

**FOURIER ED IL RUOLO DELLA SUA TRASFORMATA NELLA
RICERCA NEUROLOGICA**

Maria Laura Manca, Luigi Murri

Dipartimento di Neuroscienze , Università di Pisa

Indirizzo per la corrispondenza:

Dr. M.L. Manca

Tel: 050-993334; fax: 050-554808

E-mail: mancalaura@yahoo.it

Indice

Paragrafo 1 Jean Fourier

- 1.1 Introduzione
- 1.2 Vita di Fourier

Paragrafo 2 Analisi di Fourier

- 2.1 Serie di Fourier
- 2.2 Trasformata di Fourier
- 2.3 Trasformata Discreta e Trasformata Veloce di Fourier

Paragrafo 3 Trasformata di Fourier nella Ricerca Neurologica

- 3.1 Elettroencefalografia e Neurologia
- 3.2 Elaborazione numerica del segnale elettroencefalografico con l'analisi di Fourier
- 3.3 Stato dell'arte e frontiere della ricerca dell'elaborazione del segnale elettroencefalografico in neurologia
- 3.4 L'esempio dell'epilessia

Referenze

Paragrafo 1

Jean Fourier

1.1 Introduzione

La vita di Jean Fourier non è semplice da delineare in poche pagine, sia per la peculiarità del personaggio, sia perchè fortemente intrecciata con le vicende politiche del suo tempo. Il cognome Fourier è una variante di 'fourrier' che significa in senso militare 'furiere' e in senso lato 'precursore di idee', ed egli fu di volta in volta professore, poliziotto segreto, prigioniero politico, Governatore d'Egitto, Prefetto di Francia, amico di Napoleone. Grazie a questa varietà di ruoli, fu pioniere in svariati campi dalla matematica e fisica all'egittologia e alla diplomazia. Rischiò la vita almeno due volte, prima per essere stato giacobino e poi per essere stato seguace di Napoleone. La sua fede napoleonica andò al di là di un ideale politico, Fourier non solo partecipò insieme a un gruppo di scienziati alla Campagna d'Egitto, ma fu anche per molti anni Prefetto del Dipartimento di Isère. Questo ruolo lo costrinse a vivere, con sofferenza, lontano dal mondo scientifico parigino, costantemente impegnato a risolvere problemi burocratici e amministrativi. Fu solo con la caduta di Napoleone che cominciò la sua vita di scienziato e matematico a tempo pieno. Finalmente trasferito a Parigi e con un lavoro di scarso impegno in termini di tempo, poté finalmente redigere il trattato che lo rese poi celebre: 'La théorie analytique de la chaleur' nella quale: *'on déterminera pour les substances solides ou liquides, pour les vapeurs et pour les gaz permanents, toutes les qualités spécifiques relatives à la chaleur, et les variations des coefficients qui les expriment'*.

L'opera è incentrata sullo studio del calore, con l'introduzione di tecniche matematiche per determinarne le caratteristiche e le variazioni dei coefficienti che le esprimono, sotto varie condizioni. Fourier fece infatti uso delle serie trigonometriche e della celebre trasformata, ancora oggi di fondamentale importanza in svariati campi, dalla musica alla medicina. Nonostante i suoi metodi siano stati criticati sotto il profilo del rigore e della generalità, la loro importanza va vista soprattutto nella formulazione di problemi fisici come problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali e nella generazione di potenti tecniche risolutive per tali problemi. Egli si interessò con successo anche di questioni relative ai segni delle radici di equazioni algebriche, all'approssimazione delle radici di un'equazione del tipo $f(x)=0$ col metodo di Newton-Raphson, e anche a indagini probabilistiche.

1.2 Vita di Fourier

Fourier nacque il 21 marzo 1768 ad Auxerre, in Borgogna, antica e bella cittadina collocata 150 Km a sud di Parigi. Dopo la morte della prima moglie dalla quale ebbe tre figli, il padre Joseph si risposò e Jean Baptiste Joseph fu il nono dei 12 figli avuti dalla seconda moglie. Orfano di entrambi i genitori prima dei 10 anni, visse un paio d'anni con gli zii studiando Latino e Greco presso la Scuola di Pallaes. Grazie alla segnalazione al Vescovo di una signora di Auxerre, Madame Motton, entrò nel 1780 alla Scuola Reale Militare, collegio dell'Ordine dei Benedettini dove si formavano i futuri ufficiali dell'esercito francese. Nelle 11 eccellenti Scuole dei Benedettini di Francia, particolare importanza veniva attribuita alle Scienze, egli poté quindi coltivare l'interesse per la matematica, ma anche per la letteratura, sin dall'età di 13 anni. Studiò con passione di giorno e di notte, a lume di candela, mettendo a dura prova la sua delicata costituzione (iniziò a soffrire di asma e insonnia), e spaventando il personale del collegio che temeva potesse causare qualche incendio. Nel 1783 vinse il primo premio della Scuola per il suo studio 'Mécannique en général'.

La sua aspirazione era divenire ufficiale dell'esercito ma, essendo figlio di un sarto, la nomina gli fu negata dal Ministero della Guerra. Pensò quindi di indirizzarsi verso la carriera ecclesiastica e, nel 1787, entrò come novizio nell'Abbazia Benedettina di St. Benoit-sur-Loire, famosa per le reliquie di San Benedetto. In quegli anni era indeciso tra la vita religiosa e la ricerca matematica. Una sua lettera a Bonard, suo professore di Matematica ad Auxerre, fa tuttavia pensare che preferisse la ricerca matematica: *'ieri ho compiuto 21 anni, a quest'età Newton e Pascal avevano già raggiunto l'immortalità'*. Non prese i voti religiosi, forse per sua scelta, forse perchè nel frattempo era scoppiata la Rivoluzione Francese con conseguente soppressione degli ordini religiosi. Tuttavia l'esercizio della vita monastica ebbe una notevole influenza sul suo stile di vita, e forse fu uno dei motivi per cui non si sposò. Dopo un anno di insegnamento della filosofia nel collegio parigino di Montaigu ritornò ad Auxerre dove, nel 1790, divenne assistente di Bonard nella stessa Scuola dove aveva compiuto gli studi.

Nella primavera del 1793 iniziò a perseguire ideali politici. Favorevole alle idee della Rivoluzione, aderì alla 'Société Populaire' di Auxerre e fu nominato in seguito membro del locale 'Comité Révolutionnaire de Surveillance', una sorta di polizia segreta. La sua coraggiosa e sincera difesa di tre padri di famiglia, vittime del terrore ad Orléans da parte di un temuto rappresentante del popolo, gli attirò l'odio degli avversari politici. Volle andare di persona a Parigi per difendere il proprio operato di fronte allo stesso Robespierre. Probabilmente non lo convinse, dato che il 4 luglio 1794 fu arrestato, ma liberato il 28 per l'amnistia generale seguita alla caduta e morte di Robespierre.

Intanto era stata istituita a Parigi l'Ecole Normale, con l'intento di preparare i futuri insegnanti. Fourier fu scelto per seguire il corso, e fu per lui l'occasione di conoscere i maggiori scienziati dell'epoca: Lagrange, Laplace e Monge, per la Matematica, e Berthollet per la Chimica.

Nel settembre 1794 fu nuovamente arrestato con l'accusa di essere stato un seguace di Robespierre; alcuni concittadini di Auxerre si erano opposti al fatto che un 'terrorista' potesse insegnare ai loro bambini. Si proclamò innocente nelle sue lettere dal carcere, e fu rilasciato senza essere neppure interrogato, non è chiaro se per intervento di Laplace, Lagrange o Monge, o per l'avvento di Napoleone.

Dal 1795 fu assistente di Lagrange (*'il primo tra gli uomini di scienza europei'*) all'Ecole Centrale des Travaux Publiques, poi battezzata Ecole Polytechnique, accademia militare diretta da Monge, e due anni dopo succedette a Lagrange nel ruolo di professore di Analisi e Meccanica. Eccellente insegnante, ebbe un'invidiabile reputazione e fu senz'altro uno degli artefici del prestigio di cui la Scuola godette sin dagli esordi.

Nel maggio 1798 fu scelto dal Ministero dell'Interno insieme ad altri 164 dotti (la cosiddetta 'Legione della Cultura'), tra cui Monge e Berthollet che l'avevano segnalato, per salpare da Tolone, con 180 imbarcazioni al comando di Napoleone e del suo Generale Kléber, verso l'Egitto. All'inizio la Campagna di Napoleone fu un trionfale successo: Malta fu occupata il 10 giugno e Alessandria tra l'1 e il 2 luglio. Qualche settimana dopo al Cairo, conquistata con la battaglia delle Piramidi, Fourier contribuì alla fondazione dell'Istituto d'Egitto e fu uno dei 12 membri della Divisione di Matematica. Tra gli altri figuravano Monge in qualità di Presidente e lo stesso Napoleone quale Vice-Presidente. Fu nominato Segretario Permanente dell'Istituto, e sbrìgò i compiti amministrativi con una tale competenza che gli furono assegnati numerosi e rilevanti incarichi diplomatici. Nonostante i gravosi impegni amministrativi, trovò il tempo di calcolare l'altezza delle piramidi di Menfi, misurando separatamente l'altezza di ciascun gradino; questo lavoro lo condusse al problema di minimizzare, con il metodo dei minimi quadrati, gli errori dedotti da un gran numero di rilevamenti. Formulò inoltre una teoria sulla soluzione generale delle equazioni algebriche, svolgendo nel contempo approfonditi ed interessanti studi sulle antichità egizie.

Per inciso, molti anni dopo il liceale Jean-Francois Champollion incontrò a Grenoble Fourier, che lo aveva invitato a visionare la sua collezione egizia. Guardando i geroglifici di Fourier, il giovane Champollion chiese se si potessero decifrare e, ricevuta una risposta negativa, decise che da grande ci avrebbe provato lui (come racconta egli stesso in uno dei suoi scritti).

Napoleone, con gli amici Monge e Berthollet, rientrò in Francia nel 1799, costringendo Fourier a rimanere in Egitto. Sia il Generale Kléber sia, dopo il suo assassinio, il Generale Menou, continuarono ad affidare a Fourier importanti incarichi. In seguito alle vittorie inglesi, nel 1801, tutti i membri dell'Istituto decisero di lasciare il Cairo, ma la loro nave fu fermata dalla marina inglese capitanata da Sir Sydney Smith. Con un gesto che gli era abituale, Sir Sydney consentì ai passeggeri di giungere a Tolone, ma sequestrò parte del materiale di ricerca, tra cui la stele di Rosetta.

Rientrato in Francia, fu nominato dall'allora Primo Console Napoleone, ancora una volta su segnalazione di Monge e Berthollet, Prefetto del Dipartimento dell'Isère, con capoluogo Grenoble, in seguito alla morte di Ricard de Séalt. Sembra non fosse entusiasta dell'incarico poichè avrebbe preferito occuparsi solamente di ricerca matematica, tuttavia non rifiutò la richiesta di Napoleone. Ricard non aveva lasciato in buon ordine l'amministrazione del Dipartimento.

Fourier al contrario fu un eccellente amministratore, e creò nuovi posti di lavoro molti dei quali furono affidati ad amici fidati e competenti. Conobbe le personalità più eminenti del luogo, sia che appartenessero alla ricca borghesia, sia alla nobiltà o al clero. Organizzò tra l'altro le visite di Papa Pio VII, del Re di Spagna, oltre a quella di Napoleone. Bonificò 20 milioni di acri di palude intorno a Bourgoin, e iniziò la costruzione della strada Grenoble-Torino. Erano progetti vecchi di almeno un secolo, ma di difficile realizzazione e che richiesero per ben quattro anni tutta la sua abilità diplomatica nel convincere i fattori e contadini da una parte e la nobiltà dall'altra dei 37 Comuni a rinunciare temporaneamente ai loro diritti di pascolo, in cambio della promessa di un futuro migliore. Effettivamente migliorarono sia le condizioni di salute degli abitanti sia il valore delle terre. La strada Grenoble-Torino fu iniziata grazie all'appoggio diretto di Napoleone, il Ministro dell'Interno era infatti contrario, ma non fu completata in seguito alla caduta di Napoleone nell'Aprile 1814.

Tra il 1809 ed il 1825 pubblicò 21 volumi sull'Egitto, che illustravano i risultati culturali e scientifici della Campagna d'Egitto e puntavano a considerare l'Egittologia quale nuova e indipendente disciplina. La prima edizione fu corretta personalmente da Napoleone, nella seconda edizione ogni riferimento al Bonaparte era addirittura scomparso. Fu insignito di due importanti decorazioni da Napoleone che, nel frattempo, da Primo Console era divenuto Imperatore: nel 1804 divenne Cavaliere della Legione d'Onore, sei anni più tardi Barone (con corrispondente pensione annua), in seguito alla pubblicazione della prima stesura de 'La description de l'Egypte'.

A partire dal 1804 iniziò altresì a condurre i suoi esperimenti sulla propagazione del calore; dicono che l'idea gli venne perchè era rimasto particolarmente affascinato dal caldo clima dell'Egitto che rimpianse tutta la vita. Ad ogni modo, modellizzò l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche e nel 1807 presentò le sue ricerche (vedi Paragrafo 2), sia sulla propagazione del calore lungo una sbarra riscaldata ad una estremità, sia sul raffreddamento di un corpo nota la distribuzione iniziale della temperatura, all'Académie des Sciences. Lagrange, Laplace, Monge e Lacroix respinsero il lavoro, incoraggiando tuttavia Fourier a sviluppare le sue idee, tanto che il problema della propagazione del calore divenne l'argomento del Gran Premio dell'Académie nell'anno 1811. La Commissione, composta da Lagrange, Laplace, Malus, Haüy e Lacroix premiò Fourier. Lagrange lo criticò sotto il profilo del rigore e della difficoltà a generalizzare i risultati, pertanto il lavoro non fu pubblicato nei *Mémoires* dell'Académie.

Intanto, nell'Aprile 1814, Napoleone dovette abdicare e salì sul trono Luigi XVIII. Fu un periodo non facile, in cui l'abilità diplomatica di Fourier di fronteggiarsi tra Napoleone e il re fu messa a dura prova. Egli cercò fino all'ultimo di non prendere posizione. Grazie all'appoggio della nobiltà locale, fu confermato al suo posto anche dopo l'ascesa al trono del re. Informò comunque nascostamente Napoleone di non passare da Grenoble per i malumori della popolazione. Quando, nel marzo 1815, Napoleone fuggì dall'Isola d'Elba e si diresse verso Grenoble, Fourier cercò di persuadere i cittadini ad opporsi a favore di Luigi XVIII; poi, mentre Napoleone entrava trionfante in città, fuggì. Fu tuttavia abile a farsi perdonare dall'Imperatore, tanto che questi lo nominò Prefetto del Rodano e gli conferì una pensione annua di 6.000 franchi.

Dopo la fine dei 'Cento Giorni', la battaglia di Waterloo e l'esilio nell'Isola di S. Elena, Fourier perse i titoli e le pensioni. I Borboni esclusero infatti dalle cariche tutti coloro che avevano avuto a che fare con Napoleone. Rientrò a Parigi, dove lavorò all'Ufficio di Statistica del Dipartimento della Senna grazie all'aiuto del Prefetto, l'ex studente ed amico Conte Chabrol de Volvic. Lo stipendio di Fourier, generosissimo ed abituato ad un alto tenore di vita, era basso, ma egli poté ritenersi fortunato rispetto a Monge che, fedele in ogni circostanza a Napoleone, fu privato di ogni incarico e morì nell'indigenza.

Nel 1817, fu finalmente ammesso all'Académie e, nel 1822, alla morte di Delambre, divenne facilmente *Secrétaire Perpetuel* dell'Académie per le Scienze Matematiche; entrambi incarichi ben retribuiti.

Nel frattempo scomparivano Lagrange, nel 1813, e Laplace, nel 1827, ma Fourier ebbe comunque momenti di accesa rivalità sia con Poisson sia con Cauchy. Le discussioni erano correlate principalmente al fatto che i suoi lavori non erano ancora stati pubblicati, poteva così accadere che i suoi risultati fossero utilizzati da altri ricercatori senza che essi dovessero farne esplicita menzione. Gli furono in quegli anni amici devoti Sturm, Navier, Dirichlet, Liouville e Sophie Germain, nota matematica dell'Ottocento.

Fu solo nel 1822 che Fourier riuscì a pubblicare 'La théorie analytique de la chaleur', uno dei classici della matematica, incorporando parte del suo lavoro del 1812.

Nel 1823, in un estratto de l'Histoire de l'Académie, Fourier affrontò due problemi di statica, la risoluzione dei quali lo condusse in un caso alla risoluzione di un sistema di disequazioni lineari, nell'altro ad un problema di estremo vincolato non lineare in R^n . Stabilì inoltre un metodo per individuare il minimo di una funzione che si prefigura come quello che dal 1947 è noto come 'algoritmo del semplice'.

L'anno seguente, Fourier pubblicò 'Remarques générales sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires' dove, descrivendo gli esperimenti di H.B. de Saussure, dedusse che la temperatura del sole aumenta per la presenza dell'atmosfera. Intuì inoltre come le radiazioni infrarosse aumentino con la temperatura; la legge di Stefan-Boltzmann, che fornisce l'esatta espressione di tale dipendenza, fu scritta ben 50 anni dopo.

Tornando alla 'Théorie analytique de la chaleur', egli mostrò tra l'altro come una serie trigonometrica di seni e coseni possa essere utilizzata per analizzare la conduzione del calore nei solidi. Lagrange studiò casi particolari del teorema, affermando però che poteva probabilmente essere considerato 'generale'; ma si dovrà attendere Dirichlet per averne una dimostrazione efficace.

Le accese discussioni con Cauchy e Poisson, alle quali abbiamo accennato, lo condussero ad intraprendere interessanti ricerche di analisi infinitesimale ed algebra, per elaborare nuovi strumenti matematici, e rispondere così alle critiche dei suoi detrattori. Si dedicò così alla stesura dell'*'Analyse des équations déterminées'*, frutto delle sue ricerche sulle

equazioni algebriche iniziate 40 anni prima. La sua morte interruppe tale attività, e solo la prima parte dell'opera poté vedere le stampe nel 1831, edita da Navier.

Fourier trascorse gli ultimi anni della sua vita in precarie condizioni di salute, probabilmente a causa del mixedema (oggi chiamato ipotiroidismo), malattia contratta sin dai tempi dell'Egitto. Tutta la sua opera fu in realtà pionieristica, e oggi è considerato il padre dell'analisi armonica. Morì a Parigi a 62 anni, il 16 maggio del 1830, per un attacco cardiaco.

Paragrafo 2

Serie e Trasformata di Fourier

2.1 Serie di Fourier

Come detto, l'interesse per la conduzione del calore condusse Fourier ad iniziare, nel 1807, la 'Theorie analytique de la chaleur'. Pubblicata soltanto nel 1822 l'opera, che Sommerfield definisce 'the Bible of the mathematical physics' per il suo rigore, per la sua novizia, per i risultati, l'acume e l'intelligenza, descrive come una serie matematica di seni e coseni possa essere usata per analizzare la conduzione del calore nei corpi solidi.

In uno dei capitoli, Fourier si interessò all'equazione del calore, equazione differenziale alle derivate parziali che governa nel tempo e nello spazio la distribuzione del calore in un corpo materiale qualunque con conducibilità termica determinata. Egli portò come esempio un suo esperimento: prese un anello di un'ancora e lo immerse per metà nel fuoco; quando la parte immersa diventò rovente lo estrasse, lo mise in una fine sabbia isolante e ne misurò la temperatura in varie parti della circonferenza. Inizialmente la temperatura era molto elevata nella zona immersa nel fuoco, mentre scendeva molto bruscamente nella parte che non era stata scaldata. Via via che il calore si trasferiva per conduzione in tutta la materia dell'anello, la temperatura si distribuiva in modo sempre più uniforme sulla circonferenza. Se ora si pensa di aprire l'anello, ottenendo così una sbarretta cilindrica lunga e di piccolo diametro, possiamo ricondurci alla situazione più semplice di un corpo unidimensionale di estremi A e B, con conducibilità termica costante. Fourier si pose la seguente questione: consideriamo una sbarra omogenea conduttrice, isolata ai lati, che può essere riscaldata fornendo all'estremo A la temperatura t_1 e all'estremo B la temperatura t_2 , con $t_1 > t_2$. Come mai, se poniamo una fonte di calore con un termostato per avere una temperatura (costante) t_1 all'estremo A ed un altro termostato a temperatura t_2 all'altro estremo della sbarra, il calore si propaga nello spazio (ignoriamo per ora il tempo) in modo tale che la temperatura in un punto interno della sbarretta prima sale, poi scende, poi risale e poi riscalda? Indipendentemente dall'interpretazione fisica di tale risultato, Fourier giunse ad una conclusione. Se suppongo che la distribuzione della temperatura sia rappresentata da una curva qualsiasi, potrei approssimarne un tratto con un arco di seno, e se questa non va bene posso sempre sommare un'altra seno con periodo maggiore, e poi ancora un'altra, fintanto che, con correzioni successive di sinusoidi, che sono sempre soluzioni dell'equazione di partenza, arrivo alla soluzione finale. In sostanza, se si considera la temperatura come una funzione della posizione sulla sbarretta, si può affermare che, mentre inizialmente abbiamo una funzione a gradino il cui valore alla sinistra di un dato punto è 0 e alla destra è 1, successivamente la funzione diventa sempre più simile ad una seno.

Fourier ipotizzò pertanto che la distribuzione della temperatura potesse essere scomposta in una somma di sinusoidi, ciascuna con ampiezza, periodo e fase diverse, dette armoniche. Via via che il calore si propagava, le armoniche di frequenza maggiore (armoniche superiori) tendevano a smorzarsi più rapidamente rispetto a quelle di frequenza minore, così da formare una funzione sempre più regolare e 'continua'. Fourier intuì dunque che le sinusoidi non sono estranee alla soluzione del problema del calore, anzi, sono i mattoni stessi della soluzione, che sarà una combinazione lineare, eventualmente infinita, di funzioni sinusoidali.

Egli cercò di dare una forma matematica a queste sue ipotesi, affermando che una funzione periodica a tempo continuo $f(t)$ di periodo T , 'frequenza fondamentale' $1/T$ e 'pulsazione fondamentale' $\omega_f = 2\pi/T$ può essere espressa come sommatoria di seni e coseni, e dimostrando le sue affermazioni in vari casi particolari. Si noti che molti Autori si riferiscono indifferentemente alla frequenza ed alla pulsazione, ricordando che i due fattori sono eguali a meno di 2. La nota 'formula di inversione':

$$f(t) = a_0/2 + \sum (a_n \cos n\omega_f t + b_n \sin n\omega_f t), \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (1)$$

dove $a_n = 2/T \int f(t) \cos n\omega_f t \, dt$, $b_n = 2/T \int f(t) \sin n\omega_f t \, dt$, è lo sviluppo in serie di Fourier della funzione f , e i numeri a_n , b_n sono i cosiddetti coefficienti di Fourier. La serie di Fourier può essere scritta in due forme equivalenti. La prima usa i numeri complessi in forma esponenziale:

$$f(t) = \sum c_n e^{in\omega_f t}, \quad n = -\infty, \dots, \infty, \quad (2)$$

dove ω_f è la pulsazione fondamentale e $c_n = 2/T \int f(t) e^{-in\omega_f t} \, dt$.

La seconda forma, più utile nel linguaggio dei segnali, è la seguente:

$$f(t) = A_0/2 + \sum A_n \cos (n\omega_f t + \Phi_n), \quad n = 1, \dots, \infty, \quad (3)$$

dove $A_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ e $\tan \Phi_n = -b_n/a_n$.

I termini della (3) sono le armoniche di ampiezza A_n e fase Φ_n . Per $n=1$, si ha l'armonica fondamentale, mentre per gli altri valori di n si hanno le armoniche superiori di frequenza $n/2\pi$. La rappresentazione dei coseni può essere esplicitata attraverso gli spettri di Fourier, cioè le funzioni che esprimono rispettivamente l'ampiezza A_n , la potenza $P_n = A_n^2$ e la fase Φ_n in funzione della frequenza. Per le funzioni periodiche, tali spettri sono 'a righe', dove le righe si riferiscono alle varie armoniche. La stima dello spettro di densità di potenza è un metodo che fornisce la distribuzione in frequenza della potenza di un segnale.

E' comprensibile lo scetticismo dei matematici contemporanei di Fourier. Egli affermava in sostanza, al contrario di quanto sosteneva l'Analisi Matematica, che una funzione discontinua potesse essere ottenuta come somma di funzioni continue, di sinusoidi appunto. Nasceva l'Analisi non Differenziabile. La scoperta coinvolse i maggiori matematici

della prima metà dell'Ottocento; ad esempio, Lagrange nel 1807 non permise la pubblicazione del lavoro originario; Abel nel 1828 sentenziò: 'the divergent series are the invention of the devil, and it is a shame to base on them any demonstration whatsoever'. A onor del vero, va detto che le dimostrazioni che appaiono negli scritti di Fourier non sono sempre esatte. D'altro canto il suo punto di vista non era quello dell'analista puro, egli sapeva che i problemi di fisica avevano una soluzione, fornita dalle sue sperimentazioni, per lui si trattava solo di trovarla matematicamente. Solo in seguito Dirichlet, Friedrich e Riemann risolsero i dubbi sulla validità delle serie di Fourier, trasformando finalmente le sue corrette intuizioni in matematica 'rigorosa'.

2.2 Trasformata di Fourier

Come sappiamo, nella ‘Théorie analytique de la chaleur’ si trovano sia la serie sia la trasformata di Fourier, presentate rispettivamente nel 1807 e nel 1811. La parte del manoscritto sulla trasmissione del calore tra masse disgiunte o nei corpi continui di dimensione finita è la più sviluppata del manoscritto, e vi si trova sistematicamente lo sviluppo di funzioni in serie di Fourier. La trasformata di Fourier (FT) appare invece nel capitolo XI, in relazione alla trasmissione del calore nei corpi a dimensione infinita. Nella versione del 1811, Fourier affrontò il problema solo nel caso unidimensionale. La versione completa degli scritti di Fourier apparve rispettivamente nel 1824 e 1826 nelle due parti delle ‘Mémoires de l’Académie Royale des Sciences’. La ‘Théorie’ del 1822 tuttavia contiene già la dimostrazione della convergenza della formula integrale, assente nel 1811.

L’integrale, più noto come trasformata, di Fourier è così definito:

$$F(\omega) = \int f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4).$$

La variabile indipendente ω la pulsazione, è un numero reale appartenente all’intervallo $]-\infty, +\infty[$, mentre $e^{-i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$.

In analogia con le serie, Fourier scrisse la ‘formula di inversione’ che, sotto opportune ipotesi in genere verificate, ricostruisce f a partire dalla trasformata F :

$$f(t) = 1/2\pi \int F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5).$$

$f(t)$ può essere interpretata come somma integrale di sinusoidi complesse $e^{i\omega t}$ ciascuna di ampiezza $1/2\pi f(\omega) d\omega$. $F(\omega)$ può dire, ad esempio, per ogni pulsazione ω , quale è il ‘contenuto armonico’ della funzione $f(t)$, cioè in quali intervalli di pulsazione ω , e cioè di frequenza, il segnale è più ‘ricco’ e in quali lo è meno. L’integrale nella formula (5) è l’antitrasformata di Fourier. Si può dimostrare che l’antitrasformata della trasformata è proprio la funzione f di partenza (riflessività).

Si osservi, per inciso, che la trasformata di Fourier può essere definita a partire dalla trasformata di Mellin, e viceversa:

$$g(s) = \int x^{s-1} f(x) dx \quad (6).$$

Inoltre la trasformata di Mellin dell’esponentiale negativa è la funzione gamma.

In innumerevoli applicazioni, il vantaggio della trasformata di Fourier e del suo sviluppo è associato al fatto che, mentre la teoria delle serie scompone le funzioni periodiche in somme infinite di seni e coseni, la trasformata consente di trattare in modo simile le funzioni non periodiche.

Ricordiamo infatti la (2) che, data una funzione periodica f di periodo T , frequenza $1/T$ e pulsazione fondamentale $\omega_0 = 2\pi/T$, consente di scrivere:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

Il passaggio dalla serie all’integrale è la generalizzazione della (2) alle funzioni non periodiche; considerando infatti l’intervallo di periodicità come un piccolo intervallo oltre il quale la funzione si ripete in maniera identica, si può intendere una funzione non periodica come caso limite di una funzione periodica di periodo infinito (cioè di pulsazione fondamentale infinitesima). Per le funzioni non periodiche, gli ‘spettri a righe’ del Paragrafo 2.1 diventano ‘spettri continui’.

Ma torniamo agli eventi storici ricordando che, nel 1815, anche Cauchy spedì all’Académie un manoscritto sulla propagazione delle onde sulla superficie di un liquido, che conteneva una dimostrazione della convergenza della formula integrale. Cauchy vinse il Premio nel 1815, ma il suo manoscritto fu pubblicato nel 1827. Di Fourier e Cauchy fu più fortunato Poisson il cui manoscritto, premiato nel 1816, fu subito dato alle stampe; pertanto la sua risulta essere la prima pubblicazione ufficiale della formula integrale. Le analogie tra i manoscritti di Fourier, Cauchy e Poisson sono numerose. Tutti e tre descrissero lo stato di un sistema fisico che conduce comunque ad un’equazione alle derivate parziali del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti, la cui soluzione è espressa sotto forma di una rappresentazione integrale. Ciò che cambia è il modo di introdurre e utilizzare la formula integrale. Come detto, secondo Fourier, era il modo di ‘generalizzare’ alle funzioni non periodiche il metodo dello sviluppo in serie, in relazione alla soluzione di un determinato problema fisico. Per Cauchy, invece, non si trattava di una generalizzazione e la dimostrazione della convergenza era indipendente dal problema fisico di partenza. L’idea di Poisson era simile a quella di Cauchy; forse egli si ispirò sia a Fourier sia a Cauchy nella stesura del suo manoscritto; forse tutti e tre giunsero indipendentemente alla scoperta della formula integrale. Il confronto tra le dimostrazioni dei tre matematici illustra anche le loro differenze di stile. Cauchy diede alcune dimostrazioni, tutte lunghe e si preoccupò soprattutto della generalità e del rigore delle conclusioni. Per Fourier, di cui risulta esserci una sola dimostrazione, sembra che le serie e gli integrali fossero solo delle tecniche efficaci per giungere alla soluzione del problema fisico.

A nostro parere, comunque si siano svolti i fatti, le novità introdotte da Fourier nel campo dell'analisi matematica non possono essere sottostimate. Il concetto di trasformata è pionieristico, anche se in realtà, all'epoca di Fourier, essa non fu utilizzata come un operatore tra funzioni. La trasformata, oggi considerata una delle più belle ed eleganti formule della matematica, è tra le più diffuse grazie alla sua stretta associazione con i segnali, e al fatto che i segnali, in particolare quelli elettrici, hanno una molteplicità di applicazioni che vanno dalle comunicazioni alla musica alla biologia e medicina (vedi Paragrafo 3). Nella teoria dei segnali, infatti, le formule della trasformata di Fourier consentono il passaggio dal dominio del tempo al dominio della frequenza e viceversa. Un segnale descritto istante per istante da una forma d'onda $a(t)$, può essere scomposto in una serie di armoniche e 'trasformato' nella funzione $b(f)$. Quando parliamo utilizziamo delle frequenze variabili nel range: 20 – 20.000 Hz, supponiamo, ad esempio di voler eliminare i suoni più squillanti (alte frequenze). La trasformata di Fourier consente di registrare la nostra voce, passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, tagliare le frequenze > 3.000 Hz e ritornare nel dominio del tempo. Riascoltando la registrazione, il tono di voce apparirà, come volevamo, più basso e cupo. L'uso della trasformata consente di vedere un segnale come una sovrapposizione di infinite sinuoidi, con la conseguenza che per determinare come un sistema reagisce ad un dato segnale è sufficiente conoscere come reagisce alla generica sinusoidale che compone il segnale e sommare poi i risultati parziali. Se volessimo ad esempio calcolare come il 'sistema cellulare' reagisce al 'segnale voce', basterebbe calcolare come il telefono reagisce ad una sinusoidale, sommare gli effetti delle sinusoidi e considerare il segnale uguale alla somma di sinusoidi. Ancora oggi la serie e soprattutto la trasformata di Fourier sono tra i principali strumenti matematici in teoria dei segnali.

2.3 Trasformata Discreta e Trasformata Veloce di Fourier

Essendo continua, la Trasformata di Fourier (FT) non è completamente gestibile da un calcolatore che, ovviamente, può trattare solo un numero finito di dati. Si utilizza quindi la procedura nota come ‘campionamento’ del segnale, che consiste nel prelevare il segnale solo in un numero finito di istanti, ad esempio ogni 0.1 msec. I valori ottenuti sono in genere arrotondati (‘quantizzazione’); se ad esempio al tempo $t = 1$ sec il segnale assume il valore 0.678, allora il valore quantizzato potrebbe essere 0.7.

Per questo nacque la trasformata discreta di Fourier (DFT) con il duplice obiettivo di definire una trasformazione che approssimasse il più possibile la FT e garantire che tale trasformazione fosse eseguita da un calcolatore.

Si consideri un segnale $y(n)$ a tempo ‘discreto’, intendendo con ciò n appartenente a Z . Si può mostrare che vale la formula seguente:

$$Y(k) = \sum y(n) e^{-ik2\pi/Nn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

e 0 altrove,

dove N è sostanzialmente il numero di campioni su cui si vuol fare l’analisi.

La (7) è la trasformata discreta di Fourier di y , analogo ‘discreto’ della (4), e, come la trasformata di Fourier, può essere invertita.

Senza entrare troppo in dettaglio, si può dimostrare che è possibile esprimere gli spettri di ampiezza, potenza e fase sotto forma dei parametri della DFT; tali spettri sono ovviamente a frequenza discreta.

Dalla seconda metà dell’Ottocento e per circa un secolo il problema dell’applicazione della trasformata di Fourier apparve associato al tempo di calcolo; la DFT richiedeva infatti un tempo altissimo, finché Runge nel 1903 descrisse per la prima volta la Trasformata Veloce di Fourier (FFT). Danielson e Lanczos nel 1942 ridussero ulteriormente il numero delle operazioni, partendo dall’osservazione di alcune simmetrie e periodicità. Ma la FFT divenne realmente popolare solo nel 1965 (e ancora oggi è usata pressochè universalmente in questa versione), dopo che J.W. Cooley dell’IBM e J.W. Tukey dei Laboratori Bell Telephone di Princeton inventarono un algoritmo molto efficiente per il calcolo della DFT. Tukey (lo stesso che nel 1958 coniò il termine ‘software’) raccontò di aver avuto l’idea durante un meeting del comitato statunitense che doveva risolvere i problemi relativi alle testate nucleari dell’Unione Sovietica. Un altro partecipante del meeting, Garwin dell’IBM, intuì il potenziale del metodo e pose Tukey in collegamento con il collega Cooley che implementò l’algoritmo. Sembra che di fatto l’algoritmo fosse già stato scoperto e usato da Gauss nel XIX secolo.

Senza soffermarsi sui dettagli dell’implementazione, il grande vantaggio è, che passando dalla DFT alla FFT, il tempo di calcolo divenne proporzionale non più a N^2 (N ricordiamo è il numero di campioni), bensì a $N \ln N$, con notevole vantaggio al crescere del numero di campioni.

Paragrafo 3

**Trasformata di Fourier nella
ricerca neurologica**

3.1 Elettroencefalogramma e Neurologia

Tralasciando in questa sede il ruolo svolto dai precursori dell'elettroencefalogramma (EEG) nel XVIII secolo (gli italiani Galvani e Volta e gli inglesi Ohm e Faraday), il primo elettroencefalografista fu Richard Caton, Lord Mayor di Liverpool, che nel 1875 descrisse i primi esperimenti sul cervello di conigli e scimmie, usando un galvanometro a specchio. Lavori analoghi furono svolti quasi simultaneamente dal russo Danilevski, che pubblicò nel 1877 la sua tesi, in cui descriveva registrazioni di attività cerebrale spontanea ed evocata sul cervello di animali.

Il primo studioso a registrare l'EEG nell'uomo fu il neuropsichiatra Hans Berger dell'Università di Jena, che iniziò ad interessarsi all'attività elettrica del cervello a partire dal 1902. La prima registrazione, 1924, fu effettuata su un paziente di 17 anni durante un'operazione per sospetto tumore al cervello, connettendo una coppia di elettrodi (piccoli dischi di metallo) allo scalpo e rilevando una piccola corrente con un delicato galvanometro. Ben 73 registrazioni furono fatte da Berger sul figlio Klaus, all'epoca tra 15 e 17 anni, a cui furono tagliati cortissimi i capelli per migliorare la qualità delle registrazioni. Berger, che usò anche se stesso come cavia utilizzando principalmente elettrodi ad ago, osservò inoltre come le registrazioni fossero migliori sui soggetti calvi. Condusse i suoi studi grazie al fatto di essere Direttore della Clinica Psichiatrica di Jena; poteva così usufruire di un piccolo laboratorio annesso allo studio, in cui lavorava tra le 5 e le 8 di sera. Dopo 5 anni di esperimenti pubblicò, nel 1929, il primo dei 23 lavori sull'argomento, in cui coniò il termine 'Elektenkephalogram'. Nella seconda pubblicazione, l'anno seguente, descrisse per la prima volta le onde alpha e beta dell'EEG. Fondamentali per i suoi studi furono i contributi del fratello, ingegnere presso la ditta Zeiss di Jena, e dell'amico fisico Dietsch dell'Istituto di Tecnologia e Fisica. Berger infatti analizzava gli EEG qualitativamente; fu Dietsch che pensò di applicare per la prima volta la trasformata di Fourier a sette record EEG nel 1932. Lavorò tutta la vita per perfezionare le sue registrazioni ma, nonostante gli esperimenti fossero documentati da numerose fotografie, egli non ricevette in Germania le meritate onoreficenze, probabilmente per la sua coraggiosa opposizione al nazismo. Berger iniziò a soffrire di depressione a partire dal pensionamento, 1938, e morì suicida tre anni dopo.

Degli studiosi immediatamente successivi, seconda metà degli anni '30, ricordiamo Lord Adrian che diffuse gli studi in lingua inglese, Jasper che iniziò a condurre gli esperimenti di elettroencefalografia negli USA, Gibb e Davis, perchè mostrarono per primi la correlazione tra alcune anomalie dell'EEG e l'epilessia, e Loomis che fu invece il primo a studiare l'associazione tra modificazioni dell'EEG e stadi del sonno.

Nel 1935 iniziarono anche ad apparire i sistemi EEG commerciali, sviluppati negli Stati Uniti separatamente da Albert Grass per il 'Boston City Hospital' e da Franklin Offner per l'Università dell'Illinois. Per inciso, nel 1938, nacque la rivista 'Journal of Neurophysiology', che conteneva sin dalle origini un numero impressionante di articoli sull'EEG.

Ci sembra opportuno accennare all'importante contributo italiano alla storia dell'elettroencefalografia. Compì infatti un pionieristico studio sull'EEG nell'animale, pubblicato in lingua italiana nel 1935, Mario Gozzano eminente neurologo-epilettologo di Savignano (Cuneo), Direttore del Dipartimento di Neurologia-Psichiatria a Cagliari, Pisa, Bologna e Roma. Egli compì i suoi studi principalmente nella Germania nazista e a Napoli. Il suo contributo è notevole e si differenzia da quello di Berger perchè, mentre quest'ultimo era un 'olista', considerava cioè il cervello come un intero, Gozzano fu un 'localizzazionista', ritenendo il cervello come un mosaico di aree funzionalmente differenti.

Gozzano fu uno dei pochi neurologi clinici del mondo scientifico dell'epoca a credere all'EEG come importante strumento di studio, forse per i suoi interessi interdisciplinari nei campi della fisica, biochimica ed elettrofisiologia.

Un considerevole sforzo per giungere all'analisi automatica dell'EEG fu compiuto, a partire dal 1950, dall'Istituto di Tecnologia del Massachusetts, che lavorò con entusiasmo e significativi investimenti in termini di tempo e risorse, grazie alla preziosa collaborazione con Weiner, il padre della moderna teoria della comunicazione.

Ma è con l'introduzione della tecnologia digitale, attorno alla metà del 1980, che si assiste ad una vera e propria rivoluzione dell'EEG, che diventa anche un importante fatto commerciale. Ricordiamo che si definiscono 'segnale analogico' un segnale a tempo continuo (l'asse dei tempi può assumere un qualsiasi valore reale) ed ampiezza continua (i valori dell'ampiezza del segnale sono reali appartenenti ad un dato intervallo) e 'segnale numerico' o 'digitale' un segnale a tempo discreto (l'asse dei tempi può assumere solo valori discreti) e ad ampiezza quantizzata (i valori assunti dall'ampiezza appartengono ad un numero finito di valori possibili). Dal 1980 fu possibile trasformare il segnale da analogico a digitale, con un cosiddetto convertitore A/D (analogico/digitale). Oggi, l'EEG digitale è uno strumento ben consolidato nella clinica, fortemente consigliato sia dall'American Academy of Neurology sia dall'American Clinical of Neurophysiology Society nei campi dell'epilessia, patologie cerebrovascolari e nel monitoraggio intraoperatorio, con la raccomandazione (dato il rischio sostanziale di interpretazioni erronee) che l'utilizzo sia effettuato da parte di esperti di EEG.

3.2 Trasformata di Fourier ed Elettroencefalogramma

Numerosi studi nel campo della ricerca neurologica prevedono l'utilizzo di segnali che si manifestano come variazioni di campo elettrico, ad esempio l'EEG, ancora oggi la principale e più diffusa tecnica di valutazione dell'attività cerebrale. Per lo studio dell'attività cerebrale mediante EEG, si utilizza come grandezza fisica di riferimento il potenziale elettrico, caratterizzato da una serie continua di valori assunti sia nel tempo (periodo di acquisizione) sia nello spazio (superficie dalla quale viene prelevato). I segnali elettrici rilevati sono prodotti principalmente dai potenziali post-sinaptici di diverse cellule corticali che, sommandosi, creano differenze di campi elettrici (fra coppie di elettrodi) sufficientemente grandi da poter essere registrate dall'esterno. L'EEG consiste pertanto nella rilevazione sullo scalpo da parte di elettrodi di superficie, quasi sempre, in posizioni standard (lo standard più usato è il Sistema Internazionale 10/20) dei potenziali. L'EEG è caratterizzato da una gamma di frequenze, tradizionalmente suddivisa nelle seguenti bande, correlate allo stato di veglia del soggetto: delta da 0.1 a 4 Hz e con ampiezza di circa 100 mV; theta da 4 a 8 Hz e ampiezza 100 mV; alpha da 8 a 13 Hz e ampiezza tra 20 e 60 mV; beta da 13 a 35 Hz e ampiezza tra 10 e 30 mV; gamma oltre i 35 Hz.

L'EEG è classificato come segnale stocastico e stazionario per brevi intervalli. Apriamo una piccola parentesi su tale classificazione. In breve, i segnali stocastici sono funzioni casuali nel senso che la loro forma d'onda è sconosciuta a priori. Consideriamo l'insieme dei segnali $x_j(t)$, $j=1, \dots, n$, e supponiamo di osservare i segnali $x_j(t)$ all'istante t_1 ; $x_j(t_1)$ è una variabile casuale di distribuzione P_1 . All'istante t_2 abbiamo un'altra variabile casuale $x_j(t_2)$ con distribuzione di probabilità P_2 , in genere diversa da P_1 , e così via. Per caratterizzare il processo stocastico $x_j(t)$ sarebbe necessario conoscere la densità di probabilità congiunta delle variabili casuali $x_j(t_i)$. In pratica la densità di probabilità congiunta non è nota, e la sua stima richiederebbe un eccessivo numero di campioni. Pertanto i processi stocastici vengono caratterizzati in termini dei momenti del primo (media) e del secondo (autocorrelazione) ordine, che forniscono un'utile seppur grossolana descrizione della distribuzione. La situazione più fortunata si ha quando il segnale è stazionario, perchè in tal caso la funzione densità di probabilità di tutte le variabili casuali corrispondenti ai diversi istanti di tempo è la stessa. E' inoltre garantita la costanza nel tempo della media e della funzione di autocorrelazione.

Il segnale elettroencefalografico è un segnale biomedico, esso cioè trasporta 'informazione' relativamente al sistema biologico in esame, nel nostro caso l'attività cerebrale. L'analisi visiva dell'EEG non si è rivelata utile perchè non consente di separare ciò che si vede in un tracciato EEG, il risultato cioè della combinazione di due componenti: 'informazione' e 'rumore', dove per informazione si intende sostanzialmente un'alterazione compatibile con uno stato patologico, e per rumore grossolanamente tutto ciò che non è informazione. Per comprendere in maniera semplice quale sia invece l'effetto dell'applicazione della trasformata di Fourier all'EEG, basti pensare a ciò che succede ad un fascio di luce che passa attraverso un prisma di vetro: il raggio è scomposto nelle sue componenti principali e otteniamo così lo spettro. L'analisi dell'EEG, come sappiamo, ha il fine di estrarre l'informazione di interesse dall'insieme delle altre componenti (rumore) che lo formano; tale estrazione è effettuata cercando una descrizione del segnale in un dominio in cui queste componenti, l'informazione ed il rumore, siano il più possibile disgiunte. La rilevanza dell'analisi di Fourier risiede nel fatto che consente di studiare il segnale nel dominio delle frequenze dove esso può essere scomposto come somma di sinusoidi; permettendo così di isolare l'informazione di interesse in quanto, gli elementi base coinvolti nella componente di origine elettroencefalografica sono disgiunti da quelli coinvolti nella componente di disturbo.

L'applicazione dell'analisi di Fourier all'EEG è stata subito ostacolata dal problema della non 'stazionarietà' (costanza nel tempo della media e della funzione di autocorrelazione) o, meglio, della sua stazionarietà solo per 'brevi' intervalli. In linea teorica, tale analisi può essere applicata correttamente soltanto a segnali deterministici o a processi stocastici stazionari o almeno 'lentamente' variabili ('localmente stazionari'). Prima di procedere con l'elaborazione è necessario porsi preliminarmente la questione: 'in quali casi e per quali durate possono essere considerate stazionarie le caratteristiche dell'EEG? La risposta non è univoca, ma dipende dalla tipologia dello studio; per esempio l'intervallo di stazionarietà di un fenomeno attentivo potrà essere di qualche secondo, di uno stadio del sonno di alcuni minuti, dell'effetto di un farmaco a lento rilascio diverse ore.

L'analisi dei segnali localmente stazionari richiede un compromesso tra l'accuratezza con cui si vuole localizzare una discontinuità e quanto finemente si vogliono separare le componenti in frequenza. Il compromesso si esprime con la scelta della lunghezza dell'intervallo di stazionarietà. Quindi la risoluzione temporale può essere migliorata solo a scapito di quella in frequenza e viceversa.

Le conseguenze di una non corretta applicazione dell'analisi di Fourier sono, oltre al limite di risoluzione spettrale, connesse alla 'sperequazione energetica' alle diverse frequenze. La sperequazione energetica è associata al fatto che i fenomeni 'lenti' (ad esempio gli stadi III e IV del sonno non-REM) sono generalmente ampi e di lunga durata, mentre quelli a frequenza rapida si estinguono velocemente e sono caratterizzati da minore ampiezza. L'analisi di Fourier, calcolando i contenuti energetici alle varie frequenze in modo 'imparziale', fornisce una rappresentazione sbilanciata a favore delle frequenze lente. Per i segnali 'non riconducibili a stazionari', la trasformata di Fourier è inadeguata.

Un altro problema dell'applicazione dell'analisi di Fourier è che essa manca di esplicita localizzazione nel tempo, della capacità cioè di cogliere l'azione di componenti con una certa frequenza ad un dato istante o, in altri termini, di riconoscere regioni nel tempo in cui l'onda ha caratteristiche spettrali differenti ('perdita dell'informazione di posizione'). Lo spettro delle ampiezze non fornisce infatti indicazioni su come evolvano nel tempo le componenti con caratteristiche spettrali differenti, così come la trasformata inversa non permette la localizzazione temporale di tali componenti. La trasformata e l'antitrasformata di Fourier considerano i domini del tempo e delle frequenze nella loro globalità e separatamente l'uno dall'altro.

Un interessante approccio per risolvere tale problema consiste nel cercare di avere una ‘rappresentazione congiunta tempo-frequenza’ del segnale. Si è sviluppata una linea di ricerca che, partendo dai lavori pionieristici di Wigner (1932), Gabor (1946) e Page (1952), si basa sull’idea di introdurre una dipendenza temporale, applicando la FT non più a tutto il segnale EEG, ma alla porzione di EEG contenuta in un intervallo (‘finestra’) che trasla nel tempo. L’approccio tradizionale che introduce la dipendenza temporale nell’analisi di Fourier è la ‘Short Time Fourier Transform (STFT), anche detta ‘windowed Fourier transform’, che consiste nel far scorrere la finestra w lungo tutto il segnale, e calcolare la FT in ogni segmento ‘localmente stazionario’. La STFT per un dato segnale $x(t)$ è definita nel modo seguente:

$$\text{STFT}(t, \omega) = \int x(t) \omega(t - \tau) e^{-j\omega\tau} dt, \quad (8)$$

dove $\omega(t)$ è la cosiddetta ‘funzione finestra’. Il modulo quadro della STFT è detto ‘spettrogramma’. Facendo uso delle DFT e FFT per la stima della STFT, ci si trova di fronte al problema dell’utilizzo di una stessa finestra per tutte le frequenze, quindi la risoluzione dell’analisi è costante in tutto il piano tempo-frequenza.

3.3 Considerazioni sullo stato dell'arte e le frontiere della ricerca nell'elaborazione del segnale elettroencefalografico

Come sappiamo, l'obiettivo generale dell'elaborazione di un segnale è quello di estrarre l'informazione che 'viaggia' sul segnale (isolare la componente di interesse dal disturbo) nel modo più congruo, in dipendenza degli scopi che ci si è posti. Il circuito ideale di come un segnale biomedico intervenga nella decisione clinica è il seguente: si parte dall'acquisizione tramite sensori, si procede quindi con la pre-elaborazione (amplificazione, filtraggio, conversione A/D), poi con l'elaborazione e l'interpretazione dei risultati, al fine di programmare un intervento appropriato sul paziente. La prima difficoltà che si incontra nell'elaborazione è che non esiste un metodo univoco di elaborazione, bensì il metodo va scelto in base a quale informazione si è interessati ad estrarre, al protocollo clinico, ai dati sia biologici sia matematico-ingegneristici disponibili. In particolare, per il segnale EEG, si deve considerare che il metodo scelto deve essere in grado di rivelare configurazioni molto differenziate tra loro, sia 'normali' (ad esempio la normalità del giorno è diversa da quella della notte), sia patologiche, l'informazione di interesse cioè non è univoca. Ciò ovviamente costituisce un'ulteriore difficoltà rispetto alla situazione in cui esiste una sola classe tipica (una sola componente di interesse) e tutto il resto è rumore.

La considerazione fondamentale da cui possiamo partire è che ciascun segnale biomedico, ed in particolare il segnale EEG, si avvale, per essere elaborato, di una rappresentazione matematica. Come detto, l'approccio di studio dei segnali biomedici parte dal processo biologico sotto analisi, lo misura con un sistema di sensori che lo rilevano e lo pre-elaborano; si ottiene così un segnale affetto da rumore, che viene elaborato per estrarre l'informazione di interesse (separandola dal rumore). Tradizionalmente, nell'elaborazione dei segnali biomedici, si assume (in modo implicito o esplicito) che tale rappresentazione matematica prescindendo dalle caratteristiche del processo che ha generato il segnale. Il problema è in genere affrontato con procedimenti costituiti da una sequenza di operazioni che evidenziano, individuano, misurano, trasformano e classificano l'informazione contenuta nel segnale. Il primo vantaggio di questo approccio è che le espressioni matematiche, e quindi gli algoritmi per calcolarle, possono così essere applicate ad un'ampia categoria di segnali biomedici, per esempio elettroencefalogramma, elettromiogramma ed elettrocardiogramma, indipendentemente dalla loro origine. Inoltre, i metodi esistenti consentono di recuperare pressoché l'intera informazione contenuta nel segnale. Va segnalata l'esistenza in commercio di numerosi algoritmi di calcolo (ad esempio la FT), che possono essere oramai usati in modo automatico. Certamente, sono state proposte negli anni metodologie sempre più avanzate, ma distaccate comunque da ipotesi sull'origine del segnale. Le linee di ricerca più attuali appaiono essere l'analisi dinamica non lineare, il caos deterministico e la dimensione frattale. Le teorie sottostanti sono ricche e complesse, e si basano sull'esistenza e caratterizzazione dei cosiddetti 'attrattori' e sulla determinazione della regione di spazio dei parametri in cui un dato sistema ha comportamento caotico. Vi sono inoltre l'analisi 'wavelet-packet' e, soprattutto, la serie di metodi cosiddetti 'soft computing', comprendente le reti neurali e la logica fuzzy. Il termine soft-computing, coniato nel 1965 da Zadeh, indica una serie di metodi che consentono di trattare problemi dei quali abbiamo una conoscenza incerta o parziale trovando soluzioni approssimate, in contrapposizione dunque ai metodi 'hard computing' che si basano sulla ricerca di soluzioni esatte. Sebbene tali metodologie si siano rivelate utilissime in numerosi campi di applicazione, il loro effettivo valore in neurologia clinica non è stato ancora del tutto chiarito. Poiché non sono disponibili grandi banche di dati standard del segnale EEG in malattie neurologiche, per testare di volta in volta i nuovi metodi, non è chiaro se e in quale misura essi abbiano migliorato l'accuratezza dell'elaborazione numerica rispetto all'analisi classica di Fourier. Questi metodi sembrano aumentare la risoluzione degli spettri, e si rivelano utili quando è necessario avere informazioni sui cambiamenti del segnale in tempo reale. L'analisi più popolare continua ad essere quella di Fourier, almeno quando possiamo considerare il segnale stazionario.

Il grosso limite dei metodi citati, inclusa l'analisi di Fourier oggetto del presente lavoro, è che sono tutti metodi descrittivi che si limitano a spostare la rappresentazione del segnale dal dominio del tempo al dominio delle frequenze, poiché il nuovo dominio agevola la separazione tra informazione e rumore. Non vi è alcuna ipotesi sulla genesi del segnale; la scelta di usare procedimenti descrittivi ha profondamente distaccato l'elaborazione numerica del segnale (ad esempio analisi di Fourier) e la sorgente (ad esempio cervello, cuore, muscolo) da cui il segnale stesso trae origine.

Va qui chiarito che anche quelli comunemente denominati come modelli del segnale EEG, sostanzialmente i modelli autoregressivi (AR), non vanno intesi come un insieme di ipotesi connesse alla fisiologia o anatomia del processo biologico del cervello che genera il segnale. I cosiddetti 'modelli AR' sono anch'essi metodi descrittivi, che rappresentano i dati in esame e stimano alcuni parametri risolvendo un problema di predizione lineare, spesso con algoritmi basati sui minimi quadrati. Sono infatti usati, oltre che per l'EEG, per elaborare ad esempio l'elettromiogramma o l'elettrocardiogramma.

A nostro avviso, è auspicabile che le ricerche future si baseranno su modelli matematici le cui equazioni mirino a riprodurre lo specifico processo fisiologico in esame. Un approccio innovativo, indubbiamente più interessante, sarebbe quello caratterizzato da una forte connessione tra l'elaborazione del segnale ed un modello del sistema biologico da cui tale segnale ha avuto origine. E' auspicabile che le ricerche siano indirizzate verso tale sinergia: l'elaborazione del segnale potrebbe aiutare nella formulazione del modello e, viceversa, un buon modello potrebbe evidenziare i parametri da ottenere come risultato dell'elaborazione del segnale, verificandone nel contempo la rilevanza clinica.

3.4 L'esempio dell'epilessia

L'esecuzione dell'esame EEG in neurologia è di importanza cruciale per le seguenti malattie:

- 1) epilessia, dove permette di evidenziare anomalie specifiche, i cosiddetti 'spike' (picchi del potenziale);
- 2) cefalea e sindromi vertiginose;
- 3) varie forme di demenza;
- 4) disturbi del sonno.

L'argomento EEG all'interno della ricerca neurologica è talmente vasto che è necessario concentrarsi su specifiche patologie. Descriveremo qui come esempio l'epilessia, dicendo sin d'ora che anche per tale malattia i risultati sinora ottenuti con l'elaborazione del segnale EEG non possono essere considerati definitivi.

L'epilessia, dal greco 'epilepsia', è una condizione cronica neurologica caratterizzata da ricorrenti e improvvise 'crisi'. Il termine 'crisi epilettica' descrive una varietà di sintomi neurologici dovuti a una scarica elettrica anomala, sincronizzata e prolungata di cellule nervose della corteccia o del tronco cerebrale. La diagnosi di epilessia implica una tendenza a crisi epilettiche ripetute che si trova nello 0.5% della popolazione. Crisi epilettiche sono favorite da fattori che aumentano l'eccitabilità elettrica delle cellule nervose e abbassano la naturale soglia alla loro scarica spontanea: l'uso o la sospensione improvvisa di certi farmaci, droghe o alcool; febbre, deficit di sonno, alterazioni degli elettroliti, e infine fattori genetici e metabolici. Si parla di epilessia idiopatica o primaria quando la storia clinica e gli esami diagnostici non rivelano cause per crisi epilettiche ripetute. Mentre la maggior parte delle epilessie idiopatiche è infatti dovuta a fattori genetici e metabolici ancora sconosciuti e si manifesta in età infantile o adolescenziale, una grande parte delle epilessie secondarie si manifesta dopo i 40 anni. Cause di epilessie secondarie sono tumori e traumi cerebrali, ischemie o emorragie cerebrali, la trombosi dei seni cerebrali venosi, malformazioni vascolari, e malattie infiammatorie del cervello come vasculiti, meningiti, encefaliti o la sclerosi multipla. Per la diagnosi di epilessia è necessaria un'accurata valutazione dei sintomi e della storia clinica, che deve possibilmente comprendere anche le osservazioni dettagliate da parte di terzi, in quanto l'alterazione o la perdita di coscienza spesso precludono una descrizione dei sintomi da parte del paziente stesso. L'EEG rileva l'attività elettrica del cervello ed è un'analisi fondamentale nella diagnosi dell'epilessia, perché le alterazioni elettriche, spesso molto indicative, possono essere presenti anche in assenza dei sintomi. Al di fuori delle crisi epilettiche, però, le alterazioni elettriche possono mancare, pertanto un EEG normale registrato al di fuori di una crisi non esclude la diagnosi di epilessia. In base alla sintomatologia clinica e al tracciato EEG delle crisi epilettiche si distinguono epilessie generalizzate (le scariche anomale iniziano contemporaneamente nei due emisferi cerebrali) ed epilessie parziali o focali (le scariche anomale iniziano in una determinata parte del cervello). La farmacoterapia si basa su farmaci antiepilettici, che con diversi meccanismi stabilizzano le proprietà elettriche della membrana delle cellule nervose, impedendo così le scariche elettriche spontanee. Si tratta perciò di una terapia sintomatica che non elimina la causa dell'epilessia; tuttavia garantisce una vita normale a molti pazienti che altrimenti sarebbero gravemente limitati o minacciati da frequenti crisi epilettiche. Circa il 20% delle epilessie non è sufficientemente controllato nonostante l'impiego di farmaci multipli a dosaggi sufficienti. In questo caso si propone la terapia chirurgica che asporta la regione cerebrale (nella maggior parte dei casi il lobo temporale medio) in cui originano le crisi epilettiche. La stimolazione del nervo vago è un approccio terapeutico recente che è indicato in casi di epilessia farmaco-resistente in cui la terapia chirurgica sia non possibile o controindicata. Nel passato l'epilessia è stata associata ad esperienze religiose e anche a possessioni demoniache; storicamente chiamata "malattia sacra", poiché secondo una visione popolare si credeva che gli attacchi epilettici fossero una forma di attacco dei demoni o comunque una manifestazione di potenza occulta. Ippocrate sottolineava che l'epilessia sarebbe stata considerata divina solo fino a quando non fosse stata compresa.

Nella diagnosi di epilessia, l'individuazione automatica dei cosiddetti 'spike' dell'EEG è di cruciale importanza. Tale individuazione risulta difficoltosa per varie ragioni, tra cui la definizione stessa di 'spike' e l'alta variabilità della morfologia degli 'spike' tra i pazienti. Gli 'spike' furono definiti nel 1975 da Gloor come 'fenomeni transitori di forma triangolare con base stretta distinguibili con chiarezza dall'attività di fondo del tracciato, di ampiezza almeno doppia rispetto all'attività di fondo nei 5 secondi precedenti in ogni canale dell'EEG, durata inferiore ai 200 ms'. L'attività di fondo è tipicamente usata per normalizzare i parametri che caratterizzano lo spike e individuare se lo spike non sia invece una variazione casuale dell'attività ritmica sottostante. Nei vari algoritmi si considerano i 5 secondi precedenti, e non i 5 successivi al fenomeno, perché questi ultimi presentano maggiori difficoltà tecniche di implementazione. Sintetizzeremo qui i principali metodi utilizzati, tralasciando la trasformata di Fourier e le sue modificazioni, perché già esposte. Il fine dell'applicazione di questi metodi è quello di discriminare tra soggetti normali, non epilettici ed epilettici, oppure tra 'spike' e 'no-spike'.

La scomposizione in forme d'onda dell'EEG è il primo passo dei metodi cosiddetti 'mimetici' (copiano l'esperto 'umano'), che hanno lo scopo di individuare gli spike. In breve si ottengono dalla scomposizione dei segmenti chiamati 'semi-onde', e la forma triangolare dello 'spike' è ottenuta componendo due semi-onde di direzioni opposte.

Altri autori usano l'altezza e la durata delle due semi-onde, oppure la forma della punta dello 'spike' o, ancora, cercano la soglia che massimizza la somma di sensibilità e specificità nel discriminare tra 'spike' e 'no-spike'.

Numerosi ricercatori utilizzano modelli AR o ARMA ('autoregressive moving average'), modelli intesi nel senso chiarito nel Paragrafo 3.3. Sono nati diversi algoritmi, sia per costruire tali modelli (fra i più usati l'algoritmo di Burg e quello di Levinson-Durbin), sia per determinarne l'ordine, strettamente associato alla bontà del modello (uno dei più comuni è l' 'Akaike information criteria'). La scelta dell'ordine dell'autoregressione richiede un bilanciamento; se si stima infatti un modello AR di ordine troppo basso si rischia di omettere informazioni rilevanti, se al contrario si stima un modello di ordine eccessivo si aggiunge maggior possibilità di errore nella predizione.

Altri autori hanno confrontato applicazioni di vari tipologie di reti neurali (soprattutto il 'multipercettrone') usando come input, sia dati 'raw' dell'EEG, sia 'semi-onde'.

Esiste poi tutta una serie di metodi per discriminare gli 'spike' da eventuali artefatti; anche qui i risultati non sono chiari, ma dipendenti ad esempio dallo stato in cui l'EEG è registrato (soggetto attivo o quieto, sveglio o addormentato, occhi aperti o chiusi, etc.).

Come affermato nel paragrafo precedente non sono al momento disponibili, a nostra conoscenza, modelli matematici del segnale EEG prelevato con elettrodi di superficie nei pazienti affetti da epilessia o da altre patologie neurologiche. La letteratura scientifica riguarda metodi che descrivono il segnale EEG di superficie ed i relativi algoritmi. Tuttavia, nel settore specifico dell'epilessia esiste un modello proposto da Wendling nel 2002, riferito però all'EEG prelevato con elettrodi intracerebrali, il cosiddetto 'deep EEG', poco usato nell'uomo perchè invasivo. Il modello tenta di interpretare le variazioni dell'EEG intracerebrale durante una crisi epilettica, assumendo che un gruppo di neuroni dell'ippocampo ecciti i neuroni vicini e riceva da essi 3 tipi di connessioni sinaptiche: una eccitatoria, una inibitoria lenta ed una inibitoria veloce. I risultati di simulazione mostrano che alterazioni di parametri associati a questi 3 tipi di connessioni riproducono i tracciati EEG osservabili durante una crisi epilettica.

Resta carente, sia per l'epilessia, sia per le altre malattie neurologiche l'esistenza di modelli matematici del segnale EEG di superficie che aiutino a chiarirne il significato, l'eziologia ed i sottostanti meccanismi neuronali.

Referenze

- 1- Bruns A. Fourier-, Hilbert- and wavelet-based signal analysis: are they really different approaches? *Journal of Neuroscience Methods*,137:321-332;2004.
- 2- Burrus CS. et al. DFT/FFT and convolution algorithms: theory and implementation. Wiley Eds-New York;1985.
- 3- Cerutti S. Marchesi C. *Metodi avanzati di elaborazione di segnali biomedici*. Pàtron Editore, Bologna; 2004.
- 4- Cocelovo MRG. *Anticipazioni di Fourier sui problemi di programmazione lineare e non lineare*. Tesi di Laurea in Matematica, Università di Pisa.
- 5- Collura TF. et al. History and evolution of computerized electroencephalographic instruments and techniques. *Journal of Clinical Neurophysiology*,10:476-504;1993
- 6- Collura TF. et al. History and evolution of computerized electroencephalography. *Journal of Clinical Neurophysiology*,12:214-229;1995.
- 7- Durka PJ. From wavelets to adaptive approximations: time-frequency parametrization of EEG. *Biomed. Eng.*,2:1;2003.
- 8- Durka PJ. On the methodological unification in electroencephalography. *Biomed. Eng.*,4:15;2005.
- 9- Ersoy O. *Fourier-Related Transform, fast algorithms and applications*. Englewood Cliffs NJ. Prentice Hall;1997.
- 10- Fourier J. *Analyse des équations déterminées*. Firmin Didot Frères Libraires, Paris, 1831.
- 11- Fourier J. *Oeuvres (a cura di Darboux)*. Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, Paris, 1890.
- 12- Grigoryan AM. Fourier Transform representation by frequency-time wavelets. *IEEE Transactions on Signal Processing*,53:2489-2497;2005
- 13- Guler I. et al. AR spectral analysis of EEG signals by using maximum likelihood estimation. *Computers in Biology and Medicine*,31:441-450;2001.
- 14- Hirsch E. et al. Des pionniers de l'EEG au traitement du signal: application à l'exploration del épilepsies de l'enfant. *Epileptic Disorders*,3:11-20;2001.
- 15- Ktonas PY. Automated spike and sharp wave detection. In: Gevins AS. & Remond A. eds. *Methods of analysis of brian electrical and magnetic signals*. Amsterdam, Elsevier, 1987.
- 16- Mazza S. et al. Mario Gozzano: the work of an EEG pioneer. *Clinical Electroencephalography*,33:155-159;2002.
- 17- Muthuswamy J. et al. Spectral analysis methods for neurological signals. *Journal of Neuroscience Methods*,83:1-14;1998.
- 18- Nuwer M. Assessment of digital EEG, quantitative EEG, and EEG brain mapping: report of the American Academy of Neurology and the American Clinical Neurophysiology Society. *Neurology*,49:277-292;1997.
- 19- Prestini E. *Applicazioni dell'analisi armonica*. Hoepli Editore-Milano;1996.
- 20- Ventouras EM. et al. Sleep spindle detection using artificial neural network trained with filtered time-domain EEG: a feasibility study. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*,78:191-207,2005.
- 21- Wendling F. et al. Epilepsy fast activity can be explained by a model of impaired GABAergic dendritic inhibition. *European Journal of Neuroscience*,15:1499-1508;2002.
- 22- Wilson SB. et al. Spike detection: a review and comparison of algorithms. *Clinical Neurophysiology*,113:L1873-L1881,2002.