kur C ir jebkurš reāls skaitlis.

Piezīme. Pieņemsim, ka dota homogēna vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Matricu formā šo sistēmu var pierakstīt tā: $A \cdot X = O$. Pieņemsim, ka vispārīgajā gadījumā $m \neq n$. Tā kā paplašinātās matricas A_1 pēdējā kolonnā visi elementi ir vienādi ar 0, tad $r(A) = r(A_1)$ un no Kronekera–Kapelli teorēmas izriet, ka homogēnā sistēma vienmēr ir saderīga.

Patiešām, jebkurai homogēnai sistēmai eksistē triviālais atrisinājums

$$x_1=0, \quad x_2=0, \quad \dots, \quad x_n=0.$$

Ja $r < n$, tad saskaņā ar teorēmu homogēnai sistēmai eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu un tātad – arī netriviālie atrisinājumi. Ja turklāt $m=n$, tad iespējami divi gadījumi:

1) $r=m=n$ (t. i., $\det A \neq 0$); šādā gadījumā no Krāmiera formulām izriet, ka sistēmai eksistē tikai triviālais atrisinājums;

2) $r < m=n$ (t. i., $\det A = 0$) – sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

Teikto var apkopot šādas teorēmas veidā.

Homogēnai lineāru vienādojumu sistēmai $A \cdot X = 0$ eksistē netriviāls atrisinājums tad un tikai tad, ja sistēmas matricas rangs $r(A)$ ir mazāks nekā nezināmo skaits.

Homogēnas sistēmas netriviālos atrisinājumus iegūst, veicot iepriekšaplūkotā algoritma 1., 3., 4. un 5. soli.

1. piemērs. Noskaidrot dotās vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

saderību; ja sistēma saderīga, atrisināt to.

1. Atrodam sistēmas koeficientu matricas rangu:

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\substack{\text{«}R_1 - R_2\text{»} \\ \text{«}R_3 - 2R_2\text{»}}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«}R_3 - R_1\text{»}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\substack{\text{«}K_1 - K_3\text{»} \\ \text{«}K_2 - K_3\text{»}}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{«}K_2 + 4K_1\text{»}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tātad sistēmas rangs $r(A) = 2$.

2. Veicot elementāros pārveidojumus ar matricu A , ieguvām matricu, kuras 3. rindā visi elementi ir nulles. Tātad 3. vienādojums dotajā sistēmā ir pirmo divu vienādojumu sekas un to var svītrot. Tādējādi jāatrisina sistēma

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y + z = 0, \end{cases}$$

kurai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu.

3. Locekļus, kas satur y , pārnēs vienādojumu labajā pusē, jo pēc elementārajiem pārveidojumiem matricas A visi 2. kolonnas elementi ir nulles. Iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} 2x + z = 3y \\ x + z = -y, \end{cases}$$

kurā pieņemam, ka $y = C$ (C – brīvi izraudzīts skaitlis), t. i.,

$$\begin{cases} 2x + z = 3C \\ x + z = -C. \end{cases}$$

4. Šo sistēmu atrisinām ar Krāmiera formulām:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3C & 1 \\ -C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4C}{1} = 4C; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3C \\ 1 & -C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2C-3C}{1} = -5C.$$

Tātad dotajai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu ($4C$; C ; $-5C$), kur C ir jebkurš reāls skaitlis.

2. piemērs. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Atrodam sistēmas koeficientu matricas A rangu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{«R}_1 - 2\text{R}_3\text{»} \\ \text{«R}_2 - \text{R}_3\text{»} \\ \text{«R}_4 + \text{R}_3\text{»}}]{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\substack{\text{«R}_2 : 2\text{»} \\ \text{«R}_3 - \text{R}_1\text{»}}]{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\substack{\text{«R}_3 - \text{R}_2\text{»} \\ \text{«R}_4 - 6\text{R}_2\text{»}}]{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Tā kā sistēmas rangs $r(A) = 3$ ir vienāds ar nezināmo skaitu $n = 3$, tad šai sistēmai eksistē vienīgi triviālais atrisinājums $(0, 0, 0)$, t. i., $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

1.2. §. KOMPLEKSO SKAITĻU KOPA

1. KOMPLEKSĀ SKAITĻA JĒDZIENS UN AR TO SAISTĪTIE PAMATJAUTĀJUMI

Viens no svarīgākajiem matemātikas pamatelementiem ir reālā skaitļa jēdziens. Skolas matemātikas kursā reālo skaitļu kopas jēdziens veidojas, pakāpeniski paplašinot jau pazīstamo skaitļu kopas. Viens no kādas skaitļu kopas paplašināšanas iemesliem ir nepieciešamība izpildīt tādu aritmētikas darbību, kas nav definēta ar visiem šīs kopas elementiem. Tā, piemēram, naturālo skaitļu kopā N ne vienmēr var izpildīt atņemšanas un dalīšanas darbības, jo, piemēram, starpība $5 - 7$ un dalījums $3 : 4$ nav naturāli skaitļi. Lai atņemšanas darbību varētu izpildīt ar jebkuriem diviem naturāliem skaitļiem, tiek definēti jēdzieni «nulle» un «naturāliem skaitļiem pretējie skaitļi». Paplašinot ar šiem skaitļiem naturālo skaitļu kopu, iegūst veselo skaitļu kopu Z , kura naturālo skaitļu kopu N ietver sevī kā apakškopu. Taču arī veselo skaitļu kopā ne vienmēr var izpildīt dalīšanas darbību, jo, piemēram, dalījumus $5 : 7$, $-3 : 4$ u. tml. nevar izteikt ar veseliem skaitļiem. Tāpēc

tiek definēts jēdziens «daļskaitlis» divu skaitļu m un n dalījuma $\frac{m}{n}$, $m \in Z$, $n \in N$

apzīmēšanai. Pievienojot veselo skaitļu kopai daļskaitļus, iegūst racionālo skaitļu kopu Q , kuras jebkuru elementu var izteikt arī kā bezgalīgu periodisku decimāldaļskaitli. Racionālo skaitļu kopā savukārt ne vienmēr var izpildīt kāpināšanai apgriezto darbību – saknes atrašanu. Tā, piemēram, $\sqrt{2}$ nav racionāls skaitlis, bet

gan ir bezgalīgs neperiodisks decimāldaļskaitlis, t. i., iracionāls skaitlis. Pievienojot racionālo skaitļu kopai visus bezgalīgos neperiodiskos decimāldaļskaitļus, iegūst reālo skaitļu kopu R . Ar reāliem skaitļiem var izteikt visu aritmētikas darbību rezultātus, izņemot dalījumu ar 0 (tas nav definēts) un pāra pakāpes sakni no negatīva skaitļa. Piemēram, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-16}$ u. tml. nav reāli skaitļi, jo saskaņā ar reālo skaitļu kāpināšanas definīcijām nav tādu reālu skaitļu, kuru kvadrāts ir -9 vai ceturrtā pakāpe ir -16 .

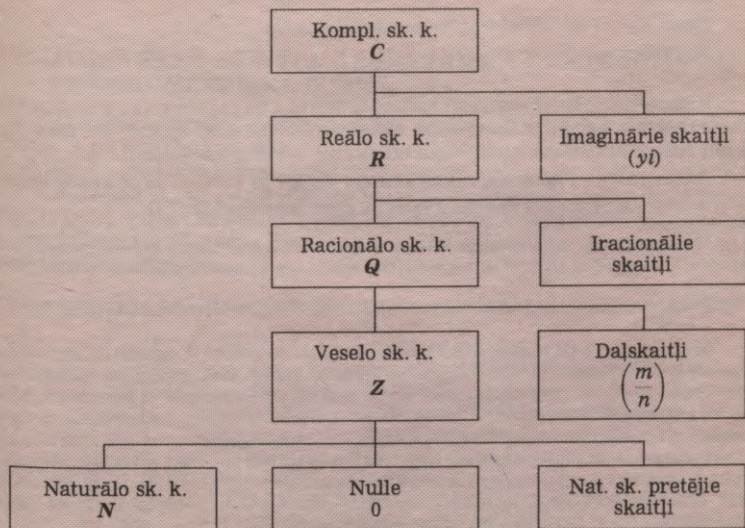
Tomēr praksē sastopami uzdevumi, kuru risināšanas gaitā nonāk pie pāra pakāpes saknes no negatīva skaitļa. Kā piemēru var minēt uzdevumu, konstruējot funkcijas $y = ax^2 + bx + c$ grafiku. Lai to atrisinātu, jāatrod grafika krustpunkti ar koordinātu asīm. Krustpunktus ar Ox asi atrod, risinot kvadrātvienādojumu $ax^2 + bx + c = 0$. Ja, piemēram, $y = x^2 - 6x + 13$, tad ir jāatrisina kvadrātvienādojums $x^2 - 6x + 13 = 0$, kura diskriminants $D = b^2 - 4ac = -16 < 0$. Tāpēc kvadrātvienādojumam reālu sakņu nav un tātad funkcijas grafiks – parabola Ox asi nekrusto.

=====

Skaitļu kopu apzīmējumi

- N – naturālo skaitļu kopa,
- Z – veselo skaitļu kopa,
- Q – racionālo skaitļu kopa,
- R – reālo skaitļu kopa,
- C – komplekso skaitļu kopa.

Skaitļu kopu paplašināšanas shēma



Ja atrasto diskriminanta vērtību -16 ievieto kvadrātvienādojuma sakņu formulā

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ iegūst izteiksmi}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2},$$

kurā $\sqrt{-16}$ nav reāls skaitlis. Pārveidosim šo izteiksmi, formāli lietojot sakarību $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, kas ir spēkā reālo skaitļu kopā:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4 \cdot \sqrt{-1} \text{ un}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{-1}.$$

Šādi rīkojoties, visos gadījumos kvadrātsakni no negatīva skaitļa var izteikt ar simbolu $y\sqrt{-1}$, kur y ir reāls skaitlis. Piemēram, $\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)} = 5\sqrt{-1}$, $\sqrt{-7} = \sqrt{7 \cdot (-1)} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1}$ u. tml. Tā kā neeksistē tāds reāls skaitlis, kura kvadrāts ir -1 , tad ir nepieciešams paplašināt skaitļa jēdzienu, īpaši definējot skaitli ar šādu īpašību.

Definīcija.¹ Simbolu $\sqrt{-1}$ sauc par imagināro vienību.

Imagināro vienību apzīmē ar burtu i , proti, $\sqrt{-1} = i$ (dažkārt to apzīmē arī ar burtu j).

Darbībās ar imagināro vienību lietojot reālo skaitļu darbību nosaukumus un izteiksmju pierakstu likumus, iegūstam, ka

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1, \quad \sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i, \quad \sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{7} \cdot i \text{ u. tml.}$$

Izmantojot imagināro vienību, kvadrātvienādojuma $x^2 - 6x + 13 = 0$ saknes var apzīmēt ar simboliem $3 + 2i$ un $3 - 2i$. Ieviesīsim nosaukumus šāda tipa izteiksmēm.

Definīcija. Simbolu yi , kur y ir reāls skaitlis, sauc par imagināru skaitli.

Tātad $4i$, $\sqrt{7} \cdot i$, $-5i$ u. tml. ir imagināri skaitļi.

Definīcija. Simbolu $x + yi$, kur x un y ir reāli skaitļi, sauc par kompleksu skaitli.

Kompleksus skaitļus parasti apzīmē ar burtu z un raksta $z = x + yi$ (var rakstīt arī $z = x + iy$); x sauc par kompleksā skaitļa reālo daļu, to apzīmē arī šādi: Re , y – par imaginārās daļas koeficientu un apzīmē arī ar simbolu Im .

Definīcija. Par kompleksā skaitļa $z = x + yi$ moduli sauc reālu skaitli $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Kompleksā skaitļa z moduli apzīmē ar simbolu $|z|$.

¹ Jāatzīmē, ka šo definīciju un ar to saistītos spriedumus nevar uzskatīt par matemātiski pilnīgi korektiem, tāpēc plašākos algebras kursos komplekso skaitļu kopas definēšanai lieto citu pieeju.

=====

Kompleksā skaitļa jēdziens matemātikā parādījās 16. gadsimtā saistībā ar algebrisku vienādojumu atrisināšanu. Šis jēdziens pirmo reizi minēts 1545. gadā itāļu matemātiķa *Džeronīmo Kardano* (1501–1576) darbā «Lielā māksla jeb par algebras likumiem». Šajā darbā kvadrātsakne no skaitļa -1 nosaukta par imagināro vienību. Latīņu vārds «imaginarium» nozīmē *šķietams, iztēlē pastāvošs*, tātad – *nerēāls*. Tādējādi nosaukums norāda, ka matemātiski korekta priekšstats par kompleksiem skaitļiem tajā laikā vēl nebija. Sistemātisku komplekso skaitļu teoriju izstrādāja *Leonards Eilers* (1707–1783). 18. un 19. gadsimtā tika izveidota kompleksā mainīgā funkciju teorija, kurai ir nozīmīgi lietojumi citās matemātikas nozarēs, fizikā, mehānikā, tehnikā.

Piemēram, ja $z_1 = 3 + 4i$, tad $|z_1| = \sqrt{9 + 16} = 5$; ja $z_2 = -2 - 6i$, tad $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$; ja $z_3 = -5i = 0 - 5i$, tad $|z_3| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$.

Definīcija. Divus kompleksus skaitļus $z_1 = x_1 + y_1 i$ un $z_2 = x_2 + y_2 i$ sauc par **vienādiem** un raksta $z_1 = z_2$, ja ir vienādas to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti, t. i., ja $x_1 = x_2$ un $y_1 = y_2$.

Attieksmes «lielāks» ($>$) un «mazāks» ($<$) kompleksi skaitļiem nav definētas.

Definīcija. Kompleksus skaitļus $z_1 = x + yi$ un $z_2 = x - yi$ sauc par **saistītiem kompleksiem skaitļiem**. Kompleksā skaitļa z saistīto komplekso skaitli parasti apzīmē ar simbolu $\bar{z}$.

Iepriekš aplūkotā kvadrātvienādojuma $x^2 - 6x + 13 = 0$ saknes ir saistīti kompleksi skaitļi $z = 3 + 2i$ un $\bar{z} = 3 - 2i$. Acīmredzami vienmēr, ja kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ diskriminants $D = b^2 - 4ac$ ir negatīvs, šī vienādojuma saknes ir saistīti kompleksi skaitļi z un $\bar{z}$, jo

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2} \cdot i}{2a},$$

$$z = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i \quad \text{un} \quad \bar{z} = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \cdot i.$$

Saistītiem kompleksiem skaitļiem ir vienādi moduli, jo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ un arī $|\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definīcija. Kompleksus skaitļus $z_1 = x + yi$ un $z_2 = -x - yi$ sauc par **savstarpēji pretējiem kompleksiem skaitļiem**.

Piemēram, $z_1 = 3 + 4i$ un $z_2 = -3 - 4i$ ir savstarpēji pretēji kompleksi skaitļi.

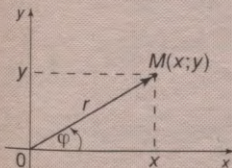
Arī savstarpēji pretējiem kompleksiem skaitļiem ir vienādi moduli: $|z_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z_2| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. KOMPLEKSĀ SKAITĻA ĢEOMETRISKĀ ILUSTRĀCIJA UN TRIGONOMETRISKĀ FORMA

Kā zināms, katram reālam skaitlim atbilst noteikts koordinātu taisnes punkts. Tā kā kompleksu skaitli $z = x + yi$ var uzdot ar sakārtotu reālu skaitļu pāri $(x; y)$, tad tā ģeometriskai ilustrācijai lieto Dekarta koordinātu sistēmu plaknē.

Kompleksu skaitli $z = x + yi$ attēlo kā punktu koordinātu plaknē, kura koordinātas ir $(x; y)$, vai arī kā vektoru, kura sākumpunkts ir koordinātu sākumpunkts O , bet galapunkts – punkts $M(x; y)$ (A-1. zīm.). Kompleksā skaitļa modulis ir vienāds ar šī vektora garumu.

~~~~~



A-1. zīm.

$i = \sqrt{-1}$  – imaginārā vienība,  
 $i^2 = -1$  – imaginārās vienības pamatīpašība,  
 $yi$  – imaginārs skaitlis,  
 $z = x + yi$  – kompleksā skaitļa algebriskā forma,  
 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  – kompleksā skaitļa modulis,  
 $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – kompleksā skaitļa trigonometriskā forma,  
 $z = re^{i\varphi}$  – kompleksā skaitļa eksponentforma,  
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  – Eilera formula.

Saistītus kompleksus skaitļus  $z = x + yi$  un  $z = x - yi$  attēlo pret  $Ox$  asi simetriski punkti, piemēram, kompleksus skaitļus  $4 + 3i$  un  $4 - 3i$  attēlo punkti  $A(4; 3)$  un  $B(4; -3)$  (A-2. zīm.).

Savstarpēji pretējus kompleksus skaitļus attēlo pret koordinātu sistēmas sākumpunktu simetriski punkti, piemēram, kompleksus skaitļus  $4 + 3i$  un  $-4 - 3i$  attēlo punkti  $A(4; 3)$  un  $B(-4; -3)$ , kas ir simetriski attiecībā pret punktu  $O(0; 0)$  (A-3. zīm.).

Kompleksu skaitli, kura reālā daļa ir nulle, t. i., skaitli  $0 + yi$  jeb  $yi$ , attēlo ar punktu, kas atrodas uz  $Oy$  ass.

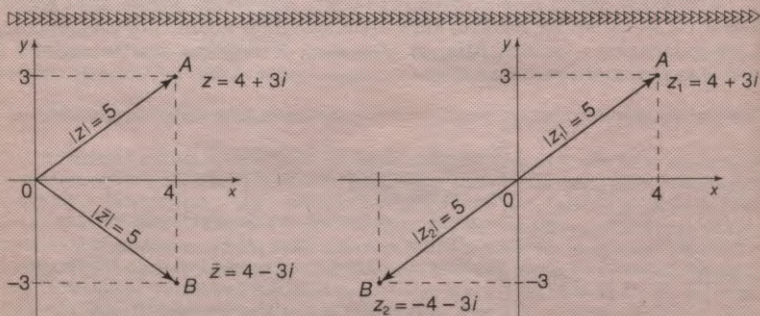
Ja imaginārās daļas koeficients ir nulle, tad kompleksā skaitlī ir tikai reālā daļa, t. i.,  $x + 0i = x$ , un šādu kompleksu skaitli attēlo ar  $Ox$  ass punktu.

Ar kompleksā skaitļa ģeometrisko ilustrāciju ir saistīts šī skaitļa pārveidojums trigonometriskā formā. Aplūkosim kompleksu skaitli  $z = x + yi$ , kuru koordinātu plaknē attēlo ar punktu  $M(x; y)$  jeb ar vektoru  $\vec{OM}$  (A-1. zīm.). Apzīmēsim ar  $\varphi$  leņķi, ko šis vektors veido ar  $Ox$  ass pozitīvo virzienu. Šī vektora garums (modulis) ir vienāds ar kompleksā skaitļa moduli  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . No trigonometrisko funkciju definīcijām izriet, ka  $\sin \varphi = \frac{y}{r}$  un  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$  jeb  $x = r \cos \varphi$  un  $y = r \sin \varphi$ . Ievietojot šīs izteiksmes kompleksā skaitļa izteiksmē  $z = x + yi$ , iegūstam, ka  $z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$  jeb

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

Šo izteiksmi sauc par kompleksā skaitļa **trigonometrisku formu**. Leņķi  $\varphi$  sauc par **kompleksā skaitļa argumentu** un apzīmē ar simbolu  $\arg z$ . Tā kā sinusa un kosinusa funkcijas periods ir  $2\pi$ , tad  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r(\cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k))$ , kur  $k \in \mathbb{Z}$ . Tātad  $\varphi + 2\pi k$  arī ir šī paša kompleksā skaitļa arguments. Lai vienam un tam pašam kompleksajam skaitlim pieraksts būtu viennozīmīgs, lieto jēdzienu **kompleksā skaitļa argumenta galvenā vērtība**, to apzīmē ar  $\arg z$  un pieņem, ka šis leņķis atrodas intervālā  $(-\pi; \pi]$ , t. i.,  $-\pi < \arg z \leq \pi$ .

Risinot uzdevumus, bieži ir nepieciešams algebriskā veidā dotu kompleksu skaitli  $x + yi$  pārveidot trigonometriskā formā. Lai to izdarītu, aprēķina moduli pēc formulas  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  un nosaka kompleksā skaitļa argumenta galveno vērtību, izmantojot sakarības  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . No šīm sakarībām izriet, ka  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$  jeb  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , ja  $x \neq 0$ .



A-2. zīm.

A-3. zīm.

Ievērojot, ka argumenta galvenā vērtība atrodas intervālā  $(-\pi; \pi]$ , iegūstam šādu rezultātu:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{ja } z \text{ atrodas I vai IV kvadrantā,} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{ja } z \text{ atrodas II kvadrantā,} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{ja } z \text{ atrodas III kvadrantā,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ja } x=0 \text{ un } y>0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ja } x=0 \text{ un } y<0, \\ 0, & \text{ja } y=0 \text{ un } x>0, \\ \pi, & \text{ja } y=0 \text{ un } x<0. \end{cases}$$

Parasti tomēr kompleksā skaitļa argumenta, t. i., vektora  $\vec{OM}$  un  $Ox$  ass veidotā leņķa  $\varphi$  noteikšanai izmanto arī zīmējumu.

Piemērs. Pārveidot trigonometriskā formā dotos kompleksos skaitļus:

$$1) z_1 = 1 + \sqrt{3}i; \quad 2) z_2 = -1 - i; \quad 3) z_3 = 3i; \quad 4) z_4 = -4.$$

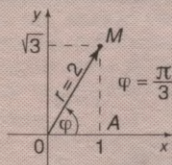
$$1) z_1 = 1 + \sqrt{3}i \text{ (A-4. zīm.)}$$

Aprēķinām kompleksā skaitļa moduli  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ . No taisnleņķa trijstūra  $OAM$  izriet, ka  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$  un tātad  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ . Saskaņā ar formulu (1) iegūstam, ka

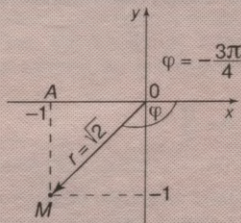
$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

$$2) z_2 = -1 - i \text{ (A-5. zīm.)}$$

Atrodam  $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ . Tā kā  $OAM$  ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tad  $\angle AOM = \frac{\pi}{4}$ , bet  $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$ . Tātad  $z_2 = -1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right)$ .



A-4. zīm.



A-5. zīm.

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$-1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

3)  $z_3 = 3i$  (A-6. zīm.).

Acīmredzami  $r=3$  un  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Tātad  $z_3 = 3i = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ .

4)  $z_4 = -4$  (A-7. zīm.).

Reālo skaitli  $-4$  var izteikt ar kompleksā skaitļa algebrisko formu šādi:  $z_4 = -4 + 0 \cdot i$ . Šī kompleksā skaitļa modulis  $r=4$  un arguments  $\varphi = \pi$ . Līdz ar to  $z_4 = -4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$ .

Piezīme. Bez kompleksā skaitļa algebriskās vai trigonometriskās formas lieto arī kompleksā skaitļa pierakstu ar eksponentfunkcijas palīdzību. Šajā nolūkā definē imagināra argumenta eksponentfunkciju, kuras bāze ir iracionāls skaitlis  $e = 2,71828 \dots$ . Šo funkciju definē ar t. s. *Eilera formulu*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Izmantojot šo formulu, no izteiksmes (1) iegūstam vienādību

$$z = re^{i\varphi}.$$

Tās labās puses izteiksmi sauc par *kompleksa skaitļa eksponentformu*

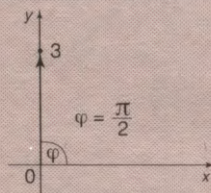
Tādējādi komplekso skaitli var izteikt trīs dažādos veidos:

- 1) algebriskā formā  $z = x + yi$ ,
- 2) trigonometriskā formā  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,
- 3) eksponentformā  $z = re^{i\varphi}$ .

Piemēram, kompleksā skaitļa  $z = 1 + \sqrt{3}i$  trigonometriskā forma ir  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ , bet eksponentforma ir  $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

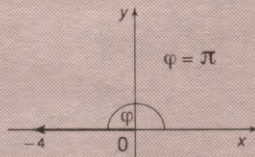
### 3. DARBĪBAS AR KOMPLEKSIEM SKAITĻIEM

**Darbību definēšanas principi paplašinātā skaitļu kopā.** Šī paragrāfa sākumā noskaidrojām, ka kompleksā skaitļa jēdziens ir nepieciešams, lai varētu definēt negatīvam reālam skaitlim pāra pakāpes sakni (pagaidām gan šo uzdevumu aplūkojām tikai kvadrātsaknes gadījumam). Kā redzējām, ar kompleksa skaitļa pierakstu var izteikt arī jebkuru reālu skaitli, piemēram,  $7 = 7 + 0 \cdot i$ ,  $-3 = -3 + 0 \cdot i$ ,  $0 = 0 + 0 \cdot i$  u. tml. Komplekso skaitļu kopas  $C$  elementi ir īpaši definēti reālu sakārtotu skaitļu pāri  $(x, y)$ , kurus parasti pieraksta ar izteiksmi  $x + yi$ ; šajā izteiksmē ar simbolu  $i$  apzīmē  $\sqrt{-1}$ . Ja  $y=0$ , tad ar kompleksā skaitļa



A-6. zīm.

$$3i = 3 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$



A-7. zīm.

$$-4 = 4(\cos \pi + i \sin \pi) = 4e^{i\pi}$$

pierakstu ir izteikts reāls skaitlis. Tātad reālo skaitļu kopa  $R$  ir komplekso skaitļu kopas  $C$  apakškopa;  $R \subset C$ . Saskaņā ar vispārīgajiem skaitļu kopu paplašināšanas principiem komplekso skaitļu kopā ir jādefinē visas tās pašas darbības, kādas ir reālo skaitļu kopā: saskaitīšana, atņemšana, reizināšana, dalīšana, kāpināšana, saknes atrašana. Pie tam, ja saskaņā ar jaunajām definīcijām šīs darbības izpilda ar reāliem skaitļiem, tad ir jāiegūst tādi paši rezultāti kā izpildot šīs darbības pēc vecajām definīcijām.

**Komplekso skaitļu saskaitīšana.** Definīcija. *Par divu kompleksu skaitļu  $z_1 = x_1 + y_1 i$  un  $z_2 = x_2 + y_2 i$  summu sauc kompleksu skaitli*

$$z = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i. \quad (2)$$

Tātad, saskaitot kompleksus skaitļus, ir jāsaskaita to reālās daļas un imagināro daļu koeficienti, piemēram,  $(4 + 7i) + (2 + 5i) = 6 + 12i$ .

No šīs definīcijas izriet, ka komplekso skaitļu saskaitīšanai ir spēkā komutatīvā un asociatīvā īpašība:  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  un  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ .

**Komplekso skaitļu atņemšana.** Definīcija. *Par divu kompleksu skaitļu  $z_1 = x_1 + y_1 i$  un  $z_2 = x_2 + y_2 i$  starpību sauc kompleksu skaitli  $z = x + yi$ , kuru saskaitot ar  $z_2$  iegūst skaitli  $z_1$ .* Tātad  $z_1 - z_2 = z$ , ja  $z + z_2 = z_1$ .

No definīcijas izriet, ka

$$(x + yi) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + y_1 i.$$

Izmantojot kompleksu skaitļu saskaitīšanas un divu kompleksu skaitļu vienādības definīcijas, iegūstam sakarības

$$(x + x_2) + (y + y_2)i = x_1 + y_1 i,$$

$$x + x_2 = x_1, \quad y + y_2 = y_1,$$

no kurām seko, ka  $x = x_1 - x_2$  un  $y = y_1 - y_2$ . Tātad

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i, \quad (3)$$

t. i., atņemot kompleksus skaitļus, no mazināmā reālās daļas un imaginārās daļas koeficienta attiecīgi jāatņem mazinātāja reālā daļa un imaginārās daļas koeficients, piemēram,

$$(-6 + 5i) - (3 + 2i) = -9 + 3i.$$

Viegli ievērot, ka gan komplekso skaitļu saskaitīšanas definīcijā doto izteiksmi (2), gan arī atņemšanas izteiksmi (3) var iegūt, ja ar šiem skaitļiem formāli izpilda divu reālu skaitļu binomu saskaitīšanu (atņemšanu), savelkot līdzīgos locekļus, kas satur imagināro vienību  $i$ . Patiesām, formāli izpildot pārveidojumus  $(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = x_1 + x_2 + y_1 i + y_2 i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ , iegūtā izteiksme sakrīt ar izteiksmi (2). Analogi var iegūt arī izteiksmi (3). Acīmredzami, saskaitot vai atņemot pēc šīm definīcijām reālus skaitļus, kas izteikti ar komplekso skaitļu pierakstu, iegūst tādus pašus rezultātus, kā izpildot šīs darbības pēc reālo skaitļu saskaitīšanas un atņemšanas likumiem.

Piemērs

$$5 + 7 = (5 + 0i) + (7 + 0i) = 12 + 0i = 12,$$

$$14 - 6 = (14 + 0i) - (6 + 0i) = 8 + 0i = 8.$$

**Komplekso skaitļu reizināšana.** Šo darbību izpilda ar kompleksiem skaitļiem, kas doti kā algebriskā formā, tā arī trigonometriskā formā.

Definīcija. *Par komplekso skaitļu  $z_1 = x_1 + y_1 i$  un  $z_2 = x_2 + y_2 i$  reizinājumu sauc kompleksu skaitli*

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \quad (4)$$

Pārliecināsimies, ka formulu (4) var iegūt, ja reizina dotos kompleksos skaitļus, formāli izmantojot divu reālu skaitļu binomu reizināšanas likumu un ievērojot, ka  $i^2 = -1$ :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_2 y_1 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2 i^2 = \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \end{aligned}$$

Šo īpašību izmanto, praktiski reizinot kompleksus skaitļus, piemēram,  
 $(2 + 3i)(5 - 4i) = 10 + 15i - 8i - 12i^2 = 10 + 12 + 15i - 8i = 22 + 7i.$

=====

### Komplekso skaitļu summa

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i.$$

### Komplekso skaitļu starpība

$$(x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i.$$

### Komplekso skaitļu reizinājums

a) algebriskā formā

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i,$$

b) trigonometriskā formā

$$r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)),$$

c) eksponentformā

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

### Komplekso skaitļu dalījums

a) algebriskā formā

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 i &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + x_2 y_1 - y_2 x_1 i, \\ x_2 + y_2 i &= x_2^2 + y_2^2 + x_2^2 + y_2^2 i, \end{aligned}$$

b) trigonometriskā formā

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) &= \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)), \\ r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \frac{r_2}{r_2} (\cos (\varphi_2 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_2 - \varphi_2)), \end{aligned}$$

c) eksponentformā

$$\begin{aligned} r_1 e^{i\varphi_1} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ r_2 e^{i\varphi_2} &= \frac{r_2}{r_2} e^{i(\varphi_2 - \varphi_2)}. \end{aligned}$$

### Kompleksā skaitļa pakāpe

a) trigonometriskā formā

$$(r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

b) eksponentformā

$$(r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

### Kompleksā skaitļa sakne

a) trigonometriskā formā

$$\sqrt[n]{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

b) eksponentformā:

$$\sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Izpildot reizināšanas darbību ar trigonometriskā formā dotiem kompleksiem skaitļiem, iegūto rezultātu var vienkāršot, lietojot leņķu summas sinusa un kosinusa formulas. Ja  $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  un  $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ , tad pēc iepriekš aplūkotā reizināšanas paņēmiena iegūstam

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned}$$

Tādējādi esam ieguvuši šādu trigonometriskā formā dotu kompleksu skaitļu reizināšanas formulu:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (5)$$

Tātad *komplekso skaitļu reizinājuma modulis ir vienāds ar šo skaitļu moduļu reizinājumu, bet arguments ir vienāds ar doto skaitļu argumentu summu*, t. i.,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \text{ un } \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2\pi k,$$

kur  $k$  ir tāds vesels skaitlis, lai būtu spēkā nosacījums  $-\pi < \arg(z_1 z_2) \leq \pi$ .

Piemērs. Sareizināt kompleksos skaitļus  $z_1 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$  un  $z_2 = 5(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ .

Šo skaitļu moduļu reizinājums  $r_1 r_2 = 10$ , argumentu summa  $\varphi_1 + \varphi_2 = 60^\circ + 150^\circ = 210^\circ$ . Taču, tā kā reizinājuma argumentam ir jābūt intervālā  $(-180^\circ; 180^\circ]$ , tad saskaņā ar iepriekšējo norādījumu iegūstam, ka  $\arg(z_1 z_2) = 210^\circ + 360^\circ \cdot (-1) = -150^\circ$ . Līdz ar to

$$2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \cdot 5(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = 10 \cos(-150^\circ) + i \sin(-150^\circ).$$

**Komplekso skaitļu dalīšana.** Arī šo darbību izpilda ar kompleksiem skaitļiem, kas doti algebriskā formā vai trigonometriskā formā.

Definīcija. *Par komplekso skaitļu  $z_1 = x_1 + y_1 i$  un  $z_2 = x_2 + y_2 i$  dalījumu sauc kompleksu skaitli  $z = x + yi$ , kuru reizinot ar  $z_2$  iegūst skaitli  $z_1$ , t. i.,*

$$\frac{z_1}{z_2} = z, \text{ ja } z \cdot z_2 = z_1.$$

Tā kā  $(x + yi)(x_2 + y_2 i) = x_1 + y_1 i$  jeb  $(xx_2 - yy_2) + (xy_2 + x_2 y)i = x_1 + y_1 i$ , tad no divu kompleksu skaitļu vienādības definīcijas iegūstam šādu vienādojumu sistēmu attiecībā pret nezināmajiem lielumiem  $x$  un  $y$ :

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1 \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases}$$

To atrisinot, atrodam, ka

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Tātad

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} i. \quad (6)$$

Pārliedzināsimies, ka vienādību (6) var iegūt, daļas  $\frac{z_1}{z_2}$  skaitītāja un saucēja izteiksmes reizinot ar  $z_2$  saistīto komplekso skaitli  $\bar{z}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i - y_1 y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - y_2 x_1) i}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Iegūto rezultātu varam formulēt kā kompleksu skaitļu dalīšanas algoritmu:

- 1) daļas skaitītāju un saucēju reizina ar saucēja saistīto komplekso skaitli;
- 2) izpilda reizināšanas darbības un iegūto rezultātu pārveido kompleksa skaitļa algebriskajā veidā.

1. piemērs.

$$\frac{1-2i}{5+3i} = \frac{(1-2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{5-10i-3i+6i^2}{25+9} = \frac{-1-13i}{34} = -\frac{1}{34} - \frac{13}{34}i.$$

2. piemērs.

$$\frac{4+6i}{2i} = \frac{(4+6i)(-2i)}{2i \cdot (-2i)} = \frac{-8i+12}{4} = 3-2i.$$

3. piemērs.

$$\frac{6i}{1-i} = \frac{6i \cdot (1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{6i-6}{1+1} = -3+3i.$$

Ja kompleksie skaitļi ir doti trigonometriskā formā

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

tad, lietojot aplūkoto dalīšanas paņēmieni, iegūstam

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1 r_2 \cdot \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{r_2^2 \cdot \cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Esam ieguvuši šādu trigonometriskā formā dotu kompleksu skaitļu dalīšanas formulu

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (7)$$

Tātad kompleksu skaitļu dalījuma modulis ir vienāds ar šo skaitļu moduļu dalījumu, bet arguments ir vienāds ar dotu skaitļu argumentu starpību, t. i.,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{un} \quad \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2\pi k,$$

kur  $k$  ir tāds vesels skaitlis, lai būtu spēkā nosacījums  $-\pi < \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) \leq \pi$ .

Piemērs. Izdalīt kompleksos skaitļus  $z_1 = 6 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$  un  $z_2 = 3 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ .

Šo skaitļu moduļu dalījums  $\frac{r_1}{r_2} = 2$ , argumentu starpība ir  $\varphi_1 - \varphi_2 = 45^\circ - 120^\circ = -75^\circ$ , un tā atrodas intervālā  $(-180^\circ; 180^\circ]$ . Līdz ar to

$$\frac{6 (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)}{3 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = 2 (\cos (-75^\circ) + i \sin (-75^\circ)).$$

**Komplekso skaitļu kāpināšana ar naturālu kāpinātāju.** Parasti šo darbību izpilda ar trigonometriskā formā dotu kompleksu skaitli  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Lietojot kompleksu skaitļu reizināšanas formulu (5), iegūstam

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z = r \cdot r (\cos (\varphi + \varphi) + i \sin (\varphi + \varphi)) = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi), \\ z^3 &= z^2 \cdot z = r^2 \cdot r (\cos (2\varphi + \varphi) + i \sin (2\varphi + \varphi)) = r^3 (\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi). \end{aligned}$$

Piezīme. Var pierādīt, ka reāla argumenta  $\varphi$  kompleksai eksponentfunkcijai  $e^{i\varphi}$  ir tādas pašas īpašības kā reālā mainīgā gadījumā, t. i.,

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi},$$

$$\sqrt[n]{e^{i\varphi}} = e^{\frac{i\varphi}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

turklāt

$$e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi}, \quad (k \in \mathbb{Z}), \text{ t. i.,}$$

eksponentfunkcijai ir tīri imaginārs periods  $T = 2\pi i$ .

Tādējādi, lietojot kompleksā skaitļa eksponentformu

$$z = re^{i\varphi},$$

var vienkārši veikt komplekso skaitļu reizināšanu, dalīšanu, kāpināšanu un saknes aprēķināšanu (saskaitīšanu un atņemšanu parasti veic algebriskā formā). Protams, katras darbības rezultāts – kompleksais skaitlis (vai skaitļi) – jāizsaka algebriskā formā, lietojot Eilera formulu

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Aplūkosim minētās darbības, pieņemot, ka kompleksie skaitļi doti (vai pārveidoti) eksponentformā:

$$z = re^{i\varphi}, \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \quad w = \rho e^{i\alpha}.$$

#### 1) Reizinājums

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

#### 2) Dalījums

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

#### 3) Kāpināšana ar naturālu kāpinātāju $n$ :

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

#### 4) Saknes aprēķināšana.

Saskaņā ar definīciju

$$\sqrt[n]{z} = w, \text{ ja } w^n = z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tātad

$$(\rho e^{i\alpha})^n = re^{i\varphi} \text{ jeb } \rho^n e^{in\alpha} = re^{i\varphi}.$$

Divi kompleksi skaitļi ir vienādi, ja vienādi ir to moduli un argumenti; turklāt argumenti var atšķirties ar  $2\pi$  daudzkārti. Tātad no pēdējās vienādības izriet, ka

$$\rho^n = r \text{ un } n\alpha = \varphi + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ jeb } \rho = \sqrt[n]{r} \text{ un } \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}.$$

Tādējādi visas  $n$  saknes no kompleksā skaitļa  $z$  aprēķina pēc šādas formulas:

$$w = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

kur  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Analogi  $z^4 = r^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$  un ar matemātiskās indukcijas metodi var pierādīt, ka

$$(r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (6)$$

t. i.,  $|z^n| = |z|^n$  un  $\arg(z^n) = n \arg z + 2\pi k$ , kur  $k$  ir tāds vesels skaitlis, lai būtu spēkā nosacījums  $-\pi < \arg(z^n) \leq \pi$ .

Ja  $r=1$ , tad no izteiksmes (8) iegūstam vienādību

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad (9)$$

ko bieži lieto matemātikā. Šo vienādību sauc par **Muavra formulu**<sup>1</sup>.

Piemērs. Aprēķināt  $z^5$ , ja  $z = 2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ .

$$z^5 = 2^5 (\cos 5 \cdot 120^\circ + i \sin 5 \cdot 120^\circ) = 32 (\cos 600^\circ + i \sin 600^\circ).$$

Tā kā  $600^\circ = 360^\circ \cdot 2 - 120^\circ$ , tad, ievērojot nosacījumu par kompleksā skaitļa argumenta vērtību intervālu, iegūstam, ka

$$z^5 = 32 (\cos (-120^\circ) + i \sin (-120^\circ)).$$

**Saknes aprēķināšana.** Definīcija. *Par  $n$ -tās pakāpes sakni no kompleksa skaitļa  $z$  sauc tādu kompleksu skaitli  $w$ , kura  $n$ -tā pakāpe ir vienāda ar  $z$ , t. i.,*

$$\sqrt[n]{z} = w, \quad \text{ja } w^n = z.$$

Saknes aprēķināšanu parasti izpilda, ja kompleksais skaitlis ir dots trigonometriskā formā. Ja  $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  un  $w = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , tad no vienādības  $w^n = z$  iegūst, ka

$$(\rho (\cos \alpha + i \sin \alpha))^n = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

jeb saskaņā ar trigonometriskā formā dota kompleksā skaitļa kāpināšanas likumu (8)

$$\rho^n \cdot (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

No šīs vienādības izriet, ka  $\rho^n = r$  un  $n\alpha = \varphi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tātad

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{un} \quad \alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Acīmredzami dažādas leņķa  $\alpha$  vērtības iegūst, ja  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ . Līdz ar to esam ieguvuši šādu kompleksā skaitļa saknes aprēķināšanas formulu:

$$\sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (10)$$

kur  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

Tātad  $n$ -tās pakāpes saknei no kompleksā skaitļa  $z$  ir  $n$  dažādas vērtības  $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$ . Ja šos kompleksos skaitļus attēlo ar punktiem koordinātu plaknē un punktus savieno ar taisnes nogriežņiem, tad iegūst regulāru  $n$ -stūri, kas ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu  $\sqrt[n]{r}$ .

Piezīme. Tā kā jebkuru reālu skaitli var izteikt ar kompleksā skaitļa pierakstu, tad secinām, ka reāla skaitļa  $n$ -tās pakāpes saknei ir arī  $n$  dažādas vērtības (reālas vai kompleksas).

1. piemērs. Atrast  $\sqrt[3]{1+i}$ .

Vispirms pārveidojam komplekso skaitli  $1+i$  trigonometriskā formā. Tā kā  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  un  $\varphi = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ , tad  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  un saskaņā ar formulu (10) iegūstam

<sup>1</sup> *Abrahams de Muavrs* (1667–1754) – franču izcelsmes angļu matemātiķis.

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right),$$

kur  $k=0, 1, 2$ . Ievietojot šajā izteiksmē  $k$  vietā norādītās vērtības, iegūstam trīs kompleksā skaitļa  $1+i$  kuba saknes vērtības:

ja  $k=0$ , tad  $w_1 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$ ;

ja  $k=1$ , tad  $w_2 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{12} + i \sin \frac{9\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ ;

ja  $k=2$ , tad  $w_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$

ieb, ievērojot nosacījumu  $-\pi < \arg w_3 \leq \pi$  un vienādības  $\cos \frac{17\pi}{12} = \cos \left( \frac{17\pi}{12} - 2\pi \right) =$

$$= \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right), \sin \frac{17\pi}{12} = \sin \left( \frac{17\pi}{12} - 2\pi \right) = \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right),$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{12} \right) \right) = \sqrt[6]{2} (\cos (-105^\circ) + i \sin (-105^\circ)).$$

Atliekot kompleksos skaitļus  $w_1, w_2, w_3$  koordinātu plaknē, pārliecināties, ka tie atrodas regulāra trijstūra virsotnēs, kurš ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu  $\sqrt[6]{2}$  (3. zīm.).

2. piemērs. Atrisināt vienādojumu  $x^6=1$ .

Tā kā šī vienādojuma atrisinājums ir  $x = \sqrt[6]{1}$  un skaitli 1 var izteikt ar kompleksā skaitļa pierakstu  $1 = 1 + 0 \cdot i = \cos 0 + i \sin 0$ , tad

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i \sin 0} = 1 \left( \cos \frac{0 + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{6} \right),$$

kur  $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ . Tātad iegūstam sešas šī vienādojuma saknes, no kurām divas ir reāli skaitļi, bet četras – pa pāriem saistīti kompleksi skaitļi:

ja  $k=0$ , tad  $w_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + 0 \cdot i = 1$ ;

ja  $k=1$ , tad  $w_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

ja  $k=2$ , tad  $w_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

ja  $k=3$ , tad  $w_4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + 0 \cdot i = -1$ ;

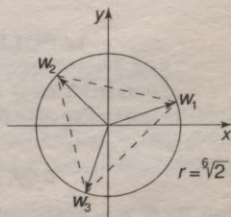
ja  $k=4$ , tad  $w_5 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;

ja  $k=5$ , tad  $w_6 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ .

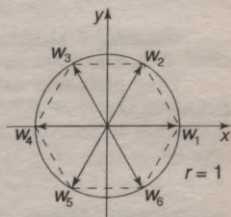
Šie skaitļi atrodas vienības riņķa līnijā ievilkta regulāra sešstūra virsotnēs (4. zīm.).

3. piemērs. Atrast  $\sqrt[4]{-16}$ .

Izsakām skaitli  $-16$  trigonometriskā formā un aprēķinām saknes vērtības:



3. zīm.

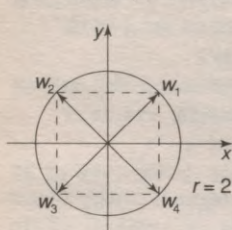


4. zīm.

$$-16 = -16 + 0 \cdot i = 16 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi),$$

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}(\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt[4]{16} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right),$$

kur  $k=0, 1, 2, 3$ . Tātad iegūstam četras  $\sqrt[4]{-16}$  vērtības:



5. zīm.

$$\text{ja } k=0, \text{ tad } w_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i;$$

$$\text{ja } k=1, \text{ tad } w_2 = 2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot i;$$

$$\text{ja } k=2, \text{ tad } w_3 = 2 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i;$$

$$\text{ja } k=3, \text{ tad } w_4 = 2 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i.$$

Šie kompleksie skaitļi atrodas regulāra četrstūra virsotnēs, kurš ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu 2 (5. zīm.).

No pēdējā piemēra redzams, ka, izmantojot kompleksā skaitļa saknes aprēķināšanas likumu, var atrast negatīva reāla skaitļa jebkuras pāra pakāpes sakni. Līdz ar to ir noskaidrots šī paragrāfa sākumā izteiktais jautājums par saknes atrašanās operāciju reālo skaitļu kopā, kas radija nepieciešamību paplašināt šo kopu, izveidojot komplekso skaitļu kopas jēdzienu.

## 1.3. §. POLINOMU ALGEBRAS ELEMENTI

### 1. POLINOMA DALĪŠANA AR POLINOMU

Matemātikā bieži lieto jēdzienus un spriedumus, kas saistīti ar polinomu īpašību izpēti. Par *polinomu* sauc algebrisku summu, kuras saskaitāmie ir pakāpes funkcijas ar naturāliem kāpinātājiem. Vispārīgā veidā  $n$ -tās pakāpes polinomu pieraksta šādi:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

kur  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i$  – koeficienti,  $x$  – mainīgais lielums, kura vērtības var būt reāli vai kompleksi skaitļi. Polinoma pieraksta *normālformā* mainīgā lieluma pakāpes ir sakārtotas kāpinātāja samazināšanās secībā, piemēram,

$$P_3(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x + 4, \quad P_2(x) = x^2 - 5x + 6 \quad \text{u. tml.}$$

Izmantojot algebrisko darbību komutatīvo, asociatīvo un distributīvo īpašību, ar polinomiem izpilda saskaitīšanas, atņemšanas un reizināšanas darbību.

Divu polinomu dalīšanu definē kā apgriezto darbību reizināšanai, t. i., par polinomu  $Q_m(x)$  un  $P_n(x)$  *dalījumu* sauc polinomu  $q_k(x)$ , kura reizinājums ar  $P_n(x)$  ir vienāds ar polinomu  $Q_m(x)$ :

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = q_k(x), \quad \text{ja } Q_m(x) = q_k(x) \cdot P_n(x).$$

Acīmredzami dalāmā polinoma  $Q_m(x)$  pakāpei  $m$  ir jābūt lielākai par dalītāja polinoma  $P_n(x)$  pakāpi  $n$  vai vienādai ar to, t. i.,  $m \geq n$ , bet dalījumā iegūtā polinoma  $q_k(x)$  pakāpe  $k = m - n$ .

No polinomu dalījuma definīcijas izriet polinomu dalīšanas paņēmieni, kuru ilustrēsim ar piemēru. Dalot polinomu  $Q_3(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x + 4$  ar polinomu  $P_2(x) = x^2 - 2x + 2$ , vispirms izdala doto polinomu pirmos locekļus, t. i., dala  $2x^3$  ar  $x^2$ . Iegūto monomu  $2x$  raksta kā pirmo locekli dalījuma polinomā. Pēc tam ar  $2x$  reizina dalītāja polinomu  $P_2(x)$  un šo reizinājumu atņem no dalāmā  $Q_3(x)$ . Iegūst polinomu  $-2x^2 + x + 4$ , kura pirmo locekli  $-2x^2$  dala ar dalītāja  $P_2(x)$  pirmo locekli  $x^2$ . Dalīšanas rezultāts ir skaitlis  $-2$ , to raksta dalījuma izteiksmē kā otro locekli. Pēc tam ar  $-2$  reizina dalītāju  $P_2(x)$  un reizinājumu atņem no pirmā dalīšanas soļa atlikuma  $-2x^2 + x + 4$ . Iegūst atlikumu  $-3x + 8$ , kas ir zemākas pakāpes polinoms nekā dalītājs  $x^2 - 2x + 2$ . Līdz ar to dalīšana ir pabeigta, jo ir iegūts dalījums  $2x - 2$  un atlikums  $-3x + 8$ . Šo dalīšanas procedūru, kas ir analoga divu veselu skaitļu dalīšanas shēmai, pieraksta šādi:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 6x^2 + 5x + 4) : (x^2 - 2x + 2) = 2x - 2. \\ \underline{2x^3 - 4x^2 + 4x} \phantom{+ 4} \\ -2x^2 + x + 4 \\ \underline{-2x^2 + 4x - 4} \\ -3x + 8 \end{array}$$

Ja, dalot polinomu  $Q_m(x)$  ar  $P_n(x)$ , pēdējā dalīšanas solī atlikums ir vienāds ar nulli, tad

$$Q_m(x) = q_{m-n}(x) \cdot P_n(x).$$

Ja dalot rodas atlikums  $R_k(x)$ , kur  $k \leq m - n$ , tad

$$Q_m(x) = q_{m-n}(x) \cdot P_n(x) + R_k(x).$$

Aplūkotajā piemērā

$$2x^3 - 6x^2 + 5x + 4 = (x^2 - 2x + 2)(2x - 2) + (-3x + 8).$$

## 2. POLINOMA SADALĪJUMS LINEĀROS REIZINĀTĀJOS

Dalot polinomus, īpaši aplūko gadījumu, kad dalītājs ir 1. pakāpes polinoms  $x - a$ , piemēram,  $x - 2$ ,  $x + 3$  u. tml. Acīmredzami, dalot polinomu  $Q_m(x)$  ar  $x - a$ , dalījumā iegūst  $(m - 1)$ -ās pakāpes polinomu  $q_{m-1}(x)$ . Ja dalot rodas atlikums, tad tas ir no  $x$  neatkarīgs skaitlis  $R$ .

Piemērs

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x - 2) = x^2 - x - 1. \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ x - 3} \\ -x^2 + x - 3 \\ \underline{-x^2 + 2x} \phantom{- 3} \\ -x - 3 \\ \underline{-x + 2} \\ -5 \end{array}$$

Šajā gadījumā dalījums  $q_2(x) = x^2 - x - 1$ , bet atlikums  $R = -5$ . Ievērosim, ka atlikums  $R$  ir vienāds ar dalāmā polinoma  $Q_3(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$  vērtību, ja  $x = 2$ . Patiešām,  $Q_3(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 - 3 = -5$ .

Ar šo piemēru esam konstatējuši īpašību, ko polinomu algebrā formulē kā Bezū teorēmu.

## Bezū teorēma

*Ja, dalot polinomu  $Q(x)$  ar binomu  $x-a$ , rodas atlikums  $R$ , tad atlikums ir vienāds ar polinoma vērtību punktā  $x=a$ , t. i.,  $R=Q(a)$ .*

Patiešām, ja dalījumā iegūtais polinoms ir  $q(x)$ , bet atlikums ir  $R$ , tad  $Q(x)=q(x) \cdot (x-a)+R$ . Šī identitāte ir spēkā ar jebkuru  $x$  vērtību, tātad arī ar vērtību  $x=a$ . Ievietojot  $x=a$ , iegūstam vienādību  $Q(a)=q(a) \cdot (a-a)+R$ , no kuras izriet, ka  $Q(a)=R$ . Līdz ar to teorēma ir pierādīta.

## Secinājums

Ja atlikums  $R=0$ , tad saskaņā ar Bezū teorēmu arī  $Q(a)=0$ , t. i., skaitlis  $a$  ir polinoma sakne. Tātad iegūstam pazīmi, pēc kuras var noteikt, kad polinomu var izdalīt bez atlikuma ar  $x-a$ :

*polinoms  $Q(x)$  dalās bez atlikuma ar binomu  $x-a$  tad un tikai tad, ja skaitlis  $a$  ir šī polinoma sakne.*

Piemēram, viegli konstatēt, ka skaitlis 1 ir polinoma  $Q(x)=x^3-3x+2$  sakne. Patiešām,  $Q(1)=1^3-3 \cdot 1+2=0$ . Pārlicināsimies, ka šo polinomu bez atlikuma var izdalīt ar binomu  $x-1$ :

$$\begin{array}{r} (x^3-3x+2):(x-1)=x^2+x-2. \\ \underline{x^3-x^2} \phantom{+2} \\ \phantom{x^3-}x^2-3x+2 \\ \phantom{x^3-}\underline{-x^2+x} \phantom{+2} \\ \phantom{x^3-}\phantom{x^2-} -2x+2 \\ \phantom{x^3-}\phantom{x^2-}\underline{-2x+2} \\ \phantom{x^3-}\phantom{x^2-}\phantom{-2x+2} 0 \end{array}$$

Polinomu teorijā svarīga nozīme ir šādai teorēmai, ko sauc par **algebras pamatteorēmu** (aplūkosit to bez pierādījuma).

*Jebkuram polinomam ir vismaz viena sakne, kas ir reāls vai komplekss skaitlis.*

Viegli pierādīt šīs teorēmas secinājumu: *jebkuram  $n$ -tās pakāpes polinomam ir tieši  $n$  saknes (reālas vai kompleksas).*

Pierādījums izriet no šāda sprieduma: tā kā jebkuram polinomam ir vismaz viena sakne, tad saskaņā ar Bezū teorēmu šo polinomu bez atlikuma var izdalīt ar binomu  $x-a$ , kur  $a$  ir polinoma sakne. Tātad

polinomam  $P_n(x)$  ir sakne  $x_1 \Rightarrow P_n(x)=(x-x_1) \cdot q_{n-1}(x)$ , (1)

polinomam  $q_{n-1}(x)$  ir sakne  $x_2 \Rightarrow q_{n-1}(x)=(x-x_2) \cdot q_{n-2}(x)$ , (2)

polinomam  $q_{n-2}(x)$  ir sakne  $x_3 \Rightarrow q_{n-2}(x)=(x-x_3) \cdot q_{n-3}(x)$ , (3)

.....

polinomam  $q_2(x)$  ir sakne  $x_{n-1} \Rightarrow q_2(x)=(x-x_{n-1}) \cdot q_1(x)$ , (n-1)

polinomam  $q_1(x)$  ir sakne  $x_n \Rightarrow q_1(x)=(x-x_n) \cdot q_0$ . (n)

=====

*Etjēns Bezū (1730–1783) – franču matemātiķis, nodarbojies galvenokārt ar algebras problēmām. Turpinājis G. Krāmera pētījumus determinantu teorijā. E. Bezū ir pierādījis, ka  $n$ -tās kārtas līnija ar  $m$ -tās kārtas līniju var krustoties ne vairāk kā  $n \cdot m$  punktos.*

Algebras pamatteorēmu formulēja jau 17. gadsimta pirmajā pusē holandiešu matemātiķis **Alberts Žirārs** (1595–1632). Taču pierādīja šo teorēmu 1799. gadā K. Gauss, kad viņam bija tikai 22 gadi. 19. gadsimtā algebras pamatteorēmu pierādīja vairāki matemātiķi. K. Gauss viens pats deva 6 dažādas pierādījumus.

Ievietojot vienādībā (1) polinoma  $q_{n-1}(x)$  vietā tā izteiksmi (2), pēc tam  $q_{n-2}(x)$  vietā izteiksmi (3) utt., beidzot polinoma  $q_1(x)$  vietā ievietojot izteiksmi (n), iegūstam, ka

$$P_n(x) = q_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n).$$

Acīmredzami  $q_0$  ir vienāds ar pakāpes  $x^n$  koeficientu  $a_0$  polinoma izteiksmē  $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ . Esam ieguvuši šādu dotā polinoma sadalījumu lineāros reizinātājos:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \dots (x-x_n).$$

Kā redzams, šim polinomam ir  $n$  saknes  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ; tās var būt reāli vai kompleksi skaitļi.

Ja  $P_n(x)$  ir 2. pakāpes polinoms  $ax^2 + bx + c$ , kura saknes ir  $x_1$  un  $x_2$ , tad iegūstam pazīstamo kvadrātrtrinoma sadalījumu reizinātājos

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

### 3. POLINOMA SADALĪJUMS REĀLOS REIZINĀTĀJOS

Nosakot polinoma saknes, ir iespējams, ka divas vai vairākas saknes ir vienādi skaitļi. Tā, piemēram, ja  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$ , tad polinoma sadalījums reizinātājos ir šāds:

$$P_n(x) = a_0 \underbrace{(x-x_1)(x-x_1) \dots (x-x_1)}_{k \text{ reizes}} (x-x_{k+1})(x-x_{k+2}) \dots (x-x_n) = a_0(x-x_1)^k(x-x_{k+1})(x-x_{k+2}) \dots (x-x_n).$$

No šī sadalījuma secinām, ka polinomu bez atlikuma var izdalīt ar  $(x-x_1)^k$ , bet nevar izdalīt bez atlikuma ar  $(x-x_1)^{k+1}$ . Šādā gadījumā saka, ka skaitlis  $x_1$  ir polinoma sakne ar kārtu  $k$ .

Piemēram, var pārliacināties, ka  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$ , bet savukārt  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ . Līdz ar to  $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$ . Tātad skaitlis 1 ir polinoma  $x^3 - 3x + 2$  divkārsa sakne, bet skaitlis  $-2$  vienkārša sakne.

Kā iepriekš norādījām, polinoma saknes var būt arī kompleksi skaitļi, turklāt kāds komplekss skaitlis var būt arī polinoma vairākkārtīga sakne. Piemēram, 1.2. §. 1. punktā noskaidrojām, ka kvadrātvienādojuma  $x^2 - 6x + 13 = 0$  saknes ir kompleksī saistīti skaitļi  $z_1 = 3 + 2i$  un  $z_2 = 3 - 2i$ . Tātad šī kvadrātvienādojuma kreisās puses 2. pakāpes polinomu var sadalīt šādos reizinātājos:

$$x^2 - 6x + 13 = (x - z_1)(x - z_2) = (x - (3 + 2i))(x - (3 - 2i)).$$

Šos reizinātājus sareizinot, iegūst kvadrātrtrinomu  $x^2 - 6x + 13$  ar negatīvu diskriminantu.

Pārliacināsimies, ka jebkuriem kompleksi saistītiem skaitļiem  $z_1 = x_1 + y_1 i$  un  $z_2 = x_1 - y_1 i$  reizinājums  $(x - z_1)(x - z_2)$  ir kvadrātrtrinoms  $x^2 + px + q$ , kura diskriminants ir negatīvs skaitlis. Patiešām,

$$\begin{aligned} (x - z_1)(x - z_2) &= (x - (x_1 + y_1 i))(x - (x_1 - y_1 i)) = \\ &= ((x - x_1) - y_1 i)((x - x_1) + y_1 i) = (x - x_1)^2 + y_1^2 = \\ &= x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y_1^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

kur  $p = -2x_1$ ,  $q = x_1^2 + y_1^2$ . Kvadrātrtrinoma diskriminants  $\frac{p^2}{4} - q = \frac{4x_1^2}{4} - x_1^2 - y_1^2 = -y_1^2 < 0$ .

Noskaidrojot jautājumu par polinoma sadalīšanu reālos reizinātājos, svarīga ir šāda teorēma.

*Ja komplekss skaitlis  $z_1 = x_1 + y_1 i$  ir polinoma sakne ar kārtu  $k$ , tad saistītais kompleksais skaitlis  $\bar{z}_1 = x_1 - y_1 i$  arī ir šī polinoma sakne ar kārtu  $k$*

No iepriekš teiktā izriet šāds secinājums. Polinoma sadalījumā reizinātajos var būt gan reizinātāji  $x - x_m$ , kur  $x_m$  ir reāls skaitlis, gan arī reizinātāji  $x - z_j$ , kur  $z_j$  ir kompleks skaitlis. Ja sadalījums satur reizinātāju  $x - z_j$ , tad šajā sadalījumā ir arī  $x - \bar{z}_j$ , turklāt  $(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = x^2 + px + q$ , kur  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ .

Kopsavilkums.

Ja polinomam  $P_n(x)$  ir

|                                |         |
|--------------------------------|---------|
| reāla sakne $x_1$ ar kārtu     | $k_1$ , |
| reāla sakne $x_2$ ar kārtu     | $k_2$ , |
| .....                          |         |
| reāla sakne $x_m$ ar kārtu     | $k_m$ , |
| kompleksa sakne $z_1$ ar kārtu | $r_1$ , |
| kompleksa sakne $z_2$ ar kārtu | $r_2$ , |
| .....                          |         |
| kompleksa sakne $z_j$ ar kārtu | $r_j$ , |

tad

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} \cdot (x - z_1)^{r_1} (x - \bar{z}_1)^{r_1} \times \\ \times (x - z_2)^{r_2} (x - \bar{z}_2)^{r_2} \dots (x - z_j)^{r_j} (x - \bar{z}_j)^{r_j}.$$

Sareizinot saistītos lineāros reizinātājus, kas satur kompleksos skaitļus, iegūstam sadalījumu

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m} \times \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{r_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{r_2} \dots (x^2 + p_jx + q_j)^{r_j},$$

kur  $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2r_1 + 2r_2 + \dots + 2r_j = n$ .

#### 4. DAĻVEIDA RACIONĀLAS FUNKCIJAS SADALIŠANA PARCIĀLDAĻU SUMMĀ

Iepriekšējā punktā aplūkoto polinomu sadalīšanu reālos reizinātajos izmantot, lai pārveidotu daļveida izteiksmes, kuru skaitītājā un saucējā ir polinomi. Šādas izteiksmes sauc par *daļveida racionālām funkcijām*. Piemēram, daļveida racionālas funkcijas ir izteiksmes

$$\frac{4x+7}{x^3-x^2+6x-1}, \quad \frac{x^3+3x^2-5x+2}{x^2-x+4}$$

vai vispārīgā veidā –

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}.$$

Ja  $m < n$ , tad polinomu attiecību sauc par *īstu daļveida racionālu funkciju*, ja  $m \geq n$ , tad – par *neīstu daļveida racionālu funkciju*.

Neīstu daļveida racionālu funkciju var izteikt kā polinoma un īstas daļveida racionālas funkcijas summu. Lai šādi pārveidotu, piemēram, neīstu daļveida racionālu funkciju  $\frac{x^3+3x^2-5}{x^2-x+2}$ , vispirms skaitītāja izteiksmes polinomam ir jādala ar

saucēja izteiksmes polinomū. Iegūst dalījumu  $x+4$  un dalīšanas atlikumu  $2x-13$ .  
Līdz ar to

$$\frac{x^3+3x^2-5}{x^2-x+2} = x+4 + \frac{2x-13}{x^2-x+2}.$$

Istu daļveida racionālu funkciju var izteikt kā summu, kuras saskaitāmie ir t. s. *vienkāršākās algebriskās daļas* jeb *algebriskās parciāldaļas*. Piemēram, var pārliecināties, ka daļveida racionāla funkcija  $\frac{6x^4+8x^3-4x^2+26x+36}{x^5+3x^4-4x^2-9x+9}$  ir vienāda ar šādu vienkāršāko algebrisku daļu summu:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4x+1}{x^2+2x+3}.$$

Izšķir četrus vienkāršāko algebrisko daļu (algebrisko parciāldaļu) veidus:

- 1)  $\frac{A}{x-a}$  veida daļu sauc par *1. veida parciāldaļu* (piemēram,  $\frac{2}{x+3}$ );
- 2)  $\frac{A}{(x-a)^k}$ , kur  $k \in \mathbb{N}$ , sauc par *2. veida parciāldaļu* (piemēram,  $\frac{3}{(x-1)^2}$ );
- 3)  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$  veida daļu, kur  $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ , sauc par *3. veida parciāldaļu* (piemēram,  $\frac{4x+1}{x^2+2x+3}$ );
- 4)  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$  veida daļu, kur  $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$  un  $k \in \mathbb{N}$ , sauc par *4. veida parciāldaļu* (piemēram,  $\frac{7x+8}{(x^2+4x+9)^3}$ ).

Lai pārveidotu istu daļveida racionālu funkciju  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$  parciāldaļu summā, vispirms polinoms  $P_n(x)$  ir jāsadala reālos reizinātājos, kas ir vai nu  $x-a$ , vai  $(x-a)^k$ , vai  $x^2+px+q$ , vai arī  $(x^2+px+q)^k$  tipa izteiksmes ( $k \in \mathbb{N}$ ,  $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$ ). Atkarībā no  $P_n(x)$  reizinātājiem nosaka, kādu parciāldaļu summa ir dotā daļveida racionālā funkcija  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ . Neaplūkojot pierādījumus, attiecīgie spriedumi ir apkopoti tabulā.

| $P_n(x)$<br>sakne | Saknes<br>kārtā | Viens no $P_n(x)$<br>reizinātājiem ir                     | $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ sadalījums parciāldaļu<br>summā satur izteiksmi                                         |
|-------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x_1$             | 1               | $x-x_1$                                                   | $\frac{A}{x-x_1}$                                                                                               |
| $x_2$             | $k$             | $(x-x_2)^k$                                               | $\frac{A_1}{x-x_2} + \frac{A_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-x_2)^k}$                                     |
| $x_1 \pm y_1 i$   | 1               | $x^2+p_1x+q_1$<br>( $D = \frac{p_1^2}{4} - q_1 < 0$ )     | $\frac{Mx+N}{x^2+p_1x+q_1}$                                                                                     |
| $x_2 \pm y_2 i$   | $r$             | $(x^2+p_2x+q_2)^r$<br>( $D = \frac{p_2^2}{4} - q_2 < 0$ ) | $\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \dots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+p_2x+q_2)^r}$ |

Lai aprēķinātu ar burtiem  $A, M, N$  apzīmētos nezināmos parciāldaļu koeficientus, ievērosim, ka visu parciāldaļu summa ir identiski vienāda ar  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ . Tātad, parciāldaļu izteiksmē vienādojot saucējus un saskaitot šīs daļas, iegūtais skaitītāja polinoms ir identiski vienāds ar  $Q_m(x)$ . Tas nozīmē, ka šajos polinomos koeficienti pie vienādām  $x$  pakāpēm ir vienādi. Tādējādi iegūst lineāru vienādojumu sistēmu, kuras nezināmie ir aprēķināmie parciāldaļu koeficienti. Paskaidrosim sīkāk šos spriedumus ar piemēriem.

1. piemērs. Sadalīt parciāldaļu summā daļveida racionālu funkciju  $\frac{2x-1}{x^5+x^2}$ .

Tā kā  $x^5+x^2=x^2(x^3+1)=x^2(x+1)(x^2-x+1)$ , t. i., skaitlis 0 ir polinoma  $x^5+x^2$  divkārsa sakne, skaitlis  $-1$  – vienkārša sakne, bet kvadrātrinoma  $x^2-x+1$  diskriminants ir negatīvs, tad saucēja izteiksmes reizinātājam  $x^2$  atbilst parciāldaļas  $\frac{A}{x}$  un  $\frac{B}{x^2}$ , reizinātājam  $x+1$  atbilst parciāldaļa  $\frac{C}{x+1}$ , bet reizinātājam  $x^2-x+1$  atbilst 3. veida parciāldaļa  $\frac{Mx+N}{x^2-x+1}$ . Tātad

$$\frac{2x-1}{x^5+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Vienādojot saucējus un saskaitot šīs parciāldaļas, iegūstam vienādību

$$\frac{2x-1}{x^5+x^2} = \frac{(A+C+M)x^4 + (B-C+N+M)x^3 + (C+N)x^2 + Ax + B}{x^5+x^2}.$$

Tā kā  $(A+C+M)x^4 + (B-C+N+M)x^3 + (C+N)x^2 + Ax + B = 2x-1$ , tad

$$\begin{cases} A+C+M=0 \\ B-C+N+M=0 \\ C+N=0 \\ A=2 \\ B=-1. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu, iegūstam, ka  $A=2, B=-1, C=-1, M=-1, N=1$ . Tātad

$$\frac{2x-1}{x^5+x^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{-x+1}{x^2-x+1}.$$

Atzīmēsim, ka atsevišķus parciāldaļu koeficientus var noteikt, nerisinot vienādojumu sistēmu. Tā, piemēram, ja  $x_1$  ir polinoma  $P_n(x)$  sakne ar kārtu  $k$ , tad  $P_n(x) = (x-x_1)^k \cdot q(x)$ , kur  $q(x_1) \neq 0$ , un

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{Q_m(x)}{(x-x_1)^k \cdot q(x)} = \frac{A}{(x-x_1)^k} + \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Aq(x) + (x-x_1)^k p(x)}{(x-x_1)^k q(x)}.$$

Tā kā  $Aq(x) + (x-x_1)^k p(x) = Q_m(x)$ , tad, ievietojot  $x$  vietā  $x_1$ , iegūstam vienādību  $Aq(x_1) = Q_m(x_1)$ , no kuras atrodam, ka

$$A = \frac{Q_m(x_1)}{q(x_1)}.$$

Tādējādi, lai atrastu koeficientu  $A$ , izteiksmē  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$  no polinoma  $P_n(x)$  sadalījuma reizinātājos ir jāizsvītro  $(x-x_1)^k$  un atlikušajā izteiksmē  $x$  vietā jāievieto skaitlis  $x_1$ . Šo paņēmieni saucsim par *izsvītrošanas metodi*. Sevišķi efektīva izsvītrošanas metode ir gadījumos, kad polinomam  $P_n(x)$  ir tikai vienkāršas reālas saknes.

2. piemērs. Sadalīt parciāldaļu summā funkciju  $\frac{Q_1(x)}{P_3(x)} = \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$ .

Tā kā  $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$  un  $4x^2-16x+15=4\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$ , tad

$$\frac{Q_1(x)}{P_3(x)} = \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \frac{32x}{8\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)} = \frac{4x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)}.$$

Tā kā visas trīs saucēja saknes ir vienkāršas, tad sadalījums parciāldaļās ir šāds:

$$\frac{4x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)} = \frac{A}{x-\frac{1}{2}} + \frac{B}{x-\frac{3}{2}} + \frac{C}{x-\frac{5}{2}}.$$

Saskaņā ar izsvītrosanas metodi, lai noteiktu koeficientu  $A$ , vienādības kreisajā pusē jāizsvīturo  $x-\frac{1}{2}$  un iegūtajā izteiksmē  $x$  vietā jāievieto  $\frac{1}{2}$ . Tādējādi

$$A = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right)} = 1.$$

$$\text{Analogi } B = \frac{4 \cdot \frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\right)} = -6 \text{ un } C = \frac{4 \cdot \frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)} = 5.$$

$$\text{Tātad } \frac{32x}{(2x-1)(4x^2-16x+15)} = \frac{1}{x-\frac{1}{2}} - \frac{6}{x-\frac{3}{2}} + \frac{5}{x-\frac{5}{2}}.$$

## VEKTORI

## 2.1. §. PAMATJĒDZIENI

## 1. SKALĀRI UN VEKTORIĀLI LIELUMI. VEKTORI

Aplūkojot dažādus fizikālus procesus un parādības, novērojam dažāda veida objektus. Daļu no tiem var pilnīgi raksturot ar vienu lielumu – skaitli, piemēram, masu, tilpumu, temperatūru, nogriežņa garumu. Šādus lielumus sauc par *skalāriem lielumiem*.

Eksistē arī tādi fizikāli lielumi, piemēram, ātrums, paātrinājums, spēks, deformēta materiāla spriegums, kurus raksturo ne tikai to skaitliskā vērtība, bet arī virziens plaknē vai telpā. Šādus lielumus sauc par *vektoriāliem lielumiem*, bet to ģeometrisko modeli – par *vektoru*.

Definīcija. Par *vektoru* sauc orientētu taisnes nogriezni, kuram norādīts sākumpunkts un galapunkts.

Ja  $A$  ir vektora sākumpunkts, bet  $B$  – tā galapunkts, tad vektoru apzīmē ar  $\overrightarrow{AB}$  (6. zīm.) vai arī ar kādu mazo burtu, piemēram, ar  $\vec{a}$ .

Definīcija. Par vektora garumu jeb *moduli* sauc orientētā nogriežņa garumu.

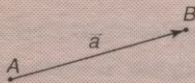
Moduli pieraksta šādi:  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$  vai vienkārši –  $AB$ ,  $a$ .

Tātad vektors ir viennozīmīgi noteikts, ja norādīts tā sākumpunkts, galapunkts un garums vai arī ja dots tā pielikšanas punkts, modulis (garums) un virziens.

Ja vektora sākumpunktu var izraudzīties jebkurā vietā, tad tādu vektoru sauc par *brīvu vektoru*. Tātad brīvu vektoru var paralēli pārnest uz jebkuru vietu telpā, saglabājot tā garumu un virzienu. Brīvs vektors ir, piemēram, absolūti cieta ķermeņa ātruma vektors. Bez brīviem vektoriem vēl sastopami slidoši un saistīti vektori.

*Slidošs* ir tāds vektors, kuru var pārvietot tikai pa taisni, uz kuras atrodas šis vektors. Slidošs vektors ir, piemēram, leņķiskais ātrums rotācijas kustībā, to var brīvi pārvietot pa rotācijas asi.

Ja vektora pielikšanas punkts ir pilnīgi noteikts, tad tādu vektoru sauc par *saistītu vektoru*.



Vektors – orientēts taisnes nogrieznis

Vektora modulis jeb garums

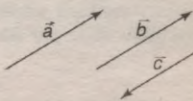
$$|\overrightarrow{AB}| = AB, |\vec{a}| = a$$

Šajā kursā visur izmantoti brīvi vektori.

## 2. KOLINEĀRI, VIENĀDI UN PRETĒJI VEKTORI

Definīcija. Vektorus, kas atrodas uz paralēlām taisnēm, sauc par **kolineāriem vektoriem** (7. zīm.).

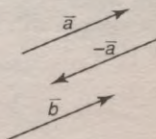
Vektori ir kolineāri, ja pēc paralēlās pārnese tie atrodas uz vienas taisnes. Kolineārus vektorus pieraksta šādi:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ,  $\vec{b} \parallel \vec{c}$ ,  $\vec{c} \parallel \vec{a}$ . Mēdz lietot arī šādus apzīmējumus:  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ,  $\vec{a} \downarrow \vec{c}$ , t. i., īpaši norādot to, kā kolineārie vektori vērsti – vienā virzienā vai pretējos virzienos.



7. zīm.

Definīcija. Divus vektorus  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  sauc par **vienādiem un raksta  $\vec{a} = \vec{b}$** , ja

- 1) tie ir kolineāri:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;
- 2) to garumi ir vienādi:  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ;
- 3) tie ir vienādi vērsti:  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$  (8. zīm.).



8. zīm.

Definīcija. Vektorus  $\vec{a}$  un  $-\vec{a}$  sauc par **pretējiem vektoriem**, ja tie ir

- 1) kolineāri; 2) vienāda garuma; 3) pretēji vērsti (8. zīm.).

## 3. NULLVEKTORS UN VIENĪBAS VEKTORS JEB ORTS

Definīcija. Vektoru, kura sākumpunkts sakrīt ar galapunktu, sauc par **nullvektoru** un apzīmē ar simbolu  $\vec{0}$ .

Tātad  $|\vec{0}| = 0$  (nullvektora modulis ir nulle). Nullvektoram nav noteikta virziena, un tāpēc var uzskatīt, ka tas ir kolineārs ar jebkuru citu vektoru.

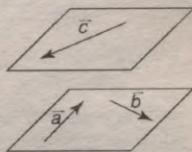
Definīcija. Vienu vienību garu vektoru, kurš vērsti tādā pašā virzienā kā nenulles vektors  $\vec{a}$ , sauc par vektora  $\vec{a}$  vienības vektoru jeb **ortu**, un parasti to apzīmē ar  $\vec{a}^0$  vai  $\vec{e}$ .

Tātad  $|\vec{a}^0| = 1$  un  $\vec{a}^0 \uparrow \vec{a}$ .

## 4. KOMPLANĀRI VEKTORI

Definīcija. Vektorus, kas atrodas paralēlās plaknēs vai vienā plaknē, sauc par **komplanāriem vektoriem** (9. zīm. vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  un  $\vec{c}$ ).

Tādējādi vairāki vektori ir komplanāri, ja pēc paralēlās pārnese tie atrodas vienā plaknē.



9. zīm.

Kolineāri vektori  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ;

turklāt:

$\vec{a} \uparrow \vec{b}$  – vienādi vērsti;

$\vec{a} \downarrow \vec{b}$  – pretēji vērsti.

Vienādi vektori:

$\vec{a} = \vec{b}$ , ja

1)  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ,

2)  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ .

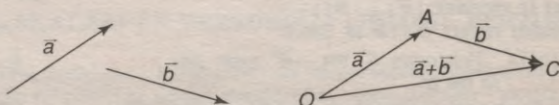
Komplanāri vektori – atrodas paralēlās plaknēs

## 2.2. §. LINEĀRAS DARBĪBAS AR VEKTORIEM

Vektoru algebrā ar vektoriem definē dažādas darbības. Šajā paragrāfā aplūkosim vektoru saskaitīšanu, atņemšanu un vektora reizināšanu ar skaitli; šīs darbības sauc par *lineārām darbībām ar vektoriem*.

### 1. VEKTORU SASKAITĪŠANA

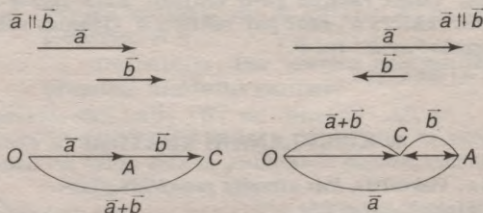
Aplūkosim divus vektorus  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$ . No brīvi izraudzīta telpas punkta  $O$  atliekam vektoru  $\vec{OA} = \vec{a}$ , pēc tam no punkta  $A$  atliekam vektoru  $\vec{AC} = \vec{b}$  un konstruējam vektoru  $\vec{OC}$ . Šādi iegūto vektoru  $\vec{OC}$  sauc par vektoru  $\vec{OA}$  un  $\vec{AC}$  summu (10. zīm.).



10. zīm.

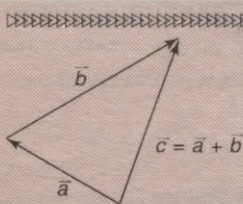
**Definīcija.** Ja vektora  $\vec{a}$  galapunkts sakrīt ar vektora  $\vec{b}$  sākumpunktu, tad par šo **vektoru summu**  $\vec{a} + \vec{b}$  sauc vektoru  $\vec{c}$ , kas novilkts no vektora  $\vec{a}$  sākumpunkta uz vektora  $\vec{b}$  galapunktu, un raksta  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Šo definīciju lieto, saskaitot kā nekolineārus vektorus (10. zīm.), tā arī kolineārus vektorus (11. zīm.). No definīcijas izriet, ka vektora  $\vec{a}$  un tam pretējā vektora  $-\vec{a}$  summa ir nullvektors  $\vec{0}$ , t. i.,  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .



11. zīm.

Ja vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  nav kolineāri, tad šie vektori un to summa – vektors  $\vec{a} + \vec{b}$  sakrīt ar trijstūra  $OAC$  malām (10. zīm.). Tāpēc definēto saskaitīšanas paņēmieni nekolineāru vektoru gadījumā sauc par vektoru saskaitīšanas **trijstūra likumu**.



**Trijstūra likums:**

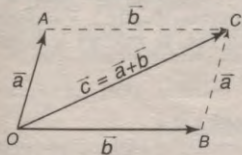
$\vec{c}$  vērsts no pirmā vektora sākumpunkta uz otra vektora galapunktu.

Kā secinājumu no definīcijas iegūst nekolineāru vektoru saskaitīšanas *parallelograma likumu*. Ja vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ( $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ) ir kopīgs sākumpunkts  $O$ , tad var konstruēt paralelogramu  $OACB$ , kur  $\vec{OA} = \vec{a}$  un  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Tā kā paralelograma pretējās malas ir vienādas, tad arī  $\vec{AC} = \vec{b}$  un doto vektoru summa  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{OC}$  sakrīt ar paralelograma diagonāli (12. zīm.). Tātad esam ieguvuši šādu vektoru saskaitīšanas paņēmieni: *ja diviem nekolineāriem vektoriem ir kopīgs sākumpunkts, tad šo vektoru summa ir vektors, kas novilkts no kopīgā sākumpunkta un sakrīt ar tāda paralelograma diagonāli, kura malas ir dotie vektori*.

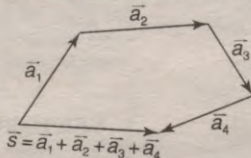
Ja jāaskaita vairāk nekā divi vektori, tad saskaitīšanu veic pakāpeniski – pie pirmo divu vektoru summas pieskaita trešo vektoru, pie pirmo trīs vektoru summas pieskaita ceturto vektoru utt. Trīs vektoru summu definē ar vienādību

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

No šādi definētas vairāku vektoru saskaitīšanas izriet secinājums: *ja vektora  $\vec{a}_1$  galapunkts sakrīt ar vektora  $\vec{a}_2$  sākumpunktu, vektora  $\vec{a}_2$  galapunkts sakrīt ar vektora  $\vec{a}_3$  sākumpunktu utt. – vektora  $\vec{a}_{n-1}$  galapunkts sakrīt ar vektora  $\vec{a}_n$  sākumpunktu, tad šo vektoru summa ir vektors  $\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_{n-1} + \vec{a}_n$ , kas novilkts no vektora  $\vec{a}_1$  sākumpunkta uz vektora  $\vec{a}_n$  galapunktu (13. zīm.).*



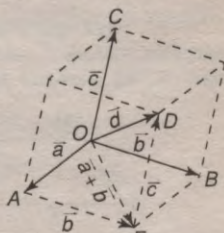
12. zīm.



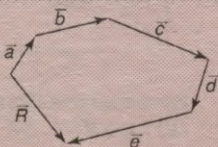
13. zīm.

Izmantojot vektoru algebru fizikā, mehānikā u. c. nozarēs vektoru summu  $\vec{s}$  sauc arī par *rezultējošo vektoru* un parasti apzīmē ar  $\vec{R}$ . Ja, saskaitot vairākus vektorus, pēdējā vektora galapunkts sakrīt ar pirmā vektora sākumpunktu, tad rezultējošais vektors ir nullvektors  $\vec{0}$ . Ja saskaitāmie vektori nav kolineāri, tad šie vektori un to summa sakrīt ar daudzstūra malām un saskaitīšanas paņēmieni sauc par *daudzstūra likumu* (13. zīm.).

Pēc daudzstūra likuma saskaita arī nekomplanārus vektorus. Īpaši tiek aplūkots gadījums, kad trīs saskaitāmiem nekomplanāriem vektoriem ir kopīgs sākumpunkts  $O$ . Tad var konstruēt paralēlskaldni, kurā trīs šķautnes, kas iziet no virsotnes  $O$ , sakrīt ar dotajiem vektoriem, proti,  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$  (14. zīm.). Viegli pārliecināties, ka šo vektoru summa  $\vec{d}$  sakrīt ar paralēlskaldņa diagonāli  $\vec{OD}$ . Patiešām, saskaņā ar vektoru saskaitīšanas definīciju  $\vec{OA} + \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{OD} = \vec{d}$ . Bet, tā kā  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AE} = \vec{OB} = \vec{b}$  un  $\vec{ED} = \vec{OC} = \vec{c}$ , tad  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .



14. zīm.

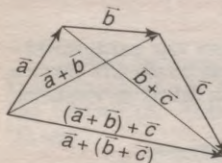


Daudzstūra likums  
 $\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}.$

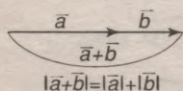
Vektoru saskaitīšanai ir spēkā šādas īpašības:

- 1) komutatīvā īpašība  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- 2) asociatīvā īpašība  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

Vektoru saskaitīšanas komutatīvā īpašība izriet no 12. zīmējuma. Patiešām, no trijstūra  $OAC$  redzams, ka  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ . Savukārt trijstūrī  $OBC$  ir redzams, ka  $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC}$ . Tātad  $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OB} + \vec{BC}$ . Bet, tā kā  $\vec{OA} = \vec{BC} = \vec{a}$  un  $\vec{OB} = \vec{AC} = \vec{b}$ , tad  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .



15. zīm.



16. zīm.

Vektoru saskaitīšanas asociatīvā īpašība ilustrēta 15. zīmējumā.

Piezīme. Ar vektoriem nav definēta attieksme «liāks» ( $>$ ) un «mazāks» ( $<$ ), salīdzināt var tikai vektoru modulus. Vektoru summas modulis ir spēkā šādas nevienādības:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|; \quad |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|;$$

$$|\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n| \leq |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \dots + |\vec{a}_n|.$$

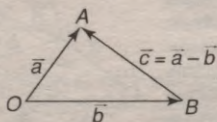
Pirmo no šīm nevienādībām nekolineāriem vektoriem sauc par **trijstūra nevienādību** (trijstūra mala ir mazāka par divu pārējo malu summu, 10. zīm.). Vienādības zīme šajās izteiksmēs ir spēkā tad, ja vektori ir kolineāri un vienādi vērsti (16. zīm.).

## 2. VEKTORU ATŅĒMŠANA

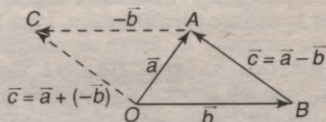
**Definīcija.** Par divu vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  **starpību** sauc vektoru  $\vec{c}$ , kuru saskaitot ar vektoru  $\vec{b}$  iegūst vektoru  $\vec{a}$ , t. i.,

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \text{ ja } \vec{c} + \vec{b} = \vec{a} \text{ vai } \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

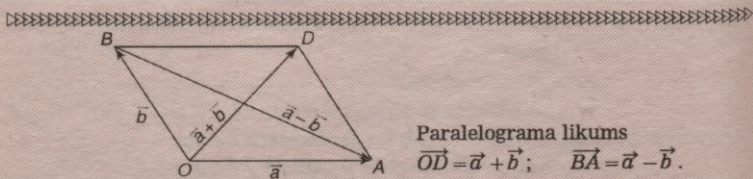
Ja vektoriem  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir kopīgs sākumpunkts, tad to **starpības vektoru** iegūst, konstruējot vektoru, kas iet no vektora  $\vec{b}$  galapunkta uz vektora  $\vec{a}$  galapunktu, t. i., – no mazinātāja vektora galapunkta uz mazināmā vektora galapunktu (17. zīm.). Ja  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  nav kolineāri vektori, tad šie vektori un to starpības vektors  $\vec{c}$  veido trijstūri  $OAB$ . Papildinām šo trijstūri līdz paralelogramam tā, kā parādīts 18. zīmējumā. Šajā paralelogramā  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ . Tā kā



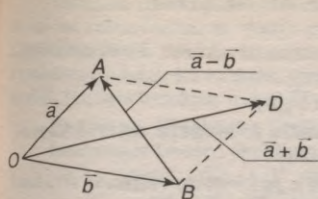
17. zīm.



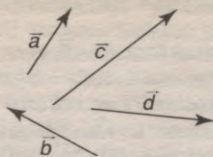
18. zīm.



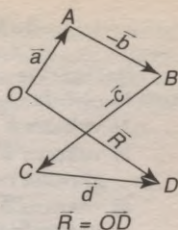
Paralelograma likums  
 $\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b}$ ;  $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ .



19. zīm.



20. zīm.

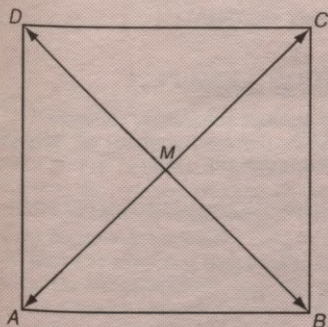


paralelograma pretējās malas ir vienādas un paralēlas, tad  $\vec{OC} = \vec{BA} = \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ , bet  $\vec{AC}$  ir vektora  $\vec{OB} = \vec{b}$  pretējais vektors  $-\vec{b}$ . Tādējādi iegūstam, ka  $\vec{OC} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , t. i., divu vektoru  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  starpība ir vienāda ar vektora  $\vec{a}$  un pretējā vektora  $-\vec{b}$  summu.

Atzīmēsim vēl šādu īpašību: ja diviem nekolineāriem vektoriem  $\vec{OA} = \vec{a}$  un  $\vec{OB} = \vec{b}$  ir kopīgs sākumpunkts un uz šiem vektoriem ir konstruēts paralelograms, tad vektoru summa  $\vec{a} + \vec{b}$  sakrīt ar paralelograma diagonāli  $\vec{OD}$ , bet starpība  $\vec{a} - \vec{b}$  – ar otru diagonāli  $\vec{BA}$  (19. zīm.).

Piemērs. Doti vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  (20. zīm.). Konstruēt vektoru  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$ .

Pārveidojam doto izteiksmi, aizstājot vektoru atņemšanu ar pretējo vektoru pieskaitīšanu:  $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b}) + (-\vec{c}) + \vec{d}$ . Konstruēcijā izmantojam vektoru saskaitīšanas daudzstūra paņēmieni. No brīvi izraudzīta punkta novelkam vektoru  $\vec{OA} = \vec{a}$ , pēc tam vektorus  $\vec{AB} = -\vec{b}$ ,  $\vec{BC} = -\vec{c}$ ,  $\vec{CD} = \vec{d}$ . Dotās izteiksmes rezultējošais vektors  $\vec{R}$  ir  $\vec{OD}$  (sk. 20. zīm.).



Uzdevums.  
Pierādīt, ka  
 $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{O}$ .

### 3. VEKTORA REIZINĀŠANA AR SKAITLI

Definīcija. Par vektora  $\vec{a} \neq \vec{0}$  **reizinājumu ar skaitli**  $\lambda \neq 0$  sauc vektoru  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , ja

- 1) vektors  $\vec{b}$  ir kolineārs ar vektoru  $\vec{a}$  ( $\vec{b} \parallel \vec{a}$ );
- 2) vektora  $\vec{b}$  garums ir vienāds ar skaitļa  $\lambda$  moduļa un vektora  $\vec{a}$  garuma reizinājumu, t. i.,  $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ ;
- 3) vektoru  $\vec{b}$  un  $\vec{a}$  virzieni sakrīt ( $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ), ja  $\lambda > 0$ ; šo vektoru virzieni ir pretēji ( $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ ), ja  $\lambda < 0$ .

No definīcijas izriet šādi secinājumi:

- 1) ja  $0 < \lambda < 1$ , tad reizinājumā iegūtā vektora  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  garums ir mazāks nekā vektora  $\vec{a}$  garums;
- 2) ja  $\lambda > 1$ , tad reizinājumā iegūtā vektora  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  garums ir lielāks nekā vektora  $\vec{a}$  garums;
- 3) vektora  $\vec{a}$  reizinājums ar skaitli  $-1$  ir vektora  $\vec{a}$  pretējais vektors  $-\vec{a}$ , t. i.,  $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ;
- 4) nullvektora reizinājums ar jebkuru skaitli  $\lambda$  ir nullvektors, t. i.,  $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ ;
- 5) ja  $\lambda = \frac{1}{\mu}$ , tad  $\lambda \vec{a} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{\mu}$ , t. i., vektora dalīšanu ar skaitli  $\mu \neq 0$  var uzskatīt kā vektora reizināšanu ar šī skaitļa apgriezto lielumu;
- 6) ja  $\vec{a}^0$  ir vektora  $\vec{a}$  vienības vektors jeb ors, (proti,  $|\vec{a}^0| = 1$  un  $\vec{a}^0 \uparrow \vec{a}$ ), tad, reizinot  $\vec{a}^0$  ar skaitli  $\lambda$ , kas vienāds ar vektora  $\vec{a}$  moduli, iegūst pašu vektoru  $\vec{a}$ :

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0.$$

No šīs vienādības var izteikt vektora  $\vec{a}$  vienības vektoru  $\vec{a}^0$ :

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Vektora reizināšanai ar skaitli ir spēkā šādas īpašības:

- 1) komutatīvā īpašība  $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$ ;

- 2) asociatīvā īpašība

$$(\lambda \mu) \cdot \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a})$$

attiecībā uz vektora reizināšanu ar diviem skaitļiem;

- 3) distributīvā īpašība

$$\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

attiecībā uz vektoru summas reizināšanu ar skaitli;

- 4) distributīvā īpašība

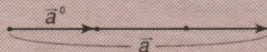
$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

attiecībā uz vektora reizināšanu ar skaitļu summu.

Vienības vektors jeb ors  $\vec{a}^0 \uparrow \vec{a}$  un  $|\vec{a}^0| = 1$ ;

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0.$$

Piemērs. Ja dots  $\vec{a}^0$  un  $|\vec{a}| = 3$ , tad  $\vec{a} = 3\vec{a}^0$ :



Tādējādi lineārajām darbībām ar vektoriem – vektoru saskaitīšanai, atņemšanai un reizināšanai ar skaitli piemīt analogas īpašības kā darbībām ar reāliem skaitļiem. Tāpēc vektoru izteiksmes, kurās ir lineāras darbības, var pārveidot un vienkāršot līdzīgi, kā to dara, vienkāršojot algebriskas izteiksmes (atver iekavas, savēl līdzīgos locekļus u. tml.).

Piemērs. Vienkāršot izteiksmi  $2(3\vec{a} - 4\vec{b}) + 3(\vec{b} - 2\vec{a}) + 4\vec{a}$ .

Izmantojot lineāro darbību īpašības, iegūstam

$$\begin{aligned} 2(3\vec{a} - 4\vec{b}) + 3(\vec{b} - 2\vec{a}) + 4\vec{a} &= 6\vec{a} - 8\vec{b} + 3\vec{b} - 6\vec{a} + 4\vec{a} = \\ &= 6\vec{a} - 6\vec{a} + 4\vec{a} + 3\vec{b} - 8\vec{b} = \vec{0} + 4\vec{a} + (3-8)\vec{b} = 4\vec{a} - 5\vec{b}. \end{aligned}$$

Vektoru algebrā svarīga nozīme ir šādai teorēmai:

**Divi vektori  $\vec{a}$  un  $\vec{b}$  ir kolineāri tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitlis  $\lambda$ , ka  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .**

Nosacījuma pietiekamības pierādījums

Dots:  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .

Jāpierāda:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Šī apgalvojuma pareizība ir acīmredzama. Patiesām, tā kā  $\lambda \vec{b} \parallel \vec{b}$  un  $\lambda \vec{b} = \vec{a}$ , tad arī  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Nosacījuma nepieciešamības pierādījums

Dots:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ .

Jāpierāda: eksistē tāds skaitlis  $\lambda$ , ka  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .

1. gadījums.  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ; tad  $\vec{a}^0 = \vec{b}^0$ . Reizinot šīs vienādības abas puses ar skaitli  $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ , iegūstam sakarību  $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{a}^0 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} \vec{b}^0$ , no kuras izriet, ka  $|\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$ . Tātad  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , kur  $\lambda = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ .

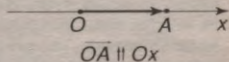
2. gadījums.  $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ , tad  $\vec{a}^0 = -\vec{b}^0$ . Rīkojoties analogi kā iepriekšējā gadījumā, atrodam ka  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ , kur  $\lambda = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ .

## 2.3. §. PUNKTA DEKARTA KOORDINĀTAS

### 1. PUNKTA KOORDINĀTAS UZ TAISNES

Turpmāko jautājumu apskatā izmantosim ar punkta koordinātām saistītus jēdzienus. Šo jēdzienu noskaidrošanai lietosim vektorus. Aplūkosim kādu taisnes punktu  $A$ . Lai noteiktu šī punkta stāvokli ar skaitļa palīdzību, brīvi izraugāties kādu citu šīs taisnes punktu  $O$ , ko pieņem par koordinātu sākumpunktu, un norādām ar bultiņu noteiktu taisnes virzienu. Nogriežņu garuma mērīšanai izraugāties garuma mērvienību. Līdz ar to ir izveidota koordinātu sistēma uz taisnes. Šādu taisni ar norādītu koordinātu sākumpunktu  $O$  un pozitīvo virzienu sauc par **koordinātu asi**; apzīmēsim to ar  $Ox$  (21. zīm.).

Aplūkosim vektoru  $\vec{OA}$ . Atkarībā no punkta novietojuma uz ass attiecībā pret koordinātu sākumpunktu  $O$  ir iespējams, ka vektora  $\vec{OA}$  virziens sakrīt ar  $Ox$  ass virzienu, ko norāda bultiņa (t. i.,  $\vec{OA} \uparrow Ox$ ), vai arī  $\vec{OA}$  virziens ir pretējs ass virzienam (t. i.,  $\vec{OA} \downarrow Ox$ ).



21. zīm.

**Definīcija.** Par punkta  $A$  koordinātu uz taisnes sauc reālu skaitli  $x$ , kas ir vienāds ar vektora  $\vec{OA}$  moduli, ja  $\vec{OA}$  virziens sakrīt ar  $Ox$  ass virzienu, un ir vienāds ar vektora  $\vec{OA}$  moduli pretējo skaitli, ja  $\vec{OA}$  virziens ir pretējs  $Ox$  ass virzienam.

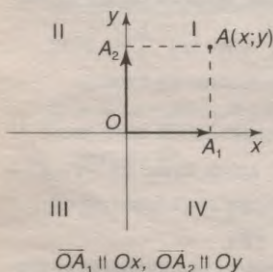
Tātad

$$x = \begin{cases} |\vec{OA}|, & \text{ja } \vec{OA} \uparrow \uparrow Ox, \\ -|\vec{OA}|, & \text{ja } \vec{OA} \uparrow \downarrow Ox. \end{cases}$$

Punkta koordinātu raksta iekavās aiz burta, ar kuru apzīmē šo punktu, piemēram,  $A(4)$ ,  $B(-5)$ ,  $C(3,8)$  u. tml.

## 2. PUNKTA KOORDINĀTAS PLAKNĒ

Koordinātu sistēmu plaknē veido divas savstarpēji perpendikulāras koordinātu asis. Šo asu krustpunktu pieņem par koordinātu sākumpunktu  $O$ , bet pašas asis parasti apzīmē ar  $Ox$  un  $Oy$ . Koordinātu asis sadala plakni četrās daļās – kvadrantos, kurus sanumurē tā, kā parādīts 22. zīmējumā. Pieņemsim, ka plaknē



22. zīm.

ir dots kāds punkts  $A$ . Konstruējam perpendikulu  $AA_1$  no šī punkta pret  $Ox$  asi un perpendikulu  $AA_2$  pret  $Oy$  asi (22. zīm.) un aplūkojam vektorus  $\vec{OA}_1$  un  $\vec{OA}_2$ . Punkta  $A$  koordinātas plaknē definē, izmantojot šos vektorus  $\vec{OA}_1$  un  $\vec{OA}_2$ .

**Definīcija.** Par punkta  $A$  abscisu sauc reālu skaitli  $x$ , ko nosaka šādi:

$$x = \begin{cases} |\vec{OA}_1|, & \text{ja } \vec{OA}_1 \uparrow \uparrow Ox, \\ -|\vec{OA}_1|, & \text{ja } \vec{OA}_1 \uparrow \downarrow Ox. \end{cases}$$

Par punkta  $A$  ordinātu sauc reālu skaitli  $y$ , ko nosaka šādi:

$$y = \begin{cases} |\vec{OA}_2|, & \text{ja } \vec{OA}_2 \uparrow \uparrow Oy, \\ -|\vec{OA}_2|, & \text{ja } \vec{OA}_2 \uparrow \downarrow Oy. \end{cases}$$

Plaknes punkta koordinātas raksta iekavās aiz burta, ar kuru apzīmē šo punktu, pirmo raksta abscisu, bet otro – ordinātu, piemēram,  $A(3; 7)$ ,  $B(-2; 6)$ ,  $C(4; 0)$ ,  $D(0; -6)$  u. tml. Šādi noteiktu skaitļu pāri  $(x; y)$  sauc par punkta **Dekarta koordinātām plaknē**, bet koordinātu sistēmu – par **Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēmu**. Veidojot koordinātu sistēmu plaknē,  $Ox$  un  $Oy$  asis var arī nebūt perpendikulāras. Šādā gadījumā punktu  $A_1$  nosaka, velkot nogriezni  $AA_1$  paralēli  $Oy$  asij, bet punktu  $A_2$  –, velkot nogriezni  $AA_2$  paralēli  $Ox$  asij. Iegūtās koordinātas sauc

### RENĒ DEKARTS (1596–1650)

Franču matemātiķis, filozofs, nodarbojies arī ar astronomijas un kosmoloģijas problēmām. Dekarts dzimis 1596. g. 31. martā Francijas pilsētā Laē muižnieka un parlamenta padomnieka ģimenē, mācījies jezuitu koledžā Laflešā, pēc tam Puatjē studējis jurisprudenci un medicīnu. Vēlēdamies apcelt Eiropu, iestājies Holandes armijā, kur arī noticis nozīmīgs pavērsiens Dekarta dzīvē – pievēršanās matemātikai. Ejot pa ielu, viņš ieraudzījis kādu paziņojumu flāmu valodā, ko nav sapratis. Dekarts palūdzis pārtulkot kādam cilvēkam, kas arī lasījis šo paziņojumu. Paziņojumā bijusi sarežģīta matemātikas uzdevuma nosacījumi. Pārtulkotājs, kas bijis holandiešu matemātiķis Bekmanis, kā atbildību par tulkošanu prasījis no Dekarta uzdevuma atrisinājumu. Dekarts ar atrisinājumu

par punkta *A* *afinajām koordinātām*. Atkarībā no koordinātu asu orientācijas plaknē izšķir labo koordinātu sistēmu un kreiso koordinātu sistēmu. Nosakot, vai koordinātu sistēma ir labā vai kreisā, *Ox* ass ir jāpagriež ap koordinātu sākumpunktu tā, lai tās vērsums sakristu ar *Oy* ass vērsumu; pie tam pagriezienu leņķim ir jābūt vismazākajam. Ja šāds pagrieziens tiek izdarīts pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, tad koordinātu sistēmu sauc par *labo koordinātu sistēmu* (A-8. zīm.). Ja *Ox* ass jāpagriež pulksteņa rādītāju kustības virzienā, tad koordinātu sistēma ir *kreisā* (sk. A-8. zīm.). Turpmākajā vielas izklāstā izmantosim galvenokārt Dekarta taisnleņķa labo koordinātu sistēmu.

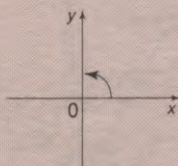
### 3. PUNKTA KOORDINĀTAS TELPĀ

Dekarta koordinātu sistēmu telpā veido trīs savstarpēji perpendikulāras koordinātu asis *Ox*, *Oy* un *Oz*; šo asu kopīgo krustpunktu *O* pieņem par koordinātu sākumpunktu. Katrs koordinātu asu pāris nosaka vienu koordinātu plakni. Tātad telpā ir trīs koordinātu plaknes: *xOy* plakne, *yOz* plakne un *zOx* plakne. Šīs plaknes telpu sadala astoņās daļās, ko sauc par oktantiem. Oktantus sanumurē tā, kā

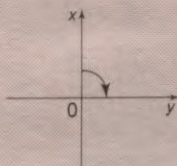
=====

ieradies pie Bekmaņa jau nākamajā dienā. Līdz ar to sākusies Dekarta pazišanās un draudzība ar šo holandiešu matemātiķi. 1621. gadā Dekarts pārtrauca militāro karjeru Holandē, daudz ceļoja pa Eiropu, 12 reizes mainīdams savu dzīvesvietu, nodarbojās ar filozofiju, matemātiku, fiziku, ceļojumu laikā interesējās par mūziku, mākslu, literatūru. Dekarts ir publicējis vairākus traktātus par filozofijas un kosmoloģijas jautājumiem. Viņa filozofiskās atziņas izteiktas pazīstamajā aforismā: «Es šaubos, tātad es domāju. Es domāju, tātad es eksistēju.» Dekarta devums matemātikā publicēts 1637. gadā darbā «Spriedums par metodi». Šī darba pielikumā «Geometrija» sakopoti Dekarta pētījumi par līkņu pieskarēm, izveidota koordinātu metode, radīti analītiskās geometrijas pamati. Lai geometrijas objektus – līnijas aprakstītu ar algebrisku vienādojumu palīdzību, Dekarts pilnveidoja algebras simboliku: kā zināmos, tā arī nezināmos lielumus viņš ieteica apzīmēt ar latīņu alfabēta burtiem; pirms burtu rakstīšanas arābu cipars tika uzskatīts par koeficientu, bet pēc burtu rakstīšanas – par kāpinātāju. Līkņu teorijas izstrādāšanai Dekarts ieviesa jēdzienu par mainīgu lielumu, kas uzskatāms par vienu no nozīmīgākajiem viņa nopelniem matemātikā.

Dekarta mūžs noslēdzās Zviedrijā, kur viņu 1649. gadā ielūdza Zviedrijas karaliene Kristīna. Dekarta uzdevums bija agrās rīta stundās vadīt karalienes nodarbības filozofijā. Lai paspētu laikā ierasties uz šīm nodarbībām, Dekartam katru rītu jau piecos vajadzējis doties uz karalienes pili. Šāda brauciena laikā 1650. gada ziemā Dekarts saaukstējās, saslima un nomira; viņa pēdējie vārdi bijuši: «Laiks doties ceļā, mana dvēsele.» Dekarts apglabāts Stokholmā, un tikai pēc 16 gadiem Francijas progresīvie cilvēki panāca, ka zinātnieku pārbēdīja Parīzē, Sv. Ženevjēvas klosterī.



Labā koordinātu sistēma

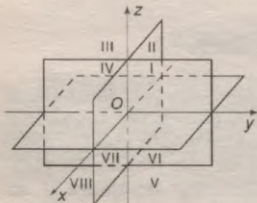


Kreisā koordinātu sistēma

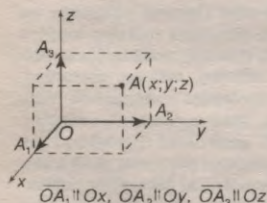
A-8. zīm.

parādīts 23. zīmējumā. Lai zīmējums būtu uzskatāmāks, parasti ilustrācijas veido pirmajā oktantā, kas atbilst visu koordinātu asu pozitīvajiem virzieniem.

Aplūkosim koordinātu telpā punktu  $A$ , caur kuru novelkam trīs koordinātu plaknēm paralēlas plaknes. Šīs plaknes krusto koordinātu asis attiecīgi punktus  $A_1$ ,  $A_2$  un  $A_3$ , kurus sauc par punkta  $A$  projekcijām uz koordinātu asīm (24. zīm.). Aplūkosim vektorus  $\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$  un  $\vec{OA}_3$ , kuru virziens var sakrist attiecīgi ar  $Ox$ ,  $Oy$  un  $Oz$  ass virzienu vai var būt pretējs šo asu virzienam atkarībā no tā, kurā oktantā atrodas punkts  $A$ . Šos vektorus izmantosim punkta  $A$  koordinātu definīcijā, analogi kā definējot punkta koordinātas plaknē un uz taisnes.



23. zīm.



24. zīm.

Arī telpā izšķir labo un kreiso koordinātu sistēmu atkarībā no koordinātu asu orientācijas. Nosakot koordinātu sistēmas nosaukumu,  $Ox$  ass ir jāpagriež ap koordinātu sākumpunktu par mazāko leņķi tā, lai šī ass sakristu ar  $Oy$  asi. Ja, skatoties no  $Oz$  ass bultiņas uz  $xOy$  plakni, šāds pagrieziens notiek pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam, tad koordinātu sistēmu sauc par **labo koordinātu sistēmu**, bet, ja pagrieziens notiek pulksteņa rādītāju kustības virzienā, tad – par **kreiso**. Dažkārt koordinātu sistēmas nosaukuma noteikšanai lieto t. s. labās rokas likumu un kreisās

**Definīcija. Par punkta  $A$  abscisu sauc reālu skaitli  $x$ , ko nosaka šādi:**

$$x = \begin{cases} |\vec{OA}_1|, & \text{ja } \vec{OA}_1 \uparrow \uparrow Ox, \\ -|\vec{OA}_1|, & \text{ja } \vec{OA}_1 \uparrow \downarrow Ox. \end{cases}$$

**Par punkta  $A$  ordinātu sauc reālu skaitli  $y$ , ko nosaka šādi:**

$$y = \begin{cases} |\vec{OA}_2|, & \text{ja } \vec{OA}_2 \uparrow \uparrow Oy, \\ -|\vec{OA}_2|, & \text{ja } \vec{OA}_2 \uparrow \downarrow Oy. \end{cases}$$

**Par punkta  $A$  aplikātu sauc reālu skaitli  $z$ , ko nosaka šādi:**

$$z = \begin{cases} |\vec{OA}_3|, & \text{ja } \vec{OA}_3 \uparrow \uparrow Oz, \\ -|\vec{OA}_3|, & \text{ja } \vec{OA}_3 \uparrow \downarrow Oz. \end{cases}$$

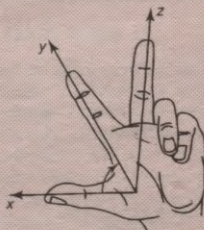
Telpas punkta koordinātas raksta iekavās aiz burtā, ar kuru apzīmēts punkts. Kā pirmo šajā pierakstā norāda abscisu, otro – ordinātu, bet trešo – aplikātu:  $A(x; y; z)$ . Pēc koordinātu zīmes var noteikt, kurā oktantā atrodas punkts, piemēram, punkts  $A(4; 7; 3)$  atrodas pirmajā oktantā, punkts  $B(-1; 5; 3)$  – otrajā, punkts  $C(6; -9; -5)$  – astotajā oktantā, bet punkts  $D(0; 6; 5)$  atrodas  $yOz$  plaknē.

~~~~~

Labā
koordinātu
sistēma



Kreisā
koordinātu
sistēma



A-9. zīm.

rokas likumu. Ja labās rokas pirmos trīs pirkstus var atlikt tā, ka īkšķis norāda Ox ass virzienu, rādītājpirksts – Oy ass virzienu, bet labās rokas vidējais pirksts – Oz ass virzienu, tad koordinātu sistēmai ir *labās rokas orientācija*. Analogi rīkojoties ar kreisās rokas pirmajiem trīs pirkstiem, nosaka *kreiso koordinātu sistēmu* (A-9. zīm.).

2.4. §. VEKTORA KOORDINĀTAS

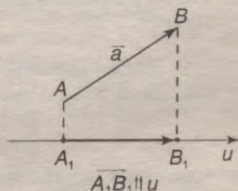
1. VEKTORA PROJEKCIJA UZ ASS

Aplūkosim taisni, kurai ir ar bultiņu norādīts noteikts virziens. Šādu taisni sauc par *asi*; apzīmēsim to ar burtu u . Pieņemsim, ka ārpus šīs ass ir dots vektors $\vec{a} = \vec{AB}$. Velkot perpendikulus no vektora sākumpunkta A un galapunkta B pret asi, iegūstam šo punktu ortogonālās projekcijas uz ass – punktus A_1 un B_1 . Ja vektors $\vec{AB}$ un ass u neatrodas vienā plaknē, tad punktus A_1 un B_1 iegūst, velkot asij u perpendikulāras plaknes caur vektora sākumpunktu A un galapunktu B . Punkti A_1 un B_1 uz ass nosaka vektoru $\vec{A_1B_1}$, kura virziens var sakrist ar ass virzienu vai būt pretējs šīs ass virzienam. Ar šādi iegūta vektora palīdzību definēsim jēdzienu «vektora projekcija uz ass» (25. zīm.).

Definīcija. Par vektora $\vec{AB}$ projekciju uz ass u sauc reālu skaitli, kas ir vienāds ar vektora $\vec{A_1B_1}$ moduli, ja $\vec{A_1B_1}$ un ass u virzieni sakrīt, un ir vienāds ar moduli pretēju skaitli, ja $\vec{A_1B_1}$ un ass u virzieni ir pretēji. Vektora $\vec{a} = \vec{AB}$ projekciju uz ass u apzīmēsim šādi: $\text{proj}_u \vec{AB}$ jeb a_u .

Tātad no definīcijas izriet, ka

$$\text{proj}_u \vec{AB} = \begin{cases} |\vec{A_1B_1}|, & \text{ja } \vec{A_1B_1} \uparrow u, \\ -|\vec{A_1B_1}|, & \text{ja } \vec{A_1B_1} \downarrow u. \end{cases}$$



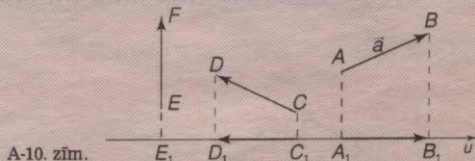
25. zīm.

Tādējādi vektora projekcija uz ass var būt kā pozitīvs skaitlis, tā arī negatīvs skaitlis, projekcija var būt arī vienāda ar nulli, ja vektors ir perpendikulārs pret asi (A-10. zīm.).

Teorēmas par vektora projekciju uz ass

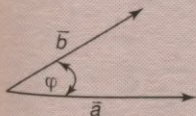
1. Vektora $\vec{a}$ projekcija uz ass u ir vienāda ar vektora moduļa reizinājumu ar tā leņķa kosinusu, ko šis vektors veido ar asi, t. i.,

$$\text{proj}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, u). \quad (1)$$



A-10. zīm.

$$\begin{aligned} \text{proj}_u \vec{EF} &= 0 & \vec{C_1D_1} \uparrow u & & \vec{A_1B_1} \uparrow u \\ \text{proj}_u \vec{CD} &< 0 & & & \text{proj}_u \vec{AB} > 0 \end{aligned}$$



$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \varphi, \quad |\varphi| \leq \pi$$

Par *leņķi starp vektoru un asi* sauc mazāko leņķi, par kādu jāpagriež ass, lai tās virziens sakristu ar vektora virzienu, vai jāpagriež vektors, lai tā virziens sakristu ar ass virzienu; šo leņķi apzīmē $\angle(\vec{a}, u)$ vai $\angle(u, \vec{a})$, vai arī ar kādu grieķu alfabēta burtu, piemēram, φ . No šīs definīcijas izriet, ka $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Projekcijas aprēķināšanas formula (1) izriet no kosinusa funkcijas definīcijas. Patiešām, ja $\varphi < \frac{\pi}{2}$, tad, pārnesot vektoru $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ paralēli sev tā, lai sākm-punkts atrastos uz ass, iegūstam trijstūri $A_1B_2B_1$, kura katete A_1B_1 ir vektora projekcija, bet hipotenūza A_1B_2 – vektora $\vec{a}$ modulis. Līdz ar to iegūstam, ka $\cos \varphi = \frac{A_1B_1}{A_1B_2}$; no šīs vienādības atrodam, ka $A_1B_1 = A_1B_2 \cos \varphi$ jeb $\text{proj}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \angle(\vec{a}, u)$ (A-11. zīm.).

2. Vektora projekcija ir vienāda ar nulli tad un tikai tad, ja vektors ir perpendikulārs pret asi.

Šī īpašība izriet tieši no vektora projekcijas definīcijas vai no formulas (1), ievērojot, ka $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

3. Vektoru summas projekcija ir vienāda ar saskaitāmo vektoru projekciju summu, t. i.,

$$\text{proj}_u (\vec{a} + \vec{b}) = \text{proj}_u \vec{a} + \text{proj}_u \vec{b}.$$

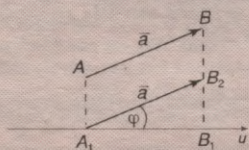
Šī īpašība ilustrēta A-12. zīmējumā gadījumam, kad visu aplūkoto vektoru projekcijas ir pozitīvi skaitļi:

$$\begin{aligned} \text{proj}_u (\vec{a} + \vec{b}) &= \text{proj}_u \overrightarrow{AC} = A_1C_1 \quad \text{un arī} \\ \text{proj}_u \vec{a} + \text{proj}_u \vec{b} &= A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1. \end{aligned}$$

4. Vektora $\vec{a}$ un skaitļa λ reizinājuma projekcija ir vienāda ar šī skaitļa un vektora $\vec{a}$ projekcijas reizinājumu, t. i.,

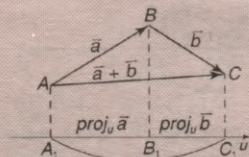
$$\text{proj}_u (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{proj}_u \vec{a}.$$

A-13. zīmējumā ilustrēts gadījums, kad $\lambda > 0$. Saskaņā ar 1. teorēmu $\text{proj}_u (\lambda \vec{a}) = |\lambda \vec{a}| \cos \varphi = |\lambda| |\vec{a}| \cos \varphi = \lambda \text{proj}_u \vec{a}$.



$$A_1B_1 = A_1B_2 \cos \varphi \Rightarrow \text{proj}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

A-11. zīm.



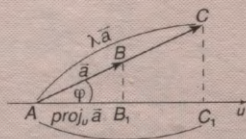
$$\text{proj}_u (\vec{a} + \vec{b}) = \text{proj}_u \vec{a} + \text{proj}_u \vec{b}$$

A-12. zīm.

Vektora projekcija uz ass
(A-11., A-12., A-13. zīm.)

$$\text{proj}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$$

$$\text{proj}_u \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp u$$



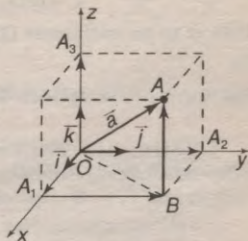
$$\text{proj}_u (\lambda \vec{a}) = \lambda \text{proj}_u \vec{a}$$

A-13. zīm.

2. VEKTORA DEKARTA KOORDINĀTAS

Aplūkosim trīs savstarpēji perpendikulārus vienības vektorus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ar kopīgu sākumpunktu, kas sakrīt ar Dekarta koordinātu sistēmas sākumpunktu. Pieņemsim, ka vektors $\vec{i}$ atrodas uz Ox ass, vektors $\vec{j}$ – uz Oy ass, vektors $\vec{k}$ – uz Oz ass un šo vektoru virzieni sakrīt ar attiecīgo koordinātu asu virzieniem (26. zīm.). Var pierādīt, ka jebkuru citu telpas vektoru $\vec{a}$ var izteikt kā vektoru $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lineāru kombināciju, t. i., eksistē tādi skaitļi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ka

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}.$$



26. zīm.

Tāpēc vektorus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sauc par **Dekarta bāzes vektoriem**.

Patiešām, pieņemsim, ka brīvi izraudzīts telpas vektors $\vec{a}$ ir pārvietots paralēli sev tā, ka tā sākumpunkts atrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā O , bet galapunkts ir punkts A . Tad $\vec{a} = \vec{OA}$ (26. zīm.). Vektoru, kura sākumpunkts sakrīt ar koordinātu sistēmas sākumpunktu, sauc par **rādiusvektoru**; parasti to apzīmē ar $\vec{r}$. Novelkot caur punktu A koordinātu plaknēm paralēlas plaknes, atrodam punkta A projekcijas uz koordinātu asīm – punktus A_1, A_2 un A_3 (lai nesarežģītu zīmējumu, pieņemam, ka vektors $\vec{OA}$ atrodas 1. oktantā). Tādējādi iegūstam taisnstūra paralēlskaldni, kura diagonāle ir OA . Saskaņā ar vektoru saskaitīšanas likumu $\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{A_1A_2} + \vec{A_2A_3}$, bet, tā kā $\vec{A_1A_2} = \vec{OA_2}$, $\vec{A_2A_3} = \vec{OA_3}$, tad

$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \vec{OA_3}. \quad (1)$$

Tā kā $\vec{i}$ un $\vec{OA_1}$ ir kolineāri vektori, tad eksistē tāds skaitlis λ_1 , ka $\vec{OA_1} = \lambda_1 \vec{i}$, analogi $\vec{OA_2} = \lambda_2 \vec{j}$ un $\vec{OA_3} = \lambda_3 \vec{k}$. Ievietojot šīs izteiksmes vienādībā (1), iegūstam, ka

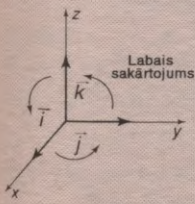
$$\vec{OA} = \vec{a} = \lambda_1 \vec{i} + \lambda_2 \vec{j} + \lambda_3 \vec{k}. \quad (2)$$

Noskaidrosim koeficientu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ģeometrisku nozīmi formulā (2). Tā kā $\vec{i}$ ir vienības vektors, t. i., tā garums ir 1, tad skaitlis λ_1 ir vienāds ar vektora $\vec{OA_1}$ moduli, ja $\vec{i}$ ir vienādi vērsti ar $\vec{OA_1}$, un vienāds ar moduli pretējo skaitli, ja $\vec{i}$ un $\vec{OA_1}$ virzieni ir pretēji. Tātad saskaņā ar vektora projekcijas definīciju λ_1 ir rādiusvektora $\vec{a} = \vec{OA}$ projekcija uz Ox ass. No telpas punkta koordinātu definīcijas izriet, ka λ_1 ir arī vektora $\vec{OA}$ galapunkta A abscisa. Tādējādi, ja punkta A koordinātas ir $(x; y; z)$, tad

$$\lambda_1 = \text{proj}_{Ox} \vec{a} = a_x = x.$$

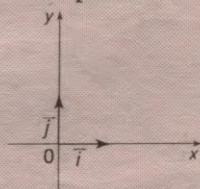
=====

Dekarta koordinātu sistēma
telpā



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \perp \vec{i}.$$

Dekarta koordinātu sistēma
plaknē



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \vec{i} \perp \vec{j}.$$

Analogi spriežot, secinām, ka

$$\lambda_2 = \text{proj}_{Oy} \vec{a} = a_y = y \quad \text{un} \quad \lambda_3 = \text{proj}_{Oz} \vec{a} = a_z = z.$$

Līdz ar to no izteiksmes (2) iegūstam, ka

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (3)$$

kur a_x, a_y, a_z ir vektora $\vec{a}$ projekcijas uz koordinātu asīm; šos skaitļus sauc par vektora $\vec{a}$ koordinātām bāzē $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Definīcija. Par vektora Dekarta koordinātām sauc šī vektora projekcijas uz Dekarta koordinātu sistēmas asīm; šie skaitļi ir koeficienti pie bāzes vektoriem $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektora izvirzījumā (3).

Vektora koordinātas raksta iekavās aiz burtā, ar kuru apzīmē vektoru:

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z). \quad (4)$$

Tātad vektoru $\vec{a}$ var uzdot kā ar pierakstu (3), tā arī ar (4); šie pieraksti ir ekvivalenti. No teorēmām par vektora projekciju uz ass izriet šādi secinājumi:

- 1) ja kāda vektora koordināta ir pozitīvs skaitlis, tad vektors ar attiecīgo koordinātu asi veido šauru leņķi;
- 2) ja kāda vektora koordināta ir negatīvs skaitlis, tad vektors ar attiecīgo koordinātu asi veido platu leņķi;
- 3) ja kāda vektora koordināta ir vienāda ar nulli, tad vektors ir perpendikulārs attiecīgajai koordinātu asij; šajā gadījumā rādiusvektors $\vec{OA}$ atrodas koordinātu plaknē, kura ir perpendikulāra pret minēto koordinātu asi.

Piemērs. Vektors $\vec{a} = (4; 7; 1)$ ar visām koordinātu asīm veido šaurus leņķus, vektors $\vec{b} = (5; -6; 9)$ ar Ox un Oz veido šaurus leņķus, bet ar Oy asi – platu leņķi; vektors $\vec{c} = (2; 0; -3)$ ir perpendikulārs pret Oy asi, ar Ox asi veido šauru leņķi, bet ar Oz asi – platu leņķi, $\vec{d} = (0; 5; 0)$ ir perpendikulārs gan pret Ox asi, gan arī pret Oz asi, tātad šis vektors ir paralēls un vienādi vērstas ar Oy asi.

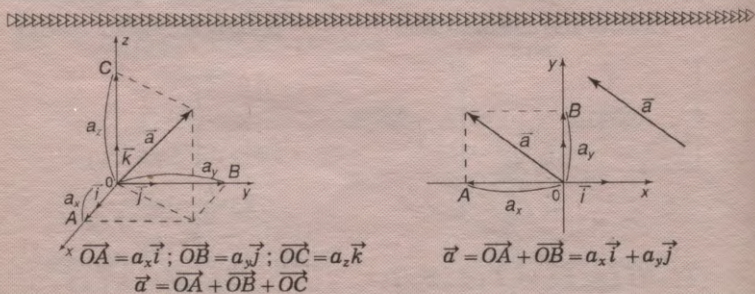
3. VEKTORA MODUĻA APRĒĶINĀŠANAS FORMULA

Vektora $\vec{OA}$ modulis ir vienāds ar 26. zīmējumā attēlotā taisnstūra paralēlskaldņa diagonāles garumu, kuru atrod, izmantojot Pitagora teorēmu:

$$OA^2 = OB^2 + BA^2, \quad OB^2 = OA_1^2 + A_1B^2; \quad \text{tātad}$$

$$OA^2 = OA_1^2 + A_1B^2 + BA^2 \quad \text{jeb} \quad OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2,$$

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2}. \quad (5)$$



3)

ar

k.

25

4)

ir

2

0

1

0

1.

8

3

1

1

1

1

1

1

2. VEKTORA REIZINĀŠANA AR SKAITLI

Ja $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, tad $\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$, t. i., vektora reizinājuma ar skaitli koordinātas atrod, reizinot ar šo skaitli dotā vektora koordinātas.

Pierādījumā lietojam distributīvo īpašību: tā kā $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, tad $\lambda \vec{a} = \lambda(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}$ jeb

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z). \quad (2)$$

Piemēram, ja $\vec{a} = (5; 3; -4)$, tad $3\vec{a} = (15; 9; -12)$.

3. VEKTORU KOLINEARITĀTES NOSACĪJUMS KOORDINĀTU FORMĀ

2.2. paragrāfā, aplūkojot vektora reizināšanu ar skaitli, pierādījām teorēmu, ka divi vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri tad un tikai tad, ja eksistē tāds skaitlis λ , ka $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Izteiksim šo kolinearitātes nosacījumu ar vektoru koordinātu palīdzību. Pieņemsim, ka doto vektoru koordinātas ir šādas: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ un $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Tad $\lambda \vec{b} = (\lambda b_x; \lambda b_y; \lambda b_z)$. No vienādības $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ izriet, ka $a_x = \lambda b_x$, $a_y = \lambda b_y$, $a_z = \lambda b_z$ jeb

$\frac{a_x}{b_x} = \lambda$, $\frac{a_y}{b_y} = \lambda$, $\frac{a_z}{b_z} = \lambda$. Pielīdzinot šo vienādību kreisās puses, iegūstam proporciju

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (3)$$

Tātad divi vektori ir kolineāri tad un tikai tad, ja to koordinātas ir proporcionālas.

Piemēram, $\vec{a} = (3; -2; 4)$ un $\vec{b} = (6; -4; 8)$ ir kolineāri vektori, jo to koordinātas ir proporcionālas:

$$\frac{3}{6} = \frac{-2}{-4} = \frac{4}{8}.$$

Šo vektoru virzieni sakrīt, jo proporcionalitātes koeficients $\lambda = \frac{1}{2} > 0$. Savukārt vektori $\vec{c} = (10; -15; 5)$ un $\vec{d} = (-2; 3; -1)$ ir kolineāri, bet pretēji vērsti vektori, jo

$$\frac{10}{-2} = \frac{-15}{3} = \frac{5}{-1}$$

un proporcionalitātes koeficients $\lambda = -5 < 0$.

4. VEKTORA KOORDINĀTU APRĒĶINĀŠANA PĒC TĀ SĀKUMPUNKTA UN GALAPUNKTA KOORDINĀTĀM

Definējot vektora koordinātu jēdzienu, noskaidrojām, ka rādiusvektora $\vec{r} = \vec{OA}$ koordinātas ir vienādas ar šī vektora galapunkta A koordinātām. Ja vektors $\vec{a} = \vec{AB}$ nav rādiusvektors, t. i., tā sākumpunkts A neatrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā O, tad vektora koordinātas a_x , a_y un a_z var aprēķināt pēc punktu A un B koordinātām. Pieņemsim, ka šo punktu koordinātas ir dotas:

=====

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

$A(x_1; y_1; z_1)$ un $B(x_2; y_2; z_2)$. Konstruējam rādiusvektorus $\vec{OA} = (x_1; y_1; z_1)$ un $\vec{OB} = (x_2; y_2; z_2)$ (27. zīm.). No zīmējuma izriet, ka $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Izsakot šo vektoru starpību koordinātu formā, iegūstam, ka

$$\vec{a} = \vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Tātad vektora koordinātas aprēķina, atņemot no vektora galapunkta koordinātām atbilstošās vektora sākumpunkta koordinātas, t. i.,

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1. \quad (4)$$

Piemēram, ja $A(7; 12; -8)$ un $B(3; 9; 2)$, tad $\vec{AB} = (-4; -3; 10)$.

Piemērs. Noskaidrot, vai četrstūris $ABCD$ ir paralelograms, ja tā virsotņu koordinātas ir šādas: $A(5; 3; 1)$, $B(8; 7; 9)$, $C(7; 10; 20)$, $D(1; 2; 4)$.

Aprēķinām to vektoru koordinātas, kuri sakrīt ar četrstūra malām: $\vec{AB} = (3; 4; 8)$, $\vec{BC} = (-1; 3; 11)$, $\vec{CD} = (-6; -8; -16)$, $\vec{DA} = (4; 1; -3)$. Vektori $\vec{AB}$ un $\vec{CD}$ ir kolineāri, jo to koordinātas ir proporcionālas:

$$\frac{3}{-6} = \frac{4}{-8} = \frac{8}{-16}.$$

Vektori $\vec{BC}$ un $\vec{DA}$ nav kolineāri, jo to koordinātas nav proporcionālas:

$$\frac{-1}{4} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{11}{-3}.$$

Tātad četrstūra $ABCD$ divas pretējās malas AB un CD ir paralēlas, bet divas citas pretējās malas BC un DA nav paralēlas. Tāpēc šis četrstūris nav paralelograms, bet ir trapece.

5. NOGRIEŽŅA GARUMA APRĒĶINĀŠANA PĒC TĀ GALAPUNKTU KOORDINĀTĀM

Pieņemsim, ka ir dotas nogriežņa AB galapunktu koordinātas: $A(x_1; y_1; z_1)$ un $B(x_2; y_2; z_2)$. Šī nogriežņa garums ir vienāds ar vektora $\vec{AB}$ moduli, kuru aprēķina pēc vektora koordinātām šādi:

$$|\vec{AB}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{sk. 2.4. §. 3. p.}).$$

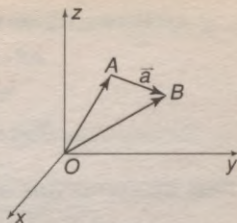
Tā kā $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$, tad iegūstam šādu formulu nogriežņa garuma aprēķināšanai:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (5)$$

Piemērs. Pārliciecināties, ka trijstūris ABC ir vienādsānu trijstūris, ja $A(5; 7; 2)$, $B(5; 4; 6)$, $C(9; 4; 9)$.

Attālums starp punktiem $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$d = |\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$



27. zīm.

Aprēķinām trijstūra malas AB un BC , izmantojot formulu (5):

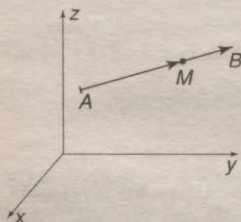
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\ &= \sqrt{(5-5)^2 + (4-7)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2} = \\ &= \sqrt{(9-5)^2 + (4-4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{25} = 5. \end{aligned}$$

Tātad $AB=BC$ un ABC ir vienādsānu trijstūris.

6. NOGRIEŽŅA DALĪŠANA DOTAJĀ ATTIECĪBĀ

Pieņemsim, ka nogriežņa AB punkts M sadala šo nogriežni divās daļās, kuru garumu attiecība ir vienāda ar skaitli λ , t. i., $\frac{AM}{MB} = \lambda$ jeb $AM = \lambda MB$. Aprēķināsim punkta M koordinātas $(x; y; z)$, ja ir dotas nogriežņa AB galapunktu koordinātas $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$.



28. zīm.

Aplūkojam vektorus $\vec{AM}$ un $\vec{MB}$, kuri ir kolineāri un tātad $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$ (28. zīm.). Šo vektoru koordinātas aprēķinām pēc to sākumpunktu un galapunktu koordinātām:

$$\vec{AM} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1), \quad \vec{MB} = (x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z).$$

Tātad $\lambda \vec{MB} = (\lambda(x_2 - x); \lambda(y_2 - y); \lambda(z_2 - z))$ un no vienādības $\vec{AM} = \lambda \vec{MB}$ izriet, ka

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda(y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

No šīm vienādībām atrodam punkta $M(x; y; z)$ koordinātas:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x) \Rightarrow x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2, \quad x \cdot (1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2,$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

Analogi no pārējām vienādībām atrodam, ka

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

Piezīme. Var aplūkot arī gadījumu, kad punkts M atrodas uz nogriežņa AB pagarinājuma; tad $\lambda < 0$.

Ja punkts $M(x; y; z)$ sadala nogriežni M_1M_2 attiecībā

$$\frac{m}{n} = \lambda, \text{ tad } \vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda};$$

ja $\lambda = 1$, tad M ir nogriežņa viduspunkts,

ja $\lambda < 0$, tad M atrodas ārpus nogriežņa (uz tā pagarinājuma).

Ja M ir nogriežņa AB viduspunkts, tad $AM=MB$ un $\lambda=1$. Ievietojot šo λ vērtību formulās (6), atrodam **nogriežņa viduspunkta koordinātas**:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (7)$$

Ja nogrieznis AB atrodas xOy plaknē, tad visu punktu aplikātas ir vienādas ar nulli un aprēķinos lieto tikai x un y izteiksmes.

1. piemērs. Dots trijstūra ABC virsotņu koordinātas $A(6; 3; 4)$, $B(4; 9; 0)$, $C(11; 6; 5)$. Aprēķināt šī trijstūra mediānu krustpunkta koordinātas.

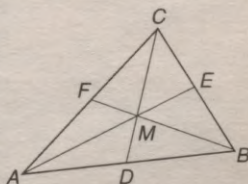
Konstruējam mediānas CD , AE , BF ; to krustpunkts ir punkts M (29. zīm.). Lietojot nogriežņa viduspunkta koordinātu formulas, atrodam punkta D koordinātas:

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{6+4}{2} = 5,$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+9}{2} = 6,$$

$$z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4+0}{2} = 2.$$

Tātad $D(5; 6; 2)$.



29. zīm.

Tā kā mediānu krustpunkts atdala no mediānas $\frac{1}{3}$, skatot no trijstūra pamatnes, tad $\frac{CM}{MD} = 2$. Tādējādi, par nogriežņa CD sākumpunktu ņemot punktu C , par galapunktu – punktu D , ievietojam formulās (6) šo punktu koordinātas un nogriežņu attiecības rādītāju $\lambda=2$:

$$x_M = \frac{x_C + \lambda x_D}{1 + \lambda} = \frac{11 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = 7,$$

$$y_M = \frac{y_C + \lambda y_D}{1 + \lambda} = \frac{6 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 6,$$

$$z_M = \frac{z_C + \lambda z_D}{1 + \lambda} = \frac{5 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = 3.$$

Trijstūra mediānu krustpunkts ir punkts $M(7; 6; 3)$.

2. piemērs. Dots paralelograma $ABCD$ trīs virsotnes $A(4; 2)$, $B(10; 6)$, $C(2; 8)$. Atrast virsotnes D koordinātas.

Izmantojam īpašību, ka paralelograma diagonāļu krustpunkts dala diagonāles uz pusēm (30. zīm.). Tā kā M ir nogriežņa AC viduspunkts, tad

$$x_M = \frac{4+2}{2} = 3, \quad y_M = \frac{2+8}{2} = 5, \quad \text{t. i., } M(3; 5).$$

Tā kā punkts M ir arī nogriežņa DB viduspunkts, tad

$$x_M = \frac{x_D + x_B}{2} \quad \text{un} \quad y_M = \frac{y_D + y_B}{2}.$$

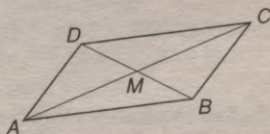
No šīm vienādībām aprēķinām x_D un y_D :

$$2x_M = x_D + x_B,$$

$$x_D = 2x_M - x_B = 2 \cdot 3 - 10 = -4;$$

$$y_D = 2y_M - y_B = 2 \cdot 5 - 6 = 4.$$

Tātad paralelograma ceturtais virsotne ir $D(-4; 4)$.

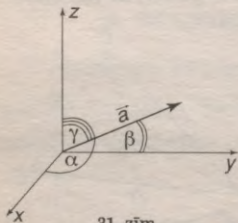


30. zīm.

2.6. §. VEKTORU VIRZIENA NOTEIKŠANA

1. VEKTORA VIRZIENA LENĶI UN VIRZIENA KOSINUSI

Vektora virzienu koordinātu telpā nosaka lenķi, ko vektors veido ar koordinātu asīm. Parasti vektora $\vec{a}$ lenķi ar Ox ass pozitīvo virzienu apzīmē ar burtu α , lenķi starp vektoru $\vec{a}$ un Oy ass pozitīvo virzienu apzīmē ar β un lenķi starp vektoru un Oz ass pozitīvo virzienu – ar γ , t. i., $\alpha = \angle(\vec{a}; Ox)$, $\beta = \angle(\vec{a}; Oy)$, $\gamma = \angle(\vec{a}; Oz)$. Šos lenķus sauc par *vektora virziena lenķiem* (31. zīm.). Aprēķinos parasti lieto vektora virziena lenķu kosinusa funkcijas vērtības $\cos \alpha$, $\cos \beta$ un $\cos \gamma$; tās sauc par *vektora virziena kosinusiem*. Virziena kosinusus viegli aprēķināt pēc vektora koordinātām.



31. zīm.

Pieņemsim, ka ir dots vektors $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$. Tā kā vektora koordinātas ir šī vektora projekcijas uz koordinātu asīm, bet vektora projekcija uz ass ir vienāda ar vektora moduļa reizinājumu ar tā lenķa kosinusu, ko vektors veido ar asi (2.4. §.), tad

$$a_x = \text{proj}_{Ox} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \alpha, \quad a_y = \text{proj}_{Oy} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \beta, \quad a_z = \text{proj}_{Oz} \vec{a} = |\vec{a}| \cos \gamma. \quad (1)$$

No vienādībām (1) iegūstam, ka

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \quad (2)$$

Kāpinot vienādības (2) kvadrātā un saskaitot, atrodam vektoru virzienu kosinusu pamatformulu:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = 1.$$

Tātad

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (3)$$

2. VEKTORA ORTA KOORDINĀTAS

Ja $\vec{a}^0$ ir vienības vektors, t. i., $|\vec{a}^0| = 1$, tad no vienādībām (1) iegūstam, ka tā projekcijas $a_x^0 = \cos \alpha$, $a_y^0 = \cos \beta$, $a_z^0 = \cos \gamma$. Tātad vienības vektora koordinātas ir vienādas ar šī vektora virzienu kosinusiem. Tādējādi vektora $\vec{a}$ virzienu kosinusi ir šī vektora orta $\vec{a}^0$ koordinātas:

$$\vec{a}^0 = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma). \quad (4)$$

Ja α, β, γ – vektora $\vec{a}$ virzienu lenķi, tad tā Orts ir

$$\vec{a}^0 = \vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma); \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Secinājums: jebkuru vektoru $\vec{a}$ viennozīmīgi var noteikt šādi: ja $\vec{a} = \overline{M_1 M_2}$, t. i., tā galapunkti $M_1(x_1; y_1; z_1)$ un $M_2(x_2; y_2; z_2)$, tad

$$\vec{a} = (a_x; a_y; a_z) = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1);$$

ja dots $|\vec{a}| = a$ un vektora $\vec{a}$ Orts $\vec{e}$, tad

$$\vec{a} = a\vec{e} = (a \cos \alpha; a \cos \beta; a \cos \gamma).$$

1. piemērs. Atrast vektora $\vec{a} = (6; 2; 3)$ orta $\vec{a}^0$ koordinātas.

Atrrodam vektora $\vec{a}$ moduli:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7.$$

Saskaņā ar formulām (2) $\cos \alpha = \frac{6}{7}$, $\cos \beta = \frac{2}{7}$, $\cos \gamma = \frac{3}{7}$. Tātad $\vec{a}^0 = \left(\frac{6}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$.

2. piemērs. Aprēķināt vektora $\vec{b}$ koordinātas, ja tas ir kolineārs un pretēji vērsts ar vektoru $\vec{a} = (16; -15; 12)$ un $|\vec{b}| = 75$.

Tā kā $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, tad $\vec{a}^0 = -\vec{b}^0$. Atrrodam $\vec{a}^0$ koordinātas:

$$|\vec{a}| = \sqrt{16^2 + (-15)^2 + 12^2} = \sqrt{625} = 25; \vec{a}^0 = \left(\frac{16}{25}; \frac{-15}{25}; \frac{12}{25}\right); \vec{b}^0 = \left(-\frac{16}{25}; \frac{15}{25}; -\frac{12}{25}\right).$$

Tā kā $\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \vec{b}^0$ (sk. 2.2. §. 3. p.), tad $\vec{b} = \left(75 \cdot \left(-\frac{16}{25}\right); 75 \cdot \frac{15}{25}; 75 \cdot \left(-\frac{12}{25}\right)\right) = (-48; 45; -36)$.

3. piemērs. Punkta M rādiusvektors $\vec{OM}$ ar koordinātu asīm veido leņķus $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 135^\circ$, bet ar Oz asi veido platu leņķi, t. i., $\gamma > 90^\circ$. Aprēķināt punkta M koordinātas un izteikt vektoru $\vec{OM}$ ar bāzes vektoriem $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ja $|\vec{OM}| = 2$.

Atrrodam vektora $\vec{OM}$ virziena kosinusus: $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Lai atrastu $\cos \gamma$, izmantojam virziena kosinusa pamatformulu (3). No šīs formulas iegūstam, ka

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}.$$

Tā kā pēc uzdevuma nosacījumiem $\gamma > 90^\circ$, tad $\cos \gamma < 0$:

$$\cos \gamma = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}.$$

Vektora koordinātas atrod, reizinot vektora moduli ar virziena kosinusi (sk. formulas (1)). Tā kā $|\vec{OM}| = 2$, tad

$$a_x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad a_y = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}, \quad a_z = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Līdz ar to vektora $\vec{OM}$ izteiksme ar Dekarta bāzes vektoriem ir šāda:

$$\vec{OM} = \vec{i} - \sqrt{2} \vec{j} - \vec{k}.$$

Tā kā rādiusvektora koordinātas ir vienādas ar šī vektora galapunkta koordinātām, tad $M(1; -\sqrt{2}; -1)$.

2.7. §. JĒDZIENS PAR VEKTORA AFĪNĀM KOORDINĀTĀM

1. VEKTORU SISTĒMAS LINEĀRA ATKARĪBA UN LINEĀRA NEATKARĪBA

Pieņemsim, ka ir doti n vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Šādu vektoru kopu sauc par *vektoru sistēmu*. Summu, kuras saskaitāmie ir šo vektoru reizinājumi ar brīvi izraudzītiem reāliem skaitļiem $k_1, k_2, \dots, k_n$, t. i., izteiksmi

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n, \quad (1)$$

sauc par dotās vektoru sistēmas **lineāru kombināciju**. Ir iespējams, ka kāda vektoru sistēmas lineāra kombinācija ir vienāda ar nullvektoru $\vec{0}$.

Definīcija. Vektoru sistēmu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sauc par **lineāri atkarīgu**, ja eksistē tādi skaitļi $k_1, k_2, \dots, k_n$, no kuriem vismaz viens nav vienāds ar nulli, ka šo vektoru lineāra kombinācija ir vienāda ar nullvektoru, t. i.,

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n = \vec{0}. \quad (2)$$

Vektoru sistēmu sauc par **lineāri neatkarīgu**, ja tās lineāra kombinācija ir vienāda ar nullvektoru tikai tad, ja visi lineārās kombinācijas (2) koeficienti ir vienādi ar nulli, t. i., $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

1. teorēma

Divi nenulles vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir lineāri atkarīgi tad un tikai tad, ja šie vektori ir kolineāri.

Nepieciešamības pierādījums

Dots: vektori ir lineāri atkarīgi; tātad $k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} = \vec{0}$ ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$).

Jāpierāda: $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri vektori.

No dotā izriet, ka $k_1 \vec{a} = -k_2 \vec{b}$ un $\vec{a} = -\frac{k_2}{k_1} \vec{b}$, t. i., $\vec{a} = \lambda \vec{b}$, kur $\lambda = -\frac{k_2}{k_1}$. Tātad $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri vektori.

Pietiekamības pierādījums

Dots: $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri vektori.

Jāpierāda: eksistē tādi skaitļi $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, ka $k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} = \vec{0}$.

Tā kā $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir kolineāri vektori, tad $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. No šīs vienādības iegūstam, ka $\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0}$. Tātad šo vektoru lineāra kombinācija ir vienāda ar nullvektoru, turklāt lineārās kombinācijas koeficienti nav vienādi ar nulli: $k_1 = 1, k_2 = -\lambda$.

Secinājums

Divi vektori ir lineāri neatkarīgi tad un tikai tad, ja tie nav kolineāri.

2. teorēma

Trīs nenulles vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir lineāri atkarīgi tad un tikai tad, ja tie ir komplanāri vektori.

Nepieciešamības pierādījums

Dots: vektori ir lineāri atkarīgi, t. i., $k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} + k_3 \vec{c} = \vec{0}$, pie tam visi koeficienti nav nulles.

Jāpierāda: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir komplanāri vektori.

Pieņemot, ka $k_3 \neq 0$, no dotās vienādības izsakām vektoru $\vec{c}$:

$$k_3 \vec{c} = -k_1 \vec{a} - k_2 \vec{b}, \quad \vec{c} = -\frac{k_1}{k_3} \vec{a} - \frac{k_2}{k_3} \vec{b}.$$

=====

Vektorus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sauc par lineāri atkarīgiem, ja

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_m \vec{a}_n = \vec{0} \quad (1)$$

un vismaz viens no koeficientiem $k_1, k_2, \dots, k_n$ nav 0; šos vektorus sauc par lineāri neatkarīgiem, ja vienādība (1) ir spēkā tikai tad, kad visi koeficienti ir vienādi ar nulli.

$\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir lineāri atkarīgi tad un tikai tad, ja tie ir kolineāri: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir lineāri atkarīgi tad un tikai tad, ja tie ir komplanāri.

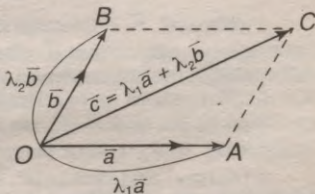
Apzīmējot $\lambda_1 = -\frac{k_1}{k_3}$ un $\lambda_2 = -\frac{k_2}{k_3}$, iegūstam, ka $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$. Paralēli pārnesot vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$ tā, lai tiem būtu kopīgs sākumpunkts, secinām, ka vektors $\vec{c}$ sakrīt ar tāda paralelograma diagonāli, kas konstruēts uz vektoriem $\lambda_1 \vec{a}$ un $\lambda_2 \vec{b}$. Tātad $\vec{c}$ atrodas vienā plaknē ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, t. i., vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$ ir komplanāri. Ja $\vec{a}$ un $\vec{b}$ atrodas uz vienas taisnes, tad arī $\vec{c}$ atrodas uz šīs taisnes un $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ komplanaritāte ir acīmredzama.

Pietiekamības pierādījums

Dots: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir komplanāri vektori.

Jāpierāda: $k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} + k_3 \vec{c} = \vec{0}$, pie tam ne visi koeficienti ir vienādi ar nulli.

Paralēli pārnesot, dotos vektorus var novietot vienā plaknē tā, ka tiem ir kopīgs sākumpunkts O . Ja divi no šiem vektoriem ir kolineāri, piemēram, $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ jeb $\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{0}$, tad var izveidot arī lineāru kombināciju $\vec{a} - \lambda \vec{b} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$. Tā kā ne visi koeficienti šajā izteiksmē ir vienādi ar nulli, tad secinām, ka $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir lineāri atkarīgi vektori. Ja nekādi divi no šiem vektoriem nav kolineāri, tad jebkuru vektoru, piemēram, vektoru $\vec{c}$, var izteikt kā pārējo vektoru lineāru kombināciju. Šo apgalvojumu pierāda, caur vektora $\vec{c}$ galapunktu C novelkot taisnes paralēli vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ (32. zīm.). Šīs taisnes krusto taisnes, uz kurām atrodas vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$, atbilstoši punktos A un B . Tā kā $\vec{OA} \parallel \vec{a}$, tad $\vec{OA} = \lambda_1 \vec{a}$. Analogi $\vec{OB} \parallel \vec{b}$, tāpēc $\vec{OB} = \lambda_2 \vec{b}$. No 32. zīmējuma redzams, ka $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$ jeb $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$. Līdz ar to $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$, tātad $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir lineāri atkarīgi vektori.



32. zīm.

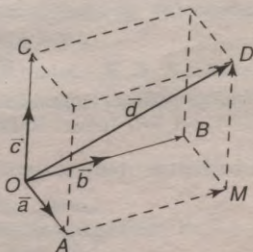
Secinājums

Trīs vektori ir lineāri neatkarīgi tad un tikai tad, ja šie vektori nav komplanāri.

3. teorēma

Jebkuri četri vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ir lineāri atkarīgi.

Lai pierādītu šo apgalvojumu, pārnesam dotos vektorus tā, lai tiem būtu kopīgs sākumpunkts O . Pieņemsim, ka $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nav komplanāri (pretējā gadījumā pēc iepriekšējās teorēmas tie ir lineāri atkarīgi, un, pievienojot ceturto vektoru $\vec{d}$, iegūst lineāri atkarīgu vektoru sistēmu, kas bija jāpierāda). Caur vektora $\vec{d}$ galapunktu D novelkam plakni, kas paralēla vektoriem $\vec{b}$, $\vec{c}$. Šī plakne punktā A krusto taisni, uz kuras atrodas vektors $\vec{a}$ (33. zīm.). Caur punktu D paralēli vektoriem $\vec{a}$, $\vec{c}$ novelkta plaknes punktā B krusto taisni, uz kuras atrodas vektors $\vec{b}$. Analogi iegūst punktu C – vektora $\vec{c}$ taisnes krustpunktu ar plakni, kas vilkta caur punktu D paralēli vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tādējādi iegūst paralēlskaldni, uz kura diagonāles OD atrodas vektors $\vec{d}$. Acīmredzami $\vec{OD} = \vec{d} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{MD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Tā kā $\vec{OA} \parallel \vec{a}$, $\vec{OB} \parallel \vec{b}$ un $\vec{OC} \parallel \vec{c}$, tad $\vec{OA} = \lambda_1 \vec{a}$, $\vec{OB} = \lambda_2 \vec{b}$, $\vec{OC} = \lambda_3 \vec{c}$. Tāpēc $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$ jeb $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$. Tātad vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ir lineāri atkarīgi.



33. zīm.

2. BĀZES VEKTORI UN AFĪNĀS KOORDINĀTAS

No iepriekšējā punktā aplūkoto teorēmu pierādījumiem izriet šādi secinājumi.

1. Ja divi plaknes vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir lineāri neatkarīgi (t. i., nav kolineāri), tad jebkuru citu šīs plaknes vektoru $\vec{c}$ vienā vienīgā veidā var izteikt kā šo vektoru lineāru kombināciju:

$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}. \quad (3)$$

Vektorus $\vec{a}$, $\vec{b}$ lineārajā kombinācijā (3) sauc par *bāzes vektoriem* jeb par *bāzi*, bet skaitļus λ_1 un λ_2 – par vektora $\vec{c}$ *afinajām koordinātām bāzē* $\vec{a}$, $\vec{b}$. Tātad bāzi plaknē var veidot jebkuri divi nekolineāri vektori. Ja bāzes vektori ir savstarpēji perpendikulāri vienības vektori un to orientācija sakrīt ar Dekarta labās koordinātu sistēmas Ox un Oy asu orientāciju, tad šos vektorus parasti apzīmē ar burtiem $\vec{i}$, $\vec{j}$ un koeficientus λ_1 , λ_2 sauc par vektora $\vec{c}$ *Dekarta koordinātām*.

2. Ja trīs vektori telpā $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir lineāri neatkarīgi (t. i., nav komplanāri), tad jebkuru citu telpas vektoru $\vec{d}$ vienā vienīgā veidā var izteikt kā šo vektoru lineāru kombināciju:

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}. \quad (4)$$

Vektorus $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ lineārajā kombinācijā (4) sauc par *bāzi telpā*, bet skaitļus λ_1 , λ_2 un λ_3 sauc par vektora $\vec{d}$ afīnajām koordinātām bāzē $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Bāzi telpā var veidot jebkuri trīs nekomplanāri vektori. Ja bāzes vektori ir savstarpēji perpendikulāri vienības vektori un to orientācija sakrīt ar labās Dekarta koordinātu sistēmas *Ox*, *Oy* un *Oz* asu orientāciju, tad šos vektorus parasti apzīmē ar burtiem $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ un koeficientus λ_1 , λ_2 , λ_3 sauc par vektora $\vec{d}$ Dekarta koordinātām (2.4. §. 2. p.).

Piezīme. No teiktā izriet, ka ir ļoti daudz iespēju, kā izraudzīties bāzi telpā (to veido jebkuri trīs nekomplanāri vektori). Tātad vienam un tam pašam vektoram dažādās bāzēs ir dažādas afīnās koordinātas. Bieži ir nepieciešams noteikt sakarības starp kāda vektora koordinātām dažādās bāzēs.

1. piemērs. Bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ doti trīs vektori $\vec{a}_1 = (1; 0; 2)$, $\vec{a}_2 = (-1; 1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 0)$. Izraugoties par bāzi vektorus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, vektora $\vec{b}$ koordinātas ir $(-1; 1; 2)$. Noteikt vektora $\vec{b}$ koordinātas bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Atrisinājums. No uzdevuma nosacījumiem izriet, ka $\vec{b} = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$, $\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3$, $\vec{a}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{a}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Ievietojot vektora $\vec{b}$ lineārajā kombinācijā vektoru $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ un $\vec{a}_3$ izteiksmes, iegūstam, ka

$$\begin{aligned}\vec{b} &= -(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3) + (-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \\ &= (-1-1+2)\vec{e}_1 + (0+1+2)\vec{e}_2 + (-2+1+0)\vec{e}_3 = \\ &= 0\cdot\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Tātad bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektora $\vec{b}$ koordinātas ir šādas: $\vec{b} = (0; 3; -1)$.

2. piemērs. Noskaidrot, vai vektoru sistēma $\vec{a} = (1; -2; 0)$, $\vec{b} = (1; 2; -1)$, $\vec{c} = (-1; -6; 2)$ ir lineāri atkarīga.

Lineāri neatkarīgi vektori veido bāzi;
bāze plaknē – jebkuri divi nekolineāri vektori;
bāze telpā – jebkuri trīs nekomplanāri vektori.

Atrisinājums. Dotie skaitļi ir vektoru afīnās koordinātas kādā bāzē. Saskaņā ar vektoru lineārās atkarības definīciju noskaidrosim, vai eksistē tādi skaitļi k_1, k_2 un k_3 , no kuriem vismaz viens nav nulle, ka ir spēkā vienādība

$$k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} + k_3 \vec{c} = \vec{0}. \quad (5)$$

Izpildot lineārās darbības ar vektoru koordinātām, iegūstam, ka

$$k_1 \vec{a} + k_2 \vec{b} + k_3 \vec{c} = (k_1 + k_2 - k_3; -2k_1 + 2k_2 - 6k_3; 0 \cdot k_1 - k_2 + 2k_3).$$

Pielīdzinot koordinātu izteiksmes nullvektora koordinātām (0; 0; 0), iegūstam lineāru homogēnu vienādojumu sistēmu, kurā nezināmie lielumi ir k_1, k_2, k_3 :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ -2k_1 + 2k_2 - 6k_3 = 0 \\ -k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

Atrisinām sistēmu ar Gausa metodi (1.1. §. 2. p.). Reizinot pirmo vienādojumu ar 2 un pieskaitot otrajam vienādojumam, iegūstam ekvivalentu sistēmu

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ 4k_2 - 8k_3 = 0 \\ -k_2 + 2k_3 = 0. \end{cases}$$

Šīs sistēmas otro vienādojumu var svītrot, jo šo vienādojumu iegūst, reizinot trešo vienādojumu ar -4 . Tādējādi risināmā vienādojumu sistēma ir ekvivalenta sistēmai ar diviem vienādojumiem un trīs nezināmajiem

$$\begin{cases} k_1 + k_2 - k_3 = 0 \\ -k_2 + 2k_3 = 0, \end{cases}$$

kurai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Šīs sistēmas atrisinājumu kopu atrod, dodot nezināmajam k_3 brīvi izraudzītu vērtību C . Tā kā $k_3 = C$, tad $k_2 = 2C$ un no pirmā vienādojuma atrodam, ka $k_1 = -2C + C = -C$. Sistēmas atrisinājumu kopa ir $(-C; 2C; C)$. Izraugoties $C=1$, secinām, ka lineārajā kombinācijā (5) ir šādi koeficienti: $k_1 = -1, k_2 = 2, k_3 = 1$, t. i., $-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Tātad dotā vektoru sistēma ir lineāri atkarīga.

=====

Piemērs. Bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ doti četri vektori $\vec{a}_1 = (0; 1; -2); \vec{a}_2 = (2; 1; 1); \vec{a}_3 = (1; 0; 1); \vec{a}_4 = (2; 1; 3)$. Noteikt $\vec{a}_4$ koordinātas bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Atrisinājums. Tā kā četri vektori vienmēr ir lineāri atkarīgi, tad iespējams noteikt tādas konstantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 (\neq 0)$, ka

$$\vec{a}_4 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3.$$

Pielīdzinot atbilstošās vektoru koordinātas, iegūstam šādu vienādojumu sistēmu λ_1, λ_2 un λ_3 noteikšanai:

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \end{cases}$$

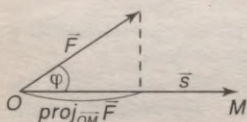
Atrisinot šo sistēmu, piemēram, ar Krāmera formulām, iegūstam, ka $\lambda_1 = -2; \lambda_2 = 3; \lambda_3 = -4$, t. i., bāzē $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ vektors $\vec{a}_4 = (-2; 3; -4)$.

2.8. §. VEKTORU SKALĀRAIS REIZINĀJUMS

1. FIZIKĀLĀ NOZĪME UN DEFINĪCIJA

Pieņemsim, ka jāaprēķina darbs, ko veic konstants spēks $\vec{F}$, iedarbojoties uz materiālu punktu, kas kustas taisnā virzienā no punkta O līdz punktam M . Šo pārvietojumu apzīmēsim ar vektoru $\vec{OM}$ jeb ar $\vec{s}$ (34. zīm.). Ja punkts pārvietojas vektora $\vec{OM}$ virzienā, kas veido leņķi φ ar spēka virzienu, tad darbu A veic tikai tā spēka komponente, kura darbojas pārvietojuma virzienā. Šīs komponentes lielums ir $\text{proj}_{\vec{OM}} \vec{F} = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi$. Tātad spēka $\vec{F}$ veiktais darbs šajā pārvietojumā ir

$$A = |\vec{OM}| \cdot \text{proj}_{\vec{OM}} \vec{F} = |\vec{OM}| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos \varphi \text{ jeb } A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi. \quad (1)$$



34. zīm.

Vektoru algebrā un tās lietojumos bieži izmanto divu vektoru moduļu reizinājumu ar šo vektoru veidotā leņķa kosinusu. Tāpēc ar šādu izteiksmi definē īpašu darbību ar vektoriem, ko sauc par skalāro reizinājumu.

Definīcija. Par divu vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ *skalāro reizinājumu* sauc šo vektoru garumu reizinājumu ar to veidotā leņķa kosinusu.

Ar leņķi φ starp vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ jāsaprot mazākais leņķis, ko veido šie vektori, ja tos pārnēs uz kopīgu sākumpunktu; tātad

$$\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ un } 0 \leq \varphi \leq \pi \quad (35. \text{ zīm.}).$$

Vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ skalāro reizinājumu apzīmē šādi: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Tātad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \text{ jeb} \quad (2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cos \varphi. \quad (2')$$

No definīcijas secinām, ka skalārais reizinājums ir skaitlis. No aplūkotā piemēra izriet skalārā reizinājuma fizikālā ilustrācija: *darbs vienāds ar spēka vektora $\vec{F}$ un pārvietojuma vektora $\vec{s}$ skalāro reizinājumu*, t. i.,

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Secinājums no skalārā reizinājuma definīcijas.

Tā kā

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = b \cos \varphi, \text{ bet } \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = a \cos \varphi \quad (35. \text{ zīm.}),$$

tad skalāro reizinājumu var pierakstīt arī šādi:

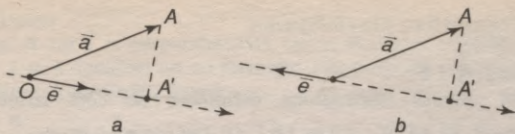
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a (b \cos \varphi) = a \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} \text{ jeb} \quad (3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b (a \cos \varphi) = b \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Tātad *divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar viena vektora moduļa reizinājumu ar otra vektora projekciju uz pirmā vektora.*

Piezīme. Ja viens no vektoriem ir vienības vektors, piemēram, $\vec{b} = \vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$), tad no formulas (3) izriet, ka

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = \text{proj}_{\vec{e}} \vec{a}. \quad (4)$$



36. zīm.

Jēdziens «projekcija uz vektora $\vec{e}$ » šeit jāsaprot kā vektora $\vec{a}$ projekcija uz ass, kas vērsta vektora $\vec{e}$ virzienā (36. zīm.), t. i., nogriežņa OA' garums ar «+» vai «-» zīmi atkarībā no $\vec{a}$ vērsuma (36. zīm. a un b).

2. SKALĀRĀ REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBAS

1. Skalārajam reizinājumam ir spēkā *komutatīvā īpašība*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (5)$$

Patiešām, tā kā $\varphi = \angle(\vec{a}; \vec{b}) = \angle(\vec{b}; \vec{a})$, tad

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}; \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cos \angle(\vec{b}; \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

2. Skalārajam reizinājumam ir spēkā *distributīvā īpašība*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (6)$$

Pierādot šo īpašību, izmantosim secinājumu no skalārā reizinājuma definīcijas un vektoru summas projekcijas īpašību:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a \cdot \text{proj}_{\vec{a}}(\vec{b} + \vec{c}) = a \cdot (\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} + \text{proj}_{\vec{a}} \vec{c}) = \\ &= a \cdot \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} + a \cdot \text{proj}_{\vec{a}} \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \end{aligned}$$

Protams, distributīvā īpašība ir spēkā jebkuram saskaitāmo vektoru skaitam.

3. Skalārajam reizinājumam ir spēkā *asociatīvā īpašība attiecībā uz vektoru reizināšanu ar skaitli*:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (7)$$

un arī

$$(\lambda_1 \vec{a}) \cdot (\lambda_2 \vec{b}) = \lambda_1 \lambda_2 (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Pierādījumā izmanto vektora reizinājuma ar skaitli projekcijas īpašību:

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = b \cdot \text{proj}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = b \cdot \lambda \cdot \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda b \cdot \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Reizinājumu $\vec{a} \cdot \vec{a}$ sauc par vektora $\vec{a}$ *skalāro kvadrātu*; to apzīmē šādi: $\vec{a}^2$. Tātad

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= \vec{a}^2 = a \cdot a \cos 0 = a^2 \text{ jeb} \\ \vec{a}^2 &= a^2, \end{aligned} \quad (8)$$

t. i., reizinot *vektoru skalāri pašu ar sevi*, iegūst tā garuma kvadrātu. Dekarta koordinātu sistēmas ortu skalārie kvadrāti ir vienādi ar 1:

$$\vec{i}^2 = 1, \vec{j}^2 = 1, \vec{k}^2 = 1.$$

No (8) izriet, ka

$$a = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (9)$$

4. *Nenulles vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja vektori ir perpendikulāri.*

Nepieciešamības pierādījums

$$\text{Dots: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$\text{Jāpierāda: } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Izmantojot skalārā reizinājuma definīciju, no dotā izriet, ka $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = 0$. Tā kā $|\vec{a}| \neq 0$ un $|\vec{b}| \neq 0$, tad $\cos \varphi = 0$ un $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Tātad $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Pietiekamības pierādījums

$$\text{Dots: } \vec{a} \perp \vec{b}, \text{ t. i., } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Jāpierāda: } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$\text{Acīmredzami } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

No aplūkotajām īpašībām izriet, ka vektoru izteiksmes, kas satur skalāro reizināšanu, var pārveidot analogi kā vienkāršas algebriskas izteiksmes – vektoru summu (starpību) skalāri reizina tāpat, kā reizina divus polinomus, u. tml.

1. piemērs. Aprēķināt $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, ja $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$ un $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 5$.

Aprēķinus izdara, izmantojot skalārā reizinājuma īpašības un definīciju:

$$\begin{aligned} (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3\vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot (-2\vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot (-2\vec{b}) = \\ &= 3\vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3a^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2b^2 = 3 \cdot (2\sqrt{3})^2 - 5 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 5 \cos \frac{5\pi}{6} - 2 \cdot 5^2 = \\ &= 36 - 50\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 50 = 61. \end{aligned}$$

2. piemērs. Aprēķināt vektora $\vec{a}$ moduli, ja $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$ un $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Tā kā } |\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a}^2} \quad (9) \quad \text{un } \vec{a}^2 = (2\vec{m} + 3\vec{n})^2 = (2\vec{m})^2 + 12\vec{m} \cdot \vec{n} + (3\vec{n})^2 = \\ &= 4 \cdot |\vec{m}|^2 + 12|\vec{m}| |\vec{n}| \cos 120^\circ + 9 \cdot |\vec{n}|^2 = 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 \cdot 1 = 13, \text{ tad } |\vec{a}| = \\ &= \sqrt{13}. \end{aligned}$$

3. SKALĀRĀ REIZINĀJUMA KOORDINĀTU FORMA

Pieņemsim, ka ir dotas vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ koordinātas Dekarta koordinātu sistēmas bāzē $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Sastādīsim šo vektoru skalārā reizinājuma izteiksmi, ievērojot skalārā reizinājuma īpašības. Tā kā Dekarta bāzes vektori ir savstarpēji perpendikulāri vienības vektori, t. i., $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}$, un $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ tad

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x \vec{i} \cdot \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + \\ &+ a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \cdot \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + \\ &+ a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \cdot \vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

Tātad divu vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar šo vektoru atbilstošo vienāda nosaukuma koordinātu reizinājumu summu:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (10)$$

Secinājums

Ja vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir perpendikulāri, tad to skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli (2.8. §. 2. p. 4. īpašība) un no formulas (10) atrodam vektoru perpendikularitātes nosacījumu koordinātu formā:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (11)$$

1. piemērs. Dotas vektoru Dekarta koordinātas $\vec{a} = (4; 7; -2)$, $\vec{b} = (3; 2; 5)$. Aprēķināt šo vektoru skalāro reizinājumu.

Izmantojot formulu (10), atrodam, ka

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 = 16.$$

2. piemērs. Doti vektori $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ un $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. Kādam ir jābūt m vērtībai, lai šie vektori būtu perpendikulāri?

Pēc vektoru perpendikularitātes nosacījuma (11) atrodam, ka jābūt spēkā vienādībai

$$4m + 3m + 4 \cdot (-7) = 0,$$

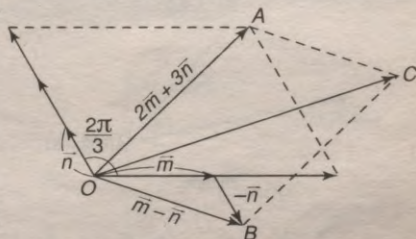
no kurienes aprēķinām, ka $7m = 28$ un $m = 4$. Tātad $\vec{a} \perp \vec{b}$, ja $m = 4$.

Piezīme. Jāievēro, ka ar formulu (10) skalāro reizinājumu (un arī vektora moduli ar 2.4. §. formulu (6)) var aprēķināt tikai tad, ja ir dotas vektoru Dekarta koordinātas bāzē $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ja vektori doti afīnā bāzē, tad šīs formulas nevar lietot un skalāro reizinājumu atrod pēc definīcijas, bet vektora moduli – kā kvadrātsakni no skalārā kvadrāta pēc formulas (9).

Piemērs. Doti vektori $\vec{OA} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ un $\vec{OB} = \vec{m} - \vec{n}$, kur $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$ un $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 120^\circ$. Konstruēt paralelogramu, kura malas ir OA un OB , un aprēķināt tā lielāko diagonāli.

Paralelograma konstrukcija parādīta 37. zīmējumā. Acīmredzami paralelograma lielākā diagonāle ir $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{m} + 3\vec{n} + \vec{m} - \vec{n} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Vektori $\vec{m}$ un $\vec{n}$ nav Dekarta bāzes vektori, jo tie nav savstarpēji perpendikulāri un $|\vec{m}| \neq 1$; tāpēc diagonāli OC , t. i., $|\vec{OC}|$, atrod kā kvadrātsakni no vektora skalārā kvadrāta:

$$\begin{aligned} |\vec{OC}| &= \sqrt{\vec{OC}^2} = \sqrt{(3\vec{m} + 2\vec{n})^2} = \sqrt{9\vec{m}^2 + 12\vec{m} \cdot \vec{n} + 4\vec{n}^2} = \\ &= \sqrt{9 \cdot 4 + 12 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ + 4 \cdot 1} = \sqrt{36 + 24 \left(-\frac{1}{2}\right) + 4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$



37. zīm.

Skalārais reizinājums

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z,$$

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

4. SKALĀRĀ REIZINĀJUMA LIETOJUMI

Skalārā reizinājuma definīciju bieži izmanto, lai aprēķinātu divu vektoru veidoto leņķi un viena vektora projekciju uz otra vektora.

1. No vienādības $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$ iegūstam

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \quad (12)$$

2. Tā kā

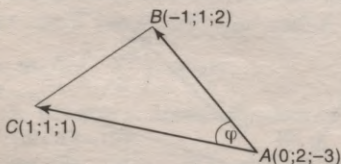
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} \text{ un } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a},$$

tad

$$\operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \text{ un } \operatorname{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}. \quad (13)$$

1. piemērs. Trijstūra virsotnes ir $A(0; 2; -3)$, $B(-1; 1; 2)$ un $C(1; 1; 1)$. Aprēķināt trijstūra leņķi pie virsotnes A (38. zīm.).

Lai noteiktu leņķi A , aplūkojam vektorus $\vec{AC}$ un $\vec{AB}$, kas iziet no punkta A . Atrodam šo vektoru Dekarta koordinātas pēc sākumpunkta A un galapunktu C un B koordinātām (sk. 2.5.§. (4)): $\vec{AC} = (1; -1; 4)$, $\vec{AB} = (-1; -1; 5)$. Saskaņā ar formulu (12)



38. zīm.

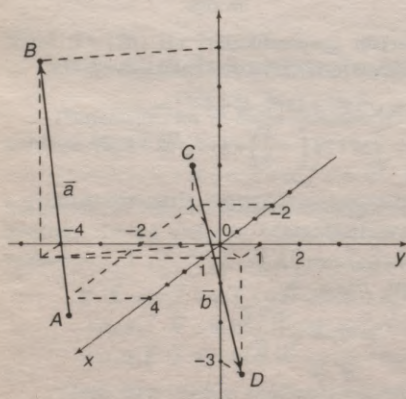
$$\begin{aligned} \cos \angle A &= \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}|} = \\ &= \frac{1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 4 \cdot 5}{\sqrt{1+1+16} \cdot \sqrt{1+1+25}} = \\ &= \frac{20}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{27}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

$$\text{Tātad } \angle A = \arccos \frac{20}{9\sqrt{6}} \approx 25^\circ.$$

2. piemērs. Doti punkti

$A(4; -2; -1)$, $B(1; -4; 5)$, $C(-3; -2; 1)$ un $D(1; 1; -3)$. Konstruēt vektorus $\vec{a} = \vec{AB}$ un $\vec{b} = \vec{CD}$ un aprēķināt vektora $\vec{b}$ projekciju uz vektora $\vec{a}$.

Vektoru konstrukcija parādīta 39. zīmējumā. Aprēķinām vektoru $\vec{a} = \vec{AB}$ un $\vec{b} = \vec{CD}$ Dekarta koordinātas: $\vec{a} = (-3; -2; 6)$, $\vec{b} = (4; 3; -4)$. Izmantojot formulu (13), aprēķinām šo vektoru skalāro reizinājumu un vektora $\vec{a}$ moduli:



39. zīm.

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_{\vec{a}} \vec{b} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \\ &= \frac{(-3) \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + 6 \cdot (-4)}{\sqrt{9+4+36}} = \\ &= \frac{-42}{7} = -6. \end{aligned}$$

2.9. §. VEKTORU VEKTORIĀLAIS REIZINĀJUMS

1. DEFINĪCIJA UN FIZIKĀLĀ NOZĪME

Definīcija. Par divu vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **vektoriālo reizinājumu** sauc vektoru $\vec{c}$, kura garumu un virzienu nosaka šādi:

- 1) vektora $\vec{c}$ modulis ir vienāds ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$ moduļu reizinājumu ar vektoru veidotā leņķa sinusu:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b});$$

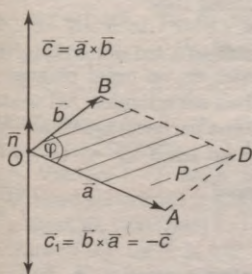
- 2) vektors $\vec{c}$ ir perpendikulārs vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ plaknei: $\vec{c} \perp \text{pl}_{\vec{a}, \vec{b}}$;
- 3) vektors $\vec{c}$ ir vērstis tā, lai vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ būtu labais sakārtojums.

Vektoriālo reizināšanu apzīmē ar pierakstu $\vec{a} \times \vec{b}$ vai arī $[\vec{a}, \vec{b}]$. Ar šiem simboliem apzīmē arī vektoriālās reizināšanas rezultātā iegūto vektoru $\vec{c}$, t. i., $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vai $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

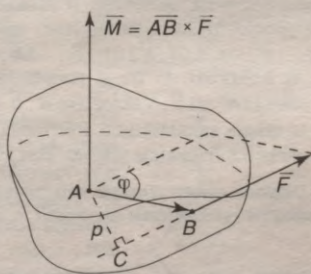
Secinājums

Ja vektoriem $\vec{a} = \vec{OA}$ un $\vec{b} = \vec{OB}$ ir kopīgs sākumpunkts un tie nav kolineāri, tad uz šiem vektoriem var konstruēt paralelogramu $OADB$, kura laukums $S = OA \cdot OB \sin \varphi$ jeb $S = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ (40. zīm.). Tātad šī paralelograma laukums ir vienāds ar $\vec{a}$ un $\vec{b}$ vektoriālā reizinājuma moduli:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (1)$$



40. zīm.



41. zīm.

Vektoru vektoriālo reizinājumu lieto mehānikā, elektrotehnikā un citās nozarēs. Aplūkosim šī jēdziena fizikālo ilustrāciju. Pieņemsim, ka uz ķermeni, kas nostiprināts punktā A, darbojas spēks $\vec{F}$, kas pielikts ķermeņa punktā B (41. zīm.). Šī spēka iedarbībā ķermenis rotē ap punktu A. Konstruējam perpendikulu AC pret vektora $\vec{F}$ taisni; šī perpendikula garumu p sauc par spēka plecu. No trijstūra ABC atrodam, ka $p = |\vec{AB}| \sin \varphi$. Rotācijas raksturošanai lieto spēka un pleca reizinājumu $p|\vec{F}| = |\vec{AB}| |\vec{F}| \sin \varphi$. Tā kā $\varphi = \angle(\vec{AB}, \vec{F})$, tad šis reizinājums ir vienāds ar vektoru $\vec{AB}$ un $\vec{F}$ vektoriālā reizinājuma moduli. Ķermeņa rotācijas ass iet caur punktu A un ir perpendikulāra plaknei, kurā atrodas vektori $\vec{AB}$ un $\vec{F}$. Saskaņā ar vektoriālā reizinājuma definīciju uz šīs taisnes atrodas vektors $\vec{AB} \times \vec{F}$. Tādēļ ķermeņa rotāciju ap punktu A spēka $\vec{F}$ iedarbībā raksturo vektors $\vec{M}$, ko sauc par spēka $\vec{F}$ momentu un kas ir vienāds ar $\vec{AB}$ un $\vec{F}$ vektoriālo reizinājumu:

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}. \quad (2)$$

2. VEKTORIĀLĀ REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBAS

1. Vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ vektoriālais reizinājums ir *vienāds ar nullvektoru* tad un tikai tad, ja šie vektori ir kolineāri (pieņemam, ka neviens no vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$ nav nullvektors).

Nepieciešamības pierādījums

Dots: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Jāpierāda: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

No dotā izriet, ka $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Tā kā $|\vec{a}| \neq 0$ un arī $|\vec{b}| \neq 0$, tad $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Tātad $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ vai $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$. Tas nozīmē, ka šie vektori ir kolineāri.

Pietiekamības pierādījums

Dots: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Jāpierāda: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Tā kā $\vec{a} \parallel \vec{b}$, tad $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ vai $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$. Tāpēc $\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Līdz ar to $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Tātad $\vec{a} \times \vec{b}$ ir nullvektors.

Secinājums. Vektora $\vec{a}$ vektoriālais reizinājums pašam ar sevi ir nullvektors: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

2. Vektoriālajam reizinājumam ir spēkā *antikomutatīvā īpašība*

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}), \quad (3)$$

t. i., mainot reizinātājus vietām, ir jāmaina reizinājuma zīme.

Lai pierādītu šo apgalvojumu, apzīmēsim $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ un $\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c}_1$. Tā kā $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ un $|\vec{c}_1| = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \sin \angle(\vec{b}, \vec{a})$, tad $|\vec{c}| = |\vec{c}_1|$. Vektori $\vec{c}$ un $\vec{c}_1$ ir kolineāri, jo tie ir perpendikulāri vienai un tai pašai plaknei, kurā atrodas vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$ ir labais sakārtojums. Arī vektoriem $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}_1$ ir labais sakārtojums. Pēc labās rokas likuma pārlicināties, ka vektoru $\vec{c}_1$ un $\vec{c}$ vērsums ir pretējs (sk. 40. zīm.). Tātad $\vec{c}_1 = -\vec{c}$ jeb $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

3. Vektoru vektoriālajam reizinājumam ir spēkā *asociatīvā īpašība* attiecībā pret šo vektoru reizināšanu ar skaitli, t. i.,

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}). \quad (4)$$

Pierādot šo īpašību, jāaplūko divi gadījumi, kad $\lambda > 0$ un $\lambda < 0$. Ja $\lambda > 0$, tad acīmredzami vektori $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ un $\lambda\vec{a} \times \vec{b}$ ir kolineāri un vienādi vērsti. Arī šo vektoru moduļi ir vienādi, jo

$$|\lambda(\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}|.$$

Ja $\lambda < 0$, tad pierādījumā izmanto īpašību, ka $|\lambda| = -\lambda$ jeb $\lambda = -|\lambda|$. No vektoriālā reizinājuma definīcijas izriet, ka $\vec{a} \times \vec{b}$ un $-\vec{a} \times \vec{b}$ ir savstarpēji pretēji vektori. To ievērojot, iegūstam, ka

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = (-|\lambda| \vec{a}) \times \vec{b} = -|\lambda| (-\vec{a} \times \vec{b}) = -|\lambda| (\vec{a} \times \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Analogi pierāda arī vienādību $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$.

4. Vektoriālajam reizinājumam ir spēkā arī *distributīvā īpašība* attiecībā pret vektoru summas (starpības) vektoriālo reizināšanu ar vektoru, t. i.,

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \text{ un arī } \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}. \quad (5)$$

Distributīvās īpašības pierādījumā tiek izmantotas speciālas palīgkonstrukcijas un sakarības, kuras šeit neaplūkosit.

No īpašībām secinām, ka vektoru summu (starpību) vektoriāli reizina tāpat, kā reizina divus polinomus, bet, izpildot pārveidojumus, ir jāievēro vektoriālā reizinājuma antikomutatīvā īpašība – mainot vietām reizinātājus, ir jāmaina reizinājuma zīme.

Piemērs. Vienkāršot izteiksmi $(5\vec{m} + 2\vec{n}) \times (3\vec{m} - 4\vec{n})$.

Izmantojot vektoriālās reizināšanas algebriskās īpašības, kā arī to, ka kolineāru vektoru vektoriālais reizinājums ir vienāds ar nullvektoru, atrodam

$$(5\vec{m} + 2\vec{n}) \times (3\vec{m} - 4\vec{n}) = 5\vec{m} \times 3\vec{m} + 5\vec{m} \times (-4\vec{n}) + 2\vec{n} \times 3\vec{m} + 2\vec{n} \times (-4\vec{n}) = \\ = \vec{0} - 20(\vec{m} \times \vec{n}) + 6(\vec{n} \times \vec{m}) + \vec{0} = 20(\vec{n} \times \vec{m}) + 6(\vec{n} \times \vec{m}) = 26(\vec{n} \times \vec{m}).$$

3. VEKTORIĀLĀ REIZINĀJUMA KOORDINĀTU FORMA

Pieņemsim, ka ir dotas vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ Dekarta koordinātas: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$. Pierādīsim, ka $\vec{a}$ un $\vec{b}$ vektoriālā reizinājuma koordinātas var atrast ar šādu determinantu palīdzību:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{pmatrix}; - \begin{pmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{pmatrix}. \quad (6)$$

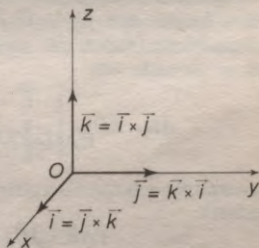
Pierādījumā izmantosim Dekarta bāzes vektoru $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektoriālos reizinājumus. Acīmredzami $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, $\vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ un $\vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$ (kolineāru vektoru vektoriālais reizinājums ir $\vec{0}$). No vektoriālā reizinājuma definīcijas izriet, ka

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad (7)$$

bet no antikomutatīvās īpašības secinām, ka

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}. \quad (8)$$

Patiešām, $\vec{i} \times \vec{j}$ ir vienības vektors, jo $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$; arī $\vec{k}$ ir vienības vektors. Vektori $\vec{i} \times \vec{j}$ un $\vec{k}$ ir perpendikulāri xOy plaknei, tātad šie vektori ir kolineāri. Vektoriem $\vec{i}, \vec{j}, (\vec{i} \times \vec{j})$, tāpat kā vektoriem $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, ir labais sakārtojums. Tātad $\vec{i} \times \vec{j}$ un $\vec{k}$ ir vienādi vērsti vektori; līdz ar to $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. Analogi pierāda arī pārējās vienādības (7) (42. zīm.).



42. zīm.

Vektoriālais reizinājums

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$, ja

- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$;
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ un $\vec{c} \perp \vec{b}$;
- 3) vektoriem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir labais sakārtojums.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Izrisinot vektorialā reizinājuma koordinātu izteiksmes (6), izmantosim vektorialā reizinājuma īpašības, kā arī vienādības (7) un (8):

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = \\ &= a_x b_x \vec{i} \times \vec{i} + a_x b_y \vec{i} \times \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \times \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \times \vec{i} + a_y b_y \vec{j} \times \vec{j} + a_y b_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ a_z b_x \vec{k} \times \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \times \vec{j} + a_z b_z \vec{k} \times \vec{k} = \\ &= \vec{0} + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + \vec{0} + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} - a_z b_y \vec{i} + \vec{0} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.\end{aligned}\quad (9)$$

Viegli pārlicināties, ka izteiksme (9) ir tāda trešās kārtas determinanta izvirzījums pēc 1. rindas elementiem, kura pirmajā rindā ir vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, otrajā rindā ir vektora $\vec{a}$ koordinātas a_x, a_y, a_z un trešajā rindā – vektora $\vec{b}$ koordinātas b_x, b_y, b_z . Tādējādi

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (10)$$

Piemērs. Dots paralelograma trīs virsotnes $A(4; 1; 2)$, $B(3; -5; 0)$ un $C(-1; 0; -5)$. Aprēķināt paralelograma laukumu.

Aplūkosim vektorus $\vec{AB}$ un $\vec{AC}$, kas sakrīt ar paralelograma malām. Šo vektoru koordinātas atrodam, atņemot no galapunktu koordinātām atbilstošās sākumpunkta A koordinātas: $\vec{AB} = (-1; -6; -2)$, $\vec{AC} = (-5; -1; -7)$. Uz šiem vektoriem konstruētā paralelograma laukums ir vienāds ar $\vec{AB}$ un $\vec{AC}$ vektorialā reizinājuma moduli (sk. secinājumu no vektorialā reizinājuma definīcijas). Saskaņā ar formulu (10)

$$\begin{aligned}\vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -6 & -2 \\ -5 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \vec{i}(42-2) - \vec{j}(7-10) + \vec{k}(1-30) = \\ &= 40\vec{i} + 3\vec{j} - 29\vec{k}.\end{aligned}$$

Izmantojot vektorialā reizinājuma $\vec{AB} \times \vec{AC}$ koordinātas (40; 3; -29), atrodam tā moduli:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{40^2 + 3^2 + (-29)^2} = \sqrt{2450} = 35\sqrt{2}.$$

Paralelograma laukums $S = 35\sqrt{2}$ (lauk. vien.).

2.10. §. TRIJU VEKTORU JAUKTAIS REIZINĀJUMS

1. DEFINĪCIJA UN ĢEOMETRISKĀ NOZĪME

Definīcija. Par vektoru $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ **jaukto reizinājumu** ($\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$) sauc skaitli, ko iegūst, reizinot vektoriāli pirmos divus vektorus $\vec{a}, \vec{b}$ un rezultātā iegūto vektoru reizinot skalāri ar trešo vektoru $\vec{c}$.

Ja nekomplanāriem vektoriem $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ir labais sakārtojums, tad šo vektoru jauktais reizinājums ir pozitīvs skaitlis. Ja šiem vektoriem ir kreisais sakārtojums, tad jauktais reizinājums ir negatīvs skaitlis. Par šī apgalvojuma pareizību pārlicināsimies, aplūkojot jauktā reizinājuma ģeometrisko nozīmi.

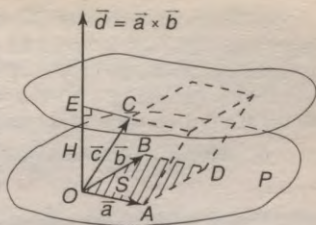
Pieņemsim, ka vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir kopīgs sākumpunkts un šie vektori nav komplanāri (neatrodas vienā plaknē). Ja vektoriem ir labais sakārtojums, tad to jauktais reizinājums ir vienāds ar tāda paralēlskalda tilpumu V , kura šķautnes sakrīt ar dotajiem vektoriem; ja vektoriem ir kreisais sakārtojums, tad to jauktais reizinājums ir vienāds ar šāda paralēlskalda tilpuma pretējo skaitli $-V$.

43. zīmējumā aplūkots gadījums, kad vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir labais sakārtojums. Tā kā labais sakārtojums ir arī vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, tad acīmredzami vektori $\vec{c}$ un $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ veido šauru leņķi un $\text{proj}_{\vec{d}} \vec{c} > 0$. Izmantojot secinājumu no vektoru skalārā reizinājuma definīcijas un vektoriālā reizinājuma moduļa geometrisko nozīmi, iegūstam, ka

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = S \cdot \text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}.$$

Tā kā vektors $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ ir perpendikulārs vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ plaknei P , t. i., paralēlskalda pamata plaknei, tad vektora $\vec{c}$ projekcija uz $\vec{a} \times \vec{b}$ ir vienāda ar šī paralēlskalda augstumu H , t. i., $\text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = H$. Līdz ar to iegūstam, ka $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = SH = V$.

Ja vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir kreisais sakārtojums, tad vektori $\vec{c}$ un $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$ veido platu leņķi un $\text{proj}_{\vec{d}} \vec{c} < 0$. Spriežot analogi kā iepriekšējā gadījumā, atrodam, ka $\text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} = -H$. Līdz ar to $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (-H) = -V$. Tādējādi varam formulēt jauktā reizinājuma geometrisko nozīmi: vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jauktā reizinājuma absolūtā vērtība ir vienāda ar paralēlskalda tilpumu, kas konstruēts uz šiem vektoriem kā šķautnēm, t. i., $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = V$.



43. zīm.

2. JAUKTĀ REIZINĀJUMA ĪPAŠĪBAS

1. *Nenulles vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jauktais reizinājums ir vienāds ar nulli tad un tikai tad, ja šie vektori ir komplanāri* (44. zīm.).

Nepieciešamības pierādījums

Dots: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Jāpierāda: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir komplanāri vektori.

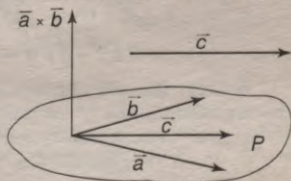
Jauktā reizinājuma izteiksmē pēdējā darbība ir skalārā reizināšana, un, ja skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli, tad vektori ir perpendikulāri, tātad $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$. Pēc vektoriālā reizinājuma definīcijas $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ un arī $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$. Tātad vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir perpendikulāri taisnei, uz kuras atrodas vektors $\vec{a} \times \vec{b}$. Bet tas ir iespējams tikai tad, ja šie vektori atrodas vienā plaknē vai arī paralēlās plaknēs, tātad ir komplanāri.

Pietiekamības pierādījums

Dots: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir komplanāri vektori.

Jāpierāda: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Tā kā vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ ir perpendikulārs plaknei P , kurā atrodas vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$, un šajā plaknē atrodas arī vektors $\vec{c}$, tad $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{c}$. Tāpēc šo vektoru skalārais reizinājums ir vienāds ar nulli, t. i., $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.



44. zīm.

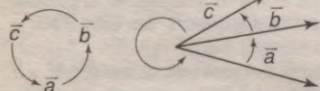
2. Tā kā izteiksmē $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ir vektoriālā un skalārā reizināšana, tad jauktajam reizinājumam ir spēkā kā vektoriālā, tā arī skalārā reizinājuma īpašības: komutatīvā īpašība $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ attiecībā pret skalāro reizināšanu, anti-komutatīvā īpašība $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$ attiecībā pret vektoriālo reizināšanu, kā arī skalārā un vektoriālā reizinājuma distributīvā īpašība.

3. Jauktajam reizinājumam ir spēkā asociatīvā īpašība

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

t. i., jauktā reizinājuma vērtība nav atkarīga no tā, kurus no blakus esošajiem vektoriem reizina vektoriāli.

Tā kā $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$, tad ir jāpierāda vienādība $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$. Pieņemsim, ka vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ir labais sakārtojums. Tad $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ir vienāds ar paralēlskalda tilpumu, kas konstruēts uz šiem vektoriem: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V$. Viegli pārliecināties, ka arī vektoriem $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ ir labais sakārtojums (45. zīm.) un reizinājums $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$ ir vienāds ar šī paša paralēlskalda tilpumu: $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = V$. Līdz ar to secinām, ka $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$. Analogi spriež, ja aplūkojamiem vektoriem ir kreisais sakārtojums.



45. zīm.

Tā kā jauktā reizinājuma vērtība nav atkarīga no tā, kurus no blakus esošajiem vektoriem reizina vektoriāli, tad jauktā reizinājuma pierakstā bieži nenorāda nekādu darbību un lieto pierakstu $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

4. No iepriekšējās īpašības izriet šādi secinājumi.

Jauktā reizinājuma vērtība nemainās, ja reizinātājus cikliski maina vietām, t. i., kādu vektoru «pārceļ» pāri diviem blakus esošajiem vektoriem:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b}.$$

Ja divus blakus esošus reizinātājus maina vietām, tad jauktā reizinājuma absolūtā vērtība nemainās, bet mainās zīme:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c}, \quad \vec{a} \vec{b} \vec{c} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b}.$$

Piemērs. Vienkāršot izteiksmi $(\vec{a} + \vec{b}) (\vec{b} + \vec{c}) (\vec{c} + \vec{a})$.

Pieņemsim, ka šajā izteiksmē pirmo divu iekavu vektoru ir jāreizina vektoriāli. Izmantojot vektoriālā reizinājuma un skalārā reizinājuma distributīvo īpašību, atrodam, ka

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) (\vec{b} + \vec{c}) (\vec{c} + \vec{a}) &= [(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] (\vec{c} + \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = \\ &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + \\ &+ (\vec{b} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = \\ &= \vec{a} \vec{b} \vec{c} + \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{a} \vec{b} \vec{c} + \vec{a} \vec{b} \vec{c} = 2\vec{a} \vec{b} \vec{c}. \end{aligned}$$

Izpildot šos pārveidojumus, izmantojām īpašību, ka komplanāru vektoru jauktais reizinājums ir vienāds ar nulli. Ja jauktajā reizinājumā ir divi vienādi vektoru, tad visus reizinātājus var pārnest vienā plaknē un tie ir komplanāri, tāpēc $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$, $(\vec{b} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$ u. tml.

3. VEKTORU JUKTĀ REIZINĀJUMA KOORDINĀTU FORMA

Pieņemsim, ka ir dotas vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ Dekarta koordinātas: $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{c} = (c_x; c_y; c_z)$. Tad

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Izmantojot vektoru skalārā reizinājuma izteiksmi ar koordinātām (2.8.§. (10)), atrodam, ka

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Kā redzams, vektoru $\vec{a} \times \vec{b}$ un $\vec{c}$ skalārais reizinājums ir vienāds ar tāda trešās kārtas determinanta izvirzījumu pēc pēdējās rindas, kura pirmajā rindā ir vektora $\vec{a}$ koordinātas, otrajā rindā – vektora $\vec{b}$ koordinātas un trešajā rindā – vektora $\vec{c}$ koordinātas. Tādējādi iegūstam šādu juktā reizinājuma izteiksmi koordinātās:

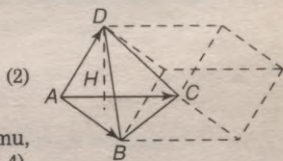
$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Secinājums

Tā kā komplanāru vektoru juktais reizinājums ir vienāds ar nulli, tad no formulas (1) izriet **triju vektoru komplanaritātes nosacījums koordinātu formā:**

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Piemērs. Aprēķināt trijstūra piramīdas tilpumu, ja tās virsotnes atrodas punktos $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ un $D(4; 1; 3)$ (46. zīm.).



46. zīm.

Juktais reizinājums:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}|.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \text{ ja}$$

- 1) $\vec{a}$ vai $\vec{b}$, vai $\vec{c}$ ir $\vec{0}$;
- 2) jebkuri divi vektori ir kolineāri;
- 3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – komplanāri.

Aplūkosim vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, kuru koordinātas atrod, atņemot no galapunktu koordinātām atbilstošās sākumpunkta A koordinātas: $\overrightarrow{AB} = (3; 6; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (2; 2; 2)$. Uz šiem vektoriem konstruēta paralēlskalda tilpums ir vienāds ar vektoru jauktā reizinājuma absolūto vērtību. Izmantojot formulu (1), atrodam, ka

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18. \text{ Tātad } V_{\text{paralēlsk.}} = |-18| = 18.$$

Piramīdas $ABCD$ augstums H ir vienāds ar paralēlskalda augstumu, bet pamata laukums S_1 ir vienāds ar pusi no paralēlskalda pamata laukuma S . Tādējādi

$$V_{\text{piram.}} = \frac{1}{3} \cdot S_1 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot S \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_{\text{paralēlsk.}}$$

Piramīdas $ABCD$ tilpums $V_{\text{piram.}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3$ (tilp. vien.)

Piezīme. Vektoru algebrā ar trīs vektoriem definē arī operāciju, ko sauc par *divkāršo vektoriālo reizinājumu*. Par vektoru $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ divkāršo vektoriālo reizinājumu sauc vektoru, ko iegūst, pirmos divus vektorus reizinot vektoriāli un rezultātā iegūto vektoru reizinot vektoriāli ar trešo vektoru $\vec{c}$, t. i., $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

Analogi definē arī reizinājumu $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Var pierādīt, ka ir spēkā šādas vienādības:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ un } (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

SATURS

Priekšvārds	2
I nodaļa. Algebras elementi	3
1.1.§. Lineāru vienādojumu sistēma	3
1. Pamatjautājumi	3
2. Jēdziens par Gausa metodi	4
3. Otrās un trešās kārtas determinanti	9
4. Determinanta izvirzīšana pēc rindas vai kolonnas elementiem	12
5. Jēdziens par augstāku kārtu determinantiem	14
6. Lineāras vienādojumu sistēmas atrisināšana, lietojot determinantus. Kramera formulas	16
7. Matricu algebras elementi	20
8. Lineāras vienādojumu sistēmas atrisināšana, izmantojot inverso matricu	26
9. Matricu polinomi un vienādojumi	27
10. Daži lineāru vienādojumu sistēmu atrisināšanas teorijas jautājumi. Kronekera-Kapelli teorēma	28
1.2.§. Komplekso skaitļu kopa	34
1. Kompleksā skaitļa jēdziens un ar to saistītie pamatjautājumi	34
2. Kompleksā skaitļa ģeometriskā ilustrācija un trigonometriskā forma	37
3. Darbības ar kompleksiem skaitļiem	40
1.3.§. Polinomu algebras elementi	48
1. Polinoma dalīšana ar polinomu	48
2. Polinoma sadalījums lineāros reizinātajos	49
3. Polinoma sadalījums reālos reizinātajos	51
4. Daļveida racionālas funkcijas sadalīšana parciāldaļu summā	52
II nodaļa. Vektori	56
2.1.§. Pamatjēdzieni	56
1. Skalāri un vektoriāli lielumi. Vektori	56
2. Kolineāri, vienādi un pretēji vektori	57
3. Nullvektors un vienības vektors jeb ors	57
4. Komplanāri vektori	57
2.2.§. Lineāras darbības ar vektoriem	58
1. Vektoru saskaitīšana	58
2. Vektoru atņemšana	60
3. Vektora reizināšana ar skaitli	62
2.3.§. Punkta Dekarta koordinātas	63
1. Punkta koordinātas uz taisnes	63
2. Punkta koordinātas plaknē	64
3. Punkta koordinātas telpā	65
2.4.§. Vektora koordinātas	67
1. Vektora projekcija uz ass	67
2. Vektora Dekarta koordinātas	69
3. Vektora moduļa aprēķināšanas formula	70

2.5. §. Lineāras darbības ar vektoriem koordinātu formā	71
1. Vektoru saskaitīšana (atņemšana)	71
2. Vektora reizināšana ar skaitli	72
3. Vektoru kolinearitātes nosacījums koordinātu formā	72
4. Vektora koordinātu aprēķināšana pēc tā sākumpunkta un galapunkta koordinātām	72
5. Nogriežņa garuma aprēķināšana pēc tā galapunktu koordinātām	73
6. Nogriežņa dalīšana dotajā attiecībā	74
2.6. §. Vektoru virziena noteikšana	76
1. Vektora virziena leņķi un virziena kosinusi	76
2. Vektora orta koordinātas	76
2.7. §. Jēdziens par vektora afinām koordinātām	77
1. Vektoru sistēmas lineāra atkarība un lineāra neatkarība	77
2. Bāzes vektori un afinās koordinātas	80
2.8. §. Vektoru skalārais reizinājums	82
1. Fizikālā nozīme un definīcija	82
2. Skalārā reizinājuma īpašības	83
3. Skalārā reizinājuma koordinātu forma	84
4. Skalārā reizinājuma lietojumi	86
2.9. §. Vektoru vektoriālais reizinājums	87
1. Definīcija un fizikālā nozīme	87
2. Vektoriālā reizinājuma īpašības	88
3. Vektoriālā reizinājuma koordinātu forma	89
2.10. §. Triju vektoru jauktais reizinājums	90
1. Definīcija un ģeometriskā nozīme	90
2. Jauktā reizinājuma īpašības	91
3. Vektoru jauktā reizinājuma koordinātu forma	93

Kārlis Šteiners, Biruta Siliņa

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

Lekciju konspekts

inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem

1. ALGEBRAS ELEMENTI. 2. VEKTORI

Redaktore B. Siliņa

Māksl. redaktors R. Štrauhs

Tehn. redaktore A. Svilpe

Maketētājs R. Lejasmeiers

Korektore Z. Stikute

Vāku zīm. S. Belsone

Apgāds «Zvaigzne ABC», SIA, K. Valdemāra ielā 105, Rīgā, LV-1013.

Reģistr. nr. 2-1060. Red. nr. E-141.

Latvijas-Somijas SIA «Madonas Poligrāfists»,

Saieta laukumā 2, Madonā, LV-4801.

OBLIGĀTAIS
EKSEMPLS

1. 92
LATVIJAS NĀCIONĀLĀ BIBLIOTĒKA



0304050209

Kārlis ŠTEINERS, Biruta SILIŅA

AUGSTĀKĀ MATEMĀTIKA

1. Algebras elementi
2. Vektori

Lekciju konspekts
inženierzinātņu un
dabaszinātņu
studentiem



ZVAIGZNE ABC

ISBN 9984-04-628-1