数学Ⅱ・B基礎問題精講［五訂版］

上園信武著

演習問題の解答PDF

旺文社

演習問題の解答

1

(1)　$(2x-3y)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot(3y)$
$\quad +3\cdot(2x)\cdot(3y)^2-(3y)^3$
$=\boldsymbol{8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3}$

(2)　$(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
$=(x-3y)\{x^2+x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$=x^3-(3y)^3$
$=\boldsymbol{x^3-27y^3}$

2

$a^6-9a^3b^3+8b^6=(a^3-b^3)(a^3-8b^3)$
$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a-2b)$
$\quad\times(a^2+2ab+4b^2)$
$=\boldsymbol{(a-b)(a-2b)(a^2+ab+b^2)}$
$\quad\boldsymbol{\times(a^2+2ab+4b^2)}$

3

a^3b^2 の係数は
$8\cdot 10=\boldsymbol{80}$
ab^4 の係数は
$2\cdot 5=\boldsymbol{10}$

4

(1)　$(3x-2y)^6$ を展開したときの一般項は
${}_6\mathrm{C}_r(3x)^r(-2y)^{6-r}$
$={}_6\mathrm{C}_r\cdot 3^r\cdot(-2)^{6-r}\cdot x^ry^{6-r}$
$r=3$ のときが求める係数だから
$${}_6\mathrm{C}_3\cdot 3^3\cdot(-2)^3=\frac{6\times 5\times 4}{3\times 2}\cdot 27\cdot(-8)$$
$=\boldsymbol{-4320}$

(2)　$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b$
$\qquad +{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$
の両辺に $a=1$，$b=-1$ を代入すると
$(1-1)^n={}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n$
$\therefore\quad {}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^n{}_n\mathrm{C}_n=0$
となる．

5

$$\begin{array}{r}
4x^2-4x+a+4\\
x+1\,\overline{)\,4x^3\qquad\quad +ax+b}\\
\underline{4x^3+4x^2\qquad\qquad}\\
-4x^2+ax\quad\\
\underline{-4x^2-4x\quad}\\
(a+4)x+b\\
\underline{(a+4)x+a+4}\\
b-a-4
\end{array}$$

わりきれるとき，
余り$=0$
よって，
$b-a-4=0$　……①

$$\begin{array}{r}
2x^2+x+\dfrac{a+1}{2}\\
2x-1\,\overline{)\,4x^3\qquad\quad +ax+b}\\
\underline{4x^3-2x^2\qquad\qquad}\\
2x^2+ax\quad\\
\underline{2x^2-\ x\quad}\\
(a+1)x+b\\
\underline{(a+1)x-\dfrac{a+1}{2}}\\
\dfrac{a+1}{2}+b
\end{array}$$

余り$=6$ より $\dfrac{a+1}{2}+b=6$　……②

①，②より，$a=\boldsymbol{1}$，$b=\boldsymbol{5}$

6

(1)　与式$=\left(3+\dfrac{1}{x-5}\right)-\left(5-\dfrac{1}{x-2}\right)$
$\qquad+\left(1-\dfrac{1}{x-3}\right)+\left(1-\dfrac{1}{x-4}\right)$
$$=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}$$
$$=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}$$
$$=2\left\{\frac{1}{(x-5)(x-3)}-\frac{1}{(x-2)(x-4)}\right\}$$

$$=\frac{2(2x-7)}{(x-5)(x-3)(x-2)(x-4)}$$

(2) 与式$=\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}$

$$-\frac{ca}{(a-b)(b-c)}$$

$$+\frac{ab}{(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{bc(b-c)-ca(a-c)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\mathbf{1}$$

7

$$2+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\frac{803}{371}$$

より $\quad \cfrac{1}{k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}}=\dfrac{61}{371}$

$$\therefore\quad k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=\frac{371}{61}$$

$$\therefore\quad k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\frac{5}{61}$$

$$\therefore\quad k+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{5}}=6+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{5}}$$

よって，$k=\mathbf{6}$，$m=\mathbf{12}$

8

(1) $x+\dfrac{1}{y}=1$ より

$$x=1-\frac{1}{y}=\frac{y-1}{y}$$

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より $z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$xyz=\left(\dfrac{y-1}{y}\right)\cdot y\cdot\left(\dfrac{1}{1-y}\right)=\mathbf{-1}$

(2) $\dfrac{1}{bc+b+1}=\dfrac{a}{a(bc+b+1)}$

$=\dfrac{a}{1+ab+a}$ $\quad(\because\ abc=1)$

$\dfrac{1}{ca+c+1}=\dfrac{ab}{ab(ca+c+1)}$

$=\dfrac{ab}{a+1+ab}$ $\quad(\because\ abc=1)$

よって，

与式$=\dfrac{1}{ab+a+1}+\dfrac{a}{ab+a+1}$

$$+\frac{ab}{ab+a+1}$$

$$=\frac{1+a+ab}{ab+a+1}=\mathbf{1}$$

9

(1) $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{2y+z}{7}=\dfrac{z+3x}{6}=k$

とおくと

$$\begin{cases} x+\ \ y=3k & \cdots\cdots①\\ 2y+\ \ z=7k & \cdots\cdots②\\ z+3x=6k & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①×2−② より，$2x-z=-k$ ……④

③＋④ より，$5x=5k$ $\quad\therefore\quad x=k$

よって，①より，$y=2k$，

③より，$z=3k$

$xyz\neq 0$ より，$k\neq 0$ だから

$x:y:z=k:2k:3k=\mathbf{1:2:3}$

(2) $\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2+4k^2-9k^2}{k^2+4k^2+9k^2}$

$=\dfrac{-4k^2}{14k^2}=\mathbf{-\dfrac{2}{7}}$ $\quad(\because\ k\neq 0)$

10

$$\begin{cases} 2a+b=3kc & \cdots\cdots①\\ 2b+c=3ka & \cdots\cdots②\\ 2c+a=3kb & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①＋②＋③ より，

$3(a+b+c)=3k(a+b+c)$

(i) $a+b+c\neq 0$ のとき，$k=\mathbf{1}$

(ii) $a+b+c=0$ のとき，

$c=-a-b$ だから②より，$b-a=3ka$

$\therefore\quad b=(3k+1)a$

このとき，$c=-(3k+2)a$

①に代入して，$(3k+3)a=-3k(3k+2)a$

$a\neq0$ だから，

$k+1=-3k^2-2k \quad \therefore\quad 3k^2+3k+1=0$

これをみたす実数 k は存在しない．

したがって，$a+b+c=0$ の場合はない．

11

左辺の x^3 の係数が 1 より，$\boldsymbol{a=1}$

よって，

$$x^3-9x^2+9x-4$$
$$=x(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d \quad \cdots\cdots①$$

①の両辺に $x=0$，$x=1$，$x=2$ を代入して

$$\begin{cases}-4=d\\-3=c+d\\-14=2b+2c+d\end{cases} \quad \therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{b=-6}\\\boldsymbol{c=1}\\\boldsymbol{d=-4}\end{cases}$$

逆に，このとき，

$$\text{右辺}=x(x-1)(x-2)-6x(x-1)+x-4$$
$$=x^3-3x^2+2x-6x^2+6x+x-4$$
$$=x^3-9x^2+9x-4=\text{左辺}$$

となり適する．

12

(1) $a:b=b:c$ より $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$

とおくと，$a=bk$，$c=\dfrac{b}{k}$

$$\text{左辺}=\frac{1}{b^3k^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{k^3}{b^3}=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

$$\text{右辺}=\frac{b^3k^3+b^3+\dfrac{b^3}{k^3}}{b^2k^2\cdot b^2\cdot\dfrac{b^2}{k^2}}=\frac{k^3+1+\dfrac{1}{k^3}}{b^3}$$

$$=\frac{k^6+k^3+1}{b^3k^3}$$

よって，$\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}+\dfrac{1}{c^3}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2}$

(2) $x+\dfrac{1}{y}=1$ より $x=\dfrac{y-1}{y}$，

$y+\dfrac{1}{z}=1$ より $z=\dfrac{1}{1-y}$

よって，$z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{y}{y-1}=1$

13

$a>0$，$b>0$ より

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)-9=ab+\frac{4}{ab}-4$$
$$=\left(\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}}\right)^2\geqq0$$

等号成立は，$\sqrt{ab}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$．

つまり，$ab=2$ のとき．

14

(1) 与式より $(3x-2)(x-1)=0$

よって，$\boldsymbol{x=1,\ \dfrac{2}{3}}$

(2) 与式より

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=24$

$\therefore\quad (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=24$

$x^2+5x=t$ とおくと，

$(t+4)(t+6)=24 \quad \therefore\quad t(t+10)=0$

$\therefore\quad t=0$ または -10

(i) $t=0$，すなわち，$x^2+5x=0$ のとき，$\boldsymbol{x=0,\ -5}$

(ii) $t=-10$，すなわち，$x^2+5x+10=0$ のとき，

$$x=\boldsymbol{\frac{-5\pm\sqrt{15}i}{2}}$$

15

(1) $(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$

$=\boldsymbol{-2+2i}$

(2) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^2\}^3}{8}$

$=\dfrac{(-2i)^3}{8}=\boldsymbol{i}$

注 $\dfrac{(1-i)^6}{(\sqrt{2})^6}=\dfrac{\{(1-i)^3\}^2}{8}$ としてもよい.

(3) $\dfrac{2-i}{3+i}=\dfrac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{1-i}{2}$

$\dfrac{3-i}{2+i}=\dfrac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=1-i$

より, 与式$=\dfrac{1-i}{2}\times(1-i)=\boldsymbol{-i}$

16

(1) $x+y=2$, $xy=2$ より

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2=\boldsymbol{-8}$

(2) $x=1-\sqrt{2}\,i$ より $x-1=-\sqrt{2}\,i$

両辺を平方して整理すると,

$x^2-2x+3=0$

ここで,

$(x^3+2x^2+3x-7)\div(x^2-2x+3)$

を行うと,

商が $x+4$ で, 余りが $8x-19$

となることから,

x^3+2x^2+3x-7

$=(x+4)(x^2-2x+3)+8x-19$

と表せ, $x^2-2x+3=0$, $x=1-\sqrt{2}\,i$

より, 求める式の値は

$8(1-\sqrt{2}\,i)-19=\boldsymbol{-11-8\sqrt{2}\,i}$

17

(1) $x^2-(k+1)x+k^2=0$ の判別式を D とすると

$D=(k+1)^2-4k^2=-3k^2+2k+1$

$=-(3k+1)(k-1)$

より

(i) $D>0$, すなわち, $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3}<k<1}$ **のとき, 異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii) $D=0$, すなわち, $\boldsymbol{k=-\dfrac{1}{3},\ 1}$ **のとき, 重解をもつ**

(iii) $D<0$, すなわち, $\boldsymbol{k<-\dfrac{1}{3},\ 1<k}$ **のとき, 虚数解を 2 個もつ**

(2) 与えられた方程式は, 2 次方程式より, $k\neq0$

$kx^2-2kx+2k+1=0$ の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=k^2-k(2k+1)=-k^2-k$

$=-k(k+1)$

より

(i) $\dfrac{D}{4}>0$, すなわち, $\boldsymbol{-1<k<0}$ **のとき, 異なる 2 つの実数解をもつ**

(ii) $\dfrac{D}{4}=0$, すなわち, $\boldsymbol{k=-1}$ **のとき, 重解をもつ**

(iii) $\dfrac{D}{4}<0$, すなわち, $\boldsymbol{k<-1,\ 0<k}$ **のとき, 虚数解を 2 個もつ**

18

①, ②, ③の判別式をそれぞれ, D_1, D_2, D_3 とすると

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-1=(a-1)(a+1)$,

$\dfrac{D_2}{4}=4-a^2=-(a-2)(a+2)$,

$D_3=(a+1)^2-4a^2=-3a^2+2a+1$

$=-(3a+1)(a-1)$

よって, D_1, D_2, D_3 の符号は下表のようになる.

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
D_1	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
D_2	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
D_3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$

ここで, 題意をみたすためには, D_1, D_2, D_3 のうち, 1 つが正または 0 で, 残り 2 つが負であればよいので

$\boldsymbol{a<-2,\ -1<a<-\dfrac{1}{3},\ 2<a}$

19

(1)　与式を i について整理して

$$(x^2+2x+1)+(x^2+3x+2)i=0$$

x^2+2x+1，x^2+3x+2 は実数だから

$$x^2+2x+1=0 \quad \cdots\cdots①$$

$$x^2+3x+2=0 \quad \cdots\cdots②$$

①より　$(x+1)^2=0$　　∴　$x=-1$

②より　$(x+1)(x+2)=0$

　∴　$x=-1,\ -2$

①，②が同時に成りたつ x が求めるものので　$\boldsymbol{x=-1}$

(2)　与式から

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2+i}$$

$$右辺=\frac{i}{2(2+i)}=\frac{i^2}{2i(2+i)}$$

$$=\frac{-1}{-2+4i}=\frac{1}{2-4i}$$

　∴　$x+yi=2-4i$

x，y は実数だから　$\boldsymbol{x=2}$，$\boldsymbol{y=-4}$

20

与式から

$$(x^2-3ax+a)+(x-2a)i=0$$

x，a は実数だから

$$\begin{cases} x^2-3ax+a=0 & \cdots\cdots① \\ x-2a=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より　$x=2a$．これを①に代入すると，

$2a^2-a=0$ となり　$a=0,\ \dfrac{1}{2}$

よって，$a>0$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

21

解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-4,\ \alpha\beta=5$$

$$∴\ \begin{cases} \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ \qquad\quad =16-10=6 \\ \alpha^2\cdot\beta^2=(\alpha\beta)^2=25 \end{cases}$$

よって，α^2，β^2 を解にもつ2次方程式は

$$\boldsymbol{x^2-6x+25=0}$$

22

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-1$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$，

$\alpha\beta\gamma=-3$，

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$$

$$=-\{1-3\cdot(-2)\}+3\cdot(-3)$$

$$=-7-9=\boldsymbol{-16}$$

23

$x=1+i$ を与式に代入すると

$$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$$

$$∴\quad (-2+2i)+(a+ai)+b=0$$

$$∴\quad a+b-2+(a+2)i=0$$

a，b は実数だから

$$\begin{cases} a+b-2=0 & \cdots\cdots① \\ a+2=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①，②より　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=4}$

24

(1)　$f(x)+g(x)$ を $x-a$ でわった余りは b より，

$$f(a)+g(a)=\boldsymbol{b}$$

$f(x)g(x)$ を $x-a$ でわった余りは c より，

$$f(a)g(a)=\boldsymbol{c}$$

(2)　$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2$ を $x-a$ でわった余りは $\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$

より(1)を用いると，

$$\{f(a)\}^2+\{g(a)\}^2$$

$$=\{f(a)+g(a)\}^2-2f(a)g(a)$$

$$=\boldsymbol{b^2-2c}$$

25

求める余りは，$ax+b$ とおけるので，

$f(x)=(x-2)(x+1)Q(x)+ax+b$

と表せる．$f(2)=3$，$f(-1)=6$ だから

$2a+b=3$ ……①

$-a+b=6$ ……②

①，②より，$a=-1$，$b=5$ となり，求める余りは，$\boldsymbol{-x+5}$

26

(1) $P(x)$ は $x+1$，$x-1$，$x+2$ でわると，それぞれ 3，7，4 余るので

$P(-1)=3$，$P(1)=7$，$P(-2)=4$

ここで，

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

とおくと

$$\begin{cases} a-b+c=3 \\ a+b+c=7 \\ 4a-2b+c=4 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases}$$

よって，求める余りは $\boldsymbol{x^2+2x+4}$

(2) $P(x)$ を $(x+1)^2(x-1)$ でわった余りを $R(x)$ (2 次以下の整式) とおくと

$P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+R(x)$

と表せる．

$P(x)$ は $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余るので $R(x)$ も $(x+1)^2$ でわると $2x+1$ 余る．

よって，$R(x)=a(x+1)^2+2x+1$ とおける．

$$\therefore \quad P(x)=(x+1)^2(x-1)Q(x)+a(x+1)^2+2x+1$$

$P(1)=-1$ より

$4a+3=-1$ $\quad\therefore\quad a=-1$

よって，求める余りは

$-(x+1)^2+2x+1$

すなわち，$\boldsymbol{-x^2}$

27

(1) $P(2)=0$ より

$8a+8b-4ab-16=0$ ……①

$\therefore \quad -4(a-2)(b-2)=0$

$\therefore \quad a=\mathbf{2}$ または $b=\mathbf{2}$

(2) $P(-2)=0$ より

$24a-8b-8ab+24=0$ ……②

$\therefore \quad -8(a+1)(b-3)=0$

$\therefore \quad a=\mathbf{-1}$ または $b=\mathbf{3}$

(3) ①，②が同時に成りたてばよいので

$(a,\ b)=(\mathbf{-1},\ \mathbf{2})$ **または** $(\mathbf{2},\ \mathbf{3})$

(i) $(a,\ b)=(-1,\ 2)$ のとき

$P(x)=-x^4+3x^3+5x^2-12x-4$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(-x^2+3x+1)}$

(ii) $(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき

$P(x)=2x^4+x^3-11x^2-4x+12$

$=\boldsymbol{(x-2)(x+2)(2x+3)(x-1)}$

28

$x^3=1$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$ より

$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

(i) $\boldsymbol{n=3m}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1$

$=(\omega^3)^{2m}+(\omega^3)^m+1=1+1+1=\mathbf{3}$

(ii) $\boldsymbol{n=3m+1}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+2}+\omega^{3m+1}+1$

$=(\omega^3)^{2m}\cdot\omega^2+(\omega^3)^m\cdot\omega+1$

$=\omega^2+\omega+1=\mathbf{0}$

(iii) $\boldsymbol{n=3m+2}$ **のとき**

$\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6m+4}+\omega^{3m+2}+1$

$=(\omega^3)^{2m+1}\cdot\omega+(\omega^3)^m\cdot\omega^2+1$

$=\omega+\omega^2+1=\mathbf{0}$

29

共通解を α とおくと，

$\alpha^2-2a\alpha+6a=0$ ……①′

$\alpha^2-2(a-1)\alpha+3a=0$ ……②′

①′－②′ より，

$-2\alpha+3a=0$ $\quad\therefore\quad \alpha=\dfrac{3}{2}a$

これを①′ に代入すると $a^2-8a=0$

$\therefore \quad a=0,\ 8$

ここで $a=0$ とすると $\alpha=0$ となり題意に反するので，$a=\mathbf{8}$．このとき

①から $x^2-16x+48=0$

$\therefore\quad (x-4)(x-12)=0$

$\therefore\quad x=4,\ 12$

②から　$x^2-14x+24=0$

$\therefore\quad (x-2)(x-12)=0$

$\therefore\quad x=2,\ 12$

よって，**共通解は 12** であり，**①の他の解は 4**，**②の他の解は 2** である．

30

(1)　①に $x=1+i$ を代入して

$(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)+c=0$　……①′

①′ より　$2i-2+2ai+b+bi+c=0$

$\therefore\quad (b+c-2)+(2a+b+2)i=0$

$a,\ b,\ c$ は実数だから，

$$\begin{cases} b+c-2=0 \\ 2a+b+2=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} b=\boldsymbol{-2a-2} \\ c=\boldsymbol{2a+4} \end{cases}$$

(2)　(1)より，①は

$x^3+ax^2-2(a+1)x+2a+4=0$

ここで，$x=1+i$ を解にもつから，

$x-1=i$　両辺を 2 乗して整理すると

$x^2-2x+2=0$

よって，$(x^2-2x+2)(x+a+2)=0$

ゆえに，①の実数解は $x=\boldsymbol{-a-2}$

(3)　①と②がただ 1 つの実数解を共有するとき，それは，$x=-a-2$ だから，②に代入して

$(a+2)^2+b(a+2)+3=0$

$(a+2)^2-2(a+1)(a+2)+3=0$

$-a^2-2a+3=0$

$a^2+2a-3=0$

$(a+3)(a-1)=0$

$\therefore\quad a=-3,\ 1$

$a=-3$ のとき，$b=4,\ c=-2$

$a=1$ のとき，$b=-4,\ c=6$

よって，

$(a,\ b,\ c)=\boldsymbol{(-3,\ 4,\ -2),\ (1,\ -4,\ 6)}$

31

(1)　内分する点は，

$$\left(\frac{2\times3+3\times(-1)}{3+2},\ \frac{2\times1+3\times2}{3+2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{3}{5},\ \frac{8}{5}\right)}$$

外分する点は，

$$\left(\frac{(-2)\times3+3\times(-1)}{3+(-2)},\ \frac{(-2)\times1+3\times2}{3+(-2)}\right)$$

$$=\boldsymbol{(-9,\ 4)}$$

(2)　三角形の頂点は，それぞれの直線の交点であるから，その座標は，

$(0,\ 6),\ (-2,\ 0),\ (5,\ 0)$

よって，重心の座標は，

$$\left(\frac{0+(-2)+5}{3},\ \frac{6+0+0}{3}\right)=\boldsymbol{(1,\ 2)}$$

32

$2x+3y-6=0$ より

$$y=-\frac{2}{3}x+2$$

平行な直線は，傾きが $-\dfrac{2}{3}$ で，

点 $(3,\ 2)$ を通るので

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$$

すなわち，$\boldsymbol{y=-\dfrac{2}{3}x+4}$

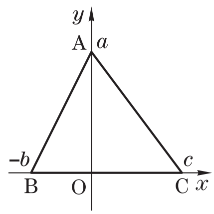
33

△ABC は鋭角三角形なので，

A$(0,\ a)$，B$(-b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$，

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$

とおける．



このとき，

$\mathrm{AB}^2=a^2+b^2$，

$\mathrm{AC}^2=a^2+c^2$，

$\mathrm{BC}^2=(b+c)^2$

$$\cos B=\frac{b}{\mathrm{AB}}$$

$\therefore\quad \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2$

$\qquad -2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$

$$=a^2+b^2+(b+c)^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\frac{b}{\mathrm{AB}}$$

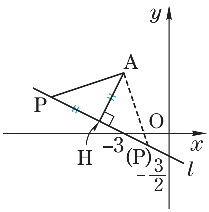
$=a^2+b^2+(b+c)^2-2b(b+c)$
$=a^2+c^2=\mathrm{AC}^2$
よって，
　$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$
が成りたつ．

34

A と l の距離は，

$\dfrac{|-3+8+3|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

より



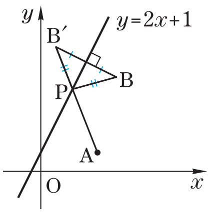
$\mathrm{AH}=\mathrm{HP}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

∴　△AHP

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{32}{5}}$

35

点 B の $y=2x+1$ に関する対称点を $\mathrm{B}'(a,\ b)$ とおくと，直線 BB′ の傾きは $-\dfrac{1}{2}$ だから



$\dfrac{b-5}{a-4}=-\dfrac{1}{2}$

∴　$a+2b=14$　……①

また，線分 BB′ の中点 $\left(\dfrac{a+4}{2},\ \dfrac{b+5}{2}\right)$ は $y=2x+1$ 上にあるので

$\dfrac{b+5}{2}=a+4+1$

∴　$2a-b=-5$　……②

①，②より，$a=\dfrac{4}{5}$，$b=\dfrac{33}{5}$

よって，$\mathrm{B}'\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{33}{5}\right)$

ここで，PB＝PB′ だから

AP＋PB＝AP＋PB′≧AB′　(一定)

(等号は，点 P が直線 AB′ と $y=2x+1$ の交点と一致するとき成立．)

直線 AB′ は $y-1=\dfrac{1-\frac{33}{5}}{3-\frac{4}{5}}(x-3)$

より　$y=-\dfrac{28}{11}x+\dfrac{95}{11}$

この直線と $y=2x+1$ の交点は

$\left(\dfrac{42}{25},\ \dfrac{109}{25}\right)$ だから $\mathbf{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{42}{25}},\ \boldsymbol{\dfrac{109}{25}}\right)$ のとき，

AP＋PB は最小．

36

(1)　(i)　垂直のとき

$1\cdot1+a\{-(2a-1)\}=0$

$2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

∴　$a=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$，$\mathbf{1}$

(ii)　平行のとき

$1\cdot\{-(2a-1)\}-1\cdot a=0$

$3a-1=0$

∴　$a=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(2)　$x+y=3$　……①

$y-x=1$　……②

$x+3y=3$　……③

(ア)　①＋②　より　$2y=4$

∴　$(x,\ y)=(1,\ 2)$

②＋③　より　$4y=4$

∴　$(x,\ y)=(0,\ 1)$

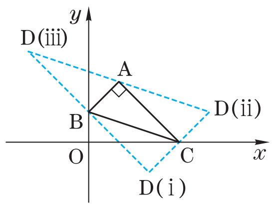
③－①　より　$2y=0$

∴　$(x,\ y)=(3,\ 0)$

よって，3 つの頂点の座標は，

(1，2)，(0，1)，(3，0)

(イ)　(ア)の答えの頂点の座標を順に A，B，C とし，つけ加える点を D$(a,\ b)$ とすると，平行四辺形ができるのは次の 3 つの場合のみである．



(i)　BC が対角線のとき

平行四辺形の性質から，BC と AD の中点は一致するので，

$$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(2,\ -1)$

(ii)　AC が対角線のとき，(i)と同様で

$$\left(\frac{a}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\ \frac{2}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(4,\ 1)$

(iii)　AB が対角線のとき，(i)と同様で

$$\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

$\therefore\ (a,\ b)=(-2,\ 3)$

(i)，(ii)，(iii)より，求める点の座標は

$\boldsymbol{(2,\ -1),\ (4,\ 1),\ (-2,\ 3)}$

37

(1)　$y=ax+9-3a$

より　$(x-3)a+9-y=0$

これが任意の a について成りたつので

$$\begin{cases} x-3=0 \\ 9-y=0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} x=3 \\ y=9 \end{cases}$$

よって，定点 $\boldsymbol{(3,\ 9)}$ を通る．

(2)　a がすべての実数値をとっても，y 軸に平行で，点 $(3,\ 9)$ を通る直線 $x=3$ は表せないので，これと x 軸との交点 $(3,\ 0)$ は通ることができない．

よって，$\boldsymbol{p=3}$ はとることができない．

38

$2x+y-1=0$ は，$x+y+1=0$ と垂直ではないので求める直線は，

$$k(2x+y-1)+(x-2y-3)=0$$

すなわち

$$(2k+1)x+(k-2)y-k-3=0$$

と表せる．

これが，$x+y+1=0$ と垂直だから，

$1\cdot(2k+1)+1\cdot(k-2)=0$

$\therefore\ 3k-1=0$

よって，$k=\dfrac{1}{3}$ より，

$$\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-\frac{10}{3}=0$$

$\therefore\ \boldsymbol{x-y-2=0}$

39

(1)　求める円の方程式を

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とおくと

A を通るので，

$5a+5b+c+50=0$　……①

B を通るので，

$2a-4b+c+20=0$　……②

C を通るので，

$-2a+2b+c+8=0$　……③

①－②　より　$a+3b+10=0$　……④

②－③　より　$2a-3b+6=0$　……⑤

④＋⑤　より　$a=-\dfrac{16}{3}$，

④より　$b=-\dfrac{14}{9}$，

①より　$c=-\dfrac{140}{9}$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2+y^2-\frac{16}{3}x-\frac{14}{9}y-\frac{140}{9}=0}$$

(2)　3 点 A，B，D を通る円がかけないのは，D が直線 AB 上にあり，A とも B とも異なるときである．

$$\text{AB}:y-5=\frac{5-(-4)}{5-2}(x-5)$$

すなわち，$y=3x-10$

より，求める a，b の関係式は

$\boldsymbol{b=3a-10\ \ ((a,\ b)\neq(5,\ 5),\ (2,\ -4))}$

40

円の中心 $(-2,\ -1)$ と直線との距離を d とおくと

$$d=\frac{|-2a+1+9-3a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}$$

(i) $d<5$ のとき，

すなわち $\dfrac{5|a-2|}{\sqrt{a^2+1}}<5$ のとき

両辺を平方して，

$$a^2-4a+4<a^2+1$$

$$\therefore\quad -4a<-3$$

よって，

$\boldsymbol{a>\dfrac{3}{4}}$ **のとき，異なる 2 点で交わる．**

(ii) $d=5$ すなわち，

$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{4}}$ **のとき，接する．**

(iii) $d>5$ すなわち，

$\boldsymbol{a<\dfrac{3}{4}}$ **のとき，共有点をもたない．**

41

求める接線は y 軸と平行ではないので，

$$y+2=m(x-4)$$

すなわち，$mx-y-4m-2=0$

とおける．これが円 $x^2+y^2=10$ に接するので，$\dfrac{|-4m-2|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10}$

両辺を平方すると

$$16m^2+16m+4=10m^2+10$$

$$3m^2+8m-3=0$$

$$(3m-1)(m+3)=0$$

$$\therefore\quad m=\frac{1}{3},\ -3$$

よって，求める接線の方程式は，

$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{10}{3}}$ と $\boldsymbol{y=-3x+10}$

42

$$x^2+y^2=2 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \qquad \cdots\cdots②$$

①と②の中心間の距離 $=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

①の半径は $\sqrt{2}$，②の半径は 2 より

$$2-\sqrt{2}<\sqrt{2}<2+\sqrt{2}$$

だから，2 円は異なる 2 点で交わる．

よって，①−② より，$-2x-2y=0$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x}$$

43

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2=(x-1)^2+(y-1)^2,$$

$$\mathrm{BP}^2=(x-5)^2+(y-5)^2$$

$\mathrm{AP}^2:\mathrm{BP}^2=1:9$ だから

$9\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ より

$$9(x-1)^2+9(y-1)^2=(x-5)^2+(y-5)^2$$

$$x^2-x+y^2-y-4=0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

よって，求める軌跡は，

円 $\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{2}}$

44

円は x 軸の下側から x 軸に接しているので，中心の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと，$Y<0$ であり，半径は $-Y$．

よって，円の方程式は

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=Y^2$$

となり，点 $(1,\ -2)$ を通るので，

$$(1-X)^2+(-2-Y)^2=Y^2$$

$$\therefore\quad X^2-2X+4Y+5=0$$

よって，求める軌跡は，

放物線 $\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}}$

45

(1) $\begin{cases} x=-t+2 & \cdots\cdots① \\ y=2t+1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①×2+② より，$2x+y=5$

$\therefore$ **直線** $\boldsymbol{y=-2x+5}$

(2) $\begin{cases} x=1-|t| & \cdots\cdots① \\ y=t^2-1 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より，$1-x=|t|$　$\cdots\cdots①'$

②より，$y=|t|^2-1$

①′ を代入して　$y=(1-x)^2-1$

①′ でさらに $|t|\geqq 0$ より，$x\leqq 1$

∴　**放物線の一部 $y=x^2-2x\ (x\leqq 1)$**

(3) $\begin{cases} x=1-\sin t \\ y=1+\cos t \end{cases}$

より $\begin{cases} 1-x=\sin t & \cdots\cdots① \\ y-1=\cos t & \cdots\cdots② \end{cases}$

$①^2+②^2$ より　$(1-x)^2+(y-1)^2=1$

また，$30^\circ\leqq t\leqq 120^\circ$ より，

$$\frac{1}{2}\leqq \sin t\leqq 1,\quad -\frac{1}{2}\leqq \cos t\leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

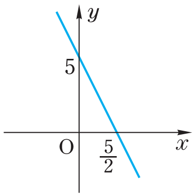
だから，$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

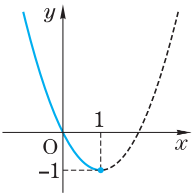
となり，求める軌跡は

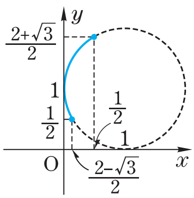
円弧 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$$\left(0\leqq x\leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\leqq y\leqq \frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$$

(1)，(2)，(3)のグラフは順に下の図のようになる．







46

(1) ①と $y=-x^2+3x-2$ より，y を消去すると

$4x^2-2(2t+3)x+t^2+8t-4=0\cdots\cdots②$

②は実数解をもつので，判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}\geqq 0$ より

$(2t+3)^2-4(t^2+8t-4)\geqq 0$

∴　$-4t+5\geqq 0$　∴　$t\leqq \dfrac{5}{4}$

(2) ①より　$y=(x-t)^2-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$

したがって，頂点の座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=t$　$\cdots\cdots③$

$Y=-\dfrac{1}{2}t^2+4t-4$　$\cdots\cdots④$

③，④より t を消去すると，

$Y=-\dfrac{1}{2}X^2+4X-4$

ここで，(1)より，$t\leqq \dfrac{5}{4}$ だから③より

$X\leqq \dfrac{5}{4}$

よって，求める軌跡は

放物線の一部

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x^2+4x-4\quad \left(x\leqq \frac{5}{4}\right)}$$

47

(1) l の式から　$(x-1)t-y=0$

よって，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 0)$ を通る．

m の式から　$x-1+(y-2)t=0$

よって，t の値にかかわらず定点 $(1,\ 2)$ を通る．

∴　**A(1, 0)，B(1, 2)**

(2) $t\cdot 1+(-1)\cdot t=0$ より，l と m は直交するので，P は線分 AB を直径とする円を描く．ここで AB の中点は M(1, 1) であり，

AM＝1

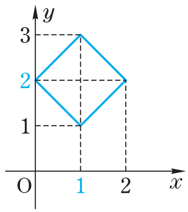
よって，P は円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上を動く．

ここで，l は $x=1$，m は $y=2$ と一致することはないので点 $(1,\ 2)$ は含ま

れない．
よって，求める軌跡は
円 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ から，
点 $(1,\ 2)$ を除いたもの．

48

$|x-1|+|y-2|=1$ は曲線 $|x|+|y|=1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したもので，$|x|+|y|=1$ は，x に $-x$ を代入しても y に $-y$ を代入しても式は変わらないので，x 軸，y 軸，原点に関して対称．
よって，$|x|+|y|=1\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$，すなわち，$x+y=1\ (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ と，それを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した図形をあわせたものが
$|x|+|y|=1$
よって，求める図形は右図のような正方形．

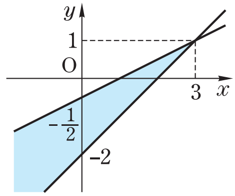


49

(1) $x-y<2 \Longleftrightarrow y>x-2$
よって，$y=x-2$ より上側を表す．
$x-2y>1 \Longleftrightarrow y<\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$
よって，$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ より下側を表す．
よって，求める領域は次図の色の部分(境界は含まない)．

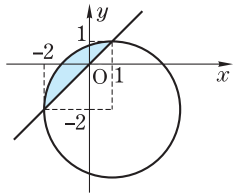
(2) $x^2+y^2-2x+4y\leqq 4$
$\Longleftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2\leqq 9$
よって，$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$ の周および内部を表す．
また，$y\geqq x$ は $y=x$ より上側とその図形上を表す．
よって，求める領域は次図の色の部分(境界を含む)．

(1)



ただし，境界は含まない

(2)



ただし，境界は含む

50

(1) $|x^2-2x|$
$$=\begin{cases} x^2-2x & (x^2-2x\geqq 0) \\ -(x^2-2x) & (x^2-2x<0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x^2-2x & (x\leqq 0,\ 2\leqq x) \\ -x^2+2x & (0<x<2) \end{cases}$$
よって，求める領域は $y=|x^2-2x|$ の下側で，境界を含む．

(2) $|x^2-2|+1$
$$=\begin{cases} x^2-2+1 & (x^2-2\geqq 0) \\ -(x^2-2)+1 & (x^2-2<0) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} x^2-1 & (x\leqq -\sqrt{2},\ \sqrt{2}\leqq x) \\ -x^2+3 & (-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}) \end{cases}$$
よって，求める領域は $y=|x^2-2|+1$ の上側で，境界を含む．

(3) (i) $x-1\geqq 0,\ y-2\geqq 0$
すなわち　$x\geqq 1,\ y\geqq 2$ のとき
$|x-1|+|y-2|\leqq 1$
$\Longleftrightarrow x-1+y-2\leqq 1$
$\Longleftrightarrow y\leqq -x+4$
(ii) $x<1,\ y\geqq 2$ のとき
$|x-1|+|y-2|\leqq 1$
$\Longleftrightarrow -(x-1)+y-2\leqq 1$
$\Longleftrightarrow y\leqq x+2$
(iii) $x\geqq 1,\ y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

$\Longleftrightarrow x-1-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq x$

(iv)　$x<1$，$y<2$ のとき

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

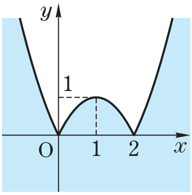
$\Longleftrightarrow -(x-1)-(y-2)\leqq 1$

$\Longleftrightarrow y\geqq -x+2$

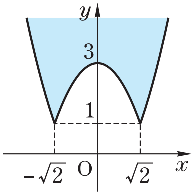
注　$|x|+|y|\leqq 1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動（⇨**48**）したものは，

$|x-1|+|y-2|\leqq 1$

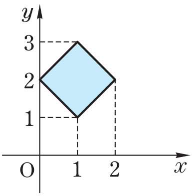
領域を図示すると順に下図の色の部分となる．



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む



ただし，境界は含む

51

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+3y\leqq 12$，$2x+y\leqq 8$ の表す領域は，図 I の色の部分である．ただし，境界は含む．

(1)　$x+3y=k$ とおくと，

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{k}{3}$ となり，図 II より

A(0，4) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最大で，k **の最大値は 12**

O(0，0) を通るとき，$\dfrac{k}{3}$ は最小で，k の**最小値は 0**

(2)　$x^2-y=k'$ とおくと，$y=x^2-k'$ となり，図 III より

A(0，4) を通るとき，$-k'$ は最大で，k' **の最小値は -4**

C(4，0) を通るとき，$-k'$ は最小で，k' **の最大値は 16**

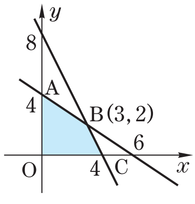


図 I

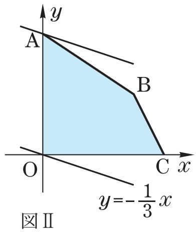


図 II

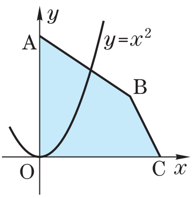


図 III

52

(1)　(ア)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと，

$\theta=60°$，$120°$

よって，$\boldsymbol{\theta=60°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{120°+360°\times n}$　（$\boldsymbol{n}$：**整数**）

(イ)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと，

$\theta=120°$，$240°$

よって，$\boldsymbol{\theta=120°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{240°+360°\times n}$　（$\boldsymbol{n}$：**整数**）

(ウ)　$0°\leqq\theta<360°$ において，

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を解くと，$\theta=30°$，$210°$

よって，$\boldsymbol{\theta=30°+360°\times n}$，

$\boldsymbol{210°+360°\times n}$　（$\boldsymbol{n}$：**整数**）

(2)　60° の動径を表す角は，nを整数として，$60°+360°\times n$ と表せる．

$\therefore$　$500°<60°+360°\times n<5000°$

$\therefore$　$440°<360°\times n<4940°$

これをみたす整数nは，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13 だから求める個数は，**12 個.**

53

(1)　(ア)　$S=\dfrac{1}{2}rl$ より

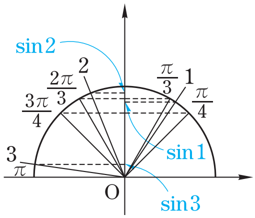
$$l=\frac{2S}{r}=\frac{2\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(イ)　$l=r\theta$ より

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

(2)　$\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{3}<2<\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{4}<3<\pi$

より 8 個の角 $\dfrac{\pi}{4}$，1，$\dfrac{\pi}{3}$，2，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}$，3，π は下図のような位置関係にある．



$\therefore$　$\boldsymbol{\sin 3<\sin 1<\sin 2}$

54

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{9}{25},$$

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=\frac{16}{25}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，

$\cos\alpha>0$，$\cos\beta<0$

よって，

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$

$\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\boldsymbol{-1}$

$\cos(\alpha-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\boldsymbol{0}$

55

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\cos\theta<0$

$\therefore$　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

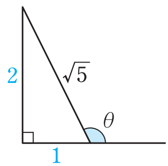
$=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}}$

$\therefore$　$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\dfrac{1}{9}=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

56

$\tan\theta=-2$ のとき，

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ だから



右図より，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore$　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

$=\dfrac{6}{\sqrt{5}}-\dfrac{32}{5\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{5\sqrt{5}}}$

$\therefore$　$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=-\dfrac{4}{5\sqrt{5}}+\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{11}{5\sqrt{5}}}$

57

(解 I)　(和積の公式を使って)

$\sin 3\theta+\sin 2\theta=2\sin\dfrac{5\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=0$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{4}$ だから，

$\cos\dfrac{\theta}{2}\neq 0$

よって，$\sin\dfrac{5\theta}{2}=0$

$0\leqq\dfrac{5\theta}{2}\leqq\dfrac{5\pi}{4}$ だから，$\dfrac{5\theta}{2}=0,\ \pi$

$\therefore\quad \boldsymbol{\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{5}}$

参考（2倍角，3倍角の公式を使うと…）

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$,

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

より

$\sin 2\theta+\sin 3\theta$
$=2\sin\theta\cos\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta$
$=\sin\theta(2\cos\theta+3-4\sin^2\theta)$
$=\sin\theta(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)$

したがって，$\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$ より

$$\sin\theta=0,\ \cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$(\because\quad 0\leqq\cos\theta\leqq 1)$

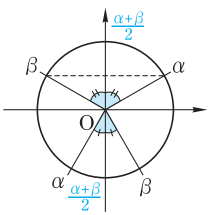
このあと，$\theta=0$ は求められますが，$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ から，$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$ を求めることは厳しくなります．

（解Ⅱ）（$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ を使って）

$\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$

$\sin 3\theta=-\sin 2\theta$

$\sin 3\theta=\sin(\pi+2\theta)$



$\therefore\quad \dfrac{3\theta+(\pi+2\theta)}{2}$

$=\dfrac{\pi}{2}+n\pi$

（n：整数）

$\therefore\quad \theta=\dfrac{2n\pi}{5}$

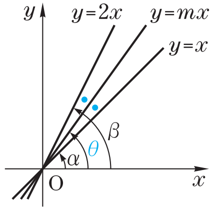
$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，$n=0,\ 1$

よって，$\theta=0,\ \dfrac{2\pi}{5}$

58

（解Ⅰ）（加法定理を使って）

$y=x,\ y=2x$, $y=mx$ が x 軸の正方向となす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \theta$ $(0<\alpha<\theta<\beta<90^\circ)$ とおくと，



$$\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\tan\alpha=1,\ \tan\beta=2,\ \tan\theta=m$

$\therefore\quad \tan 2\theta=\tan(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=-3$

次に，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ だから，

$3\tan^2\theta-2\tan\theta-3=0$

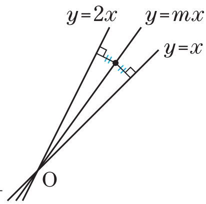
$\therefore\quad m=\tan\theta=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}\quad (\because\quad m>0)$

よって，求める直線は

$$\boldsymbol{y=\frac{1+\sqrt{10}}{3}x}$$

（解Ⅱ）（点と直線の距離の公式を使って）

$y=mx$ 上の点 $(x,\ y)$ と2つの直線 $y=x$, $y=2x$ との距離は等しいので



$\dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{|2x-y|}{\sqrt{4+1}}$

$\sqrt{5}\,|x-y|=\sqrt{2}\,|2x-y|$

$\sqrt{5}\,(x-y)=\pm\sqrt{2}\,(2x-y)$

$(\sqrt{5}\pm\sqrt{2})y=(\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2})x$

$y=\dfrac{\sqrt{5}\pm 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}\pm\sqrt{2}}x$　（複号同順）

$m>0$ より，$y=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}x$

$\therefore\quad y=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}x$

59

(1) $\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=2\left(\sin x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\mathbf{2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$

(2) $0\leqq x<2\pi$ より,

$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13\pi}{6}$ ……①

(1)より $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq 1$

$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$ ……②

①, ②より $\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

$\therefore$ $\mathbf{0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi}$

60

(1) $y=\cos^2x-2\sin x\cos x+3\sin^2x$

$=\cos^2x-\sin 2x+3(1-\cos^2x)$

$=3-2\cos^2x-\sin 2x$

$=-(2\cos^2x-1)-\sin 2x+2$

$=\mathbf{-\cos 2x-\sin 2x+2}$

(2) $\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

より,

①は $y=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$ となる.

$0\leqq x\leqq\pi$ より, $\dfrac{\pi}{4}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9\pi}{4}$ だから

$-1\leqq\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$\therefore$ $-\sqrt{2}\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

$\therefore$ $-\sqrt{2}+2\leqq-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$

$\leqq\sqrt{2}+2$

よって, $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{2}$ すなわち

$\boldsymbol{x=\dfrac{5\pi}{8}}$ **のとき, 最大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}+2}$**

$2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち

$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{8}}$ **のとき, 最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}+2}$**

61

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=t$ とおくと

$t^2=\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2$

$\therefore$ $\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=t^2-2$

よって, $y=2t+t^2-2=(t+1)^2-3$

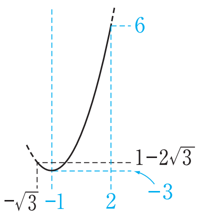
ここで, $t=2\left(\sin\theta\cdot\dfrac{1}{2}-\cos\theta\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より, $-\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ だから

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

$\therefore$ $-\sqrt{3}\leqq t\leqq 2$

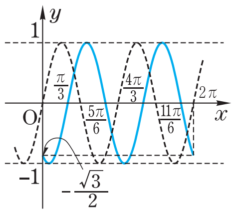


グラフより, **最大値 6, 最小値 −3**

62

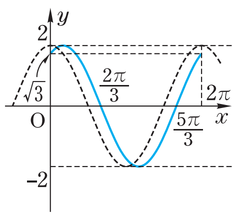
(1) $y=\sin 2\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，

$y=\sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したもので，周期は $\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．グラフは下図．



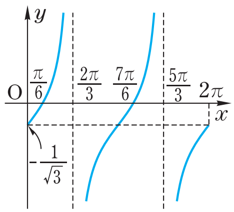
(2) $y=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\cos x$ のグラフを，x 軸をもとに y 軸方向に 2 倍に拡大し，それを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．



(3) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，

$y=\tan x$ のグラフを x 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもの．グラフは下図．

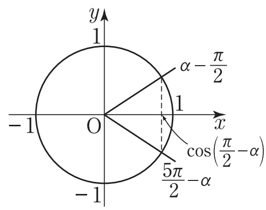


63

$\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ より，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos 2\beta$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq\alpha\leqq\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha\leqq 0$



$0\leqq 2\beta\leqq 2\pi$ だから，

$2\beta=\alpha-\dfrac{\pi}{2}$ または，$\dfrac{5\pi}{2}-\alpha$

$\therefore\ \ \beta=\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}}$

64

(1) $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$

$=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$

$=27-3\cdot 3=\mathbf{18}$

(2) (ア) 4^x+4^{-x}

$=(2^x-2^{-x})^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=1+2=\mathbf{3}$

(イ) $(2^x+2^{-x})^2$

$=4^x+4^{-x}+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=3+2=5$

$2^x+2^{-x}>0$ だから　$2^x+2^{-x}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(ウ) 8^x-8^{-x}

$=(4^x+4^{-x})(2^x-2^{-x})+(2^x-2^{-x})$

$=3\cdot 1+1=\mathbf{4}$

(3) $x^2-1=\dfrac{1}{4}(a+a^{-1}+2)-1$

$=\dfrac{1}{4}(a+a^{-1}-2)=\dfrac{1}{4}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$\therefore\ \ \sqrt{x^2-1}=\dfrac{1}{2}|a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}|$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) & (a>1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}) & (0<a<1)\end{cases}$$

(i) $a>1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})=a^{\frac{1}{2}}$

(ii) $0<a<1$ のとき

$x+\sqrt{x^2-1}$

$=\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}(a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})$

$=a^{-\frac{1}{2}}$

(i), (ii)より **$a>1$ のとき a,**

$0<a<1$ のとき a^{-1}

65

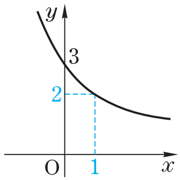
$y=2^{-x+1}+1$

$\Longleftrightarrow y-1=2^{-(x-1)}$

より，$y=2^{-x}$ のグラフを

x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの.

そのグラフは右図.



66

$2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$2^{2x+3}=2^3\cdot 2^{2x}=8t^2$

より，与えられた方程式は，

$8t^2+7t-1=0$

$\therefore\quad (8t-1)(t+1)=0$

$t>0$ だから，$t=2^x=\frac{1}{8}$

$\therefore\quad x=-3$

67

$2^x=X,\ 3^y=Y\quad(X>0,\ Y>0)$

とおくと，与えられた連立方程式は

$\begin{cases} X+Y=17 \\ XY=72 \end{cases}$

よって，X，Y を解にもつ 2 次方程式は

(⇨**21**)

$t^2-17t+72=0$

すなわち，$(t-8)(t-9)=0$

$\therefore\quad t=8,\ 9$

$2^x<3^y$ より $\begin{cases} 2^x=8 \\ 3^y=9 \end{cases}\quad\therefore\quad \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

68

(1) $3^4<3^{x(x-3)}$，底$=3\ (>1)$ だから

$4<x(x-3)\qquad\therefore\quad x^2-3x-4>0$

$\therefore\quad (x-4)(x+1)>0$

$\therefore\quad$ **$x<-1,\ 4<x$**

(2) $2^x=t\quad(t>0)$ とおくと，

$4^x=(2^x)^2=t^2,\ 2^{x+1}=2t,\ 2^{x+3}=8t$ より，

与式は $t^2-2t+16<8t$ となる.

$t^2-10t+16<0$

$(t-2)(t-8)<0$

$t>0$ だから

$2<t<8\qquad$ よって，$2^1<2^x<2^3$

底$=2\quad(>1)$ より **$1<x<3$**

69

(1) $(\log_{10}2)^2+(\log_{10}5)(\log_{10}4)$
$\qquad+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2)^2+2(\log_{10}5)(\log_{10}2)+(\log_{10}5)^2$

$=(\log_{10}2+\log_{10}5)^2$

$=\{\log_{10}(2\cdot 5)\}^2=(\log_{10}10)^2=\mathbf{1}$

(2) $\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{\sqrt{2}}$ (複号同順)

よって，与式$=\log_2\sqrt{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

70

(1) $\log_3 6=\frac{\log_2 6}{\log_2 3}=\frac{1}{\log_2 3}+1$,

$\log_2 6=\log_2 3+1,\ \log_3 2=\frac{1}{\log_2 3}$

より，

与式$=\left(\frac{1}{\log_2 3}+1-1\right)(\log_2 3+1)$

$\qquad-\log_2 3-\frac{1}{\log_2 3}$

$$=1+\frac{1}{\log_2 3}-\log_2 3-\frac{1}{\log_2 3}$$

$$=\mathbf{1-\log_2 3}$$

(2) $B=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 72}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 2}{\log_2 9+\log_2 8}$

$$=\frac{\log_2 3+1}{2\log_2 3+3}=\frac{\boldsymbol{A+1}}{\boldsymbol{2A+3}}$$

$C=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 144}=\dfrac{\log_2 3+\log_2 4}{\log_2 9+\log_2 16}$

$$=\frac{\log_2 3+2}{2\log_2 3+4}=\frac{A+2}{2A+4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

71

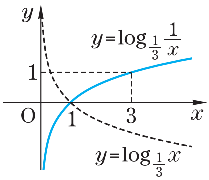
(1) $y=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x}$

$=\log_{\frac{1}{3}}x^{-1}$

$=-\log_{\frac{1}{3}}x$

より　$y=\log_{\frac{1}{3}}x$

のグラフを x 軸に関して対称移動したもの．上図．



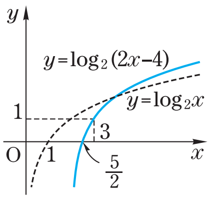
(2) $y=\log_2(2x-4)$

$=\log_2 2(x-2)$

$=\log_2 2+\log_2(x-2)$

$=1+\log_2(x-2)$

より，$y=\log_2 x$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したもの．右図．



72

(1) 真数条件，底条件より，

$5x^2-6>0$，$x>0$，$x\neq 1$

$\therefore\quad \dfrac{\sqrt{30}}{5}<x$ ……①

このとき，$\log_x(5x^2-6)=\log_x x^4$

$\therefore\quad 5x^2-6=x^4$

$(x^2-2)(x^2-3)=0$

$x^2=2,\ 3$

①より，$x=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) 真数条件，底条件より，

$x>0$，$x\neq 1$ ……①

このとき，$\log_2 x+2\cdot\dfrac{\log_2 2}{\log_2 x}-3=0$

$$\log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}-3=0$$

$\log_2 x=t$ とおくと，

$t^2-3t+2=0\qquad\therefore\quad (t-1)(t-2)=0$

$\therefore\quad \log_2 x=1,\ 2$　　よって，$x=\mathbf{2,\ 4}$

（これは①をみたす）

73

$\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$，

$\log_4 y=\dfrac{\log_2 y}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 y$ だから

$\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと

与えられた連立方程式は $\begin{cases}X+Y=3\\XY=2\end{cases}$

よって，X，Y を解にもつ 2 次方程式は

$t^2-3t+2=0$

すなわち，$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore\quad t=1,\ 2$

よって，$\begin{cases}X=1\\Y=2\end{cases}$ または $\begin{cases}X=2\\Y=1\end{cases}$

すなわち，

$\begin{cases}\log_2 x=1\\\log_2 y=2\end{cases}$ または $\begin{cases}\log_2 x=2\\\log_2 y=1\end{cases}$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x=2}\\\boldsymbol{y=4}\end{cases}$ **または** $\begin{cases}\boldsymbol{x=4}\\\boldsymbol{y=2}\end{cases}$

74

(1) $\log_2\sqrt{x}=\log_2 x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$，

$\log_4 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 x$

よって，与えられた不等式は

$12\times\dfrac{1}{4}(\log_2 x)^2-\dfrac{7}{2}\log_2 x-10>0$

$\therefore\quad 6(\log_2 x)^2-7\log_2 x-20>0$

$\log_2 x=t$ とおくと，

$6t^2-7t-20>0$，

$(3t+4)(2t-5)>0$

$\therefore\quad t<-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2}<t$

ゆえに，$\log_2 x<-\dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{2}<\log_2 x$

$\therefore\quad \log_2 x<\log_2 2^{-\frac{4}{3}},\ \log_2 2^{\frac{5}{2}}<\log_2 x$

底$=2$　(>1) より

$x<2^{-\frac{4}{3}},\ 2^{\frac{5}{2}}<x$

x は自然数だから，$x\geqq 1$

$\therefore\quad x>\sqrt{32}$

$5<\sqrt{32}<6$ より，求める x は，**6**

(2)　真数条件より，$x>0$

このとき，$2^0<2^{-2\log_{\frac{1}{2}}x}<2^4$，

底$=2$ (>1) より，$0<-2\log_{\frac{1}{2}}x<4$

$\therefore\quad -2<\log_{\frac{1}{2}}x<0$

$\therefore\quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}1$

底$=\dfrac{1}{2}$ (<1) より　$1<x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$

$\therefore$　$\boldsymbol{1<x<4}$　(これは $x>0$ をみたす)

75

$\log_{10}18^{20}=20(\log_{10}2+2\log_{10}3)$

$=20\times(0.3010+2\times 0.4771)=25.104$

$\therefore\quad 25<\log_{10}18^{20}<26$

より，18^{20} は **26 桁**の整数．

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}=-30(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=-30\times(0.3010+0.4771)=-23.343$

$\therefore\quad -24<\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}<-23$

より，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{30}$ は**小数第 24 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

76

(1)　$2^{10}=1024,\ 3^6=729,\ 3^7=2187$

より，$3^6<2^{10}<3^7$　　よって，$\boldsymbol{l=6}$

(2)　$10A=10\log_3 2=\log_3 2^{10}$

ここで，(1)より，$3^6<2^{10}<3^7$ だから

$\log_3 3^6<\log_3 2^{10}<\log_3 3^7$

$\therefore\quad 6<10A<7$

よって，$10A$ の一の位の数字は **6**

(3)　(2)より，$0.6<A<0.7$

よって，Aの小数第 1 位の数字は **6**

77

(A)　(1)　$7^{8x}+2401^{-2x}$

$=(49^x)^4+(49^{-x})^4$

であり，

$49^{2x}+49^{-2x}=(49^x+49^{-x})^2-2=a^2-2$

より

与式$=(49^{2x}+49^{-2x})^2-2$

$=(a^2-2)^2-2=\boldsymbol{a^4-4a^2+2}$

(2)　$49^{2x}>0,\ 49^{-2x}>0$ だから，

相加平均$\geqq$相乗平均　より

$a^2=49^{2x}+49^{-2x}+2$

$\geqq 2\sqrt{49^{2x}\cdot 49^{-2x}}+2=2+2=4$

$\therefore\quad a^2\geqq 4$　(等号は，$x=0$ のとき成立)

そこで，$y=a^4-4a^2+2$ とおくと，

$y=(a^2-2)^2-2$

よって，$a^2=4$ のとき，すなわち

$x=0$ のとき**最小値 2**

(B)　(1)　$1\leqq x\leqq 81$，底$=3$ (>1) より，

$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 81$

$\therefore\quad 0\leqq\log_3 x\leqq 4$　　$\therefore$　$\boldsymbol{0\leqq t\leqq 4}$

(2)　$f(x)=(\log_3 x)(\log_3 x-\log_3 9)$

$=(\log_3 x)(\log_3 x-2)$

より，$y=t(t-2)$ とおくと，

$y=(t-1)^2-1$

(1)より，$t=4$ すなわち $x=81$ のとき

最大値 8

78

$a^{10}=(2^{\frac{4}{5}})^{10}=2^8=256$，

$b^{10}=(3^{\frac{1}{2}})^{10}=3^5=243$

$\therefore\quad b^{10}<a^{10}$　すなわち，$b<a$　……①

次に，$b^6=(3^{\frac{1}{2}})^6=3^3=27$，

$c^6=(4^{\frac{1}{3}})^6=4^2=16$

$\therefore\quad c^6<b^6$　すなわち，$c<b$　……②

①，②より，$a,\ b,\ c$ を小さい順に並べる

と，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$

79

$$\frac{3}{2}\log_3 2=\frac{1}{2}\log_3 2^3=\frac{1}{2}\times\log_3 8$$

ここで，$\log_3 8<\log_3 9=2$ だから，

$$\frac{3}{2}\log_3 2<1$$

また，

$$2^{-0.3}\times 3^{0.2}=2^{-\frac{3}{10}}\times 3^{\frac{2}{10}}$$
$$=(2^{-3}\times 3^2)^{\frac{1}{10}}=\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{1}{10}}>1$$

よって，小さい順に

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}\log_3 2,\ 1,\ 2^{-0.3}\times 3^{0.2}}$$

80

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=\boldsymbol{1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-a+1)}{x(x-a)}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a+1}{x}=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$

81

$x\to 1$ のとき，分母 $\to 0$

だから，極限値が存在するためには，

$x\to 1$ のとき，分子 $\to 0$

よって　$-a-b-1=0$

$$\therefore\quad a+b=-1$$

このとき，

$$x^2-(a+b)x-2=x^2+x-2$$
$$=(x+2)(x-1)$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+a}=\frac{3}{a+1}=-\frac{1}{3}$$

よって，$\boldsymbol{a=-10}$，$\boldsymbol{b=9}$

逆に，このとき，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-11x+10}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x-10}=-\frac{1}{3}$$

となり，確かに適する．

82

(1)　$y'=(x^3)'-(2x^2)'+(4x)'-(2)'$
$\quad=\boldsymbol{3x^2-4x+4}$

(2)　$y'=4\cdot 3(3x+2)^3=\boldsymbol{12(3x+2)^3}$

83

$f'(x)=3x^2+2ax+b$　だから

$f'(1)=3+2a+b=2$

$\therefore\quad 2a+b=-1$　……①

$f'(2)=12+4a+b=11$

$\therefore\quad 4a+b=-1$　……②

①，②より，$a=\boldsymbol{0}$，$b=\boldsymbol{-1}$

84

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(x_3)\ \text{より}$$

$$\frac{a(x_2{}^2-x_1{}^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=2ax_3+b$$

$\therefore\quad a(x_2+x_1)+b=2ax_3+b$

$(\because\quad x_1\neq x_2)$

$$\therefore\quad x_3=\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

85

$f'(x)=2x-4$，$f(1)=2$，$f'(1)=-2$

より点 $(1,\ 2)$ における接線は

$y-2=-2(x-1)$

$\therefore\quad y=-2x+4$　……①

$f(3)=2$，$f'(3)=2$ より点 $(3,\ 2)$ における接線は

$y-2=2(x-3)$

$\therefore\quad y=2x-4$　……②

①，②を連立させて解くと，$x=2$，$y=0$

よって，求める交点は $\boldsymbol{(2,\ 0)}$

86

接点を $\mathrm{T}(t,\ t^2-4t+5)$ とおくと，

$f'(x)=2x-4$ より T における接線は

$y-(t^2-4t+5)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore\quad y=(2t-4)x-t^2+5$

これが $(1,\ 0)$ を通るので，

$0=2t-4-t^2+5 \quad \therefore \quad t^2-2t-1=0$

$\therefore \quad t=1\pm\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は

$\boldsymbol{y=2(\sqrt{2}-1)x-2\sqrt{2}+2,}$

$\boldsymbol{y=-2(\sqrt{2}+1)x+2\sqrt{2}+2}$

87

$f(x)=ax^2+bx+c \ (a\neq 0)$ とおくと，

$f'(x)=2ax+b$ だから，与式に代入して

$(x-1)(2ax+b)=ax^2+bx+c+(x-1)^2$

$\therefore \quad 2ax^2+(b-2a)x-b$

$=(a+1)x^2+(b-2)x+c+1$

これは，x についての恒等式だから，係数を比較して

$2a=a+1 \quad \cdots\cdots①$

$b-2a=b-2 \quad \cdots\cdots②$

$-b=c+1 \quad \cdots\cdots③$

①より $a=1$．また，$f'(1)=-1$ より，

$f'(1)=2+b=-1 \quad \therefore \quad b=-3$

③より $c=2$

$\therefore \quad f(x)=\boldsymbol{x^2-3x+2}$

88

$f(x)=-2x^3+6x+2$ より

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	6	↘

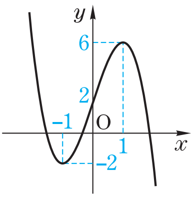
よって，**極大値　6**

$(x=1$ のとき$)$

極小値 -2

$(x=-1$ のとき$)$

また，グラフは右図．



89

Pの x 座標を t とおくと

$f(t)=g(t)$ かつ $f'(t)=g'(t)$ より

$\begin{cases} t^2+2=-t^2+at \\ 2t=-2t+a \end{cases}$

$\therefore \quad \begin{cases} 2t^2-at+2=0 & \cdots\cdots① \\ 4t=a & \cdots\cdots② \end{cases}$

①，②より，$t^2=1 \quad \therefore \quad t=\pm 1$

$t=1$ のとき，$a=4$，

$t=-1$ のとき，$a=-4$

よって，$a=4$ のとき，$\mathbf{P(1,\ 3)}$

$a=-4$ のとき，$\mathbf{P(-1,\ 3)}$

90

$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ より，

$f'(x)=3x^2+6ax+3b$

$x=2,\ 3$ で極値をとるので，

$f'(2)=0,\ f'(3)=0$

$\therefore \quad \begin{cases} 12+12a+3b=0 & \cdots\cdots① \\ 27+18a+3b=0 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①，②より，$\boldsymbol{a=-\dfrac{5}{2},\ b=6}$

このとき，$f'(x)=3(x-2)(x-3)$ となり，確かに適する．

$f(x)=x^3-\dfrac{15}{2}x^2+18x$ より，

$f(2)=14,\ f(3)=\dfrac{27}{2}$

よって，**極大値 14，極小値 $\dfrac{27}{2}$**

91

(1)　$f(x)=x^3-3ax^2+3x-1$ より

$f'(x)=3x^2-6ax+3=3(x^2-2ax+1)$

よって，$f(x)$ が極値をもつとき，

$x^2-2ax+1=0$ が異なる 2 つの実数解をもてばよい．判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=a^2-1=(a-1)(a+1)>0$

$\therefore \quad \boldsymbol{a<-1,\ 1<a}$

(2)　$x=2$ で極小となるので，

$f'(2)=0 \quad \therefore \quad 4-4a+1=0$

$\therefore \quad a=\dfrac{5}{4}$

このとき $f(x)=x^3-\dfrac{15}{4}x^2+3x-1$

より，

$f'(x)=\dfrac{3}{2}(2x-1)(x-2)$ となり

$x=2$ で極小，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大.

$f(2)=-2$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{5}{16}$ より，

$a=\dfrac{5}{4}$，**極小値** -2，**極大値** $-\dfrac{5}{16}$

92

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)=x^3-3x-2$$
より
$$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$$
よって，$-1\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$ の増減は表のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	-4	↗	50

よって，$-1\leqq x\leqq 4$ において
最大値 50 （$x=4$ のとき），
最小値 -4（$x=1$ のとき）

93

$V=\dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot h$

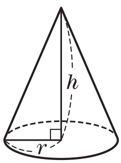
$=\dfrac{\pi}{3}r^2(a-r)$

$=\dfrac{\pi}{3}ar^2-\dfrac{\pi}{3}r^3$

$V'=\dfrac{2}{3}\pi ar-\pi r^2=\pi r\left(\dfrac{2}{3}a-r\right)$

ここで，$h=a-r>0$ より
$$0<r<a$$
よって，V の増減は表のようになる.

r	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}a$	$\cdots$	a
V'	0	$+$	0	$-$	
V		↗	最大	↘	



よって，$r=\dfrac{2}{3}a$ のとき

最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\pi}{81}a^3}$

94

$x^3-4x+a=0$ ……①

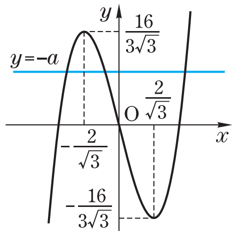
$\Longleftrightarrow x^3-4x=-a$

より $\begin{cases} y=x^3-4x & \cdots\cdots② \\ y=-a & \cdots\cdots③ \end{cases}$

のグラフで考える．②の右辺を $f(x)$ とおく.

$f'(x)=3x^2-4=(\sqrt{3}\,x-2)(\sqrt{3}\,x+2)$

より②のグラフは次図のようになる.



①の解がすべて実数となるには，②と③のグラフが接するときも含めて 3 点で交わればよいので　$-\dfrac{16}{3\sqrt{3}}\leqq -a\leqq\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{-\frac{16\sqrt{3}}{9}\leqq a\leqq\frac{16\sqrt{3}}{9}}$$

95

(1)　$y'=3x^2-6$ より，$\mathrm{T}(t,\ t^3-6t)$ における接線は
$$y-(t^3-6t)=(3t^2-6)(x-t)$$
$\therefore$　$\boldsymbol{y=(3t^2-6)x-2t^3}$

(2)　(1)で求めた接線は $\mathrm{A}(2,\ p)$ を通るので　$p=6t^2-12-2t^3$

$\therefore$　$\boldsymbol{p=-2t^3+6t^2-12}$ ……①

(3)　点Aから 3 本の接線が引けるので，①は異なる 3 つの実数解をもつ.
①より，$2t^3-6t^2+12+p=0$ だから，$f(t)=2t^3-6t^2+12+p$ とおくとき，$f(t)$ は極大値，極小値をもち，
$$(\text{極大値})\times(\text{極小値})<0$$
が成りたつ.

$$f'(t)=6t^2-12t=6t(t-2)$$

より $f(0)f(2)<0$ であればよいので,

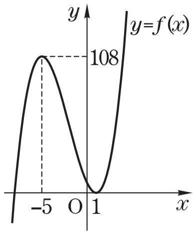
$$(12+p)(4+p)<0$$

$\therefore$ $\boldsymbol{-12<p<-4}$

96

$f(x)=(x+2)^3-27x$ とおくと
$f'(x)=3(x+2)^2-27=3(x+5)(x-1)$
$f'(x)=0$ より, $x=-5$, 1
よって, $f(x)$ の増減は表のようになる.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗



よって, $x=1$ で最小値 0

$\therefore$ $f(x)\geqq 0$

すなわち,

$(x+2)^3\geqq 27x$

($x>0$ のとき)

97

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+6ax+a$$

とおくと

$$f'(x)=3x^2-3(a+2)x+6a$$
$$=3(x-2)(x-a)$$

$0<a<2$ だから, $x\geqq 0$ において, $f(x)$ の増減は表のようになる.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	a	↗		↘	$7a-4$	↗

最小値 $\geqq 0$ であればよいので, $a>0$ より $7a-4\geqq 0$ $\therefore$ $\boldsymbol{\dfrac{4}{7}\leqq a<2}$

98

(1) $\displaystyle\int(x^2-x+3)\,dx$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+C}$$

(2) $\displaystyle\int(x+2)^2\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}(x+2)^3+C}$

(3) $\displaystyle\int(3x-1)^2\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(3x-1)^3+C$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{9}(3x-1)^3+C}$$

(Cはいずれも積分定数)

99

$f'(x)=3x^2-2x+1$ より,
$f(x)=x^3-x^2+x+C$ (C:積分定数)
$f(-1)=3$ より, $-1-1-1+C=3$

$\therefore$ $C=6$

よって, $f(x)=\boldsymbol{x^3-x^2+x+6}$

100

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(6x^2-x+2)\,dx$

$$=\left[2x^3-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{1}$$

$$=\left(2-\frac{1}{2}+2\right)-\left(-2-\frac{1}{2}-2\right)=\boldsymbol{8}$$

注 実際には

$$\int_{-1}^{1}(6x^2-x+2)\,dx=2\int_{0}^{1}(6x^2+2)\,dx$$

$$=2\Big[2x^3+2x\Big]_0^1=2(2+2)=8$$

を計算するのと同じ結果である.

(2) $\displaystyle\int_0^2(x-3)^2\,dx=\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^2$

$$=-\frac{1}{3}-\left(-\frac{27}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{26}{3}}$$

(3) $\displaystyle\int_{-2}^{3}(x-1)(x+2)\,dx$

$$=\int_{-2}^{3}\{(x+2)-3\}(x+2)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{3}\{(x+2)^2-3(x+2)\}\,dx$$

$$=\left[\frac{(x+2)^3}{3}-\frac{3}{2}(x+2)^2\right]_{-2}^{3}$$

$$=\frac{125}{3}-\frac{75}{2}=\boldsymbol{\frac{25}{6}}$$

(4) $\alpha=1-\sqrt{2}$, $\beta=1+\sqrt{2}$ とおくと,
α, β は $x^2-2x-1=0$ の解より

$$\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$
（∵ **100**(2)）
$$=-\frac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3$$
$$=-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{2}}$$

101

(1) $|x^2+x-2|=|(x+2)(x-1)|$
$$=\begin{cases} x^2+x-2 & (1\leqq x\leqq 2)\\ -(x^2+x-2) & (-2\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$
$$\therefore\quad \int_{-2}^{2}|x^2+x-2|\,dx$$
$$=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$$
$$+\int_{1}^{2}(x^2+x-2)\,dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{1}$$
$$+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}$$
$$=-2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)+\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)$$
$$+\left(\frac{8}{3}+2-4\right)=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}}$$

(2) (i) **$0<a\leqq 1$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|$
$$=\begin{cases} (x-a)(x-1) & (-1\leqq x\leqq a)\\ -(x-a)(x-1) & (a\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$
$$\therefore\quad \int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{a}(x-a)(x-1)\,dx$$
$$-\int_{a}^{1}(x-a)(x-1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{a}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx$$
$$-\int_{a}^{1}\{(x-a)^2+(a-1)(x-a)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{-1}^{a}$$
$$-\left[\frac{(x-a)^3}{3}+(a-1)\cdot\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{1}$$
$$=\frac{(a+1)^3}{3}-\frac{(a-1)(a+1)^2}{2}$$
$$-\left\{-\frac{(a-1)^3}{3}+\frac{(a-1)^3}{2}\right\}$$
$$=\frac{\boldsymbol{-a^3+3a^2+3a+3}}{\mathbf{3}}$$

(ii) **$1<a$ のとき**

$|(x-a)(x-1)|=(x-a)(x-1)$

$(-1\leqq x\leqq 1)$ より
$$\therefore\quad \int_{-1}^{1}|(x-a)(x-1)|\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\{x^2-(a+1)x+a\}\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(x^2+a)\,dx$$
$$=2\left(\frac{1}{3}+a\right)$$
$$=\boldsymbol{2a+\frac{2}{3}}$$

102

(1) $x=a$ を両辺に代入すると，

$0=a^2-2a-3$

$\therefore\quad (a-3)(a+1)=0$

$a>0$ より，$a=\mathbf{3}$

また，両辺を x で微分して，

$f(x)=\boldsymbol{2x-2}$

(2) $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2-3t-4)\,dt$ ……①

①の両辺を x で微分すると，

$f'(x)=x^2-3x-4$

$$\therefore\quad f(x)=\int(x^2-3x-4)\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2-4x+C$$

とおける．ここで，①の両辺に $x=1$ を代入すると，$f(1)=0$
$$\therefore\quad f(1)=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-4+C=C-\frac{31}{6}=0$$
$$\therefore\quad C=\frac{31}{6}$$

よって，$f(x)=\dfrac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3}}-\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x^2-4x+}\dfrac{\boldsymbol{31}}{\boldsymbol{6}}$

103

$\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=a$　(a：定数) とおくと，

$f(x)=2x^2+ax-5$

$\therefore\quad a=\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt=\int_0^3(2t^2+at-5)\,dt$

$=3+\dfrac{9}{2}a$

よって，$a=-\dfrac{6}{7}$

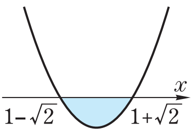
$\therefore\quad f(x)=\boldsymbol{2x^2-\dfrac{6}{7}x-5}$

104

$x^2-2x-1=0$ を解くと

$x=1\pm\sqrt{2}$

よって S は右図の色の部分の面積.



$\therefore\quad S=-\displaystyle\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}(x^2-2x-1)\,dx$

$=\dfrac{1}{6}\{(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})\}^3=\boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{2}}{3}}$

105

(1)　$x^2=x+2$ を解くと　$x^2-x-2=0$

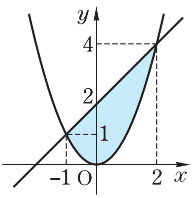
$\therefore\quad (x-2)(x+1)=0$

$\therefore\quad x=2,\ -1$

よって求める交点は，

$\boldsymbol{(2,\ 4),\ (-1,\ 1)}$

(2)　(1)より，求める面積 S は右図の色の部分.



$\therefore\quad S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{(x+2)-x^2\}\,dx$

$=-\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx$

$=-\left[\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}$

$=\left(-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+2\right)-\left(\dfrac{8}{3}-2-4\right)=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

106

(1)　$2x^2-3x-5=|x^2-x-2|$　……①

を解く．①の右辺は 0 以上であることより

$2x^2-3x-5\geqq 0$

$(2x-5)(x+1)\geqq 0$

$\therefore\quad x\leqq -1,\ \dfrac{5}{2}\leqq x$　……②

②のとき，①は

$2x^2-3x-5=x^2-x-2$　……③

または

$2x^2-3x-5=-(x^2-x-2)$　……④

となる.

③より　$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

これらは②をみたす.

④より　$3x^2-4x-7=0$

$(3x-7)(x+1)=0$

$x=-1,\ \dfrac{7}{3}$

②をみたすのは　$x=-1$

以上より①の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 3}$

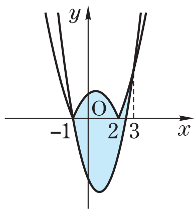
(2)　(1)より 2 つの曲線の交点は

$(-1,\ 0),\ (3,\ 4)$

$|x^2-x-2|$

$=\begin{cases}-(x^2-x-2) \\ \qquad(-1\leqq x\leqq 2) \\ x^2-x-2 \\ \qquad(2\leqq x\leqq 3)\end{cases}$

よって，求める面積 S は右図の色の部分.



$\therefore\quad S=\displaystyle\int_{-1}^{2}\{-(x^2-x-2)$

$-(2x^2-3x-5)\}\,dx$

$+\displaystyle\int_{2}^{3}\{(x^2-x-2)$

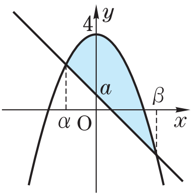
$-(2x^2-3x-5)\}\,dx$

$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(3x-7)\,dx$$
$$-\int_{2}^{3}(x-3)(x+1)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}\{3(x+1)^2-10(x+1)\}\,dx$$
$$-\int_{2}^{3}\{(x-3)^2+4(x-3)\}\,dx$$
$$=-\Big[(x+1)^3-5(x+1)^2\Big]_{-1}^{2}$$
$$-\left[\frac{(x-3)^3}{3}+2(x-3)^2\right]_{2}^{3}$$
$$=-(27-45)-\left(\frac{1}{3}-2\right)=\mathbf{\frac{59}{3}}$$

107

(1)　$4-x^2=a-x$
を整理して，$x^2-x+a-4=0$ ……③
③の判別式を D とすると，
$D=1-4(a-4)=17-4a$
①，②が異なる 2 点で交わる条件は
$17-4a>0$
∴　$\boldsymbol{a<\frac{17}{4}}$

(2)　右図の色の部分が面積 S を表すので，③の 2 解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

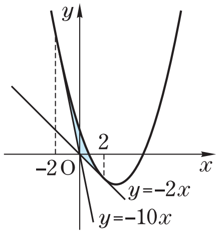


$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(4-x^2)-(a-x)\}\,dx$$
$$=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{4}{3}$$
∴　$(\beta-\alpha)^3=8$
$(\beta-\alpha)^2=D=4$ より
$17-4a=4$
∴　$a=\mathbf{\frac{13}{4}}$

108

(1)　①上の点 $(t,\ t^2-6t+4)$ における接線は，$y'=2x-6$ より
$y-(t^2-6t+4)=(2t-6)(x-t)$
∴　$y=2(t-3)x-t^2+4$
これが原点を通るので，
$0=-t^2+4$
∴　$t=\pm2$
求める接線は，
$\boldsymbol{y=-2x}$，
$\boldsymbol{y=-10x}$

(2)　右図の色の部分が求める面積 S で，

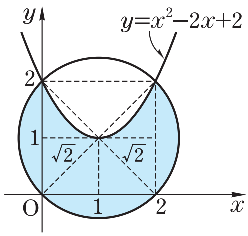


$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^2-6x+4)-(-10x)\}\,dx$$
$$+\int_{0}^{2}\{(x^2-6x+4)-(-2x)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

109

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ より，
$f'(x)=2x+a$
$f(1)=1$，$f'(1)=0$ より，
$$\begin{cases}1+a+b=1\\2+a=0\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}\boldsymbol{a=-2}\\\boldsymbol{b=2}\end{cases}$$

(2)　円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$



$$S=\int_{0}^{2}(x^2-2x+2)\,dx$$

$$+3\left\{\frac{\pi}{4}\times(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\right\}$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^2+3\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$=\mathbf{\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}}$$

110

(1) $a+7d=22$ ……①
　$a+19d=-14$ ……②
①，②より，$\boldsymbol{d=-3}$，$\boldsymbol{a=43}$

(2) $a_n=43-3(n-1)=\boldsymbol{46-3n}$
$a_n>0$ より，$n<\dfrac{46}{3}$
n は自然数だから，
$\boldsymbol{1\leqq n\leqq 15}$

111

(1) $a+4d=84$ ……①
　$a+19d=-51$ ……②
①，②より，$\boldsymbol{d=-9}$，$\boldsymbol{a=120}$

(2) $a_n=120-9(n-1)=129-9n$
$$S_n=\frac{n}{2}(120+129-9n)$$
$$=\boldsymbol{\frac{n(249-9n)}{2}}$$

(3) $a_n>0 \Longleftrightarrow n<\dfrac{129}{9}$
よって，$a_1\sim a_{14}$ までは正で，a_{15} 以後はすべて負だから，
$\boldsymbol{n=14}$ のとき，S_n が最大で，最大値は，
$$S_{14}=\frac{14(249-9\times14)}{2}=\mathbf{861}$$

112

(1) $a_3=125\div5=25$,
　$a_5=504\div9=56$
であるから，初項を a，公差を d とすると
$a+2d=25$ ……①
$a+4d=56$ ……②
①，②より，$d=\boldsymbol{\dfrac{31}{2}}$，$\boldsymbol{a=-6}$

(2) $a_n=-6+\dfrac{31}{2}(n-1)=\dfrac{31}{2}n-\dfrac{43}{2}$
であるから $a_{10}=\dfrac{267}{2}$，$a_{20}=\dfrac{577}{2}$ より，
$$a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}=\frac{11}{2}(a_{10}+a_{20})=\mathbf{2321}$$

113

2 でわると 1 余り，3 でわると 2 余る自然数は，6 でわると 1 不足する自然数だから，小さい順に，5，11，17，… と並んでおり，これは等差数列を表すので，一般項は
$5+6(n-1)=6n-1 \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$
$6n-1\leqq100$ より，$n\leqq16$
よって，**初項 5**，**公差 6**，**項数 16** である．

114

(1) $ar=4$ ……①
　$ar^5=64$ ……②
となり，②÷① より $r^2=4$
∴ $\boldsymbol{r=\pm2}$，$\boldsymbol{a=\pm2}$ **(複号同順)**

(2) $\boldsymbol{r=2}$ **のとき，**
$$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\mathbf{2^{n+1}-2}$$
$\boldsymbol{r=-2}$ **のとき，**
$$S_n=\frac{-2\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{(-2)^{n+1}+2}{3}}$$

115

$a(1+r+r^2)=80$ ……①
$a(r^3+r^4+r^5)=640$ ……②
②÷① より $r^3=8$
∴ $\boldsymbol{r=2}$

116

$\alpha<0$，$\beta>0$，$\alpha\beta<0$ より，3 数が等比数列をなすとき，β が等比中項であるから

$$\beta^2=\alpha^2\beta$$

$\therefore\quad \beta=\alpha^2$ ……① $(\because\ \beta\neq0)$

また，等差数列をなすとき，等差中項は $\alpha\beta$ または α

$\therefore\quad 2\alpha\beta=\alpha+\beta$ ……②

または $\quad 2\alpha=\alpha\beta+\beta$ ……③

①，②より $(\alpha,\ \beta)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

①，③より $(\alpha,\ \beta)=(-2,\ 4)$

117

与えられた数列の一般項は，

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

118

与えられた数列の一般項は，

$1+(-3)+(-3)^2+\cdots+(-3)^{n-1}$

$$=\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)}=\frac{1}{4}\{1-(-3)^n\}$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{1-(-3)^k\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}(-3)^k\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[n-\frac{(-3)\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}\right]$$

$$=\frac{1}{16}\{4n+3+(-3)^{n+1}\}$$

119

与えられた数列の一般項は，

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，求める数列の和を S とすると，

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

120

(1) $S=1\cdot2^1+3\cdot2^2+5\cdot2^3+\cdots+(2n-1)\cdot2^n$

$2S=1\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+(2n-3)\cdot2^n+(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$\therefore\quad S-2S$

$=2+2\cdot2^2+\cdots+2\cdot2^n-(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$=2(2^{n+1}-1)-4-(2n-1)\cdot2^{n+1}$

$=-6-(2n-3)\cdot2^{n+1}$

$\therefore\quad S=(2n-3)\cdot2^{n+1}+6$

(2) $T=1\cdot2^1+2\cdot2^3+3\cdot2^5+\cdots+n\cdot2^{2n-1}$

$2^2T=1\cdot2^3+2\cdot2^5+\cdots+(n-1)\cdot2^{2n-1}+n\cdot2^{2n+1}$

$\therefore\quad T-2^2T$

$=2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}-n\cdot2^{2n+1}$

$=\dfrac{2(1-4^n)}{1-4}-n\cdot2^{2n+1}$

$=-\dfrac{2}{3}-\left(n-\dfrac{1}{3}\right)\cdot2^{2n+1}$

$\therefore\quad T=\dfrac{2}{9}+\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{9}\right)\cdot2^{2n+1}$

121

(1) 与えられた数列の階差数列をとると，

1，4，7，10，…

となり，初項1，公差3の等差数列である．

よって，求める数列の一般項は，$n\geqq2$ のとき

$$1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+\frac{(n-1)(1+3n-5)}{2}$$

$$=\frac{3n^2-7n+6}{2}$$

これは $n=1$ のときも成立．

次に初項から第 n 項までの和は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3k^2-7k+6}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(2n+1)-\frac{7}{4}n(n+1)+3n$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n^2-2n+3)}$$

(2) 与えられた数列の階差数列をとると，
1, 3, 9, 27, …
となり，初項 1，公比 3 の等比数列である．
よって，求める数列の一般項は，$n\geqq2$ のとき
$$1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1-3^{n-1}}{1-3}=\boldsymbol{\frac{3^{n-1}}{2}+\frac{1}{2}}$$
これは，$n=1$ のときも成立．次に初項から第 n 項までの和は，
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^{k-1}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot3^{k-1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(1-3^n)}{1-3}+\frac{1}{2}n=\boldsymbol{\frac{3^n}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}n}$$

122

$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ より，$\{a_n\}$ の階差数列の一般項は 2^{n-1}
よって，$n\geqq2$ のとき，
$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}$$
これは，$n=1$ のときも成立．
∴ $a_n=\boldsymbol{2^{n-1}}$

123

与えられた漸化式は，$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$ と変形できるので，
$$a_n+3=2^{n-1}(a_1+3)=2^{n+1}$$
よって，$a_n=\boldsymbol{2^{n+1}-3}$

124

(1) $a_n=b_n-\alpha n-\beta$,
$a_{n+1}=b_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta$
を代入すると
$b_{n+1}=3b_n-2(\alpha+3)n+\alpha-2\beta-5$
となり，これが等比数列の漸化式となるためには，
$\alpha+3=0$, $\alpha-2\beta-5=0$
∴ $\boldsymbol{\alpha=-3,\ \beta=-4}$

(2) $b_{n+1}=3b_n$ より，
$$b_n=b_1\cdot3^{n-1}=\boldsymbol{5\cdot3^{n-1}}$$

(3) $a_n=b_n+3n+4=\boldsymbol{5\cdot3^{n-1}+3n+4}$

125

(1) 与えられた漸化式の両辺を 3^{n+1} でわると，
$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$\therefore\ \boldsymbol{b_{n+1}=b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

(2) $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ より，

$\{b_n\}$ の階差数列の一般項は，$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

よって，$n\geqq2$ のとき，
$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$=\frac{a_1}{3}+\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}$$
$$=1+\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$
これは，$n=1$ のときも成立．

(3) $a_n=3^nb_n=3^n\left\{\frac{5}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$
$$=\boldsymbol{5\cdot3^{n-1}-2^n}$$

126

(1) 与式より $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{3-a_n}$ ……①

また，$\dfrac{1}{a_n-2}=b_n$ より，$a_n=2+\dfrac{1}{b_n}$

よって，①に代入すると，

$$2+\frac{1}{b_{n+1}}=1+\frac{1}{1-\frac{1}{b_n}}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_n-1}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_{n+1}=b_n-1}$$

(2)　$b_{n+1}-b_n=-1$ より $\{b_n\}$ は初項 -1，公差 -1 の等差数列である．

よって，$b_n=-1-(n-1)=\boldsymbol{-n}$

(3)　$\dfrac{1}{a_n-2}=-n$ より

$$a_n=2+\frac{1}{-n}=\boldsymbol{\frac{2n-1}{n}}$$

127

(1)　(i)　$T_n=S_n+\alpha n+\beta$ とおき，与式に代入すると

$T_{n+1}-\alpha(n+1)-\beta-3(T_n-\alpha n-\beta)$
$=n+1$

$\therefore\quad T_{n+1}-3T_n+(2\alpha-1)n-\alpha+2\beta-1$
$=0$

ここで $2\alpha-1=0$，$-\alpha+2\beta-1=0$ をみたす α，β を考えると，

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=\frac{3}{4}$$

そこで $T_n=S_n+\dfrac{1}{2}n+\dfrac{3}{4}$ と定めると

$$T_{n+1}=3T_n$$

$$\therefore\quad T_n=\left(S_1+\frac{1}{2}\cdot1+\frac{3}{4}\right)\cdot3^{n-1}$$

$$=\frac{9}{4}\cdot3^{n-1}$$

よって，

$$S_n=T_n-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)}$$

(ii)　$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\cdot3^n-\frac{1}{2}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

(2)　(i)　$n\geqq2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$$

であるから $na_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$

よって，$n\neq1$ だから

$$\boldsymbol{a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}}\quad(n\geqq2)$$

(ii)　$b_n=na_n$ とすると，(i)より

$b_n=b_{n-1}=\cdots=b_1=1\cdot a_1=1$

$$\therefore\quad a_n=\boldsymbol{\frac{1}{n}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

128

(1)　$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$

より $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$

与えられた漸化式と係数を比較して，

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$$

$\therefore\quad (\alpha,\ \beta)=\boldsymbol{(1,\ 2),\ (2,\ 1)}$

(2)　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ として

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

$\therefore\quad a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)2^{n-1}=2^{n-1}$

$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}=1+\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=\boldsymbol{2^{n-1}}$$

これは，$n=1$ のときも成立．

129

(1)　$a_{n+1}+pb_{n+1}$

$=(2a_n+3b_n)+p(a_n+4b_n)$

$=(2+p)a_n+(3+4p)b_n$　　……①

より，数列 $\{a_n+pb_n\}$ が等比数列になるためには，

$1:p=(2+p):(3+4p)$

$p(2+p)=3+4p$

$p^2-2p-3=0$

$(p-3)(p+1)=0$

$\therefore\quad \boldsymbol{p=3,\ -1}$

(2)　$p=3$ のとき，①は

$a_{n+1}+3b_{n+1}=5a_n+15b_n$

$\therefore\quad a_{n+1}+3b_{n+1}=5(a_n+3b_n)$

ここで $c_n=a_n+3b_n$ とおくと，

$c_{n+1}=5c_n$

$c_1=a_1+3b_1=2+3\cdot1=5$ より

数列 $\{c_n\}$ は初項 5，公比 5 の等比数列である．

よって，$c_n=5\cdot5^{n-1}=5^n$

$\therefore\quad a_n+3b_n=5^n \qquad \cdots\cdots②$

また，$p=-1$ のとき，①は

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

ここで，$d_n=a_n-b_n$ とおくと

$d_{n+1}=d_n$

$d_1=a_1-b_1=2-1=1$ より，数列 $\{d_n\}$ は初項 1，公比 1 の等比数列である．

よって，$d_n=1$

$\therefore\quad a_n-b_n=1 \qquad \cdots\cdots③$

②−③ より　$b_n=\dfrac{\mathbf{5^n-1}}{\mathbf{4}}$

③より　$a_n=1+b_n=\dfrac{\mathbf{5^n+3}}{\mathbf{4}}$

130

(1)　第 $(n-1)$ 群の最後の数は，最初から数えて

$1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$（番目）

よって，第 n 群の最初の数は，

$\dfrac{n(n-1)}{2}+1=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\boldsymbol{n^2-n+2})$

(2)　第 n 群は，初項 $\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)$，公差 1，項数 n の等差数列だから，その和は，

$\dfrac{1}{2}n\{(n^2-n+2)+(n-1)\cdot1\}$

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{n(n^2+1)}$

(3)　100 は第 n 群に含まれているとすると

$\dfrac{1}{2}(n^2-n+2)\leqq100$

$<\dfrac{1}{2}\{(n+1)^2-(n+1)+2\}$

これをみたす n は 14 であるから**第 14 群**にあり，最初の数は 92 であるから **9 番目**になる．

131

(1)　n が 2^{n-1} 個あるので，総和は

$n\times2^{n-1}=\boldsymbol{n\cdot2^{n-1}}$

(2)　100 項目が第 n 群にあるとすると，第 $(n-1)$ 群の最後の数は

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=\dfrac{1-2^{n-1}}{1-2}=2^{n-1}-1$

（項目）であるから

$2^{n-1}-1<100\leqq2^n-1$ が成りたつ．

$n=7$ のとき

$2^{n-1}-1=2^6-1=63$

$2^n-1=2^7-1=127$

よって，求める n は 7 だから，第 100 項は第 7 群にあるので，**7** である．

(3)　(2)より第 100 項は，第 7 群の $100-63=37$（番目）である．和は，

$1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+5\cdot2^4+6\cdot2^5$

$+7\cdot37=\mathbf{580}$

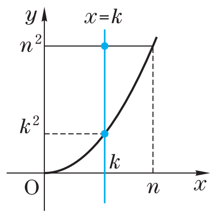
132

(1)　M 内の格子点のうち，直線 $x=k$ $(1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点は，

$(k,\ k^2)$，

$(k,\ k^2+1)$，

$\cdots$，$(k,\ n^2)$．



よって，$\boldsymbol{(n^2-k^2+1)}$ **個**ある．

(2)　求める格子点の個数は

$2\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)+(n^2+1) \qquad \cdots\cdots①$

ここで，$S=\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)$ とおくと

$S=(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n(n^2+1)-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore$ ①$=2n(n^2+1)$

$$-\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)+(n^2+1)$$

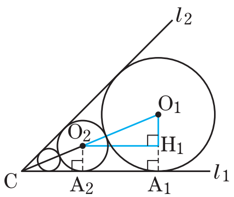
$$=(2n+1)(n^2+1)-\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{1}{3}(2n+1)\{(3n^2+3)-(n^2+n)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2-n+3)}$$

133

(1)



$O_1C=\sqrt{CA_1^2+O_1A_1^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$

であり，図から，$\triangle CA_1O_1 \backsim \triangle O_2H_1O_1$

より

$$CO_1 : O_1A_1=O_2O_1 : O_1H_1$$

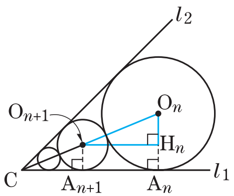
よって，

$$13 : 5=(r_2+5) : (5-r_2)$$

$\therefore$ $5(r_2+5)=13(5-r_2)$

$\therefore$ $r_2=\boldsymbol{\frac{20}{9}}$

(2)



(1)と同様に，$\triangle CA_1O_1 \backsim O_{n+1}H_nO_n$

より，$CO_1 : O_1A_1=O_{n+1}O_n : O_nH_n$

よって，

$$13 : 5=(r_n+r_{n+1}) : (r_n-r_{n+1})$$

$\therefore$ $5(r_n+r_{n+1})=13(r_n-r_{n+1})$

$\therefore$ $\boldsymbol{r_{n+1}=\frac{4}{9}r_n}$

(3) (2)より $\{r_n\}$ は，初項 5，公比 $\frac{4}{9}$ の等比数列．

$\therefore$ $r_n=\boldsymbol{5\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}$

134

(1) (a_1 について) カード 1 枚の色のぬり方は 3 通りなので $a_1=\boldsymbol{3}$

(a_2 について) カード 2 枚それぞれの色のぬり方は 3 通りなので，

$3^2=9$ (通り) のぬり方がある．

このうち，赤赤の 1 通りは条件に反する．

よって，$a_2=9-1=\boldsymbol{8}$

(2) $(n+2)$ 枚のカードの色のぬり方を，1 枚目のカードの色で場合分けして考える．

① 1 枚目が赤のとき，2 枚目のぬり方は青，黄の 2 通り．残り n 枚のぬり方は 3 色使えるので a_n 通り．

よって，ぬり方は $2a_n$ 通り．

② 1 枚目が青のとき，残りの $(n+1)$ 枚のぬり方は，3 色使えるので a_{n+1} 通り．

③ 1 枚目が黄のとき，②と同様に a_{n+1} 通り．

①，②，③は排反なので

$\therefore$ $\boldsymbol{a_{n+2}=2a_{n+1}+2a_n}$

(3) $a_8=2a_7+2a_6=2(2a_6+2a_5)+2a_6$

$=6a_6+4a_5=6(2a_5+2a_4)+4a_5$

$=16a_5+12a_4=16(2a_4+2a_3)+12a_4$

$=44a_4+32a_3=44(2a_3+2a_2)+32a_3$

$=120a_3+88a_2=120(2a_2+2a_1)+88a_2$

$=328a_2+240a_1$

$=328\times8+240\times3=\boldsymbol{3344}$

135

(1) (p_1 について)

1 回目に 4 以下の目が出ればよいので

$$p_1=\frac{4}{6}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(p_2 について)
次の 2 つの場合が考えられる.
① 1 回目が 4 以下の目で 1 進み
2 回目が 5 以上の目でさらに 2 進む場合
② 1 回目が 5 以上の目で 2 進み
2 回目が 4 以下の目でさらに 1 進む場合
①, ②は排反だから

$$p_2=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

(2) サイコロを $(n+1)$ 回投げたとき, 点Pの座標が奇数になるのは, 次の 2 つの場合が考えられる.
① サイコロを n 回投げたとき, 点Pの座標が奇数で $(n+1)$ 回目に 5 以上の目が出る
② サイコロを n 回投げたとき, 点Pの座標が偶数で $(n+1)$ 回目に 4 以下の目が出る
①, ②は排反だから

$$p_{n+1}=p_n\times\frac{1}{3}+(1-p_n)\times\frac{2}{3}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}}$$

(3) $p_{n+1}=-\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{2}{3}$ より

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって, $p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n}$$

136

(1) $a_1=b$, $a_2=\dfrac{b^2}{b+1}$, $a_3=\dfrac{b^3}{b^2+b+1}$

より, $\boldsymbol{a_n=\dfrac{b^n(b-1)}{b^n-1}}$ と推定できる.

(2) $n=1$ のとき成立.

$n=k$ のとき, $a_k=\dfrac{b^k(b-1)}{b^k-1}$ と仮定すると,

$$a_{k+1}=\frac{ba_k}{a_k+1}=\frac{b^{k+1}\cdot\dfrac{b-1}{b^k-1}}{\dfrac{b^k(b-1)}{b^k-1}+1}$$

$$=\frac{b^{k+1}(b-1)}{b^{k+1}-b^k+b^k-1}=\frac{b^{k+1}(b-1)}{b^{k+1}-1}$$

よって, $n=k+1$ でも成立.

$$\therefore\quad a_n=\frac{b^n(b-1)}{b^n-1}$$

137

(1) $n=1$ のとき, 左辺$=\dfrac{1}{1\cdot2}=\dfrac{1}{2}$,

右辺$=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ となり成立.

$n=k$ のとき, 与式が成立すると仮定すると,

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}\quad\cdots\cdots①$$

①の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}$ を加えて,

$$左辺=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$右辺=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

となり, これは与式の n に $k+1$ を代入したものである.
よって, $n=k+1$ のときも成立するので, すべての自然数 n で成立.

(2) $n=1$ のとき, 左辺$=\dfrac{1}{1^2}=1$,

右辺$=2-\dfrac{1}{1}=1$ となり成立.

$n=k$ のとき, 与式が成立すると仮定すると,

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\leqq 2-\frac{1}{k} \quad \cdots\cdots②$$

②の両辺に，$\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えると，

$$左辺=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$右辺=2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$$

ここで，$\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left(2-\dfrac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}\right)$

$$=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\leqq 2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

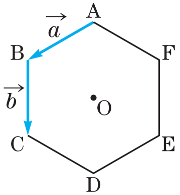
すなわち，

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\frac{1}{k+1}$$

となり $n=k+1$ のときも成立．

よって，すべての自然数 n に対して成立する．

138



(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{2\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BO}$

$=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{\vec{b}-\vec{a}}$

(4) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

$=(\vec{b}-\vec{a})+\vec{b}$

$=\boldsymbol{2\vec{b}-\vec{a}}$

139

(1) AE$=3$，DC$=$AD$=2$ だから，

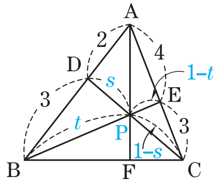
DF：FE$=$DC：AE$=$**2：3**

(∵ △AFE∽△CFD)

(2) $\overrightarrow{AF}=\dfrac{2\overrightarrow{AE}+3\overrightarrow{AD}}{3+2}$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{\frac{3}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}}$$

140



(1) BP：PE

$=t:(1-t)$

とすると

$\overrightarrow{AP}$

$=(1-t)\overrightarrow{AB}$

$+t\overrightarrow{AE}$

$=(1-t)\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}t\overrightarrow{AC}$ ……①

$\left(\because\quad \overrightarrow{AE}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}\right)$

DP：PC$=s:(1-s)$ とすると，

$\overrightarrow{AP}=(1-s)\overrightarrow{AD}+s\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{2(1-s)}{5}\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$ ……②

$\left(\because\quad \overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ だから，

①，②より

$1-t=\dfrac{2(1-s)}{5}$，$\dfrac{4}{7}t=s$

$\therefore\quad t=\dfrac{7}{9}$，$s=\dfrac{4}{9}$

よって，$\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}}$

(2) $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AP}$ とおけて，(1)より，

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$

F は BC 上より $\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$

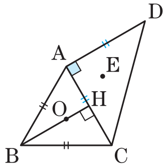
$\therefore\quad k=\dfrac{3}{2}$

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ となり，

BF：FC$=\dfrac{2}{3}:\dfrac{1}{3}=$**2：1**

141

Bから辺ACに下ろした垂線の足をHとすると，



$\mathrm{BH}:\mathrm{AD}$
$=\mathrm{BH}:\mathrm{AB}$
$=\sqrt{3}:2$
であり，$\mathrm{BH}/\!/\mathrm{AD}$
より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$

ここで，Oは△ABCの重心でもあるので，

$\mathrm{BO}:\mathrm{OH}=2:1$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{BH}}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$=\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})$

$=\frac{1}{3}\{\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}})\}$

$(\because\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0})$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

142

(1) $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

$=(5+4+9,\ 4-6-15)$

$=\boldsymbol{(18,\ -17)}$

(2) $m\vec{a}+n\vec{b}$

$=(5m-2n,\ 4m+3n)=(3,\ -5)$

より，$\begin{cases}5m-2n=3\\4m+3n=-5\end{cases}$

$\therefore\ m=\boldsymbol{-\frac{1}{23}},\ n=\boldsymbol{-\frac{37}{23}}$

143

$\vec{a}+\vec{b}=(2+x,\ -\sqrt{5}+3)$，
$\vec{a}-\vec{b}=(2-x,\ -\sqrt{5}-3)$

$\therefore\ (2+x)(-\sqrt{5}-3)$
$\quad-(-\sqrt{5}+3)(2-x)=0$

$\therefore\ -12-2\sqrt{5}\,x=0$

よって，$x=-\frac{6}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\frac{6\sqrt{5}}{5}}$

144

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(5,\ 3)$ ……①
$\vec{a}-3\vec{b}=(-7,\ 7)$ ……②

①×3+② より，$4\vec{a}=(8,\ 16)$

$\therefore\ \vec{a}=\boldsymbol{(2,\ 4)}$

①より，
$\vec{b}=(5,\ 3)-\vec{a}=\boldsymbol{(3,\ -1)}$

(2) $\vec{a}-2\vec{b}=(2-6,\ 4+2)=(-4,\ 6)$
より，
$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+6^2}=\boldsymbol{2\sqrt{13}}$

(3) $\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{|\vec{a}-2\vec{b}|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{13}},\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$=\boldsymbol{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13},\ \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)}$

145

$|\vec{u}|^2$
$=(2\cos\theta+3\sin\theta)^2+(\cos\theta+4\sin\theta)^2$
$=5\cos^2\theta+20\sin\theta\cos\theta+25\sin^2\theta$
$=10\sin2\theta-20\cos^2\theta+25$
$=10\sin2\theta-10\cos2\theta+15$
$=10\sqrt{2}\sin(2\theta-45^\circ)+15$
$-45^\circ\leqq2\theta-45^\circ\leqq315^\circ$ だから
$2\theta-45^\circ=90^\circ$，すなわち，$\theta=\boldsymbol{67.5^\circ}$ のとき $|\vec{u}|$ の
最大値$=\sqrt{10\sqrt{2}+15}=\sqrt{5(\sqrt{2}+1)^2}$
$=\boldsymbol{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

146

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を二等分するベクトルの1つは $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

これを $\vec{c}$ とおくと，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=13$ であるから，

$\vec{c}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

$=\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)+\left(\frac{5}{13},\ \frac{12}{13}\right)=\left(\frac{64}{65},\ \frac{112}{65}\right)$

ここで，$|\vec{c}|=\dfrac{16\sqrt{65}}{65}$ より

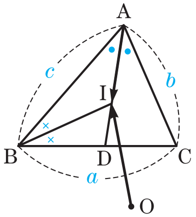
$$\vec{e}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\left(\boldsymbol{\frac{4}{\sqrt{65}}},\ \boldsymbol{\frac{7}{\sqrt{65}}}\right)$$

147

(1)　BD：DC$=c:b$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

(2)　AI：ID
＝BA：BD
であり，ここで，



$$\mathrm{BD}=\frac{c}{b+c}\mathrm{BC}$$
$$=\frac{ca}{b+c}$$

∴　$\mathrm{AI}:\mathrm{ID}=c:\dfrac{ca}{b+c}=\boldsymbol{(b+c):a}$

(3)　(2)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$$

(4)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{a+b+c}\{b(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+c(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\}$$
$$=\boldsymbol{\frac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}}$$

148

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+5(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

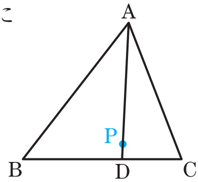
∴　$-9\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+5\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{0}$

∴　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}$

(2)　Dは直線 AP 上にあるので，
$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{5}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，DはBC上にあるので



$$\frac{k}{3}+\frac{5}{9}k=1$$

∴　$k=\dfrac{9}{8}$

∴　AP：PD$=\boldsymbol{8:1}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より

BD：DC$=\boldsymbol{5:3}$

(3)　$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{8}{9}\triangle\mathrm{DAB}=\dfrac{8}{9}\times\dfrac{5}{8}\triangle\mathrm{ABC}$

$$=\frac{5}{9}\triangle\mathrm{ABC}$$

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{1}{9}\triangle\mathrm{ABC}$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{8}{9}\triangle\mathrm{DCA}=\frac{8}{9}\times\frac{3}{8}\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{3}{9}\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，
△PAB：△PBC：△PCA$=\boldsymbol{5:1:3}$

149

(1)　$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=36+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=52$

∴　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boldsymbol{3}$

(2)　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{3\cdot2}=\dfrac{1}{2}$

より，$\theta=\boldsymbol{60^\circ}$

150

$|\vec{a}|=t$ $(t>0)$ とおくと

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ=\frac{t}{2}$$

また，
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=t^2-1$

次に，

$$\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2+t+1\\|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=t^2-t+1\end{cases}$$

より，
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|\cos60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}}{2}$$

$\therefore\quad 2(t^2-1)=\sqrt{(t^2+t+1)(t^2-t+1)}$

ここで，右辺>0 だから，

$t>1\quad (\because\quad t>0)$

両辺を 2 乗し，整理すると，

$t^4-3t^2+1=0\qquad \therefore\quad t^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$t>1$ より，

$$t=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{4}}$$

$\therefore\quad |\vec{a}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$

151

(1) $|x\vec{a}+\vec{b}|^2=x^2|\vec{a}|^2+2x(\vec{a}\cdot\vec{b})+|\vec{b}|^2$

$\qquad=\boldsymbol{2x^2+12x+20}$

(2) (1)より $|x\vec{a}+\vec{b}|^2=2(x+3)^2+2$

よって，$\boldsymbol{x=-3}$ のとき，$|x\vec{a}+\vec{b}|$ は**最小値 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$** をとる．

152

$\vec{a}+t\vec{b}=(3t+1,\ -t+2)$,

$\vec{a}-\vec{b}=(-2,\ 3)$ であるから

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

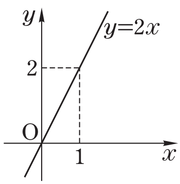
より $-2(3t+1)+3(-t+2)=0$

$\therefore\quad t=\boldsymbol{\dfrac{4}{9}}$

153

(1) $y=2x$ 上に点 P(1, 2) があるので，$\overrightarrow{OP}=(1,\ 2)$

$|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{5}$ だから



$\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$

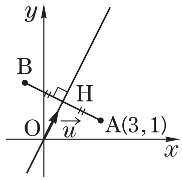
$=\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)}$

(2) $\overrightarrow{OH}$

$=\left(\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\vec{u}$

$=\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\vec{u}$

$=\boldsymbol{\sqrt{5}\,\vec{u}}$



(3) Hは線分 AB の中点だから

$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

$\therefore\quad \overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}$

$=2\sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)-(3,\ 1)$

$=(2,\ 4)-(3,\ 1)=(-1,\ 3)$

よって，$\mathbf{B(-1,\ 3)}$

154

直線上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると

$(x,\ y)=(2,\ 1)+t(1,\ 2)$

$\qquad=(t+2,\ 2t+1)$

$\therefore\quad \begin{cases}\boldsymbol{x=t+2}\\ \boldsymbol{y=2t+1}\end{cases}$

$\therefore\quad \boldsymbol{y=2x-3}$

155

(1) $\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{CO}=\vec{0}$ より，

$(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})-3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\therefore\quad \vec{a}+2\vec{b}-6\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

よって，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{1+2}\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{b}}$

(3) (1)，(2)より，$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{6}\vec{a}$,

ここで $|\vec{a}|=12$ であることと，

$|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}|=\dfrac{1}{6}|\vec{a}|$ であることより

$|\overrightarrow{DC}|=2$

よって，**Cは点Dを中心とする半径 2 の円周上を動く．**

156

$\alpha=1-2\beta$ より，

$\overrightarrow{OP}=(1-2\beta)\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$

$\quad=\overrightarrow{OA}+\beta(\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OA})$

∴　$(x,\ y)=(2-6\beta,\ 4-4\beta)$

∴　$\begin{cases} x=2-6\beta \\ y=4-4\beta \end{cases}$　　∴　$\boldsymbol{2x-3y+8=0}$

(別解)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+2\beta\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$(\alpha+2\beta=1)$ だからPは，$(2,\ 4)$，$(-1,\ 2)$ を通る直線上を動く．

∴　$2x-3y+8=0$

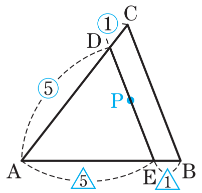
157

(1)　①より　$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CP})+2(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP})-3\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CB}$

∴　$6\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CB}$

∴　$\overrightarrow{CP}=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2-k}{6}\overrightarrow{CB}}$

(2)　AC，AB を 5：1 に内分する点をそれぞれ，D，E とすると，(1)よりPは直線 DE 上にあるので，



△ABC の周，および内部にあるためには，線分 DE 上になければいけない．

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{CB}$ より　$0\leqq\dfrac{2-k}{6}\leqq\dfrac{5}{6}$

∴　$\boldsymbol{-3\leqq k\leqq 2}$

158

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

∴　$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

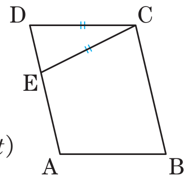
∴　$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$\quad=(2,\ a)-(1,\ 2)+(6,\ 3)$

$\quad=(7,\ a+1)$

よって，$\boldsymbol{D(7,\ a+1)}$

(2)　$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AD}$



とおくと，

$\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OD}$

$\quad=(2-2t,\ a-at)+(7t,\ at+t)$

$\quad=(2+5t,\ t+a)$

∴　$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}$

$\quad=(5t-4,\ t+a-3)$

よって，

$|\overrightarrow{CE}|^2=(5t-4)^2+(t+a-3)^2$

$\quad=26t^2+2(a-23)t+(a-3)^2+16$

$\quad=26t^2+2(a-23)t+a^2-6a+25$

また，

$|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2=1+(a-2)^2$

$\quad=a^2-4a+5$

$|\overrightarrow{CE}|^2=|\overrightarrow{CD}|^2$ だから，

$26t^2+2(a-23)t-2a+20=0$

∴　$13t^2+(a-23)t-(a-10)=0$

$(t-1)(13t+a-10)=0$

E≠D より，$t\neq 1$ だから　$t=\dfrac{10-a}{13}$

このとき，$3<a<10$ より，

$0<10-a<7$ だから

$0<t<\dfrac{7}{13}$

よって，E は AD の内分点で，

$\boldsymbol{E\left(\dfrac{76-5a}{13},\ \dfrac{10+12a}{13}\right)}$

(3)　$\triangle CDE=\dfrac{1}{4}$(四角形 ABCD)

であることよりEは AD の中点である．したがって，

$t=\dfrac{1}{2}$　　∴　$\dfrac{10-a}{13}=\dfrac{1}{2}$

∴　$a=\boldsymbol{\dfrac{7}{2}}$

159

$P(x,\ y,\ z)$ とおくと

$AP^2=\dfrac{5}{4}$ より，

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$

$\therefore\ \ 4x^2+4y^2+4z^2$
$\quad -8x-16y-16z+31=0$ ……①

$BP^2=\dfrac{5}{4}$ より,

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$

$\therefore\ \ 4x^2+4y^2+4z^2$
$\quad -24x-8y-16z+51=0$ ……②

$CP^2=\dfrac{5}{4}$ より,

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{5}{4}$$

$\therefore\ \ 4x^2+4y^2+4z^2$
$\quad -16x-8y-8z+19=0$ ……③

①−② より, $4x-2y=5$ ……④
③−② より, $x+z=4$ ……⑤

④, ⑤より, $y=2x-\dfrac{5}{2}$, $z=4-x$

②に代入して,
$x^2-4x+4=0$ $\quad\therefore\ (x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=\dfrac{3}{2},\ z=2$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=\left(\mathbf{2},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{2}\right)$

160

$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2$
$=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$
$=1+2+3+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$
$\quad +2|\vec{b}||\vec{c}|\cos 90^\circ+2|\vec{c}||\vec{a}|\cos 120^\circ$
$=6+\sqrt{2}+0-\sqrt{3}=6+\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{\mathbf{6}+\sqrt{\mathbf{2}}-\sqrt{\mathbf{3}}}$

161

$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 4,\ 2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,\ 1,\ -2)$
より
$|\overrightarrow{AB}|^2=(-2)^2+4^2+2^2=24$,
$|\overrightarrow{AC}|^2=(-2)^2+1^2+(-2)^2=9$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\cdot(-2)+4\cdot 1+2\cdot(-2)$
$\quad =4$

$\therefore\ \triangle ABC$
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$
$=\dfrac{1}{2}\sqrt{24\cdot 9-4^2}=\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}$

162

(1) $\begin{cases}\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE} & \cdots\cdots① \\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} & \cdots\cdots② \\ \overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB} & \cdots\cdots③\end{cases}$

①, ②より,
$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=(\mathbf{2},\ \mathbf{4},\ \mathbf{-5})$
①, ③より,
$2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BH}=(2,\ 4,\ 4)$
$\therefore\ \overrightarrow{AB}=(\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{2})$
②より,
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(\mathbf{2},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{0})$

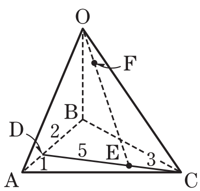
(2) (ア) $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ だから
$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})\cdot\overrightarrow{AB}$
$\quad =\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
($\because\ \angle BAD=\angle BAE=90^\circ$)
よって, $\angle BAH=90^\circ$

(イ) (ア)より, △ABP が二等辺三角形となるのは AB=AP のときだから,
$AB=\sqrt{1+4+4}=3$
$AP=|t|AH$
$\quad =|t|\sqrt{AD^2+AE^2}$
$\quad =|t|\sqrt{5+45}=\sqrt{50}\,|t|$
$\therefore\ \sqrt{50}\,|t|=3$

よって, $t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{50}}=\pm\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{2}}}$

163

(1) $\overrightarrow{OE}$
$=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OD}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OC}$
に,
$\overrightarrow{OD}$
$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$
を代入して,



$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\mathbf{\frac{1}{8}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\mathbf{\frac{5}{8}}\overrightarrow{\mathbf{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

$=\mathbf{\frac{1}{16}}\overrightarrow{\mathbf{OA}}+\mathbf{\frac{1}{32}}\overrightarrow{\mathbf{OB}}+\mathbf{\frac{5}{32}}\overrightarrow{\mathbf{OC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=k\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

∴　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$+\frac{k}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{5}{32}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$=\left(1-\frac{15}{16}k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{k}{32}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{5}{32}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は平面 OBC 上のベクトルだから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の係数$=0$

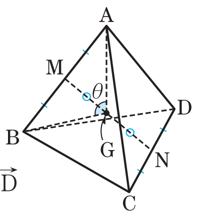
ゆえに，$1-\frac{15}{16}k=0$ より，$k=\frac{16}{15}$

∴　$\mathrm{AG}:\mathrm{FG}=\mathbf{16:1}$

164

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AN}}$



に，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,

$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

を代入して，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

∴　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

$=-\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}-\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\mathbf{\frac{3}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AB}}-\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AC}}-\mathbf{\frac{1}{4}}\overrightarrow{\mathbf{AD}}$

(2)　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=2$,

$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{DAB}=60^\circ$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2\cdot2\cos60^\circ=2$

∴　$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2$

$=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$

$+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})$

$=\frac{1}{16}\times24=\frac{3}{2}$

∴　$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2$

$=\frac{1}{16}\{9|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$

$-6\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-6\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\}$

$=\frac{1}{16}\times24=\frac{3}{2}$

∴　$|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ より，両辺を 2 乗すると，

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{GB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GA}}+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2$

∴　$4=\frac{3}{2}-2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\frac{3}{2}$

∴　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=-\mathbf{\frac{1}{2}}$

(3)　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{GA}}||\overrightarrow{\mathrm{GB}}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\mathbf{\frac{1}{3}}$

165

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

∴　$4-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4=1$

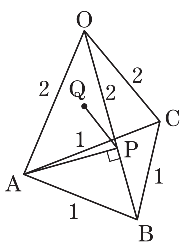
よって，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\mathbf{\frac{7}{2}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{b}$

とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=k\vec{b}-\vec{a}$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{b}=0$ だから，

$(k\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{b}=0$

∴　$k|\vec{b}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって，$k=\frac{7}{8}$

$\therefore\quad \overrightarrow{OP}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\vec{\boldsymbol{b}}$

(3)　4 点 O，A，C，Q は同一平面上にあるので $\overrightarrow{OQ}=s\vec{a}+t\vec{c}$ とおける．

$\therefore\quad \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{c}-\dfrac{7}{8}\vec{b}$

$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{a}$，$\overrightarrow{PQ}\perp\vec{c}$ だから

$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{c}=0$

$$\therefore\quad \begin{cases} s|\vec{a}|^2+t\vec{c}\cdot\vec{a}-\dfrac{7}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \\ s\vec{c}\cdot\vec{a}+t|\vec{c}|^2-\dfrac{7}{8}\vec{b}\cdot\vec{c}=0 \end{cases}$$

$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=4$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{7}{2}$

だから，これらを上式に代入して

$$\begin{cases} 4s+\dfrac{7}{2}t-\dfrac{49}{16}=0 \\ \dfrac{7}{2}s+4t-\dfrac{49}{16}=0 \end{cases}$$

$\therefore\quad s=t=\dfrac{49}{120}$

よって，$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\mathbf{49}}{\mathbf{120}}(\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{c}})$

166

(1)　$OA=2$，

$OB=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$AB=\sqrt{(2-1)^2+(0-\sqrt{3})^2}=2$

よって，$OA=OB=AB$ なので

△OAB は正三角形である．

(2)　C から△OAB に下ろした垂線の足を H とすると

△CHO

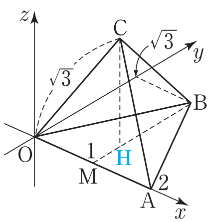
≡△CHA

≡△CHB

だから，

$HO=HA=HB$

である．よって，H は△OAB の外心であり，正三角形の外心と重心は一致するので重心でもある．



$\therefore\quad H\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$

$\therefore\quad c_1=\mathbf{1}，\ c_2=\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$

また，△CHO において三平方の定理より，$M(1,\ 0,\ 0)$ として

$CH^2=OC^2-OH^2=3-(OM^2+HM^2)$

$=3-\left\{1+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}=\dfrac{5}{3}$

$\therefore\quad c_3=CH=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{15}}}{\mathbf{3}}$

167

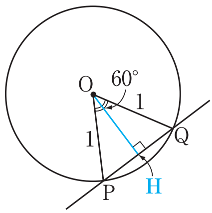
(1)　$\angle POQ=60^\circ$ から，

$\angle POH=30^\circ$

よって，

$OH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}OP$

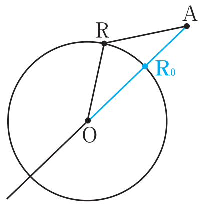
$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\therefore\quad \dfrac{\sqrt{6}}{3}(a-1)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\quad a=\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}}$

(2)　線分 PQ の長さが最大になるのは，これが球の直径のときだから O と H が一致するとき．



$\therefore\quad a=1$

次に，$A(1,\ 1,\ 1)$ より，$OA=\sqrt{3}>1$

よって，A は球面 C の外部にある．

ゆえに，AR が最小になるとき，R は，線分 OA と球面 C の交点．

よって，

$\overrightarrow{OR_0}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OA}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\therefore\quad \mathbf{R_0}\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right)$