



4: Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza



Lo strato fisico

- ✓ Le principali **funzioni** dello strato fisico sono
 - ⇒ definizione delle **interfacce meccaniche** (specifiche dei connettori) tra il mezzo trasmissivo ed il computer
 - ⇒ definizione delle **interfacce elettriche** o **ottiche** (definizione dei livelli di tensione, lunghezze d'onda dei segnali)
 - ⇒ **codifica** del segnale (rappresentazione dei dati in termini delle caratteristiche del segnale, modulazione)
 - ⇒ **amplificazione** e **rigenerazione** del segnale
 - ⇒ definizione delle **specifiche** del **mezzo trasmissivo** (cavi, fibre)
- ✓ Lo strato fisico riceve dal livello superiore un **insieme** di **bit o bytes** (**frame**) e lo trasmette sul mezzo trasmissivo come un **flusso di bit indipendenti**



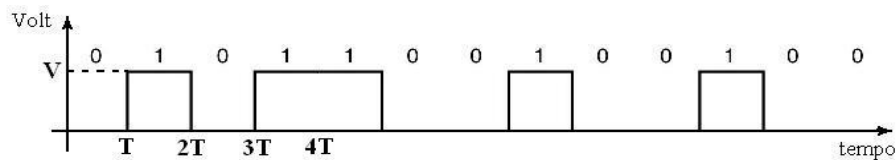
Trasmissione delle informazioni

- ✓ Le **informazioni** nella trasmissione dati vengono **inviare** tramite propagazione di **segnali elettromagnetici** (**tensioni**, **onde radio**, **luce**, ...) utilizzando diversi **mezzi trasmissivi** (**cavi in rame**, **fibre ottiche**, **aria**, **spazio vuoto**)
- ✓ L'informazione trasmessa viene **codificata** tramite la **variazione di caratteristiche** del segnale trasmesso, ed interpretata in **ricezione** secondo le **stesse regole** di codifica



Esempio

- ✓ Possiamo ad esempio pensare di trasmettere la **sequenza di bit** 0101100100100 tramite un segnale ad **impulsi quadri** di durata T in modo che al **bit 0** corrisponda un valore di **tensione 0**, al **bit 1** corrisponda un valore di tensione V

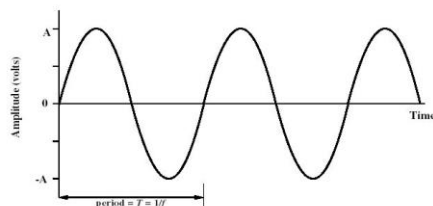




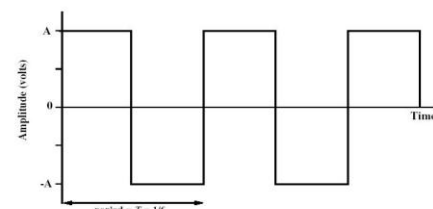
Segnali periodici

- ✓ Nella trasmissione dati hanno particolare importanza i segnali **periodici**, con caratteristiche:
 - ⇒ **ampiezza (A)**: livello massimo
 - ⇒ **fase (ϕ)**: misura della posizione relativa del segnale ad un dato istante
 - ⇒ **periodo (T)**: intervallo temporale della periodicità
 - ⇒ **frequenza (f)**: inverso del periodo

$$f = \frac{1}{T} \text{ in Hertz: } 1\text{Hz} = \frac{1}{\text{sec}}$$



(a) Sine wave



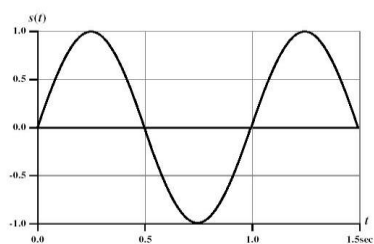
(b) Square wave

R. Cusani, F. Cuomo: *Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza*, Marzo 2010

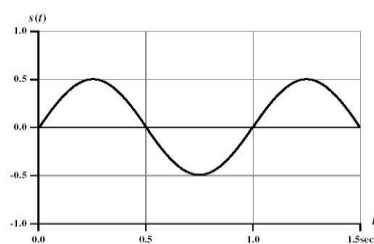
5



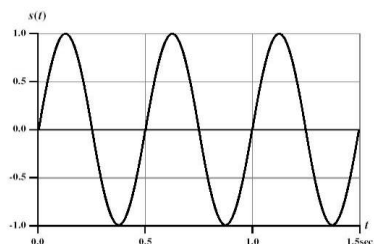
Caratteristiche dei segnali periodici



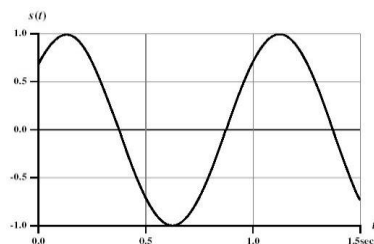
(a) $A = 1, f = 1, \phi = 0$



(b) $A = 0.5, f = 1, \phi = 0$



(c) $A = 1, f = 2, \phi = 0$



(d) $A = 1, f = 1, \phi = \pi/4$

R. Cusani, F. Cuomo: *Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza*, Marzo 2010

6



Altre caratteristiche

- ✓ Per i segnali **sinusoidali** si definiscono anche:
 - ⇒ lunghezza d'onda (λ): la **distanza** in metri tra due **punti** di **uguale fase** in **periodi adiacenti** (la distanza **tra due creste d'onda**)
 - ⇒ velocità di propagazione (**v**): la velocità con cui **si sposta** una **cresta d'onda** nello spazio

✓ In base alle definizioni si ha:
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

- ✓ Velocità delle **onde elettromagnetiche**:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s (nel vuoto)}, c \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m/s (nel rame)}$$

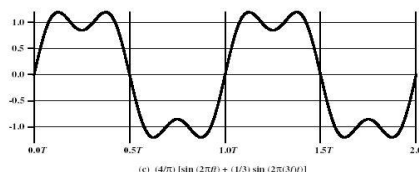
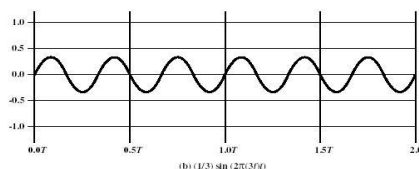
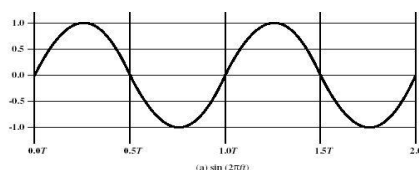
- ✓ Per la **luce** si ha

$$f \approx 10^{14} \div 10^{15} \text{ Hz} \rightarrow \lambda \approx 3 \cdot 10^{-6} \div 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$



Somma di onde sinusoidali

- ✓ La **somma** di onde sinusoidali le cui frequenze sono **multipli** di una di esse è ancora un **segnale periodico**
- ✓ La frequenza più bassa si chiama **fondamentale**
- ✓ La frequenza $f_n = n \cdot f_0$ si chiama **armonica n-esima**
- ✓ La frequenza del segnale **risultante** è pari alla frequenza **fondamentale**





Caratterizzazione dei segnali in frequenza

- ✓ In generale un segnale **trasmesso** in un **certo modo** in ricezione si presenta **diversa** a causa di effetti dovuti alla **trasmissione**
- ✓ La trattazione dei segnali in termini della loro **evoluzione temporale** si rivela complessa
- ✓ Come vedremo in seguito può **caratterizzare** la **risposta della trasmissione** dei segnali in funzione della **frequenza** di un segnale **sinusoidale** generato in trasmissione
- ✓ Poichè **non tutti** i segnali sono **sinusoidali**, nè periodici, risulta di fondamentale importanza **ricorrere** la trattazione di un **qualsiasi segnale** in termini di segnali sinusoidali (a **frequenza definita**)
- ✓ Esiste una teoria matematica, elaborata da **Fourier**, che ci permette di considerare **ogni segnale** come **somma** di segnali **sinusoidali**



Serie di Fourier

- ✓ Data una qualsiasi funzione **periodica** di periodo T continua con derivata continua a tratti e limitata, **è possibile** scriverla come **somma** di **seni e coseni**:

$$v(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

dove $f_0 = 1/T$ è la frequenza della funzione

- ✓ I **coefficienti** dello sviluppo sono dati dalle relazioni:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T v(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T v(t) \cos(2\pi f_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T v(t) \sin(2\pi f_0 t) dt$$



Esempio 1: funzione coseno

- ✓ Eseguiamo lo **sviluppo di Fourier** della funzione:

$$v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- ✓ I **coefficienti** sono:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 1 \\ A \cos(\varphi) & \text{per } n = 1 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \sin(2\pi n f_0 t) dt = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 1 \\ -A \sin(\varphi) & \text{per } n = 1 \end{cases}$$

- ✓ Quindi lo **sviluppo** è:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = A \cos(\varphi) \cos(2\pi f_0 t) - A \sin(\varphi) \sin(2\pi f_0 t)$$



Forma esponenziale della serie di Fourier

- ✓ La serie di Fourier **può essere scritta** in modo piu' generale (anche per **funzioni complesse**) nella forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i2\pi n f_0 t}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-i2\pi n f_0 t} dt$$

- ✓ Per le funzioni **reali** si ha:

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

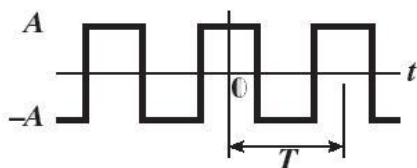
$$a_0 = 2c_0, \quad a_n = 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n), \quad b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n)$$



Esempio 2: onda quadra

✓ L'onda quadra è definita come:

$$v(t) = \begin{cases} A & \text{per } kT < t < kT + \frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ -A & \text{per } kT + \frac{T}{2} < t < (k+1)T, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Esempio 2: onda quadra

✓ Il calcolo di coefficienti per l'onda quadra fornisce:

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ -i \frac{2A}{n\pi} & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$
$$v(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n \text{ disp.}} \frac{\sin(2n\pi f_0 t)}{n}$$



Esempio 2: onda quadra (cont.)

- ✓ L'onda quadra è quindi la sovrapposizione di onde sinusoidali a frequenza nf_0 le cui ampiezze decrescono al crescere di n :

$$A_n = \frac{4A}{\pi n}$$

quindi le diverse armoniche **contribuiscono in modo decrescente** alla ampiezza dal segnale al crescere di n



Segnali non periodici

- ✓ Benchè improprio, si può pensare ad un segnale **non periodico** come ad un segnale periodico di **periodo tendente ad infinito**
- ✓ La **frequenza fondamentale** (quindi la **distanza** tra le **armoniche**) si riduce a **zero**
- ✓ La **rappresentazione del segnale** tramite serie di Fourier, in questo limite, sarà costituita da **somma di frequenze** sempre piu' **vicine tra loro** all'aumentare del periodo
- ✓ La **serie di Fourier** si trasforma da somma in **integrale**



Trasformata di Fourier

- ✓ Data una funzione $v(t)$ integrabile, non periodica e tale che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < \infty$$

si ha:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) e^{i2\pi ft} df$$

dove

$$V(f) = \mathfrak{F}[v(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

si dice **trasformata di Fourier** di v



Spettro di un segnale non periodico

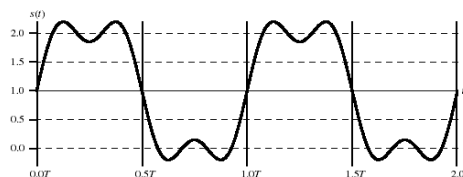
- ✓ La trasformata di Fourier è una funzione della frequenza, e rappresenta il contributo delle diverse frequenze al segnale
 - ⇒ in modo analogo ai **coefficienti della serie di Fourier** per i segnali periodici, che definiscono il contributo delle diverse armoniche alla ampiezza del segnale
- ✓ Lo spettro di un segnale non periodico è continuo, cioè tutte le frequenze contribuiscono alla ampiezza del segnale
 - ⇒ a differenza dello spettro di un segnale periodico, che è costituito da un insieme discreto di frequenze (le armoniche)



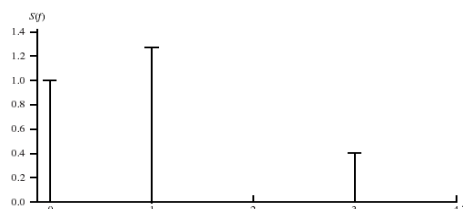
Rappresentazione spettrale di un segnale

21

- ✓ Il grafico delle **ampiezze** rispetto alle **frequenze** di cui è composto il nostro segnale si chiama **rappresentazione spettrale**
- ✓ Le **righe** della rappresentazione spettrale mostrano il **contributo** alla **ampiezza** del segnale dovuto alle **relative frequenze**
- ✓ Se il segnale ha un **valore medio non nullo** (cioè il coefficiente **a0** non è nullo) il segnale ha una **componente continua** (a frequenza nulla)



$$(a) s(t) = 1 + (4/\pi) [\sin(2\pi f t) + (1/3) \sin(2\pi(3f)t)]$$



(b) S(f)

R. Cusani, F. Cuomo: Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza, Marzo 2010



Spettri continui e discreti

22

- ✓ Una funzione **periodica** è esprimibile come **somma** di funzioni sinusoidali a frequenze che sono **multipli interi** della frequenza del segnale, quindi ha uno **spettro discreto**, cioè costituito da un insieme discreto di frequenze
- ✓ Una funzione **non periodica** è esprimibile come **integrale** di funzioni sinusoidali; le sue componenti possono avere **qualsiasi frequenza**, quindi avrà uno **spettro continuo**

R. Cusani, F. Cuomo: Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza, Marzo 2010



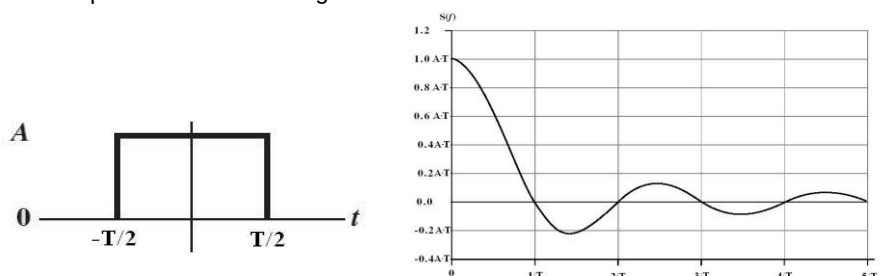
Esempio di spettro continuo

23

- ✓ Il segnale di **impulso quadro** di **ampiezza A** e **periodo T** ha per trasformata di Fourier la funzione:

$$S(f) = AT \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

il cui spettro è mostrato in figura



R. Cusani, F. Cuomo: Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza, Marzo 2010



Potenza di un segnale

24

- ✓ Si definisce **potenza media** del segnale periodico la quantità:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

- ✓ Si può dimostrare che la **potenza media** del segnale **periodico** è data da (teorema di **Parseval**):

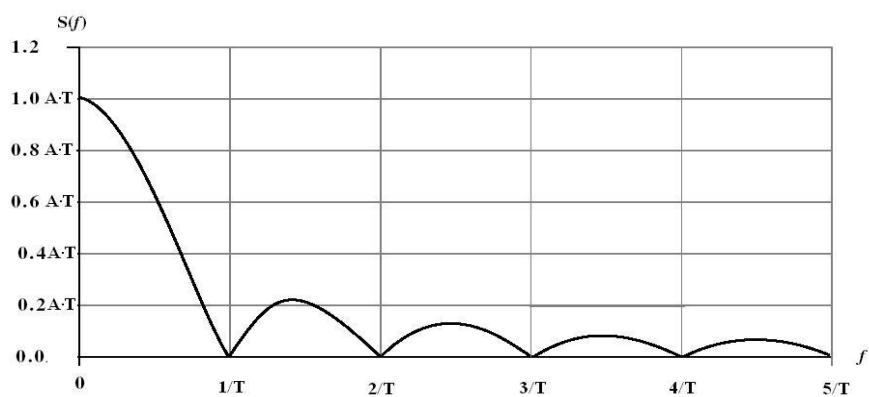
$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

- ✓ Spesso la **rappresentazione spettrale** viene fatta graficando il **modulo** dei coefficienti di Fourier dello sviluppo, evidenziando il **contributo** alla potenza del segnale dovuto alle **diverse armoniche**
- ✓ Al limite per $n \rightarrow \infty$ il contributo alla potenza delle armoniche **tende a zero** (altrimenti la potenza sarebbe infinita) quindi i contributi principali vengono dalle armoniche più basse

R. Cusani, F. Cuomo: Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza, Marzo 2010



Spettro dei contributi alla potenza



R. Cusani, F. Cuomo: *Telecomunicazioni - Strato fisico: i segnali nel tempo e nella frequenza*, Marzo 2010