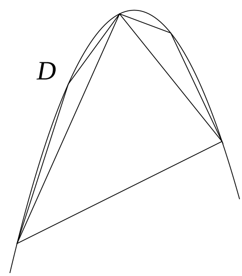
第14章　積分

積分とは‘全体を微小な部分に分け，それらをまた積み上げること’の意味で，その手法の起源は，微分の誕生より遥かに早く，古代ギリシャ時代は紀元前 3 世紀のアルキメデス（Archimedes，前 287 頃〜212）にまでさかのぼります．彼は著書『放物線の求積法』において放物線と直線で囲まれた図形 D の面積を求めるため，頂点が放物線上にある一連の三角形を用いて D を覆い尽くす方法を用い，さらに D に外接する多角形も用いて，はさみうちの原理から厳密に面積を求めました[1]．



彼の方法は，2000 年の時を経て，17 世紀の後半にニュートンやライプニッツによって構築された微分・積分法の基礎的準備段階で多大な貢献をしました．事実，ライプニッツは“アルキメデスの著作をきわめた者にとっては，近世の数学者たちの成功は驚くことではない”と述べています．

我々はアルキメデスの方法の本質を引き継ぎ，より簡単でより広い応用範囲をもつ「区分求積法」から積分に入っていきましょう．

積分法は面積や体積の計算だけでなく，ニュートンが行ったように，物体に働く力から物体の速度や位置を計算するときなどにも用いられます．位置を微分すれば速度になることは既に学びましたが，逆に速度から位置を求めることも必要になります．したがって，一般に，微分すると $f(x)$ になる関数 $F(x)$ がニュートンの関心事でした．この $f(x)$ から $F(x)$ を求めることが $f(x)$ のグラフの‘面積’を求めること，つまり $f(x)$ の積分に同等なことが示されました．

[1] アルキメデスの方法は高木貞治先生の名著『解析概論』（岩波書店）において具体的に論じられています．その部分は高校生にもわかる書き方になっています．

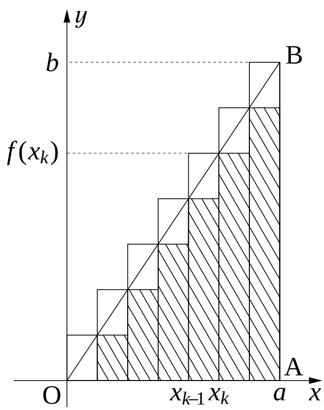
‘微分と積分は反対の演算’だったのです．このことは「微積分学の基本定理」として表されました．それは積分を学ぶ際の最も重要な定理であり，多くの問題を解くときの指針になっています．

§14.1　区分求積法

積分を最もよく理解するために「区分求積法」から入っていきましょう．この方法はまさに‘目で見て’納得できます．

14.1.1　直角三角形の区分求積

底辺 OA $= a$，高さ AB $= b$ の直角三角形 △OAB の面積 S は $\dfrac{1}{2}ab$ ですね．ここでは，△OAB を千切り状に細分し，個々の細片を長方形（以下，これを‘短冊（たんざく）’といいましょう）で近似してその微小面積を求め，そしてそれらの総和として △OAB の面積を近似計算しましょう．そのときに，近似の面積が △OAB の面積 S より小さいもの S_m と，大きいもの S_M を考えて，△OAB を無限に細分した極限で $S_m = S_M = \dfrac{1}{2}ab$ が成り立つことを示しましょう．よって，この方法は「はさみうちの原理」を用いた厳密なとり扱いになります．



△OAB の底辺 OA を n 等分し，各分点から底辺に対する垂線を引いて △OAB を区分します．O を原点，A を x 軸上の点とすると，△OAB の斜辺 OB が表す直線は

$$y = f(x) = \frac{b}{a}x$$

と表されます．このとき，底辺 OA の各分点の x 座標を x_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$，区分幅を $\Delta x\,(= x_k - x_{k-1})$ とすると

$$x_0 = 0,\ \ x_k = k\Delta x,\ \ x_n = n\Delta x = a \quad \left(\Delta x = \frac{a}{n}\right)$$

と表され，$x = x_k$ のときの斜辺の高さは $f(x_k)$ です．

△OAB を区分した各部分は平べったい台形になりますね．我々は，一般的な場合に備えて，その台形の面積を短冊の面積で近似しましょう．はさみうちの議論に向けて，短冊は台形に含まれるものと台形を含むものの 2 種類を用意します：区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ における $f(x)$ の最小値は $f(x_{k-1})$，最大値は $f(x_k)$ なので，それらは底辺が区分幅 $\varDelta x$，高さが $f(x_{k-1})$ と $f(x_k)$ の短冊とします．このように設定すると，△OAB の面積 S を 2 通りの近似 S_m，S_M：

$$S_m = f(x_0)\varDelta x + f(x_1)\varDelta x + \cdots + f(x_{n-1})\varDelta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x,$$
$$S_M = f(x_1)\varDelta x + f(x_2)\varDelta x + \cdots + f(x_n)\varDelta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

で表すことができます．S_m は △OAB に含まれる階段状の領域（図の斜線部分）の面積，S_M は △OAB を含む階段状の領域の面積ですね．よって，

$$S_m < S < S_M$$

が成り立ちます．

分割の個数 n を無限にしていった極限で S_m，S_M を計算しましょう．

$$\varDelta x = \frac{a}{n}, \qquad x_k = k\varDelta x, \qquad f(x_k) = \frac{b}{a}x_k$$

ですから，

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a}(k-1)\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1),$$
$$S_M = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{b}{a}k\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n} = \frac{ab}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k.$$

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{2}n(n-1), \qquad \sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

より，$n \to \infty$ のとき

$$S_m = \frac{ab}{n^2}\frac{1}{2}n(n-1) \to \frac{1}{2}ab, \qquad S_M = \frac{ab}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1) \to \frac{1}{2}ab$$

が得られます．

したがって，はさみうちの原理より，$n\to\infty$ の極限で

$$S=S_m=S_M=\frac{1}{2}ab$$

が成り立ち，△OAB を区分して面積を求めることが正当化されます．事実，S_m と S_M の差異 S_M-S_m は，△OAB の斜辺を含む n 個の微小短冊（図の白抜きの長方形）の面積の総和であり，$n\to\infty$ の極限で個々の短冊が消滅するのはもちろん，それらの総和も

$$S_M-S_m=\frac{ab}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\{k-(k-1)\}=\frac{ab}{n^2}n\to 0$$

のように消え失せます．よって，△OAB の面積 S は S_m と S_M のどちらを用いても正しく計算できます．以上のように，面積・体積などの量を細分し，簡単な図形で近似し，近似値の和を求め，その極限値としてその量の値を求める方法を **区分求積法** といいます．

ここで，△OAB の斜辺の傾きを m，底辺 OA の長さを x とすると，斜辺を表す直線は $y=f(x)=mx$，高さ AB は mx になりますね．そのとき，△OAB の面積は

$$S=\frac{1}{2}mx^2$$

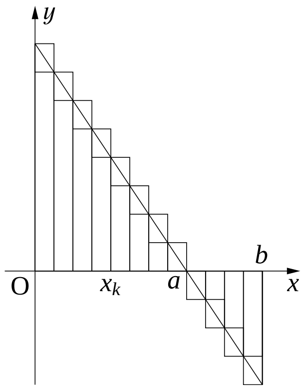
と表され，S は x の関数になるので，S を $S(x)$ と書きましょう．$S(x)$ は直線 $y=f(x)=mx$ と x 軸の間の区間 $[0,\ x]$ における面積と見なせますね．このとき，$S(x)$ を微分すると

$$S'(x)=mx=f(x)$$

となるので，導関数 $S'(x)$ は求積を行った関数 $f(x)$ に一致しましたね．これは単なる偶然ではありません．そのことは間もなく理解されるでしょう．

14.1.2　x 軸より下にある直線の区分求積

前の §§ で，関数 $f(x)$ とその区分求積 $S(x)$ の間に，関係 $S'(x)=f(x)$ が見られました．その関係は非常に重要であると考えられます．その関係が任意の関数に対して成り立つように区分求積を拡張することを企てましょう．



関数が負の場合も考慮して区分求積を考えましょう．直線 $y = f(x) = m(x-a)$（ただし，$a > 0,\ m < 0$）の区間 $[0,\ b]$ $(b > a)$ についての区分求積を考えます．今度は，$x < a$ のとき $f(x) > 0$，そして $x > a$ のとき $f(x) < 0$ です．区間 $[0,\ b]$ を n 等分して，区分幅を $\varDelta x = \dfrac{b}{n}$，分点を $x_k = k\varDelta x\ \ (k = 0,\ 1, \cdots,\ n)$ とすると，区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ の微小短冊の‘面積’は大きいほうが $f(x_{k-1})\varDelta x$，小さいほうが $f(x_k)\varDelta x$ です．前の §§ の場合と同じですね．ただし，こうすると，$f(x) < 0$ の区間 $[a,\ b]$ においては短冊の‘面積’は負の値をもつとして勘定することになり，その結果，区間 $[a,\ b]$ での区分求積への寄与は x 軸より下にある三角形の面積にマイナスをつけたものになります．このように区分求積を拡張して定義しましょう．何故そうするかはすぐわかります．

この区分求積を $S(b)$ と書くと，前の §§ の S_M，S_m に対応して

$$S(b) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x,$$

または

$$S(b) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

で与えられます．どちらで計算しても

$$S(b) = \frac{1}{2}mb(b-2a)$$

となるのを確かめるのは君の仕事です．

$S(b)$ の値を‘面積’の観点から確かめてみましょう．$m < 0$ に注意すると，区間 $[0,\ a]$ では $\dfrac{1}{2}a(-ma)$，区間 $[a,\ b]$ では負の面積 $\dfrac{1}{2}m(b-a)^2$ となるので，それらを加えると区分求積の結果に一致しますね．事実，$b = 2a$ のときは，x 軸より上の面積と下の面積（> 0 として）が等しくなるので，$S(2a) = 0$ です．

$S(b)$ を微分すると，$S'(b) = m(b-a)$，よって

$$S'(x) = m(x-a) = f(x)$$

となって，直角三角形の場合と同様に，$S(x)$ の導関数は‘求積される関数’$f(x)$ になりますね．区分求積で $f(x) < 0$ の区間の‘面積’を負の値にしたのは $S'(x) = f(x)$ が $f(x) < 0$ の場合でも成立するようにするためです．

さらに，$0 < b < a$ とした場合には区間 $[0,\ b]$ で直線 $y = f(x)$ と x 軸の間にある領域は台形状になり，その面積は，台形公式より

$$\frac{1}{2}b(f(0) + f(b)) = \frac{1}{2}b(-ma + m(b-a)) = \frac{1}{2}mb(b-2a) = S(b)$$

となって区分求積の結果に一致します．このことは，区間 $[0,\ b]$ における区分求積の計算においては a と b の大小関係を考慮する必要がないことを意味します．これは，区分求積は面積の計算に役立ちますが，それ自身は必ずしも面積を与えないからです．

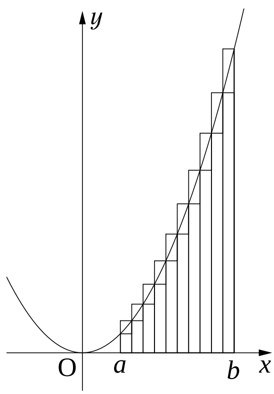
さらに，$b < 0$ とした場合には，区間 $[b,\ 0]$ にある図形はやはり台形になり，その面積は

$$\frac{1}{2}|b|(f(0) + f(b)) = \frac{1}{2}|b|(-ma + m(b-a)) = -\frac{1}{2}mb(b-2a) = -S(b)$$

となるので，区分求積 $S(b)$ はその面積の反対符号の値になりますね．これは，$b < 0$ とした場合には，‘区分幅’$\varDelta x = \dfrac{b}{n}$ が負になるためです．このことは積分を拡張して定義するときに役立つでしょう．

14.1.3　放物線の区分求積

区分求積ができるのは直線だけではありません．放物線 $y = f(x) = x^2$ の区間 $[a,\ b]$ における区分求積 $S(b)$ を求めましょう．区間 $[a,\ b]$ を n 等分して区分幅を $\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$ とすると，各分点は $x = x_k = a + k\varDelta x$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots, n)$ と表されます．簡単のために $a > 0$ とすると，区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ における $f(x)$ の最小値は $f(x_{k-1})$，最大値は $f(x_k)$ となるので，



$$S_m = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x, \qquad S_M = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x,$$

とすると，$S_m < S(b) < S_M$ が成り立ちますね.

S_M を計算しましょう．$\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$ に注意して，

$$\begin{aligned}S_M &= \sum_{k=1}^{n}(a+k\varDelta x)^2\varDelta x = \sum_{k=1}^{n}\{a^2+2ak\varDelta x+k^2(\varDelta x)^2\}\varDelta x \\ &= \{a^2n+2a\frac{1}{2}n(n+1)\varDelta x+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)(\varDelta x)^2\}\varDelta x \\ &\to \{a^2+a(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^2\}(b-a)=\frac{1}{3}(b^3-a^3) \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

が得られます.

S_m も同じ結果になりますが，それを確かめるために $S_M - S_m$ を計算しましょう：

$$S_M - S_m = \sum_{k=1}^{n}\{(a+k\varDelta x)^2-(a+(k-1)\varDelta x)^2\}\varDelta x = \sum_{k=1}^{n}(2a+(2k-1)\varDelta x)(\varDelta x)^2$$

より

$$S_M - S_m = \frac{(b+a)(b-a)^2}{n} \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

となりますね.

したがって，はさみうちの原理より

$$S(b) = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

が得られ，b を x とおいて微分すると，またもや $S'(x) = x^2 = f(x)$ が成り立ちます．このことは関係 $S'(x) = f(x)$ が一般の関数に対して成り立つことを強く示唆しています.

§14.2　定積分

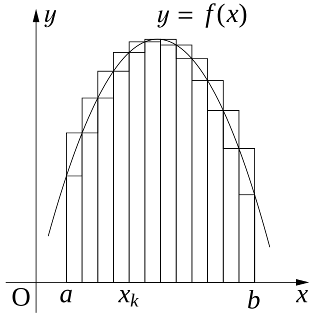
さて，いよいよ積分にとりかかりましょう．この§で行うのは「定積分」と呼ばれているもので，一般の関数を対象とし，区分求積で扱った‘面積’の計算をより厳密に行います.

14.2.1　定積分の定義

関数 $f(x)$ は，当分の間，区間 $[a,\ b]$ で連続（よって，そこで有界）であるとしましょう．$f(x)$ が連続なとき積分は可能です．区間 $[a,\ b]$ に対して，分点 x_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

のようにとり，区間 $[a,\ b]$ を n 個の小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ に分割しましょう．そのとき，各区分幅 $\varDelta x_k = x_k - x_{k-1}$ は等分割 $\varDelta x = \dfrac{b-a}{n}$ である必要はありません．$f(x)$ は一般に増減するので，区分求積の S_m，S_M に当たるものはちょっと複雑になります．分割した各小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ における $f(x)$ の最小値を m_k，最大値を M_k として，2 つの級数



$$S_m = \sum_{k=1}^{n} m_k \varDelta x_k, \qquad S_M = \sum_{k=1}^{n} M_k \varDelta x_k$$

を考えます．以下，全ての k に対して $\varDelta x_k \to 0$ となるように $n \to \infty$ の極限を考え，そのとき S_m と S_M が同一の極限値 I に収束することを示しましょう．この収束値の一致は $f(x)$ の連続性より得られますが，もしそうでないときは定積分は定義されません．

証明は後で行いますが，$S_m \to I$，$S_M \to I$ が成り立つとき，各小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ 上の任意の t_k $(x_{k-1} \leqq t_k \leqq x_k)$ に対して

$$m_k \leqq f(t_k) \leqq M_k, \text{　よって　} S_m = \sum_{k=1}^{n} m_k \varDelta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \varDelta x_k \leqq \sum_{k=1}^{n} M_k \varDelta x_k = S_M$$

となるので，無限級数

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \varDelta x_k \qquad (n \to \infty \text{ のとき } \varDelta x_k \to 0 \text{ とする})$$

も，はさみうちの原理より I に収束し，そのとき連続関数 $f(x)$ は **積分可能** であるといわれます．

したがって，特に $t_k = x_k$ または x_{k-1} とすると

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x_k, \quad \text{または} \quad I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\varDelta x_k$$

と表すことができます．この I を関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分** といい，

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

で表します（記号の読み方や意味は後で説明します）．定積分を定義するにはこのように少々複雑な手続きが必要です．

さて，上の定積分を正当化しましょう．関数 $f(x)$ が連続なとき S_m，S_M は，$n \to \infty$ のとき，同じ極限値に収束することを示しましょう．

$$S_M - S_m = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\varDelta x_k$$

において，M_k と m_k は各小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ における $f(x)$ の最大値と最小値ですが，その差 $\varepsilon(k) = M_k - m_k$ は，$f(x)$ の連続性から，区分幅 $\varDelta x_k = x_k - x_{k-1} \to 0$ のとき，k によらずに 0 になりますね．そこで，n を固定したときの $\varepsilon(k)$ の最大値を ε_n とすると，$\varepsilon_n \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立ち，よって

$$(0 <)\, S_M - S_m = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(k)\varDelta x_k < \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_n (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon_n (x_n - x_0) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立ち，したがって，$|S_M - S_m| \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立つので，$n \to \infty$ のとき $S_m \to I$ ならば $S_M \to I$ です．

S_m と S_M が有界であることは，m_k の最小値を m，M_k の最大値を M とすると

$$\sum_{k=1}^{n} m\varDelta x_k < S_m < S_M < \sum_{k=1}^{n} M\varDelta x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} \varDelta x_k = x_n - x_0 = b - a$$

からわかります．

最後に，$S_M = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\varDelta x_k$ は分割数 n と共に減少し，$S_m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\varDelta x_k$ は反対に増加して，それらは同一の極限値 I に向かうことを示しましょう．例えば，

$n = n_x$ のときの隣り合う分点 x_{k-1}，x_k $(x_{k-1} < x_k)$ が $n = n_{x'}$ のときに

$$x_{k-1} = x'_{l-1} < x'_l < x'_{l+1} = x_k$$

になったとし，区間 $[x'_{l-1},\ x'_l]$，$[x'_l,\ x'_{l+1}]$ における最大値をそれぞれ M'_l，M'_{l+1} とします．すると，$M'_l \leqq M_k$，$M'_{l+1} \leqq M_k$ だから

$$M_k \mathit{\Delta} x_k \geqq M'_l \mathit{\Delta} x'_l + M'_{l+1} \mathit{\Delta} x'_{l+1} \qquad (\mathit{\Delta} x'_l = x'_l - x'_{l-1})$$

が成り立ち，したがって

$$S_M = \sum_{k=1}^{n_x} M_k \mathit{\Delta} x_k \geqq \sum_{l=1}^{n_{x'}} M'_l \mathit{\Delta} x'_l$$

となります．つまり，S_M は n と共に減少します．このとき，S_M は下に有界なので，その数列は収束します．同様にして，S_m は n と共に増加し，上に有界なので，その数列は収束します（示すのは君の仕事にしましょう）．このとき，$S_M - S_m \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つので，それらは同じ極限値 I に収束します．

以上のことから，任意の t_k $(x_{k-1} \leqq t_k \leqq x_k)$ に対して，$m_k \leqq f(t_k) \leqq M_k$ が成り立つので

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \mathit{\Delta} x_k \qquad \text{（}n \to \infty \text{ のとき } \mathit{\Delta} x_k \to 0 \text{ とする）}$$

となりますね．これは，この定積分が短冊のとり方によらない，つまり底辺 $\mathit{\Delta} x_k$，高さ $f(t_k)$ の短冊としたとき t_k によらずに積分が確定することを意味します[2]．

[2] 定積分の定義を完全に厳密にするときは議論はより複雑になります．区間 $[a,\ b]$ の各小区間 $[x_{k-1},\ x_k]$ 上の任意の t_k $(x_{k-1} \leqq t_k \leqq x_k)$ に対して，区分幅 $\mathit{\Delta} x_k$ を小さくしていく方法に**よらずに**

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \mathit{\Delta} x_k \qquad (n \to \infty \text{ のとき } \mathit{\Delta} x_k \to 0 \text{ とする})$$

が有限な一定値 I になるとき，$f(x)$ は区間 $[a,\ b]$ で積分可能（リーマン積分可能）であるといい，この I を $f(x)$ の a から b までの定積分といいます．この積分の定義は先の定義よりも強い条件が課せられてるために，$f(x)$ が不連続関数の場合でも積分が可能な場合があります．

関数 $f(x)$ の a から b までの定積分 I を表す

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x_k \qquad (\varDelta x_k = x_k - x_{k-1}),$$
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に現れる $\int$ や dx の記号は，ニュートンと並ぶ微積分学の創始者，ライプニッツが使用しました．

$f(x_k)\varDelta x_k$ は底辺 $\varDelta x_k$，高さ $f(x_k)$ の短冊の‘面積’ですが，$n\to\infty$ のとき $\varDelta x_k \to 0$ です．彼は $\varDelta x_k$ を x の増分と見なして，$n\to\infty$ のとき，それは限りなく 0 に近づく増分，つまり §§12.4.1.1 でコメントした無限小量の意味での微分 dx であると考えました．これが記号 dx の由来です．その考えは厳密には正しくはありませんが，‘いくらでも細くなる短冊’のイメージを的確に表しています．記号 $\int$ は integral（インテグラル）と読み，和 (sum) をとる記号 $\sum$ の意味で用いられます．$\int$ は昔使われていたラテン語の S の字体，もしくはドイツ語の S の筆記体であるといわれます．したがって，「$\int_a^b f(x)\,dx$」は「区間 $[a,\ b]$ を無限小幅 dx の小区間に分割し，各 x における無限小幅の短冊の‘面積’$f(x)\,dx$ を求めて，$x=a$ から b までそれらを $\int = \sum$ したもの」を意味します．積分される関数 $f(x)$ を **被積分関数** といい，$\int_a^b$ の a は定積分の **下端**，b は **上端** と呼ばれます．

積分記号を用いると，前の §§で行った関数 $f(x) = x^2$ の区間 $[a,\ b]$ における区分求積 $S(b)$ は

$$S(b) = \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

と表されますね．積分を実行した後では，積分記号の中の変数（積分変数）x は消え失せ，積分の上端 b と下端 a のみが残りますね．よって，定積分は上端と下端についての 2 変数関数になります．積分変数はどの文字を用いてもよいので，x の代わりに t などを用いて $\int_a^b t^2\,dt$ と書いても構いません．積分変数のように，計算の途中でのみ現れる変数のことを **ダミー変数** といいます（dummy（ダミー）＝替え玉，身代わり）．

なお，定積分の定義に現れる分割幅 $\varDelta x_k$ は，後ほど出てくる「置換積分」の議論を除くほとんどの場合に，k によらない一定の分割幅 $\varDelta x$ で済ませること

ができます．よって，簡単のために以後の議論では区分求積を定積分と同一視することを許しましょう．

14.2.2　定積分の基本性質と拡張

定積分の定義から以下の基本性質が導かれます：

$$(1^\circ)\quad \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \qquad \text{（複号同順）},$$

$$(2^\circ)\quad \int_a^b c\,f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad \text{（}c\text{ は定数）},$$

$$(3^\circ)\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a < c < b),$$

$$(4^\circ)\quad [a,\ b] \text{ で } f(x) \leqq g(x) \text{ ならば } \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx,$$

$$(5^\circ)\quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx \qquad (a < b).$$

これらは定積分の定義と‘面積’の観点からほぼ明らかでしょう．(1°) については，その積分の近似の和は，区分求積の記号を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k) \pm g(x_k)\}\varDelta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x \pm \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\varDelta x$$

が成り立ち，$n \to \infty$ とすれば積分の関係になります．(2°) も同様なので君たちに任せます．

(3°) は，c が小区間 $[x_{m-1},\ x_m]$ にあるとすると，

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x = \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)\varDelta x + \sum_{k=m}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

と分けておいて，$n \to \infty$ とすると，そのとき $m \to \infty$，また $x_{m-1} \to c$，$x_m \to c$ となるので成立します．

(4°) と (5°) は練習問題にしましょう．(5°) のヒント：$|x+y| \leqq |x| + |y|$ です．

これらに加えて，積分を拡張するための新たな定義

$$(6^\circ)\quad \int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

$$(7^\circ)\quad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad (a \leqslant b)$$

を定積分の性質としてつけ加えましょう．

(6°) はごく当然な性質です．定積分の定義をする際に，積分の下端 < 上端として議論を展開したのでこの性質が要請されます．

(7°) の性質は定積分を下端 > 上端の場合に拡張するときの要請です．この拡張がごく自然であることを示しておきましょう．a，b の大小を問わないとき，a を下端，b を上端とする定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を以下のように一般化できます．a と b の間の区間 ($[a,\ b]$ または $[b,\ a]$) を D として，区間 D を n 等分し，それらの分点を ‘ a に近いほうから ’ $a = x_0$，x_1，$x_2, \cdots$，$x_n = b$ とすると $x_k = a + k\varDelta x_{ab}$，$\varDelta x_{ab} = \dfrac{b-a}{n}$ と表されて，$\varDelta x_{ab}$ は $b > a$ のとき正，$b < a$ のとき負になります．このとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x_{ab}$$

が成り立ち，$a < b$ のときは元の定積分の定義と同じになります．一方，この定義によると

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\{f(x_n) + f(x_{n-1}) + \cdots + f(x_1)\}\varDelta x_{ba}$$

となるので，$\varDelta x_{ba} = \dfrac{a-b}{n} = -\varDelta x_{ab}$ に注意すると

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x_{ab} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

となり，(7°) が導かれます．この拡張によって今まで区分幅 (> 0) としていた $\varDelta x$ を x の増分 ($\leqslant 0$) と見なすことができます．この $\varDelta x \leqslant 0$ の拡張は定積分 $\int_a^x f(t)\,dt$ の導関数 $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt$ を議論するときに有用です．

§14.3　微積分学の基本定理と原始関数・不定積分

14.3.1　微積分学の基本定理

定積分を区分求積によって求めるのは，無限級数を求めるのと大差なく，多くは望めません．また計算も容易ではありません．微積分学の創始者たちは積分を容易に求めるための基本定理を見いだしました：定積分

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

の被積分関数 $f(t)$ を区間 I で連続な関数，a を I 上の点とするとき，I 上の任意の点 x に対して

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{（微積分学の基本定理）}$$

が成り立ち，これを **微積分学の基本定理** といいます．この定理は‘積分と微分は互いに逆の演算である’ことを述べています．以下，これを示しましょう．

まず，導関数の定義に従って $G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x}$ を計算します．前の §§ の定積分の基本性質 (3°)（と，$\Delta x < 0$ のとき (7°)）より

$$G(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

となるので

$$G(x+\Delta x) - G(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

が得られ，よって，

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

となります．

次に，$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ が Δx で‘割り切れる’形になるように工夫しましょう．x と $x+\Delta x$ の間の閉区間を ΔI とすると，$f(x)$ は区間 ΔI で連続で，そこでの最大値を M，最小値を m とすると，ΔI 上の任意の点 t に対して，

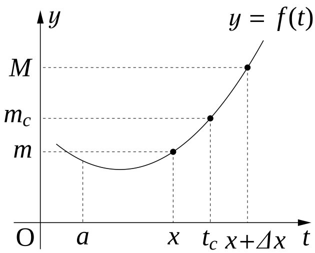
$$m \leqq f(t) \leqq M,\ \text{よって}\quad m|\Delta x| \leqq f(t)|\Delta x| \leqq M|\Delta x| \qquad (*)$$

が成り立ちます．また，基本性質（4°）より，$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$（c は定数）に注意すると，$m \leqq f(t) \leqq M$ から，$\Delta x > 0$ のとき

$$m\Delta x \leqq \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \leqq M\Delta x \qquad (**)$$

が成り立ちます．もし $\Delta x < 0$ のときはそれらの不等号の向きが反対のものが得られます．

さて，$f(t)$ は $\Delta\mathrm{I}$ で連続で, そこで $m \leqq f(t) \leqq M$ ですから，$m \leqq m_c \leqq M$ を満たす任意の m_c に対して，$f(t_c) = m_c$ となる t_c が $\Delta\mathrm{I}$ 上に存在します[3]．よって，このこと，および $(*)$，$(**)$ から，



$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t_{\Delta x})\,dt = f(t_{\Delta x})\Delta x$$

を満たす $t_{\Delta x}$ が $\Delta\mathrm{I}$ 上に存在します[4]．したがって,

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t_{\Delta x})\Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} f(t_{\Delta x})$$

となります．ここで，$f(t)$ は連続関数なので $\lim_{\Delta x \to 0} f(t_{\Delta x}) = f(\lim_{\Delta x \to 0} t_{\Delta x})$ となり，$t_{\Delta x}$ は x と $x+\Delta x$ の間にあるので，$\Delta x \to 0$ のとき $t_{\Delta x} \to x$ となって

$$G'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

が得られ，微積分学の基本定理は証明されました．

14.3.2　原始関数と不定積分

前の §§で得られた微積分学の基本定理を利用しやすい形に直しましょう．導関数が恒等的に 0 になる関数は，接線の傾きを考えるまでもなく，定数関数だけですね．よって，2 つの微分可能な関数 $G(x)$，$F(x)$ に対して

---

3) 直感的には明らかですね．このことは「中間値の定理」と呼ばれ，大学では証明します．

4) これは「積分の平均値の定理」といわれます．

$$G'(x) = F'(x) \iff G(x) = F(x) + C \qquad (C \text{ は任意の定数})$$

が恒等的に成り立ちます．よって，

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = F'(x) \qquad (F'(x) = f(x))$$

となる関数 $F(x)$ を導入すると，この恒等式は

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \qquad (F'(x) = f(x),\quad C \text{ はある定数})$$

に同値です．上式の定数 C は定まります．上式で $x = a$ とすると積分値は 0 となるので，$0 = F(a) + C$ となり，したがって，

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad (F'(x) = f(x)) \qquad (\text{微分積分法の基本公式})$$

が得られます．この式は「微分積分法の基本公式」と呼ばれ，多くの関数に対してその定積分を求める際に有用です．例えば，被積分関数が $f(x) = x^\alpha$（α は実数）のとき，$F'(x) = f(x) = x^\alpha$ となる関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1,\ C \text{ は任意定数})$$

だから，$\alpha \neq -1$ のとき

$$\int_a^x t^\alpha\,dt = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

がたちどころに得られます．これを区分求積法で求めるのは難しいでしょう．

微分すると被積分関数 $f(x)$ になる関数 $F(x)$ は，積分法で決定的な役割をもち，関数 $f(x)$ の **原始関数** といわれます．定積分では必ず原始関数の差が現れますね．簡略記号

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

はよく用いられ，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b \qquad (F'(x) = f(x))$$

などと表します．

定積分には原始関数の差が現れますね．定積分を求めるには原始関数さえわかればよいので，積分を表すもっと簡単な記号を用いましょう．そのためには定積分の記号から上端・下端を削除した積分を考えて

$$f(x) = F'(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad （C \text{ は任意定数}）$$

のように定義し，その積分が原始関数＋任意定数を表すようにすると便利です．その積分 $\int f(x)\,dx$ を関数 $f(x)$ の **不定積分** といい，また不定積分に現れる任意定数 C は **積分定数** といわれます．不定積分の定義より

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x), \qquad \int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

が成り立ち，また定積分との関係については，強いて表すと

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

となります（通常はこんな書き方はしませんが）．

不定積分については基本性質

$$\text{(F1)} \qquad \int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad （k \text{ は定数}），$$

$$\text{(F2)} \qquad \int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

が成り立ちます．不定積分はその導関数によって定義されたので，これらの証明は両辺を微分してそれらが一致すれば完了します．

14.3.3　不定積分の基本公式

微分の公式から得られる不定積分の基本公式を以下にまとめましょう．公式に現れる C はもちろん積分定数です．それらの証明は両辺を微分して一致することを示せば済みます．

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \fallingdotseq -1),$$

$$\int (ax+b)^\alpha\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \fallingdotseq -1),$$

$$\int \{f(x)\}^{\alpha} f'(x)\,dx = \frac{\{f(x)\}^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \fallingdotseq -1),$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C,$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big) + C,$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\sin 2x\Big) + C,$$

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C,$$

$$\int \cos^n x\sin x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \qquad (a > 0, \quad a \fallingdotseq 1),$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C.$$

どれも両辺を微分して確かめます．$\int \tan x\,dx$ を積分して求めるには,

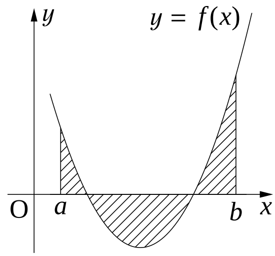
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\{\cos x\}'}{\cos x}$$

と変形して $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$ を利用します．$\int \sin^2 x\,dx$ については $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ を利用します．$\int \cos^2 x\,dx$ も同様です．

§14.4　定積分と面積

14.4.1　面積の基本公式

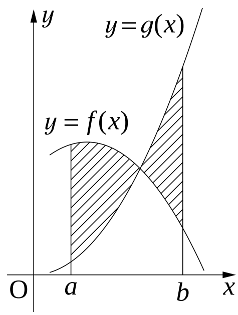
14.4.1.1　x の区間における面積の基本公式



区分求積で議論したように，関数 $f(x)$ の定積分は，$f(x) > 0$ の区間では $y = f(x)$ のグラフと x 軸の間の領域の面積を与え，$f(x) < 0$ の区間では $y = f(x)$ と x 軸の間の領域の面積の値を負にしたものを与えます．よって，区間 $[a,\ b]$ で $y = f(x)$ $(\leqq 0)$ のグラフと x 軸の間にある領域の面積 S は

$$S = \int_a^b |\, f(x)| \, dx$$

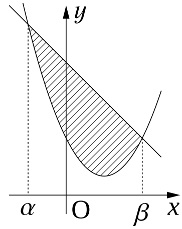
で与えられます.



区間 $[a,\ b]$ で 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の間にある領域の面積 S を求めましょう．関数の差 $f(x) - g(x)$ は x におけるそれらのグラフの高さの差を，つまり $g(x)$ の高さを基準にして計った $f(x)$ の高さを表しますね．よって，$|\, f(x) - g(x)|$ は高さの差の大きさを表すので，区分求積のように高さ $|\, f(x) - g(x)|$，幅 dx の短冊の和を考えると，

$$S = \int_a^b |\, f(x) - g(x)| \, dx$$

と表されます.



では，ここで問題です.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を示せ．また，放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + k$ が $x = \alpha,\ \beta$ $(\alpha < \beta)$ で交わるとき，それらで囲まれた図形

の面積は

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

で表されることを示せ．この面積公式は，あまり言いたくないのですが，センター試験対策には最適です．ヒント：積分については，2 次式 $(x-\alpha)(x-\beta)$ を展開して積分すると，その後整理するのが意外に面倒くさいのです．公式 $\int (x-p)^n\,dx = \frac{(x-p)^{n+1}}{n+1} + C$ が利用できるように

$$(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\} = (x-\alpha)^2 + (\alpha-\beta)(x-\alpha)$$

と変形しておくと，積分後の整理が容易です．

面積については，放物線と直線が $x=\alpha,\ \beta$ で交わるので，関数の差は

$$ax^2+bx+c-(mx+k) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

と因数分解されます．よって，

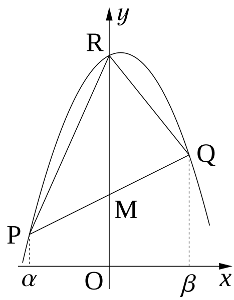
$$S = \int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx$$

となりますが，積分区間 $[\alpha,\ \beta]$ において $a(x-\alpha)(x-\beta)$ の符号は変わらないので，絶対値記号を積分の外に出して

$$S = \int_\alpha^\beta |a(x-\alpha)(x-\beta)|\,dx = \left|\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

とすることができます（場合分けして確かめましょう）．

上の問題で得られた公式を用いると，この章の始めに紹介したアルキメデスが著書『放物線の求積法』で述べた定理を非常に簡単に証明できます．その定理は「任意の放物線に対して，その上の任意の異なる 2 点を P，Q とし，それらの中点 M を通り放物線の軸に平行な直線と放物線の交点を R としたとき，放物線と直線 PQ で囲まれる図形の面積を S とすると

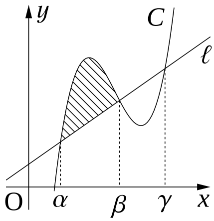


$$S = \frac{4}{3}\triangle\mathrm{PQR}$$

である」というものです．

2300 年前のアルキメデスに負けてはいられません．挑戦してみましょう．計算を簡単にするヒント：放物線を $y = f(x) = ax^2 + bx + c$，放物線上の 2 点を $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{Q}(\beta,\ f(\beta))$ としたとき，P，Q の中点が y 軸上にくるように $\alpha + \beta = 0$ の条件をつけても一般性は失われません．そうすると，$\mathrm{R}(0,\ f(0))$ です．$\triangle$PQR の面積も工夫すれば簡単に求まります．

ついでながら，3 次関数 $C : y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフが直線 $\ell : y = mx + k$ と 3 点 $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ で交わるとき，



$$ax^3 + bx^2 + cx + d - (mx + k) = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

となります．よって，C と ℓ で囲まれる部分で区間 $[\alpha, \beta]$ にあるほうの面積は

$$S = \int_\alpha^\beta |a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)|\,dx = \left|\int_\alpha^\beta a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\,dx\right|$$

で与えられます．このとき，

$$\int_\alpha^\beta a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)\,dx = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^3(2\gamma - \alpha - \beta)$$

を示すことを練習問題にしましょう．特に，$\beta = \gamma$，つまり C と ℓ が $x = \beta$ で接するとき

$$\int_\alpha^\beta a(x - \alpha)(x - \beta)^2\,dx = \frac{a}{12}(\beta - \alpha)^4.$$

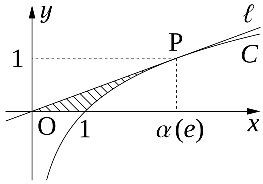
14.4.1.2　y の区間における面積の基本公式

面積を求めるときに x の区間でなく y の区間で求めることもよくあります．曲線が $x = f(y)$ で表されるとき，y の区間 $a \leqq y \leqq b$ で $x = f(y)$ と y 軸の間の部分の面積は

$$S = \int_a^b |f(y)|\,dy$$

で表されます．また，区間 $a \leqq y \leqq b$ における 2 つの曲線 $x = f(y)$，$x = g(y)$ の間の部分の面積は

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)|\,dy.$$

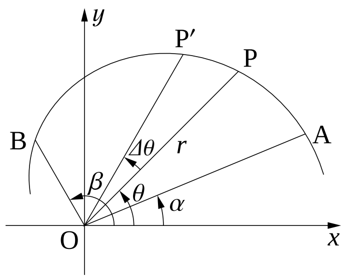


例題として，曲線 $C: y = f(x) = \log x$ の接線 ℓ が原点を通るとき，C と ℓ および x 軸で囲まれた領域の面積を求めてみましょう．まず，接線 ℓ を求めるためには接点 P を求める必要があります．$\mathrm{P}(\alpha, f(\alpha))$ とすると, P での接線の傾きは $f'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$ であり，一方，図からわかるように $f'(\alpha) = \dfrac{\log\alpha}{\alpha}$ です．よって，$\log\alpha = 1$ だから $\alpha = e$ と決まります．よって，接線が $\ell: y = \dfrac{x}{e}$，接点が $\mathrm{P}(e, 1)$ と定まります．次に，問題の図形は y の区間 $[0,\ 1]$ における C と ℓ の間の部分になるので，曲線の方程式を $C: x = e^y$，$\ell: x = ey$ と表すと，$e^y \geqq ey$ より

$$S = \int_0^1 \{e^y - ey\}\,dy$$

と表されます．積分を実行して $S = \dfrac{e}{2} - 1$ となることを確かめましょう．なお，この面積は，x 積分を用いて，$S = \dfrac{1}{2}e\cdot 1 - \int_1^e \log x\,dx$ から求めることもできます．

14.4.1.3　極座標を用いた面積の基本公式



曲線が極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて表されることもあります．動径 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ が角 θ の連続関数として表されるとき，つまり $r = f(\theta)$ のとき，この曲線と原点を始点とする半直線 $\theta = \alpha$ と $\theta = \beta$ で囲まれた部分（右図の図形 $\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$）の面積を求める公式を導きましょう．厳密な議論は後回しにして，まず直感的に導きます．

まず，角 α から角 β までを n 等分する角

$$\theta_k = \alpha + k\varDelta\theta, \qquad \left(\varDelta\theta = \frac{\beta - \alpha}{n}, \quad k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n\right)$$

を用意して，半直線 $\theta = \theta_k$ で図形 $\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ を n 個の微小な‘扇形’に分割します．図の扇形 $\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ をその‘扇形’の代表としましょう．

角 $\varDelta\theta$ が十分に小さいとき，‘ 扇形 ’$\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ の面積 $\varDelta S$ は半径 OP の円の扇形の面積で近似され，$\mathrm{OP} = r = f(\theta)$ とすると

$$\varDelta S \fallingdotseq \pi r^2 \cdot \frac{\varDelta\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\varDelta\theta$$

となります．

区分求積の場合と同様，微小角 $\varDelta\theta$ が限りなく小さくなって無限小角 $d\theta$ になっていったとき，無限小面積

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

を角 $\theta = \alpha$ から β まで寄せ集める（$\int$ する）と全体の面積

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta$$

が得られます．

この公式を厳密に導くには次のようにします．$r = f(\theta)$ が θ の連続関数のとき，角 α から角 θ までの面積を $S(\theta)$ とすると，$S(\theta)$ は連続・微分可能な関数です．このとき，微積分学の基本定理を導いた §§14.3.1 の議論のときと同様，積分の平均値の定理より

$$‘\text{扇形}’\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{PP'}} = S(\theta + \varDelta\theta) - S(\theta) = \pi\{f(\theta_c)\}^2 \cdot \frac{\varDelta\theta}{2\pi} \qquad (\theta \leqq \theta_c \leqq \theta + \varDelta\theta)$$

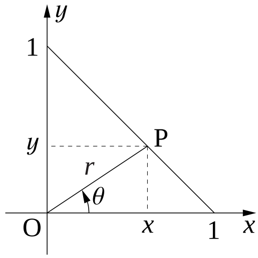
となる角 θ_c が存在します．よって，

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= \lim_{\varDelta\theta \to 0} \frac{S(\theta + \varDelta\theta) - S(\theta)}{\varDelta\theta} = \lim_{\varDelta\theta \to 0} \frac{1}{2}\{f(\theta_c)\}^2 \\ &= \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 \end{aligned}$$

したがって，

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2 d\theta = \int_\alpha^\beta S'(\theta) d\theta = S(\beta) - S(\alpha) = S$$

が成立します．



例解しましょう．底辺と高さが 1 の直角二等辺三角形に上の公式を適用すると，その正しい面積 $\frac{1}{2}$ を与えることを確かめましょう．その三角形を直線 $\ell : x+y=1$ と x 軸，y 軸に囲まれた部分として表します．ℓ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の極座標を $(r,\ \theta)$ とすると，$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$ だから，ℓ の方程式 $x+y=1$ に代入して

$$r\cos\theta + r\sin\theta = 1,\ \text{よって}\quad r = \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$$

が得られます．よって，上の公式を用いて，直角二等辺三角形の面積は

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$

で与えられます.

$(\cos\theta+\sin\theta)^{-2}$ の原始関数の求め方は次の §で議論する「置換積分法」という積分の技術を用いますが，関数の商の微分公式より容易に確かめられるように

$$\left\{\frac{-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right\}' = \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$$

なので，原始関数がわかり

$$S = \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(0-(-1)) = \frac{1}{2}$$

と正しい面積の値が得られます.

§14.5　積分の技術

関数が与えられたとき，それを微分するのはそう難しいことではありません．しかしながら，それを積分するのは一般に難しく，不可能な場合も少なくありません．ここでは積分の基本的な技術，部分積分法と置換積分法を学びましょう.

14.5.1　部分積分法

関数の積の微分公式

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

の両辺を不定積分または定積分して移行すると，**部分積分法** の公式

$$\begin{aligned}
\int f'(x)g(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,\\
\int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,\\
\int_a^b f'(x)g(x)\,dx &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,\\
\int_a^b f(x)g'(x)\,dx &= \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx
\end{aligned}$$

が得られます．当然のことながら，この公式は関数の積の積分に役立ちます．

例として，$\int x\cos x\,dx$ を求めましょう．$\{x\}' = 1$ に着目すると

$$\int x\cos x\,dx = \int x\{\sin x\}'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

となります．

部分積分法を用いると対数関数の積分公式

$$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$$

が得られます．これを導くのは練習問題にしましょう．ヒント：$\{\log x\}' = \dfrac{1}{x}$ なので，被積分関数 $\log x$ を $\{x\}'\log x$ と見なすのが常套手段です．

ついでに，受験対策用の公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^2\,dx = \frac{1}{30}(\beta-\alpha)^5$$

も問題としましょう．ヒント：$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 = \{\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\}'(x-\beta)^2$．この積分は 4 次関数のグラフが直線と 2 点で接するときそれらで囲まれた面積を求める際に現れる積分です．

14.5.2　置換積分法

関数 $f(x)$ の積分 $\int f(x)\,dx$ を直接求めるのが難しいときに，x をパラメータ t の微分可能な関数 $x=g(t)$ をうまく選んで置換し，積分変数を x から t に置き換える方法があります．例えば，$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx$ は $x=r\cos t$ などとおけば積分が実行できるようになります．その方法が与える公式を形式的に導いた後，その意味を考えましょう．

$x=g(t)$ と考えたとき，$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ ($F'(x)=f(x)$) として $F(x)$ を t で微分します．合成関数の微分法より

$$\frac{dF(x)}{dt}=\frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dt},\quad \text{よって}\quad \frac{dF(x)}{dt}=f(x)\frac{dx}{dt}$$

が得られます．これを t の関数と見て，両辺を変数 t について不定積分すると

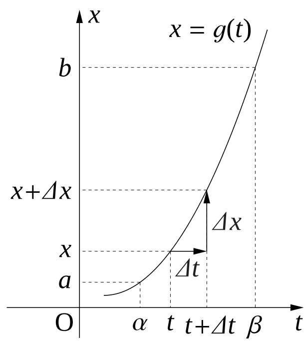
$$F(x)+C=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt$$

よって，$F(x)+C=\int f(x)\,dx$ より

$$x=g(t)\text{ のとき}\quad \int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{dt}dt,$$

$$\text{ただし，正しい表記法は}\quad \int f(x)\,dx=\int f(g(t))g'(t)\,dt$$

が得られます．これが **置換積分法** の公式です．形式的には dx を dt で割って dt を掛ければよいので，覚えやすい公式です．



定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の置換積分を考えるとその意味がわかります．$x=g(t)$ と置換するとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ としましょう．このとき注意すべきことは，方程式 $a=g(t)$，$b=g(t)$ を満たす解 t が α，β 以外に存在すると t 積分に直すときにその積分範囲が定まらなくなります．a と b の間にある任意の数 c についても方程式 $c=g(t)$ を満たす t がただ 1 つでないと困ります．よって，関数 $x=g(t)$ は値域

$a \leqq x \leqq b$（$a < b$ として）に対して単調関数となるように制限しなくてはなりません（関数 $x = g(t)$ の選び方は制限されるために，単調関数の制限はかなりきつい条件です．うまく選べないような場合は，x の積分区間 $[a,\ b]$ を分割して，そうできるようにします）．

$\int_a^b f(x)\,dx$ を区分求積で考えると，§§14.2.1 の定積分の定義式の記号を用いて

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathit{\Delta} x$$

のように表されましたね．このとき，細短冊の高さは $f(x_k)$，底辺は $\mathit{\Delta} x$ ですが，置換 $x = g(t)$ で $x_k = g(t_k)$ と対応させると，$f(x_k) = f(g(t_k))$ で，また

$$\mathit{\Delta} x = \frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t_k}\mathit{\Delta} t_k \qquad (\mathit{\Delta} t_k = t_{k+1} - t_k)$$

と表されるので，短冊の面積を変えることなく

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\mathit{\Delta} x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(g(t_k))\frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t_k}\mathit{\Delta} t_k$$

と式変形ができます．したがって，n を限りなく大きくしていくと，

$$\frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t_k} \to \frac{dx}{dt}, \qquad \mathit{\Delta} t_k \to dt$$

のように無限小増分 dx，dt，つまりで微分で置き換えられます．よって，区分求積は t 積分の形になり，$a = g(\alpha)$，$b = g(\beta)$ の対応を用いて

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(g(t_k))\frac{\mathit{\Delta} x}{\mathit{\Delta} t_k}\mathit{\Delta} t_k = \int_\alpha^\beta f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$$

と表すことができ，定積分についての置換積分法の公式

$$x = g(t)\ \text{のとき，}\ \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\frac{dx}{dt}dt$$

が得られます．関数 $g(t)$ は α と β の間で単調に増加または減少するものを選びます．

例題として，半径 r の円 $C : x^2 + y^2 = r^2$ の面積を計算してみましょう．円 C は x 軸，y 軸に関して対称なので，第 1 象限にある部分の面積の 4 倍で

$$S = 4\int_0^r |y|\,dx = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

と表されますね．置換 $x = g(t)$ を行うときは根号がなくなるように，$x = r\cos t$ または $x = r\sin t$ を選ぶとよいでしょう．前者のほうを選ぶと，$0 = r\cos\frac{\pi}{2}$，$r = r\cos 0$ より置換後の積分範囲は $\frac{\pi}{2}$ から 0 までで，そのとき $|y| = r\sin t$，また $\frac{dx}{dt} = -r\sin t$ となるので

$$S = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 r\sin t\cdot(-r\sin t)\,dt$$

x	$0 \to r$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

と置換されますね．よって，$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ だから，積分の上端と下端を入れ替えて計算すると

$$S = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - \cos 2t)\,dt = 2r^2\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2$$

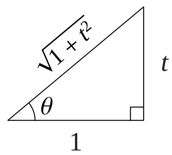
と正しい値になりましたね．置換を $x = r\sin t$ とする方法は練習問題にしましょう．

§§14.4.1.3 の極座標を用いた面積の例題のところで

$$\int\frac{d\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = \frac{-\cos\theta}{\cos\theta + \sin\theta} + C$$

であることを用いました．この原始関数を置換積分法を用いて導きましょう．

被積分関数が $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の関数であるとき，$\tan\frac{\theta}{2} = t$ と置換すれば，積分が実行できる場合が多いことが知られています．今の場合，$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$ なので，$\tan\theta = t$ と置換すればうまくいきます．底辺 1，高さ t の直角三角形を作ると，斜辺は $\sqrt{1+t^2}$ ですから



$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

と表され，また $t = \tan\theta$ の両辺を θ で微分して dt，$d\theta$ を微分と考えると

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + t^2,\ \text{よって}\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{または} \quad d\theta = \frac{1}{1+t^2}dt$$

となります．よって，

$$\int \frac{d\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^2} = \int \frac{d\theta}{1+\sin 2\theta} = \int \frac{1}{1+\dfrac{2t}{1+t^2}} \frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{dt}{(t+1)^2}$$

と積分できる形になりました．

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{-1}{t+1} = \frac{-1}{\tan\theta + 1} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \qquad \text{（積分定数省略）}$$

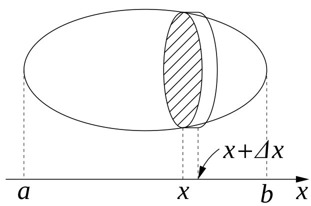
で完了です．

§14.6　体積と曲線の長さ

14.6.1　立体図形の体積

積分を利用すると立体図形の体積も計算することができます．立体図形 A が与えられたとき，A を薄いスライスに切り刻み，各スライスの体積を求めて全部加えると全体積 V が求まりますね．これは区分求積そのものです．

具体的には，座標軸を考えて，立体図形 A を x 軸に垂直な平面で‘厚み’$\varDelta x$ のスライスに区分していきます．A が $a \leqq x \leqq b$ の範囲にあるとき，区分位置を区分求積の場合と同様に



$$x = x_k = a + k\varDelta x, \quad \varDelta x = \frac{b-a}{n} \quad (k = 0,\ 1, \cdots,\ n)$$

としましょう．x_k における切り口の断面積を $S(x_k)$ とすると，その位置のスライスの微小体積 $\varDelta V$ は近似的に

$$\varDelta V \fallingdotseq S(x_k)\varDelta x$$

と表されますね．したがって，

$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)\,dx$$

となることは明らかでしょう．これが体積を求める基本公式です．

厳密な議論にしたい人は，a から x までの体積を $V(x)$ として区間 $[x,\ x+\Delta x]$ における断面積 S の最大値 M，最小値 m を考えるとよいでしょう．すると，区間 $[x,\ x+\Delta x]$ にある任意の $x_{\Delta x}$ に対して $m \leqq S(x_{\Delta x}) \leqq M$，よって

$$m\Delta x \leqq S(x_{\Delta x})\Delta x \leqq M\Delta x$$

が成り立ちます．また $\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$ ですが，

$$m\Delta x \leqq \Delta V \leqq M\Delta x$$

が成り立ち，$\Delta x \to 0$ のとき $m \to S(x)$，$M \to S(x)$ となります．したがって，

$$V'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x_{\Delta x})\Delta x}{\Delta x} = S(x)$$

が成り立ち，

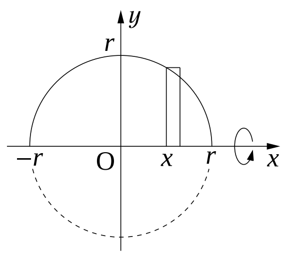
$$V'(x) = S(x) \Leftrightarrow \frac{dV(x)}{dx} = S(x)\ \ (\Leftrightarrow dV(x) = S(x)\,dx)$$

を積分すると体積の公式が得られます．

この公式を用いて半径 r の球 K の体積 $V(r)$ が $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ であることを示しましょう．球 K は xy 平面上の円

$$C : x^2 + y^2 = r^2$$

を x 軸の周りに回転して得られます．よって，円 C の上半円 $C_{上} : y = \sqrt{r^2 - x^2}$ を考えれば済みます．



x 座標が x のときの球 K の断面積 $S(x)$ は $C_{上}$ の方程式を用いて，

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

となるので，全体積は $x \geqq 0$ の部分の 2 倍になることに注意して

$$V(r) = 2\int_0^r S(x)\,dx = 2\int_0^r \pi(r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

と正しい値が得られます．

　ところで，球の体積 $V(r) = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ は半径 r の関数として表されますが，その導関数は

$$V'(r) = \frac{dV(r)}{dr} = 4\pi r^2$$

となって，半径 r の球面の表面積 $S(r)$ に一致しますね．これは単なる偶然でしょうか．微分の定義式

$$\frac{dV(r)}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0}\frac{V(r+\Delta r) - V(r)}{\Delta r} \quad (= S(r) = 4\pi r^2)$$

をじっと睨(にら)むと理由がわかります．体積の差 $V(r+\Delta r) - V(r)$ は半径 $r+\Delta r$ の球から半径 r の球をとり除いた厚み Δr の薄皮の部分の体積ですね．よって，その薄皮の面積は近似的に半径 r の球の表面積 $S(r)$ となりますから

$$\begin{aligned} V(r+\Delta r) - V(r) \fallingdotseq S(r)\Delta r &\Leftrightarrow \frac{V(r+\Delta r) - V(r)}{\Delta r} \fallingdotseq S(r) \\ &\Leftrightarrow \frac{dV(r)}{dr} = S(r) \end{aligned}$$

が成り立ちます．これで理解できましたね．

　この関係から，$dV(r)$ を体積の微分，つまり体積の無限小増分と考えて，それを dV と書くと，

$$dV = S(r)\,dr$$

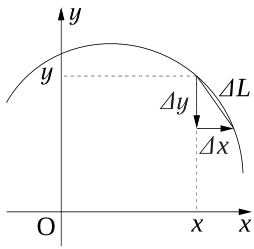
となるので，その無限小体積を寄せ集めて球の体積を求めるもう 1 つの公式

$$V(r) = \int_0^{V(r)} dV = \int_0^r S(r)\,dr$$

が得られます．これを厳密に導出するのは君たちに任せましょう．

14.6.2　曲線の長さ

区分求積の考え方は曲線の長さを求めるときにも役立ちます．曲線 $C : f(x,\ y) = 0$ の長さ L を求める公式を作りましょう．C 上の 2 点 $(x,\ y)$, $(x + \varDelta x,\ y + \varDelta y)$ の間の微小長さ $\varDelta L$ はその 2 点間の距離にほぼ等しいですね：



$$\varDelta L \fallingdotseq \sqrt{(\varDelta x)^2 + (\varDelta y)^2}.$$

よって，その 2 点を限りなく近づけていくと，微分の関係として

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

が得られます．

このとき，曲線 C が関数 $y = f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の形で与えられていれば，

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,|dx|$$

より，dL を $a \leqq x \leqq b$ で寄せ集めると，長さの公式

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

が得られます．

曲線 C がパラメータ t を用いて，

$$C : x = f(t),\quad y = g(t) \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

と表されるときは

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,|dt|$$

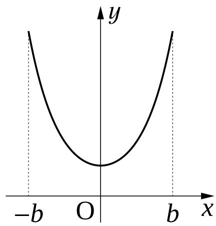
より C のパラメータ表示に対する長さの公式

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

が導かれます．

以上の導出は厳密ではありませんが，そうするには dx や dy などを Δx や Δy に戻しておいて式変形し，最後に $\lim \sum$ するときに dx，dy にすればよいので難しくはありません．それは練習問題にしましょう．

曲線の長さを求める例題をやってみましょう．ネックレスを着けるとその垂れた形状は放物線によく似た「けんすい線」(catenary（カテナリー）) と呼ばれる曲線：



$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

になることが知られています．けんすい線は重いひもが重力で自然に垂れるときの形です．簡単のため $a = 1$ として，$-b \leqq x \leqq b$ の区間でけんすい線の長さ L を計りましょう．

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left\{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right\}^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \left\{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right\}^2$$

より，けんすい線が y 軸対称であることに注意すると

$$L = \int_{-b}^{b} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\int_0^b \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\, dx = \left[e^x - e^{-x}\right]_0^b = e^b - e^{-b},$$

$$\text{よって} \qquad L = e^b - e^{-b}$$

が得られます．

§14.7　無限級数の項別微分積分

§§13.3.1 で関数の無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ を議論しました．その際，その導関数について，項別微分の定理：

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

を証明なしで利用しました．この定理をこの § で証明し，その成立条件を調べましょう．

14.7.1　一様収束と連続性

関数の数列，略して「関数列」$\{F_n(x)\}$ の収束を考えましょう．関数列 $F_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ は関数ですからその‘定義域が必要’で，それを区間 I とすると，‘収束性も区間 I 全体で考える’ことになります．重要な場合は関数列 $\{F_n(x)\}$ の項が級数

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

になるときで，無限級数 $F_\infty(x)$ の微分や積分が可能かどうかは重要な問題です．

区間 I 上の任意の点 x で関数列 $\{F_n(x)\}$ が収束するとき，$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ とおけば，区間 I 上で定義された関数 $F(x)$ が定まります．このとき，§§11.5.3.1 で議論した数列の極限の定義より，区間 I 上の各点 x において，任意の（小さい）正数 ε に対応して番号 $n_\varepsilon(x)$ が定まり

$$n > n_\varepsilon(x) \quad ならば \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

となりますが，一般には番号 $n_\varepsilon(x)$ は ε だけでなく点 x にも依存します．ここで‘もし $n_\varepsilon(x)$ を区間 I 上の点 x に無関係に定めることができるならば，関数列 $\{F_n(x)\}$ は区間 I 上で関数 $F(x)$ に **一様収束** する’といいます：

> $\{F_n(x)\}$ を区間 I 上で定義された関数列とする．任意の（小さい）正数 ε に対応して番号 n_ε が定まり，区間 I 上の全ての点 x に対して
>
> $$n > n_\varepsilon \quad ならば \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$
>
> となるとき，関数列 $\{F_n(x)\}$ は区間 I 上で関数 $F(x)$ に **一様に収束する**という．

特に，関数列 $\{F_n(x)\}$ の項が級数 $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ のときは，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は区間 I 上で関数 $F(x)$ に一様に収束するといいます．さらに，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ が一様収束するとき，無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は‘一様に絶対収束する’といいます．一様に絶対収束する級数は，当然ながら，一様に収束しますね．

§§13.2.3.2 で議論した指数関数の近似を用いて一様収束を例解しましょう．$F(x) = e^x$ とするとテイラーの定理より

$$F(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

となりましたね．このとき，

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

とすると，

$$|F_n(x) - F(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \text{（} = \varepsilon(n,\ x) \text{ とおく）} \qquad (0 < \theta < 1)$$

です．さて，区間 I を $|x| \leqq R$ とすると

$$\varepsilon(n,\ x) < \frac{e^R}{(n+1)!} R^{n+1} \text{（} = \varepsilon(n) \text{ とおく）}$$

が得られます．$n \to \infty$ のとき $\varepsilon(n) \to 0$ であることは既に確かめてあるので，

$$\varepsilon = \frac{e^R}{(n_\varepsilon + 1)!} R^{n_\varepsilon + 1}$$

とおくと

$$n > n_\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

が成り立ち，n_ε が x によらないので無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(|x| \leqq R)$ は $F(x) = e^x$ に一様収束しますね．三角関数 $\sin x$，$\cos x$ についても同様の議論ができます．

さて，極限として得られた $F(x)$ が連続関数であるかどうかは重要です．これに関しては次の定理があります：

> 関数列 $\{F_n(x)\}$ の各項 $F_n(x)$ ($n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$) は区間 I で連続な関数とする．このとき，関数列 $\{F_n(x)\}$ が I で一様に収束すれば，その極限 $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ も区間 I で連続な関数である．

区間 I 上の任意の点を a とするとき，$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$ を示せば十分ですね．まず，$\{F_n(x)\}$ の一様収束性より，任意の正数 ε に対応して n_ε が定まり，区間 I 上の全ての点 x において

$$n > n_\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

となります．次に，全ての n に対して $F_n(x)$ は連続関数ですから，$F_n(x)$ は区間 I 上の任意の点 a において連続です．よって，§§12.2.1 で議論した関数の連続の定義より，正数 ε に対して，正数 δ_ε が定まって

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |F_m(x) - F_m(a)| < \varepsilon \qquad (m \text{ は自然数})$$

とすることができます．これらから，$n > n_\varepsilon$ かつ $|x - a| < \delta_\varepsilon$ のとき

$$\begin{aligned}|F(x) - F(a)| &= |F(x) - F_n(x) + F_n(x) - F_n(a) + F_n(a) - F(a)| \\ &\leqq |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(a)| + |F_n(a) - F(a)| \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

となり，よって，

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |F(x) - F(a)| < 3\varepsilon$$

が成り立ち，正数 3ε はいくらでも 0 に近い値にできるので，$F(x)$ は a で連続です．a は区間 I 上の任意の点なので，$F(x)$ は区間 I で連続になります．

14.7.2　無限級数の項別微分積分

関数の無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ を微分したり積分したりするときに，級数の ‘ 各項を別々に ’ 微分あるいは積分してよいのでしょうか．以下，議論しましょう．

まずは基本となる定理から：

> $F_n(x)$ ($n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$) が区間 $[a,\ b]$ で連続な関数で，関数列 $\{F_n(x)\}$ が区間 $[a,\ b]$ で一様に収束するならば，極限 $F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$ も $[a,\ b]$ で連続で
>
> $$\int_a^b \lim_{n \to \infty} F_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b F_n(x)\,dx$$
>
> が成り立つ．

極限 $F(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続であることは前の §§ で示しました．関数列 $\{F_n(x)\}$ が $[a,\ b]$ で一様に収束するとき，任意の正数 ε に対応して n_ε が定まり，$a \leqq x \leqq b$ のとき

$$n > n_\varepsilon \quad \text{ならば} \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

が成り立ちます．よって，§§ 14.2.2 で議論した定積分の基本性質より

$$\left|\int_a^b F_n(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (F_n(x) - F(x))\,dx\right| \leqq \int_a^b |F_n(x) - F(x)|\,dx$$
$$< \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a)$$

よって，

$$\left|\int_a^b F_n(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx\right| < \varepsilon(b-a)$$

が成り立ちます．このとき，$\varepsilon\,(b-a)$ は 0 にいくらでも近くできるので，$\lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx$ が成り立ちます．

したがって，特に，$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ のときは

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

と表されることに注意すると以下の定理が得られます：

> 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で一様収束するならば，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は $[a,\ b]$ で連続な関数で
>
> $$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx \qquad \text{（項別積分）}$$
>
> が成り立つ．

よって，この定理は無限級数の和 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は項別に積分できることを示しています．

上の定理は，区間 $[a,\ b]$ 上に任意の 2 点 $c,\ x$ をとると，

$$\int_c^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_c^x f_k(t)\,dt$$

のように表すことができ，これを用いると関数の無限級数の項別微分の定理が得られます：

> 各級数 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ は区間 $[a,\ b]$ で連続で，区間 $(a,\ b)$ で微分可能とする．このとき，無限級数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ および $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ が $[a,\ b]$ で一様収束するならば，和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ も $[a,\ b]$ で連続，区間 $(a,\ b)$ で微分可能であり
>
> $$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \qquad \text{（項別微分）}$$
>
> が成り立ち，関数の無限級数の和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ を項別に微分することができる．

その証明は巧妙です．$G(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ とおくと，$G(x)$ は仮定より区間 $[a,\ b]$ で一様収束するので $[a,\ b]$ で連続であり，区間 $[a,\ b]$ 上に任意の 2 点 $c,\ x$ をとると

$$\begin{aligned}\int_c^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\,dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_c^x f_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - f_k(c)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)\end{aligned}$$

と項別積分ができます．よって，

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \int_c^x \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(t)\,dt + C \qquad \left(C = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)\right)$$

が成り立ちます．よって，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ は積分で表されたので，区間 $[a,\ b]$ で連続，

区間 $(a,\ b)$ で微分可能であることがわかります．したがって，両辺を微分して $\dfrac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ が得られます．

この定理を証明せずに用いた §§13.3.2 の議論をもう一度眺めてみましょう．

§14.8　広義積分

14.8.1　広義積分の定義

今まで扱ってきた定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ については被積分関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続（よって，そこで有界）であるとしてきました．その場合には積分が可能だからです．この §では $f(x)$ が有限個の不連続点をもつ場合，有界でない場合，また積分区間が閉区間でない $(a,\ b]$ や無限区間 $[a,\ \infty)$ などの場合を議論しましょう．このような積分を「広義積分」といい，今までの積分を「狭義積分」ということがあります．

被積分関数が $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ の場合，$x \to +0$ のとき $f(x) \to +\infty$ ですから，$f(x)$ は開区間 $(0,\ \infty)$ で連続です．よって，$0 < \delta < 1$ のとき，閉区間 $[\delta,\ 1]$ で積分

$$I_\delta = \int_\delta^1 f(x)\,dx = \int_\delta^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

は定義でき，

$$I_\delta = \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 = 2(1 - \sqrt{\delta})$$

となります．このとき，$\delta \to +0$ としても

$$\lim_{\delta \to +0} I_\delta = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 f(x)\,dx$$

は有限な値に確定します．このような場合，$f(x)$ の閉区間 $[0,\ 1]$ における積分を

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{\delta \to +0} \int_\delta^1 f(x)\,dx$$

によって定義することができます．

一般に，$f(x)$ が区間 $(a,\ b]$ で連続なとき，極限値 $\lim\limits_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$ が存在すれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

と定義しましょう．区間 $[a,\ b)$ で連続なときも同様に定義します．

$f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ 内の 1 点 c を除いて連続なときは，極限値

$$\lim_{\delta\to+0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta'\to+0}\int_{c+\delta'}^{b} f(x)\,dx$$

が存在するならば，それを $\int_a^b f(x)\,dx$ と定義しましょう．$\delta = \delta'$ としてはいけません．区間 $[a,\ b]$ 内の有限個の点で不連続な場合も同様に定義します．

積分区間が無限になるときも同様に考えます．$f(x)$ が区間 $[a,\ \infty)$ で連続なとき

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

が存在するならば，それを $\int_a^\infty f(x)\,dx$ と定義します．区間 $(-\infty,\ b]$ や $(-\infty,\ \infty)$ における積分も同様です．

14.8.2　**広義積分の収束**

広義積分は極限を利用して定義しました．その極限が存在するとき，つまり広義積分が定義できるとき，無限級数の用語を借りて，広義積分は‘ 収束する ’といい，また極限が存在しないときは‘ 発散する ’といいましょう．

広義積分 $\int_0^b x^\alpha\,dx$ $(\alpha < 0,\ 0 < b)$ の収束・発散を考えましょう．$\alpha < 0$ だから $x \to +0$ のとき $x^\alpha \to +\infty$ です．

$$\int_0^b x^\alpha\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_\delta^b x^\alpha\,dx$$

ですが，$\alpha \fallingdotseq -1$ のとき，

$$\int_\delta^b x^\alpha\,dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\delta^b = \frac{b^{\alpha+1} - \delta^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

となるので,

$$\lim_{\delta\to+0}\delta^{\alpha+1}=\begin{cases}0 & (-1<\alpha)\\ \infty & (\alpha<-1)\end{cases}$$

より

$$\int_0^b x^\alpha\,dx=\begin{cases}\dfrac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (-1<\alpha<0)\\ \infty & (\alpha<-1)\end{cases}$$

となります．$\alpha=-1$ のときは

$$\int_0^b x^{-1}\,dx=\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^b x^{-1}\,dx=\lim_{\delta\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\delta^b=\lim_{\delta\to+0}(\log b-\log\delta)=\infty$$

となります．したがって，$\int_0^b x^\alpha\,dx$ は $-1<\alpha$ のとき収束し，$\alpha\leqq-1$ のとき発散します.

次に，広義積分

$$\int_a^\infty x^\alpha\,dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t x^\alpha\,dx\qquad(0<a)$$

を調べましょう.

$$\int_a^t x^\alpha\,dx=\begin{cases}\dfrac{t^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1} & (\alpha\neq-1)\\ \log t-\log a & (\alpha=-1)\end{cases}$$

において,

$$\lim_{t\to\infty}t^{\alpha+1}=\begin{cases}\infty & (-1<\alpha)\\ 0 & (\alpha<-1)\end{cases},\qquad \lim_{t\to\infty}\log t=\infty$$

だから，$\int_a^\infty x^\alpha\,dx$ は $\alpha<-1$ のとき収束し，$-1\leqq\alpha$ のとき発散します.

今度は

$$\int_a^b\frac{dx}{x}\qquad(a<0<b)$$

を調べましょう．関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ は，$f(-x)=-f(x)$ を満たすので原点に関して対称で，$f(x)\to\pm\infty\ (x\to\pm0)$ ですね.

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dx}{x} &= \lim_{\delta\to+0}\int_a^{-\delta}\frac{dx}{x} + \lim_{\delta'\to+0}\int_{\delta'}^b \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\delta\to+0}(\log\delta - \log|a|) + \lim_{\delta'\to+0}(\log b - \log\delta') \\ &= -\infty + \infty = \text{存在しない}\end{aligned}$$

となるので注意しましょう．これは $\delta = \delta'$ とはしないためです．よって，$a < 0 < b$ のとき，形式的に

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \Big[\log|x|\Big]_a^b = \log b - \log|a|$$

とするのは誤りです．

同様に，$\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ $(a < c < b)$ も発散します．広義積分

$$\int_a^b |x-c|^\alpha \, dx \qquad (a < c < b)$$

が収束するのは $\alpha > -1$ のときですね（確かめましょう）．

14.8.3　解析的階乗関数

§§11.4.2.2 で二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を議論したとき，$n!$ の n を 0 や負の整数にまで拡張して考えましたね．そのことを正当化するために，興味ある関数 $\Gamma(x)$（ガンマ）を紹介しましょう．それは x が自然数 n のとき

$$\Gamma(n+1) = n!$$

という性質を満たします．

広義積分によって定義される関数：

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+m)}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+m}\,dt \qquad (m\text{ は自然数})$$

を調べましょう．現れる積分それ自身は

$$\gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x+m}\,dt = \lim_{\delta\to+0}\lim_{T\to\infty}\int_\delta^T e^{-t}t^{x+m}\,dt$$

によって定められます．

任意の実数 x に対して，被積分関数 $e^{-t}t^{x+m}$ は t が十分に大きくなると急速に 0 に近づきますね．よって，$\int_T^\infty e^{-t}t^{x+m}\,dt$ は収束します．また，$e^{-t} < 1$ $(t > 0)$ より，$x \fallingdotseq -m-1$ のとき

$$(0 <) \int_\delta^T e^{-t}t^{x+m}\,dt < \int_\delta^T t^{x+m}\,dt = \frac{T^{x+m+1} - \delta^{x+m+1}}{x+m+1}$$

となるので，$x > -m-1$ のとき $\int_0^T e^{-t}t^{x+m}\,dt$ は収束することがわかります．したがって，関数 $\Gamma(x)$ は，分母の因数のために 0 と負の整数を除いて，$x > -m-1$ ではきちんと定義された関数になります．もし $m \to \infty$ とすると，$\Gamma(x)$ は 0 と負の整数を除く実数全体で定義できます．

さて，$x > 0$ のとき $\gamma(x)$ を部分積分してみましょう．

$$\gamma(x) = \int_0^\infty \{-e^{-t}\}' t^{x+m}\,dt = \Big[-e^{-t}t^{x+m}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t})(x+m)\,t^{x+m-1}\,dt$$

よって，

$$\gamma(x) = (x+m)\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x+m-1}\,dt$$

が得られます．さらに部分積分を繰り返すと，$x > 0$ のとき

$$\gamma(x) = (x+m)(x+m-1)\cdots(x+1)x\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$$

が得られます．これを確かめるのは練習問題にしましょう．したがって，

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt \qquad (x > 0)$$

となります．

ここで，上式を積分して，

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0)$$

となることを確かめるのは君たちの仕事です．

関係式 $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ から，$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(3) = 2\,\Gamma(2)$，$\cdots$，$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ となり，したがって

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 1,\ 2,\ 3\cdots)$$

が得られ，$n!$ を与える関数があることがわかります．そこで，階乗を実数に拡張してその定義を $x! = \Gamma(x+1)$ とすると，$0! = 1$ となり，また負の整数 $-n$ については $(-n)! = \infty$（発散の意味）とすることになります．

君たちは大学でこの「解析的階乗関数」と呼ばれる $\Gamma(x)$ を複素関数 $\Gamma(z)$ として習い，複素 z 平面上で議論するでしょう．

§14.9　微分方程式

14.9.1　ニュートンとリンゴ

“ ニュートンはリンゴが落ちるのを見て万有引力を発見した ” という有名な逸話がありますね．真偽はともかく，このことをちょっと真面目に考えてみましょう．無重力の宇宙船の中ではリンゴは落ちないで静止していることを考えると，重力が働くと始め静止しているものが動き出して，そのスピードはどんどん大きくなる，つまり速度の変化が現れることがわかりますね．

物体の位置に対して，空間で正しく表現できるように，ベクトルを用いて位置を $\vec{r}(t)$ と表すと，その速度 $\vec{v}(t)$ は，位置の瞬間的変化の割合ですから，ベクトルの x 成分を考えていた今までの場合と同様

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\varDelta t) - \vec{r}(t)}{\varDelta t}$$

と定義されます．x 成分などを考えると今までの定義に一致します．

速度 $\vec{v}(t)$ は一般に時間と共に変化します．そこで，速度の瞬間的変化の割合 $\vec{a}(t)$ を加速度 (acceleration) といい

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\varDelta t) - \vec{v}(t)}{\varDelta t}$$

で定義しましょう．

さて，速度が変化する，つまり加速度が 0 でなくなるためにはその原因があり，ニュートンはそれが質量 (mass) をもつ物質に働く力 $\vec{F}$ (force) のせいであることを見抜いたわけです．質量は重さのもとになる量で，同じ大きさの力を受けても質量が大きいと速度は変化しにくく（加速度の大きさが小さく），質

量が小さいと速度はたやすく変化する（加速度の大きさが大きい）ことから，加速度は物体に働く力に比例し，物体の質量 m に反比例する：

$$\vec{a}(t) = k\frac{\vec{F}}{m}$$

とニュートンは考えました．もし多くの力が働くときは $\vec{F}$ はそれらの全合力です．ここで，比例定数 k が 1 になるように力の単位をとると上式は

$$m\vec{a}(t) = \vec{F}$$

と表されます．これが有名な「ニュートンの運動方程式」です．

ニュートンの運動方程式は‘物体に力が働いた結果として速度が変化するという原因と結果の結びつき，つまり **因果関係** を表しており，それらを等号＝で結びつけることによって量的関係に焼き直しています’．現在，この方程式は肉眼で見えるほどに大きい物質に対して成立することが検証されています．力 $\vec{F}$ は，重力の他，人為的な力や摩擦力また電気・磁気的力でもよく，また力 $\vec{F}$ は一般には物体の位置の関数であり，時には時間や物体の速度にも関係します．

ニュートンの運動方程式を速度を用いて

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}$$

のように表しましょう．力 $\vec{F}$ が既知のとき，‘未知の関数 $\vec{v}(t)$ の導関数を含む方程式’は積分を用いて解くことができます．その結果として，速度 $\vec{v}(t)$ は時間の関数として既知になります．このような方程式を **微分方程式** といいます．ニュートンは，この方程式を重力に適用して，地球は太陽の周りを楕円軌道を描いて回っていることを力学的に示しました．

簡単に例解するために，リンゴが落下する場合を考えて方程式の z 成分をとり，$\vec{v}(t)$ の z 成分を $v_3(t)$ と表しましょう．このとき，摩擦を無視すると，力 $\vec{F}$ は鉛直下向きに質量に比例した大きさで働く重力で，その z 成分は地球の表面（地表）辺りでは極めてよい近似で $-mg$ と表されることが知られており，定数 $g \fallingdotseq 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ は「重力加速度」といわれます．よって，得られる微分方程式

$$m\frac{dv_3(t)}{dt} = -mg$$

は，右辺が定数ですから，簡単に不定積分でき

$$v_3(t) = -gt + C$$

を得ます．

　ここで‘積分定数 C が重要な役割を担います’．リンゴが $t = 0$ で落下し始めたとすると，$v_3(0) = 0$ よって $C = 0$ で，そのとき $v_3(t) = -gt$ となります．もし，リンゴを初速度 $v_3(0) = v_{初}\ (> 0)$ で真上に放り投げる問題だったなら $C = v_{初}$，$v_3(t) = -gt + v_{初}$ となります．このように積分定数 C は微分方程式の解で微分と直接には無関係な部分を受け持ちます．定数 C を決める条件は「初期条件」といわれます．

　さて，$v_3(t) = -gt$ が求まったので，リンゴの位置 $\vec{r}(t)$ の z 成分 $z(t)$ を微分方程式

$$\frac{dz(t)}{dt} = v_3(t) = -gt$$

を初期条件 $z(0) = z_0\ (> 0)$ で解いてみましょう．練習問題です．

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$$

となりましたね．この解からリンゴは落下地点から時間の 2 乗に比例して遠ざかるように落下していくことがわかります．

　では，ここで問題です．レントゲン写真やガンの治療，考古学の年代測定などに使われる放射性元素は放射線を放出して崩壊し，量が減っていきます．その量が半分になるまでに要する時間を「半減期」といいますね．さて，時刻 t のときの質量が $m = m(t)$ の放射性元素の崩壊速度 $\frac{dm}{dt}\ (< 0)$ は，ちょっと考えれば当たり前のことですが，そのときの質量 m に比例しますね：

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad （k \text{ は正の比例定数}）.$$

初期条件を $m(0) = m_0$ としてこの微分方程式を解き，放射性元素の質量が時間と共に指数関数的に減少することを示せ．ヒント：dm や dt を微分と考えると

$$dm = -km\,dt \Leftrightarrow \frac{dm}{m} = -k\,dt$$

が成り立ちますね．後は積分するだけです（質量を $m(t)$ と書かずに m と書いた理由がこの変形にあります）．

両辺を不定積分すると

$$\int \frac{dm}{m} = -\int k\,dt \Leftrightarrow \log m = -kt + C$$

となり（左辺の積分定数は右辺に移項したと考えます），したがって，$m(0) = m_0$ より

$$\begin{aligned} m &= e^{-kt+C} = e^{-kt}e^{C} \\ &= m_0 e^{-kt} \end{aligned}$$

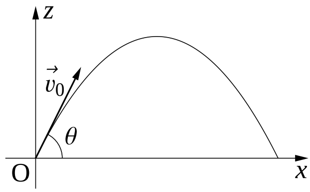
と減少する指数関数そのものになります．

さて，ニュートンの運動方程式は力学の多くの分野に適用され 100 年を経ずして各分野の基本となる微分方程式が確立しました．弦の振動理論では CD でおなじみのデジタル録音のための基礎理論が確立し，流体や熱伝導の問題に適用されるとそれらの理論の基礎となる微分方程式ができました．近年，天気予報がよく当たるようになってきましたが，そのための基礎理論は 200 年前にはできあがっており，予報の精度を上げるのはスーパーコンピュータの計算速度にかかっています [5]．

電気や磁気の現象を調べる基礎理論も微分方程式から作られています．宇宙の現象を調べるアインシュタインの「相対性理論」や原子の大きさほどの極微の世界の現象を調べる「量子力学」もその基礎方程式は微分方程式です．人間を含む自然の全てを明らかにしてくれるのは微分方程式であるといってもいい過ぎではないでしょう．

[5] 2002 年 3 月というからごく最近です．「地球シミュレータ」という世界最速のスーパーコンピュータが日本人の手で完成されました．これはそれまで最速であったアメリカのものの 5 倍の計算速度を誇ります．地球シミュレータは今のところ全地球を 10km 四方に細分して解析し，全世界の気象予報をするだけでなく，海水温度・降雨量・地殻運動の追跡を行って，今後 100 年間に起こる台風や地震・噴火などの自然災害を予測することを目指しています．さらに，研究者たちは化学物質と人体の相互作用をシミュレイト（コンピュータ実験）して新薬の開発を促進することも可能だと述べています．このような企てを実行するのは君かもしれません．

14.9.2　ボールの軌跡



ニュートンの運動方程式を用いて，ボールを投げたときや野球の打者が打ったとき，ボールの軌跡がほぼ放物線を描いて飛んでいくことを確かめましょう．簡単のために，ボールが飛んでいく平面は xz 平面であるとし，ベクトルを成分表示するときは y 成分を省略しましょう．この約束で重力を表すと，ボールの質量を m，ボールに働く力を $\vec{F}$ として

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

と表されます．したがって，ニュートンの運動方程式は空気の摩擦抵抗を無視すると

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

と表されます．

t 積分は各成分ごとに行えばよいので，それらの結果をまとめて書くと

$$\vec{v}(t) = \int \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} C_1 \\ -gt + C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

が得られます．ボールは $t = 0$ で飛び出したとして，その初速 $\vec{v}_0$ の大きさを v_0，角度を θ とすると，

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ v_0 \sin\theta \end{pmatrix}$$

となり，よって，ボールの速度は

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{pmatrix}$$

と表されます．

上式を積分して

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} v_0 \cos\theta \\ -gt + v_0 \sin\theta \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} (v_0 \cos\theta)t + C_1 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + C_3 \end{pmatrix}$$

が得られます．簡単のために，ボールの飛び出した位置を $\vec{r}(0) = \vec{0}$ とすると，積分定数は $C_1 = C_3 = 0$ となります．

さて，ボールの軌跡を見るためには，ボールの x 座標と z 座標の関係を求めなければなりません．x と z は

$$\begin{cases} x = (v_0 \cos\theta)t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t \end{cases}$$

と，時間 t を媒介して関係がついているので，t を消去すれば直接の関係が得られます．よって，

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

が得られ，ボールの軌跡は放物線であることがわかります．

ところで，初速の大きさ v_0 が一定のとき，ボールを最も遠くに飛ばすには $45°$ の角度で打ち出せばよいことが知られています．それを確かめましょう．ヒント：ボールが地面に落ちてくる位置 x は，$z = 0$ のときだから

$$x = \frac{2v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

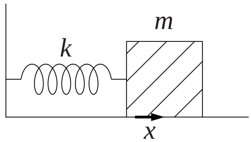
です．$0° < \theta < 90°$ で x の最大値を求めればよいですね．

x が最大になるのは $\sin 2\theta = 1$ のときで，そのとき $2\theta = 90°$，つまり $\theta = 45°$ が確かめられます．

14.9.3　バネで結んだ重りの運動と行列の対角化

バネで結んだ重りの運動を考えましょう．初めに 1 個の重りの問題を扱います．そこでかなりレベルの高い積分の技術を学習します．次に，バネで結ばれた 2 個の重りの運動を調べます．そこでは未知の変数が 2 個現れます．まず，変数を分離する普通の方法で解き，次に，行列の章で学んだ行列の対角化の方法を適用してみましょう．対角化の方法は君たちが大学で学ぶ数学のよい見本になるでしょう．

14.9.3.1　バネによる振動



バネが伸びたり縮んだりする振動運動の様子を調べましょう．バネは，自然の長さ（自然長）から伸ばしたり縮めたりすると元の自然長に戻ろうとする力が働き，その力の大きさは，伸縮が小さいとき，その伸び・縮みの長さに比例することが知られています（フックの法則）．今，壁のある平らで摩擦のない床面に質量 m の重りをおき，バネは重りと壁に結ばれているとしましょう．バネが自然長になっているときの重りの位置を基準に考え，基準の位置からの重りの変位を x としましょう．バネが伸びているとき $x > 0$，縮んでいるとき $x < 0$ です．このとき，重りに働くバネの力 F は，$x > 0$ のとき縮む力，$x < 0$ のとき伸びる力で

$$F = -kx \qquad (k > 0)$$

と表され，比例定数 k は「バネ定数」といいバネの強さを表します．

さて，ニュートンの運動方程式は，摩擦がないとしているので，重りの速度を $v = \dfrac{dx}{dt}$ とすると

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \;\Leftrightarrow\; \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

となります．$\overset{\text{オメガ}}{\omega}$ は運動方程式を解いたとき振動の「角振動数」といわれるものになります．この微分方程式を解くわけですが，それにはちょっとしたトリックが要ります．

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v\frac{dv}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2xv$$

が利用できるので，運動方程式の両辺に $2v$ を掛けると

$$2v\frac{dv}{dt} = -2v\omega^2 x \;\Leftrightarrow\; \frac{dv^2}{dt} = -\omega^2\frac{dx^2}{dt}$$

となり，直ちに積分できます：$v^2 = -\omega^2 x^2 + C$．よって，積分定数を $\omega^2 A^2$ $(A > 0)$ と書くと

$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$$

が得られ，両辺の根号をとると

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

のように，重りの速度を変位 x の関数として表すことができます．

さて，x を時間 t の関数として表しましょう．それには上式を

$$\frac{\pm dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega dt, \quad \text{よって} \quad \int \frac{\pm dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \omega dt$$

と式変形して積分します（この手の手続きはもう慣れましたね）．右辺は積分定数を δ とすると

$$\int \omega dt = \omega t + \delta$$

ですね．左辺の積分を実行するには置換積分法が必要です．$x = A\sin\theta$ と置換しましょう．すると，

$$\sqrt{A^2 - x^2} = A|\cos\theta|, \qquad \frac{dx}{d\theta} = A\cos\theta$$

ですから，積分定数は右辺に移項したと見なして積分すると

$$\int \frac{\pm dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \int \frac{\pm A\cos\theta d\theta}{A|\cos\theta|} = \int d\theta = \theta$$

が得られます[6]．以上のことから，

$$\theta = \omega t + \delta, \quad \text{よって} \quad \sin\theta = \sin(\omega t + \delta)$$

が得られるので，$x = A\sin\theta$ より

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x \quad \text{のとき} \quad x = A\sin(\omega t + \delta) \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$

と，確かに振動する解が得られました．

---

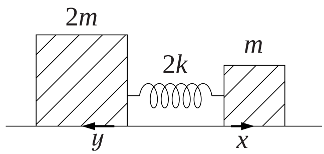
6) 簡単のために $\pm|\cos\theta| = \cos\theta$ として，符号の問題を無視しました．どうしても納得できない人は，場合分けして，マイナスのときは

$$-\int d\theta = -\theta + \pi$$

とすると，最後の段階でプラスの場合に一致することがわかります．つまり，符号の問題は積分定数の書き方に押し込められるわけです．積分定数は最後に初期条件で決まります．

このような単純な振動を「単振動」といい，床の摩擦や空気抵抗を無視した場合の振動になります．バネと重りを天井に吊して上下に振動させる場合も同じ解になります．A は $|x|$ の最大値を与えるので，単振動の「振幅」といい，また $\omega t + \delta$ を振動の「位相」，δ を「初期位相」といい，それらは初期条件を与えれば決定されます．具体的な初期条件を与えずに解かれた微分方程式の解は「一般解」と呼ばれます．上の一般解が運動方程式を満たすことを確かめるのは練習問題にしましょう．

14.9.3.2　バネで結んだ 2 個の重りの運動



今度は摩擦のない床面にバネで結んだ 2 個の重りをおき，回転しないように設定して，バネの伸縮方向の運動を考えましょう．容易に想像できるように，2 つの重りは，振動しながら，全体として等速運動をすることがわかります．もしこの設定にリアリティーを求めるならば一酸化炭素 CO のような 2 原子分子の振動運動を考えるとよいでしょう．

簡単のために，2 つの重りの質量を m，$2m$，バネ定数を $2k$ としましょう．また，バネが自然長になったある時刻の 2 つの重りの位置を基準として，基準の位置からの変位を，軽い重りのほうが x，重たいほうが y としましょう．

運動方程式は変位 x，y を用いて表すのが都合がよいので，加速度 a を第 2 次導関数の記法：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

を用いて書きましょう．変位の差 $x - y$ はバネの伸縮量を表し，伸びているとき正，縮んでいるとき負ですね．よって，2 つの重りの運動方程式は

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2k(x-y) \\[2ex] 2m\dfrac{d^2y}{dt^2} = +2k(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\kappa(x-y) \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \kappa(x-y) \end{cases} \qquad \left(\kappa = \frac{k}{m}\right)$$

のように表されます．

2 つの重りが互いに影響し合うので, 2 つの微分方程式は変位 x と y の両方を含みますね．このままでは解くことは叶いません．解くためには $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ のように，両辺に同じ形の変位（例えば，$x-y$ など）が現れるようにする必要があります．以下，その方法を，この §§では普通のやり方で，次の §§では一般化が可能なやり方で，つまり行列の対角化法を用いて解説しましょう．

問題が簡単なので，運動方程式を少し眺めると

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2(x-y)}{dt^2} = -3\kappa(x-y) \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2(x+2y)}{dt^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = -3\kappa u \quad (u = x-y) \\ \dfrac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad (v = x+2y) \end{cases}$$

のような組合せを作ると，解ける形になります．

先に解いた微分方程式 $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ の一般解が $x = A\sin(\omega t + \delta)$ の形であることを利用すると，微分方程式 $\dfrac{d^2u}{dt^2} = -3\kappa u$ の一般解は

$$u = x - y = 3A\sin(\omega t + \delta) \qquad \left(\omega = \sqrt{3\kappa} = \sqrt{\frac{3k}{m}},\ A > 0\right)$$

のように表すことができます．また，微分方程式 $\dfrac{d^2v}{dt^2} = 0$ は直ちに積分できて，一般解は

$$v = x + 2y = 3v_0 t + 3x_0$$

と表されます．したがって，変位 x，y の一般解

$$\begin{cases} x = v_0 t + x_0 + 2A\sin(\omega t + \delta) \\ y = v_0 t + x_0 - A\sin(\omega t + \delta) \end{cases} \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}},\ A > 0\right)$$

が得られます．この解は，軽いほうの重りが重いほうの重りの 2 倍の振幅で振動し，2 つの重り全体は一般に等速で移動していくことを示しています．この解が間違いなく運動方程式を満たすことを確かめるのは君の仕事です．

この問題では 2 つの重りの運動方程式を解くのにそれぞれ 2 回積分しましたので 4 個の積分定数 v_0，x_0，A，δ が現れました．初期条件によってこれらを定めると 2 つの重りの‘運動は完全に予測可能’になります．ニュートンの運動

学を発展させたフランスの数学者・天文学者ラプラス（Pierre Simon Laplace, 1749〜1827）はこのことを一般化して，‘ある時刻の宇宙の状態が定まれば，その先の任意の時刻の状態も完全に決定される’という世界観を提示しました．つまり，自然界のあらゆる現象を瞬時に計算できる存在（「ラプラスの悪魔」）がいれば，ある瞬間に全宇宙の状態を知るとその後のいかなる未来も見通すことができるというわけです．この決定論的世界観は 19 世紀の人々にとって主流の考え方でした．先に紹介したスーパーコンピュータ「地球シミュレータ」による気象予報はこの観点に近づく試みともいえるでしょう．

20 世紀に入って極微の世界で成り立つ「量子力学」が生まれると状況は一変しました．量子力学は始めから確率の力学であり，位置と速度は同時には定まらない，つまり初期条件は完全には定められないというわけです．やはり，未来は完全には定まっていないのです．

14.9.3.3　**バネで結んだ重りの運動と行列の対角化**

前の §§で議論したように，2 つの重りはバネを通じて互いに影響し合うので，それらの単独の運動方程式はそのままでは解けない形になりました．しかしながら，新しい‘変位’ $u = x - y$ と $v = x + 2y$ を考えると，それらの運動方程式は $\dfrac{d^2u}{dt^2} = -3\kappa u$，$\dfrac{d^2v}{dt^2} = 0$ となり，u と v は無関係になって解けたわけです．その前者は，バネ常数と質量の比が $3\kappa = \dfrac{3k}{m}$ である場合に，1 個の重りが単独でバネに結ばれているときの運動方程式を表しています．また後者は，（2 つの重りの質量が m，$2m$ なので）$v = 1x + 2y$ は 2 つの重りの重心の座標の変位に対応し，重心の運動にはバネの力が関係しないことを表しています．

数学は，多くの重りがバネで結ばれているときでも，それらの運動方程式をうまく組み合わせれば‘単独のバネと重りの問題に還元できて解けるようになる’ことを明らかにしました．電気回路の問題も，数学的構造はバネで結ばれた多くの重りの問題と同じであることがわかり，同様の数学理論が適用できます．その理論が §9.3 で議論した行列の対角化と固有値問題についての理論です．以下，その観点からバネで結んだ 2 つの重りの問題を見直してみましょう．対角化の議論を忘れた人は復習しておきましょう．

変位 x，y をベクトルの成分と考えると両者を同時に扱うことができます．そのベクトルの運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\kappa(x-y) \\ \kappa(x-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\kappa & 2\kappa \\ \kappa & -\kappa \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \kappa A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

と表すことができます．これを‘ 変位 ’ u，v を導入して解けた場合：

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\kappa u \\ 0 \cdot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\kappa & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と比較すると違いがわかります．元の運動方程式に現れる行列 A には非対角成分が現れるのに対し，解くことができるほうの行列 D は対角行列になっていますね．つまり，‘ 運動方程式を解くには現れる行列を対角行列にする ’ ことが必要なのです．

以下，2 つのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の関係を調べることから始めて，行列の対角化の復習をしましょう．両ベクトルを結ぶ行列 P を考えて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とすると，$u = x - y$，$v = x + 2y$，よって

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ですから，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となります．よって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P\left\{u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = u\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように変形して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u\vec{a} + v\vec{b}, \qquad \vec{a} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すと，非対角行列 A に対して

$$\begin{cases} A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \\[2ex] A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{cases}$$

が成り立ちます．よって，ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ は行列 A に対して，それぞれ固有値 -3，0 をもつ固有ベクトルになります．したがって，関係式

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = u\vec{a} + v\vec{b}$$

は $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ の標準基底 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ から固有ベクトルの基底 $\vec{a}$，$\vec{b}$ へ変換したことを表します．

行列 A の固有値・固有ベクトルが求まると A を対角化して運動方程式を解く一般的方法がわかります．まず，

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}$$

ですから，基底を変換する行列 P は固有ベクトルを並べた行列であることがわかります[7]．また，対角行列 D は行列 A の固有値を対角成分とする行列です．A と D の関係については，

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \kappa D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \kappa A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

より，

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \kappa D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \Leftrightarrow P^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (P^{-1}\kappa AP)P^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

なので

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

[7] 今の場合，固有ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が直交しないので，§9.3 のようには変換行列 P を直交行列にできませんが，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は線形独立なので P の逆行列 P^{-1} は存在して対角化の議論はできます．その証明は少々長くなるので，次の §§ に回しましょう．

が得られます．この関係を直接確かめるのは練習問題にしましょう．

最後に，A の固有値・固有ベクトルを求める方法で問題を扱ってみましょう．元の運動方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \kappa A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

において，行列 A の固有値を λ，固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とすると

$$A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0}$$

でしたね（I は単位行列）．このとき，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ですから，$(A - \lambda I)$ の逆行列はなく，よってその行列式は 0 になります：

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda = 0.$$

これが固有値を決定する固有方程式で，それを解いて固有値 $\lambda = -3,\ 0$ が得られます．

固有値が定まると固有ベクトルが求まります．固有値 $\lambda = -3$ に対応する固有ベクトルは

$$(A-(-3)I)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2+3 & 2 \\ 1 & -1+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p+2q = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となります．定数 C_1 は 0 でない任意の実数にとれますが，ここでは先に行った方法に合わせて $\frac{1}{3}$ にしましょう．同様に，固有値 $\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルが

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となることを示すのは練習問題です．$C_2 = \frac{1}{3}$ としましょう．

固有ベクトルが定まると，それらを並べて作った行列

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて運動方程式を書き直し，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^{-1}\kappa AP\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1}AP$ が固有値を対角成分に並べた対角行列 D になるので，解ける方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} = -3\kappa u, \quad \frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

が得られます．

以上が対角化の方法です．バネで結ばれた 2 個の重りで例解しましたが，この方法は多くの重りがバネで結ばれているときにも適用できます．そのときは多くの未知数が関係してきますが，運動方程式を高次の行列を用いて表せば同様のやり方で解ける形の方程式に直すことができます．複雑な電気回路でも同様に解けます．その詳細は大学の「線形代数」の講義で学びます．

14.9.3.4　変換行列 P が直交行列でない場合の対角化

行列 A の固有ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が直交しない場合には基底を変換する行列 P は直交行列になりません．しかしながら，$\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立なときには対角化の議論はできることを示しましょう．

$$P^{-1}AP = D, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

の形で A が対角化できるとすると，その必要十分条件は A が線形独立な固有ベクトルをもつことであることがわかります：

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくと，P^{-1} は存在するので $ad - bc \neq 0$．よって，2 つのベクトル $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は線形独立です．また，$P^{-1}AP = D$ より $AP = PD$ なので

$$AP = A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \ A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right), \qquad PD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \ \beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

を比較して，

$$A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

が得られます．よって，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は A の固有ベクトルであることがわかり，それらは線形独立です．これが対角化に必要な条件，つまり必要条件です．

必要条件はまた十分条件でもあることを示しましょう．$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は A の線形独立な固有ベクトルで，その固有値を α, β とします．このとき，$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$AP = A\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(A\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \ A\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) = \left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \ \beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

$$PD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \left(\alpha\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \ \beta\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$$

より，$AP = PD$ です．したがって，固有ベクトルは線形独立より P^{-1} が存在し，

$$P^{-1}AP = D, \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

が成り立ち，A の対角化が十分に可能です．