МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

**Дніпропетровський національний університет
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна**

Кафедра «Вища математика»

До друку
Перший проректор ________ Б. Є. БОДНАР
"____" ________2012

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7

У двох частинах

Частина 2

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Укладачі: В. М. Кузнецов
Т. М. Бусарова
О. В. Звонарьова
Т. А. Агошкова

Для студентів ІІ курсу всіх форм навчання всіх спеціальностей

Дніпропетровськ – 2013

УДК 519.21 (075.8)

Укладачі:
Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Звонарьова Ольга Віталіївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. *В. Ф. Бабенко* (ДНУ ім. О. Гончара)
д-р фіз.-мат. наук, проф. *С. О. Пічугов* (ДНУЗТ ім. акад. В. Лазаряна)

Теорія ймовірностей [Текст] : методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7 : у 2 ч. / уклад. : В. М. Кузнецов, Т. М. Бусарова, О. В. Звонарьова, Т. А. Агошкова ; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д. : Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2013. – Ч. 2. Випадкові величини. – 49 с.

Містять теоретичний матеріал з розділу «Випадкові величини» і велику кількість розв’язаних прикладів. Можуть бути використані студентами університету всіх спеціальностей денної та безвідривної форм навчання.

Іл. 18. Бібліогр.: 3 назви.

1. ОЗНАЧЕННЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇЇ ВИДИ

У попередніх розділах розглядалися випадкові події, які є **якісною** характеристикою випробування. Але випадковий результат випробування можна характеризувати й **кількісно**. Наприклад: кількість влучень у ціль при трьох пострілах; кількість стандартних деталей серед усіх виготовлених деталей і т. д. Кількісною характеристикою випадкового результату випробування є випадкова величина.

Означення. Величина, яка в результаті випробування може набувати того чи іншого (але тільки одного) числового значення, заздалегідь невідомого й зумовленого випадковими причинами, називається **випадковою величиною**.

Випадкові величини позначаються літерами $X, Y, Z, ...$, а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами.

Випадкові величини можна розділити на дві основні групи: дискретні й неперервні.

Означення. Дискретною випадковою величиною називається така величина, кількість можливих значень якої або скінченна, або нескінченна зчисленна множина (множина, елементи якої можна перенумерувати, називається нескінченною зчисленною множиною).

Приклади дискретних випадкових величин.

1. X – кількість бракованих виробів у партії із 5 штук. Можливі значення випадкової величини X такі:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 5.$$

2. X – кількість влучень при двох пострілах. У цьому випадку:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2.$$

3. X – кількість питань, які задає викладач студенту під час складання заліку. У цьому випадку:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \ldots$$

Означення. Величина, можливі значення якої неперервно заповнюють деякий інтервал (скінченний або нескінченний), називається **неперервною випадковою величиною**.

Приклади неперервних випадкових величин.

1. Час безвідмовної роботи приладу.
2. Відхилення за дальністю точки падіння снаряда від цілі.
3. Діаметр обробленої деталі.

2. ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДИСКРЕТНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Розглянемо дискретну випадкову величину X, можливі значення якої $x_1, x_2, ..., x_n$ нам відомі. У результаті випробування величина X набуде одного зі своїх значень, тобто відбудеться одна подія з повної групи несумісних подій: , $X = x_2$, …, $X = x_n$. Дійсно, за означенням випадкової величини всі ці події є несумісними, тому що величина X може набути в результаті випробування тільки одного значення. Крім того, ці події утворюють повну групу подій, оскільки ніяких інших подій (крім перелічених) у результаті випробування відбутися не може. Позначимо ймовірності цих подій таким чином: $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$, …, $P(X = x_n) = p_n$.

Оскільки події утворюють повну групу, то сума ймовірностей цих подій буде дорівнювати одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Означення. Законом розподілу дискретної величини називається співвідношення, яке пов'язує можливі значення випадкової величини з відповідними ймовірностями, з якими ці значення приймаються.

Форми представлення закону розподілу бувають різними. Найпростішою формою закону розподілу дискретної випадкової величини X є таблиця, у якій перелічені можливі значення випадкової величини й відповідні їм ймовірності:

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Така таблиця називається **рядом розподілу** дискретної випадкової величини. Потрібно запам'ятати, що сума ймовірностей у цьому ряді завжди дорівнює одиниці. Тобто $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Якщо в прямокутній системі координат на осі OX відкласти значення $x_1, x_2, ..., x_n$, а по осі OY – значення $p_1, p_2, ..., p_n$, то ми одержимо n точок $(x_1, p_1), (x_2, p_2), ..., (x_n, p_n)$. Ці точки з'єднують відрізками прямих (потрібно пам'ятати, що точки з'єднуються тільки для наочності, оскільки в проміжках між x_1 і x_2, x_2 і x_3 і т.д. випадкова величина X значень не набуває).

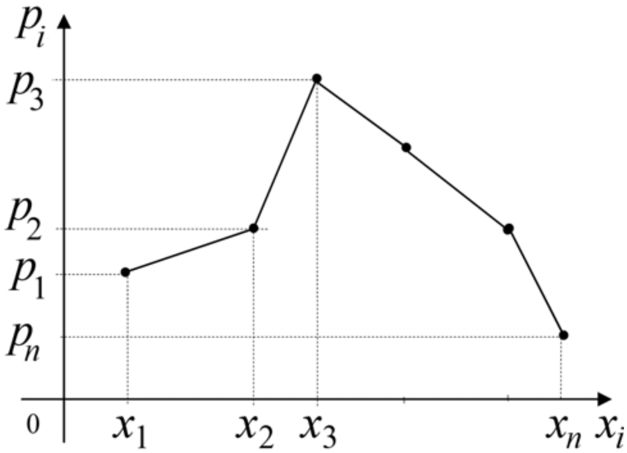


Рис. 1

Фігура (рис. 1) називається **многокутником розподілу**. Він є теж законом розподілу дискретної випадкової величини. Зауважимо, що сума ординат многокутника розподілу завжди дорівнює одиниці.

Ряд розподілу є зручною формою представлення закону розподілу для дискретної випадкової величини. Але його не можна побудувати для неперервної випадкової величини, тому що вона має нескінченну кількість можливих значень, які заповнюють деякий проміжок, і перелічити ці значення неможливо.

Розв'язання прикладів

Блок 2

Приклад 1. Ряд розподілу величини X має вигляд:

x_i	0	1	3	4	7
p_i	0,1	p_2	0,2	0,4	0,05

1. Знайти p_2.

2. Побудувати многокутник розподілу цієї величини.

Розв'язання. 1. Сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці, тому: $0,1 + p_2 + 0,2 + 0,4 + 0,05 = 1$. Звідси $p_2 = 1 - (0,1 + 0,2 + 0,4 + 0,05) \Rightarrow p_2 = 1 - 0,75 \Rightarrow p_2 = 0,25$.

2. Тепер побудуємо многокутник розподілу (рис. 2).

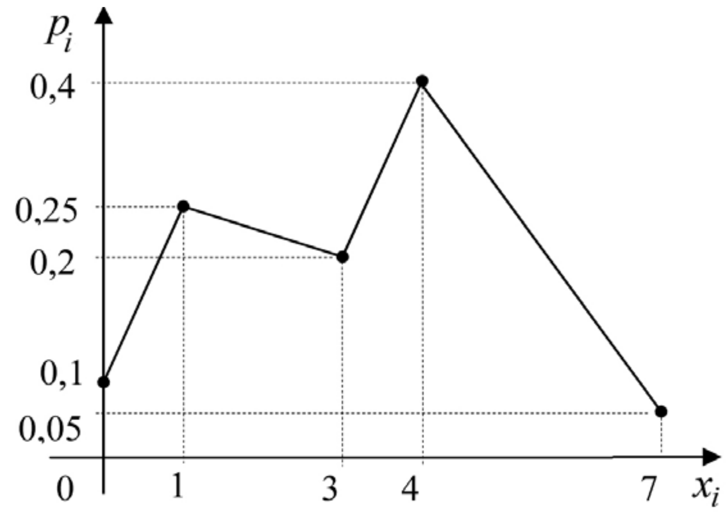


Рис. 2

Ще раз нагадуємо, що точки з'єднані відрізками прямих для наочності. Тобто, наприклад, випадкова величина не набуває значення, яке дорівнює 5 з ймовірністю 0,3.

Приклад 2. Гральний кубик підкидається два рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа випадінь «1».

Розв'язання. X – кількість випадінь «1» при двох підкиданнях. Тому значення цієї випадкової величини будуть 0, 1, 2. Тобто:

$x_1 = 0$ – при двох підкиданнях «1» не випала ні разу;

$x_2 = 1$ – при двох підкиданнях «1» випала один раз;

$x_3 = 2$ – при двох підкиданнях «1»випала два рази.

Тепер потрібно обчислити ймовірності появи цих значень. Скористаємося, наприклад, формулою Бернуллі: $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$, $n = 2$, $m = 0, 1, 2$. $p = \frac{1}{6}$ – ймовірність випадіння «1», $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$$P_2^0 = C_2^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36},$$

$$P_2^1 = C_2^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{10}{36},$$

$$P_2^2 = C_2^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}.$$

Нагадаємо, що сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці:

$$\frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1.$$

Ряд розподілу (закон розподілу) буде мати вигляд:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

Приклад 3. Маємо чотири ключі, з яких тільки один відкриває замок. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості ключів, які будуть використані для відкривання замка.

Розв'язання. У цьому випадку X може набути таких значень: 1, 2, 3, 4. Тобто $x_1 = 1$ – замок відкрився з першого разу; $x_2 = 2$ – перший ключ не підійшов, а другий підійшов; $x_3 = 3$ – перший і другий ключі не підійшли, а третій підійшов; $x_4 = 4$ – останній ключ підійшов. Знайдемо відповідні ймовірності. Тут будемо застосовувати теорему множення ймовірностей залежних подій:

$P(x_1 = 1) = \frac{1}{4}$ (ключі однакові на вигляд і тільки один з них підходить; тут підійшов перший ключ).

$P(x_2 = 2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ (перший ключ не підійшов, а другий підійшов).

$P(x_3 = 3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (перший і другий ключі не підійшли, а третій підійшов).

$P(x_4 = 4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ (перші три ключі не підійшли, а підійшов останній, четвертий).

Ряд розподілу має вигляд:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Приклад 4. Перший стрілець влучає в ціль з ймовірністю 0,6, другий стрілець – з ймовірністю 0,7. Стрільці стріляють в мішень по одному разу. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – числа влучень у мішень.

Розв'язання. У цьому випадку X буде набувати значень: 0, 1, 2.

$x_1 = 0$ – ні одного влучення (жоден із стрільців не влучить у мішень).

$x_2 = 1$ – одне влучення (влучить або перший, або другий стрілець).

$x_3 = 2$ – два влучення (обидва стрільці влучать у мішень).

Знайдемо відповідні ймовірності. Позначимо $p_1 = 0,6$, $p_2 = 0,7$, $q_1 = 0,4$,

$q_2 = 0{,}3$. Тоді:

$$P(x_1 = 0) = q_1 \cdot q_2 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12,$$

$$P(x_2 = 1) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}18 + 0{,}28 = 0{,}46,$$

$$P(x_3 = 2) = p_1 \cdot p_2 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42.$$

Сума ймовірностей дорівнює одиниці: $0{,}12 + 0{,}46 + 0{,}42 = 1$.

Ряд розподілу буде мати вигляд:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

3. ІНТЕГРАЛЬНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ (ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ)

Загальною формою закону розподілу випадкової величини X (як дискретної, так і неперервної) є так звана інтегральна функція розподілу, або просто функція розподілу.

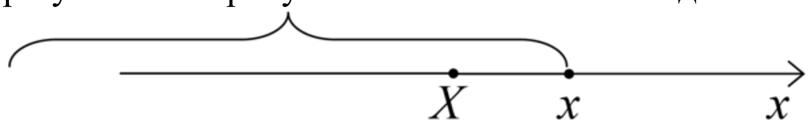
Означення. Функцією розподілу $F(x)$ випадкової величини X називається ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення меншого за x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (1)$$

В означенні (1) наявні X і x. Слід їх розрізняти: X – випадкова величина, а x – аргумент функції розподілу.

Функція $F(x)$ існує і для дискретних, і для неперервних величин. Вона повністю характеризує випадкову величину з ймовірнісної точки зору і тому є однією з форм закону розподілу.

Розглянемо геометричну інтерпретацію функції $F(x)$. Якщо зобразити випадкову величину X як випадкову точку на осі OX, яка в результаті випробування може зайняти те чи інше положення, то функція $F(x)$ є ймовірністю того, що ця точка в результаті випробування опиниться зліва від точки x.



Для дискретної випадкової величини X функція розподілу обчислюється за формулою

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x). \qquad (2)$$

У цій формулі: x – аргумент функції, x_i – значення випадкової величини. Нерівність $x_i < x$ означає, що підсумовування поширюється на всі можливі значення випадкової величини, які менші аргументу x.

Розглянемо властивості функції розподілу.

Властивість 1. Значення функції розподілу задовольняють нерівності:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Ці нерівності випливають із означення функції $F(x)$ як ймовірності.

А значення ймовірності завжди належать відрізку [0, 1].

Властивість 2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Властивість 3. Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення з півінтервалу $\left[\alpha, \beta\right)$, обчислюється за формулою

$$P\left(\alpha \le X < \beta\right) = F\left(\beta\right) - F\left(\alpha\right). \qquad (3)$$

За допомогою формули (3) можна довести, що ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде одного означеного значення, дорівнює нулю (див. [2]).

Використовуючи це положення, можна записати:

$$P\left(\alpha \le X < \beta\right) = P\left(\alpha < X \le \beta\right) = P\left(\alpha \le X \le \beta\right) = P\left(\alpha < X < \beta\right) = F\left(\beta\right) - F\left(\alpha\right). \quad (4)$$

Але нагадуємо, що ці рівності справедливі тільки для неперервних випадкових величин.

Властивість 4. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то

$$F(x) = 0, \text{ якщо } x \le a \quad \text{і} \quad F(x) = 1, \text{ якщо } x \ge b.$$

У випадку, коли можливі значення випадкової величини належать всій числовій осі, маємо:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

Останні дві рівності можна пояснити геометрично. Дійсно, при необмеженому переміщенні точки x ліворуч потрапляння випадкової точки X ліворуч x стає неможливою подією. Аналогічно, при необмеженому переміщенні точки x праворуч потрапляння випадкової точки X ліворуч x стає вірогідною подією.

Таким чином, функція розподілу є невід'ємною неспадною функцією, яка задовольняє умови: $F(-\infty) = 0$ $F(+\infty) = 1$. Крім того, для дискретної випадкової величини функція $F(x)$ ступінчаста, розривна, а для неперервної випадкової величини функція $F(x)$ – неперервна.

Приклад. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5; \\ \dfrac{x-5}{3}, & 5 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

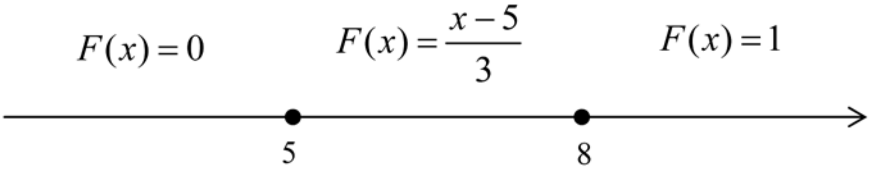
Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з інтервалу (4, 7).

Розв'язання. Можна довести, що $F(x)$ неперервна, а тому й випадкова величина X буде неперервною. Звідси робимо висновок, що розв'язання буде однакове (див. (4)) і для інтервалу (4, 7), і для півінтервалів [4, 7), (4, 7], і для відрізка [4, 7].

Використаємо формулу (4)

$$P(4 < X < 7) = F(7) - F(4).$$

Для спрощення розв'язання подамо інтегральну функцію таким чином:



Точка $x=7$ належить проміжку $\left(5,8\right]$, тому $F\left(7\right)=\frac{7-5}{3}=\frac{2}{3}$. Точка $x=4$ належить проміжку $\left(-\infty,5\right]$, тому $F\left(4\right)=0$. Тоді $P\left(4<X<7\right)=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$.

4. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ (ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ)

Розглянемо неперервну випадкову величину X з функцією розподілу $F(x)$. Обчислимо ймовірність потрапляння цієї величини на елементарний проміжок $(x,x+\Delta x)$. За формулою (4)

$$P(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x).$$

Розділимо цю рівність на довжину проміжку Δx:

$$\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}. \tag{5}$$

Відношення (5) називається **середньою ймовірністю**, яка припадає на одиницю довжини проміжку.

Нехай $F(x)$ буде диференційованою на цьому проміжку. Перейдемо в рівності (5) до границі при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x<X<x+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x)=f(x).$$

Означення. Границя відношення ймовірності потрапляння неперервної випадкової величини на проміжок $(x,x+\Delta x)$ до довжини цього проміжку Δx, коли Δx прямує до нуля, називається **щільністю розподілу** випадкової величини в точці x і позначається $f(x)$.

Тобто щільність розподілу $f(x)$ (диференціальна функція розподілу) дорівнює похідній від функції розподілу $F(x)$

$$F'(x)=f(x). \tag{6}$$

Щільність розподілу $f(x)$ характеризує частоту появи випадкової величини X в деякому околі точки x у разі повторення випробувань (функцію $f(x)$ називають ще диференціальним законом розподілу випадкової величини).

Розглянемо властивості щільності розподілу.

Властивість 1. Щільність розподілу $f(x)$ – невід'ємна функція, тобто $f(x)\geq 0$.

Дійсно, $F(x)$ – неспадна функція, тому $F'(x)=f(x)$ буде невід'ємною функцією.

Властивість 2. Функція розподілу обчислюється за формулою

$$F\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx. \tag{7}$$

Доведення. За формулою (6) $F'(x)=f(x)$, тоді $dF(x)=F'(x)dx=$ $=f(x)dx$. Отже:

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} dF\left(x\right)=F\left(x\right)-F\left(-\infty\right)=\left\{F\left(-\infty\right)=0\right\}=F\left(x\right).$$

Надалі потрібно розрізняти значення x у формулі (7): незалежна змінна x функції $F(x)$ і верхня межа інтегрування – це одна й та сама змінна. А ось у підінтегральному виразі $f(x)dx$ змінна x ніяк не стосується попередньої змінної x (можна було б цей вираз позначити й іншою змінною, наприклад $f(t)dt$).

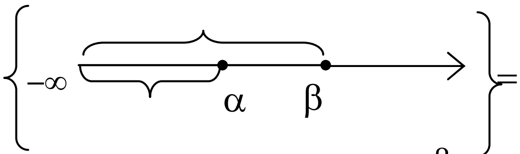
На графіку $f(x)$ функція розподілу $F(x)$ зображена заштрихованою площею (рис. 3).

Властивість 3. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини X на проміжок $\left(\alpha,\beta\right)$ обчислюється за формулою

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left(x\right)dx. \tag{8}$$

Доведення. За формулою (4): $P\left(\alpha<X<\beta\right)=F\left(\beta\right)-F\left(\alpha\right)$. А за формулою (7) $F\left(\beta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\beta} f\left(x\right)dx$, $F\left(\alpha\right)=\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f\left(x\right)dx$. Тоді:

$$P\left(\alpha<X<\beta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\beta} f\left(x\right)dx-\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f\left(x\right)dx=$$



$$=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Тобто, ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення з інтервалу $\left(\alpha,\beta\right)$, дорівнює заштрихованій площі криволінійної трапеції (рис. 4).

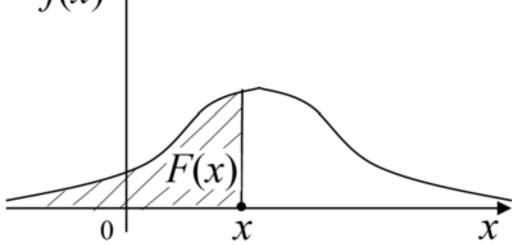


Рис. 3

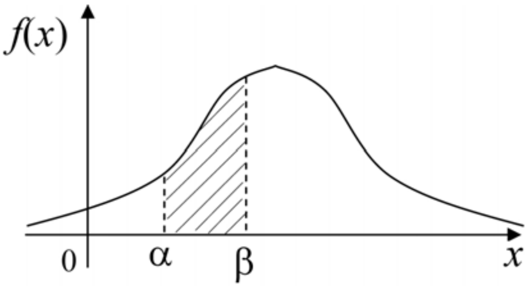


Рис. 4

Властивість 4. Інтеграл у нескінченних межах від щільності розподілу завжди дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{9}$$

Доведення. Замінимо у формулі (7) x на $+\infty$: $F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. З іншого боку, відомо, що $F(\infty) = 1$, тоді $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Зрозуміло, що коли $f(x)$ задана на проміжку $[a,b]$ (а за межами його дорівнює нулю), то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Геометрично властивість 4 означає, що площа криволінійної трапеції, обмежена віссю OX і $f(x)$, завжди дорівнює одиниці (рис. 5, 6).

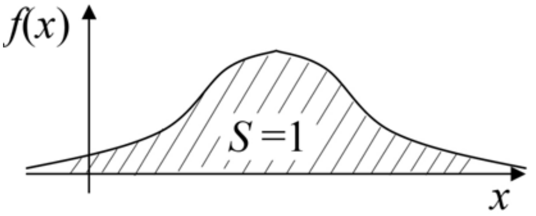


Рис. 5

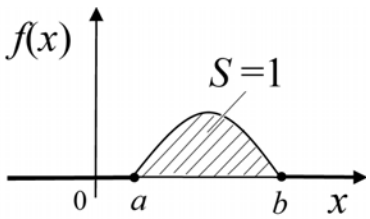


Рис. 6

Тепер можна сформулювати ще одне означення неперервної випадкової величини.

Випадкова величина X називається неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на осі OX, а щільність розподілу $f(x)$ (може бути розривною) існує всюди, за винятком скінченної кількості точок.

Основні формули і твердження

Ряд розподілу дискретної випадкової величини має вигляд

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

.

Тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значення, яких набуває випадкова величина X, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – відповідні ймовірності. Сума цих ймовірностей завжди повинна дорівнювати одиниці, тобто $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.

За означенням інтегральна функція розподілу (функція розподілу) $F(x) = P(X < x)$, $0 \le F(x) \le 1$. Вона існує як для дискретної, так і для неперервної випадкових величин. Для дискретних величин функція розподілу обчислюється за формулою $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X < x)$. Тут x_i – значення випадкової величини, а x – аргумент функції $F(x)$. Графік такої функції зображений на рис. 7.

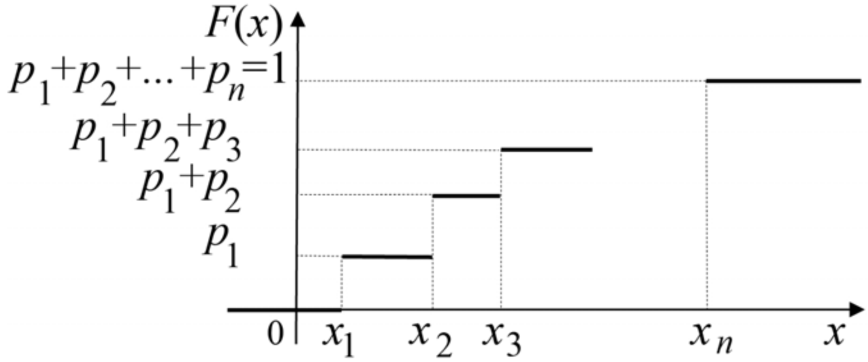


Рис. 7

Для неперервної випадкової величини її функція розподілу $F(x)$ є неперервною функцією.

Диференціальна функція розподілу (щільність розподілу) $f(x)$ існує тільки для неперервних випадкових величин. Функція $f(x)$ завжди невід'ємна, тобто $f(x) \geq 0$. Функції $F(x)$ і $f(x)$ пов'язані формулами:

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал (α, β) можна обчислити за допомогою таких формул:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \quad P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

І нарешті, розглянемо важливу властивість щільності розподілу: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. З геометричного погляду, площа криволінійної трапеції, обмеженої кривою $f(x)$ і віссю OX, завжди дорівнює одиниці. Тобто, якщо ця рівність виконується, то функція $f(x)$ буде щільністю розподілу деякої неперервної випадкової величини.

Розв'язання прикладів

Блок 2

Приклад 1. Баскетболіст закидає м'яч у кошик з ймовірністю 0,7. Знайти функцію розподілу випадкової величини X – кількості влучень у кошик, якщо баскетболіст виконує три кидки. Побудувати графік функції $F(x)$.

Розв'язання. Спочатку складемо ряд розподілу. За умовою X – кількість влучень при трьох кидках (X – дискретна величина). Тому X може набувати значень: 0, 1, 2, 3. Знайдемо ймовірності цих значень за формулою Бернуллі:

$$P(X = 0) = C_3^0 (0,7)^0 (0,3)^3 = 0,027.$$

$$P(X=1)=C_3^1\cdot 0{,}7\cdot(0{,}3)^2=3\cdot 0{,}7\cdot 0{,}09=0{,}189\,.$$

$$P(X=2)=C_3^2\cdot(0{,}7)^2\cdot 0{,}3=3\cdot 0{,}49\cdot 0{,}3=0{,}441\,.$$

$$P(X=3)=C_3^3\cdot(0{,}7)^3\cdot(0{,}3)^0=0{,}343\,.$$

Перевіряємо умову того, що сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці:

$$0{,}027+0{,}189+0{,}441+0{,}343=1\,.$$

Складемо ряд розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

А тепер за формулою (2) знайдемо $F(x)$.

Нехай $x\le 0$, тоді $F(x)=\sum\limits_{x_i<0}P(X=x_i)=0$, тобто немає значень випадкової величини, менших за 0.

Нехай $0<x\le 1$, тоді $F(x)=\sum\limits_{x_i<1}P(X=x_i)=P(X=0)=0{,}027$, $X=0$ маємо одне значення випадкової величини менше одиниці: $X=0$, а ймовірність цієї події дорівнює 0,027.

Нехай $1<x\le 2$, тоді $F(x)=\sum\limits_{x_i<2}P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}027+$ $+0{,}189=0{,}216$ (ймовірності сумуємо).

Нехай $2<x\le 3$, тоді $F(x)=\sum\limits_{x_i<3}P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)+$ $+P(X=2)=0{,}027+0{,}189+0{,}441=0{,}657$.

Нехай $x>3$, тоді $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$ $=0{,}027+0{,}189+0{,}441+0{,}343=1$.

Кінцеве значення функції $F(x)$ завжди дорівнює одиниці, оскільки підсумовуються всі значення ймовірності в ряді розподілу. Таким чином

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}027, & 0<x\le 1,\\ 0{,}216, & 1<x\le 2,\\ 0{,}657, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Побудуємо графік функції $F(x)$ (рис. 8). Із одержаного графіка робимо висновок: функція розподілу дискретної випадкової величини розривна і зростає стрибками.

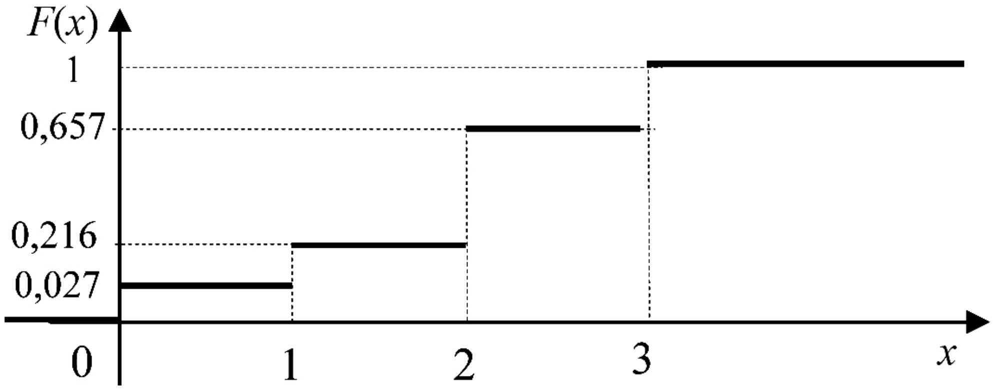


Рис. 8

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{x^4}{16}, & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Знайти: 1) $f(x)$; 2) ймовірність потрапляння X на інтервал (1, 5).

Розв'язання. 1. Використаємо формулу $f(x)=F'(x)$. Тобто, для знаходження $f(x)$ достатньо знайти похідну від функції $F(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1}{4}x^3, & 0<x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

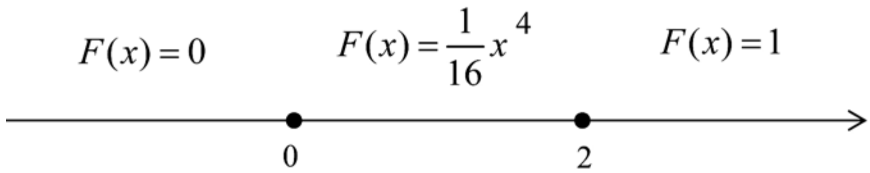
Нагадуємо, що похідна від сталої дорівнює нулю.

2. Ймовірність потрапляння випадкової величини X на інтервал (1, 5) можна знайти і за допомогою функції $F(x)$, і за допомогою функції $f(x)$. Краще розглянути формулу з функцією $F(x)$: $P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$.

У цьому випадку: $\alpha=1$, $\beta=5$

$$P(1<X<5)=F(5)-F(1).$$

Для спрощення розв'язання подамо $F(x)$ у такому вигляді:



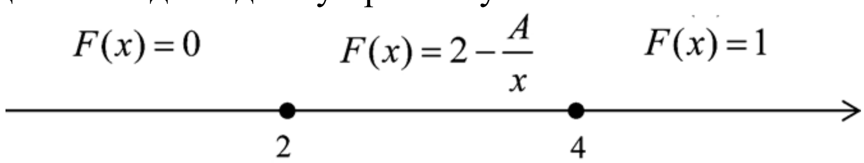
Тепер видно, що $F(5)=1$, $F(1)=\dfrac{1}{16}$. Тому $P(1<X<5)=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}$.

Приклад 3. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ 2-\dfrac{A}{x}, & 2<x\le 4; \\ 1, & x>4. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт A; 2) функцію $f(x)$; 3) ймовірність потрапляння X на півінтервал [2, 3).

Розв'язання. 1. Нагадаємо, що в дискретної випадкової величини функція $F(x)$ розривна, а в неперервної випадкової величини функція $F(x)$ – неперервна. У цьому прикладі функція $F(x)$ складається з трьох функцій, кожна з яких задана на відповідному проміжку:



Застосуємо критерій (означення) неперервності функції в точці x_0. Нагадаємо його: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

Для того щоб знайти коефіцієнт A, потрібно прирівняти границю зліва і границю справа функції $F(x)$ в точці $x=2$ (або $x=4$).

Візьмемо точку $x=2$.

Границя зліва в цій точці: $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)=0$ (див. схему).

Границя справа в цій точці: $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x)=2-\dfrac{A}{2}$.

Прирівнюємо ці границі: $0=2-\dfrac{A}{2}$.

Звідси $0=4-A \Rightarrow A=4$.

Зауважимо, що такий самий результат ми одержимо і в точці $x=4$: $2-\dfrac{A}{4}=1\Rightarrow A=4$.

2. Знайдемо функцію $f(x)$ за формулою $f(x)=F'(x)$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2; \\ \dfrac{4}{x^2}, & 2<x\le 4; \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

3. Застосовуємо формулу $P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)$. У нашому випадку $\alpha=2$, $\beta=3$. Тоді

$$P(2\le X<3)=F(3)-F(2)=\left(2-\frac{4}{3}\right)-0=\frac{2}{3}.$$

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ A\sin x, & 0<x\le \pi; \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти: 1) коефіцієнт A; 2) ймовірність потрапляння X на інтервал $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$;

3) інтегральну функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання. 1. Скористаємося властивістю функції $f(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Виходячи з того що в цьому прикладі функція $f(x)$ набуває ненульових значень тільки на проміжку $(0,\pi]$, цю властивість можна записати так: $\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx=1$. Тоді: $\int\limits_{0}^{\pi} A\sin xdx=1 \Rightarrow A\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=1 \Rightarrow A=\dfrac{1}{\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx}$. Обчислимо інтеграл $\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx=$

$=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-\left[\cos\pi-\cos 0\right]=-\left[-1-1\right]=2$.

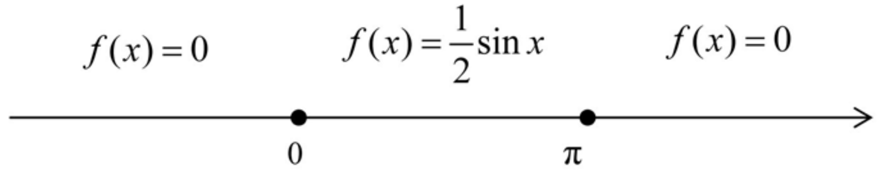
Таким чином, $A=\dfrac{1}{2}$.

2. Застосуємо формулу $P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Тут $\alpha=\dfrac{\pi}{3}, \beta=\pi$. Тоді

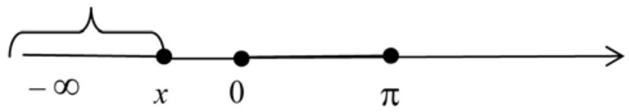
$$P\left(\frac{\pi}{3}<X<\pi\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\sin xdx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=-\frac{1}{2}\left[\cos\pi-\cos\frac{\pi}{3}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[-1-\frac{1}{2}\right]=0,75.$$

3. Функцію розподілу $F(x)$ будемо знаходити за формулою (7): $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Нагадаємо, що аргумент функції $F(x)$ і верхня межа інтеграла – це одна й та сама змінна. Тепер розглянемо уважно функцію $f(x)$. Вона на різних проміжках задана різними виразами.

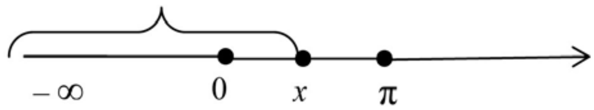


Нехай $x \le 0$



Тоді $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$.

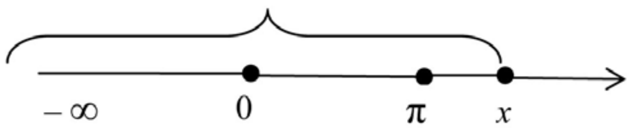
Нехай $0 < x \le \pi$



Тоді

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin xdx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{x}=-\frac{1}{2}\left[\cos x-1\right]=\frac{1-\cos x}{2}.$$

Нехай $x > \pi$



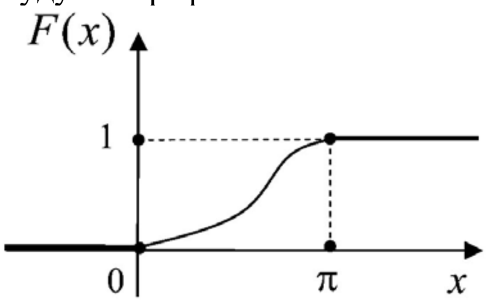
Тоді

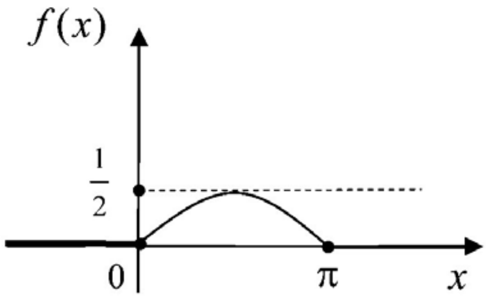
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f\left(x\right)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\sin xdx+\int\limits_{\pi}^{x}0dx=-\frac{1}{2}\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{2}\left[-1-1\right]=1.$$

Таким чином, функція розподілу буде мати вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Будуємо графіки





Запитання для самоперевірки

1. Що таке випадкова величина?
2. Яка випадкова величина називається дискретною, неперервною?
3. Що таке ряд розподілу? многокутник розподілу?
4. Чому дорівнює сума ймовірностей у ряді розподілу?

5. Що таке інтегральна функція розподілу? Назвіть її властивості.

6. Який графік має функція розподілу для дискретної випадкової величини?

7. За якою формулою знаходять диференціальну функцію розподілу? Назвіть її властивості.

8. Який геометричний зміст має властивість щільності розподілу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$?

9. Для яких випадкових величин існує інтегральна функція розподілу?

10. Для яких випадкових величин існує диференціальна функція розподілу?

5. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закони розподілу повністю характеризують випадкову величину з ймовірнісної позиції. Але для розв'язання багатьох практичних задач достатньо вказати лише деякі характерні риси закону. Для цього використовуються величини, які називають числовими характеристиками випадкових величин. Основне їх призначення – у стислій формі відобразити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілу.

Для кожної випадкової величини необхідно насамперед знати її деяке середнє значення, навколо якого групуються можливі значення випадкової величини, а також число, яке характеризує ступінь розкидання цих значень відносно середнього значення. Крім цих числових характеристик використовують ще низку інших. Розглянемо найбільш важливі з них.

5.1. Математичне сподівання

Важливою характеристикою випадкової величини є так зване математичне сподівання $M\left[X\right]$, яке іноді називають просто **середнім значенням** випадкової величини. Для дискретної й неперервної випадкових величин математичне сподівання обчислюється за різними формулами.

Розглянемо дискретну випадкову величину X, яка набуває значень: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ з відповідними ймовірностями: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Тоді **математичне сподівання** $M\left[X\right]$ **дискретної випадкової величини** X буде обчислюватися за формулою

$$M\left[X\right] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \qquad (10)$$

Якщо X набуває нескінченної кількості значень (які можна перенумерувати) $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ з відповідними ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, то математичне сподівання буде обчислюватися за формулою

$$M\left[X\right] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Означення. Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Надалі, крім позначення $M\left[X\right]$, математичне сподівання будемо позначати і так: m_x.

Тепер розглянемо неперервну випадкову величину X, усі можливі значення якої належать відрізку $\left[a,b\right]$. Нехай $f(x)$ – щільність ймовірності величини X. Тоді **математичне сподівання неперервної випадкової величини** X буде обчислюватися за формулою

$$M\left[X\right]=\int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{11}$$

Якщо можливі значення випадкової величини X належать всій осі OX, то математичне сподівання буде обчислюватись за допомогою інтеграла:

$$M\left[X\right]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Розглянемо властивості математичного сподівання.

Властивість 1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій, тобто

$$M\left[C\right]=C.$$

Дійсно, сталу величину C можна розглядати як окремий випадок величини, яка з імовірністю, рівною одиниці, набуває тільки одного значення C. Тоді, за формулою (10) $M\left[C\right]=C\cdot 1=C$.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M\left[C\cdot X\right]=C\cdot M\left[X\right].$$

Дійсно,

$$M\left[C\cdot X\right]=\sum_{i=1}^{n} Cx_i\cdot p_i=C\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=C\cdot M\left[X\right].$$

Означення. Дві випадкові величини називають **незалежними**, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень буде набувати друга величина.

Означення. Добутком незалежних випадкових величин X і Y називають випадкову величину XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення X на кожне можливе значення Y. Ймовірності можливих значень добутку XY дорівнюють добуткам відповідних ймовірностей. За допомогою цього означення можна довести таку властивість.

Властивість 3. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right].$$

Ця властивість справедлива і для довільного (скінченного) числа незалежних випадкових величин.

Означення. Сумою випадкових величин X і Y називають величину $X+Y$, можливі значення якої дорівнюють сумам кожного можливого значення X з кожним можливим значенням Y. Ймовірності можливих значень $X+Y$ для незалежних величин X і Y дорівнюють добуткам ймовірностей доданків, а для залежних X і Y – добуткам ймовірностей одного доданка на умовну ймовірність другого. За допомогою цього означення можна довести таку властивість.

Властивість 4. **Математичне сподівання суми** двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

$$M\left[X+Y\right]=M\left[X\right]+M\left[Y\right].$$

Ця властивість виконується і для довільного (скінченного) числа випадкових величин.

Зауваження. Крім математичного сподівання, яке є основною числовою характеристикою положення випадкової величини, застосовуються й інші характеристики положення: мода M_0 дискретної випадкової величини – її найбільш імовірне значення, медіана M_D – значення випадкової величини, відносно якого рівноймовірно одержати більше або менше значення випадкової величини.

Основні формули й властивості математичного сподівання

Математичне сподівання – це середнє значення випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини: $M\left[X\right]=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Для неперервної випадкової величини: $M\left[X\right]=\int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$.

Властивості $M\left[X\right]$:

1) $M\left[C\right]=C$;

2) $M\left[C\cdot X\right]=C\cdot M\left[X\right]$;

3) $M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right]$ – для незалежних випадкових величин;

4) $M\left[X+Y\right]=M\left[X\right]+M\left[Y\right]$ – і для залежних, і для незалежних випадкових величин.

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. Випадкова величина X задана рядом розподілу:

x_i	1	3	4	7
p_i	0,3	0,4	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання. Використаємо формулу (10):

$$M\left[X\right]=1\cdot 0,3+3\cdot 0,4+4\cdot 0,2+7\cdot 0,1=0,3+1,2+0,8+0,7=3.$$

Приклад 2. Знайти математичне сподівання випадкової величини, якщо її закон розподілу (ряд розподілу) має вигляд:

x_i	-1	0	2	5
p_i	$0,1$	$0,3$		$0,2$

Розв'язання. Спочатку знайдемо ймовірність p_3 з умови: $p_1+p_2+...+$ $+p_n=1$. У нашому прикладі: $0,1+0,3+p_3+0,2=1$ Звідси: $p_3=1-(0,1+$ $+0,3+0,2)=1-0,6=0,4$. Запишемо ряд розподілу:

x_i	-1	0	2	5
p_i	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

Тепер знайдемо $M\left[X\right]$:

$$M\left[X\right]=(-1)\cdot 0,1+0\cdot 0,3+2\cdot 0,4+5\cdot 0,2=-0,1+0,8+1=1,7.$$

Приклад 3. Знайти математичне сподівання сталої величини $C=5$.

Розв'язання. Використаємо властивість $M\left[C\right]=C$. У нашому випадку: $M\left[5\right]=5$.

Приклад 4. $M\left[X\right]=8$, $M\left[Y\right]=-3$. Знайти: 1) $M\left[2X+5Y\right]$; 2) $M\left[X-7Y\right]$.

Розв'язання. 1. Використаємо властивості 2 і 4:

$$M\left[2X+5Y\right]=M\left[2X\right]+M\left[5Y\right]=2M\left[X\right]+5M\left[Y\right]=2\cdot 8+5\cdot(-3)=1.$$

2. Аналогічно: $M\left[X-7Y\right]=M\left[X+\left(-7Y\right)\right]=M\left[X\right]+M\left[-7Y\right]=M\left[X\right]-$ $-7M\left[Y\right]=8-7(-3)=29$.

Блок 2

Приклад 1. Незалежні випадкові величини X і Y задані такими законами розподілу:

x_i	1	2	4
p_i	$0,5$	$0,2$	$0,3$

y_i	3	5
p_i	$0,6$	$0,4$

Знайти $M\left[X\cdot Y\right]$.

Розв'язання. Скористаємося формулою $M\left[X\cdot Y\right]=M\left[X\right]\cdot M\left[Y\right]$. За цією формулою знайдемо $M\left[X\right]$ і $M\left[Y\right]$, а потім їх перемножимо.

$$M\left[X\right]=1\cdot 0,5+2\cdot 0,2+4\cdot 0,3=2,1,$$

$$M\left[Y\right]=3\cdot 0,6+5\cdot 0,4=3,8,$$

$$M\left[X\cdot Y\right]=2,1\cdot 3,8=7,98.$$

Приклад 2. Стрілець двічі стріляє в мішень. Ймовірність влучення при кожному пострілі однакова. Знайти цю ймовірність, якщо випадкова величина X – кількість влучень, а $M[X]=1,6$.

Розв'язання. Позначимо шукану ймовірність через p. Складемо ряд розподілу випадкової величини X – кількості влучень у мішень при двох пострілах:

x_i	0	1	2
p_i	q^2	$2pq$	p^2

Пояснимо цей ряд: $x_1=0$ – стрілець двічі стріляє і жодного разу не влучає, тобто $p_1=q^2$; $x_2=1$ – стрілець один раз влучає, один – ні. Але ця подія може відбутися у двох варіантах: перший постріл – влучення, другий – ні. І навпаки, тому $p_2=pq+qp=2pq$; $x_3=2$ – стрілець двічі влучив, тому $p_2=p^2$. Використаємо тепер формулу обчислення $M[X]$:

$$0\cdot q^2+1\cdot 2pq+2p^2=1,6\Rightarrow 2pq+2p^2=1,6\Rightarrow pq+p^2=0,8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(1-p)+p^2=0,8\Rightarrow p-p^2+p^2=0,8\Rightarrow p=0,8.$$

Приклад 3. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{4}x^3, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти $M[X]$.

Розв'язання. Використаємо формулу (11) $M[X]=\int\limits_a^b xf(x)dx$. Функція $f(x)\ne 0$ на проміжку $(0,2]$, тому:

$$M[X]=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{4}x^3dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^2 x^4dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{1}{20}\cdot 2^5=\frac{32}{20}=\frac{8}{5}=1,6.$$

Приклад 4. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{A}{1+x^2}, & -1<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти $M[X]$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо A. Скористаємося властивістю функції $f(x)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

У нашому прикладі: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{A}{1+x^2}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad A\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}}$.

Обчислимо інтеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Тоді $A = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$.

Тепер знайдемо $M\left[X\right]$:

$$M\left[X\right] = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\ln|1+x^2|\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left[\ln 2 - \ln 2\right] = 0.$$

Цей інтеграл можна було б і не обчислювати, помітивши, що підінтегральна функція непарна, а межі інтегрування симетричні відносно початку координат.

5.2. Дисперсія і середнє квадратичне відхилення

Для характеристики випадкової величини буває недостатньо знати математичне сподівання цієї величини, тому що одному $M\left[X\right]$ може відповідати велика кількість випадкових величин з різними можливими значеннями. Тому потрібні числові характеристики, які характеризують розсіяння випадкової величини навколо її середнього значення – центра розсіяння (математичного сподівання).

Характеристиками розсіяння випадкової величини є дисперсія і середнє квадратичне відхилення. Логічно розглянути різницю між випадковою величиною і математичним сподіванням: $X - m_x$. Але якщо обчислити математичне сподівання цієї різниці, то воно буде дорівнювати нулю

$$M\left[X - m_x\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n}x_i p_i - m_x\sum_{i=1}^{n}p_i = m_x - m_x \cdot 1 = 0.$$

Тобто ця різниця не може бути характеристикою розсіяння, а тільки вказує, що значення відхилення – числа різного знака. Тому за міру розсіяння випадкової величини беруть математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання $M\left[(X - m_x)^2\right]$.

Цю величину називають дисперсією випадкової величини X і позначають $D\left[X\right]$ або D_x.

Означення. Дисперсією (розсіянням) випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто

$$D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right].$$

Це загальна формула дисперсії. А тепер запишемо формули дисперсії окремо для дискретних і неперервних випадкових величин.

Для дискретних величин: $D[X] = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 p_i$.

Для неперервних величин: $D[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)dx$.

За допомогою цих формул можна обчислювати дисперсію випадкової величини. Але можна ці формули спростити. Візьмемо, наприклад, формулу дисперсії для дискретних величин.

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i m_x + m_x^2\right)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i -$$

$$-2m_x\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x{}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = M\left[X^2\right] - 2m_x^2 + m_x^2 = M\left[X^2\right] - m_x^2.$$

Тобто $D[X] = M\left[X^2\right] - m_x^2$ – дисперсія дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання. Використовуючи одержане означення, формули дисперсії будуть мати вигляд:

– для дискретної випадкової величини:

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2, \tag{12}$$

– аналогічно для неперервної випадкової величини

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2. \tag{13}$$

Якщо функція $f(x) \in [a;b]$, то $D[X] = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx - m_x^2$.

Розглянемо властивості дисперсії.

Властивість 1. Дисперсія сталої величини С дорівнює нулю:

$$D[C] = 0.$$

Цю властивість можна довести, а можна просто зауважити, що стала величина має одне й те саме значення й тому розсіяння немає.

Властивість 2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії піднесеним до квадрата:

$$D[C \cdot X] = C^2 D[X].$$

Властивість 3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y].$$

Ця властивість виконується і для декількох незалежних випадкових величин.

Із перелічених властивостей випливає таке.

Дисперсія суми випадкової величини і сталої дорівнює дисперсії випадкової величини:

$$D[X+C]=D[X]+D[C]=D[X].$$

Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D[X-Y]=D[X+(-Y)]=D[X]+D[-Y]=D[X]+(-1)^2 D[Y]=D[X]+D[Y].$$

І нарешті, зауважимо, що дисперсія випадкової величини завжди додатна, тобто $D[X]>0$ (для сталої величини $D[X]=0$).

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини. Тому розглядають ще одну характеристику розсіяння, розмірність якої збігається з розмірністю випадкової величини. Цю характеристику називають **середнім квадратичним відхиленням** і позначають символом $\sigma[X]$ або σ_x:

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}. \qquad (14)$$

Зрозуміло, що $\sigma[X]>0$ – для випадкової величини і $\sigma[X]=0$ – для сталої величини.

Основні формули і властивості дисперсії

$D[X]=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - m_x^2$ – для дискретної випадкової величини;

$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m_x^2$ – для неперервної величини;

$D[C]=0$ – C – стала величина;

$D[C\cdot X]=C^2\cdot D[X]$;

$D[X+Y]=D[X]+D[Y]$, X, Y – незалежні величини;

$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$.

Зауваження. Узагальненням числових характеристик випадкових величин є так звані моменти випадкових величин. Докладніше ця тема розглянута в рекомендованій літературі [2].

Розв’язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. Випадкова величина задана рядом розподілу:

x_i	-2	1	3
p_i	$0,4$		$0,5$

Знайти: 1) $D[X]$; 2) $\sigma[X]$.

Розв’язання. Перш ніж починати знаходження дисперсії, обчислимо ймовірність p_2, з якою випадкова величина набуває значення $x_2 = 1$. Завжди в ряді розподілу $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Звідси $0,4 + p_2 + 0,5 = 1 \Rightarrow p_2 = 1-(0,4+0,5) \Rightarrow$ $\Rightarrow p_2 = 0,1$.

Запишемо ряд розподілу:

x_i	-2	1	3
p_i	$0,4$	$0,1$	$0,5$

1. Застосуємо формулу (12) $D[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - m_x^2$. Наголосимо, що дисперсію без обчислення математичного сподівання знайти не можна. Тому спочатку визначаємо m_x:

$$m_x = M[X] = (-2)0,4 + 1\cdot 0,1 + 3\cdot 0,5 = -0,8 + 0,1 + 1,5 = 0,8.$$

Тепер складемо ряд розподілу для випадкової величини X^2:

x_i^2	4	1	9
p_i	$0,4$	$0,1$	$0,5$

і обчислимо:

$$M\left[X^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i = 4\cdot 0,4 + 1\cdot 0,1 + 9\cdot 0,5 = 6,2.$$

А тепер за формулою (12) одержимо:

$$D[X] = 6,2 - (0,8)^2 = 6,2 - 0,64 = 5,56.$$

Нагадаємо, що дисперсія випадкової величини завжди додатна.

2. Знайдемо середнє квадратичне відхилення за формулою (14)

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{5,56} \approx 2,358.$$

Зауваження. Якщо в прикладі треба знайти тільки $\sigma[X]$, то все одно потрібно спочатку знайти $M[X]$, потім $D[X]$, а вже потім $\sigma[X]$.

Приклад 2. $D[X] = 4$, $D[Y] = 3$. Знайти: 1) $D[X+5]$; 2) $D[X-Y]$; 3) $D[-5X]$; 4) $D[2X+4Y]$.

Розв’язання. Цей приклад розв’язується за допомогою властивостей дисперсії:

1. $D[X+5]=D[X]+D[5]=\left\{\begin{matrix}\text{дисперсія сталої}\\ \text{дорівнює нулю}\end{matrix}\right\}=D[X]=4$.

2. $D[X-Y]=D\left[X+(-Y)\right]=D[X]+D[-Y]=D[X]+(-1)^2 D[Y]=$
$$=4+3=7;$$

3. $D[-5X]=(-5)^2 D[X]=25\cdot 4=100$;

4. $D[2X+4Y]=D[2X]+D[4Y]=4\cdot D[X]+16\cdot D[Y]=4\cdot 4+16\cdot 3=64$.

Блок 2

Приклад 1. Випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{3}{7}x^2, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти: 1) $D[X]$; 2) $\sigma[X]$.

Розв'язання. 1. Дисперсію знаходимо за формулою (13):

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-m_x^2.$$

Щільність розподілу $f(x)\ne 0$ на $(1,2]$, тому

$$D[X]=\int\limits_1^2 x^2\cdot\frac{3}{7}x^2dx-m_x^2.$$

Знайдемо математичне сподівання (за формулою (11)):

$$m_x=M[X]=\int\limits_1^2 x\cdot f(x)dx=\int\limits_1^2 x\cdot\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\int\limits_1^2 x^3dx=\frac{3}{7}\frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2=\frac{3}{28}[16-1]=$$
$$=\frac{3}{28}15=\frac{45}{28}.$$

Тепер знайдемо:

$$\int\limits_1^2 x^2\cdot\frac{3}{7}x^2dx=\frac{3}{7}\int\limits_1^2 x^4dx=\frac{3}{7}\frac{x^5}{5}\Bigg|_1^2=\frac{3}{35}[32-1]=\frac{3}{35}31=\frac{93}{35}.$$

І нарешті, за формулою (13):

$$D[X]=\frac{93}{35}-\left(\frac{45}{28}\right)^2\approx 2{,}657-(1{,}6)^2=2{,}657-2{,}56=0{,}097.$$

2. Знайдемо $\sigma[X]$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{0{,}097}\approx 0{,}311.$$

Приклад 2. Ймовірність того, що студент складе іспит на «5», дорівнює 0,2, на «4» – 0,4. Знайти $D\left[X\right]$, якщо $M\left[X\right]=3,7$, а випадкова величина X – оцінка, одержана студентом на випробуванні.

Розв'язання. Складемо ряд розподілу величини X – оцінки, одержаної на випробуванні:

x_i	5	4	3	2
p_i	0,2	0,4	p_3	p_4

Знайдемо ймовірності p_3 і p_4. Для цього складемо два рівняння. Перше рівняння ми одержимо із умови, що сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці. А друге рівняння одержимо, використовуючи формулу обчислення математичного сподівання для дискретних випадкових величин.

$$\begin{cases} 0,2+0,4+p_3+p_4=1 \\ 5\cdot 0,2+4\cdot 0,4+3p_3+2p_4=3,7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3+p_4=0,4 \\ 3p_3+2p_4=1,1 \end{cases} \Rightarrow p_3=0,3,$$

тоді $p_4=0,1$.

Тепер знаходимо математичне сподівання величини X^2:

$$M[X^2]=25\cdot 0,2+16\cdot 0,4+9\cdot 0,3+4\cdot 0,1=5+6,4+2,7+0,4=14,5,$$

тоді $D\left[X\right]=M\left[X^2\right]-m_X^2=14,5-\left(3,7\right)^2=14,5-13,69=0,81$.

Запитання для самоперевірки

1. Що таке математичне сподівання? За якими формулами знаходять $M\left[X\right]$ для дискретних і неперервних випадкових величин?

2. Чому дорівнює математичне сподівання сталої величини?

3. Чому дорівнює математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин?

4. Чому дорівнює математичне сподівання суми випадкових величин?

5. Що таке дисперсія випадкової величини? За якими формулами знаходять $D\left[X\right]$ для дискретних і неперервних випадкових величин?

6. Чому дорівнює дисперсія сталої величини?

7. Чому дорівнює дисперсія суми випадкової величини і сталої величини?

8. Чому дорівнює дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин?

9. Що таке середнє квадратичне відхилення? За якою формулою воно обчислюється?

6. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Біномний розподіл. Нехай випадкова величина X – це кількість появ події A в n незалежних випробуваннях, які виконуються в однакових умовах. Ймовірність появи події A стала і дорівнює p. Як завжди, $1-p=q$. Можливі значення випадкової величини X: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2,\ldots,$

$x_n = n$. Ймовірності цих можливих значень обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, ..., n). \tag{15}$$

Якщо ряд розподілу задається формулою (15), то кажуть, що дискретна випадкова величина має біномний розподіл. Або **біномним** називають закон розподілу, у якому ймовірність випадкової величини обчислюється за формулою Бернуллі. Тобто ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Біномний розподіл має, наприклад, випадкова величина X, яка визначає: кількість бракованих виробів серед загальної кількості n виробів; кількість влучень у мішень при n пострілах і т. д. Але слід пам'ятати, що кількість випробувань n у цьому законі невелика.

За означенням математичне сподівання для дискретної величини має вигляд:

$$M[X] = \sum_{m=0}^{n} x_m p_m = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Можна довести, що $M[X]$ в біномному розподілі обчислюється за такою простою формулою:

$$M[X] = np, \tag{16}$$

де n – загальна кількість випробувань,

p – ймовірність появи події в одному випробуванні.

$D[X]$ в біномному розподілі обчислюється за такою формулою:

$$D[X] = npq. \tag{17}$$

А середнє квадратичне відхилення, як завжди, можна знайти за формулою $\sigma[X] = \sqrt{D[X]}$.

Приклад. Випадкова величина X – кількість влучень у мішень при п'яти пострілах. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти середню кількість (математичне сподівання) влучень.

Розв'язання. За умовою прикладу X – кількість влучень у мішень при п'яти пострілах. Зрозуміло, що X може набувати значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Наприклад: $x_0 = 0$ – жодного влучення при п'яти пострілах, $x_1 = 1$ – одне влучення при п'яти пострілах, $x_2 = 2$ – два влучення і т. д.

Математичне сподівання випадкової величини X можна було б знайти і за допомогою загальної формули $M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Але для цього потрібно було б скласти ряд розподілу (ймовірності обчислити за формулою Бернуллі), а потім вже скористатися формулою. У тому й перевага знання законів розподілу, що в цьому випадку ми просто використаємо формулою (16). Тут $n=5$, $p=0,6$. Тоді $M[X]=5\cdot 0,6=3$. Тобто середня кількість влучень у мішень дорівнює трьом.

2. Закон (розподіл) Пуассона. Нехай випадкова величина X набуває значень: 0, 1, 2,…, n, а ймовірності цих значень обчислюються за формулою Пуассона:

$$P(X=m)=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}, \quad \text{де } a=n\cdot p, \quad m=0,1,2,\dots n. \tag{18}$$

Якщо ряд розподілу задається формулою (18), то кажуть, що дискретна випадкова величина має **розподіл Пуассона**. Цей ряд має вигляд:

x_i	0	1	2	...	m	...	n
p_i	$\frac{a^0}{0!}\cdot e^{-a}$	$\frac{a^1}{1!}\cdot e^{-a}$	$\frac{a^2}{2!}\cdot e^{-a}$	...	$\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$	...	$\frac{a^n}{n!}e^{-a}\cdot$

Розподіл Пуассона є граничним для біномного, якщо кількість випробувань n прямує у нескінченність, а ймовірність події p прямує до нуля (причому їх добуток $np=a$ залишається сталим). За такими умовами ($n\to\infty$, $p\to 0$, $np=a=\text{const}$) ймовірність $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$ прямує до ймовірності $P(X=m)=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a}$. Тобто, розподіл Пуассона заміняє біномний розподіл, коли кількість випробувань велика, а ймовірність появи події в кожному з них мала. Тому закон Пуассона називають законом рідких подій. Прикладами випадкової величини, яка має розподіл Пуассона, є кількість викликів пожежної машини за деякий час t; кількість відмов складної апаратури за час t і т. д.

Математичне сподівання й дисперсія випадкової величини X, яка має розподіл Пуассона, обчислюються за формулою

$$M[X]=D[X]=np=a. \tag{19}$$

Приклад. Перевіряється партія із 10 000 виробів. Ймовірність того, що виріб буде бракованим, дорівнює 0,003. Знайти середню кількість (математичне сподівання) і дисперсію кількості бракованих виробів у цій партії.

Розв'язання. Кількість випробувань ($n=10\,000$) велика, а ймовірність ($p=0,003$) достатньо мала, тому можна вважати, що випадкова величина X – кількість бракованих виробів – розподілена за законом Пуассона.

За формулою (19) математичне сподівання дорівнює: $M[X]=np=$ $=10\,000\cdot 0,003=30$. Тобто середня кількість бракованих виробів дорівнює 30. Дисперсія кількості бракованих виробів буде такою самою: $D[X]=np=30$.

3. Геометричний розподіл. Якщо дискретна випадкова величина X набуває зчисленну множину значень $1,2,3,\dots,m,\dots$ з відповідними ймовірностями $P(X=m)=q^{m-1}p$, $m=1,2,3,\dots$, то кажуть, що X має **геометричний розподіл**.

Ряд розподілу цієї випадкової величини X має вигляд:

x_i	1	2	3	...	m	...
p_i	p	$q \cdot p$	$q^2 \cdot p$	...	$q^{m-1} \cdot p$	...

Числові характеристики в цьому випадку обчислюються за формулами:

$$M[X] = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{q}{p^2}. \tag{20}$$

Приклад. Виконується стрільба по цілі до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,3. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X – кількості виконаних пострілів, якщо кількість патронів необмежена.

Розв'язання. Випадкова величина X – кількість виконаних пострілів до першого влучення – має геометричний розподіл, причому $p = 0,3$, $q = 0,7$. Тоді за формулами (20):

математичне сподівання $M[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3} \approx 3$, тобто середня кількість використаних патронів (до першого влучення) дорівнює 3;

дисперсія кількості виконаних пострілів $D[X] = \frac{q}{p^2} = \frac{0,7}{0,09} = \frac{70}{9}$.

Основні формули

Біномний закон: ймовірність обчислюється за формулою Бернуллі

$$P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 1, 2, ..., n.$$

$$M[X] = np, \quad D[X] = npq.$$

Закон Пуассона: ймовірність обчислюється за формулою Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \quad a = np, \quad m = 1, 2, ..., n.$$

$$M[X] = D[X] = np = a.$$

Геометричний закон: ймовірність обчислюється за формулою

$$P(X = m) = q^{m-1} p, \quad m = 1, 2, ...$$

$$M[X] = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. Гральний кубик підкидають 12 разів. Знайти: 1) середню кількість випадіння «6»; 2) дисперсію кількості випадінь «6»; 3) середнє квадратичне відхилення кількості випадінь «6».

Розв'язання. У цьому випадку випадкова величина X має біномний розподіл.

За умовою прикладу: $n = 12$, $p = \frac{1}{6}$. Тому:

1.) $M[X] = np = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$ – середня кількість випадінь «6».

2.) $D[X] = npq = 12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$.

3.) $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{5}{3}} \approx 1,29$.

Приклад 2. У супермаркет відправлено 2 000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що при транспортуванні пляшка буде розбита, дорівнює 0,001. Знайти:

1) математичне сподівання випадкової величини X – кількості розбитих пляшок;

2) дисперсію X – кількості розбитих пляшок.

Розв'язання. Маємо розподіл Пуассона, тому що $n = 2\,000$ (кількість пляшок достатньо велика), $p = 0,001$.

Тоді:

1.) $M[X] = np = 2\,000 \cdot 0,001 = 2$ – середня кількість розбитих пляшок.

2.) $D[X] = M[X] = 2$.

Блок 2

Розглянемо приклади, умови яких, на перший погляд, схожі, але знаходження числових характеристик (застосування законів розподілу) різне.

Приклад 1. Гравець купує лотерейні білети до першого виграшу. Ймовірність виграшу за одним білетом дорівнює 0,1. Побудувати ряд розподілу для двох випадків:

1) гравець може купувати необмежену (нехай теоретичну) кількість білетів;

2) гравець може купити тільки п'ять білетів.

Знайти і в першому, і в другому випадках числові характеристики випадкової величини X – кількості куплених білетів до першого виграшного білета.

Розв'язання. 1. У цьому випадку гравець може купувати необмежену кількість білетів, тому значення випадкової величини X – кількості куплених білетів будуть: 1, 2, …, *m*, … . Ймовірність виграшу за одним білетом $p = 0,1$, тоді $q = 0,9$. Знайдемо відповідні ймовірності:

$P(X = 1) = p = 0,1$ – тобто гравець придбав один білет і він виявився виграшним;

$P(X = 2) = qp = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$ – перший білет виявився не виграшним, а другий – виграв.

Аналогічно $P(X = 3) = q^2 p = (0,9)^2 \cdot 0,1 = 0,081$ – перший і другий білети не виграли, а третій виграв.

І взагалі, $P(X=m)=q^{m-1}p=(0,9)^{m-1}\cdot 0,1$.

Тоді ряд розподілу випадкової величини X буде мати вигляд:

x_i	1	2	3	...	m	...
p_i	0,1	0,09	0,081	...	$(0,9)^{m-1}\cdot 0,1$	...

За формулою обчислення ймовірності $P(X=m)=q^{m-1}p$ робимо висновок, що величина X має геометричний розподіл.

За означенням сума ймовірностей повинна дорівнювати одиниці. Перевіримо цей факт:

$$0,1+0,9\cdot 0,1+(0,9)^2\cdot 0,1+...+(0,9)^m\cdot 0,1+...=0,1\Big[1+0,9+(0,9)^2+...+$$

$$+(0,9)^m+...\Big]=\left\{\begin{array}{c}\text{вираз у квадратних дужках} - \text{це нескінченно}\\ \text{спадна геометрична прогресія із знаменником } 0,9.\\ \text{Сума такої прогресії } S=\dfrac{a_1}{1-q},\ a_1=1,\ q=0,9\end{array}\right\}=$$

$$=0,1\cdot\frac{1}{1-0,9}=\frac{0,1}{0,1}=1.$$

Числові характеристики, тобто $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, знаходимо за формулами:

$M[X]=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{0,1}=10$ – середня кількість придбаних білетів до першого виграшного;

$D[X]=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{0,9}{0,01}=90$;

$\sigma[X]\approx 9,5$.

2. Тепер розглянемо випадок, коли у гравця є можливість купити тільки п’ять білетів.

$$P(X=1)=p;\quad P(X=2)=qp;\quad P(X=3)=q^2p;\quad P(X=4)=q^3p.$$

Останню ймовірність $P(X=5)$ розглянемо докладніше. Маємо два варіанти: 1) останній, п’ятий, білет буде виграшним: $P(X=5)=q^4p$; 2) останній, п’ятий, білет буде теж не виграшним: $P(X=5)=q^5$. Ці дві події несумісні, тому за формулою додавання ймовірностей несумісних подій маємо $P(X=5)= =q^4p+q^5$.

Складемо ряд розподілу:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

До речі, якщо перевірити суму ймовірностей, то одержимо одиницю.

Розподіл випадкової величини X у цьому випадку невідомий, тому числові характеристики знайдемо за загальними формулами.

$$M\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}081+4\cdot 0{,}0729+5\cdot 0{,}6561=4{,}0951;$$

$$D\left[X\right]=\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot p_i - {m_x}^2 = 1\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}09+9\cdot 0{,}081+16\cdot 0{,}0729+$$

$$+25\cdot 0{,}6561-16{,}768=1{,}9899;$$

$\sigma\left[X\right]=1{,}4106$.

Приклад 2. Знайти середню кількість лотерейних білетів, на які випадуть виграші, якщо: 1) куплено 20 білетів і ймовірність виграшу за одним білетом дорівнює 0,2; 2) куплено 1 500 білетів і ймовірність виграшу за одним білетом дорівнює 0,002. Знайти в обох випадках дисперсію кількості виграшних білетів.

Розв'язання. 1. $n=20$, $p=0{,}2$. Маємо біномний розподіл. Тому $M\left[X\right]= =np=20\cdot 0{,}2=4$ – середня кількість виграшних білетів; $D\left[X\right]=npq= =20\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=3{,}2$.

2. $n=1500$, $p=0{,}002$. Маємо розподіл Пуассона. Тому $M\left[X\right]=D\left[X\right]= =np=1\,500\cdot 0{,}002=3$.

Запитання для самоперевірки

1. Які розподіли розглядаються для дискретних випадкових величин?
2. Як визначити, що дискретна випадкова величина має біномний закон розподілу?
3. За якими формулами обчислюються $M\left[X\right]$ і $D\left[X\right]$ в біномному законі розподілу?
4. За якими формулами обчислюються $M\left[X\right]$ і $D\left[X\right]$ в законі Пуассона?
5. За якою формулою обчислюється ймовірність в геометричному законі?

7. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Рівномірний розподіл. Рівномірним розподілом неперервної випадкової величини називають розподіл, у якому диференціальна функція розподілу (щільність ймовірності) є сталою величиною на інтервалі (a,b), а поза цим інтервалом – дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ C, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases} \quad C=\text{const}.$$

Графік щільності розподілу має вигляд, як на рис. 9.

За означенням $f(x)$, площа, обмежена лінією $y=f(x)$ і віссю OX, дорівнює одиниці, тому $C = \dfrac{1}{b - a}$ (згадаємо, чому дорівнює площа прямокутника). Таким чином щільність розподілу $f(x)$ у рівномірному розподілі має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{1}{b-a} & a < x \le b; \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{21}$$

Наголосимо, що $f(x)$ іноді записують інакше:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b]; \\ 0, & x \notin (a,b]; \end{cases}$$

або просто $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$, $x \in (a,b]$.

Інтегральна функція $F(x)$ у рівномірному розподілі:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{22}$$

Графік функції $F(x)$ має вигляд, як на рис. 10.

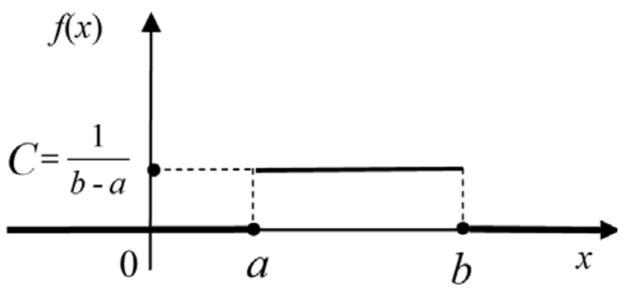


Рис. 9

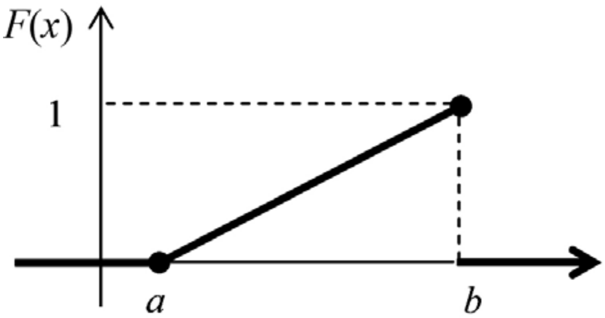


Рис. 10

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx=\int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Тобто математичне сподівання рівномірного розподілу дорівнює середині відрізка $[a,b]$.

Знайдемо дисперсію випадкової величини.

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-m_x^2=\int\limits_a^в x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-$$

$$-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Звідси $\sigma[X]=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Таким чином, формули числових характеристик у рівномірному розподілі мають вигляд:

$$M[X]=\frac{a+b}{2};\quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \tag{23}$$

І нарешті, знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини X, яка має рівномірний розподіл, на проміжок (α,β) (цей проміжок належить відрізку $[a,b]$)

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\int\limits_\alpha^\beta dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{24}$$

Зауважимо, що коли неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл, то всі її можливі значення лежать у межах деякого проміжку і при цьому однаково можливі.

Приклади рівномірного розподілу: похибка при округленні результатів вимірювання до найближчого цілого числа; час очікування транспорту й т. д.

Приклад. Випадкова величина X має рівномірний розподіл, який задається щільністю ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in(2,6];\\ 0, & x\notin(2,6].\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини X.

Розв'язання. За формулою (23) $M[X]=\dfrac{a+b}{2}$. За даними прикладу $a=2$, $b=6$. Тоді $M[X]=\dfrac{2+6}{2}=4$.

2. Показниковий розподіл. Неперервна випадкова величина X має показниковий (експоненціальний) розподіл, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad \lambda \text{ – число (параметр розподілу).} \tag{25}$$

Іноді функцію $f(x)$ записують так: $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\ge 0$.

Функція розподілу $F(x)$ має такий вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Графіки цих функцій зображені на рис. 11, 12.

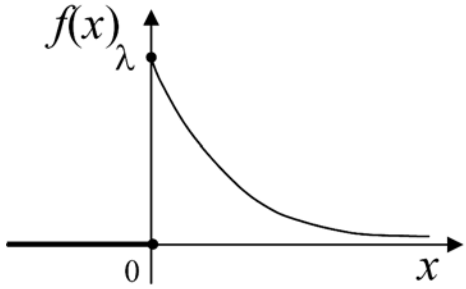


Рис. 11

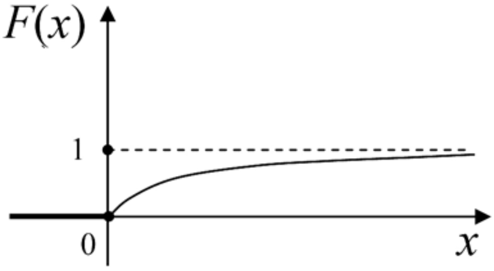


Рис. 12

Зауважимо, як завжди, площа, обмежена лінією $y=f(x)$, дорівнює одиниці.

Числові характеристики в показниковому розподілі обчислюються за формулами

$$M[X]=\frac{1}{\lambda};\quad D[X]=\frac{1}{\lambda^2};\quad \sigma[X]=\frac{1}{\lambda}. \tag{26}$$

Показниковий розподіл зустрічається в теорії масового обслуговування, біології, фізиці, теорії надійності й т. д.

Приклад. Щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}.$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини.

Розв'язання. За зовнішнім виглядом функції $y=f(x)$ бачимо, що X має показниковий розподіл з параметром $\lambda=3$. Тоді за формулою (26)

$$M[X]=\frac{1}{3}.$$

3. Нормальний розподіл. Неперервна випадкова величина X має нормальний розподіл (розподіл Гаусса), якщо її щільність ймовірності має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}. \tag{27}$$

Графік $f(x)$ називають кривою Гаусса (нормальною кривою).

Ця крива (рис. 13) досягає максимуму при $x=a$. До речі, $f(a)=\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}$.

Крива симетрична відносно прямої $x=a$.

Функція $f(x)$ залежить від двох параметрів: a і σ_x. Тут $a = M[X]$ – математичне сподівання випадкової величини, а $\sigma_x = \sigma[X]$ – середнє квадратичне відхилення величини X.

Як завжди, площа, яку обмежують функція $f(x)$ і вісь OX, дорівнює одиниці.

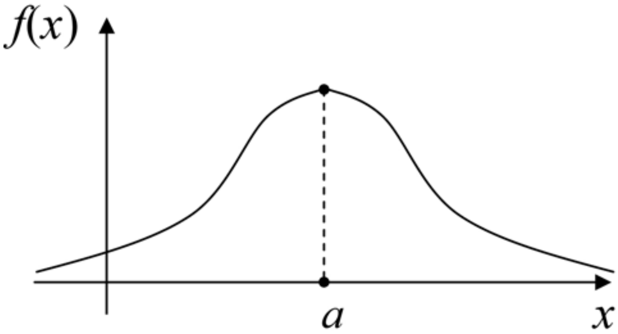


Рис. 13

Функція розподілу в нормальному законі має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Ймовірність влучення випадкової величини на інтервал (α, β) обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma_x}\right). \qquad (28)$$

Нагадаємо, що в правій частині формули (28) ми бачимо функцію $\Phi(x)$ (функцію Лапласа), значення якої знаходять із табл. 2 [2, 3].

Із формули (28) можна знайти ймовірність відхилення величини X від її математичного сподівання, тобто $P(|X - a| < \delta)$.

Замінимо нерівність $|X - a| < \delta$ рівносильною подвійною нерівністю:

$$-\delta < X - a < \delta \quad \text{або} \quad a - \delta < X < a + \delta.$$

Застосуємо формулу (28), де $\alpha = a - \delta$, $\beta = a + \delta$.

$$P(|X - a| < \delta) = P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi\left[\frac{(a+\delta) - a}{\sigma_x}\right] - \Phi\left[\frac{(a-\delta) - a}{\sigma_x}\right] =$$

$$= \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right) + \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right).$$

Таким чином, ймовірність відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання обчислюється за формулою

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma_x}\right). \qquad (29)$$

Із формули (29) можна одержати так зване «правило трьох сигм».

Нехай у формулі (29) $\delta = 3\sigma_x$. Тоді

$$P(|X - a| < 3\sigma_x) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma_x}{\sigma_x}\right) = 2\Phi(3) = \left\{\begin{matrix} \text{за табл. 2} \\ \Phi(3) = 0{,}49865 \end{matrix}\right\} = 2 \cdot 0{,}49865 =$$

$$= 0{,}9973.$$

Тобто

$$P\left(\left|X-a\right|<3\sigma_X\right)=0{,}9973. \qquad (30)$$

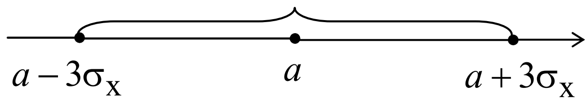
Наголосимо, що число 0,9973 достатньо близьке до одиниці. Тому ймовірність у лівій частині формули (30) практично є вірогідною. Розглянемо з геометричної позиції нерівність $\left|X-a\right|<3\sigma_X$. Спочатку перетворимо її:

$$\left|X-a\right|<3\sigma_X \Rightarrow -3\sigma_X<X-a<3\sigma_X \Rightarrow a-3\sigma_X<X<a+3\sigma_X.$$

А тепер запишемо формулу (30) з одержаною подвійною нерівністю

$$P\left(a-3\sigma_X<X<a+3\sigma_X\right)=0{,}9973.$$

Тобто, ймовірність того, що випадкова величина, яка має нормальний розподіл, потрапить в інтервал $\left(a-3\sigma_X, a+3\sigma_X\right)$, дорівнює 0,9973.



Наприклад, якщо проведено 10 000 випробувань, у кожному з яких буде фіксуватися значення нормально розподіленої випадкової величини X, то 9973 значень потраплять в інтервал $(a-3\sigma_X; a+3\sigma_X)$ і тільки 27 значень X – за межі цього інтервалу. До речі, довжина цього інтервалу дорівнює $6\sigma_X$.

Нормальний закон серед розподілів неперервних випадкових величин займає центральне місце. Він виявляється в тих випадках, коли величина X є результатом дії великої кількості різних факторів, кожний з яких впливає на X незначно і не можна вказати, який з них більше, ніж решта.

Закон широко застосовується в теорії надійності, теорії стрільб, теорії похибок, при контролі якості продукції тощо.

Нормальний закон відіграє в теорії ймовірностей велику роль завдяки центральній граничній теоремі О. М. Ляпунова.

Якщо випадкова величина X – сума великої кількості взаємно незалежних випадкових величин, причому вплив кожної з них на всю суму незначний, то X має розподіл, близький до нормального (і нормальний, якщо ця сума прямує до нескінченності).

Приклад. Задана щільність ймовірності:

$$f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}.$$

Знайти $M\left[X\right]$ і $D\left[X\right]$.

Розв'язання. За зовнішнім виглядом функції $f(x)$ робимо висновок, що вона належить нормальному закону розподілу. Тому порівняємо формулу (27) із заданою функцією. Одразу видно, що $a=M\left[X\right]=1$, $\sigma_X=5$, тоді $D\left[X\right]=25$.

Основні формули

Рівномірний закон

Щільність ймовірності $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b];\\ 0, & x\notin(a,b].\end{cases}$

$$M[X]=\frac{a+b}{2};\quad D[X]=\frac{(b-a)^2}{12};\quad \sigma[X]=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Зауважимо, що для знаходження основних характеристик рівномірного закону потрібно знати два числа: a і b.

Показниковий закон

Щільність ймовірності $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0;\\ 0, & x<0.\end{cases}$, λ – число (параметр)

$$M[X]=\sigma[X]=\frac{1}{\lambda};\quad D[X]=\frac{1}{\lambda^2}.$$

У цьому законі для знаходження основних характеристик потрібно знати параметр λ.

Нормальний закон

Щільність ймовірності $f(x)=\dfrac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$.

Тут a – математичне сподівання, $\sigma_x=\sigma[X]$ – середнє квадратичне відхилення.

Ймовірність влучення випадкової величини X в інтервал (α,β):

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma_x}\right).$$

Ймовірність відхилення випадкової величини від математичного сподівання:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma_x}\right].$$

Правило трьох сигм

$P(|X-a|<3\sigma_x)=0{,}9973$ або $P(a-3\sigma_x<X<a+3\sigma_x)=0{,}9973$.

Довжина інтервалу $(a-3\sigma_x;a+3\sigma_x)$ дорівнює $6\sigma_x$.

Зауваження. У прикладах, які ми будемо розглядати, іноді буде написано, що випадкова величина має той чи інший розподіл, а іноді просто буде задана диференціальна (або інтегральна) функція. Тоді потрібно буде за видом функції визначити, до якого закону розподілу вона належить.

А що ж робити, коли не можна встановити, до якого розподілу належить випадкова величина (а потрібно обчислити, наприклад, $M[X]$, $D[X]$, $f(x)$ тощо)? Такі приклади, безумовно, трапляються. По-перше, тому, що ми розглянули тільки невелику кількість законів розподілу. По-друге, тому, що є такі величини (дискретні, неперервні), які мають усі ознаки випадкової величини, але не належать ні до одного із законів розподілу. У цьому випадку слід користуватися загальними формулами визначення $M[X]$, $D[X]$, $\sigma(x)$ (див. розд. 5). До речі, усі формули, якими ми будемо користуватися в законах розподілу, одержані із загальних формул. І ці формули можна застосовувати в прикладах з відомими розподілами. Але в тому і сенс законів, що обчислення числових характеристик ($M[X]$, $D[X]$, $\sigma(x)$) виконується швидше за конкретними формулами, які належать до даного закону розподілу.

Розв'язання прикладів

Блок 1 (найпростіші приклади)

Приклад 1. Неперервна випадкова величина X має рівномірний розподіл і задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{3}, & 0<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти: 1) щільність ймовірності $f(x)$; 2) $M[X]$; 3) $D[X]$; 4) $\sigma[X]$.

Розв'язання. У цьому прикладі сказано, що X має рівномірний розподіл (див. відповідні формули). Тому $a=0$, $b=3$. За формулою $F'(x)=f(x)$ маємо:

1. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{3}, & 0<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$

2. $M[X]=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{0+3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

3. $D[X]=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(3-0)^2}{12}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

4. $\sigma[X]=\sqrt{\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}C, & x\in(2,7];\\ 0, & x\overline{\in}(2,7].\end{cases}$$

Знайти: 1) C; 2) $F(x)$; 3) $M[X]$. Побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.

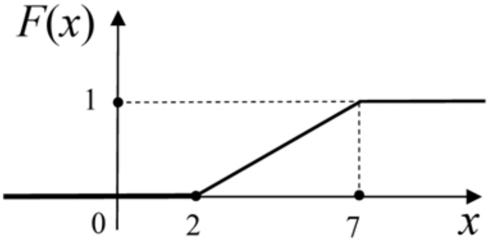
Розв’язання. У цьому прикладі про закон розподілу нічого не сказано, але за виглядом функції $f(x)$ робимо висновок, що це рівномірний розподіл. Тому $a=2$, $b=7$.

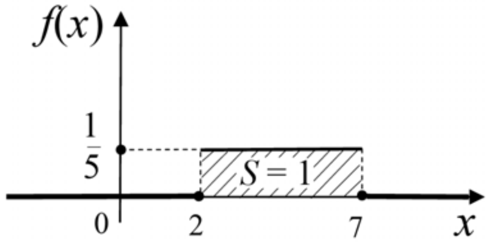
1. $C=\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1}{5}$.

2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{x-2}{5} & 2<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$

3. $M[X]=\dfrac{2+7}{2}=\dfrac{9}{2}$.

4. Будуємо графіки:





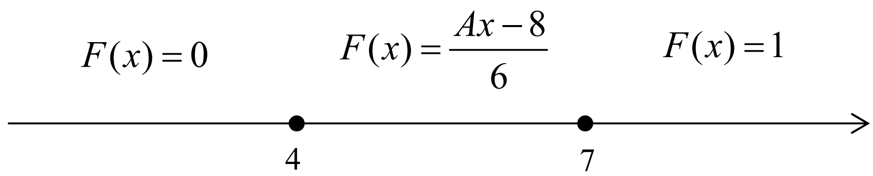
Нагадаємо, що площа прямокутника на графіку функції $f(x)$ дорівнює 1.

Приклад 3. Випадкова величина X має рівномірний розподіл і задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4;\\ \dfrac{Ax-8}{6}, & 4<x\le 7;\\ 1, & x>7.\end{cases}$$

Знайти: 1) A; 2) $D[X]$; 3) ймовірність потрапляння X в інтервал (5, 6).

Розв'язання. 1. Оскільки для неперервної випадкової величини функція $F(x)$ теж неперервна, то сталу A можна знайти за допомогою однієї із двох рівностей



Якщо розглянути значення $x=4$, то $0=\dfrac{A\cdot 4-8}{6}$.

Якщо розглянути значення $x=7$, то $1=\dfrac{A\cdot 7-8}{6}$.

Зрозуміло, що обидві рівності дають одну й ту саму відповідь: $A=2$. Тоді $F(x)$ запишемо так:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 4;\\ \dfrac{2x-8}{6}=\dfrac{x-4}{3}, & 4<x\le 7;\\ 1, & x>7. \end{cases}$$

2. $a=4$, $b=7$, тому $D[X]=\dfrac{(7-4)^2}{12}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

3. За формулою $P(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, де $\alpha=5$, $\beta=6$, маємо $P(5<X<6)=\dfrac{6-5}{7-4}=\dfrac{1}{3}$.

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл і задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-5x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Знайти: 1) $f(x)$; 2) $M[X]$; 3) $D[X]$; 4) $\sigma[X]$; 5) побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання. За умовою прикладу величина X має показниковий розподіл (див. відповідні формули). Тому параметр $\lambda=5$.

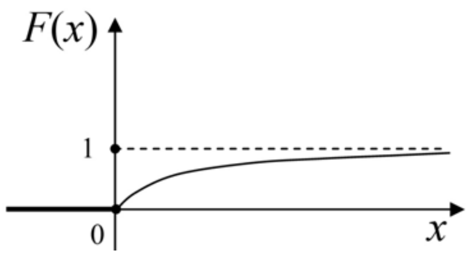
1. $f(x)=\begin{cases} 5e^{-5x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0. \end{cases}$

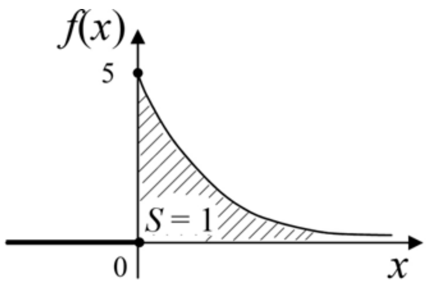
2. $M[X]=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{5}$.

3. $D[X]=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{25}$.

4. $\sigma[X]=\dfrac{1}{5}$.

5. Будуємо графіки





Приклад 5. Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл і задана диференціальною функцією $f(x)=Ae^{-\frac{7}{4}x}$, $x\ge 0$.

Знайти: 1) A; 2) $M[X]$.

Розв’язання. 1. Очевидно, що це показниковий розподіл, тобто $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \ge 0$, тому $A = \lambda = \frac{7}{4}$.

2. $M[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{4}{7}$.

Приклад 6. Дисперсія випадкової величини X, яка має показниковий розподіл, дорівнює $\frac{1}{16}$. Записати: 1) відповідну функцію розподілу; 2) щільність ймовірності.

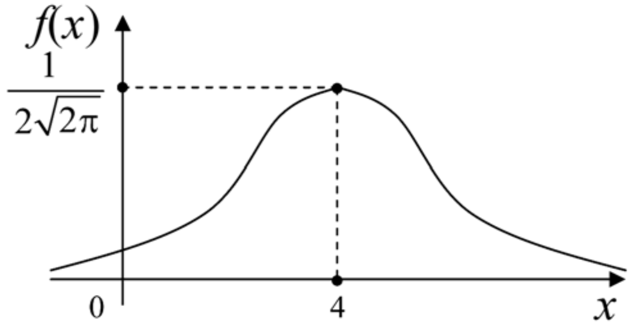
Розв'язання. За умовою $D[X] = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{16}$. Тому $\lambda = 4$.

1. $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-4x}, & x \ge 0. \end{cases}$; 2. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 4e^{-4x}, & x \ge 0. \end{cases}$

Приклад 7. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a = 4$, $\sigma_x = 2$. Записати диференціальну функцію. Побудувати її графік.

Розв'язання. За формулою (27) $f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}}$, тому

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}.$$



Приклад 8. Випадкова величина X має нормальний розподіл із щільністю ймовірності:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-9)^2}{32}}.$$

Знайти: a і σ_x.

Розв'язання. За формулою (27) $a = 9$. Крім того, ми бачимо, що $2\sigma_x^2 = 32$. Звідси $\sigma_x^2 = 16$, а $\sigma_x = 4$.

Приклад 9. Зріст чоловіків – випадкова величина, яка розподілена за нормальним законом із дисперсією 64 см^2. Середній зріст чоловіка 176 см. Знайти ймовірність того, що зріст навмання вибраного чоловіка:

1) перебуває в межах від 170 до 180 см;

2) відхиляється від середнього зросту в той чи інший бік не більше, ніж на 5 см.

Знайти інтервал, у якому з ймовірністю 0,9973 перебуває зріст чоловіків. Знайти довжину цього інтервалу.

Розв'язання. За умовою прикладу $a=176$ см, $D[X]=64$ см^2, тому $\sigma_x=8$ см.

1. Застосуємо формулу (28): $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma_x}\right)$.

Тут $\alpha=170$ см, $\beta=180$ см.

$$P(170<X<180)=\Phi\left(\frac{180-176}{8}\right)-\Phi\left(\frac{170-176}{8}\right)=\Phi\left(\frac{1}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{3}{4}\right)=$$
$$=\{\text{застосовуємо табл. 2}\}=0{,}1915+0{,}2734=0{,}4649.$$

2. Застосуємо формулу (29): $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma_x}\right]$, тут $\delta=5$ см. Тоді

$$P(|X-176|<5)=2\Phi\left[\frac{5}{8}\right]=2\Phi[0{,}625]=2\cdot 0{,}234=0{,}468.$$

3. Для знаходження інтервалу застосуємо формулу (30): $P(|X-a|<3\sigma_x)=$ $=0{,}9973$ (правило трьох сигм) або $P(a-3\sigma_x<X<a+3\sigma_x)=0{,}9973$.

Звідси шуканий інтервал буде мати вигляд: $(a-3\sigma_x;a+3\sigma_x)$. Тоді $(176-3\cdot 8;176+3\cdot 8)\Rightarrow(152;200)$.

Довжина цього інтервалу дорівнює $6\sigma_x=48$ см.

Блок 2

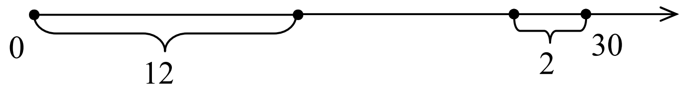
Приклад 1. Автобуси певного маршруту їдуть з інтервалом 30 хвилин. Час очікування автобуса є неперервна випадкова величина X, яка має рівномірний розподіл. Пасажир підходить до зупинки в довільний момент часу. Знайти: 1) функцію розподілу; 2) щільність ймовірності; 3) математичне сподівання; 4) ймовірність появи пасажира не раніше, ніж через 12 хвилин після від’їзду попереднього автобуса, але не пізніше, ніж за 2 хвилини до від'їзду наступного автобуса.

Розв'язання. Застосовуємо формули (21)–(24)

1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{30} & 0<x\le 30;\\ 1, & x>30.\end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{30} & 0<x\le 30;\\ 0, & x>30.\end{cases}$

3. $a=0$, $b=30$, тому $M[X]=\frac{a+b}{2}=\frac{30}{2}=15$ хвилин – середній час очікування.

4. Складемо схему:



За формулою (24):

$$P\left(\alpha < X < \beta\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \left\{ \begin{matrix} \text{тут } \alpha = 12 \text{ хвилин,} \\ \beta = 28 \text{ хвилин} \end{matrix} \right\} = \frac{28 - 12}{30 - 0} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}.$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення меншого, ніж $M\left[X\right]$.

Розв’язання. За виглядом функції $f(x)$ можна зробити висновок, що X має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 2$. Тоді $M\left[X\right] = \frac{1}{2}$. Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина потрапить у інтервал $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(-\infty < X < \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} 2e^{-2x}dx = 2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_{0}^{\frac{1}{2}} = -\left[e^{-1} - 1\right] = 1 - \frac{1}{e}.$$

Приклад 3. Випадкова величина X – тривалість роботи елемента – має щільність розподілу $f(x) = 0,003e^{-0,003t}$, $t \geq 0$. Знайти: 1) середній час роботи елемента; 2) ймовірність того, що елемент буде працювати не менше 400 годин.

Розв’язання. Маємо показниковий розподіл з параметром $\lambda = 0,003$. Тоді:

1. $M\left[X\right] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,003} \approx 333,3$;

2. $P\left(400 < X < \infty\right) = 1 - P\left(0 < X < 400\right) = 1 - \int\limits_{0}^{400} 0,003 \cdot e^{-0,003t}dt =$

$$= 1 - 0,003 \cdot \left(-\frac{1}{0,003}\right)e^{-0,003t}\Big|_{0}^{400} = 1 + \left[e^{-1,2} - 1\right] = e^{-\frac{6}{5}} \approx 0,3.$$

Запитання для самоперевірки

1. Як записуються щільності ймовірностей в рівномірному, показниковому та нормальному законах розподілу?

2. За якою формулою обчислюється математичне сподівання в рівномірному законі розподілу?

3. Скільки параметрів має показниковий закон розподілу?

4. За якою формулою обчислюється середнє квадратичне відхилення в показниковому розподілі?

5. За якою формулою обчислюється в нормальному законі ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал (α, β)?

6. Як формулюється правило трьох сигм?

ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

За означенням випадкової величини, не можна заздалегідь передбачити, якого із можливих значень набуде у випробуванні ця випадкова величина. Виникає питання: чи можна сформулювати закономірності поведінки суми достатньо великої кількості випадкових величин? (якщо про кожну величину відомості невеликі). Виявляється, що за деяких умов сумарна поведінка достатньо великої кількості випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною. Умови, в разі виконання яких сукупна дія великої кількості випадкових величин приводить до результату, який не залежить від випадку, формулюються в теоремах під загальною назвою закону великих чисел. Сформулюємо тільки дві теореми: теорему П. Л. Чебишева і теорему Бернуллі.

Теорема Чебишева. Якщо $X_1, X_2, ..., X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, причому їх дисперсії не перевищують сталого числа C, то для як завгодно малого додатного числа ε ймовірність нерівності

$$\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M[X_1]+M[X_2]+...+M[X_n]}{n}\right|<\varepsilon$$

буде як завгодно близька до одиниці, якщо кількість випадкових величин достатньо велика, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M[X_1]+M[X_2]+...+M[X_n]}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Тобто не можна передбачити, якого значення набуде кожна із випадкових величин, але можна передбачити, якого значення набуде їх середнє арифметичне.

Середнє арифметичне з великою ймовірністю набуває значення, близького до деякого сталого числа $\frac{M[X_1]+M[X_2]+...+M[X_n]}{n}$.

Теорема Бернуллі. Якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність p події A стала, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірності p за модулем буде як завгодно малим, якщо кількість випробувань достатньо велика.

Тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей [Текст] / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2003. – 479 с.

3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2004. – 404 с.

ЗМІСТ

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Кузнецов Віталій Миколайович
Бусарова Тетяна Миколаївна
Звонарьова Ольга Віталіївна
Агошкова Тетяна Анатоліївна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Методичні вказівки до виконання модульної роботи № 7

У двох частинах

Частина 2

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Редактор *О. О. Котова*

Комп'ютерна верстка *Т. В. Шевченко, Ю. С. Марков*

Формат 60×84 1/16. Ум. друк. арк. 2,69. Обл.-вид. арк. 2,73.
Тираж 500 пр. Зам. № ______.

Видавництво Дніпропетровського національного університету
залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна

Свідоцтво суб'єкта видавничої діяльності ДК № 1315 від 31.03.2003

Адреса видавництва та дільниці оперативної поліграфії:
вул. Лазаряна, 2; Дніпропетровськ, 49010