第7章　平面ベクトル

君たちが中学校の理科の授業で目にした‘矢線’↗を数学的に洗練させたものを「ベクトル」といいます．ベクトルは初め物理学者によって利用され，測地学者によって数学的に研究されました．数学者がベクトルの研究に本格的に乗り出したのはそれからかなり後の時代になってからのことです．

16 世紀の終り頃から，イタリアのレオナルド・ダ・ヴィンチ（Leonardo da Vinci，1452〜1519）やガリレオ・ガリレイ（Galileo Galilei，1564〜1642），その他の物理学者が力を直感的に表すために矢線 ↗ を利用し始め，彼らは既に「力の平行四辺形の法則」を知っていました．18 世紀末にデンマークの測地学者ウェッセル（Caspar Wessel，1745〜1818）は，測量技術の仕事を軽減する目的で複素数を研究し，平面ベクトルの計算を今日の教科書に述べられているものとほとんど同じように述べています．残念なことに彼の研究はデンマーク語で書かれたために，丸々 100 年もの間注目されませんでした．19 世紀の初めにはフランスの数学者 L. カルノーがベクトルを用いた計算を行っています．1827 年，ドイツの数学者メビウスはその著書『重心の計算』でカルノーの考え方を体系化しています．スイスの数学者アルガンは 1806 年に『幾何学的作図における虚数量の表示法試論』を書き，ベクトルを幾何や代数や力学のさまざまな問題を解決するのに用いています．

ベクトル研究のその後の発展も複素数と関連していました．神童の誉れ高いイギリスの数学者ハミルトン（William Rowan Hamilton，1808〜1865）は 1853 年の『四元数についての講義』の中で“ベクトル”の用語を初めて採用し，ベクトル代数とベクトル解析の基礎を与えています．彼とは独立にドイツの数学者グラスマン（Hermann Güenther Grassmann，1809〜1877）もベクトルの概念に到達し，1844 年の著書『長さについての研究』でベクトル計算の基

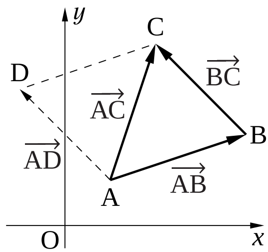
礎を説明しています．その中で，2 次元の平面と 3 次元空間の理論を特別な場合として含む「n 次元ユークリッド空間」についての研究が初めて説明されています．

ベクトルの基礎理論の確立に伴い，ベクトル計算は自然科学にますます採用されていきました．電磁場理論の創始者マックスウェル（James Clerk Maxwell，1831〜1879，イギリス）はその著『電気と磁気の研究』においてベクトル計算を体系的に適用しました．ベクトル計算に今日の形を与えたのは化学的熱力学と統計力学の創始者ギッブス（Josiah Willard Gibbs，1839〜1903，アメリカ）で，彼は 1881〜1884 年の著書『ベクトル解析の基礎』にグラスマンの考えを適用しました．19 世紀の終りにはベクトルは数学の独立した分野になるほど発展を遂げました．

§7.1 矢線からベクトルへ

7.1.1 矢線とその和

物の移動や力・速度などを表すのに **矢線** ↗ を用いると雰囲気がよく出ますね．これらの矢線 ↗ を数学的に統一して扱うことを試みましょう．



サッカーの試合で，位置 A の N 君はボールを位置 B の Y 君にパスしました．物体が運動によって位置を変えること，またはその変化を表す量を **変位** といいます．この用語を用いると，ボールは位置 A から位置 B に変位し，この変位を矢線 $\overrightarrow{AB}$ で表して，変位 $\overrightarrow{AB}$ といいましょう．変位にはその始めの位置と終りの位置があるので，変位を表す矢線 $\overrightarrow{AB}$ の A をその **始点**，B を **終点** といいます．

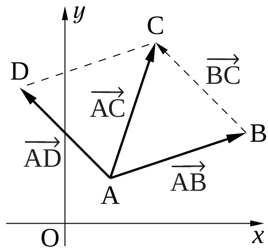
さて，位置 B の Y 君はボールをすかさず位置 C の I 君にパスしました．この変位は変位 $\overrightarrow{BC}$ です．結果として，ボールは始めの位置 A から位置 C に変位したことになり，これを変位 $\overrightarrow{AC}$ としましょう．ここで，変位は，その途中の経路に無関係で，その始点と終点のみによって決まる量としましょう．すると，変位 $\overrightarrow{AC}$ は変位 $\overrightarrow{AB}$ と変位 $\overrightarrow{BC}$ の合成，つまり変位の和であり，このこ

とを

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \tag{H}$$

と表しましょう．なお，図の D は，後の議論のために，四辺形 ABCD が平行四辺形になるようにとった点です．

ところで，位置 A の N 君は，ボールを蹴った直後に，相手方の選手 P と K から同時に押されました．彼らの力を表すには，力の大きさと方向の他に，**力が作用する点**が必要です．今の場合，力の作用点は位置 A なので，A から力を表す矢線を描き，その長さが力の大きさを，その方向が力の方向を表すことにしましょう．力の矢線はもちろん抽象的な平面上に描かれます．



選手 P の力を具体的に表すために，先ほどの変位の図の矢線 $\overrightarrow{AB}$ を借用しましょう．そのとき，力の作用点 A を明示するには，選手 P の力を力 $\overrightarrow{AB}$ と表し，‘ 矢線の始点 A に作用点 A を対応させる ’ と便利です．ただし，‘ 矢線の終点 B は抽象的な平面上の点 ’ で，Y 君の位置 B とは無関係です．同様に，選手 K の力は，矢線 $\overrightarrow{AD}$ を借用して，力 $\overrightarrow{AD}$ と表示しましょう．点 D は，力の矢線を描いた抽象的な平面上で，四辺形 ABCD が平行四辺形になるようにとった点とします．

ここで，力 $\overrightarrow{AB}$ と力 $\overrightarrow{AD}$ の和，つまり合力は，「力の平行四辺形の法則」と呼ばれる実験事実によって，矢線 $\overrightarrow{AC}$ で表される 1 つの力 $\overrightarrow{AC}$ が働くことに等しいことが知られています（3 人綱引きのことを思い出しましょう）．つまり，二人の選手 P と K が押した力の合力は一人の仮想的な選手が押した力 $\overrightarrow{AC}$ によって完全に表されるということです．このことを

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \tag{F}$$

で表しましょう．

変位や力に対して矢線の表現を同一の形式にしたのは，変位であれ力であれ，矢線の演算を統一的に扱おうという理由からです．表式 (H) と表式 (F) のどちらも，矢線という数学的観点で見てみると，矢線 $\overrightarrow{AC}$ を 2 つの矢線の和で表しています．表式 (F) を仮に変位の式と考えると，変位 $\overrightarrow{AB}$ に引き続いて変位 $\overrightarrow{AD}$ を行うと変位 $\overrightarrow{AC}$ になるという意味不明なものになります．また，表式 (H) : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ を仮に力の式と考えると，力 $\overrightarrow{AB}$ と力 $\overrightarrow{BC}$ を加えると力

$\overrightarrow{AC}$ になるという意味になりますが，これらの力の作用点は異なる位置 A，B と解釈されるので，それらの合力は力 $\overrightarrow{AC}$ にはなりません．よって，変位については表式 (H) が正しいのであって表式 (F) は誤りであり，また，力については表式 (F) が正しく，表式 (H) で代用することはできません．このことは，2 つの矢線 $\overrightarrow{BC}$ と矢線 $\overrightarrow{AD}$ は共に同じ長さと向きをもつが，それらの始点の位置が異なることに起因しています．

7.1.2　ベクトルの導入

矢線の始点を問題にする限り，変位や力の和については表式 (H) と (F) のどちらか一方しか成り立ちません．(H) : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ と (F) : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ で異なる部分は $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{AD}$ です．それらは始点は異なりますが，大きさと向きは一致しています．そこで，仮に矢線の始点は適当に考えるとして，大きさと向きが一致するものは同じものであると見なしてみましょう．つまり

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

と考えてしまうわけです．すると変位については表式 (F) は表式 (H) のことであると解釈でき，表式 (F) も正当化できます．力についてはどうでしょうか．物体の運動は‘物体の重心の運動’と‘重心の周りの回転運動’に分けることができます（2 つの重りを棒でつないで回転させ，その落下を考えてみましょう）．重心の運動については，全ての力が重心に働いたとして合力を求め，その合力も重心に働くとした場合に，その重心運動が正しく記述できることが知られています．よって，力の場合には重心の運動を考えているとして，その作用点は全て重心だと見なして $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ を認めれば，表式 (H) も正当化できます．

そこで，矢線の始点は無視することにして，矢線の長さと向きのみを考え，それを矢線の類似物として，**ベクトル** と呼ぶことにしましょう．例えば，矢線 $\overrightarrow{BC}$ の長さと向きのみを考えてベクトル $\overrightarrow{BC}$ というわけです[1]．すると，$\overrightarrow{BC}$ と

[1] 記号 $\overrightarrow{BC}$ そのものには 2 重の意味をもたせていることに注意しましょう．つまり，$\overrightarrow{BC}$ を矢線 $\overrightarrow{BC}$ といえばそれは（始点と終点がある）矢線であり，ベクトル $\overrightarrow{BC}$ といえばそれはベクトルです．変位や力についても，それらをベクトルとして扱うときは，変位のベクトル・力のベクトルと考えます．

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をベクトルと見なす場合には，両者は長さと向きが一致するので同じものになり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

が成立します．この等式は両辺のベクトルが変位のベクトルであっても力のベクトルであっても成立し，その結果 (H) と (F) をベクトルの表式と見なした場合にはそれらは同じことを表します．つまり，変位を考えているときは (F) を (H) と見直し，力を考えているときは (H) を (F) と見直すことができるわけです．このように考えると，矢線を用いて表される量を統一的に扱うことができますね.

長さと向きのみをもつベクトルなる量を考えたわけですが，それが実体のない幽霊みたいなものでは困るので，いったいどんな存在なのか考えてみましょう．1 つの矢線を考えてそれを平行移動するとわかるように，始点は異なっても大きさと向きは一致する矢線は無数に存在します．そこで，平行移動によって互いに重なり合う全ての‘矢線の集合’を考えたとすると，その集合にはもはや位置を考えることはできません．そこで，同じ長さと向きをもつ矢線の集合をベクトルと考えればよいわけです．したがって，ベクトルは‘矢線の集合に対する呼び名’であると見なすことができます．こう考えると，上の等式 $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は，‘矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と長さと向きが同じな矢線の集合は矢線 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と長さと向きが同じな矢線の集合に一致する’ことを意味し，等号が成り立つのは当然といえます.

そのような集合については，多くの例が，身近な所においても見いだせます．例えば，自然数を考えたとき，偶数は $2, 4, 6, \cdots$ の集合を，奇数は $1, 3, 5, \cdots$ の集合を表しますね（偶数＋奇数＝奇数 などの和も定義できます）．日曜日も，ワールドカップ・サッカーの代表も，日本人だって集合を表す言葉ですね．というわけで，ベクトルは集合を表すありふれた存在の 1 つと考えられます.

一般に，集合の要素のある性質に着目し，それと同じ性質をもつ要素の集合をその要素が属する「同値類」といい，そのとき元の集合は各同値類によって完全に分類されます（例えば，自然数は偶数と奇数に分類されますね）．同じ同値類に属する要素は‘同値である’といわれます．例えば，合同関係 $2 \equiv 4 \pmod 2$ は，自然数 2 と 4 が共に偶数であるという意味で，同値であることを

表しています.

矢線の集合についていえば，矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の長さと向きのみに着目して得られた同値類は $[\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,]$ と表され，これがベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の正しい表現になります．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は同値類 $[\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,]$ を矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で代表した同値類の表現というわけです.

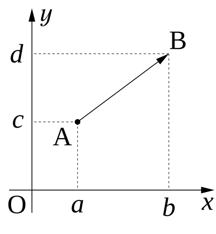
最後に，ベクトルの抽象的な定義とその記号について述べておきましょう．今まで，ベクトルを考えるのに矢線[2)]から出発しましたね．ここでいったん矢線を忘れて，‘ 長さと向きのみの性質をもつ量 ’ を（抽象的に）ベクトルと（新たに）定義して，それを $\vec{a}$ などの（始点や終点の位置とは無関係であることを強調する）記号で表しましょう．すると，ベクトル $\vec{a}$ は矢線の同値類と同じものであり，その同値類で表されることになります．例えば，ベクトル $\vec{a}$ を矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の同値類とすると，$\vec{a} = [\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,]$ と表すのが正しい表現ですが，同値類 $[\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,]$ を矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で代表して

$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

と簡略するのが普通です.

なお，矢線 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の始点 B，終点 C を，実用上，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の始点，終点ということがあります．ベクトルを矢線で表すときはそのベクトルの同値類に属する適当な矢線を選んで描くことになります.

7.1.3　ベクトルの成分表示



矢線 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を表現してみましょう．それは座標を持ち込めば意外に簡単にできます．2 点 A$(a,\ c)$，B$(b,\ d)$ をとると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さと向きは，点 A から点 B までの移動を表す場合と同様に，2 点 A，B の x，y 座標の差 $b-a$，$d-c$ を用いて，例えば，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$$

2) 矢線は数学用語「有向線分」に当たります．ただし，有向線分はその長さと向きだけを考えたとき，それをベクトルという場合があります．その場合，有向線分は矢線とベクトルの 2 重の意味をもつことになります．そんな紛らわしさを避けて，このテキストではその用語を使わないことにしました.

または,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b - a,\ d - c)$$

のように表現できます．このような表現をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の **成分表示** といい，$b - a$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の **x 成分**，$d - c$ を **y 成分** といいます．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示が矢線 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の位置によらないことは，差 $b - a$, $d - c$ の値が p, q のとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (p,\ q)$$

と表されるので明らかでしょう．ベクトルは，長さと向きという 2 つの性質を表すために，ベクトルの表現を 1 つの実数で表すことは不可能です．したがって，必然的に，平面上の点の表現に 1 組の数を用いるのと似たものになります．

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ は数の組を縦に並べた形のベクトルなので「列ベクトル」とか「縦ベクトル」といい，一方 $(p,\ q)$ は横に並べた形なので「行ベクトル」とか「横ベクトル」といい，それらを総称して **数ベクトル** といいます．一方，最初に議論した，矢線から出発して座標に無関係に定義したベクトルは **幾何ベクトル** と呼ばれます．

列ベクトルは行列の章で習う「行列」と関連づける際に便利なので，以後，我々はベクトルの成分表示を列ベクトルで統一しましょう．

ベクトル $\vec{a}$ の長さ（大きさ）は，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ のとき，矢線 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さを，つまり線分 AB の長さを意味し，数式を用いると

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\right|, \quad \text{よって} \quad \left|\vec{a}\right| = \mathrm{AB} = \sqrt{p^2 + q^2}$$

と定められます．

2 つのベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ が等しいことは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の長さと向きが一致することですから，それらの成分表示の各成分が一致すること，つまり，$p = r$ かつ $q = s$ が成り立つことと同じです：

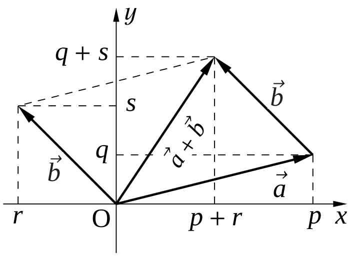
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{のとき,} \quad \vec{a} = \vec{b} \iff p = r,\ q = s\,.$$

§7.2　ベクトルの演算

矢線を用いた場合のベクトルの和については既に議論しました．ここではベクトルの成分表示を利用してベクトルの和・差・実数倍などの演算を議論しましょう．

7.2.1　ベクトルの和

ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ のとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を表す矢線の位置は自由なので，両者の始点を原点 O にとると終点の座標は $(p,\ q)$, $(r,\ s)$ です．よって，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和は，平行四辺形の法則または変位の和に合致するように，



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + r \\ q + s \end{pmatrix},$$

よって，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} p + r \\ q + s \end{pmatrix}$$

と定めるべきことがわかります[3)]．さらにベクトル $\vec{c} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ を加えたときには

$$(\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \begin{pmatrix} p + r \\ q + s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + r + s \\ q + s + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r + s \\ s + t \end{pmatrix}$$

が成り立ちますね．また，$\begin{pmatrix} p + r \\ q + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + p \\ s + q \end{pmatrix}$ などの性質も成り立ちます．

3) ベクトルが複素数の研究と共に発展したことは，複素数の和を見れば，ある程度納得できるでしょう．2 つの複素数を $p + qi$, $r + si$（$i^2 = -1$; p, q, r, s は実数）とすると，

$$(p + qi\,) + (r + si\,) = (p + r) + (q + s)i$$

です．複素数と平面ベクトルの関係については，ベクトルの公理系のところでさらに議論しましょう．

したがって，ベクトルの和についての基本法則

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \qquad \text{（交換法則）}$$

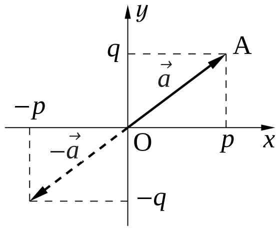
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{（結合法則）}$$

が成り立つことは明らかでしょう．

7.2.2　ベクトルの差

実数の差 $a-b$ は和 $a+(-b)$ によって定義されましたね．ベクトルの差も同様にして定義されます．

ベクトル $\vec{a}$ と大きさ（長さ）が等しく，向きが反対のベクトルを $-\vec{a}$ で表し，$\vec{a}$ の **逆ベクトル** といいます．よって，ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ のとき，

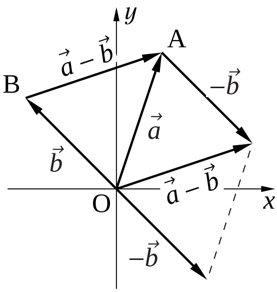


$$-\vec{a}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}=-\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p\\-q\end{pmatrix}.$$

$$\text{よって}\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\quad\text{のとき}\quad -\vec{a}=\begin{pmatrix}-p\\-q\end{pmatrix}$$

となります．

ベクトル $\vec{a}$ とベクトル $\vec{b}$ の差 $\vec{a}-\vec{b}$ を和 $\vec{a}+(-\vec{b})$ によって定義しましょう．これらのベクトルを $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ とすると，



$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

だから

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-b\\-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}.$$

したがって，

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}\quad\text{のとき}\quad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a-b\\c-d\end{pmatrix}$$

となります．よって，差のベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ は，ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$（を表す矢線）の始点が一致するように描いたとき，‘ $\vec{b}$ の終点から $\vec{a}$ の終点に向かう矢線の表すベクトル ’ になりますね.

特に，ベクトル $\vec{a}=\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ のときは

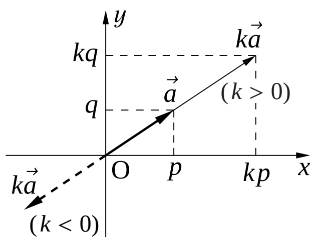
$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となり，始点と終点が一致した長さが 0 のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ が現れます．これは実数でいえば 0 に当たるので，**零**(れい)**ベクトル**（または **ゼロベクトル**）と呼び，$\vec{0}$ で表します．零ベクトル $\vec{0}$ については向きは考えません.

7.2.3　ベクトルの実数倍

ベクトルの積については，ベクトルに実数を掛ける場合とベクトルにベクトルを掛ける場合が考えられます．ここでは前者の場合を議論しましょう.

ベクトル $\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ のとき，ベクトル $\vec{a}$ に実数 k を掛けた $k\vec{a}$ は，$k>0$ のときは $\vec{a}$ を k 倍に伸縮したもの，$k<0$ のときは反対向きに $|k|$ 倍に伸縮したものと考えます．このとき，$k\vec{a}$ は $\vec{a}$ の x，y 成分を k 倍したものなので



$$\vec{a}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\quad のとき\quad k\vec{a}=k\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kp\\kq\end{pmatrix}$$

（k は実数）と定めましょう．特に $k=0$ のときは，$0\vec{a}=\vec{0}$ です.

ベクトルの実数倍については，次の基本性質が成り立ちますね：

$$\begin{aligned} k(l\vec{a})&=(kl)\vec{a},\\ (k+l)\vec{a}&=k\vec{a}+l\vec{a},\\ k(\vec{a}+\vec{b})&=k\vec{a}+k\vec{b} \qquad (k,\ l\ は実数). \end{aligned}$$

証明は君たちに任せますが，矢線を用いても成分表示を用いても構いません.

長さが 1 のベクトルを **単位ベクトル** といいます．ベクトル $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルは $\vec{a}$ をその長さ $|\vec{a}|$ で割ったものですね：

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}.$$

零ベクトル $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が，同じ向きまたは反対向きのとき，ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ は‘平行である’といい，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ と表します．$\vec{a} \parallel \vec{b}$ は，$\vec{0}$ でない $\vec{a}, \vec{b}$ に対して，$\vec{a} = k\vec{b}$ を満たす実数 $k\ (\neq 0)$ が存在することを意味します．

$\vec{a} \parallel \vec{b}$ を成分表示で表すと，$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ のとき，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow a : c = b : d \Leftrightarrow ad - bc = 0,$$

したがって，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ が平行 } \Rightarrow\ ad - bc = 0$$

が成り立ちます．条件 $ad - bc = 0$ は $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ の場合を含むことに注意しましょう．なお，平行でないときは，$\vec{a} = k\vec{b}$ を満たす実数 $k\ (\neq 0)$ は存在せず，

$$\vec{a} \nparallel \vec{b}\ \Leftrightarrow\ ad - bc \neq 0$$

となります．

7.2.4　幾何ベクトルと数ベクトル

成分表示を考えず，矢線との関連だけで議論するベクトルを幾何ベクトルといいましたね．我々は幾何ベクトルから出発し，その中でベクトルの相等・和・差・実数倍を定義し，それをベクトルの成分表示，つまり数ベクトルの表現に翻訳してベクトル演算の基本法則を導きました．高校の多くの教科書ではそのような進め方をしています．

ところで，幾何ベクトルだけを用いて‘完結した理論体系’，つまり「公理系」を構成することができます（ユークリッド幾何は座標に無関係なことを思

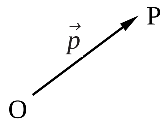
い出すとよいでしょう）．一方，数ベクトルだけを用いても幾何ベクトルと同等の公理系を導くことができます．その意味で幾何ベクトルと数ベクトルは本来は別物と見なされています（ユークリッド幾何とデカルトの解析幾何の違いのようなものと考えるとわかりやすいでしょう）．実際，数ベクトルをベクトルの定義として出発し，ベクトルの相等・和・差・実数倍を成分表示によって定義したとしましょう．すると，成分表示に矢線を対応させて幾何ベクトルを導くことができます．

ベクトルのイメージとしては幾何ベクトルのほうが優れていますが，扱いやすさや一般化のしやすさを考慮すると，数ベクトルをベクトルの定義として出発するのもすっきりした方法と思われます．したがって，このテキストでは，矢線はベクトルのイメージと考え，それから成分表示を導いた段階で，数ベクトルを改めてベクトルの定義と見なすことにしましょう．そのほうが君たちにとっても，証明の労力が軽減できるでしょう．なお，ベクトルの公理系についての議論は空間ベクトルの章で行います．

§7.3　位置ベクトルの基本

図形の方程式は点の座標を用いて表されます．ベクトルを用いて図形の方程式を表すことはできないものでしょうか．そのためには，‘ ベクトルを点のように扱う ’ 必要があります．

7.3.1　位置ベクトル



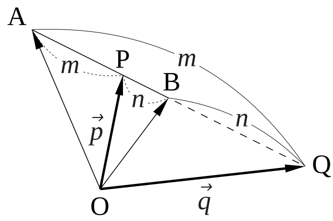
ベクトルは，長さと向きしか考えないので，平面上の点を直接表すことはできません．しかしながら，原点を O として，任意のベクトル $\vec{p}$ に対してベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}$$

を考えると，点 P の位置はベクトル $\vec{p}$ によってただ 1 つ定まり，逆に，点 P に対して $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となるベクトル $\vec{p}$ はただ 1 つ定まります．このように原点を始点とする矢線が表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を考えると，点 P とベクトル $\vec{p}$ が 1 : 1 に対応します．この $\vec{p}$ を点 P の **位置ベクトル** と名づけましょう．

7.3.2　内分点・外分点

既に §§ 5.1.4 で求めた内分点・外分点の公式を，ベクトルを用いて，もう一度導いてみましょう.



線分 AB を $m:n$ の比に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\begin{aligned}\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}),\end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad \vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + n\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m+n}$$

と表されます．特に，線分 AB の中点 M については

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

ですね.

同様に，線分 AB を $m:n$ の比に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は

$$\begin{aligned}\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m-n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}),\end{aligned}$$

$$\text{よって}\quad \vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} - n\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{m-n} \qquad \text{（ただし，} m \neq n\text{）}$$

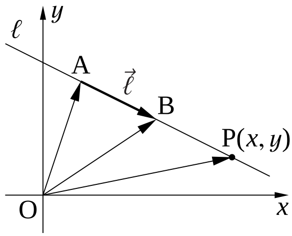
と表されます.

7.3.3　直線のベクトル方程式

既に §§ 5.1.3.4 で学んだ直線のパラメータ表示と同値なベクトルで表された方程式を導きましょう.

動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は等速度で直線 ℓ 上を動き，時刻 $t = 0$ で点 A を，時刻 $t = 1$ で点 B を通過しました．位置ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて時刻 t における点 P

の位置を表しましょう．$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので



$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\end{aligned}$$

となりますね．この等式は，3 点 A，B，P が同一直線上にある条件，つまり点 $(x,\ y)$ が直線 ℓ 上にあるための条件を表し，$-\infty < t < \infty$ の間に点 $(x,\ y)$ は直線 ℓ 上の全ての点を通過します．よって，この等式は直線 ℓ を表す方程式になります．このとき，動点 P の速度を表すベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は直線 ℓ の方向を表すので，それを直線 ℓ の **方向ベクトル** と呼び，記号 $\vec{\ell}$ で表しましょう．よって，直線 ℓ の方程式は

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{\ell}$$

となります．これを直線 ℓ の「ベクトル方程式」といいます．

直線 ℓ の方程式を具体的に表すために，通る 1 点を $\mathrm{A}(x_0,\ y_0)$ とし，方向ベクトルを $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$（つまり，傾きが $\dfrac{b}{a}$）とすると

$$\ell : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と表されます．これを $x,\ y$ 成分に分けて表すと，連立方程式の形

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

に表され，直線 ℓ のパラメータ表示になります．t がパラメータ（媒介変数）です．

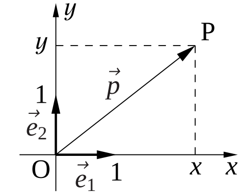
これからパラメータ t を消去すると，各時刻 t における x と y の直接の関係を表す式，つまり直線の方程式

$$\ell : bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0$$

が得られます．

§7.4　ベクトルの 1 次独立と 1 次結合

7.4.1　基本ベクトル



任意の位置ベクトル $\vec{p}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

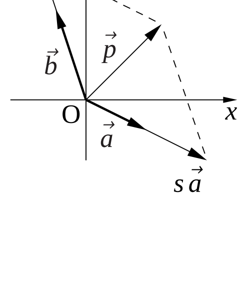
が成り立ちますから, 2 つのベクトル $\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を用いて,

$$\vec{p}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2} \qquad \text{（1 次結合表示①）}$$

と表すことができます．$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ は，共に長さが 1 でそれぞれ x 軸，y 軸の正の方向を向くベクトルであり，**基本ベクトル** と呼ばれます．

$x\vec{e_1}+y\vec{e_2}$（x, y は実数）の形のベクトルを，ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の **1 次結合**（または **線形結合**）といいます．上の 1 次結合表示 ① において，実数 x, y を定めるとベクトル $\vec{p}$ がただ 1 つ定まり，逆に $\vec{p}$（の長さと向き）を定めると実数 x, y の組がただ 1 通りに定まりますね．このことを，ベクトル $\vec{p}$ の 1 次結合表示 ① は“ ただ 1 通りである ”といいましょう．このことは，一般に，2 つのベクトルの 1 次結合を用いて任意のベクトルを表す可能性を示唆しています．

7.4.2　ベクトルの 1 次結合



$\vec{a}$, $\vec{b}$ を与えられた $\vec{0}$ でないベクトルとしましょう．$\vec{a}$, $\vec{b}$ の 1 次結合を用いて, 任意のベクトル $\vec{p}$ をただ 1 通りに表すことができるかどうか調べてみましょう．

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b} \quad (s,\ t \text{ は実数}) \qquad \text{（1 次結合表示②）}$$

において，s, t を定めると $\vec{p}$ がただ 1 つ定まることはベクトルの和の定義から明らかですね．逆に，$\vec{p}$

を任意に定めたとき，s, t はただ 1 通りに定まるのでしょうか．その答はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ がどのように与えられた（定められた）かによります．

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でない場合は，$\vec{p}$ を定めると，平行四辺形の法則から，ベクトル $s\vec{a}$, $t\vec{b}$ が，つまり s, t がただ 1 通りに定まりますね．$\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行になる場合，つまり $\vec{b} = k\vec{a}$ の場合はどうでしょうか．この場合は $s\vec{a} + t\vec{b} = (s + tk)\vec{a}$ となり，一般に $\vec{p}$ は $\vec{a}$ と異なる方向なので，$\vec{p}$ を定めたとき 1 次結合表示 ② を満たす s, t はありませんね[4]．

以上のことから，「$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ で $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の場合に限り，任意のベクトル $\vec{p}$ は，2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の 1 次結合の形 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ に，ただ 1 通りに表される」ことがわかりました．この定理はベクトルの幅広い応用をもたらしますが，それは追々理解されるでしょう．

7.4.3　ベクトルの 1 次独立と空間の次元

上の定理に現れた $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の条件を一般化してみましょう．まず，1 次結合の式を利用して $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対する条件

$$s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow s = t = 0 \qquad \text{(1 次独立 } V^2\text{)}$$

を考えましょう．$\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ の場合や，$\vec{a} \parallel \vec{b}$ の場合には $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ を満たす 0 でない s, t がいくらでもあります．しかし，$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ の場合にはそれ

4) 式を用いて示すときは，成分表示を用いて $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ などと表しておきます．

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa + tb \\ sc + td \end{pmatrix}$$

より，連立方程式 $as + bt = p$, $cs + dt = q$ が得られ，これを解いて，

$$s = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \quad t = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

となります．これがただ 1 組の解をもつ条件は，

$$ad - bc \neq 0$$

ですね．$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ なので，この条件は $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ および $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ の 3 条件を意味します．

を満たす解は $s=t=0$ のみですね．よって，（1 次独立 V^2）の条件は $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ を表し，これを満たすベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は **1 次独立** または **線形独立** であるといわれます．

これから直ちに得られる定理は，$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ のとき，

$$p\vec{a}+q\vec{b}=p'\vec{a}+q'\vec{b} \Rightarrow p=p',\ q=q'$$

が成り立つことです．それを確かめるのは簡単な練習問題です．

次に，3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ について，条件

$$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}=\vec{0} \Rightarrow s=t=u=0 \qquad \text{（1 次独立 } V^3\text{）}$$

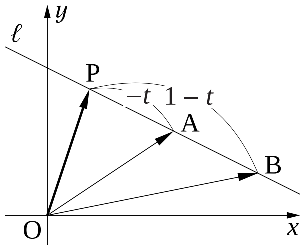
を考えてみましょう．今の場合，3 つのベクトルがどれも $\vec{0}$ でなく，どの 2 つも平行でなくとも，2 つのベクトルの 1 次結合を用いて残りのベクトルを表すことができ，例えば，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ です．このとき $s=t=u=0$ 以外の解がありますね．よって，この条件は意味がありませんね．平面のベクトルを考えている限りは．

$\vec{a} \not\parallel \vec{b}$，かつ，$\vec{c}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に直交する場合を考えてみましょう．そんなベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は同一平面上に描けませんね．しかしながら，3 本の鉛筆をベクトルに見立ててみればわかるように，空間上には描けます．そこで，これらのベクトルを空間のベクトルとしたときには，（1 次独立 V^3）の条件は意味があり，それを満たすベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は「1 次独立」であるといいます．そして，1 次独立な 3 つのベクトルの 1 次結合を用いて，空間上の任意のベクトルをただ 1 通りに表すことができます（空間ベクトルのところで示しましょう）．このように 1 次独立なベクトルの個数は「空間の次元」と密接に関連しています．平面を「2 次元空間」，我々が住む空間を「3 次元空間」というのはその理由からです．その意味において，数学的には，4 次元空間，5 次元空間，$\cdots$，一般に，n 次元空間が存在します．

§7.5　ベクトルと図形（I）

ベクトルを用いて，図形の解析にとりかかりましょう．ベクトルがその威力を発揮し始めるのはこの辺りからです．

7.5.1　直線の分点表示



2 点 A，B を通る直線 ℓ のベクトル方程式は，直線上の点を P$(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$t$ は実数）として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

でしたね．この式が内分点・外分点の式と同じであることを示しましょう：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{t + (1-t)}.$$

この式は，§§ 7.3.2 の内分点・外分点の公式と比較すると，点 P$(x,\ y)$ が線分 AB を，$0 \leqq t \leqq 1$ のとき $t : 1-t$ の比に内分し，$t > 1$ または $t < 0$ のときは $|t| : |1-t|$ の比に外分することを表していますね．実は，ちょっと考えれば，大して驚くことではなく

直線の方程式＝ 2 定点と点 $(x,\ y)$ が同一直線上にあるための条件式
＝点 $(x,\ y)$ が 2 定点を結ぶ線分の内分点または外分点

ということでした．

今の議論によると，内分点と外分点を分けて考える必要はなく，また，比を正に制限しないほうが都合がよいようです．そこで，内分点や外分点をまとめて **分点** と呼び，t を実数としておいて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

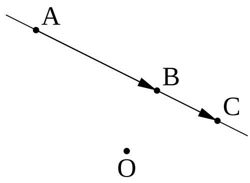
と表したとき，P を線分 AB を ‘ $t : 1-t$ の比に分ける分点 ’ ということにしましょう．

なお，上の方程式で，$0 \leqq t \leqq 1$ と制限したとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

は線分 AB の方程式を表します．

7.5.2　直線上の 3 点



3 点 A，B，C が同一直線上にあるための最も簡単な条件を求めてみましょう．点 C が線分 AB を $t : 1-t$（t は実数）の比に分けるとすると

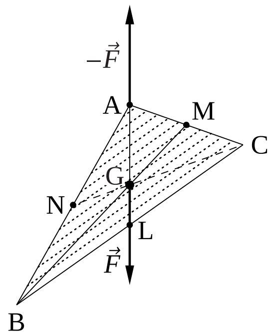
$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

を満たす実数 t が存在します．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ を満たす実数 } t \text{ が存在する}$$

ことが 3 点 A，B，C が同一直線上にあるための条件です．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の始点が一致することに注意しましょう．

7.5.3　三角形の重心

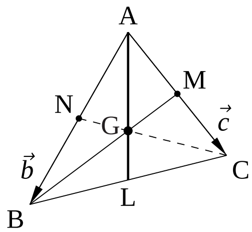


まず，均質な厚紙で△ABC を作ってちょっとした実験をしてみましょう．△ABC のあちこちに小さな穴を開け，片方の端を玉結びした糸を穴に通して吊り上げます．どの穴に通して吊り上げても糸が作る鉛直線は△ABC の‘ど真ん中’の 1 点を通ることに注意しましょう．図は頂点 A で吊り上げた場合で，鉛直線は図の直線 AL になります．頂点 B で吊り上げたときは鉛直線は BM になり，問題の 1 点は 2 直線 BM と AL の交点 G で，それは **重心** と呼ばれます．重心 G に糸を通してそっと吊り上げると，他の場合と違って，△ABC は水平に上がってきますね．

重力の働きを考えて，重心 G の意味を調べてみましょう．重力は△ABC の全ての部分に働きます．各部分に働く重力の総和の合力は，△ABC を吊り上げる力（図の $-\vec{F}$）と釣り合っているので，図の下向きの力 $\vec{F}$ で表されます．どの点で吊り上げても $\vec{F}$ は鉛直線上にあり，また重心 G も必ずその線上にあるので，△ABC に働く総重力 $\vec{F}$ の作用点は重心 G であると断定できます．し

たがって，その 1 点 G に△ABC の全ての重さ（正確には質量）が集まって，それに重力が働くかのように考えてよいことになります．

重心 G の位置を求めましょう．図の点線で表されたように辺 BC に平行な直線で△ABC を‘ 極細の帯 ’に切り分けます．極細帯は実質的に長方形と見なせるので，各細帯の重心は明らかにその帯の中点で，そこにその細帯の重さが全て集まったと見なせます．よって，辺 BC の中点を L とすると，各細帯の重心は全て中線 AL 上にあり，重力の働きだけを考えたときには，△ABC は重さをもつ線分 AL と同一視できます．よって，△ABC の重心 G は中線 AL 上にあることがわかります．同様に線分 AC に平行な直線で△ABC を極細の帯に切り分けると，同様の議論によって，△ABC は重さをもつ中線 BM と同一視でき，重心 G は中線 BM 上にあります．よって，重心 G は 2 中線 AL と BM の交点であることがわかります．



重心 G を求める最後の仕上げには，△ABC のどの 2 辺も平行でないので，例えば，ベクトル $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が 1 次独立であることから導かれた定理を用います：

$$s\vec{b} + t\vec{c} = s'\vec{b} + t'\vec{c} \Leftrightarrow s = s' \text{　かつ　} t = t'.$$

さて，重心 G は中線 AL 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{AL}} = s\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}).$$

また，重心 G は中線 BM 上にあるので，G が線分 BM を $t : 1 - t$ の比に分ける点とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AM}} + (1 - t)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1 - t)\,\vec{b} + t\,\frac{\vec{c}}{2}.$$

両式を比較して，ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が 1 次独立であることから（係数を比較して）

$$\frac{s}{2} = 1 - t, \quad \frac{s}{2} = \frac{t}{2}.$$

これを解いて，$s = t = \dfrac{2}{3}$．したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AL}}.$$

つまり，重心 G は中線 AL を 2 : 1 の比に内分する点であることがわかります．

また，容易にわかるように，重心 G は中線 BM や中線 CN を 2 : 1 の比に内分する点でもあり，そこで 3 つの中線は交わります．

表式 $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AL}}$ は，適当なところに原点 O をとると，位置ベクトルを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OL}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

と表され，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ より，重心 G は

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

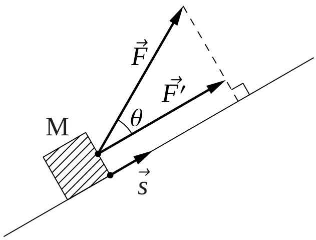
と表すことができます．この表式は，△ABC の重さを 3 頂点に $\dfrac{1}{3}$ ずつ均等に振り分けたと考えて，重心 G の位置を計算した場合に一致します．ただし，これは単なる偶然であって，四角形以上の場合では，重さを頂点に等分して重心を計算するのは誤りです．

§7.6　ベクトルの内積

7.6.1　力がなした仕事

物体に力を加えると物体は一般に動きますね．力を加えたのと同じ向きに物体が動いたとき，力の大きさと動いた距離の積，いわゆる（力）×（距離）を力が物体になした「仕事」といいます．この意味での仕事を，君たちは中学校の理科の授業で習ったことでしょう．仕事は重要な量です．何故かというと，それは物体の‘エネルギーの変化’を直接表すからです．

力を加えた方向と物体の動いた方向は，一般には，一致しません．例えば，右図は坂道で物体 M を力 $\vec{F}$ で引っ張ったときに，物体が変位 $\vec{s}$ だけ移動することを表しています．そこで，力 $\vec{F}$ のなす仕事（の量）W を考えるときに，力のベクトル $\vec{F}$ と変位のベクトル $\vec{s}$ に関するある‘一般化された積’を定義し，



それによって仕事 W を表したいと思うのはごく自然な発想です．そこで，そのような積を $\vec{F}\cdot\vec{s}$ と表して[5)]

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

が成り立つように，その積の正しい定義を考えましょう．

図の $\vec{F'}$ は，ベクトル $\vec{F}$ の $\vec{s}$ に平行（斜面に平行）な部分のベクトルで，$\vec{F}$ の $\vec{s}$ 方向への **正射影ベクトル** と呼ばれます．このとき，力 $\vec{F'}$ で引っ張ったときに物体 M の変位が $\vec{s}$ であれば，積 $\vec{F}\cdot\vec{s}$ は $\vec{F'}\cdot\vec{s}$ と同量の仕事になることを要請しましょう：

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \vec{F'}\cdot\vec{s}.$$

このとき，$\vec{F'} \mathbin{/\!/} \vec{s}$ だから，いわゆる（力）×（距離）は $\left|\vec{F'}\right|\times\left|\vec{s}\right|$ のことです．よって，$\vec{F}$ と $\vec{F'}$ のなす角[6)]が θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ)$ のときは $\left|\vec{F}\right|\cos\theta = \left|\vec{F'}\right|$ ですから，問題の積を

$$\vec{F}\cdot\vec{s} = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\theta$$

と定義すればよいことがわかります．この積はベクトル $\vec{F}$ と $\vec{s}$ の **内積** といわれます．

なお，$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のときは $\cos\theta < 0$ なので，$\vec{F}\cdot\vec{s} < 0$ となり，引っ張る力 $\vec{F}$ だけによる仕事は負になります（このようなことは，上側に引っ張ったのにもかかわらず（力が弱くて）物体がずり落ちる場合，つまり変位 $\vec{s}$ が坂の下向き方向になった場合に起こります）．しかし，この場合に内積を拡張しても仕事の理論に不都合はなく，理論は首尾一貫しています．したがって，以後は内積の角 θ を $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ としましょう．

7.6.2　内積の基本性質

前の §§ の議論によって，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，それらの内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

---

5) 積の記号は ・（ドット）を用います．記号 × を用いた積 $\vec{a}\times\vec{b}$ は空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の両者に直交するベクトルを表すために用意されています．

6) 2 つのベクトルが表す矢線の始点を一致させて描いたとき，矢線のなす角をベクトルのなす角といいます．

によって定義されました．両ベクトルが $\vec{0}$ でないとき，内積の値は $\cos\theta$ に比例するので，その値は角 θ が鋭角のとき正，直角のとき 0，鈍角のとき負になります．

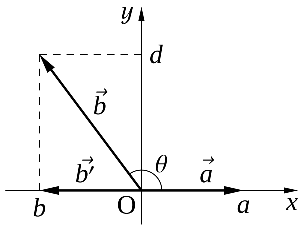
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ はベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が直交するか，少なくとも片方が $\vec{0}$ であることを意味します．

ベクトル $\vec{a}$ の自分自身との内積は $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$ です．よって，

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

が成り立ちます．なお，$\vec{a}\cdot\vec{a}$ を $\vec{a}^{\,2}$ と簡略表記することもあります．

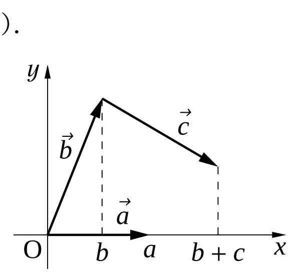
内積の定義より，明らかに $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（内積の交換法則）が成り立つことに注意しましょう．



内積は 2 つのベクトルの長さとなす角にのみ依存するので，両者の相対的位置関係を保ったまま移動して，片方のベクトルを x 軸に平行にしても内積の値は変わりません．よって，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ のとき，$\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルを $\vec{b'}$ とすると，

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\\ &= \vec{a}\cdot\vec{b'} = \pm\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b'}\right|\\ &= ab\end{aligned}$$

が成り立ち，内積は両ベクトルの x 成分の積で表されます（上式の ± で，$\vec{a}$ と $\vec{b'}$ が同じ向きのときは＋，反対向きのときは－です）．



内積についても分配法則

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

が成り立ちます．それを導きましょう．$\vec{a}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$，$\vec{c}=\begin{pmatrix}c\\e\end{pmatrix}$ とすると，

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c\\e\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b+c\\d+e\end{pmatrix}$$
$$= a(b+c) = ab+ac$$
$$= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

同様にして，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ も成り立ちます．

実数倍したベクトルの内積 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}$ について $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ が成り立つことは明らかでしょう．

以上の結果をまとめておきましょう：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b} \quad \text{または} \quad \vec{a}=\vec{0} \quad \text{または} \quad \vec{b}=\vec{0},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}, \qquad \text{（交換法則）}$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}, \quad (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \qquad \text{（分配法則）}$$
$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b}) \quad (k\ \text{は実数}).$$

7.6.3　内積の成分表示

基本ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の特徴は $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$，$\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$ ですから，

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 1, \quad \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 = 0$$

が成り立ちます．これらの性質と内積の分配法則を組み合わせると，任意のベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$ の内積を成分で表すことができます．

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \left(a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\left(b\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= ab+cd.$$

よって，

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab+cd$$

が成立して，内積が x 成分の積と y 成分の積の和で表されます．これはとても便利な公式で，2 つのベクトルが成分表示されていれば，$ab+cd$ の値からそれらのなす角の鋭角・直角・鈍角が容易にわかります．例えば，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が $\vec{0}$ でないとき，

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = ab+cd = 0$$

ですね．なお，今の場合，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であれば $ad-bc=0$ でしたね．

さらに，ベクトルが成分表示されているときには，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角の余弦 $\cos\theta$ は，内積の成分表示と内積の定義式 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を組み合わせて表すことができます：

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{ab+cd}{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}}\,.$$

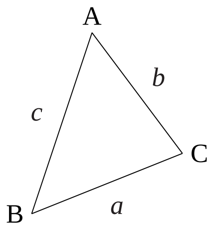
§7.7　ベクトルと図形（II）

ベクトルを図形の問題にさらに応用してみましょう．その中にはベクトルの 1 次結合を応用した「斜交座標」という理論的にも重要なものも含まれます．

7.7.1　余弦定理

ベクトル計算を用いると余弦定理が簡単に導かれます．$\triangle$ABC において

$$\mathrm{BC}^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$



などと，辺の長さが内積を用いて表されることに注意しましょう．上式に $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos A \\ \iff a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \end{aligned}$$

となって，確かに余弦定理が得られます．

なお，余弦定理を用いると内積を成分の積の和で定義できます[7]．

7.7.2　三角形の面積

内積を用いて△ABC の面積 S を求めましょう．

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sqrt{1-\cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{AC}^2-(\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}\,. \end{aligned}$$

これで三角形の面積を辺に対応するベクトルを用いて表すことができました．

さらに，ベクトルを成分表示して，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2} \\ &= \frac{1}{2}\,|\,ad-bc\,| \end{aligned}$$

と非常に簡単な式で表されます．$S = 0$ のとき $ad-bc=0$ となりますが，この条件は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じです．

---

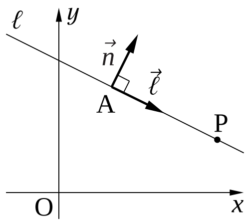
[7] ベクトルを成分表示で定義した場合は，ベクトル $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab+cd$ と，各成分の積の和で定義することになります．これを正当化するには，その内積の定義から内積の角表示 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$（$\theta$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）を導く必要があります．そのためには余弦定理が必要です．△ABC において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおいて，$ab+cd = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A$ を示せばよいでしょう．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = a^2+c^2 = \mathrm{AB}^2$，よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{AB}^2$ などが成り立ちます．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b-a \\ d-c \end{pmatrix}$ です．よって，余弦定理から

$$\begin{aligned} 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\mathrm{BC}^2 \\ &= a^2+c^2+b^2+d^2-(b-a)^2-(d-c)^2 \\ &= 2\,(ab+cd)\,. \end{aligned}$$

したがって，$ab+cd = \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A$，つまり $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos A$ が導かれます．

空間ベクトルにおいてもまったく同様の議論ができます．

7.7.3　直線の法線ベクトル



直線 ℓ を定めるには ℓ が通る 1 点 A と ℓ の方向ベクトル $\vec{\ell}$ を与えればよいですね．方向ベクトル $\vec{\ell}$ にはそれに直交するベクトル $\vec{n}$ があり，それを直線 ℓ の **法線ベクトル** といいます．よって，直線 ℓ はそれが通る 1 点 A と法線ベクトル $\vec{n}$ によって定めることもできます．このことを確かめてみましょう．

点 A の座標を $(x_0,\ y_0)$，法線ベクトル $\vec{n}$ を $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ としましょう．直線 ℓ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ は方向ベクトル $\vec{\ell}$ に平行なので，法線ベクトル $\vec{n}$ に直交します．よって

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$$

が成立します．これを成分で表すと

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{つまり} \quad a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) = 0$$

です．これは明らかに直線の方程式を表し，したがって，直線 ℓ の方程式は上式，または，

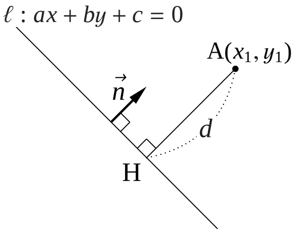
$$\ell : ax + by = ax_0 + by_0, \qquad \text{または，} \qquad \ell : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

などのように表すことができます．

7.7.4　点と直線の距離

点と直線の距離の公式は §§5.1.3.4 で苦労しながら求めましたね．ここではベクトルを用いてあっさりと導きましょう．その際，直線の法線ベクトル $\vec{n}$ が大きな役割を担います．

1 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ から直線 $\ell : ax + by + c = 0$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{H}(p,\ q)$ としたとき，点 A と直線 ℓ の距離 d は線分 AH の長さでしたね．導出のポイント



は, $d = \left|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right|$, $\overrightarrow{\mathrm{HA}} \parallel \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, および, 点 $\mathrm{H}(p,\ q)$ が直線 ℓ 上にある（つまり，$ap + bq + c = 0$ が満たされている）ことの 3 点です.

内積 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}}$ を 2 通りの方法で計算しましょう．$\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HA}}$ が同じ向きであるか，反対向きかに注意して

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} = \left|\vec{n}\right| \left|\overrightarrow{\mathrm{HA}}\right| (\pm 1) = \pm \sqrt{a^2 + b^2}\, d\,.$$

$$\text{また,}\quad \begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HA}} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - p \\ y_1 - q \end{pmatrix} \\ &= a\,(x_1 - p) + b\,(y_1 - q) = ax_1 + by_1 - (ap + bq) \\ &= ax_1 + by_1 - (-c)\,. \end{aligned}$$

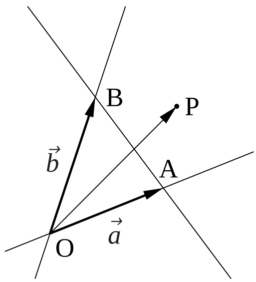
両者を比較して

$$\pm \sqrt{a^2 + b^2}\, d = ax_1 + by_1 + c, \qquad \text{よって,} \qquad d = \frac{|\,ax_1 + by_1 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

垂線の足 H の座標を求めないで AH の長さが得られ，確かに §§ 5.1.3.4 の結果に一致しましたね.

7.7.5　斜交座標

7.7.5.1　1 次結合と図形



△OAB と 1 点 P があり，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が 2 つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の 1 次結合で表されるとしましょう：

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}.$$

このとき，実数 x, y に条件をつけると，点 P はある図形上にあり，そのような図形を

1 次結合　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b}$　が表す図形

といいましょう[8]．例えば，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のとき図形は 1 点 P = O ですね．逆に，この 1 次結合がある図形を表すとき，実数 $x,\ y$ はある条件を満たすことになります．

1 次結合が以下に与える図形を表すとき，実数 $x,\ y$ が満たすべき条件を考えましょう．簡潔に表すために箇条書きにします．A)〜F) の上の段で問題の図形を述べ，下の段はその解説です．

A)　1 点 A：

P = A ということですから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 1\vec{a} + 0\vec{b}$．よって，$(x,\ y) = (1,\ 0)$ ですね．

B)　直線 OB：

点 P が直線 OB 上にある条件ですから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0\vec{a} + y\vec{b}$（$y$ は任意の実数）．よって，求める条件は $x = 0$ ですね．

C)　直線 AB：

P は線分 AB の内分点（外分点）になりますから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{b} + (1-t)\vec{a}$（$t$ は実数）と表されます．よって，$x = 1-t,\ y = t$ ですから，求める条件は，パラメータ t を消去して，$x + y = 1$ になります．もし $\vec{a},\ \vec{b}$ が特に基本ベクトル $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ ならば，この条件 $x + y = 1$ は 2 点 A(1, 0), B(0, 1) を通る直線の方程式 $y = -x + 1$ そのものですね．この点に留意しておくことは以下の議論の理解に決定的に重要です．

D)　線分 AB：

今度は P は線分 AB の内分点です．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\vec{b}+(1-t)\vec{a}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と表されるので, $x = 1-t,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq 1$．よって, 条件は $x+y = 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ です．この条件は $x + y = 1$ $(0 \leqq x,\ 0 \leqq y)$ と表すこともできます．

---

[8] ベクトル $\vec{a},\ \vec{b}$ が，特別な場合として，基本ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を含むことに注意しましょう．その場合，1 次結合は $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ となり，xy 座標平面上の点 $(x,\ y)$ を表す通常の位置ベクトルになります．

E)　半直線 OA，OB に挟まれた領域 $Q1$（境界を除く）：

1 次結合 $x\vec{a}+y\vec{b}$ を変位と見なして，点 P が原点 O から領域 $Q1$ の 1 点に移動すると考えてみましょう．まず，原点 O から変位 $x\vec{a}$ だけ直線 OA 上を移動しますが，それが点 A に向かう方向であるためには $x>0$．次に，そこから $y\vec{b}$ だけ移動しますが，この移動は直線 OB に平行な移動なので，点 P が領域 $Q1$ 上にある移動になるためには $y>0$．よって，求める条件は $x>0$, $y>0$ です．もし $\vec{a}$, $\vec{b}$ が特に基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ ならばこの領域は第 1 象限ですので，条件 $x>0$, $y>0$ は第 1 象限に対応する領域を表すと考えてよいでしょう．

F)　△OAB の内部：

まず，点 P が半直線 OA，OB に挟まれた領域 $Q1$ にあると考えて，条件 $x>0$，$y>0$ の下で考えます．次に，$x\vec{a}+y\vec{b}$ を変位と考えて，もし点 P が原点から線分 AB の内分点に移動したとしたら条件 $x+y=1$ が付加されますが，実際には，P は AB の内分点には届かず△OAB の内部にとどまるのだから，付加条件は $x+y<1$．したがって，求める条件は $x>0$，$y>0$，$x+y<1$ です[9]．この問題も，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が基本ベクトル $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ であるかのように考えて，△OAB の内部は，‘ 第 1 象限 ’ $x>0$, $y>0$ のうち，2 点 A，B を通る直線 $y=-x+1$ より下の領域 $y<-x+1$ と考えることができますね．

1 次独立なベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の 1 次結合 $x\vec{a}+y\vec{b}$ の性質は基本ベクトルの 1 次結合 $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ のものに似ていますね．この類似性は重要です．

---

[9] きちっと導出するには以下のようにします．点 P は線分 AB の内分点と原点を結ぶ線分上にあると考えると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\{t\vec{b}+(1-t)\vec{a}\}\quad(0<t<1,\ 0<k<1)$$

と表すことができます．よって，$x=k(1-t)$，$y=kt$．t を消去して $x+y=k$ が得られます．また，k を消去すると $(x+y)t=y$ です．ここで，$0<k=x+y<1$ だから $0<x+y<1$，また，$0<t=\dfrac{y}{x+y}<1$ より，$0<y<x+y$．これは $0<y$ かつ $y<x+y$ のことだから，$0<y$，$0<x$ を得ます．以上をまとめると，$x>0$, $y>0$, $x+y<1$ です．

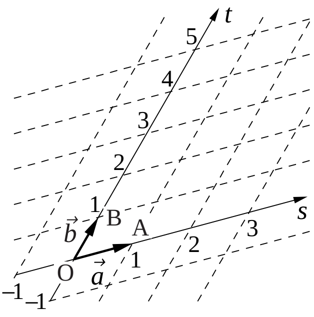
7.7.5.2　斜交座標

以上見てきたように，一般の 1 次結合 $x\vec{a}+y\vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$) と，その特別な場合の基本ベクトルの 1 次結合 $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ の間に，いくつかの類似点が見られました．1 次結合が位置ベクトルを表すとして，もう少し調べてみましょう．

任意の実数 p, q に対して $(x,\ y)=(p,\ q)$ のとき，1 次結合 $x\vec{a}+y\vec{b}$ は位置ベクトル $p\vec{a}+q\vec{b}$ に対応する点を表し，1 次結合 $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は点 $(p,\ q)$ を表します．

また，$x=p$（y は任意）のとき，$x\vec{a}+y\vec{b}$ は位置ベクトル $p\vec{a}$ が表す点を通り $\vec{b}$ に平行な直線を表し，$x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ は点 $(p,\ 0)$ を通り $\vec{e}_2$ に平行な直線，つまり，直線 $x=p$ を表します．

$y=q$（x は任意）のときは，$x\vec{a}+y\vec{b}$ は位置ベクトル $q\vec{b}$ が表す点を通り $\vec{a}$ に平行な直線を表し，また $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ は直線 $y=q$（点 $(0,\ q)$ を通り $\vec{e}_1$ に平行な直線）を表しますね．



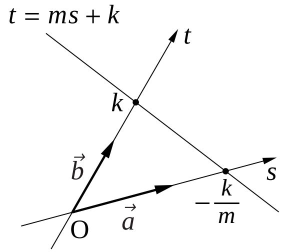
どうも一般の 1 次結合 $x\vec{a}+y\vec{b}$ はわかりにくいようです．何かよい方法を考えてみましょう．思い切って，xy 座標軸に対応する ‘ 斜めの座標軸 ’ を導入し，新しい座標軸方向の ‘ 長さの尺度を変更する ’ というのはどうでしょうか．位置ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に沿って新しい座標軸をとり，$\vec{a}$ 方向に長さの尺度を $\left|\vec{a}\right|=1$ となるようにとり，$\vec{b}$ 方向には $\left|\vec{b}\right|=1$ としてみましょう．このように，2 つの座標軸が斜めに交わる座標系の座標を「斜交座標」と呼びましょう．すると，点 A の斜交座標は $(1,\ 0)$，点 B は $(0,\ 1)$，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対応する点の斜交座標は $(1,1)$ とすることができ，1 次結合 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\vec{a}+y\vec{b}$ に対応する点 P の斜交座標は $(x,\ y)$ と表されます．

$p\vec{a}+q\vec{b}$ が斜交座標 $(p,\ q)$ を表すことになったので，位置ベクトルの表示 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ にならって，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の 1 次結合を

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表しましょう．変数 s, t を用いたのは，基本ベクトルの 1 次結合と区別するためと，x, y 座標系にならって，原点 O を通り方向ベクトル $\vec{a}$ の直線 $t = 0$ を‘ s 軸 ’，また O を通り方向ベクトル $\vec{b}$ の直線 $s = 0$ を‘ t 軸 ’というためです．直交する x, y 軸を定める座標系を **直交座標系** というのに対して，s, t 軸は直交せずに斜めに交わり，このような座標系を **斜交座標系** といいます．1 次結合 $s\vec{a} + t\vec{b}$ が表す位置ベクトルに対応する点の斜交座標を‘ 点 $(s,\ t)$ ’と呼びましょう．

直交座標系の直線の方程式 $y = mx + k$ に当たる，斜交座標系の方程式 $t = ms + k$ が直線を表すかどうか調べてみましょう．このとき，1 次結合が表す位置ベクトルは



$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= s\vec{a} + t\vec{b} = s\vec{a} + (ms + k)\vec{b} \\ &= k\vec{b} + s(\vec{a} + m\vec{b}) \end{aligned}$$

となるので，$k\vec{b}$ が表す点 $(0,\ k)$ を通り，方向ベクトルが $\vec{a} + m\vec{b}$ の直線を表します．また，s 軸との交点は，$(ms + k)\vec{b} = \vec{0}$ より，$(s,\ t) = (-\frac{k}{m},\ 0)$ です．直線 $y = mx + k$ も xy 座標系の 2 点 $(0,\ k)$，$(-\frac{k}{m},\ 0)$ を通りますね．したがって，$y = mx + k$ と $t = ms + k$ は直交座標系と斜交座標系の‘ 座標が同じ点 ’を通る直線になりますね．

斜交座標を理解するには，直交座標系を斜めから見たら斜交座標系になるといえばわかりやすいでしょうか．直線は斜めから見ても直線ですね．

斜交座標は多くの分野で応用されています．例えば，アインシュタインの相対性理論のことを聞いたことがあるでしょう．そう，ほとんど光速で飛んでいるロケットから見ると，物体が縮んだり時間が遅れたりするという理論です．この興味をチョーそそる理論では長さや時間の尺度が変わるので，斜交座標はごく普通に利用されています．

7.7.5.3　斜交座標の応用問題

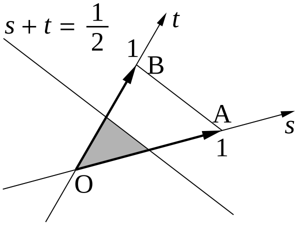
最後に，君たちに直接役立つ問題をやってみましょう．

3 点 O，A，B は同一直線上にないとする．実数 k，l，m が条件 $k \geqq 0$，$l \geqq 0$，$k+l=1$，$1 \leqq m$ を満たして変化するとき

$$k\overrightarrow{\mathrm{PA}} + l\overrightarrow{\mathrm{PB}} + m\overrightarrow{\mathrm{PO}} = \vec{0}$$

を満たす点 P の存在する領域の面積 S と△OAB の面積の比を求めよ．

3 点 O，A，B は定点なので，位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表すと，問題の意味がわかるでしょう．与式より



$$k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) + l(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) + m(-\overrightarrow{\mathrm{OP}}) = \vec{0}.$$

したがって，

$$(k+l+m)\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{k}{k+l+m}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{l}{k+l+m}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

ここで

$$s = \frac{k}{k+l+m}, \qquad t = \frac{l}{k+l+m}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表されます（ここがポイントです）．そこで，条件 $k \geqq 0$，$l \geqq 0$，$k+l=1$，$1 \leqq m$ より

$$s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad s+t = \frac{k+l}{k+l+m} = \frac{1}{1+m} \leqq \frac{1}{2}.$$

これを整理すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \qquad (s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ s+t \leqq \frac{1}{2})$$

です．したがって，点 P の存在範囲は，‘ 第 1 象限 ’（半直線 OA，OB で挟まれた領域）のうち，直線 $t = -s + \frac{1}{2}$（線分 OA の中点と線分 OB の中点を結ぶ直線）以下の部分ですね．よって，求める面積比は S : △OAB = 1 : 4 です．