第3章　関数とグラフ

紀元前 2〜3 千年前頃，古代バビロニアの学者は，半径 r の円の面積 S が大雑把な近似で $S = 3r^2$ であることを導き，円の面積とその半径の相互関係，つまり円の面積はその半径の「関数」であることを無意識のうちに確立していました．また，それより遙かに昔から使われていたであろう長方形の面積の公式（長方形の面積）=（底辺）×（高さ）は，当時の人々が，長方形の面積は底辺と高さに比例する，つまりそれらの 2 変数関数であると無意識のうちに認識していたことを示します．

17 世紀前半になって，文字や記号（a, b, c, $\cdots$, x, y, z, $\cdots$, $=$, $+$, $-$ など）の導入と普及に伴って，数学に新たな発展がありました．1637 年，デカルト（René Descartes，1596〜1650，フランス）は著作『幾何学』において，平面座標の方法を説明する際に，ある線分上の点の縦座標の変化を同じ点の横座標の変化に依存させて考察し，変数や関数の概念を初めて導入しました．つまり，当時は未知数 x, y の方程式と考えられていた等式 $y = ax + b$ において，x, y を単に未知数と見なすだけではなく，等式 $y = ax + b$ そのものを「x の変化に伴って y が変化する規則を表す式」と見なしました．これは x, y を「変数」，つまり「いろいろな数値をとる文字」として導入することを意味します．変数の導入は，同時に，関数の導入を意味し，その最初のものがこの 1 次関数です．また，このとき初めて，1 次方程式 $y = ax + b$ のグラフが直線になることが示されたのでした．彼の考えは瞬く間にヨーロッパの数学界に浸透していきました．彼の，代数を用いて述べられた，新しい幾何は現在「解析幾何」と呼ばれています．

デカルトの仕事を引き継いだ同時代人や 17 世紀の偉大な数学者ニュートン，ライプニッツは，最も重要な数学の分野「微分積分学」を創設しましたが，その中では変数と関数の概念が最も重要な意義をもっています．

ニュートンは，‘りんごが木から落ちるのを見て万有引力の法則を発見した’と伝えられていますが，その原点は落下するりんごの高さを時間の関数と見ることにあったのでしょう．用語「関数」(function) は，ライプニッツによってラテン語の functio（働き，機能）として初めて導入され，それは（あれこれの働きをする量の）「役割」の意味で用いられました．

§3.1　関数の定義

地上から 10 km までは，高度が 1 km 増すごとに気温は 6 ℃下がるといいます．地上の気温が 20 ℃のとき，地上からの高度とその高度の気温の関係を求めましょう．

高度を x km，気温を y ℃とすると，x と y の間には

$$y = 20 - 6x$$

の関係が成り立ちますね．このとき，高度 x は**いろいろな値をとれる文字**であり，これを **変数** といいます．変数 x が変化するとそれに伴って文字 y も変化するので，y も変数です．一般に，“変数 y があって，その値が変数 x の値によってただ 1 つ定まり，x の変化に伴って変化するとき，y は x の **関数** である”といいます．したがって，上の例は関数 $y = 20 - 6x$ といいますね．

さて，x の「とり得る値の範囲」を x の **変域** といい，それは地表から地上 10 km までですから，$0 \leqq x \leqq 10$．また y の変域は，$x = 0$ のとき $y = 20$，x が増加すると y は減少して，$x = 10$ のとき $y = -40$ だから，$-40 \leqq y \leqq 20$ です．一般に，y が x の関数であるとき，x の変域を関数の **定義域**，y の変域を関数の **値域** といいます．関数 $y = 20 - 6x$ は y が x の 1 次式で表され，x の変域は $0 \leqq x \leqq 10$ なので，その変域（定義域）を明示して

$$y = 20 - 6x \quad (0 \leqq x \leqq 10)$$

と表すこともあります．

関数の例をもう 1 つ．高さ 333 m の東京タワーのてっぺんからボールをそっと落しました．空気の抵抗（および障害物）が無かったとしたら，x 秒後のボールの高さ y m は y が x の 2 次式 $y = 333 - 4.9\,x^2$ で表されることが知ら

れており，このような関数を 2 次関数といいます．その 2 次関数の y の変域（値域）は $0 \leqq y \leqq 333$，また，定義域は $0 \leqq x \leqq \sqrt{\frac{333}{4.9}}$ ですね．

一般に，y が x の関数であることを，

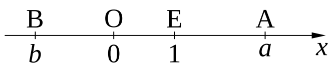
$$y = f(x), \quad y = g(x)$$

等の記号で表すと便利です（$f(x)$ の f はもちろん function の f です）．先ほどの 2 次関数では $f(x) = 333 - 4.9\,x^2$ 等とすればよいでしょう．関数 $y = f(x)$ において，x の値 a に対応する y の値を $f(a)$ で表し，それを $x = a$ における**関数値**といいます．先ほど述べた値域は関数値の変域を意味する用語です．また，関数 $y = f(x)$ を単に関数 $f(x)$ ということもあります．

§3.2　実数と点の 1 対 1 対応と座標軸

関数の詳細を調べるには x と y の関係をグラフを描いてみるのが便利です．グラフを描くために，§1.1 数直線および §§1.9.2 実数の新たな定義の議論を思い出しましょう．我々は，点は直線上で連続しており，また実数も連続して存在することを知りました．したがって，直線上の点と実数を連続的に 1：1 に対応させることができます．その復習と平面への拡張から始めましょう．

1 つの直線上に異なる 2 点 O，E をとり，線分 OE の長さを単位の長さ 1 とします．次に，直線上の任意に定めた点 A に対して，以下の 2 つの条件で実数 a を対応させます：



(1) 線分 OA の長さは実数 a の絶対値 $|a|$[1)] の大きさに等しい：OA $= |a|$．

(2) 点 A は，$a > 0$ のとき O から見て E と同じ側に，$a < 0$ のときは E と反対側にとり，$a = 0$ のときは A = O とします．

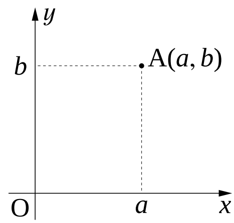
こうすると直線上の任意の 1 点に対応して実数が 1 つ定まり，また逆に，任意の実数に対応して直線上の点が 1 つ定まります．このように実数と直線上の点が連続的に 1 対 1 に対応するとき，この直線を数直線といいました．

---

1) 絶対値の記号 $|\ |$ は，例えば，$|2| = +2$, $|-2| = +2$ のように，実数の大きさを求める記号です．正しくは，$|a|$ は数直線上の点 a と原点 O の距離として定められます．

基準になる点 O を **原点**，点 E を **単位点** といいます．また，点 A に対応する実数 a を点 A の **座標** と呼びます．このとき，点 A を点 A(a) と表したり，また点 A(a) を単に「点 a」といったりします．すなわち，‘ 実数を数直線上の対応する点と同一視して，実数が数直線上に並んでいる ’ と考えるわけです．原点（と単位点）があり，実数が（上のルールで）並ぶ数直線を **座標軸** と呼びます．よって，実数は座標軸上に小さいものから大きなものの順で並びます．座標軸は大きな実数の方向に向かって矢印で表すのが日本流です．また，2 点 A(a)，B(b) の距離は 2 点の座標の差の大きさ $|a-b|$ で表されます．

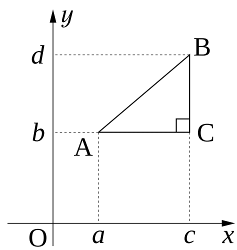
関数 $y=f(x)$ 等をグラフで表すためには，変数 x に対応する横座標軸つまり x 軸と，それに原点 O で垂直に交わる，変数 y に対応する縦座標軸つまり y 軸を考えるのが便利です．このとき，x, y の 2 つの座標軸が定まった平面を考えるので，その平面を **座標平面** といいます．このとき，$x=a$，$y=b$ に，つまり実数の組 $(x,\ y)=(a,\ b)$ に対応する座標平面上の点を A(a, b) で表します．点 A(a, b) は，原点 O と x 軸上の点 a，y 軸上の点 b を 3 頂点とする長方形を考えたとき，4 番目の頂点に対応します．



点 A(a, b) に対応する実数の組 (a, b) を点 A の **座標** といいます．明らかに，任意の実数の組に対応して座標平面上の 1 点が定まり，逆に，座標平面上の任意の 1 点に対応して 1 組の実数が定まります．このように座標平面上では，‘ 実数の組と平面上の点が 1 対 1 に対応 ’ します．よって，数直線上には実数が並ぶと見なしたように，‘ 座標平面上には実数の組が欠けることなく敷き詰められている ’ と考えることができます．

また，両座標軸が直交することを考慮すると，2 点 A(a, b)，B(c, d) の距離 AB は，点 C(c, b) をとると，三平方の定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{CB}^2}\\ &= \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\end{aligned}$$

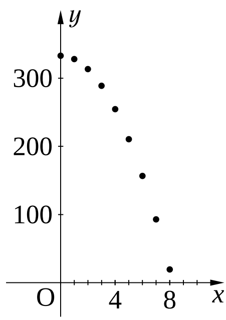


と表されます．

§3.3　1 次関数・2 次関数のグラフ

§3.1 の高度 x km と気温 y ℃ の関係を表す 1 次関数 $y = 20 - 6x$ のグラフは，傾き -6，y 切片（y 軸との交点）が $y = 20$ の直線になることは既に習いましたね．直線のグラフだけを見せるのはつまらないので，グラフが点の集合であることを学んでから，1 次関数のグラフが直線になることを示しましょう．そこで，先に 2 次関数のグラフを議論しましょう．

3.3.1　グラフは点の集合



§3.1 のボール落下の 2 次関数 $y = 333 - 4.9\,x^2$ のグラフを考えましょう．x は時間（秒），y はボールの高さ (m) です．ボールが落下している間 $(333 \geqq y \geqq 0)$，時間を $x = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ と 1 秒ごとにプロット[2]したのが右図です．つまり，$x = 0,\ 1,\ 2, \cdots$ に対して，等式 $y = 333 - 4.9\,x^2$ を満たす y を求めて，それらの組 $(x,\ y)$ を点 $(x,\ y)$ と同一視して xy 平面上に描いたわけです．0, 1, 2, ⋯ の各 x 座標から 1 秒ごとのボールの高さ y m が見てとれると思います．

次に，全ての時間に対してグラフを描くことを考えましょう．そのためには関数の等式

$$y = 333 - 4.9\,x^2 \quad (x \geqq 0,\ 333 \geqq y \geqq 0)$$

を満たす全ての点 $(x,\ y)$ の集まり，つまり点 $(x,\ y)$ の「集合」を考えてそれらを xy 平面上にプロットする必要があります．そのように描いたものが 2 次関数 $y = 333 - 4.9\,x^2$ のグラフです．

簡単にいってしまいましたが，大切なことので，グラフを描く前にきちっと説明しましょう．一般に，グラフの元となる関数の等式を **図形の方程式** といいます．上の関数 $y = 333 - 4.9\,x^2$ のグラフに C という名をつけましょう．グ

2) プロット＝座標を点で示すこと．

ラフ C の場合，その図形の方程式は

$$C\ :\ y = 333 - 4.9\,x^2 \quad (x \geqq 0,\ 333 \geqq y \geqq 0)$$

と表されます．どうして方程式と呼ぶかというと，等式 $y = 333 - 4.9\,x^2$ を未知数 x, y の方程式と見なすからです．この方程式は，実数の未知数が 2 個なのに，等式が 1 個しかないので，解の組 $(x,\ y)$ は連続的に無限個あります．そして，この無限個の解の各組 $(x,\ y)$ を，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ と同一視します．その点 $(x,\ y)$ を「方程式を満たす点」と呼ぶことにしましょう．図形の方程式 $y = 333 - 4.9\,x^2$ の x, y は，関数に表れる変数というよりは，その方程式を満たす点 $(x,\ y)$ の x, y のことであると，常に念頭においておくのがよいでしょう．方程式 $y = 333 - 4.9\,x^2$ $(x \geqq 0,\ 333 \geqq y \geqq 0)$ を満たす点の全てを xy 平面上にプロットすると，連続する点の集合，すなわち「曲線」が現れます．それが関数のグラフ C というわけです．**グラフは方程式を満たす点の集合である**という認識は決定的に重要です．

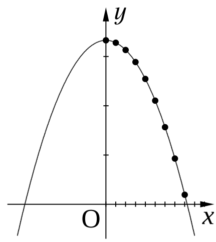
　グラフ C を集合の記法を用いて表すとその意味がよくわかります．C を点の集合と見ると，‘ C 上の各点は，集合 C に属し，それ以上分けられない個々のもの ’ ですから，C 上の各点は集合 C の「要素」です．集合を用いた書き方は，§1.6 で学んだように

$$\text{グラフ}\ C = \{\,C\ \text{の要素} \mid \text{要素についての条件}\,\}$$

の形式を用い，中括弧 $\{\quad\}$ は条件を満たす全ての要素の集合を意味します．具体的には，グラフ C の要素は点ですからそれを $(x,\ y)$ と表すと，

$$\text{グラフ}\ C = \{(x,\ y) \mid y = 333 - 4.9\,x^2 \quad (x \geqq 0,\ 333 \geqq y \geqq 0)\}$$

と表されます．このような表現を用いると，グラフ C が，2 次関数の等式を方程式とする解の組 $(x,\ y)$ に対応する，点 $(x,\ y)$ の集合であることがよくわかりますね．このとき，x, y はいろいろな値をとる変数なので，点 $(x,\ y)$ を動く点つまり「動点」と考えることもできます．また，方程式を満たす 1 点 1 点と考えることもできます．グラフ上の点を 1 点ずつ移動すると考えるときなどには，後者の考え方のほうがわかりやすいようです．

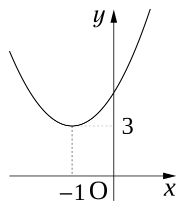


グラフ C を，ここでは $x < 0$ の区間まで変域を広げて描いてみましょう[3)]．2 次関数のグラフは **放物線**[4)]と呼ばれる美しい曲線になります．時間 x $(x \geqq 0)$ を指定すると，そのときのグラフの高さ（関数値）がボールの高さを表します．このグラフは $x < 0$ のとき増加して，$x = 0$ で最大になり，$x > 0$ のとき減少していますね．また，グラフは y 軸に関して対称になっていますね．グラフがある直線に関して対称になるときその直線をグラフの **対称軸** といいます．

ここでとても重要なことを確認しておきましょう．2 次関数 $y = 333 - 4.9\,x^2$ は，x が連続的に変化するとき対応する y も連続的に変化します．より正確にいうと，x がごく僅かに変化するとき y もごく僅かに変化します．よって，そのグラフ上の点 $(x,\ y)$ は連続していて，切れ目がありません．このことを関数の言葉を用いると‘ 2 次関数 $y = 333 - 4.9\,x^2$ は **連続関数** である’といいます．一般の 2 次関数も連続関数です．さらに，n 次式で表される n 次関数が連続関数であり，そのグラフが切れ目のない滑らかな曲線になることは容易に理解できると思います．

もう 1 題，グラフ C : $y = f(x)$，ただし，

$$f(x) = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x+1)^2 + 3$$



で練習して，2 次関数のグラフの特徴をつかみましょう．このグラフもやはり放物線で，今度は $x < -1$ の範囲で減少し，$x = -1$ で最小，$x > -1$ で増加します．この放物線は，y 軸に平行な直線 $x = -1$，つまり点集合

$$\{(x,\ y) \mid x = -1\}$$

に関して対称です．点 $(x,\ y)$ に対して y の条件が書かれていないのは，y につ

---

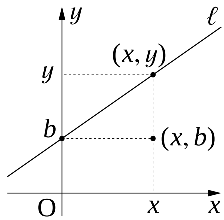
3) 無限個の点をプロットするのは不可能なので，実際には，図を表示する x の区間で等間隔に数百点をとって対応する関数値を求めます．次に，それらから得られる点を xy 平面上にプロットし，隣り合う点を線分で結んで表示しています．

4) 放物線は英語でパラボラ (parabola) といいます．そう，パラボラアンテナのパラボラです．放物線を対称軸の周りに回転するとパラボラアンテナの形の曲面になります．その曲面の内面を鏡にすると，対称軸に平行にやって来た光は，鏡で反射して，「焦点」といわれる 1 点に集ります．その詳細は §§ 5.3.1.2 で学びます．

いての条件がない，つまり‘ y は任意の値でよい ’ ことを意味します．この直線のことを放物線の「対称軸」または簡略して単に **軸** といいます．また，放物線と軸との交点を放物線の **頂点** といいます．今の場合，頂点は点 $(-1,\ 3)$ ですね．この放物線は，先ほどのものと違い，下に凸状になっています．このとき，このグラフは **下に凸**[5]といいます．また，2 次関数のグラフの湾曲の程度にも注意しましょう．

2 次関数のグラフは，以上の 2 つの例からわかるように，どれも似通った性質があるようです．先に 1 次関数のグラフを議論してから，その理由を考えましょう．

3.3.2　直線



1 次関数のグラフが直線になることを示しましょう．ここでは順序を逆にして，直線の方程式が 1 次関数になっていることを先に示しましょう．求める直線を傾き m，y 切片が $y = b$ の直線 ℓ として，その方程式を求めます．xy 平面上の点 $(x,\ y)$ を考え，それが ℓ 上にあるための条件式が直線 ℓ の方程式になります．ℓ は点 $(0,\ b)$ を通り傾きが m だから，点 $(x,\ y)$ が ℓ 上にあるための条件は

$$\frac{y-b}{x-0} = m$$

です．この条件式を満たす全ての点 $(x,\ y)$ が直線 ℓ 上にあることに注意しましょう[6]．分母を払って整理すると 1 次関数 $y = mx + b$ が得られます．また逆に，$y = mx + b$ から $\dfrac{y-b}{x-0} = m$ が導かれるので，この方程式を満たす点 $(x,\ y)$

---

[5] 下に凸・上に凸の正確な定義を述べておきましょう．関数のグラフを直線で切り，切り取られた弧を考えます．どんな直線で切っても，弧が直線の下に必ずあるとき，そのグラフは下に凸といいます．また，ある区間内で，弧が直線の下に必ずあるときは，その区間で下に凸といいます．反対に，弧が直線の上にあるときは，**上に凸** といいます．2 次関数のグラフは全区間で下に凸または上に凸のどちらかです．

[6] この表現式は傾き m を強調するためのもので，分母が 0 のときは分子も 0 と約束します．正しい表現は分母を払った $y - b = m(x - 0)$ です．

は必ず直線 ℓ 上の点になります．よって，方程式 $y = mx + b$ を満たす点の集合が直線 ℓ というわけです：

$$\ell = \{(x,\ y) \mid y = mx + b\}$$

通常は，直線 ℓ の方程式が $y = mx + b$ であるという意味で

$$\ell : y = mx + b$$

と表します．君たちが学校で教わるのがこれです．

応用問題をやってみましょう．点 $(p,\ q)$ を通り傾き m の直線の方程式を求めよ．ヒントは不要でしょう．答は，点 $(x,\ y)$ がその直線上にあるための条件が

$$\frac{y - q}{x - p} = m$$

なので，求める方程式は

$$y - q = m(x - p)$$

ですね．この形のものは頻繁に利用されます．

1 次関数 $y = mx + b$ のグラフは，傾き m が実数つまり $-\infty < m < \infty$ なので，y 軸に平行な直線を表すことは叶いません．つまり，直線：$x = c$（y は任意）のタイプのものはそれに含まれていません．両方の直線を表せる方程式にするには，y の係数を 1 としないで文字係数にして，$ay = mx + b$ のような形に拡張し，見栄えがよいように

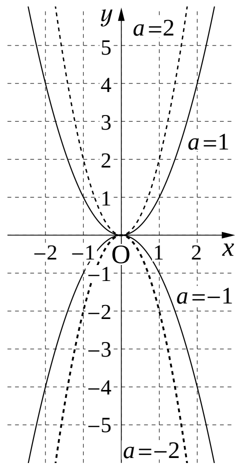
$$ax + by + c = 0 \qquad \text{（直線の一般式）}$$

などと書き直しましょう（ただし，a, b は同時には 0 ではありません）．このように表すと，$b \neq 0$ のときは $y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$，$b = 0$ のときは $x = -\frac{c}{a}$ となるので，どちらのタイプの直線も表せますね．

§3.4　2 次関数のグラフの平行移動

グラフの平行移動を学んで 2 次関数のグラフを統一的に扱いましょう．その手法は一般のグラフにも適用できることが次第に明らかになっていきます．

3.4.1　放物線の丸み



グラフが，上に凸や下に凸になったり，湾曲が大きくまたは小さくなったりすることから始めましょう．2 次関数

$$y = ax^2 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

のグラフは，$y = x^2 \times a$ と変形すればわかるように，$y = x^2$ のグラフを‘全ての x において’y 方向に a 倍したものですね．$a > 0$ のときは下に凸，$a < 0$ のときは上に凸のグラフになります．また，a の大きさ $|a|$ が大きいときは湾曲が大きいことがわかります．a を **丸み** とか「開き」ということがあります．a が 2 次の項の係数であることに注意しましょう．

これらのグラフに共通しているのは頂点がどれも原点 O になっていることです．これが $y = ax^2$ $(a \fallingdotseq 0)$ のグラフの特徴です．では，頂点が原点でないグラフはどのような特徴があるのでしょうか．グラフの平行移動という観点から調べてみましょう．

3.4.2　平行移動

関数 $y = ax^2 + q$ の関数値は，関数 $y = ax^2$ の関数値と比べると，‘全ての x に対して’q だけずれています：$(ax^2 + q) - ax^2 = q$．このことは，$y = ax^2 + q$ のグラフは，$y = ax^2$ のグラフを y 方向に q だけ平行移動したことを意味していますね．

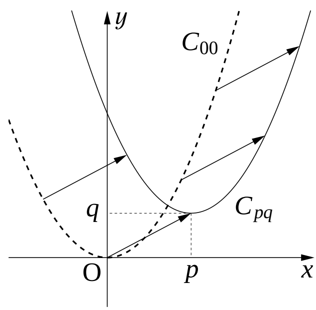
次に x 方向への平行移動を議論しましょう．まずは準備から．関数 $y = x^2$ において，変数 x に c を代入すると関数値 $y = c^2$ を得ますね．では，変数 x に $x - 2$ を代入するとどうなるでしょう．形式的に代入してみると，$y = (x - 2)^2$ となり，関数 $y = x^2$ から新しい関数が作られたことを示しています．一般に‘関数の変数に変数の式を代入すると新しい関数が得られます’．このことを関数の「変換」と呼ぶことにしましょう．

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$y=(x-2)^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9

関数 $y = x^2$ と関数 $y=(x-2)^2$ の違いを表で見てみましょう．下の $y=(x-2)^2$ の段は上の $y = x^2$ の段を右に 2 ずらしたものになっていますね．つまり，$y = x^2$ の $x = c$ における高さ $y = c^2$ が $y = (x-2)^2$ では $x = c+2$ において実現されます：$y = (c+2-2)^2 = c^2$．このことは全ての c に対して成り立つので，$y = x^2$ のグラフ上の全ての点を x 方向に 2 だけ移動すると $y = (x-2)^2$ のグラフ上の全ての点に移ると解釈できます．つまり，関数 $y = (x-2)^2$ のグラフは $y = x^2$ のグラフを x 方向に 2 だけ平行移動したものというわけです．

同様に，関数 $y = ax^2+q$ の x に $x-p$ を代入して得られる $y = a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y = ax^2+q$ のグラフを x 方向に p だけ平行移動したものになります：$y = ax^2+q$ の $x = c$ における高さは $y = ac^2+q$．$y = a(x-p)^2+q$ の $x = c+p$ における高さも $y = a(c+p-p)^2+q = ac^2+q$.

以上の議論から，関数 $y = a(x-p)^2+q$ のグラフ C_{pq} は関数 $y = ax^2$ のグラフ C_{00} を x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したものになりますね．C_{00} の頂点は原点 O なので C_{pq} の頂点は点 (p, q) になります[7]．



これで準備ができました．以下，2 次関数 $y = ax^2+\cdots$ のグラフは全て 2 次関数 $y = ax^2$ のグラフ C_{00} を平行移動したものであることを示しましょう．2 次関数の一般形は $y = ax^2+bx+c\ \ (a \neq 0)$ ですが，§§ 2.2.2 一般の 2 次方程式のところで変形したように

$$y = ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

となりますね．この一般形と $y = a(x-p)^2+q$ を比較すると

[7] パソコンで関数のグラフを描くソフトがあります．筆者が利用したのはフリーの GRAPES（http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/）というソフトで，慣れるとかなり便利です.

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

となります．このことは，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは，2 次関数 $y = ax^2$ のグラフを，x 方向に $p = -\dfrac{b}{2a}$，y 方向に $q = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ だけ，平行移動したものであることを意味しますね[8]．よって，$y = ax^2 + \cdots$ のグラフは，全て，$y = ax^2$ のグラフを平行移動したものであることがわかります．

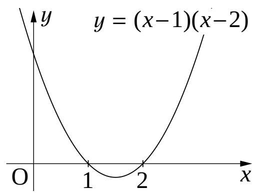
また，点 $(p,\ q)$ は頂点の座標ですから，2 次関数の一般形 $y = ax^2 + bx + c$ の頂点の座標は上式の $(p,\ q)$ で与えられることになります．例えば，$a = 1$，$b = 2$，$c = 3$ のとき，$p = -1$，$q = 2$ より，頂点は点 $(-1, 2)$ ですね．また，$y = ax^2 + \cdots$ のグラフと $y = ax^2$ のグラフは，共通の a をもつので，共通の凹凸（上に凸または下に凸）および同一の湾曲をもつ，つまり同じ丸みをもちますね．

§3.5　方程式・不等式のグラフ解法

方程式 $f(x) = 0$ を連立方程式 $y = f(x)$ かつ $y = 0$ と考えて，関数 $y = f(x)$ のグラフを考えると，方程式や不等式の解に図形的意味付けができます．

3.5.1　方程式のグラフ解法

簡単な 2 次方程式 $(x-1)(x-2) = 0$ のグラフ解法を考えます．そのために，いったん新たな変数 y を導入して，連立方程式の形にしましょう：



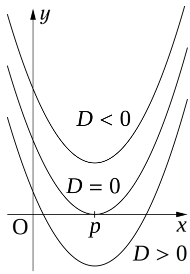
$$(x-1)(x-2) = 0\ (\,y = 0\,) \iff \begin{cases} y = (x-1)(x-2) \\ y = 0. \end{cases}$$

上式の右辺の連立方程式で y を消去すると元の方程式に戻りますね．同値記号 $\Leftrightarrow$ は，$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ の場合に，$p \Leftrightarrow q$ と表す記号でしたね．また，元の

[8] $p = -\dfrac{b}{2a}$，$q = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ であることは，関数 $y = ax^2 + bx + c$ が $y = a(x-p)^2 + q$ の形に必ず表されることを意味します．また逆に，関数 $y = a(x-p)^2 + q$ を $y = ax^2 + bx + c$ の形に表すことも必ずできます．a が両関数に共通なのでそれを定数として，$(x-p)^2$ を展開して比較すると $b = -2ap$，$c = ap^2 + q$ とすればよいことがわかります．

方程式につけ加えたダミーの（便宜上の）解 $y = 0$ は同値関係を厳密にするためだけに必要です．$y = (x-1)(x-2)$ は2次関数，$y = 0$ は x 軸と解釈できるので，それらのグラフを描いたときに，両者を同時に満たす座標，つまり x 軸との交点が連立方程式の解で，その交点の x 座標が元の方程式の解ということになります．$y = (x-1)(x-2)$ のグラフの x 切片（x 軸との交点）は明らかに $x = 1,\ 2$ ですから元の方程式の解に一致しますね．

次に，一般の2次方程式



$$ax^2 + bx + c = a\,(x-p)^2 + q = 0,$$

$$\text{ただし}\quad p = -\frac{b}{2a},\quad q = -\frac{D}{4a}\quad (D = b^2 - 4ac)$$

を関数 $y = a\,(x-p)^2 + q = a\{(x-p)^2 + \frac{q}{a}\}$ のグラフで考えて，解の種類を調べましょう．

$\frac{q}{a} = -\frac{D}{4a^2} < 0$，つまり判別式 $D > 0$ のとき，

$$\frac{y}{a} = (x-p)^2 + \frac{q}{a}$$

は x の変化に伴ってその符号を変えます：$x = p$ のとき $\frac{y}{a} = \frac{q}{a} < 0$．$|x|$ が十分に大きいとき $\frac{y}{a} > 0$．よって，y の符号も x の変化に伴って変わります．したがって，$y = a(x-p)^2 + q$ のグラフは x 軸と異なる2点で交わり，2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は異なる2実数解をもちます．

次に，$q = 0$，つまり判別式 $D = 0$ のとき，$y = a(x-p)^2$ のグラフは符号を変えず，$x = p$ のときのみ $y = 0$ となります．よって，グラフは $x = p$ で x 軸に接し，方程式は重解 $x = p$ をもちます．

最後に，$\frac{q}{a} > 0$，つまり判別式 $D < 0$ のとき，$y = a\{(x-p)^2 + \frac{q}{a}\}$ は常に a と同符号になり，そのグラフは x 軸にかすりもしません．よって，この場合は方程式は実数の解をもちません．思い出してほしいのは，§2.3 のところで調べたように，判別式 $D < 0$ のときには方程式は虚数解をもちましたね．その理由をグラフの式を用いて考えてみましょう．$y = a\{(x-p)^2 + \frac{q}{a}\}$ の y の値はどんな実数 x に対しても0になることはありません．ところが，それを，虚数 i

の性質 $i^2 = -1$ を悪用？して，強引に

$$(x-p)^2 + \frac{q}{a} = (x-p)^2 - \left(i\sqrt{\frac{q}{a}}\right)^2$$
$$= \left(x - p - i\sqrt{\frac{q}{a}}\right)\left(x - p + i\sqrt{\frac{q}{a}}\right)$$

と因数分解し，$y = 0$ となる x を ‘ でっち上げた ’ わけです[9].

ここで応用問題を 1 題やってみましょう．方程式 $x^2 + x = -x + k$ が異なる 2 実数解をもつように k の範囲を定めよ．ヒント：

考え方 (i)　右辺が 0 になるように移項すると簡単な方程式 $x^2 + 2x - k = 0$ になります．そこで，異なる 2 実数解をもつことは判別式 $D > 0$ ということなので，$D = 4 + 4k > 0$．よって $k > -1$.

考え方 (ii)　左辺と右辺のグラフを描くと，方程式が異なる 2 実数解をもつことは，それらのグラフが異なる 2 交点をもつことと同じです．両辺のグラフを描くために，同値関係

$$x^2 + x = -x + k\ (= y\ \text{とおく}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x \\ y = -x + k \end{cases}$$

を用いて，両辺の関数を用意しておきましょう．ただし，$y = -x + k$ のグラフは斜めの直線なので，接点を調べるのに一手間要ります．それを避けるために，方程式を $x^2 + 2x = k$ ($= y$ とおく) と変形してから，$y = x^2 + 2x$ と $y = k$ のグラフの交点を調べるほうがよいでしょう．$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ より，この 2 次関数のグラフは下に凸で頂点は点 $(-1, -1)$ ですね．また $y = k$ は x 軸に平行な直線なので，両者が異なる 2 交点をもつためには，直線 $y = k$ が頂点より上にあることが必要です．よって，$k > -1$ となりますね（ここではグラフを頭の中で描く訓練もしておきましょう）.

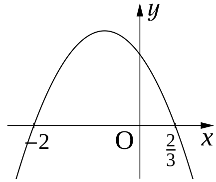
この問題では考え方 (i) のほうが圧倒的に簡単で早く解けますね．しかし，公式「異なる 2 実数解をもつ $\Leftrightarrow$ $D > 0$」の丸暗記にならないようにしましょう．むしろいろいろな考え方を習熟しておくほうがよいと思われます.

---

9) ただし，そう言うのはいい過ぎで，発見したというほうが適当でしょう．虚数も立派に役立っていますから.

3.5.2　不等式のグラフ解法

　不等式 $-3x^2 - 2x + 5 > 2x + 1$ を解いてみましょう．移項して $-3x^2 - 4x + 4 > 0$ とするほうが簡単ですね．方程式の場合と同様に

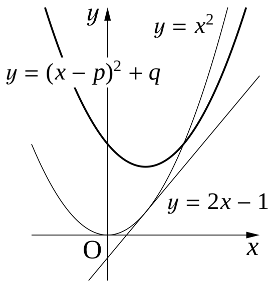


$$-3x^2 - 4x + 4\ (= y) > 0 \iff \begin{cases} y = -3x^2 - 4x + 4 \\ y > 0 \end{cases}$$

と変形すると，放物線 $y = -3x^2 - 4x + 4$ の $y > 0$ となる x の区間であることがわかります．よって，放物線の x 切片は $-3x^2 - 4x + 4 = 0$ を解いて $x = \dfrac{2}{3}, -2$ を得るので，放物線が上に凸であることを考慮して，解 $-2 < x < \dfrac{2}{3}$ を得ます．

　最後に少々難しめの応用問題をやってみましょう．考え方が大切なので，初めて見るタイプの問題と感じた人は，計算の詳細にこだわらないで問題の意味を理解してください．放物線 $y = x^2$ を，x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動して，直線 $y = 2x - 1$ より常に上にあるようにしたい．そうなるための p，q が満たすべき条件を求めよ．

　まず，平行移動後の放物線は $y = (x - p)^2 + q$ ですね．これが直線より上にあるので，不等式



$$(x - p)^2 + q > 2x - 1$$

が成立します．ポイントは次です．そのまま不等式を解いて x の範囲を求めてしまったらアウトです．直線より常に上にあるとは，移動後の放物線の全体が必ず上にある，つまり放物線上の全ての点が直線より常に上にあるということです．よって，不等式 $(x - p)^2 + q > 2x - 1$ は ‘ 全ての x に対して成立する ’ と考えなければなりません．このことが理解できれば後は簡単です．左辺に移行して

$$x^2 - 2(p + 1)x + p^2 + q + 1 > 0.$$

これが全ての x に対して成立するのは，左辺の 2 次関数の最小値が正のときです．平方完成して

$$(x - p - 1)^2 + q - 2p > 0.$$

よって，最小値が正の条件 $q - 2p > 0$ が求めるものです．

§3.6　図形の変換

図形を移動したり別の図形に直したりすることを **図形の変換** といいます．その一般的方法を議論しましょう．

3.6.1　平行移動

§§3.4.2 において，関数 $y = x^2$ の変数 x に x の式 $x - p$ を代入すると，関数が変換されて，新たな関数 $y = (x - p)^2$ になり，そのグラフは元の関数のグラフを x 方向に p だけ平行移動したものになりましたね．この §§ では変数に変数の式を代入することの意味を考えてみましょう．得られる結果は非常に一般的であり，全ての関数および図形の方程式に対して成立します．

3.6.1.1　関数のグラフの平行移動

任意の関数 $y = f(x)$ の変数 x に $x-p$ を代入してみましょう．すると, 関数が変換されて新たな関数 $y = f(x - p)$ が得られます．この関数を $y = g(x)$ と名づけましょう：$y = g(x) = f(x-p)$．すると, $x = c$ における $y = f(x)$ の関数値 $f(c)$ は $y = g(x)$ においては $x = c + p$ で得られます：$g(c + p) = f(c + p - p) = f(c)$．このことは，$y = f(x)$ のグラフ上の 1 点 $(c,\ f(c))$ を x 方向に p だけ移動すると $y = g(x)$ のグラフ上の 1 点に移る，と解釈できます．c は任意の実数でよいので，$y = f(x)$ のグラフ上の全ての点がこの移動によって $y = g(x) = f(x - p)$ のグラフ上の全ての点に移ることになります．つまり,‘ 任意の関数 $y = f(x)$ のグラフを x 方向に p だけ平行移動したグラフを表す関数は $y = f(x - p)$ である ’ ということです．これはどんな関数のグラフに対しても成立します．

次に，任意の関数 $y = f(x)$ の変数 y を $y - q$ で置き換えてみましょう：$y - q = f(x)$．これは $y = f(x) + q$ と同じですから，この関数は，全ての x に対して $y = f(x)$ の関数値を定数 q だけずらしたものです．すなわち,‘ 関数 $y = f(x)$ のグラフを y 方向に q だけ平行移動したものが関数 $y - q = f(x)$ のグラフになる ’ のです．

さらに，任意の関数 $y = f(x)$ において，変数 x に $x - p$ を代入し，同時に，変

数 y に $y-q$ を代入すると $y-q=f(x-p)$ ですね．これは任意の関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数ですね．つまり，2 次関数のグラフの平行移動についての公式は，実は，任意の関数のグラフに対しても成立するのです．

3.6.1.2　**図形の変換の意味付け**

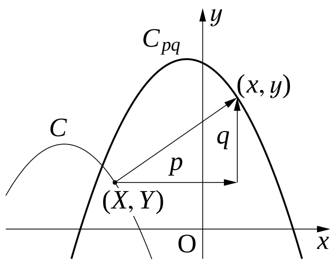
　準備が整ったようです．これらの変てこな代入，つまり関数の変換の意味付けにとりかかりましょう．関数を変換すると，その結果として，その関数のグラフが変換されることを見てきました．今度はその逆を考えましょう．つまり，グラフを変換するには関数をどのように変換すればよいかという観点で考えてみましょう．グラフを移動することは，グラフ上の点を含む，xy 平面上の全ての点を1点ずつ移動することによって実現できます．よって，移動前の点と移動後の点がどんな関係になるかと考えたとき，その関係式が変換を表す関数の方程式を与えるはずです．

　任意の関数 $y=f(x)$ を，後で混乱を招かないように，$Y=f(X)$ と大文字 X，Y で表しておいて，そのグラフを C と名づけましょう．集合の記法を用いると，グラフ C は方程式 $Y=f(X)$ を満たす点 $(X,\ Y)$ の集合，つまり

$$C=\{(X,\ Y)\,|\,Y=f(X)\}$$

です．点 $(X,\ Y)$ は，条件 $Y=f(X)$ の下で，グラフ C 上の任意の点を表します．

　さて，グラフ C を，x 方向に p，y 方向に q だけ平行移動して得られるグラフを C_{pq} と名づけ，C_{pq} の方程式を ‘ 仮に ’ $y=g(x)$ としておきましょう．‘ 仮に ’ といった理由は，$y=g(x)$ がまだ未知の関数だからです．グラフ C_{pq} は点の集合



$$C_{pq}=\{(x,\ y)\,|\,y=g(x)\}$$

です．点 $(x,\ y)$ はグラフ C_{pq} 上にあるとき方程式 $y=g(x)$ を満たします．

以下の議論では，紛れることがないように，小文字 x, y を用いて表した点 (x, y) はグラフ C_{pq} 上の点に限定しておきましょう．すると，我々の目的は，C_{pq} 上の点 (x, y) とその移動前の点との関係から，C_{pq} 上の点の x 座標と y 座標の関係を表す式を求めること，つまり，C_{pq} の未知の方程式 $y = g(x)$ を決定することです．$y = g(x)$ は，小文字 x, y を用いて表されているから，‘ 小文字 x, y の方程式 ’ を見つけさえすればその方程式を決定したことになります（長々と述べてきましたが間もなくゴールです）．

C_{pq} 上の任意の点 (x, y) が C 上の点 (X, Y) を x 方向に p，y 方向に q だけ移動して得られた点とすると，点 (X, Y) は点 $(x-p, y-q)$ のことです（ここが第 1 のポイント）．このとき，点 $(x-p, y-q)$ は C 上にあるから，その点は C の方程式 $Y = f(X)$ を満たしますね（ここが第 2 のポイント）．よって，方程式 $y - q = f(x-p)$ が成立し，それは求めていた小文字 x, y の方程式です．よって，C_{pq} の方程式 $y = g(x)$ は方程式 $y - q = f(x-p)$ に他なりません（ここが第 3 のポイント）．したがって，C_{pq} の方程式は

$$C_{pq} : y - q = f(x-p)$$

と決定されました．

事実上の証明の部分はほぼ一瞬にして終わりましたね．グラフは点の集合であること，およびグラフを移動することは点を 1 点ずつ移動することに注意して読めば難しくはないと思います．なお，x 方向に p，y 方向に q だけ移動するのだから，方程式は，一見，$y + q = f(x+p)$ だと思いがちですが，第 1 のポイントで見たように，グラフの移動に関係するのは ‘ 移動する前の点 ’ $(x-p, y-q)$ の座標であることに注意しましょう．グラフの変換に直接関係してくるのは，いつでも，変換前の点の座標です．

3.6.2　**種々の変換と対称性**

前の §§ では小文字の点 (x, y) は，わかりやすくするために，変換後の図形上の点としましたが，変換は図形が載っている全平面を変換すると考えて，点 (x, y) は変換後の ‘ 全平面上の点 ’ とするほうがより一般的な議論ができます．以下，その立場で議論しましょう．

3.6.2.1　倍変換

全 xy 平面を y 方向に a 倍に伸縮する変換をしましょう．そのとき，任意の関数 $y = f(x)$ のグラフ C が変換されてグラフ C_a になったとします．C_a の方程式を求めましょう．変換後の平面上の任意の点を $(x,\ y)$ とすると，変換前の点は $(x, \frac{y}{a})$ と表されます．よって，点 $(x,\ y)$ がグラフ C_a 上にあるとき，点 $(x, \frac{y}{a})$ はグラフ C 上にあるので，C の方程式 $y = f(x)$ を満たしますね．よって，$\frac{y}{a} = f(x)$ が成り立ち，これが求める C_a の方程式です．これは $y = af(x)$ $(= f(x) \times a)$ と同じなので，確かに，y 方向に a 倍に伸縮する変換になっていますね．

では，全 xy 平面を x 方向に a 倍に伸縮する変換をしたとき，任意の関数 $y = f(x)$ のグラフはどのように変換されるでしょうか．変換後のグラフの方程式を各自求めましょう．答は $y = f(\frac{x}{a})$ ですね．

これらの変換は，いずれ見るように，円と楕円を相互に変換するときなどに役立ちます．

3.6.2.2　y 軸対称性

1 次項がない 2 次関数 $y = ax^2 + c$ のグラフの軸は y 軸ですから，このグラフは y 軸に関して対称ですね．このことを確かめるには，全ての x に対して，x における関数値 $ax^2 + c$ と $-x$ における関数値 $a(-x)^2 + c$ が等しいことを示せば OK ですね．一般の関数 $y = f(x)$ でも y 軸対称になる条件は，同様にして，$f(x) = f(-x)$ となります[10)]．

この条件を，関数 $y = f(x)$ のグラフ C と，それを y 軸に関する **対称移動**（対称変換）をして得られるグラフ C_y を比較して求めてみましょう．変換後の点を $(x,\ y)$ とすると対称移動前の対応する点は $(-x,\ y)$ ですね．点 $(x,\ y)$ が C_y 上にあるとき，点 $(-x,\ y)$ は C 上の点ですから C の方程式 $y = f(x)$ を満たします：$y = f(-x)$．これが C_y の方程式です．このとき，y 軸対称によって，C と C_y は一致します．したがって，$y = f(x)$ と $y = f(-x)$ は同じものですから，y 軸対称の条件

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{（偶関数）}$$

が得られます．この条件を満たす関数は **偶関数** と呼ばれます．

---

10) 変数 x を用いて表された条件は，通常，‘ 全ての x に対して成立する ’ ことを意味します．

§3.7　関数の概念の発展

関数は，初期の頃，変数を用いて表される式，つまり「解析的な式」と見なされていました．しかし，数学理論が発展するにつれて関数のより拡張された定義が必要になりました．我々の用いている §3.1 の定義がそれに当たります．集合論が構築されると関数の概念はさらに一般化され，関数は「写像」，つまり像を写す役割をもつものとして考えられるようになりました．以下，高校数学と関連する部分に焦点を当てて議論しましょう．

3.7.1　関数の拡張

我々はこれまで 1 次関数・2 次関数などを議論しました．今後，三角関数・指数関数・対数関数など多くの関数を議論します．それらは，変数の式で表された‘ 滑らかに変化する ’連続関数で,「解析的関数」と呼ばれます．それらは関数の定義，すなわち‘ 変数 y があり，その値が変数 x の値によってただ1つ定まり，x の変化に伴って変化するとき，y は x の関数である ’を当然ながら満たします．

反比例の関数 $y = \frac{a}{x}$ は，$x = 0$ では定義できないのでそこで不連続になりますが，関数の定義域から $x = 0$ を除けば上の定義を満たす関数になります．このように不連続な関数もあります．参考になる不連続関数を紹介しましょう．しばしば君たちがテストで悩まされるガウスの関数 $y = [\,x\,]$（ガウス x と読みます）は「$[\,x\,]$ = 実数 x を超えない最大の整数」によって定義される関数です（例えば，$[2.3] = 2$，$[3] = 3$，$[-4.5] = [-5 + 0.5] = -5$）．この関数のグラフは階段状になっていることを確認しましょう．

また上述の関数の定義から，関数は 1 個の式のみで表される必要はなく，定義域の異なる範囲では異なる式を用いて定義することも許されます．例えば「符号関数」と呼ばれる $\operatorname{sign} x$ は

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ \ \ 0 & (x = 0) \\ +1 & (x > 0) \end{cases}$$

で定義されます．

また上述の定義によると，関数は必ずしも式で表す必要はなく，「ディリクレの関数」と呼ばれるいたるところ不連続な関数

$$\overset{\text{ファイ}}{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ は有理数}) \\ 0 & (x \text{ は無理数}) \end{cases}$$

なども数学理論に重要な関数として知られています．

さらに，関数の定義についてはその定義域として実数の範囲とするとは規定していません．したがって，定義域を自然数にとることもできます．例えば n を自然数として，

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

を n の **階乗** といいますが，$f(n) = n!$ を自然数の変数 n に対して定義された関数と見なすことができます．

3.7.2　関数概念の拡張

関数 $y = f(x) = 2x + 1$ を例として考えましょう．我々は，$f(x)$ は $2x + 1$ を表す‘便利な記号’であると見なしていますね．ここで，$f(x) = 2x + 1$ に対して集合論による新しい解釈をしてみましょう．まず，変数 x はいろいろな値をとれるのでその各々の値を考え，x を実数の集合の各々の要素と見なしましょう．すると，$2x + 1$ は，変数 x の式というよりは，各々の x に対応する関数値と見なされます．よって，$2x + 1$ も x と同様に実数の集合の要素と見なされます．そう考えておいて，$f(x) = 2x + 1$ の‘f’は任意に定めた実数 x を 1 つの実数 $2x + 1$ に移す役割をもつと考えてみましょう．くだけた言い方をすると，f をカメラのレンズにたとえて，‘f’は被写体の‘点’x に作用して，それをフィルム上の‘点’$2x + 1$ に写すと考えるわけです．本当ですよ．実際，数学的には，‘f は実数 x を実数 $2x + 1$ に **写像** する’といいます[11]．より正確な表現をすると，‘f は実数の集合の任意の要素 x に実数の集合の 1 つの要素 $2x + 1$ を対応させる’といいます．f は x に $2x + 1$ を対応させるのですから，もちろん対応の規則を定めています．

[11] このとき，x を **原像**，$2x + 1$ を x の **像** といいます．

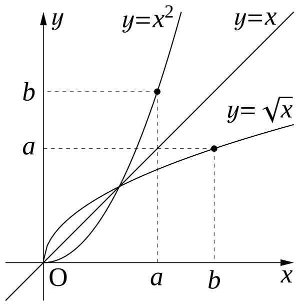
このような f の役割を認めることにして，f を“関数”と呼ぶことにしましょう．すると，一般の $f(x)$ に対しては,“関数 f は任意の実数 x を，その定める規則によって，1 つの実数 $f(x)$（関数値のこと）に移す（写像する）”ということができます．これが集合論的な関数の解釈です.

このように考えると,‘関数は集合の要素を（一般にはそれと異なる）集合の要素に移す（写す，写像する）’，または‘関数は集合の要素に集合の要素を対応させる’というより広い解釈が可能になります．そこで，関数をもっと拡張して考えることができます．例えば，平面図形の変換を行うときなどに，図形上の点 P をある規則で 点 Q に移すとき，関数 f がその役割を担うと考えることが可能です．そのとき，それを $f(\mathrm{P}) = \mathrm{Q}$ と表して，f を平面上で定義された関数と考えます．君たちは，このような関数 f を「写像 f」とか「変換 f」という呼び名で学びます.

次に，後の §§ のために,「逆関数」および「合成関数」と呼ばれる関数の議論をしておきましょう.

3.7.2.1　逆関数

関数 $y = x^2\ (x \geqq 0)$ において，x に y を代入し同時に y に x を代入する，つまり x と y を交換してみましょう．この変換によって $x = y^2\ (y \geqq 0)$ が得られます．y を x で表すと，$y \geqq 0$ だから，関数 $y = +\sqrt{x}$ が得られます．これは，x の値を定めると対応する y の値がただ 1 つ定まるので，確かに関数です.



関数 $y = x^2\ (x \geqq 0)$ と関数 $y = +\sqrt{x}$ のグラフを描いてみると，直線 $y = x$ に関して互いに対称になっていることがわかります．何故かというと,‘変数 x と y を交換することは，x の値と y の値を全ての x，y に対して交換すること’なので，グラフ上の任意の点 $(a,\ b)$ が点 $(b,\ a)$ に移されるからです．関数の言葉でいうと，$b = a^2\ (a \geqq 0)$ が成り立つとき $a = \sqrt{b}$ ですから，関数 $y = x^2$ が実数 a を実数 b に写像する（移す）とき，関数 $y = \sqrt{x}$ は，逆に，実数 b を実数 a に移します．このように関数 $y = \sqrt{x}$ は関数 $y = x^2$ と逆の働きをします.

一般の関数 $y = f(x)$ についても同様のことがいえます．x と y を交換して得られる $x = f(y)$ において y を x で表したとして，それを $y = f^{-1}(x)$[12] と表記しましょう．単に表し方を変えただけなので，当然ながら

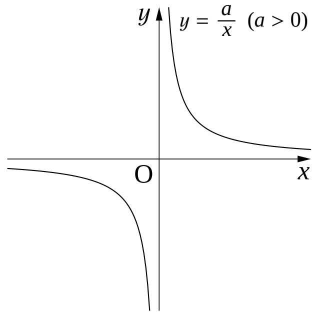
$$x = f(y) \iff y = f^{-1}(x)$$

が成立します．したがって，同様に

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

も成立します．$y = f^{-1}(x)$ が関数になるとき，それを関数 $y = f(x)$ の **逆関数** といいます．関数と逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して互いに対称になります．関数の言葉を用いると，$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ より，関数 f が実数 a を実数 $b = f(a)$ に移すとき，その逆関数 f^{-1} は，実数 b を実数 $a = f^{-1}(b)$ に移します．君たちは，第 6 章で「指数関数」と「対数関数」を習います．そこで，その 2 つの関数が互いに逆関数になっていることを学ぶでしょう．

1 次関数 $y = -x + b$ や反比例の関数 $y = \dfrac{a}{x}$ は，x と y をとり換えてみればすぐわかるように，その逆関数に一致するので，グラフは直線 $y = x$ に関して対称になります．



なお，記号 f^{-1} は面白い記法で，数についての関係 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$，よって $a^{-1} \cdot a = 1$ を思い出させます．それは関数 f とその逆関数 f^{-1} が逆の働きをすることと密接に関係しています．そのことについては合成関数の後で議論しましょう．

3.7.2.2　**合成関数**

平行移動を学んだときに，関数 $y = f(x)$ の x に $x - p$ を代入すると，そのグラフを x 方向に p だけ平行移動したグラフに対応する関数 $y = f(x - p)$ が得られました．また，2 次関数 $y = x^2 + 2x + 3$ で x に $x^2 - 1$ を代入すると 4 次関

[12] $f^{-1}(x)$ は‘ f インバース (inverse) x ’と読みます．この表記法は数 a の逆数 $\frac{1}{a}$ を a^{-1} のように表すのと同種のものです．

数 $y = (x^2 - 1)^2 + 2(x^2 - 1) + 3$ が得られますね．一般に，関数 $y = f(x)$ の変数 x に関数 $g(x)$ を代入すると関数の関数

$$y = f(g(x))$$

が得られます．この新しい関数 $y = f(g(x))$ は関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ を合わせて 1 つの関数を作ったわけですから，それを **合成関数** といいます．実際，合成関数 $y = f(g(x))$ は，関数 g が実数 x を実数 $g(x)$ に写像し，さらに関数 f が実数 $g(x)$ を実数 $f(g(x))$ に写像しています．

合成関数 $y = f(g(x))$ は，慣習上

$$y = f \circ g(x)$$

と表して[13)]，関数 g と f の合成関数といいます．何やら f と g の積 $f \cdot g$ みたくなってきましたが，形式的には積のように考えてよいことが以下の議論で示されます．逆関数と合成関数に関する 1 つの定理を導く形で話を進めていきましょう．

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $y = f^{-1}(x)\,(\Leftrightarrow x = f(y))$ を考えます．x は実数，y は x を逆関数 f^{-1} で写像した実数です．$y = f^{-1}(x)$ の両辺を関数 f でさらに写像しましょう：

$$f(y) = f \circ f^{-1}(x).$$

このとき，$x = f(y)$ が成立していますから，

$$x = f \circ f^{-1}(x)$$

が成り立ちます[14)]．よって，上式の右辺は x を x に移す恒等関数 $\mathbf{1}(x) = x$ です：

$$f \circ f^{-1}(x) = \mathbf{1}(x).$$

同様に，$x = f(y)$ の両辺を f^{-1} でさらに写像して，$f^{-1} \circ f(y) = y\ (= \mathbf{1}(y))$ が得られます（確かめましょう）．上式の等号は全ての y に対して成立します．よって，上式は恒等式なので，y を x に替えても構いません：$f^{-1} \circ f(x) = x$.

---

13) $f \circ g$ は‘ f マル g ’と読んでよいでしょう．

14) $x = f(y)$ の y に $y = f^{-1}(x)$ を代入しても同様の議論ができます．

さらに恒等式のときは，変数を省略した書き方も許されます：$f^{-1} \circ f = \mathbf{1}$．したがって，定理

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathbf{1}$$

が成立します．この定理は，‘写像の逆写像は何もしない’ことを表しています．逆関数のところで，関数と逆関数が逆の働きをする（f が a を b に移すとき f^{-1} は b を a に移す）ことを知りましたが，そのことを表したのがこの定理です．ちょうど，数に成立する関係 $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ の対応物になっていますね．逆関数の記号に f^{-1} を用いた理由がこれで納得できますね．

3.7.2.3　写像

集合論では，関数は極限にまで一般化されていて，関数を集合と関連づけるときは関数という代わりに **写像** という用語のほうが多く使われます．この章の終りに写像の表現の記法を学んでおきましょう．我々がとり扱う集合は，多くの場合，自然数や実数・平面や空間上の点・「ベクトル」といわれる向きをもつ線分・等々ですが，12 の約数・7 の倍数・1 年 1 組の生徒など，その集合が明確なもの，つまりその要素がその集合に属すことが明確で要素どうしが互いに区別がつくものなら何でも構いません．

さて，写像 f が，集合 A の任意の要素 x に，f の定める規則で，（一般には，集合 A とは異なる）集合 B の 1 つの要素 $f(x)$ を対応させる（または，写像 f が，集合 A の任意の要素 x を，f の定める規則で，集合 B の 1 つの要素 $f(x)$ に写す）ことができる場合を考えます．そのとき，集合 A を写像 f の定義域といい，集合 B を写像 f の「終域」[15]といいます．このとき，写像 f を表すのに

$$f : A \to B \quad \text{あるいは} \quad A \xrightarrow{f} B$$

と書く習慣があります．また，対応の規則を明示して，

$$f : A \to B,\ x \mapsto f(x)$$

と書くこともあります．

[15] 終域は f の値域を含む集合です．値域は明確に表すことが面倒なことも多く，終域がよく用いられます．

例えば，関数 $y = f(x) = 2x + 1\ (0 < x < 1)$ については，実数が実数に移されるので，実数の集合を $\boldsymbol{R}$ と表すと，

$$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ x \mapsto 2x + 1\ (0 < x < 1)$$

となります．